نام و نام خانوادگی : .......... ..........

شماره دانشجویی : ..................

نام مدرس : ............... ...

دانشگاه صنعتی شاهرود

**دانشکده علوم ریاضی**

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۳/۳/۲۷**

وقت : **۱۳۵** دقیقه

امتحان پایان ترم درس **معادلات دیفرانسیل** (۱۵ گروه هماهنگ)

نیمسال ( ~~اول~~ / **دوم** ) **۱۴۰۳-۱۴۰۲**

---

**توجه :**

**از نوشتن با مداد خودداری نمائید. به هیچ سوالی در جلسه امتحان پاسخ داده نمی‌شود. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.**

**سوال ۱-** جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید. **(۲۰ نمره)**

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^3}$$

---

**سوال ۲-** معادله اویلر زیر را حل کنید.. **(۱۵ نمره)**

$$x^2 y'' + 6xy' + 6y = 2\ln x$$

---

**سوال ۳-** دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید. **(۲۰ نمره)**

$$\begin{cases} (D^2 - 1)x + (D-1)y = e^{2t} \\ (D+1)x - y = 2e^{2t} \end{cases}$$

---

**سوال ۴-** جواب عمومی معادله زیر را با **روش سری‌های توانی** حول نقطه $x = 0$ به دست آورید. **(۱۵ نمره)**

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

---

**سوال ۵-** الف) تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = \int_0^t (e^{2x} - \cos 3x + x)dx$ را به دست آورید. **(۱۰ نمره)**

ب ) تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s) = \ln\left(\frac{s+2}{s-3}\right)$ را بیابید. **(۱۰ نمره)**

---

**سوال ۶-** معادله انتگرالی زیر را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس حل کنید. **(۱۵ نمره)**

$$x(t) = \int_0^t x(z)\sin(t-z)dz = e^{-4t}$$

---

**سوال ۷-** مساله مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید. **(۱۵ نمره)**

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t \end{cases} \quad ; \quad x(0) = x'(0) = 0$$

---

**موفق باشید**

**پاسخ سوال۱ :** ابتدا معادله همگن نظیر این معادله یعنی $y''+6y'+9y=0$ را حل می کنیم که یک معادله خطی با ضرایب ثابت است. معادله مشخصه آن $m^2+6m+9=0$ است که ریشه تکراری $m_1=m_2=-3$ دارد. پس جواب معادله همگن برابر است با $y_h=(c_1+c_2x)e^{-3x}$.

جواب خصوصی معادله را به دو روش محاسبه می‌کنیم.

روش اول (تغییر پارامتر) : $y_1=e^{-3x}\quad y_2=xe^{-3x}\ ,\ r(x)=\dfrac{e^{-3x}}{x^3}\ \to w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x}-3xe^{-3x}\end{vmatrix}=e^{-6x}$

$$y_p=e^{-3x}\int\frac{-xe^{-3x}}{e^{-6x}}\times\frac{e^{-6x}}{x^3}dx+xe^{-3x}\int\frac{xe^{-3x}}{e^{-6x}}\times\frac{e^{-6x}}{x^3}dx$$
$$=e^{-3x}\int\frac{-1}{x^2}dx+xe^{-3x}\int\frac{1}{x^3}dx=e^{-3x}(\frac{1}{x})+xe^{-3x}(\frac{-1}{2x^2})=\frac{e^{-3x}}{2x}$$

روش دوم (عملگر $D$) :

$$D^2y+6Dy+9y=\frac{e^{-3x}}{x^3}\ \to (D+3)^2y_p=\frac{e^{-3x}}{x^3}\ \to y_p=\frac{1}{(D+3)^2}(\frac{e^{-3x}}{x^3})\to y_p=e^{-3x}\frac{1}{(D-3+3)^2}(\frac{1}{x^3})$$
$$\to y_p=e^{-3x}\frac{1}{D^2}(\frac{1}{x^3})\to y_p=e^{-3x}\frac{1}{D}(\frac{-1}{2x^2})\to y_p=e^{-3x}\times(\frac{1}{2x})\to y_p=\frac{e^{-3x}}{2x}$$

و بالاخره جواب عمومی معادله عبارت است از : $y_g=(c_1+c_2x)e^{-3x}+\dfrac{e^{-3x}}{2x}=(c_1+c_2x+\dfrac{1}{2x})e^{-3x}$

**پاسخ سوال۲ :** روش اول : از تغییر متغیر $x=e^t$ استفاده می‌کنیم و معادله به صورت معادله خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت $y''+5y'+6y=2t$ در می‌آید. ابتدا معادله همگن نظیر آن را حل می‌کنیم. یعنی $y''+5y'+6y=0$

معادله مشخصه آن $m^2+5m+6=0$ است که دو ریشه حقیقی و متمایز $m_1=-2$ و $m_2=-3$ دارد. پس جواب همگن آن برابر است با $y_h=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$. برای پیدا کردن جواب خصوصی از روش ضرایب نامعین استفاده می‌کنیم.

$$y_p=at+b\ \to 6at+(5a+6b)=2t\ \to 6a=2\ ,\ 5a+6b=0\ \to\ a=\frac{1}{3},\ b=\frac{-5}{18}\ \to\ y_p=\frac{1}{18}(6t-5)$$

جواب عمومی این معادله برابر است با $y_g=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\dfrac{1}{18}(6t-5)$ و با توجه به تغییر متغیر اعمال شده ، جواب عمومی معادله اصلی برابر است با : $y_g=\dfrac{c_1}{x^2}+\dfrac{c_2}{x^3}+\dfrac{1}{18}(6\ln x-5)$

روش دوم : معادله همگن نظیر معادله اصلی عبارت است از $x^2y''+6xy'+6y=0$ که یک معادله اویلر است. معادله مشخصه آن $m(m-1)+6m+6=0$ است که دو ریشه حقیقی و متمایز $m_1=-2$ و $m_2=-3$ دارد. پس جواب همگن آن برابر است با $y_h=\dfrac{c_1}{x^2}+\dfrac{c_2}{x^3}$. برای پیدا کردن جواب خصوصی می‌توانیم از روش تغییر پارامتر استفاده کنیم.

داریم : $r(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2}\quad y_1=\dfrac{1}{x^2}\quad y_2=\dfrac{1}{x^3}\quad w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x^{-2} & x^{-3} \\ -2x^{-3} & -3x^{-4}\end{vmatrix}=\dfrac{-1}{x^6}$

جواب خصوصی معادله برابر است با : $y_p=\dfrac{1}{x^2}\int 2x\ln x dx-\dfrac{1}{x^3}\int 2x^2\ln x dx$

$$=\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{2}x^2(2\ln x-1)-\frac{1}{x^3}\times\frac{2}{9}x^3(3\ln x-1)=\frac{1}{18}(6\ln x-5)$$

**پاسخ سوال ۳ :** این دستگاه معادله را به کمک روش حذفی حل می‌کنیم. داریم :

$$\begin{matrix} \\ (D-1) \end{matrix}\begin{cases}(D^2-1)x+(D-1)y=e^{2t}\\ (D+1)x-y=2e^{2t}\end{cases} \to \begin{cases}(D^2-1)x+(D-1)y=e^{2t}\\ (D^2-1)x-(D-1)y=2(D-1)e^{2t}\end{cases} \to 2(D^2-1)x=3e^{2t}$$

اکنون به یک معادله یک مجهولی رسیده‌ایم که می‌توانیم جواب عمومی آن را پیدا کنیم. برای پیدا کردن جواب همگن قرار می‌دهیم $D^2-1=0$ که دو ریشه حقیقی و متمایز $D_1=1$ و $D_2=-1$ دارد. بنابر این داریم : $x_h(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$

جواب خصوصی معادله عبارت است از $x_p(t)=\dfrac{3}{2(D^2-1)}(e^{2t})=\dfrac{1}{2}e^{2t}$ و در نتیجه جواب عمومی برابر است با :

$$x_g(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{2t}$$

با معلوم بودن $x_g(t)$ و با استفاده از معادله دوم دستگاه ، $y_g(t)$ را هم پیدا می‌کنیم.

$$y=(D+1)x-2e^{2t} \quad y_g(t)=(D+1)(c_1e^t+c_2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{2t})-2e^{2t} \to y_g(t)=2c_1e^t+\frac{3}{2}e^{2t}-2e^{2t}=2c_1e^t-\frac{1}{2}e^{2t}$$

**پاسخ سوال ۴ :** نقطه $x=0$ یک نقطه عادی معادله است بنابر این ، معادله دارای یک جواب به صورت سری توانی $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ است و داریم :

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

این جواب را در معادله قرار می دهیم :

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

ضرایب پشت زیگماها را به داخل زیگما منتقل می‌کنیم. $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0$

توان‌های $x$ در تمام زیگماها را به توان $n$ تبدیل می‌کنیم : $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0$

اکنون داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+2(n+1)a_n]x^n=0$$

که نتیجه می‌دهد $(n+2)(n+1)a_{n+2}+2(n+1)a_n=0 \quad , \quad n=0,1,2,\cdots$ و یا

$$a_{n+2}=\frac{-2(n+1)a_n}{(n+2)(n+1)}=\frac{-2}{n+2}a_n \quad , \quad n=0,1,2,\cdots$$

با قرار دادن مقادیر مختلف $n$ تعدادی از ضرایب را محاسبه می‌کنیم.

$$a_2=-a_0\ ,\ a_4=\frac{-1}{2}a_2=\frac{1}{2}a_0\ ,\ a_6=\frac{-1}{3}a_4=\frac{-1}{2\times3}a_0\ ,\ a_8=\frac{-1}{4}a_6=\frac{1}{2\times3\times4}a_0\ ,\ \cdots$$

$$a_3=\frac{-2}{3}a_1\ ,\ a_5=\frac{-2}{5}a_3=\frac{2^2}{3\times5}a_1\ ,\ a_7=\frac{-2}{7}a_5=\frac{-2^3}{3\times5\times7}a_1\ ,\cdots$$

با جایگذاری ضرایب بدست آمده در سری جواب داریم :

$$y=a_0(1-x^2+\frac{1}{2!}x^4-\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8-\cdots)+a_1(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5-\frac{8}{105}x^7+\cdots)$$

می‌توان دید که $y=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x^2)^n+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ و همچنین می‌دانیم که $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x^2)^n=e^{-x^2}$

یعنی $y=e^{-x^2}$ یک جواب این معادله دیفرانسیل است.

**پاسخ سوال۵ :** الف) $L\{f(t)\} = L\{\int_0^t (e^{2x} - \cos 3x + x)dx\} = \frac{1}{s}L\{e^{2x} - \cos 3x + x\}$

$$= \frac{1}{s}(L\{e^{2x}\} - L\{\cos 3x\} + L\{x\}) = \frac{1}{s}(\frac{1}{s-2} - \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s^2}) = \frac{2s^4 - s^3 + 7s^2 + 9s - 18}{s^3(s-2)(s^2+9)}$$

ب) $g(t) = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{\ln\left(\frac{s+2}{s-3}\right)\} \to L\{g(t)\} = \ln\left(\frac{s+2}{s-3}\right) = \ln\{s+2) - \ln(s-2)$

$$\to L'\{g(t)\} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} \to L\{-tg(t)\} = L\{e^{-2t} - e^{3t}\} \to -tg(t) = e^{-2t} - e^{3t} \to g(t) = \frac{e^{3t} - e^{-2t}}{t}$$

**پاسخ سوال۶ :** $L\{x(t) - \int_0^t x(z)\sin(t-z)dz\} = L\{e^{-4t}\} \to L\{x) - L\{x\}L\{\sin x\} = L\{e^{-4t}\}$

$$\to L\{x) - \frac{L\{x\}}{s^2+1} = \frac{1}{s+4} \to \frac{s^2 L\{x\}}{s^2+1} = \frac{1}{s+4} \to L\{x\} = \frac{s^2+1}{s^2(s+4)} \to L\{x\} = \frac{-1}{16s} + \frac{1}{4s^2} + \frac{17}{16(s+4)}$$

$$\to L\{x\} = L\{\frac{-1}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{17}{16}e^{-4t}\} \to x(t) = \frac{1}{80}(-5 + 20t + 85e^{-4t})$$

**پاسخ سوال۷ –** ابتدا تابع دو ضابطه‌ای سمت راست را بر حسب تابع پله‌ای واحد می‌نویسیم $u_1(t)e^{-t} = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t \end{cases}$

سپس تبدیل لاپلاس دو طرف معادله را محاسبه می‌کنیم. $L\{x''(t) + 2x'(t) + x(t)\} = L\{e^{-t} - u_1(t)e^{-t}\}$

$$\to L\{x''(t)\} + 2L\{x'(t)\} + L\{x(t)\} = L\{e^{-t}\} - L\{u_1(t)e^{-t}\}$$

$$\to s^2L\{x\} - x(0)s - x(0) + 2sL\{x\} - 2x(0) + L\{x\} = L\{e^{-t}\} - e^{-s}L\{e^{-(t+1)}\}$$

$$\to (s^2 + 2s + 1)L\{x\} = \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-s}}{e(s+1)}$$

اکنون داریم $L\{x\} = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{e^{-s}}{e(s+1)^3}$ و در نتیجه : $x(t) = L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^3} - \frac{e^{-s}}{e(s+1)^3}\}$

حال باید تبدیل معکوس لاپلاس را محاسبه کنیم.

$$x(t) = L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^3}\} - L^{-1}\{\frac{e^{-s}}{e(s+1)^3}\} \to x(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s^3}|_{s\to s+1}\} - L^{-1}\{\frac{e^{-s}}{e}(\frac{1}{s^3}|_{s\to s+1})\}$$

$$\to x(t) = L^{-1}\{L\{\frac{1}{2}t^2\}|_{s\to s+1}\} - L^{-1}\{\frac{e^{-s}}{e}(L\{\frac{1}{2}t^2\}|_{s\to s+1})\} \to x(t) = L^{-1}\{L\{\frac{1}{2}t^2e^{-t}\}\} - L^{-1}\{\frac{e^{-s}}{e}(L\{\frac{1}{2}t^2e^{-t}\})\}$$

$$\to x(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} - L^{-1}\{\frac{1}{e}(L\{\frac{1}{2}u_1(t)(t-1)^2e^{-(t-1)}\})\} \to x(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t} - \frac{1}{2}u_1(t)(t-1)^2e^{-t}$$

و یا :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2e^{-t} & t < 1 \\ (t - \frac{1}{2})e^{-t} & 1 \le t \end{cases}$$