نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۳/۴/۳**

وقت : **۱۳۵** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس **ریاضی۲ فنی** (۱۷ گروه هماهنگ)

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۴۰۳-۱۴۰۲**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

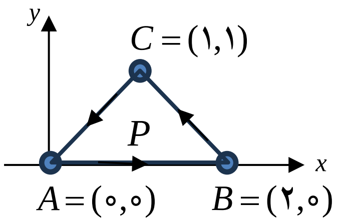
سوال ۱- معادله صفحه مماس بر رویه $x^2+y^2-2xy-x+3y-z+4=0$ در نقطه $A=(2,-3,18)$ را بنویسید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۲- ناحیه انتگرالگیری در انتگرال $I=\int_0^1\int_y^1 x^2 e^{xy}\,dxdy$ را رسم کرده و سپس آن را حل کنید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۳- انتگرال سه‌گانه $J=\iiint\limits_R (x^2+y^2+z^2)\,dV$ را حل کنید که R ناحیه محدود به دو کره $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ است که درون مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ قرار دارد. **(۱۵ نمره)**

سوال ۴- مساحت قسمتی از سهمیگون $z=5-x^2-y^2$ که بالای صفحه $z=1$ قرار دارد را محاسبه کنید. **(۲۰ نمره)**

سوال ۵- انتگرال منحنی‌الخط $K=\int\limits_P (x^2-xy)dx+(xy-y^2)dy$ را روی منحنی بسته P ، که توسط مثلث ABC (در شکل مقابل) مشخص شده است ، محاسبه کنید. **(۲۰ نمره)**



سوال ۶- انتگرال $\int_A^B F\cdot dR$ را محاسبه کنید که در آن : **(۱۵ نمره)**

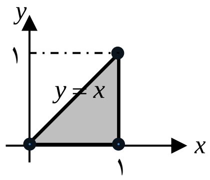
$$F=(\sin y\cos x,\cos y\sin x,z)\ \ ;\ \ A=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},1)\,,\,B=(0,0,\sqrt{2})$$

سوال ۷- انتگرال $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ را با استفاده از قضیه دیورژانس (واگرایی) محاسبه کنید که در آن، رویه S سطح خارجی ناحیه‌ای است که از بالا به سهمیگون $z=2-x^2-y^2$ و از پایین به سهمیگون $z=x^2+y^2$ محدود شده است و $F=(2xy+e^{y^2},\,-y^2+\cos z^3,\,z+2yz)$. **(۲۰ نمره)**

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : بردار گرادیان تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2-2xy-x+3y-z+4$ ، بردار نرمال صفحه مماس بر رویه $f(x,y,z)=0$ در یک نقطه واقع بر آن است. در اینجا داریم : $grad\ f=(2x-2y-1,2y-2x+3,-1)$
بنابر این، $grad\ f(A)=(9,-7,-1)$ بردار نرمال صفحه مماس بر رویه در نقطه $A=(2,-3,18)$ است.
در نتیجه، معادله صفحه مماس بر رویه در این نقطه عبارت است از : $9x-7y-z=21$

پاسخ سوال۲ : ناحیه انتگرالگیری در شکل نشان داده شده است.



روش اول : با تغییر ترتیب انتگرالگیری، حل انتگرال ساده‌تر می‌شود.

$$I_1=\int_0^1\int_y^1 x^2e^{xy}dxdy=\int_0^1\int_0^x x^2e^{xy}dydx=\int_0^1 xe^{xy}\,|_0^x\ dx$$
$$=\int_0^1(xe^{x^2}-x)dx=\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{1}{2}x\,|_0^1=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{e}{2}-1$$

روش دوم : این انتگرال دوگانه با ترتیب انتگرالگیری داده شده هم قابل حل است اما راه حل آن طولانی خواهد بود.

$$I_1=\int_0^1\int_y^1 x^2e^{xy}dxdy=\int_0^1[\frac{1}{y}x^2-\frac{2}{y^2}x+\frac{2}{y^3}]_y^1e^{xy}dy=\int_0^1[\frac{1}{y}x^2-\frac{2}{y^2}x+\frac{2}{y^3}]_y^1e^{xy}dy$$
$$=\int_0^1[(\frac{1}{y}-\frac{2}{y^2}+\frac{2}{y^3})e^y-(y-\frac{2}{y}+\frac{2}{y^3})e^{y^2}]dy=[(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2})e^y-(\frac{1}{2}-\frac{1}{y^2})e^{y^2}]_0^1$$
$$=[\frac{2(y-1)e^y-(y^2-2)e^{y^2}}{2y^2}]_0^1=\frac{e}{2}-\lim_{x\to 0}\frac{2(y-1)e^y-(y^2-2)e^{y^2}}{2y^2}=\frac{e}{2}-1$$

پاسخ سوال۳ : این انتگرال سه‌گانه را به کمک مختصات کروی حل می‌کنیم. معادله دو کره در مختصات کروی به صورت $\rho=1$ و $\rho=2$ و معادله مخروط به صورت $\varphi=\frac{\pi}{4}$ نوشته می‌شود. ناحیه R شامل نقاطی است که در شرایط $1\le\rho\le 2$ و $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ صدق می‌کنند. اکنون داریم :

$$I_2=\iiint_R(x^2+y^2+z^2)dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2 r^4\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{5}r^5\,|_1^2\sin\varphi d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{31}{5}\sin\varphi d\varphi d\theta$$
$$=\frac{31}{5}\int_0^{2\pi}-\cos\varphi\,|_0^{\frac{\pi}{4}}\ d\theta=\frac{31}{5}\int_0^{2\pi}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})d\theta=\frac{31}{5}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(2\pi)=\frac{31}{5}(2-\sqrt{2})\pi$$

پاسخ سوال۴ : سطح مورد نظر را A می‌نامیم. از تقاطع رویه با صفحه داریم $1=5-x^2-y^2$ یعنی $x^2+y^2=4$.
پس تصویر سطح A بر روی صفحه $z=0$ عبارت است از قرص دایره‌ای $x^2+y^2\le 4$ که آن را D می‌نامیم.
بردار گرادیان رویه برابر است با $grad\ f=(-2x,-2y,-1)$ و بردار یکه قائم سطح بیرونی سهمیگون به صورت
$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+4x^2+1}}(2x,2y,1)$ خواهد بود و داریم : $dS=\frac{dxdy}{\cos\gamma}=\sqrt{4x^2+4x^2+1}\,dxdy$
اکنون می‌توانیم مساحت ناحیه A را به کمک انتگرال روی سطح محاسبه کنیم. برای حل انتگرال دوگانه از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$\iint_A dS=\iint_D\frac{dxdy}{\cos\gamma}=\iint_D\sqrt{4x^2+4x^2+1}\,dxdy=\int_0^2\int_0^{2\pi}r\sqrt{4r^2+1}\,d\theta dr$$
$$=2\pi\int_0^2 r\sqrt{4r^2+1}\,dr=2\pi\times\frac{1}{12}(\sqrt{4r^2+1})^3\,|_0^2=(17\sqrt{17}-1)\frac{\pi}{6}$$

پاسخ سوال۵: ابتدا معادله ۳ پاره خط را می نویسیم : $AB:\ y=0\quad,\quad AC: y=x\quad BC: y=-x+2$

روش اول : شرایط استفاده از قضیه گرین وجود دارد بنابر این داریم : $I_3=\iint\limits_D (Q_x-P_y)dxdy=\iint\limits_D (y-(-x))dxdy$

$$=\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{2-y}(x+y)dxdy=\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{2-y}\left[\frac{(x+y)^2}{2}\right]_y^{2-y}dy=\int_{y=0}^{1}(2-2y^2)dy=2y-\frac{2}{3}y^3\,|_0^1=\frac{4}{3}$$

روش دوم : می‌توان انتگرال منحنی‌الخط را بطور مستقیم حساب کرد. مسیر C شامل ۳ پاره خط است که روی هر یک از آنها انتگرال را محاسبه کرده و سپس با هم جمع می‌کنیم.

$$AB: y=0\ ,\ 0\le x\le 2\ \to dy=0\ \to \int\limits_{AB}(x^2-xy)dx+(xy-y^2)dy=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}$$

$$BC:\ 0\le y\le 1\ ,\ x=2-y,\ dx=-dy\ \to \int\limits_{AB}(x^2-xy)dx+(xy-y^2)dy=\int_0^1-4(y-1)^2dy=\frac{-4}{3}(y-1)^3\,|_0^1=\frac{-4}{3}$$

$$CA\ ;\ x=y\ \ \to\ \int\limits_{CA}(x^2-xy)dx+(xy-y^2)dy=\int\limits_{CA}0dx+0dy=0$$

$$I_3=\int\limits_C(x^2-xy)dx+(xy-y^2)dy=\frac{8}{3}+\frac{-4}{3}+0=\frac{4}{3}$$

پاسخ سوال۶: چون مسیرحرکت از نقطه A به نقطه B مشخص نشده است ، ابتدا مستقل از مسیر بودن انتگرال را بررسی می‌کنیم. چون $curl\,F=(0-0,0-0,\cos y\cos x-\cos y\cos x)=(0,0,0)$ پس انتگرال مستقل از مسیر است.

اکنون می‌دانیم که یک تابع $\varphi(x,y,z)$ وجود دارد بطوریکه $F=grad\,\varphi$ یعنی :

$$(\sin y\cos x,\cos y\sin x,z)=(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)$$

با انتگرالگیری از مولفه‌های F خواهیم داشت $\varphi(x,y,z)=\sin y\sin x+\frac{1}{2}z^2$ و اکنون می‌توانیم بنویسیم :

$$\int_a^B F\cdot dr=\int_A^B\sin y\cos xdx+\cos y\sin xdy+zdz\ =\varphi(x,y,z)\,|_A^B=\sin y\sin x+\frac{1}{2}z^2\,|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},1)}^{(0,0,\sqrt{2})}=1+\frac{1}{2}-0-1=\frac{1}{2}$$

پاسخ سوال۷: ناحیه محدود به دو سهمیگون را R می‌نامیم و محل برخورد دو سهمیگون را پیدا می‌کنیم.

$$2-x^2-y^2=x^2+y^2\ \ \to\ \ x^2+y^2=1\ ,\ z=1$$

تصویر ناحیه R بر روی صفحه $z=0$ قرص دایره‌ای $x^2+y^2\le 1$ است که آن را D می‌نامیم.

به کمک قضیه واگرایی(دیورژانس) و مختصات استوانه‌ای انتگرال را حل می‌کنیم.

$$divF=2y+(-2y)+(1+2y)=2y+1\quad\to\quad I_5=\iiint\limits_R(2y+1)dV=\int_{r=0}^{1}\int_{r^2}^{2-r^2}\int_{\theta=0}^{2\pi}(2r\sin\theta+1)rd\theta dzdr$$

$$\to\quad I_5=\int_{r=0}^{1}\int_{r^2}^{2-r^2}\int_{\theta=0}^{2\pi}(2r^2\sin\theta+r)d\theta dzdr=\int_{r=0}^{1}\int_{r^2}^{2-r^2}(-2r^2\cos\theta+r\theta)\,|_{\theta=0}^{2\pi}\ dzdr$$

$$=2\pi\int_{r=0}^{1}\int_{r^2}^{2-r^2}rdzdr=2\pi\int_{r=0}^{1}r(2-2r^2)dr=2\pi\int_{r=0}^{1}(2r-2r^3)dr=2\pi(r^2-\frac{1}{2}r^4)\,|_0^1=\pi$$