قسمت اول:

تنش

مفهوم تعادل مکانیکی: صفر شدن برایند نیروها و گشتاورهای وارد بر سیستم (ماده یا قسمتی از ماده)

ممکن است کل ماده و یا قسمتی از آن یا یک نقطه بررسی شود. وقتی برایند نیروها و گشتاورها صفر شود (نیروی خنثی نشده داخل ماده یا بین ماده و محیط اطراف آن وجود نداشته باشد) تعادل برقرار است.

اصل تعادل: اگر جسمی در حال تعادل باشد، تمام اجزای آن در حال تعادل هستند.

تعادل می‌تواند استاتیکی یا دینامیکی باشد.

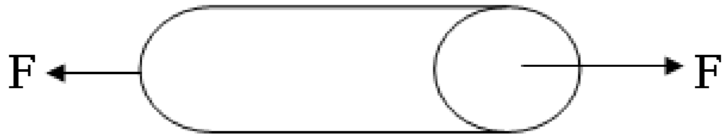
- **تعادل استاتیکی:** قطعه کاملاً ساکن و برایند نیروهای وارد بر آن صفر و برایند گشتاورها نیز صفر شود.

$$\sum M = 0 \qquad , \qquad \sum F = 0$$

- **تعادل دینامیکی:** برایند نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم برابر با صفر ولی جسم با یک سرعت ثابت در حال حرکت باشد.

مفهوم تنش (Stress): حاصل تقسیم نیرو بر سطح (نیروی اعمال شده بر واحد سطح)

الف) تنش متوسط (میانگین): فرض کنید می‌خواهیم تنش در سطح مقطع میله زیر را با مساحت A که تحت نیروی تک‌محوره F قرار گرفته است، محاسبه کنیم:



$$F = \int \sigma dA$$

σ: تنش عمود بر سطح مقطع میله

A: سطح مقطع میله

با فرض یکنواخت بودن توزیع تنش در قسمت‌های مختلف سطح A، می‌توان σ را ثابت فرض کرد، در نتیجه:

$$F = \int \sigma dA = \sigma \int dA = \sigma A \qquad \Longrightarrow \sigma = \frac{F}{A}$$

از آنجا که معمولاً توزیع تنش در سطح A یکنواخت نیست، معادله بالا نشان دهنده تنش میانگین است.

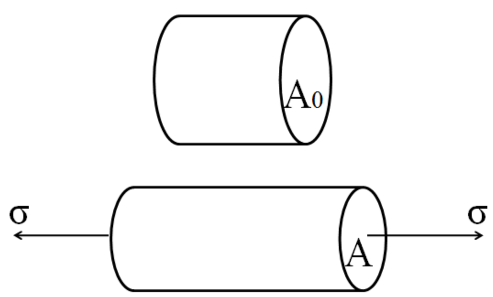
برای اینکه تنش یکنواخت باشد، باید کرنش تمام اجزای طولی میله مساوی و نسبت بین تنش و کرنش هر جزء برابر باشد.

با کشیدن میله و افزایش طول آن، سطح مقطع آن کاهش می‌یابد. اگر در محاسبه تنش، سطح مقطع اولیه جسم در رابطه قرار داده شود تنش مهندسی و اگر سطح مقطع لحظه‌ای قرار داده شود، تنش حقیقی به دست می‌آید:

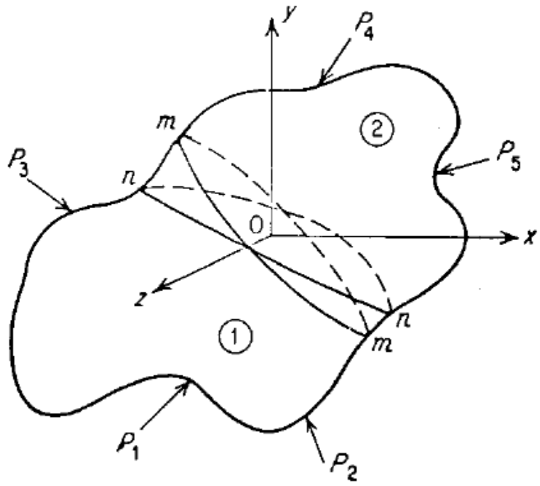
تنش مهندسی (Engineering stress) $\qquad S = \frac{F}{A_0}$

تنش حقیقی (True stress) $\qquad \sigma = \frac{F}{A}$

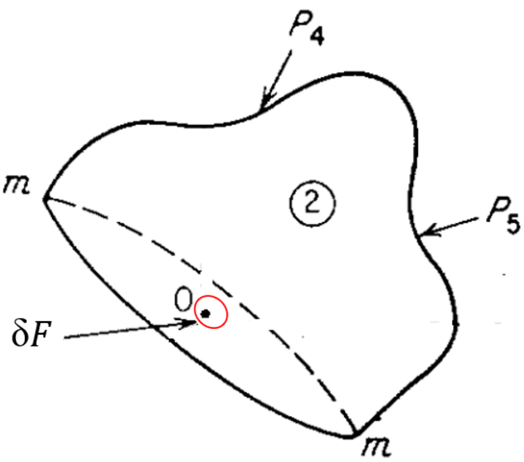
A_0: سطح مقطع اولیه $\qquad$ A: سطح مقطع لحظه‌ای



ب) تنش در یک نقطه از سطح: جسمی به شکل روبرو و در حالت تعادل و تحت نیروهای خارجی در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم میزان تنش در نقطه O واقع در صفحه mm را محاسبه کنیم:



برای این کار، قطعه را در سطح mm برش می‌زنیم و قسمت (۱) را کنار گذاشته و (۲) را نگه می‌داریم.



به تک‌تک نقاط صفحه mm همان نیروهایی اعمال می‌شود که از قسمت (۱) در آن نقطه به قسمت (۲) وارد می‌شود.

حول نقطه O، سطح کوچک δA را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم به این سطح نیروی معادل با δF از قطعه (۱) اعمال می‌شده است.

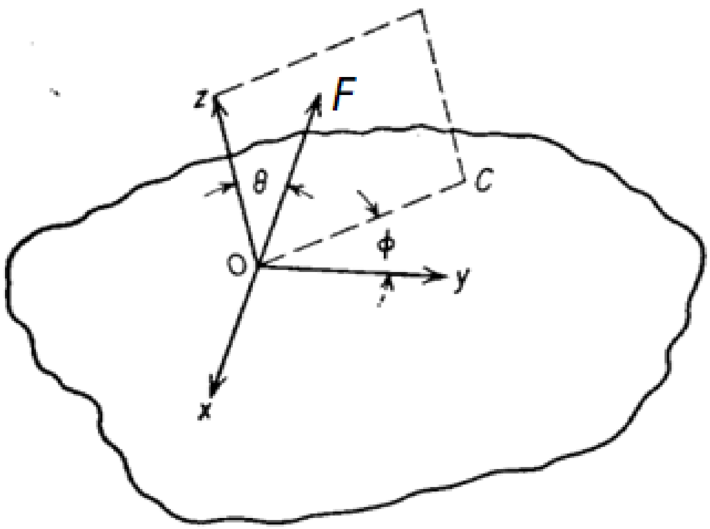
اگر سطح δA به تدریج کم شده و به سمت صفر میل کند، حد نسبت $\frac{\delta F}{\delta A}$، تنش وارد بر نقطه O در صفحه mm از قسمت (۲) از جسم است:

$$\sigma = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta F}{\delta A}$$

تنش در جهت نیروی وارده بر نقطه، δF بوده و با δA زاویه اختیاری می سازد. به طور کلی همیشه تنش در راستای نیرو بوده و با سطح زاویه اختیاری می‌سازد.

کار کردن با تنش با زاویه اختیاری مشکل است. در نتیجه تنش کل وارد شده به دو مؤلفه تجزیه می‌شود. یک تنش عمودی یا نرمال (σ) که عمود بر سطح است و یک تنش برشی (τ) موازی یا سطح.

در فضای سه‌بعدی و مختصات کارتزین (محورهای z,y,x متعادل) مؤلفه‌های تنش به صورت زیر تعریف می‌شوند:



θ: زاویه نیروی P با محور z (عمود بر سطح)

$\emptyset$: زاویه تصویر نیروی F در صفحه xy با محور y

تنش عمود بر سطح در راستای محور z $\qquad \sigma = \frac{F}{A} cos\,\theta$

تنش برشی کل $\qquad \tau_{tot} = \frac{F}{A} sin\,\theta$

تنش برشی در جهت x $\qquad \tau_1 = \frac{F}{A} sin\,\theta\, sin\,\emptyset$

تنش برشی در جهت y $\qquad \tau_2 = \frac{F}{A} sin\,\theta\, cos\,\emptyset$

واحدهای تنش:

واحد تنش در *SI* ، پاسکال است *(Pa)*: $1Pa = 1\frac{N}{m^2}\ (\frac{\text{نیوتن}}{\text{مربع متر}})$

در کارهای مهندسی به دلیل بزرگ بودن مقادیر تنش برحسب پاسکال، از واحد مگاپاسکال *(MPa)* استفاده می‌شود:

$$1MPa = 10^6Pa = 1\frac{N}{mm^2}$$

یک واحد دیگر در *Imperial system* ، پوند بر اینچ مربع یا *psi (Pound per square inch)* است.

پوند *(lb)* واحد نیرو $1psi = 1\frac{lbF}{inch^2}$

اینچ *(Inch)* واحد طول

$1MPa\ \approx 145psi$

$1lbF\ \approx 4.46N$

$1inch = 2.54\ \ cm$

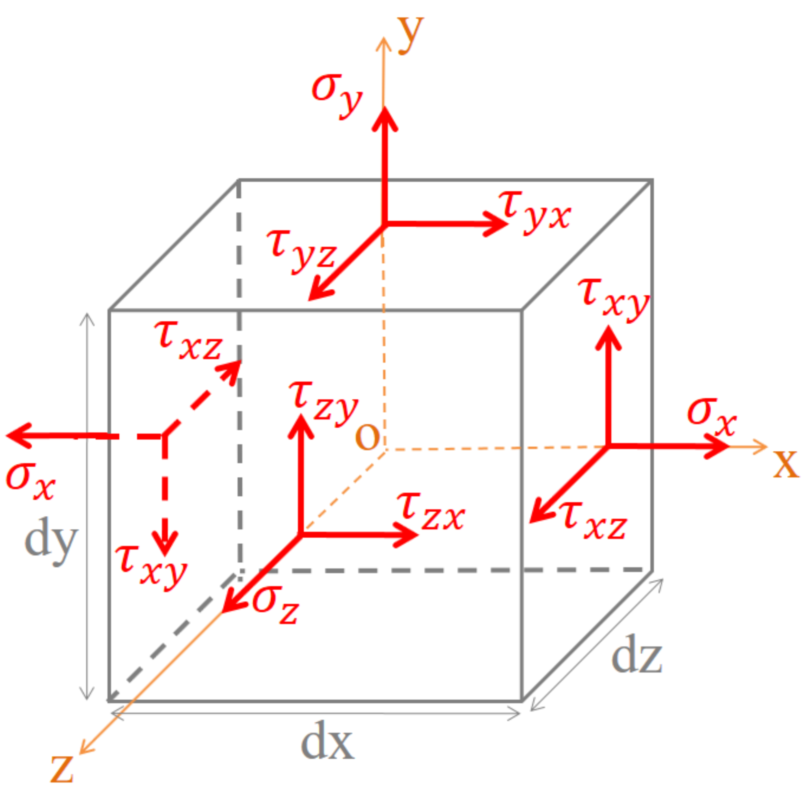
بعضی مواقع در *Imperial system* از *Ksi* که هزار *psi* است استفاده می‌کنند. چون اعداد کوچک‌تر می‌شوند.

$1Ksi = 1000psi$

Ksi=Kilo Pound per square inch

تشریح تنش در یک نقطه:

نقطه‌ای مادی را درون یک مکعب مستطیل المانی به ابعاد dz , dy , dx قرار می‌دهیم:



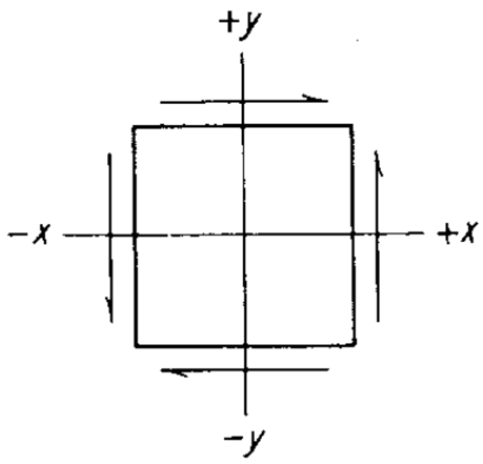
روی هروجه المان یک تنش با زاویه دلخواه وارد می‌شود که می‌توان آن را به مؤلفه‌های عمود و برشی تقسیم کرد:

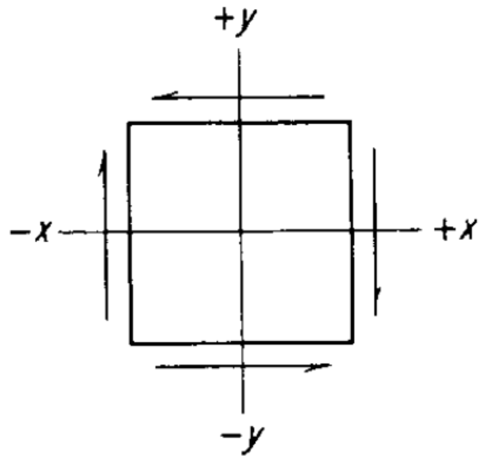
$\sigma_z . \sigma_y . \sigma_x$ ← مؤلفه‌های تنش عمود بر سطوح. اندیس هر یک نشان دهنده جهت اعمال تنش است. طبق قرارداد، تنش کششی مثبت و تنش فشاری منفی است.

$\tau_{zy} . \tau_{yz} . \tau_{zx} . \tau_{xz} . \tau_{yx} . \tau_{xy}$ ← مؤلفه‌های تنش برشی و موازی با سطح. تنش‌های برشی دو اندیس دارند که اولی نشان دهنده صفحه اعمال تنش و دومی نشان دهنده جهت اعمال تنش است. به عنوان مثال، τ_{xy} روی صفحه عمود بر محور x و در جهت y اعمال می‌شود.

فرضیات: تعادل استاتیکی داشته باشیم. از تغییرات تنش در طول ابعاد المان صرفنظر شود.

قرارداد علامت تنش‌های برشی: اگر تنش برشی روی وجه مثبت المان و در جهت مثبت محورها یا در وجه منفی المان و در جهت منفی محور باشد، مثبت در نظر گرفته می‌شود (شکل سمت چپ). در حالت برعکس این دو حالت منفی در نظر گرفته می‌شود (شکل سمت راست).





۹ مؤلفه تنش برای نشان دادن حالت تنش در یک نقطه را به صورت یک تنسور تنش به یکی از شکل‌های زیر نمایش می‌دهند:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_x \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \sigma_y \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} \sigma_{xy} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} \sigma_{yy} \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} \sigma_{yz} \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

بنابراین برای مشخص کردن حالت تنش در یک نقطه باید ۹ کمیت مشخص شوند.

با توجه به اینکه ماده در حالت تعادل استاتیکی است و با فرض اینکه بتوان از تغییرات تنش در راستای وجوه مختلف المان چشم‌پوشی کرد:

جمع نیروها در راستای مختلف برابر با صفر است . $\sum \vec{F} = 0$

جمع گشتاور نیروها حول محورهای مختلف صفر است. $\sum \vec{M} = 0$

به عنوان مثال $\sum \overrightarrow{M_z} = 0 \implies (\tau_{xy}\, dzdy)dx - (\tau_{yx}\, dxdz)dy = 0$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

به همین ترتیب: $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ و $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

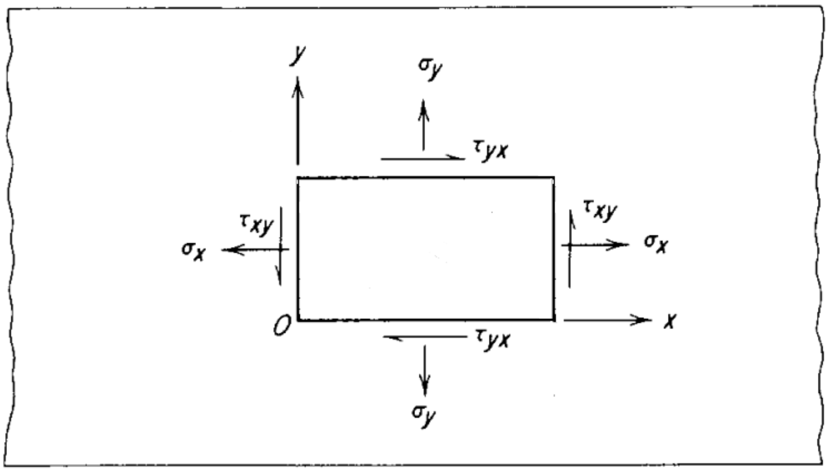
در نتیجه برای تعیین حالت تنش در یک نقطه فقط به ۶ مقدار تنش نیاز است. (در حالت تعادل استاتیکی)

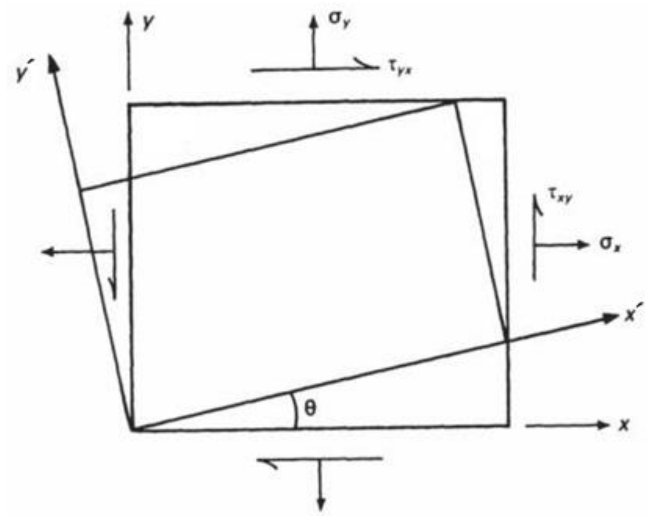
روابط تبدیل تنش:

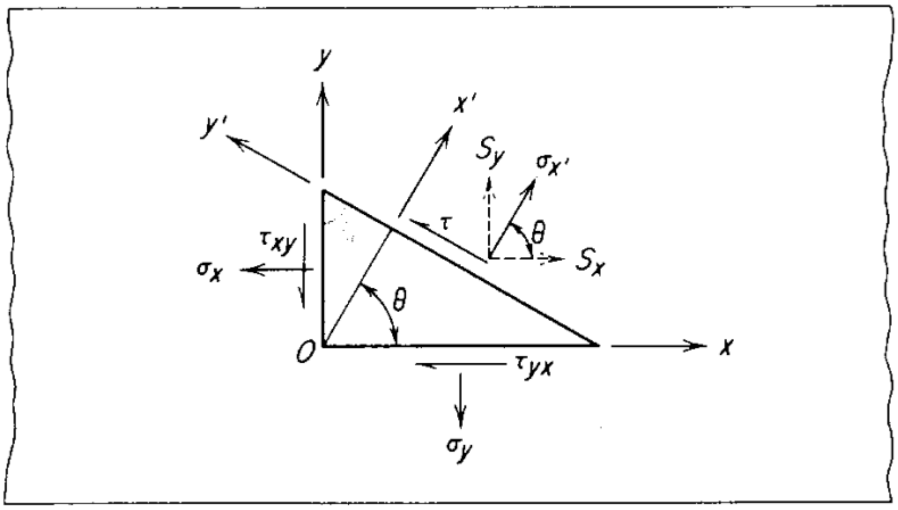
الف) حالت اول- تنش در دو بعد (تنش صفحه‌ای یا تنش مسطح)

در این حالت، تنش به صورت دوبعدی است. یعنی سیستم تنش شامل دو تنش عمودی و یک تنش برشی است. این حالت زمانی پیش می‌آید که یکی از ابعاد جسم در مقایسه با دو بعد دیگر بسیار کوچک باشد. در این حالت تنش عمود در راستای بعد کوچک‌تر اعمال نخواهد شد. به عنوان مثال در ورق بسیار نازک که سطح آن بارگذاری شده، تنش عمود در راستای ضخامت ورق برابر صفر در نظر گرفته شده و قابل چشم‌پوشی است.

مطابق شکل، ورق نازکی را در نظر می‌گیریم که ضخامت آن عمود بر صفحه کاغذ است. در این صورت، حالت تنش صفحه‌ای وجود دارد. می‌خواهیم حالت تنش در نقطه O را تعیین کنیم. یعنی مؤلفه‌های تنش را در این نقطه برای هر جهتی از محورها که از این نقطه می‌گذرد، تعیین کنیم. به همین منظور صفحه شیب‌داری عمود بر صفحه کاغذ طوری در نظر گرفته می‌شود که خط عمود بر این صفحه با محور x زاویه θ بسازد. عمود بر این صفحه را جهت x' و جهت واقع در صفحه شیب‌دار را y' می‌نامیم. در حقیقت محورهای x و y را با چرخش تحت زاویه دلخواه θ، به محورهای x' و y' منتقل می‌کنیم.







A: مساحت سطح شیب‌دار

$A\ cos\theta$: مساحت سطح جانب روی محور y

$A\ sin\theta$: مساحت سطح جانب روی محور x

S_x, S_y: مؤلفه‌های تنش کل وارد بر سطح شیب‌دار در جهت x و y

فرض می‌کنیم فاصله سطح شیب‌دار از نقطه O بسیار کم و بتوان از تغییرات تنش در این فواصل صرف‌نظر کرد.

جمع نیروها در جهت x $\quad S_xA = \sigma_x A cos\theta + \tau_{yx} A sin\theta$

جمع نیروها در جهت y $\quad S_yA = \sigma_y A sin\theta + \tau_{xy} A cos\theta$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \Longrightarrow \begin{cases} S_x = \sigma_x cos\theta + \tau_{xy} sin\theta \\ S_y = \sigma_y sin\theta + \tau_{xy} cos\theta \end{cases}$$

مولفه S_x در راستای x': $\quad S_{xN} = S_x cos\theta$

مولفه S_y در راستای x': $\quad S_{yN} = S_y sin\theta$

$$\Longrightarrow \sigma_{\acute{x}} = S_{xN} + S_{yN} = S_x cos\theta + S_y sin\theta$$

$$\Longrightarrow \sigma_{\acute{x}} = \sigma_x cos^2\theta + \sigma_y sin^2\theta + 2\tau_{xy} sin\theta cos\theta \qquad (1)$$

$$\tau_{\acute{x}\acute{y}} = S_y cos\theta - S_x sin\theta$$

$$\tau_{\acute{x}\acute{y}} = \tau_{xy}(cos^2\theta - sin^2\theta) + (\sigma_y - \sigma_x) sin\theta cos\theta \qquad (2)$$

اگر به میزان $\frac{\pi}{2}$ به زاویه θ در رابطه $\sigma_{\acute{x}}$ اضافه کنیم (رابطه ۱)، $\sigma_{\acute{y}}$ بدست می‌آید:

$$\theta \longrightarrow \theta + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sigma_{\acute{y}}$$

$$= \sigma_x cos^2(\theta + \frac{\pi}{2}) + \sigma_y sin^2(\theta + \frac{\pi}{2}) + 2\tau_{xy} sin(\theta + \frac{\pi}{2}) cos(\theta + \frac{\pi}{2})$$

$$\sigma_{\acute{y}} = \sigma_x sin^2\theta + \sigma_y cos^2\theta - 2\tau_{xy} sin\theta cos\theta \qquad (3)$$

می‌توان عبارات را ساده‌تر کرد:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\sigma_{\acute{x}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (4)$$

$$\sigma_{\acute{y}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (5)$$

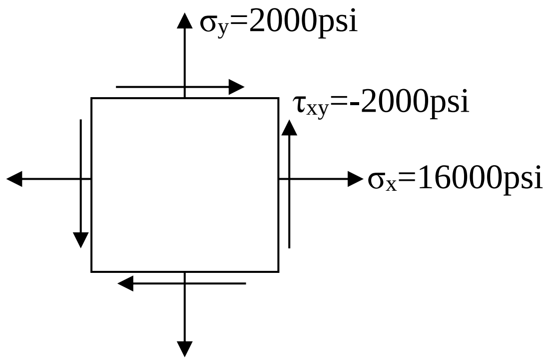
$$\tau_{\acute{x}\acute{y}} = \frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (6)$$

نکته: روابط بالا را معادلات تبدیل تنش گویند. با داشتن تنش‌ها در مختصات x و y، می‌توان تنش‌ها را در مختصات $\acute{x}$ و $\acute{y}$ محاسبه کرد.

نکته: از ۴ و ۵ داریم $\sigma_{\acute{x}} + \sigma_{\acute{y}} = \sigma_x + \sigma_y$ یعنی مجموع تنش‌های نرمال به زاویه بستگی ندارد و همیشه مقداری است ثابت.

تمرین: مقادیر تنش‌های σ_x و σ_y و τ_{xy} داده شده است. با چرخش محورها به اندازه:

الف) 45^{o}، ب) 90^{o}، مقادیر $\sigma_{\acute{x}}$ و $\sigma_{\acute{y}}$ و $\tau_{\acute{x}\acute{y}}$ را محاسبه کنید.



تنش‌های اصلی و جهات آنها:

زوایایی وجود دارد که در آنها تنش عمود بر صفحات، حداکثر و حداقل مقادیر را داشته و در آن زوایا تنش برشی صفر است. به صفحات مربوطه، صفحات اصلی و تنش های عمود روی این صفحات را تنش‌های اصلی گویند.

تنش‌های اصلی در دو بعد را با σ_1 و σ_2 نشان می‌دهند که طبق قرارداد همیشه $\sigma_1 \geq \sigma_2$.

همان‌طور که بعداً خواهیم دید، در حالت کلی سه‌بعدی، سه تنش اصلی داریم که با σ_1 و σ_2 و σ_3 نمایش داده می‌شوند و طبق قرارداد: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

تمرین: نشان دهید تنش‌های عمود حداکثر و حداقل، (تنش‌های اصلی) در حالت دو بعدی از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2\right]^{1/2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \left[(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2\right]^{1/2}$$

جواب تمرین: در صفحه اصلی، تنش برشی برابر با صفر است.

$$\tau_{\acute{x}\acute{y}} = 0 \implies \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} sin2\theta + \tau_{xy} cos2\theta = 0 \implies tg2\theta_n = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

معادله بالا دو ریشه دارد که نشان‌دهنده $tg(2\theta) = tg(\pi + 2\theta) \implies \theta_1 \quad , \theta_2 = \theta_1 + n\frac{\pi}{2}$ دو صفحه متعامدند

$$sin2\theta_n = \pm \frac{\tau_{xy}}{\left[(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2\right]^{1/2}}$$

$$cos2\theta_n = \pm \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\left[(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2\right]^{1/2}}$$

با قرار دادن $Sin2\theta$ و $cos2\theta$ در معادله $\sigma_{\acute{x}}$، مقادیر تنش‌های اصلی مطابق آنچه در تمرین گفته شده به‌دست می‌آیند.

■

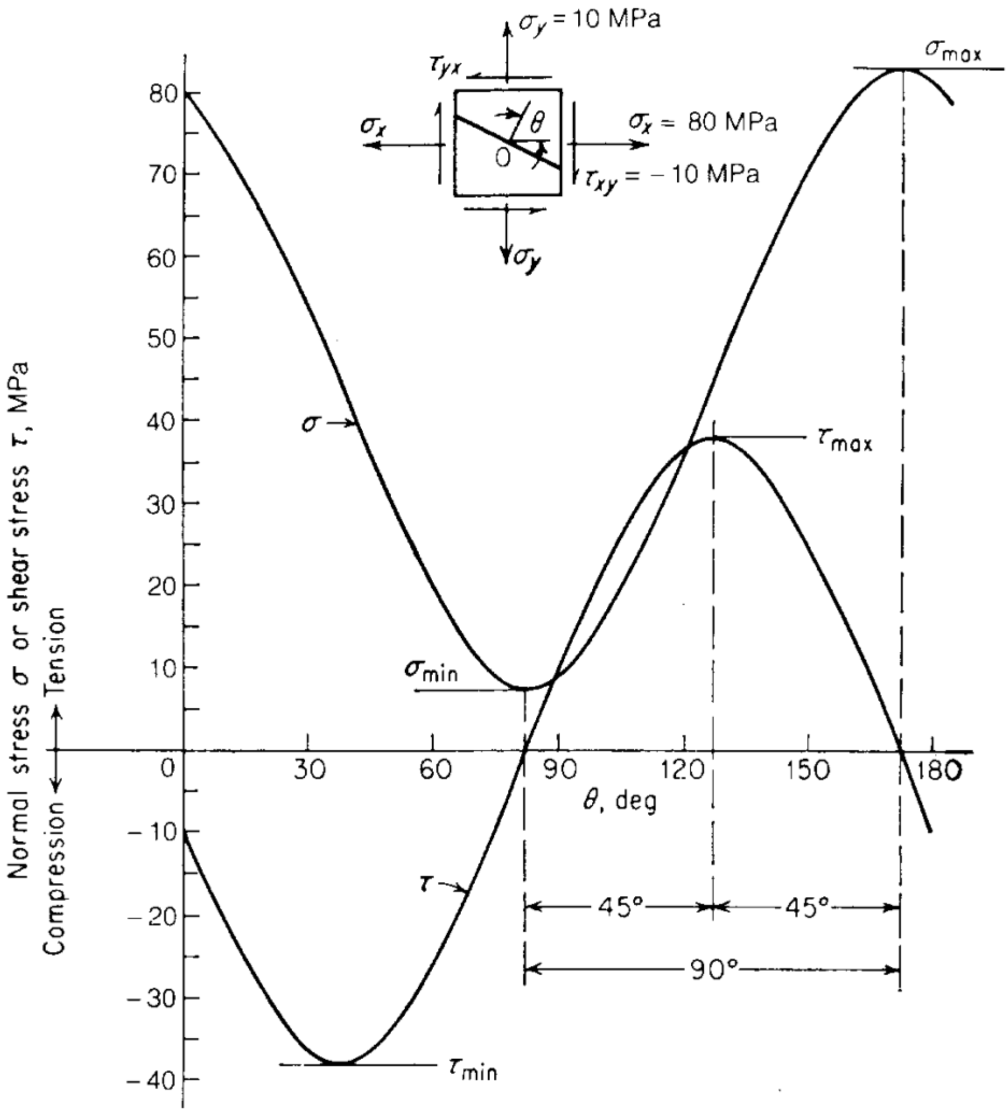
تنش برشی حداکثر و جهت آن:

$$\frac{d\tau_{\acute{x}\acute{y}}}{d\theta} = 0 \implies (\sigma_y - \sigma_x)cos2\theta - 2\,\tau_{xy}\,sin2\theta = 0 \implies tg2\theta_s = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}$$

مقایسه زوایای $2\theta_n$ و $2\theta_s$ نشان می‌دهد که این دو زاویه نسبت به هم ۹۰ درجه اختلاف فاز داشته و یا θ_n و θ_s با هم زاویه ۴۵ درجه دارند. با قرار دادن $2\theta_s$ در معادله $\tau_{\acute{x}\acute{y}}$ داریم:

$$\tau_{max} = \pm\left[(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2\right]^{1/2}$$

نمودار نمونه‌ای تغییرات تنش عمودی و تنش برشی برحسب θ برای $\sigma_y =$ و $\tau_{xy} = -10\ MPa$ و $\sigma_x = 80\ MPa$ و $10\ MPa$ در زیر رسم شده است.



نکات قابل توجه در نمودار:

- زاویه تنش برشی صفر معادل با حداکثر و حداقل تنش های عمودی است.
- اختلاف زاویه مقادیر حداکثر و حداقل تنش‌ها (عمودی و برشی)، 90^o است.
- تنش برشی حداکثر در نیمساز زاویه بین تنش‌های عمودی حداکثر و حداقل قرار داشته و با هر یک زاویه 45^o دارد.

دایره مور (در حالت دو بعدی تنش)

دایره مور، یک روش ترسیمی ساده و مفید برای نشان دادن حالت تنش در یک نقطه است.

داشتیم:

$$\sigma_{\acute{x}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos2\theta + \tau_{xy} sin2\theta$$

$$\tau_{\acute{x}\acute{y}} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} sin2\theta + \tau_{xy} cos2\theta$$

$$(\sigma_{\acute{x}} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2$$

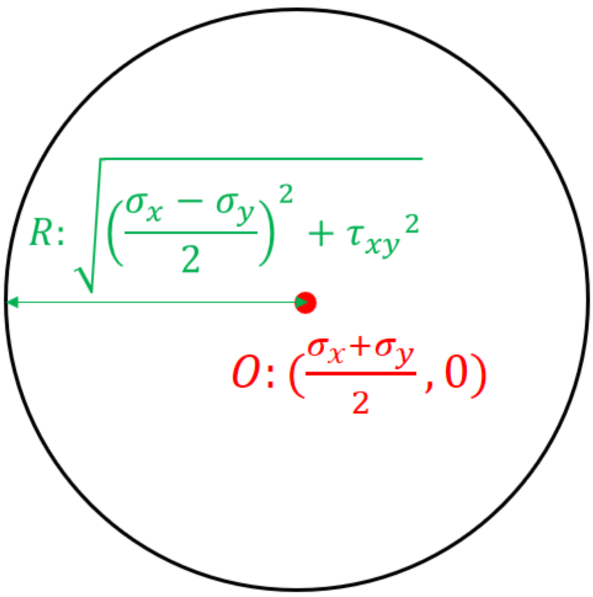
$$= (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 cos^2 2\theta + {\tau_{xy}}^2 sin^2 2\theta + (\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy} sin2\theta cos2\theta$$

$${\tau_{\acute{x}\acute{y}}}^2 = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 sin^2 2\theta + {\tau_{xy}}^2 cos^2 2\theta - (\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy} sin2\theta cos2\theta$$

$$\Longrightarrow (\sigma_{\acute{x}} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{\acute{x}\acute{y}}}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2$$

معادله اخیر شبیه به معادله یک دایره است: $(x-a)^2 + y^2 = R^2$

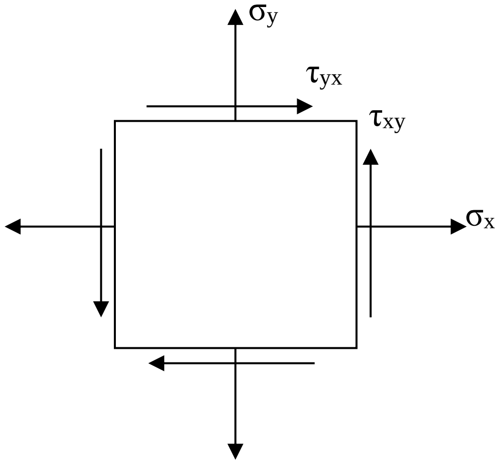
شعاع دایره $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2} = \tau_{max}$ مرکز دایره $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} . 0)$

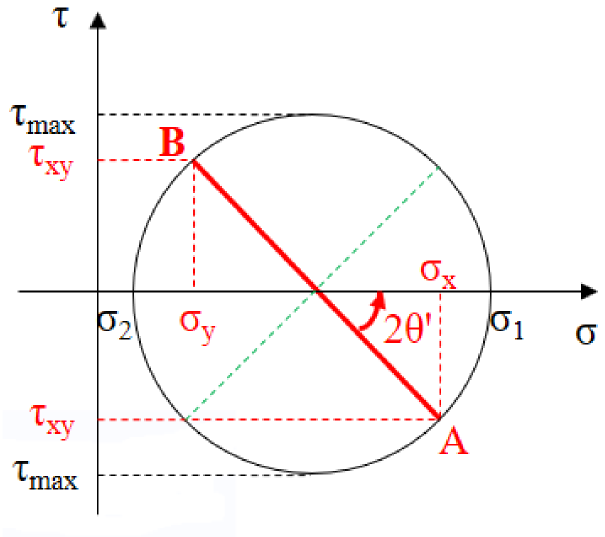


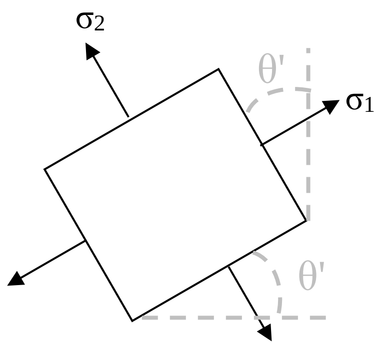
رسم دایره مور:

- تنش‌های عمودی روی محور افقی و تنش برشی روی محور عمودی نمایش داده می‌شوند. اگر مولفه‌های تنش در یک زاویه را داشته باشیم با استفاده از روابط بالا دایره مور را می‌کشیم که تنش در همه جهات را به ما می‌دهد.
- مولفه‌های تنش در یک زاویه مشخص به‌وسیله یکی از قطرهای دایره مشخص می‌شود. محل برخورد قطر با دایره مقادیر تنش را مشخص می‌کند.
- چرخش در دایره مور به اندازه زاویه ۲θ معادل با چرخش θ در المان فیزیکی است.
- تنش برشی ساعتگرد در دایره مور مثبت و تنش برشی پادساعتگرد منفی نمایش داده می‌شود.

همانطور که در شکل زیر مشاهده می‌شود با چرخش به اندازه $2\acute{\theta}$ در دایره مور به جهات با تنش برشی صفر یا جهاتی می‌رسیم که تنش‌های عمودی برابر با تنشهای اصلی می‌شوند. این بدان معناست که با چرخش المان فیزیکی به اندازه $\acute{\theta}$ به صفحات اصلی و تنش‌های اصلی می‌رسیم.

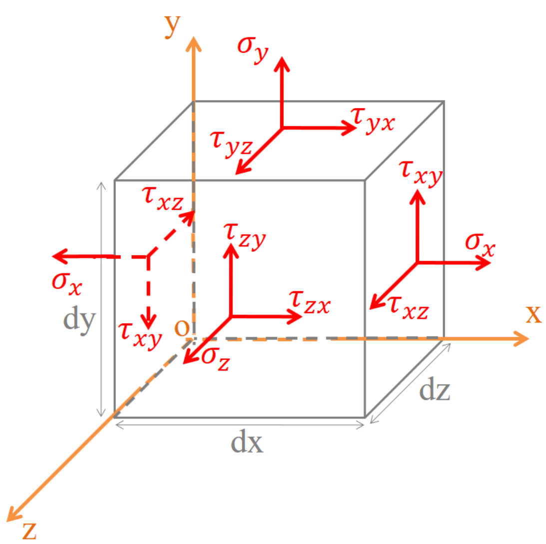


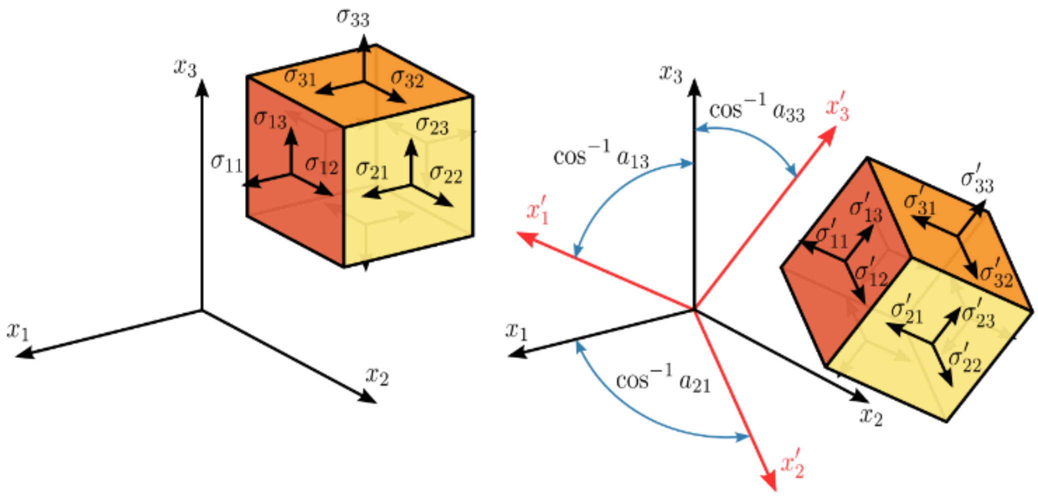


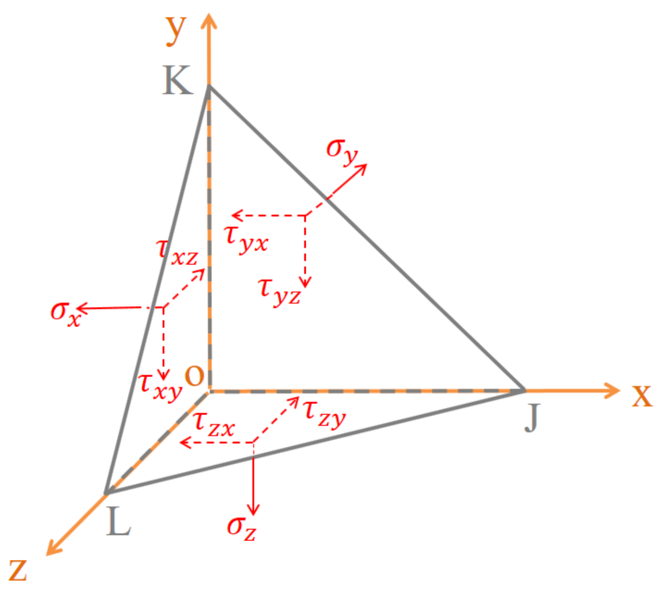


ب) حالت دوم- تنش در سه بعد (تعیین تنش در یک سطح قطع‌کننده المان):

در این حالت، در هر سه بعد به المان تنش وارد می‌شود. می‌خواهیم مقدار تنش وارد روی صفحه قطع‌کننده المان را به دست آوریم. قسمت اضافی از المان اولیه را بریده و فقط المان جدید را در نظر می‌گیریم.

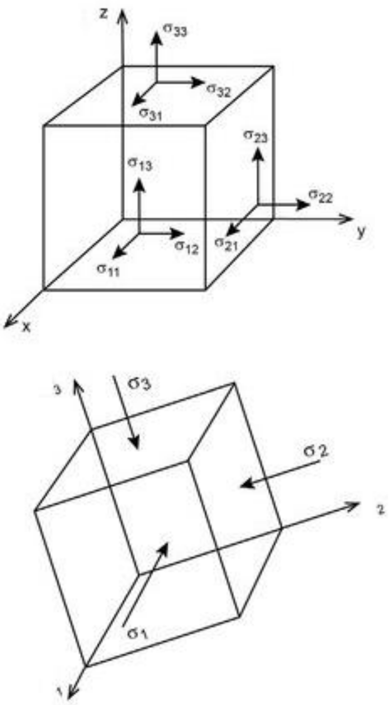


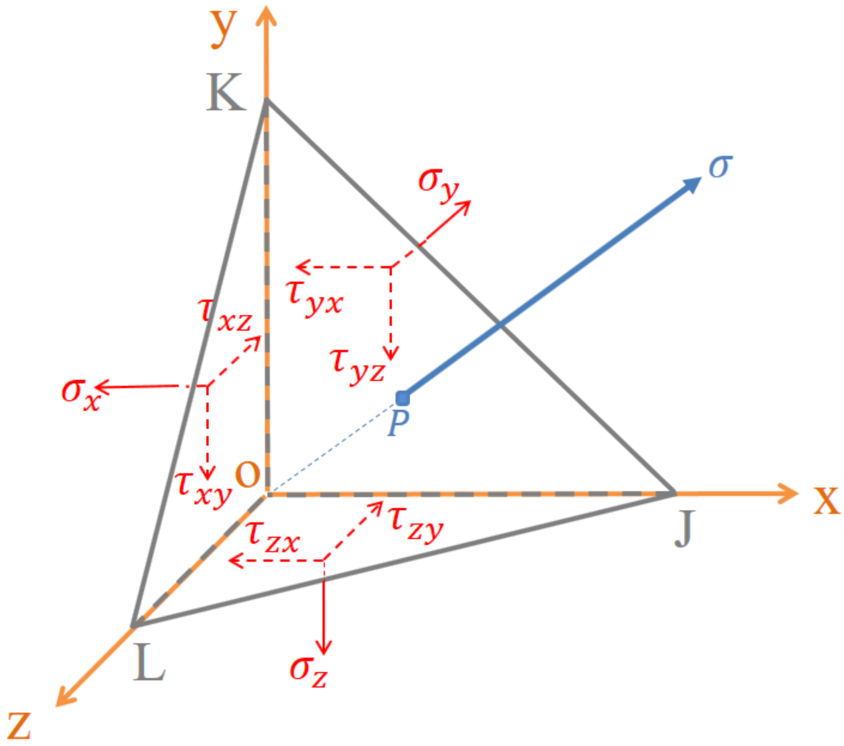




حالت اول صفحه شیب‌دار:

در حالت اول فرض می‌کنیم که صفحه JKL یک صفحه اصلی بوده و تنش وارد بر آن فقط یک تنش عمودی است (در این صفحه تنش برشی نداریم). این تنش اصلی در امتداد بردار عمود بر صفحه JKL از نقطه O قرار دارد (مطابق شکل).





یادآوری (هندسه):

- یک راستا در فضا توسط کسینوس‌های هادی آن راستا مشخص می‌شود. رابطه بین این کسینوس‌ها عبارت است از:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \qquad cos\alpha = l \quad . \quad cos\beta = m \quad . \quad cos\gamma = n$$

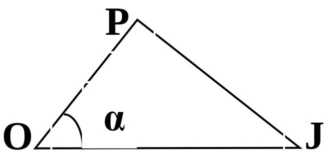
α و β و γ : زوایای بردار با محورهای x، y، z

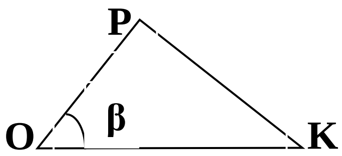
- یک صفحه در فضا می‌تواند توسط کسینوس‌های هادی بردار عمود بر آن صفحه مشخص شود.

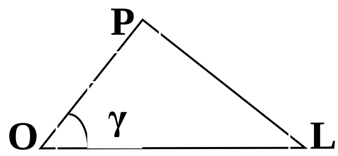
هدف ما یافتن میزان تنش روی صفحه JKL است. برای این کار مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

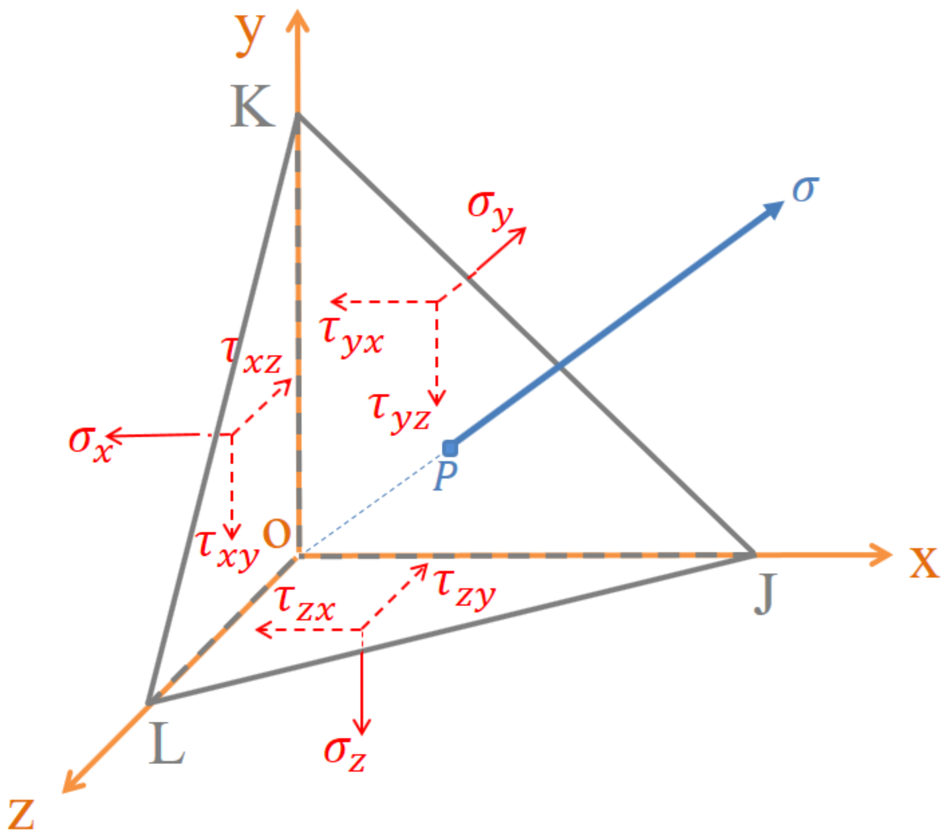
۱- تعیین وضعیت صفحه قطع کننده المان. این صفحه توسط کسینوس‌های هادی راستای عمود برآن مشخص می‌شود.

$$cos\alpha = \frac{OP}{OJ} = l \qquad cos\beta = \frac{OP}{OK} = m \qquad cos\gamma = \frac{OP}{OL} = n$$









۲- مساحت ۴ مثلث سازنده هرم را با حروف زیر نشان می‌دهیم:

$$\overset{\Delta}{JKL} = A \qquad \overset{\Delta}{OKL} = A_x \qquad \overset{\Delta}{OJL} = A_y \qquad \overset{\Delta}{OJK} = A_z$$

۳- تعیین ارتباط بین مساحت مثلث‌های سازنده هرم:

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} \times \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$V = \frac{1}{3} \times A \times OP = \frac{1}{3} \times A_x \times OJ \quad \Longrightarrow \; A_x = \frac{OP}{OJ} \times A = l \times A$$

به همین ترتیب:

$$A_y = m \times A$$

$$A_z = n \times A$$

۴- تعیین مؤلفه‌های σ در جهات x, y, z:

$$S_x = \sigma \times l \qquad S_y = \sigma \times m \qquad S_z = \sigma \times n$$

۵- با استفاده از روابط تعادل استاتیکی نیروها در راستای x , y , z (چون المان در حالت تعادل استاتیکی است) داریم:

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \Longrightarrow \; \sigma Al - \sigma_x Al - \tau_{yx}\, Am - \tau_{zx}\, An = 0$$

$$\Longrightarrow (\sigma - \sigma_x)l - \tau_{yx}\, m - \tau_{zx} n = 0 \qquad (1)$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0 \Longrightarrow -\tau_{xy} l + (\sigma - \sigma_y)m - \tau_{zy}\, n = 0 \; (2)$$

$$\sum \overrightarrow{F_z} = 0 \Longrightarrow -\tau_{xz} l - \tau_{yz} m + (\sigma - \sigma_z)n = 0 \quad (3)$$

سه معادله بالا، معادلات خطی همگن برحسب l , m , n هستند. چون l , m , n نمی‌توانند به طور هم‌زمان صفر شوند، جواب معادلات بالا با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ضرائب l , m , n به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} \sigma-\sigma_x & -\tau_{yx} & -\tau_{zx} \\ -\tau_{xy} & \sigma-\sigma_y & -\tau_{zy} \\ -\tau_{xz} & -\tau_{yz} & \sigma-\sigma_z \end{vmatrix} = 0$$

حاصل بسط دترمینان

$$\sigma^3-(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\sigma^2+(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_x\sigma_z-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{xz}^2)\sigma \\ -(\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{xz}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2)=0$$

سه ریشه معادله بالا، تنش‌های اصلی σ_1 و σ_2 و σ_3 را می‌دهند. طبق قرارداد: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

برای بدست آوردن جهت هریک از تنش‌های اصلی، مقدار آن تنش اصلی را در رابطه *(1)* تا *(3)* در بالا قرار داده و به همراه رابطه کمکی $l^2+m^2+n^2=1$ مقادیر l , m , n را بدست می‌آوریم.

معادله درجه ۳ ی بالا را به صورت خلاصه زیر نیز می‌نویسند:

$$\sigma^3-I_1\sigma^2+I_2\sigma-I_3=0$$

ضرائب I_1 , I_2 , I_3 را نامتغیرهای تنش می‌نامند. برای اینکه مقادیر تنش‌های اصلی ثابت هستند، سه ضریب I_1 , I_2 , I_3 در یک نقطه با تغییر جهت (تغییر محورهای مختصات) تغییر نمی‌کنند.

I_1 که اولین نامتغیر تنش است در حالت دو بعدی نیز مشاهده شد و نشان می‌دهد که مجموع تنش‌های عمودی با تغییر جهت تغییر نمی‌کند.

$$\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_{\acute{x}}+\sigma_{\acute{y}}+\sigma_{\acute{z}}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$$

مثال: مؤلفه‌های تنش در یک نقطه از جسمی به صورت ماتریس زیر داده شده است. تعیین کنید:

الف) مقادیر تنش‌های اصلی

ب) کسینوس‌های هادی بزرگ‌ترین تنش اصلی را

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}_{(MPa)}$$

جواب الف)

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 15 \qquad I_2 = 60 \qquad I_3 = 54$$

$$\sigma^3 - 15\sigma^2 + 60\sigma - 54 = 0$$

$$\sigma_1 = 9MPa \qquad \sigma_2 = 4.73MPa\, \sigma_3 = 1.27MPa$$

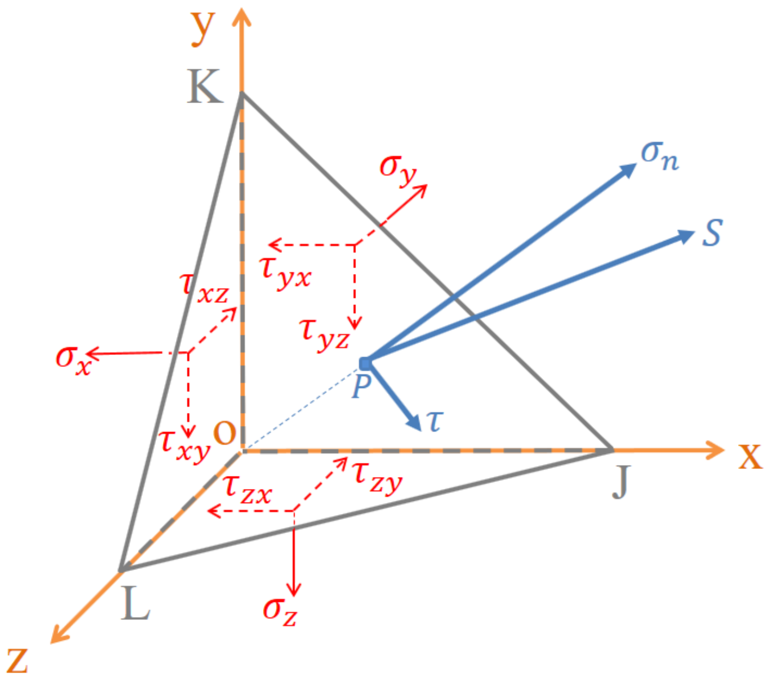
جواب ب)

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_x)l - \tau_{yx}\, m - \tau_{zx}\, n = 0 \\ -\tau_{xz}l + (\sigma_1 - \sigma_y)m - \tau_{zy}n = 0 \\ -\tau_{xz}l - \tau_{yz}m + (\sigma_1 - \sigma_z)n = 0 \\ \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5l - 2m - 3n = 0 \\ -2l + 3m - n = 0 \\ -3l - m + 4n = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow l\text{و}m\text{و}n = \sqrt{\frac{1}{3}} \Longrightarrow \alpha\text{و}\beta.\gamma = 54.74^\circ$$

حالت دوم صفحه شیب‌دار:

حالتی است که صفحه JKL صفحه اصلی نباشد. یعنی تنش اعمال شده به صفحه هم دارای مؤلفه عمودی و هم دارای مؤلفه برشی باشد.



$$S^2 = \sigma_n^2 + \tau^2$$

S: نقش کل وارد بر صفحه شیب‌دار

σ_n: مؤلفه عمود بر سطح شیب‌دار تنش S

τ: مؤلفه برشی S

از جمع کردن نیروها در جهات x , y , z داریم:

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \Longrightarrow \; S_x A = \sigma_x A l + \tau_{yx} A m + \tau_{zx} A n$$

$$S_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$
$$S_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n$$
$$S_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

تنش کل اعمال شده روی سطح شیبدار:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

محاسبه مؤلفه عمودی تنش: $\sigma_n = S_x l + S_y m + S_z n$ تنش عمودی در سطح

با جایگزینی S_x, S_y, S_z و با استفاده از $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} ln$$

محاسبه مؤلفه برشی تنش: $\tau^2 = S^2 - \sigma_n^2$

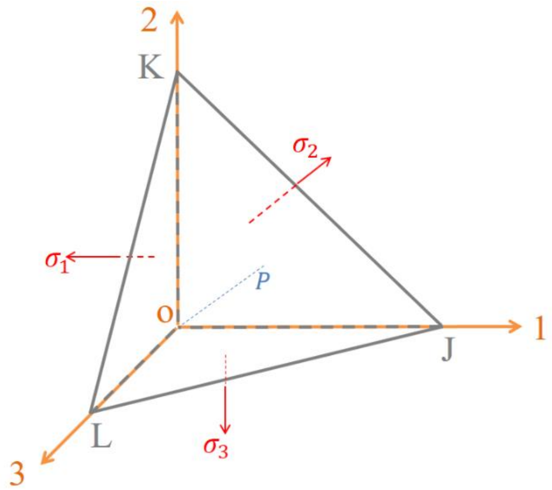
تنش‌های برشی حداکثر (تنش برشی اصلی):

محاسبه تنش‌های برشی و به‌خصوص محاسبه تنش‌های برشی اصلی و صفحات آن‌ها بسیار مهم است.

زیرا تنش برشی است که باعث تغییر شکل پلاستیکی ماده می‌شود.

رابطه τ برحسب تنش‌های اصلی σ_1 و σ_2 و σ_3 به صورت زیر است:

$$\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 l^2 n^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2$$



l, m, n در اینجا، کسینوس‌های جهت بین عمود بر صفحه شیب‌دار و محورهای اصلی است.

تنش‌های برشی حداکثر در صفحه‌ای واقع بر وسط زاویه دو صفحه تنش‌های اصلی اتفاق می‌افتند.

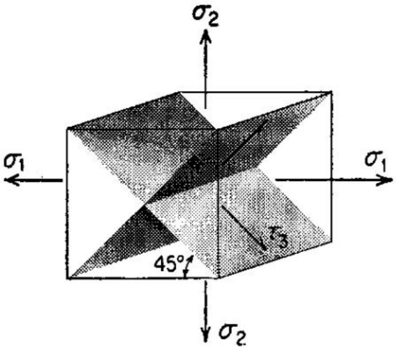
پس تغییرات تنش برشی در سه بعد، به شکلی است که در نیم‌ساز زاویه‌های بین تنش‌های اصلی حداکثر مقادیر خود را پیدا می‌کند، پس سه تنش برشی حداکثر داریم:

L	m	n	τ
0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$
$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$
$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

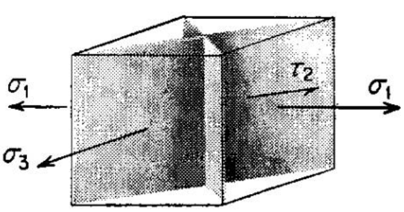
چون طبق قرار داد $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \Leftarrow$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

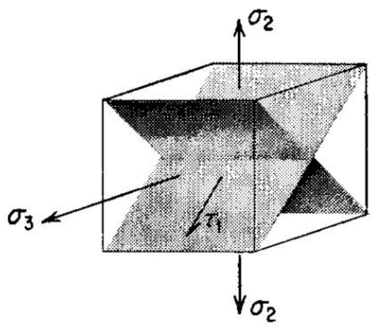
تنش برشی حداکثر در نظریه‌های تسلیم و عملیات شکل‌دادن فلزات نقش مهمی دارد.



$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$



$\tau_{max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

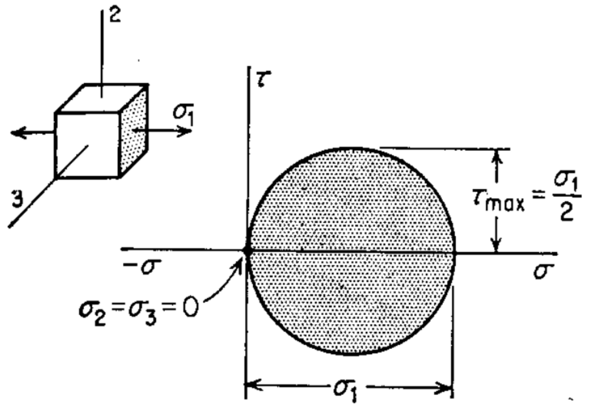


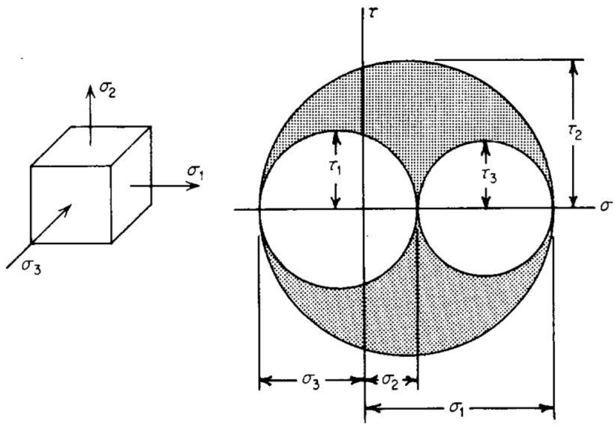
$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$

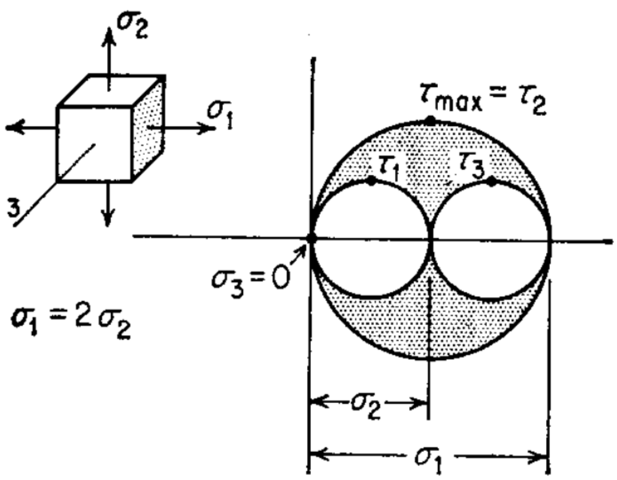
دایره مور در حالت تنش سه‌بعدی:

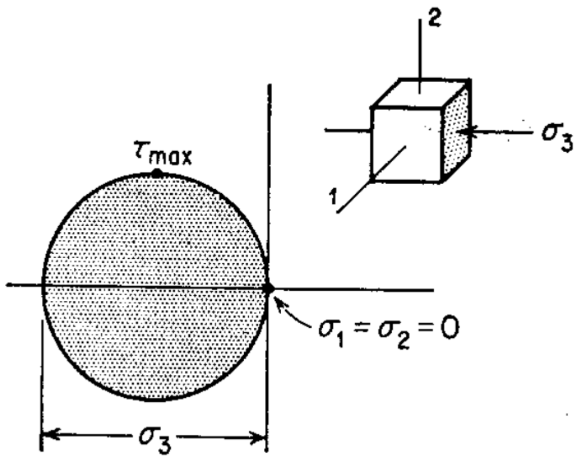
دایره مور در حالت سه‌بعدی را می‌توان با داشتن سه تنش اصلی کشید. شعاع دایره همان تنش برشی حداکثر است که از تنش‌های اصلی به‌دست می‌آید. تمام شرایط ممکن تنش نقطه، داخل ناحیه هاشور خورده بین دوایر واقع می‌شود.

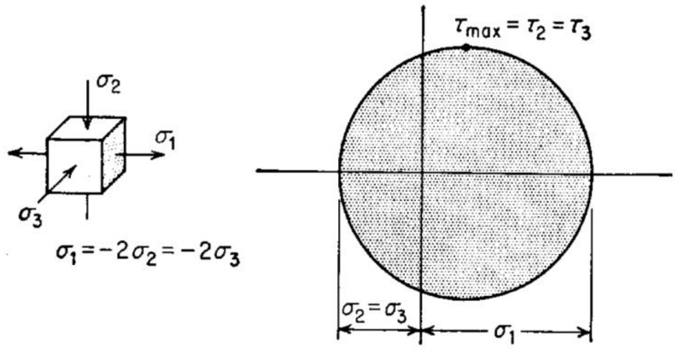
دایره مور در بعضی حالات خاص تنش‌ها:

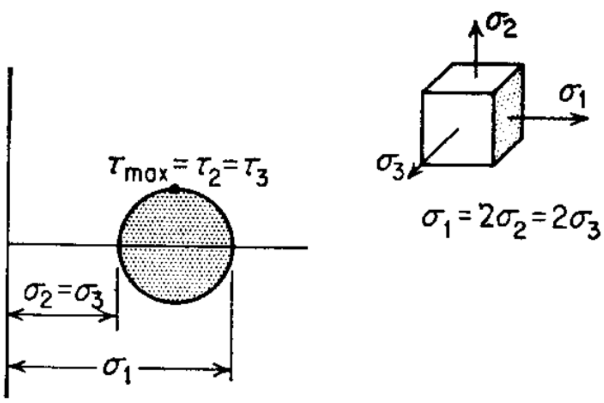












تعریف:

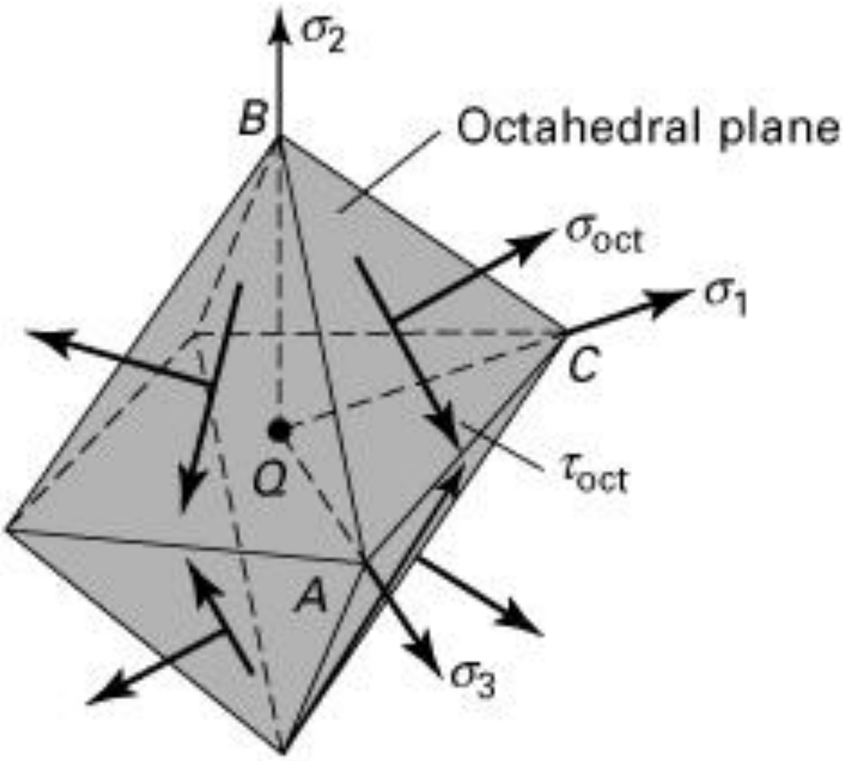
تنش هیدرواستاتیک: اگر هر سه تنش اصلی برابر باشند، تنش را تنش هیدرواستاتیک یا کروی گویند.

در این حالت دایره مور تبدیل به یک نقطه می‌شود. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

تنش استوانه‌ای: در این حالت، دو تنش از سه تنش اصلی با هم برابرند.

صفحات اکتاهدرال (Octahedral planes)

صفحاتی هستند که نرمال آنها با محورهای تنش‌های اصلی زوایای برابر می‌سازد.



$$l = m = n$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \qquad \Rightarrow 3l^2 = 1 \qquad l = m = n = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

l, m, n در اینجا، کسینوس‌های زوایای بین عمود بر صفحه شیب‌دار و محورهای اصلی است.

از قبل داشتیم، در حالت کلی:

$$\sigma_n = S_x l + S_y m + S_z n$$

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} ln$$

$$\tau = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 l^2 n^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2]^{\frac{1}{2}}$$

برای صفحات اکتاهدرال که با سه محور تنش‌های اصلی زوایای برابر می‌سازند:

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

$$\sigma_n = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m$$

$$\tau = \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}}$$

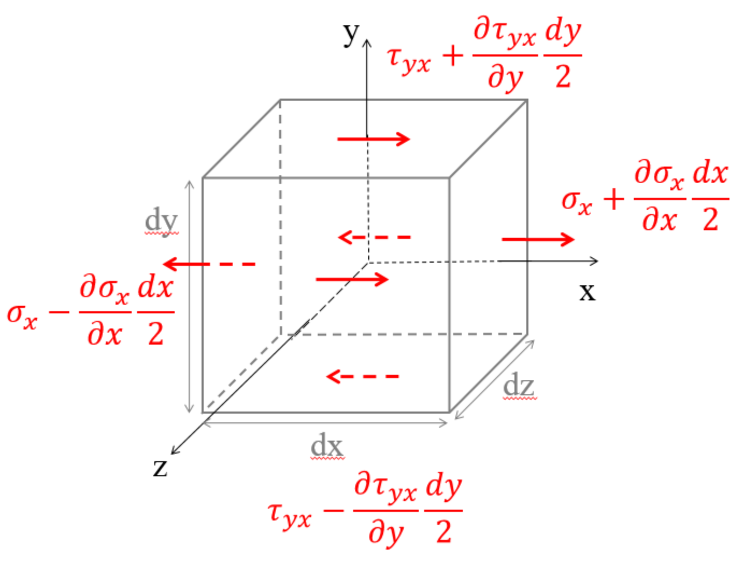
مثال: وضعیت تنش در نقطه‌ای از جسم به شکل مقابل می‌باشد. مطلوب است: الف) مقادیر تنش‌های اصلی، ب) تنش‌های برشی حداکثر، ج) تنش‌های نرمال اعمالی بر صفحات اکتاهدرال، د) تنش‌های برشی اعمالی بر صفحات اکتاهدرال، ه) مقادیر تنش‌های نرمال روی صفحات با تنش برشی حداکثر.

$$\sigma_{ij}: \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \frac{kgf}{mm^2}$$

■

معادلات تعادل:

اگر به جای تنش همگن درون المان، تغییرات تنش را در طول ابعاد المان در نظر بگیریم:



فرضیات ما: تعادل استاتیکی، خطی بودن تغییرات تنش

در حقیقت مبدأ مختصات را مرکز مکعب در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\sum F_x = 0: \quad \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz - \left(\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dxdz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dxdz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dxdy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dxdy = 0$$

or
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \qquad (۱)$$

به همین ترتیب در جهات دیگر:

$$\sum F_y = 0: \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \qquad (۲)$$

$$\sum F_z = 0: \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \qquad (۳)$$

اگر تنش داخلی داشته باشیم:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0$$

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+Z=0$$

تنش‌های هیدرواستاتیک و دویاتوریک (انحرافی) (Hydrostatic and Deviatoric Stresses)

تنش‌های وارد شده به یک نقطه از جسم را می‌توان به دو بخش هیدرواستاتیک و دویاتوریک تقسیم کرد. مؤلفه هیدرواستاتیک بر تغییرشکل اثری نداشته در حالی که مؤلفه دویاتوریک باعث تغییرشکل در جسم می‌شود.

$$\begin{bmatrix} State\ of \\ \square \\ stress \\ \square \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Hydrostatic \\ \square \\ state\ of\ stress \\ \square \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} Deviatoric \\ \square \\ state\ of\ stress \\ \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix}$$

تنش هیدرواستاتیک به طور ساده میانگین سه تنش نرمال تانسور تنش است:

$$\sigma_{hdr}=\sigma_m=\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3}=\frac{1}{3}I_1$$

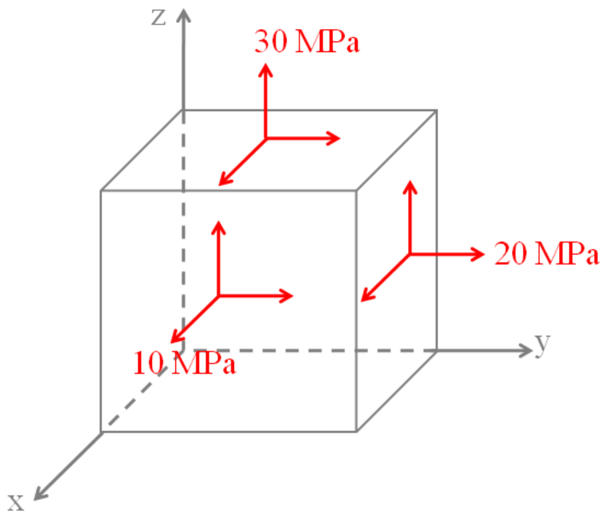
تنش هیدرواستاتیک با تغییر مختصات تغییر نمی‌کند (چون I_1 با چرخش المان و تغییر مختصات ثابت است).

از طرفی برای تنش‌های دویاتوریک داریم:

$$\sigma'_x = \sigma_x - \sigma_m \qquad \sigma'_y = \sigma_y - \sigma_m \qquad \sigma'_z = \sigma_z - \sigma_m$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} \qquad \tau'_{xz} = \tau_{xz} \qquad \tau'_{yz} = \tau_{yz}$$

مثال: المان روبرو با وضعیت تنشی نشان داده شده مفروض است. وضعیت تنشی این المان را به صورت مؤلفه‌های هیدرواستاتیک و دویاتوریک نمایش دهید.



حل:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{20 + 10 + 30}{3} = 20$$

$$\sigma'_x = 10 - 20 = -10 \qquad \sigma'_y = 20 - 20 = 0 \qquad \sigma'_z = 30 - 20 = 10$$

$$\begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 30\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20 & 0 & 0\\ 0 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 20\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-10 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

■

می‌خواهیم ثابت کنیم مؤلفه دویاتوریک تنش نرمال ذاتاً برشی است.

$$\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_m & 0 & 0\\ 0 & \sigma_m & 0\\ 0 & 0 & \sigma_m\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\sigma_1' & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2' & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3'\end{bmatrix}$$

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_m = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2}{3}\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_2 - \frac{1}{3}\sigma_3$$

$$= \left(\frac{1}{3}\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_2\right) + \left(\frac{1}{3}\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_3\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}(\tau_3 + \tau_2)$$

به همین ترتیب:

$$\sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_m = \frac{2}{3}(\tau_1 + \tau_3)$$

$$\sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_m = \frac{2}{3}(\tau_1 + \tau_2)$$

تنش‌های اصلی دویاتوریک:

روش محاسبه تنش‌های اصلی دویاتوریک مشابه حالت معمول آن است. فقط نامتغیرهای تنش تغییر می‌کنند:

$$\sigma'^3 - J_1\sigma'^2 + J_2\sigma' - J_3 = 0$$

$$J_1 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z$$

$$J_2 = \sigma'_x\sigma'_y + \sigma'_y\sigma'_z + \sigma'_x\sigma'_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$J_3 = \cdots$$

$$J_1 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = (\sigma_x - \sigma_m) + \left(\sigma_y - \sigma_m\right) + (\sigma_z - \sigma_m) = 0$$

همواره داریم:

$$\Longrightarrow {\sigma'}^3 + J_2\sigma' - J_3 = 0$$

تمرین: در نقطه‌ای از یک جسم وضعیت تنشی زیر مفروض است:

الف) تانسور تنش دویاتوریک در نقطه مذکور را مشخص کنید.

ب) نامتغیرهای تنش دویاتوریک را به دست آورید.

ج) مقادیر تنش‌های اصلی دویاتوریک را به دست آورید.

$$\sigma_{ij}: \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}_{(MPa)}$$

■