دانشگاه صنعتی شاهرود

مقدمه ای مقاومت مصالح. مفهوم تنش و کرنش

اهمیت تنش

- شاید این سوال برای شما پیش آنده باشد که چرا از مفهوم تنش در محاسبات مهندسی مکانیک استفاده می شود و به نیرو بسنده نمی کنیم؟
- پاسخ این است که مفهوم تنش که یکی از مهم ترین عوامل طراحی قطعات است، در درون خود هم مفهوم نیرو و شدت آن را دارد و هم این که شکل ظاهری جسم و یا قطعه را نیز در محاسبات لحاظ می کند.
- این نکته مهمی است چون نیرویی که برای یک قطعه با سطح مقطع بزرگ می تواند بی خطر باشد (مقدار تنش کوچک) می تواند برای قطعه دیگر با سطح مقطع کوچکتر (مقدار تنش بیشتر) خطرساز باشد.

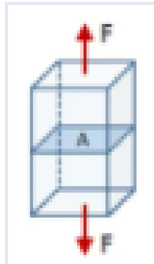
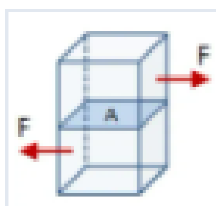
- تعریف تنش و کرنش
- تنش و کرنش، از ابتدایی‌ترین و مهم‌ترین مفاهیم موجود در مقاومت مصالح هستند. هنگامی که نیرویی بر یک سازه یا عضوی از آن وارد شود، تنش و کرنش به وجود می‌آیند. تنش را می‌توان به صورت نیروی وارده بر یک جسم در واحد سطح تعریف کرد.

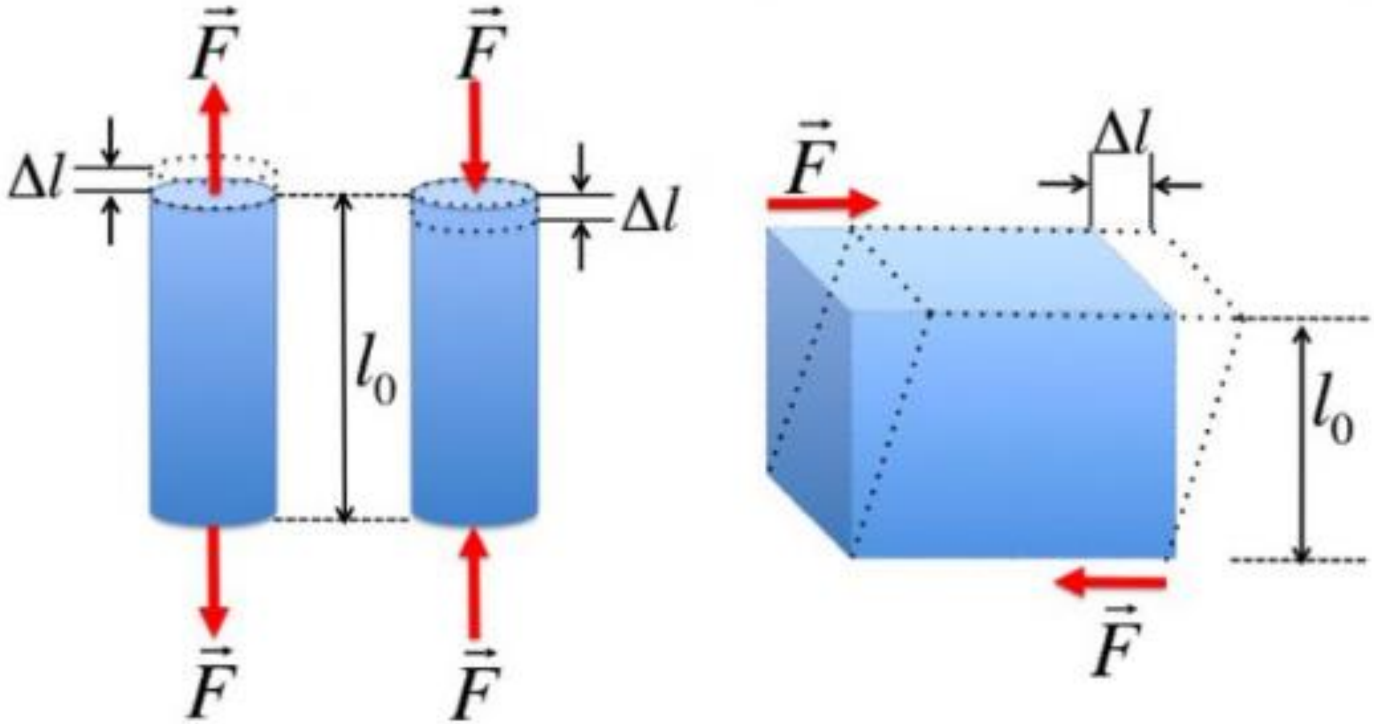
بر اساس این تعریف، معادله تنش به شکل زیر خواهد بود:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

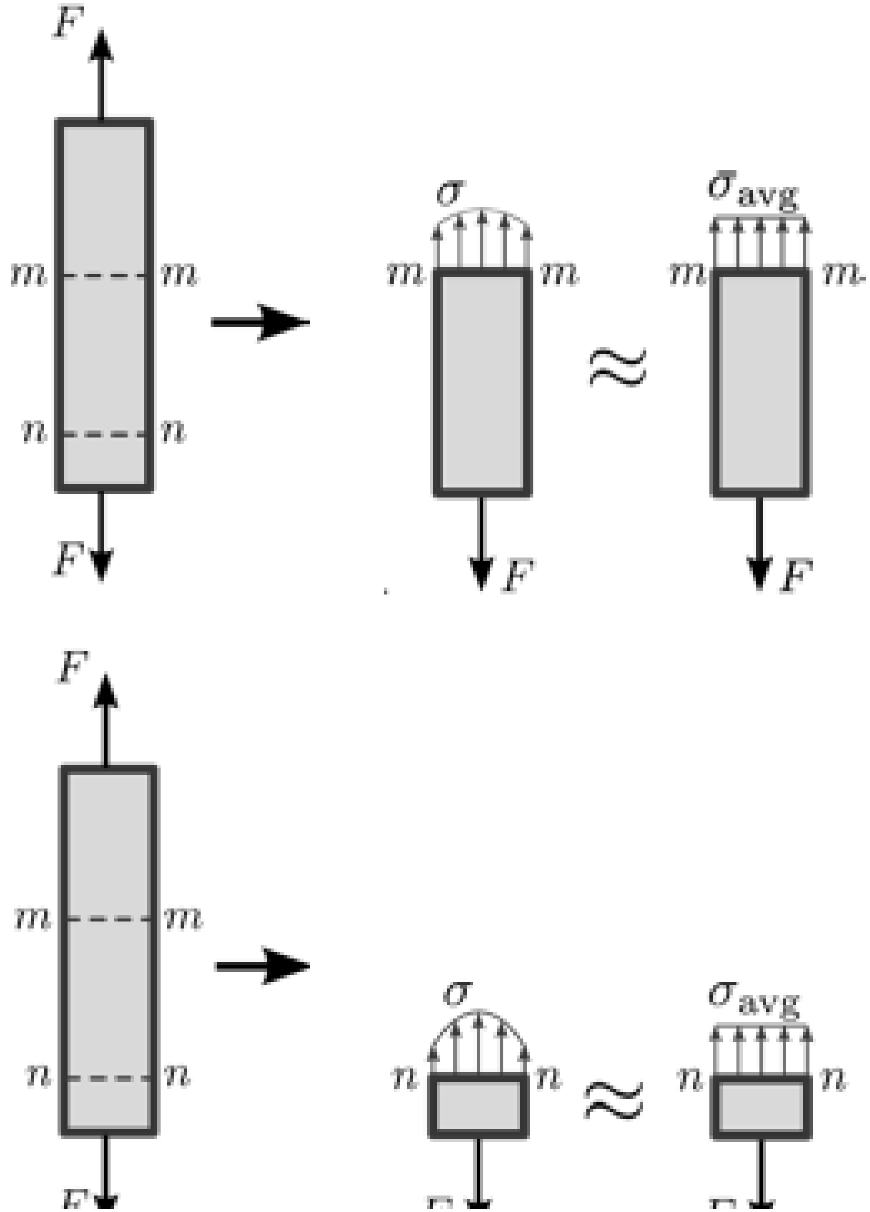
σ: تنش؛ **F**: نیروی وارده؛ **A**: مساحت سطح مقطعی که نیرو بر روی آن اعمال می‌شود

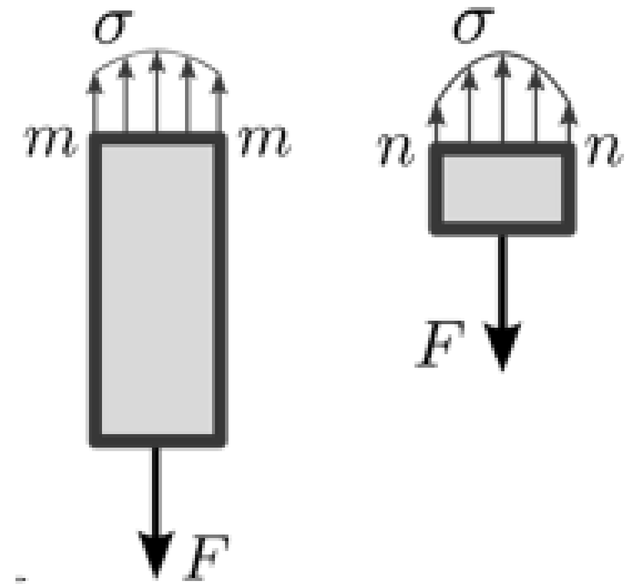
تنش در «سیستم بین‌المللی واحدها» (International System of Units) یا اصطلاحاً «SI»، با واحد **نیوتن بر مترمربع** (N/m^2) نشان داده می‌شود که معادل یک **پاسکال** (Pa) است.

نوع بارگذاری	نوع تنش	نمایش تصویری
نیروی محوری	تنش محوری (حالت کلی) تنش کششی (در صورت اعمال نیروی کششی) تنش فشاری (در صورت اعمال نیروی فشاری)	
نیروی برشی	تنش برشی عرضی	


$\vec{F}$
$\vec{F}$
Δl
Δl
l_0
$\vec{F}$
$\vec{F}$
$\vec{F}$
Δl
l_0
$\vec{F}$

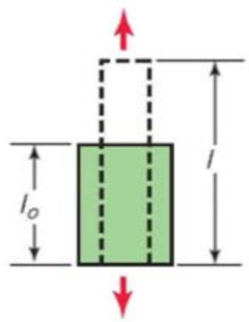
تنش متوسط

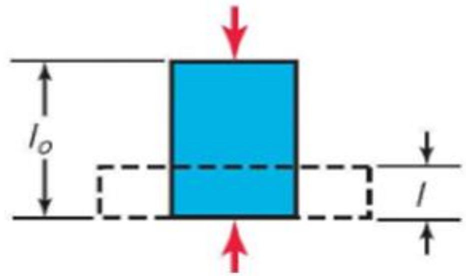




کرنش کششی (Tensile)

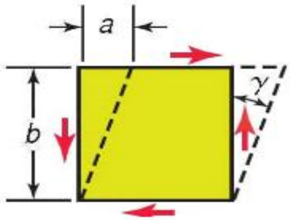
کرنش فشاری (Compressive)





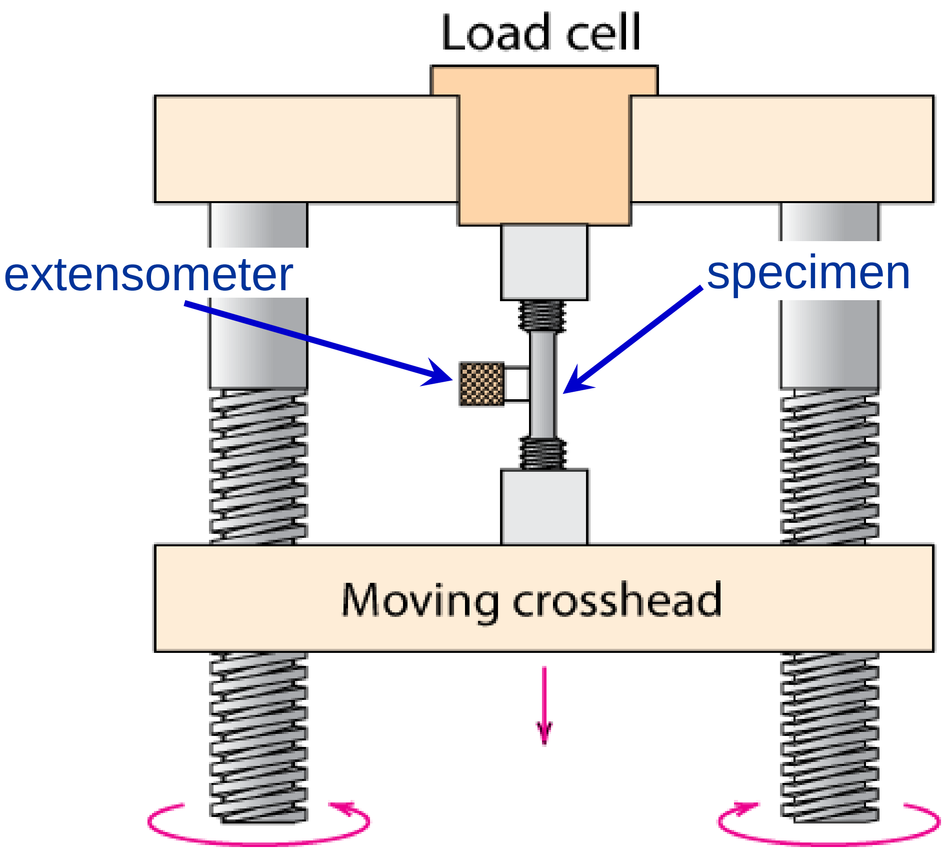
برشی (Shear)

مقدار آن برابر است با تانژانت زاویه تغییر یافتن حالت جسم در اثر تنش یا مقدار جابجایی سطحی که بر آن تنش برشی اعمال شده تقسیم بر فاصله همان سطح از نقطه‌ای که سطحی که جابجایی آن صفر است.



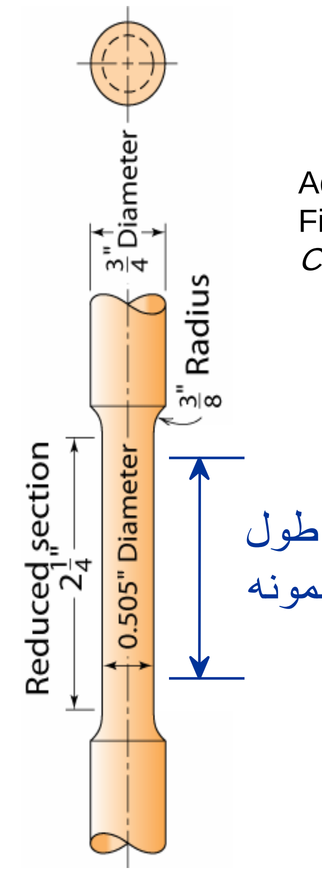
تست تنش - کرنش

ماشین مرسوم تست کشش



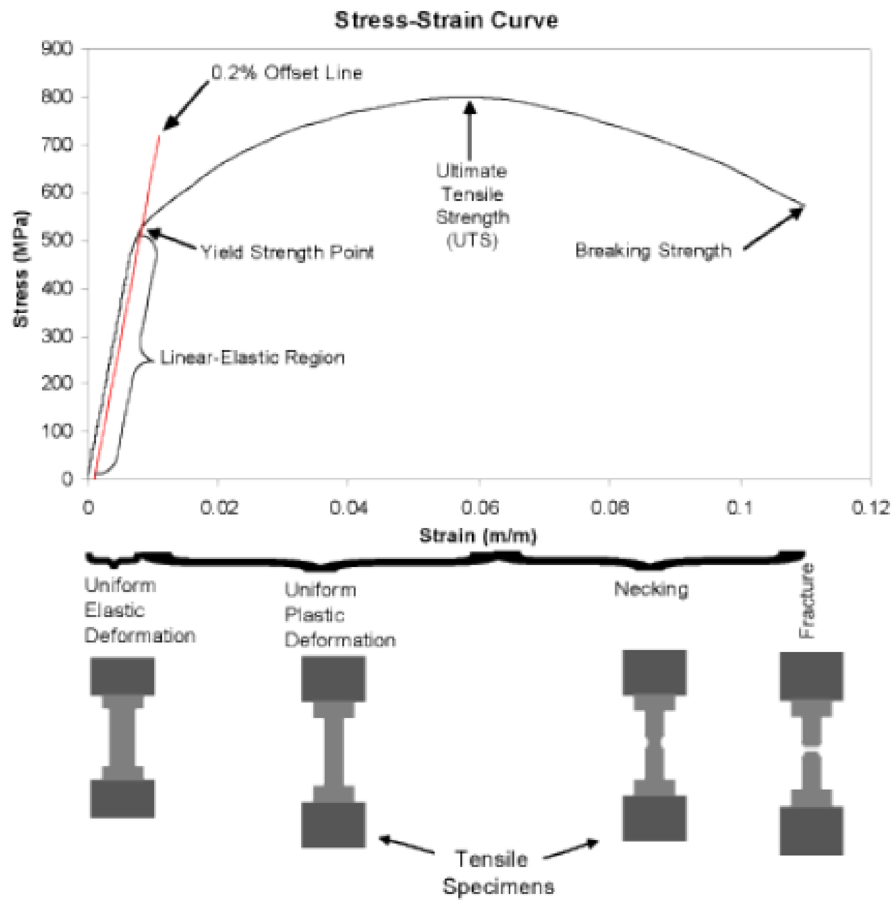
Adapted from Fig. 6.3, *Callister 7e.* (Fig. 6.3 is taken from H.W. Hayden, W.G. Moffatt, and J. Wulff, *The Structure and Properties of Materials*, Vol. III, *Mechanical Behavior*, p. 2, John Wiley and Sons, New York, 1965.)

نمونه های مرسوم کشش



Adapted from Fig. 6.2, *Callister 7e.*

تفسیر نمودار تنش- کرنش رسم شده حین آزمون کشش

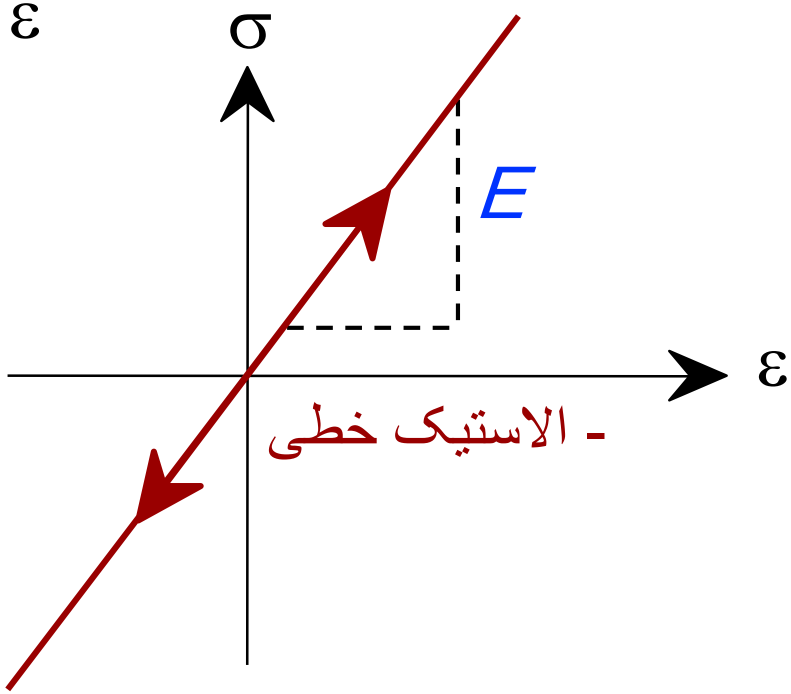


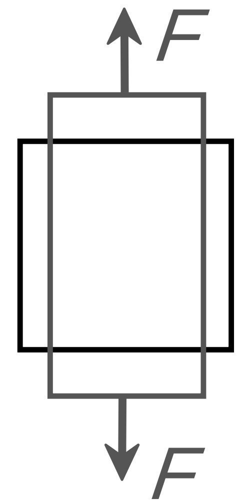
خواص الاستیک خطی

- مدول الاستیته *(E)* : *که به عنوان مدول یانگ شناخته می شود*

قانون هوک:

$$\sigma = E\,\varepsilon$$





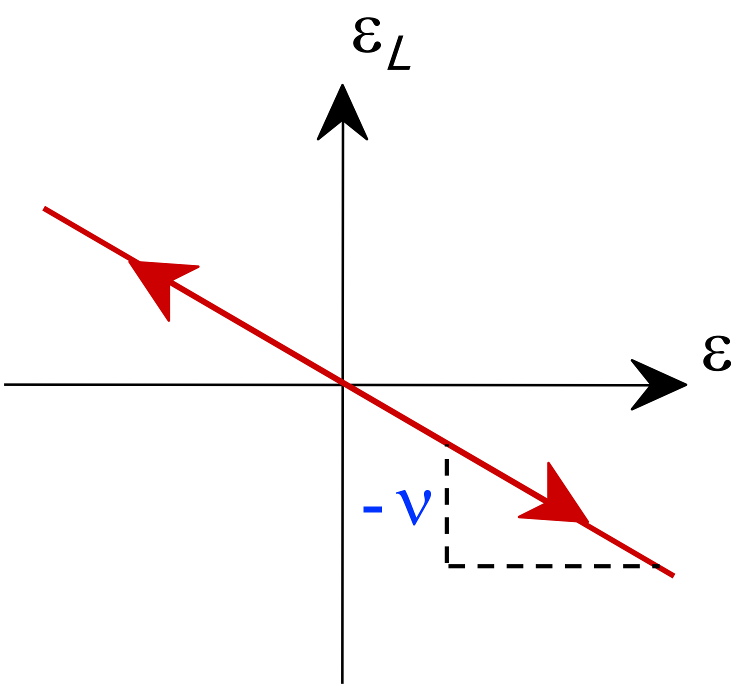
تست
کشش
ساده

ضریب پوآسون ν

نسبت کرنش جانبی (عرضی) به کرنش محوری (طولی)
را نسبت پواسون یا ضریب پواسون گویند.

ضریب پوآسون ν:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_L}{\varepsilon}$$



فلزات: $\nu \sim 0.33$

سرامیک ها: $\nu \sim 0.25$

پلیمرها: $\nu \sim 0.40$

واحدها:

E: [GPa] or [psi]

ν: بدون بعد

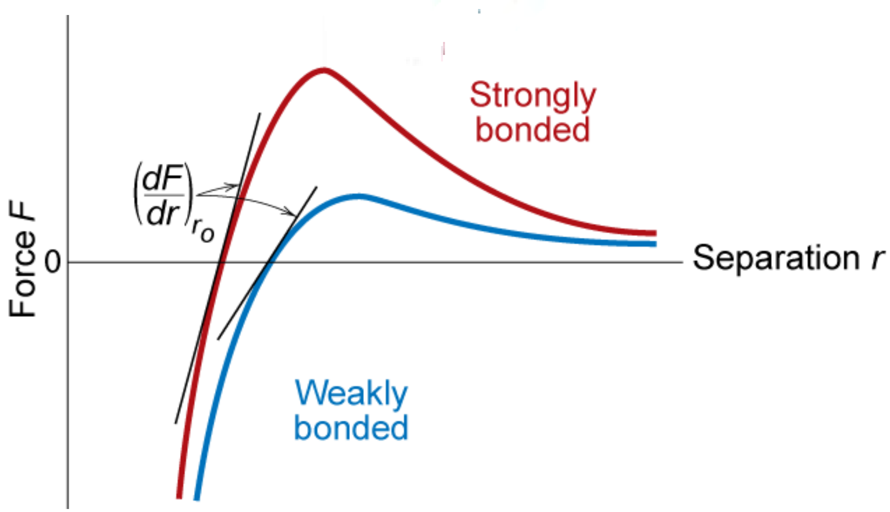
مدول الاستیته در مقیاس اتمی

- در مقیاس اتمی، تغییر شکلهای الاستیک باعث کشیدگی یا فشردگی پیوندهای بین اتمی میشود و باعث تغییر فاصله اتمها میشود.
- هرچه نیروی بین اتمی قویتر باشد، تغییر فاصله بین اتمها سخت تر میشود و مدول الاستیک افزایش می یابد.
- مدول الاستیسیته متناسب است با شیب منحنی نیرو–فاصله در نقطه توازن

$$E \propto \left(\frac{dF}{dr}\right)_{r_0}$$

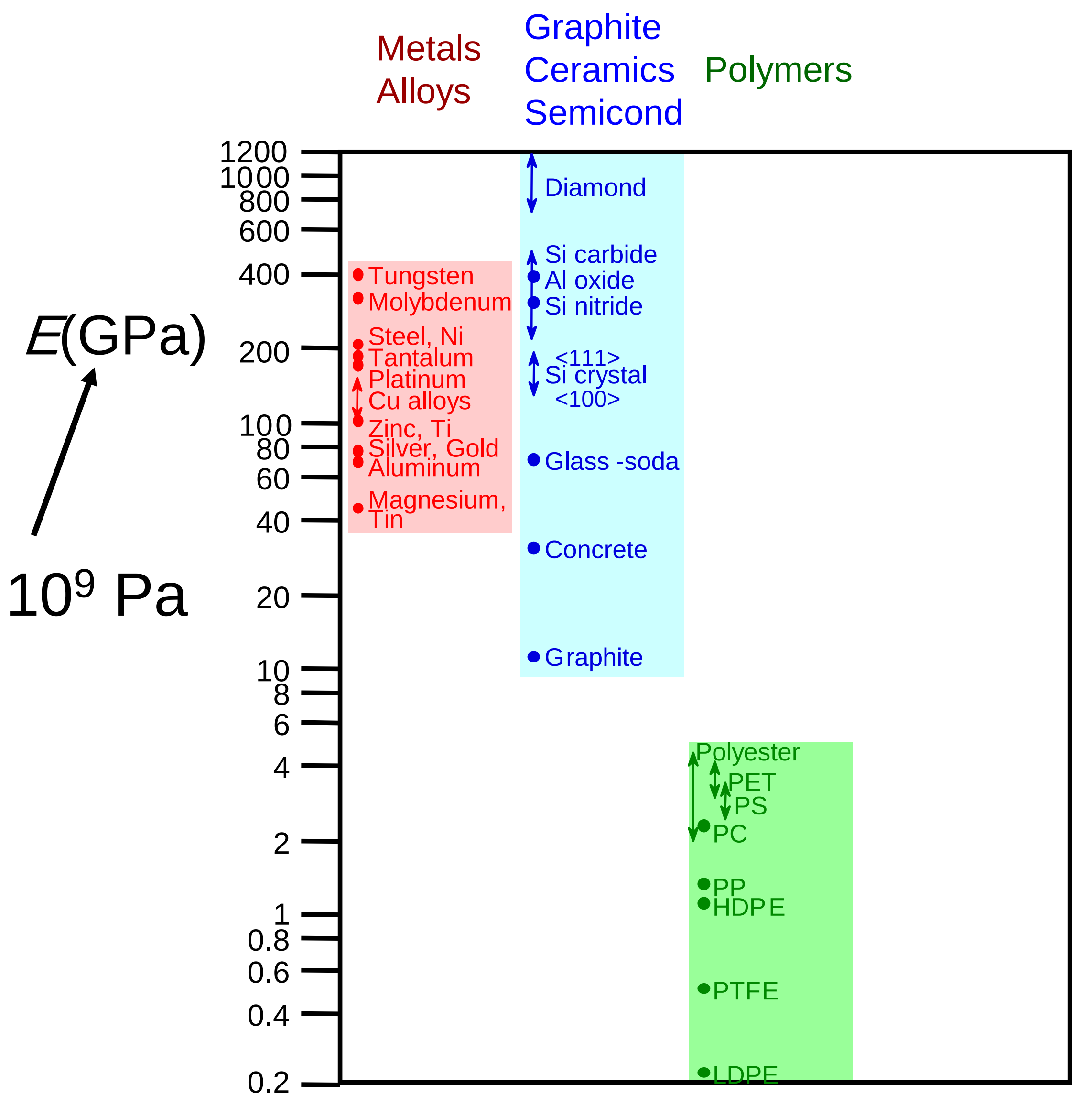
- مدول الاستیسیته سرامیکها در حد فلزات و پلیمرها پایین تر از آن است.

علت در نوع پیوندهای اتمی است.



Adapted from Fig. 6.7, *Callister 7e.*

مقایسه های مدول یانگ

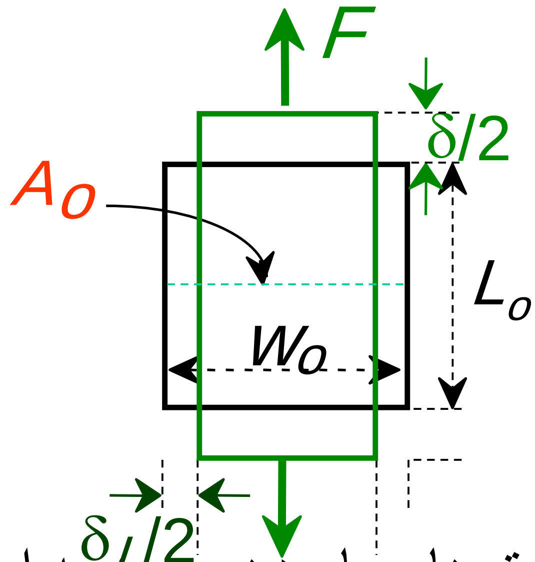


روابط الاستیکی خطی مفید

•کشش ساده:

$$\delta = \frac{F L_o}{E A_o}$$

$$\delta_L = -\nu \frac{F L_o}{E A_o}$$

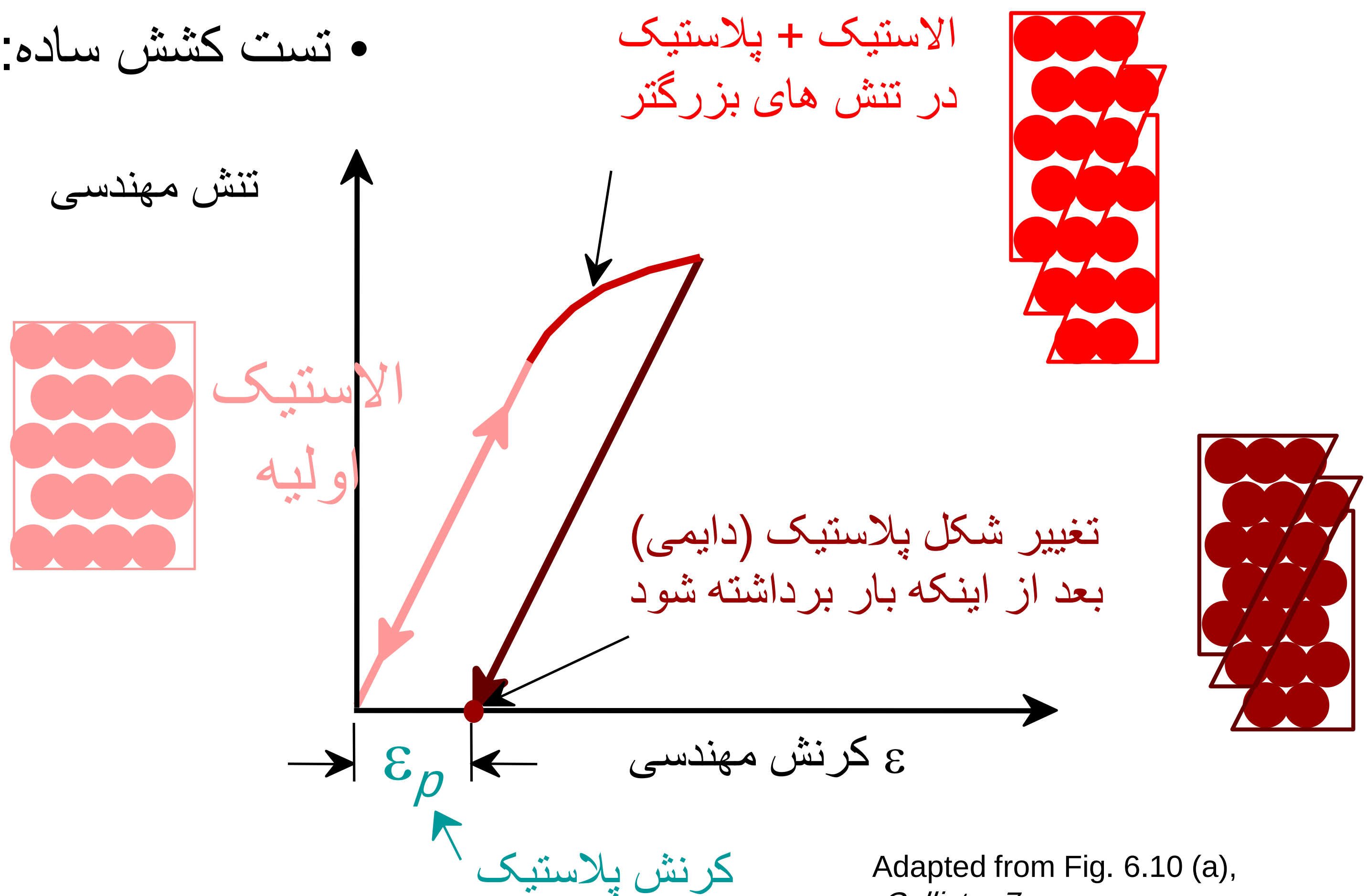


• مواد ، هندسه و پارامترهای بار دهی همه به اعوجاج کمک می کنند.
• مدول الاستیک بزرگتر، اعوجاج الاستیکی را مینیمم می کند.

تغییر شکل پلاستیک (دایمی)

(در دماهای پایین تر $T < T_{melt}/3$)

• تست کشش ساده:

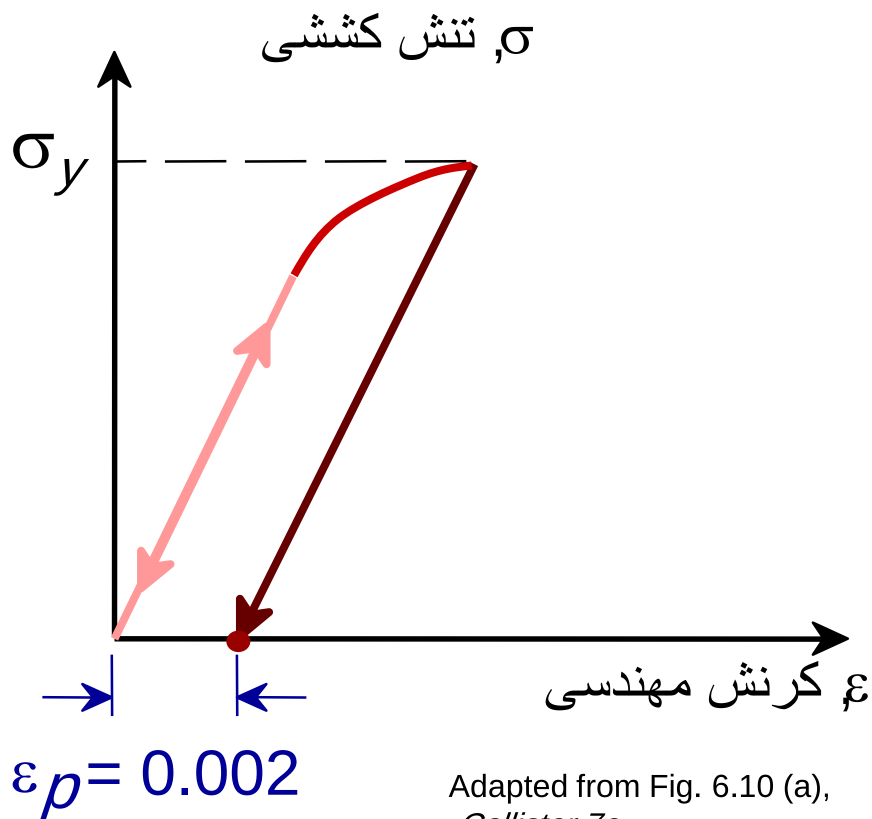


Adapted from Fig. 6.10 (a), *Callister 7e.*

استحکام تسلیم σ_y

- تنش در جایی که تغییر شکل پلاستیک قابل توجه رخ می دهد

زمانی که $\varepsilon_p = 0.002$



$\sigma_y =$ استحکام تسلیم

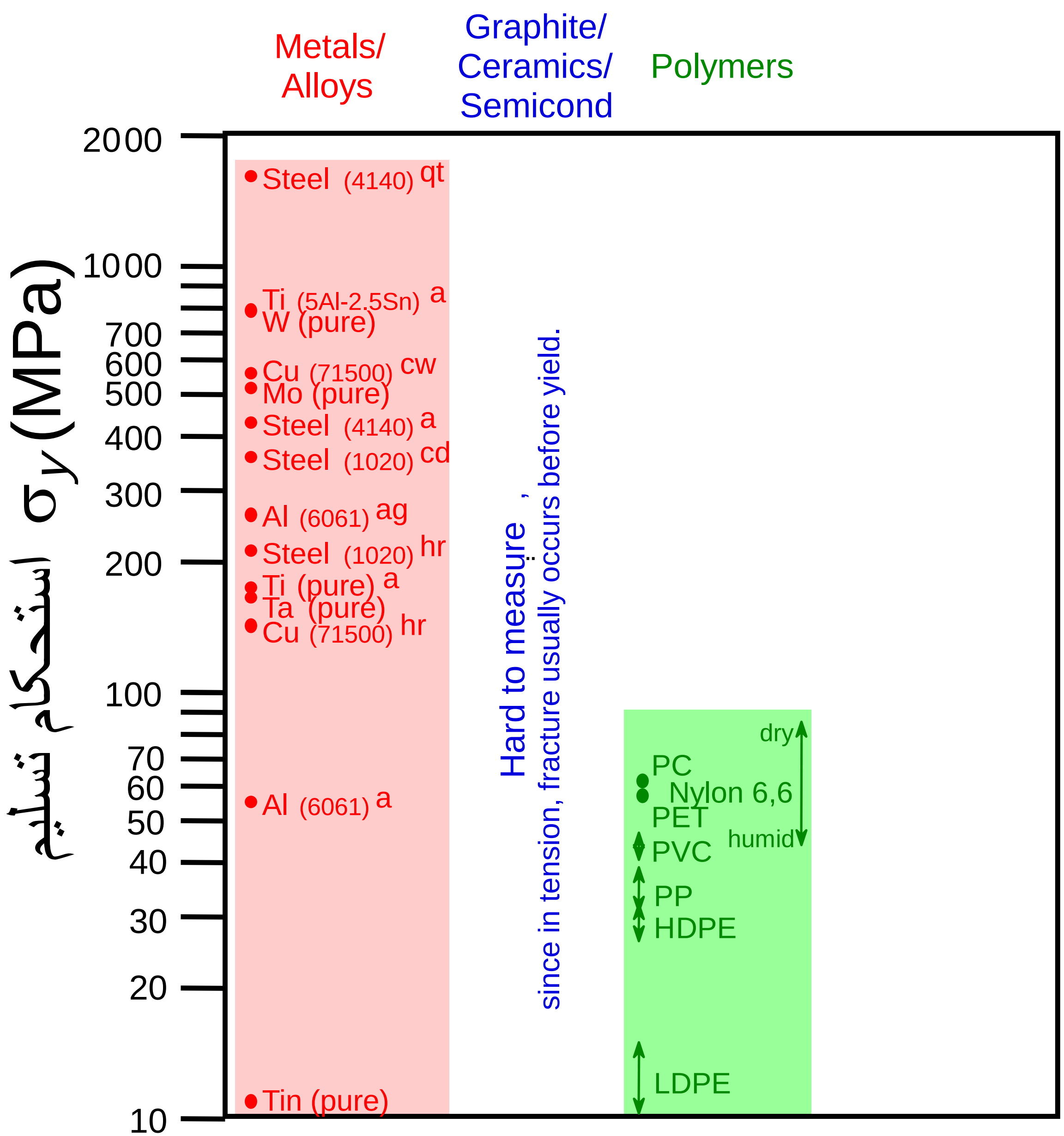
توجه: برای نمونه ۲ اینچی

$\varepsilon = 0.002 = \Delta z / z$

$\therefore\ \Delta z = 0.004$ in

Adapted from Fig. 6.10 (a), *Callister 7e.*

مقایسه : استحکام تسلیم



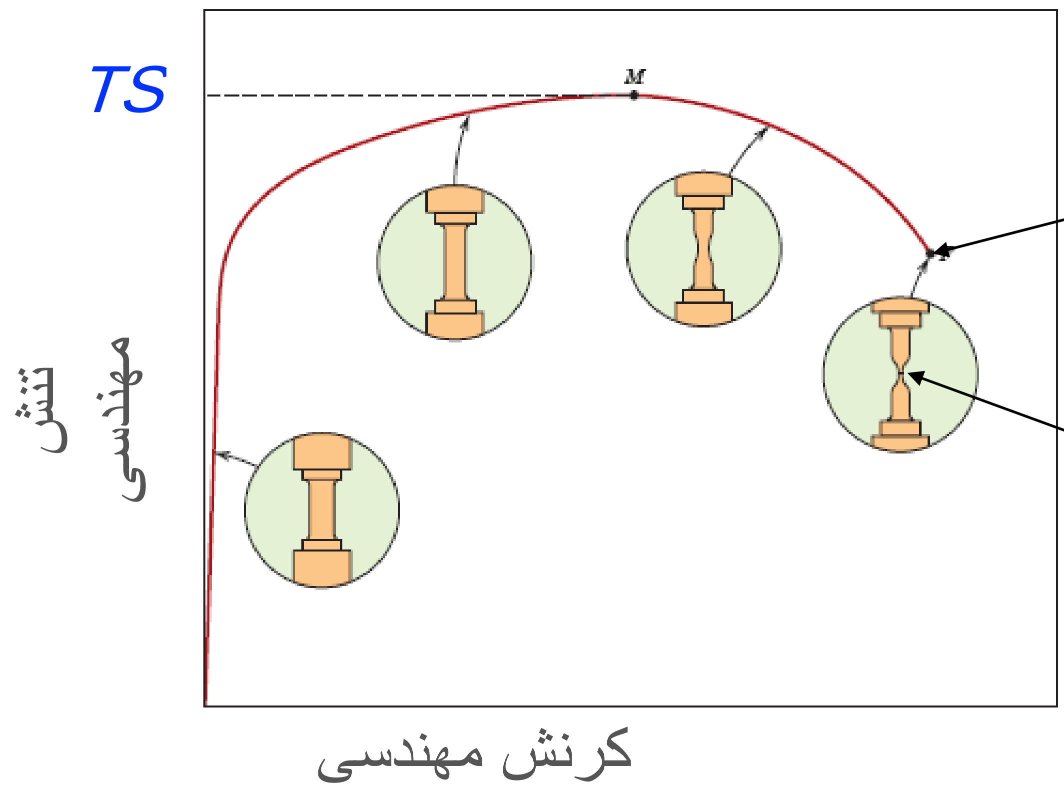
مقادیر در دمای اتاق

Based on data in Table B4, *Callister 7e*.

a = آنیل
hr = نورد گرم
ag = پیر سازی
cd = کشش سرد
cw = کار سرد شده
qt = کوئنچ وتمپر شده

استحکام کششی, TS

• ماکزیمم تنش روی منحنی تنش – کرنش مهندسی

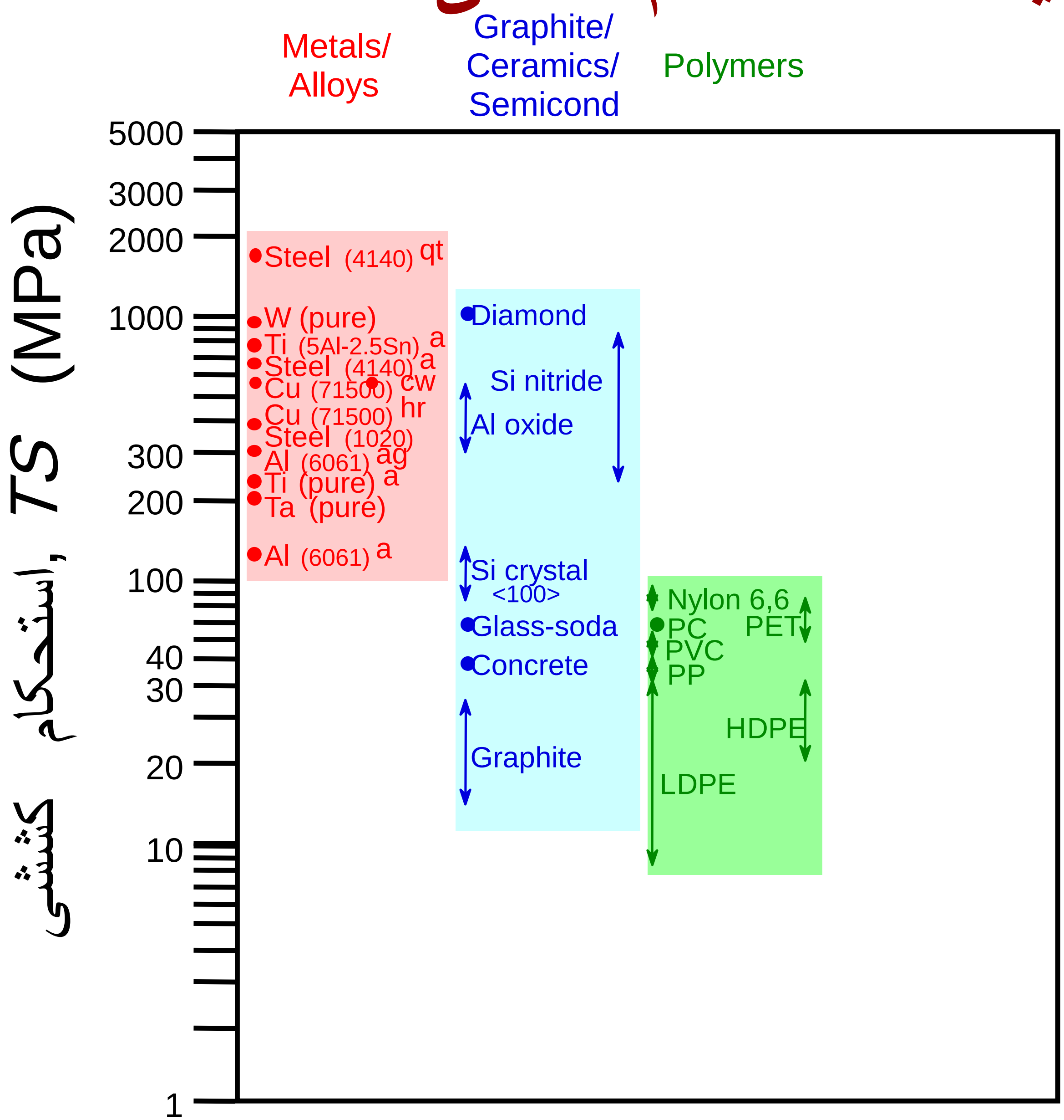


Adapted from Fig. 6.11, *Callister 7e.*

•فلزات : نقطه ماکزیمم زمانی هست که گردنه ای شدن شروع می شود

.

مقایسه: استحکام کششی



مقادیر در دمای اتاق

Based on data in Table B4, *Callister 7e*.

a = آنیل

hr = نورد گرم

ag = پیر سازی

cd = کشش سرد

cw = کار سرد شده

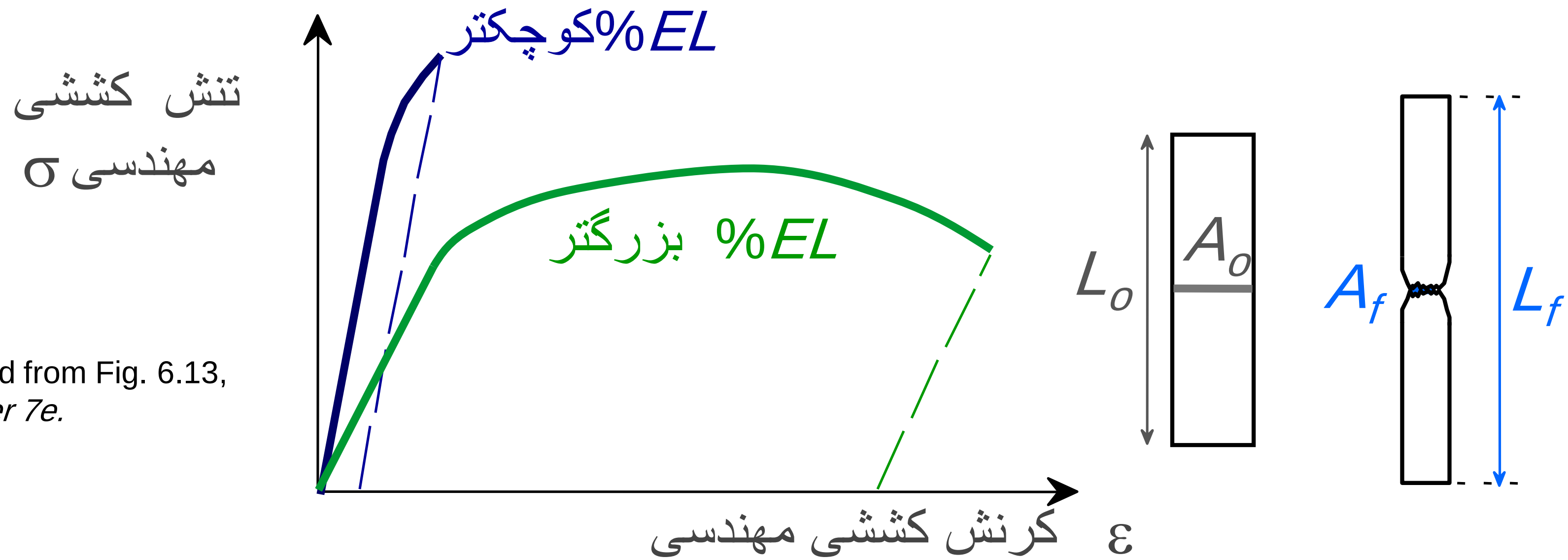
qt = کوئنچ وتمپر شده

داکتیلیته

•شکست در کرنش کششی پلاستیک:

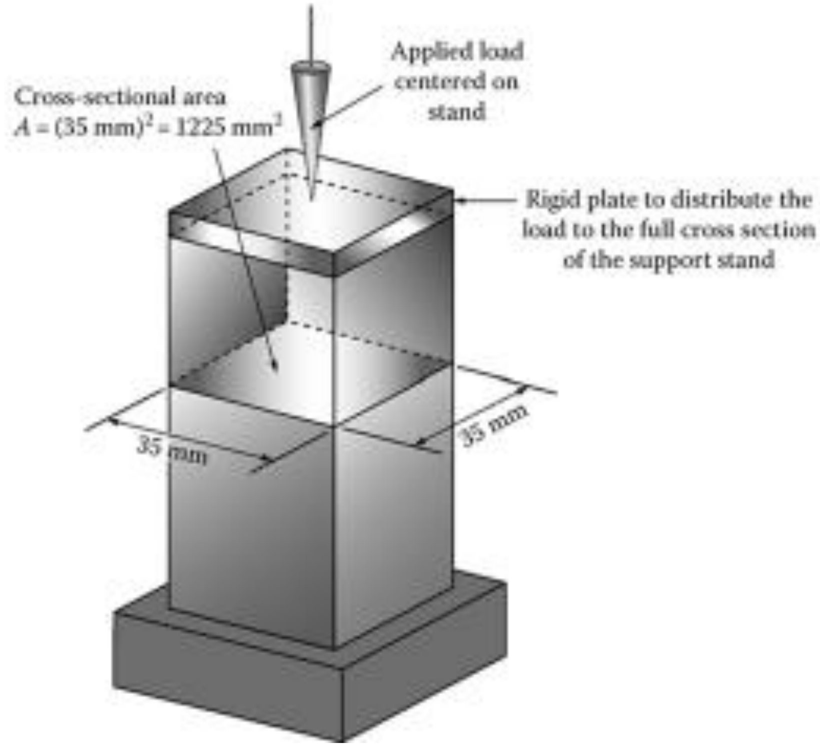
$$\%EL = \frac{L_f - L_o}{L_o} \text{ x } 100$$

درصد ازدیاد طول



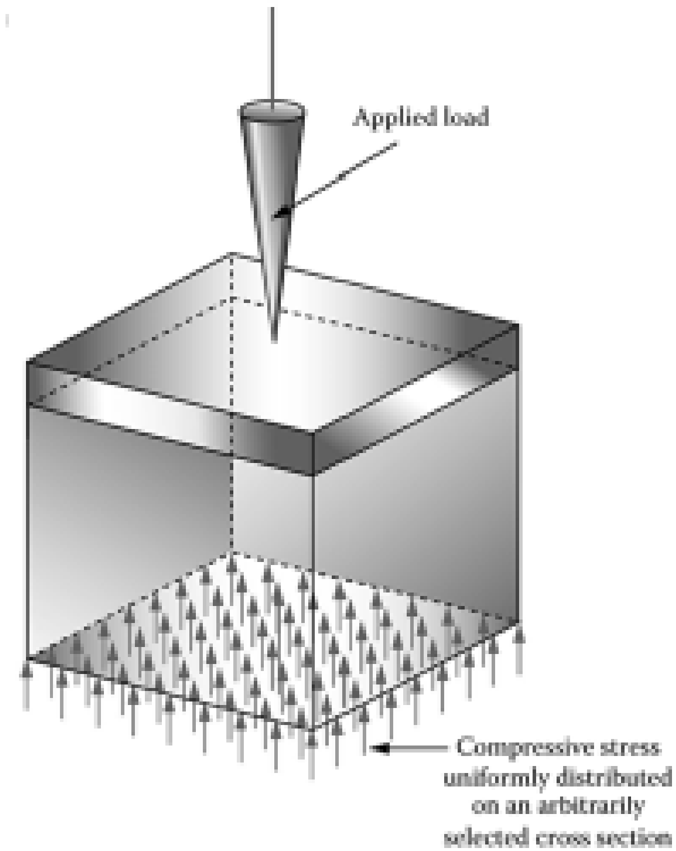
Adapted from Fig. 6.13, *Callister 7e.*

در شکل نشان داده شده اگر نیروی محوری وارده برابر با P=120kN باشد، تنش محوری را در صفحه نشان داده شده محاسبه کنید.



مثال ۰۱

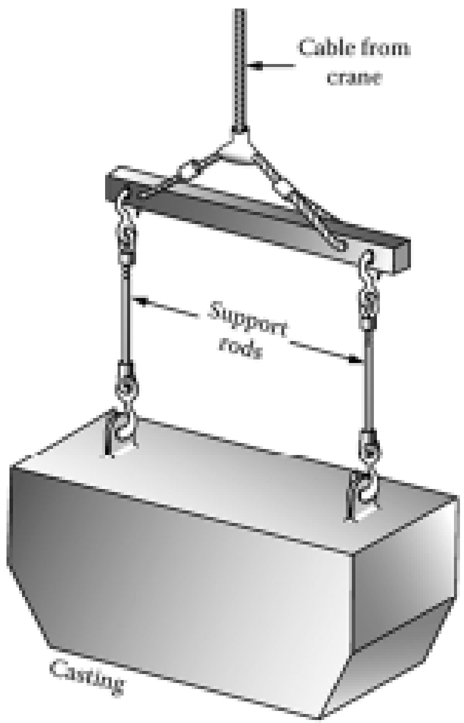
حل مساله:



$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{120 * 1000}{35 * 35} = 98\ \frac{N}{mm^2} = 98\,MPa$$

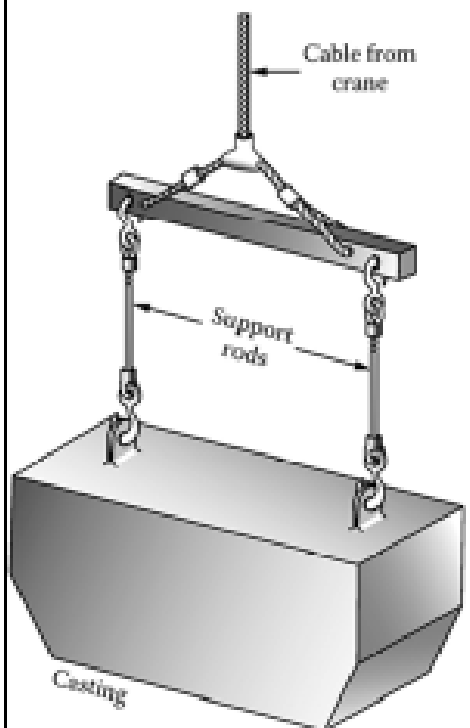
مثال ۰۲

قالب ریخته گری به وزن 11.2 kN توسط ۲ میله به قطر ۱۲ میلیمتر به کابل اصلی جراثقال متصل است. جنس و ابعاد ۲ میله یکسان می باشد. مقدار تنش در هر میله را محاسبه کنید.



مثال ۰۲

حل مساله:



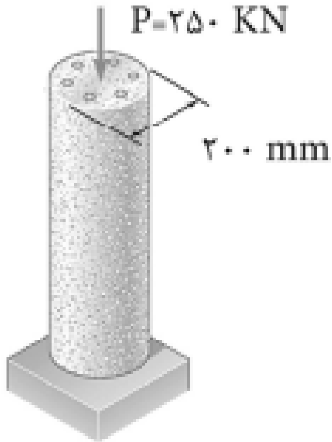
با توجه به مشابه بودن دو میله و تقارن کامل، نیروی وارده به هر میله برابر با نصف وزن قالب می باشد.

نیروی هر میله ⟹ $$F = \frac{W}{2} = \frac{11.2 * 1000}{2} = 5600\, N$$

مساحت هر میله ⟹ $$A = \pi * \frac{d^2}{4} = \pi * \frac{12^2}{4} = 113\, mm^2$$

تنش در هر میله ⟹ $$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{5600}{113} = 49.5 \frac{N}{mm^2} = 49.5\, MPa$$

مثال ۰۳



ستونی کوتاه مطابق شکل روبه‌رو تحت تاثیر نیروی محوری P=۲۵۰KN قرار دارد.
مطلوب‌است محاسبه تنش در پای ستون (از وزن ستون صرف نظر شود).

حل مساله:

نیروی P فشاری است: $P=-۲۵۰KN=-۲۵۰\times ۱۰۰۰=-۲۵۰۰۰۰\ N$

$$A=\frac{\pi d^۲}{۴}=\frac{\pi\times ۲۰۰^۲}{۴}=۳۱۴۰۰\ mm^۲$$

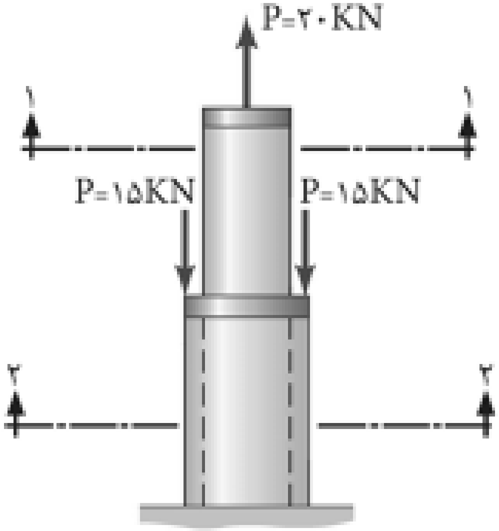
$$\sigma=\frac{P}{A}=\frac{-۲۵۰۰۰۰}{۳۱۴۰۰}\Rightarrow \boxed{\sigma=-۷/۹۶\ \frac{N}{mm^۲}\ \text{یا}\ MPa}$$

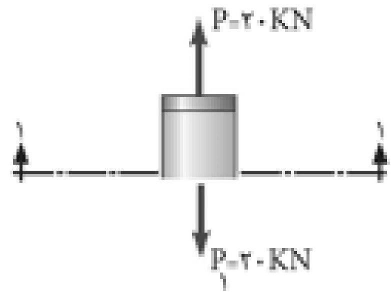
علامت منفی نشانگر آن‌است که تنش محوری ایجاد شده فشاری می‌باشد.

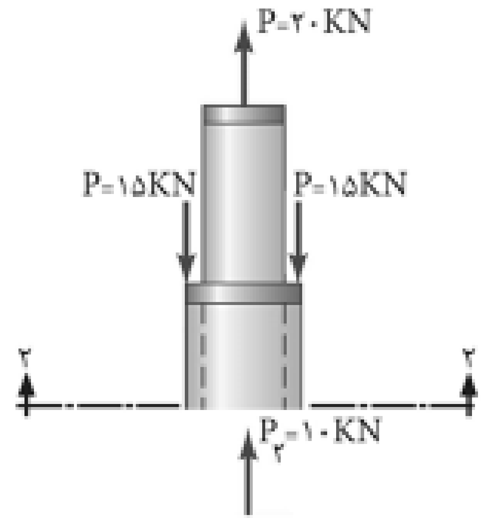
57

مثال ۴۰

حل مساله:







مثال ۴۰

حل مساله:

الف) تنش در مقطع ۱-۱

$$\begin{cases} P = ۲۰\ KN = ۲۰۰۰۰\ N \\ A = \dfrac{\pi D^۲}{۴} = \dfrac{۳/۱۴ \times ۵۰^۲}{۴} = ۱۹۶۲/۵\ mm^۲ \end{cases}$$

$$\sigma_۱ = \frac{P}{A} = \frac{۲۰۰۰۰}{۱۹۶۲/۵} \Rightarrow \boxed{\sigma_۱ = ۱۰/۱۹\ MPa \quad \text{کششی}}$$

ب) تنش در مقطع ۲-۲

با توجه به شکل برآیند نیروهای وارد به مقطع (۲-۲) برابر است با:

$$\begin{cases} P = -۱۵ - ۱۵ + ۲۰ = -۱۰KN = -۱۰۰۰۰\ N \\ A = \dfrac{\pi D^۲}{۴} - \dfrac{\pi d^۲}{۴} = \dfrac{۳/۱۴ \times ۸۰^۲}{۴} - \dfrac{۳/۱۴ \times ۵۰^۲}{۴} = ۳۰۶۱/۵\ mm^۲ \end{cases}$$

$$\sigma_۲ = \frac{P}{A} = \frac{-۱۰۰۰۰}{۳۰۶۱/۵} \Rightarrow \boxed{\sigma_۲ = -۳/۲۷\ MPa \quad \text{فشاری}}$$

مثال ۰۵

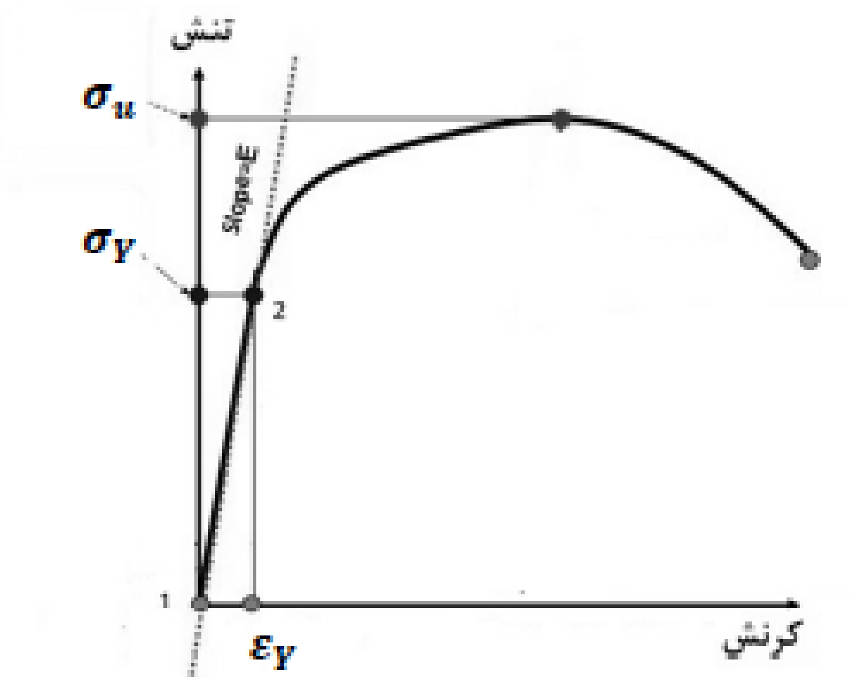
قطعه پیوسته ای مطابق شکل تحت تاثیر نیروی کششی P قرار گرفته است، هرگاه نیروی P را به آرامی افزایش دهیم، احتمال گسیختگی در کدام یک از نواحی a و b و c بیشتر است؟ چرا؟

61

مثال ۰۵

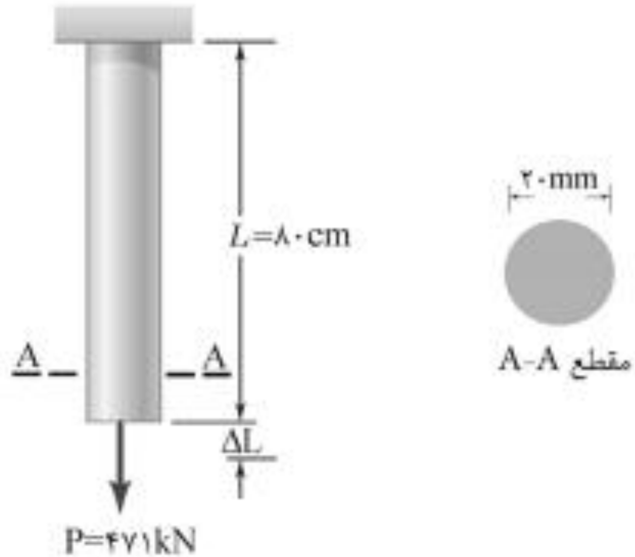
حل مساله:

با توجه به این که مقدار P در هر سه ناحیه ثابت است، با افزایش تدریجی نیروی P مطابق رابطه $\sigma = \frac{\pm P}{A}$ مقدار تنش در ناحیه c به‌دلیل سطح مقطع کوچک‌تر آن نسبت به نواحی a و b زودتر به تنشی می‌رسد که جسم دیگر قادر به تحمل آن نمی‌باشد.



مثال ۰۶

مطلوب‌است تغییر طول میله فولادی مطابق شکل زیر؛ اگر ضریب ارتجاعی میله $E = ۲\times۱۰^{۵}\ \frac{N}{mm^{۲}}$ باشد (از وزن میله صرف‌نظر می‌شود).



مثال ۶۰

حل مساله:

$$P = ۴۷۱ \text{ KN} = ۴۷۱۰۰۰ \text{ N}$$

$$L = ۸۰ \text{ cm} = ۸۰۰ \text{ mm}$$

$$A = \frac{\pi D^۲}{۴} = \frac{۳/۱۴ \times ۲۰^۲}{۴} = ۳۱۴ \text{ mm}^۲$$

$$E = ۲ \times ۱۰^۵ \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^۲}$$

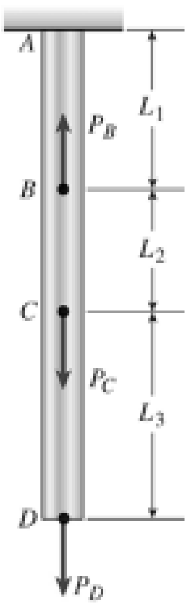
$$\Delta L = \frac{P.\ L}{A.\ E} = \frac{۴۷۱۰۰۰ \times ۸۰۰}{۳۱۴ \times ۲ \times ۱۰^۵} \Rightarrow \boxed{\Delta L = ۶ \text{ mm}}$$

- ✓ چنانچه جسم دارای مقطع و یا جنس یکنواخت نباشد و یا بارگذاری در نقاط مختلف انجام شود در این صورت آن را به بخش های مختلف تقسیم نموده و تغییر طول هر بخش را مجزا محاسبه نمائیم.
- ✓ برای محاسبه تغییر طول نهایی جسم آن ها را با یکدیگر جمع جبری می نماییم یعنی:

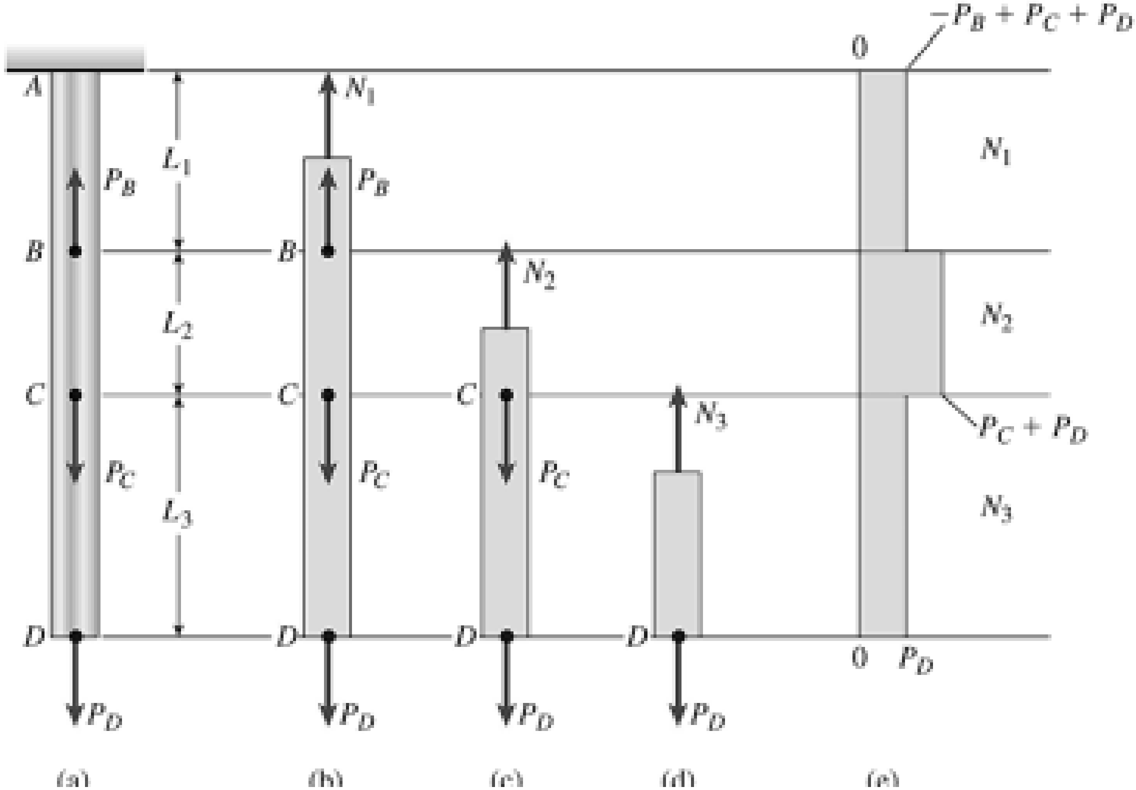
$$\Delta L = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i \, L_i}{A_i \, E_i}$$

مثال ۰۷

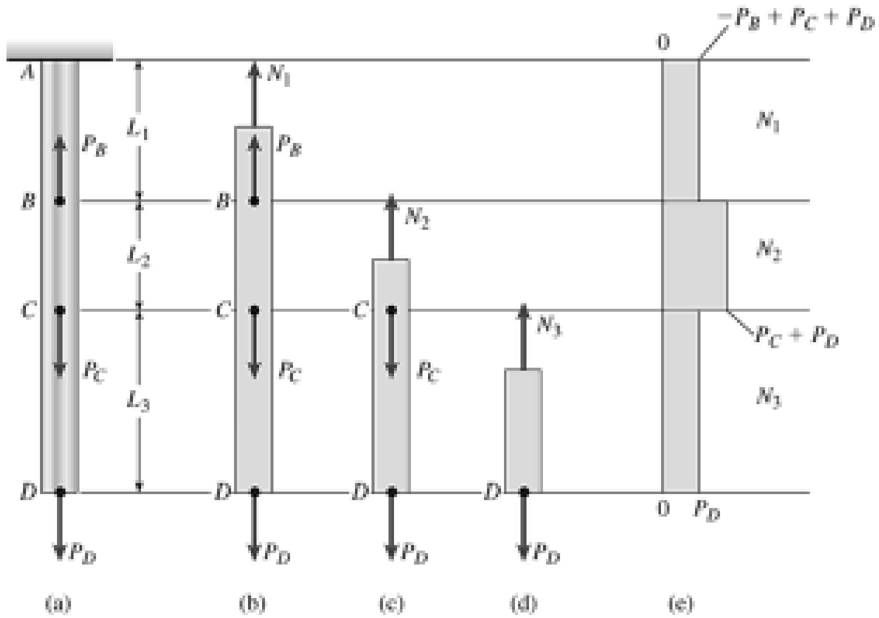
در شکل نشان داده شده دو بار P_B و P_C در طول میله وارد شده اند. میزان تغییرشکل نهایی میله را محاسبه کنید.



در حل چنین مسائلی بایستی از یک نقطه از میله شروع به حرکت کرد و پس از هر گونه تغییر (تغییر مساحت یا اعمال نیرو)، مقدار نیروی داخلی را محاسبه نمود. در ادامه با محاسبه نیروی داخلی هر بخش میران تنش یا تغییر شکل آن بخش قابل محاسبه است.



6



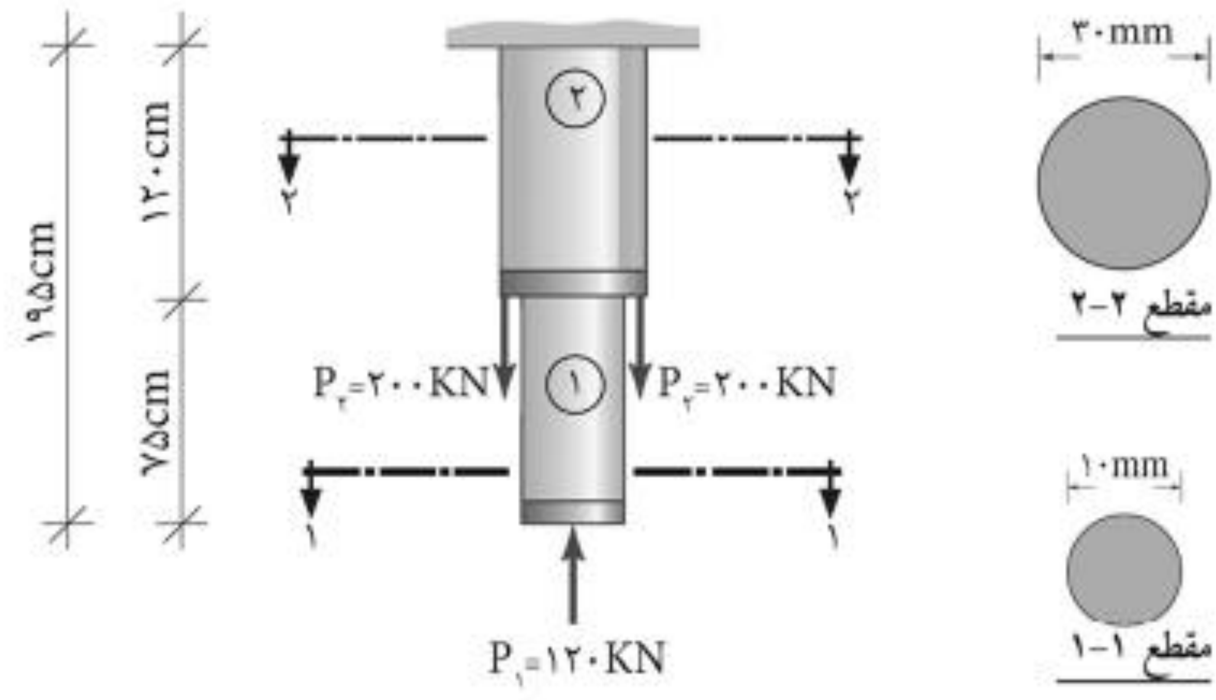
$$N_1 = -P_B + P_C + P_D \qquad N_2 = P_C + P_D \qquad N_3 = P_D$$

$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} \qquad \delta_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} \qquad \delta_3 = \frac{N_3 L_3}{EA}$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{3} \delta_i = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

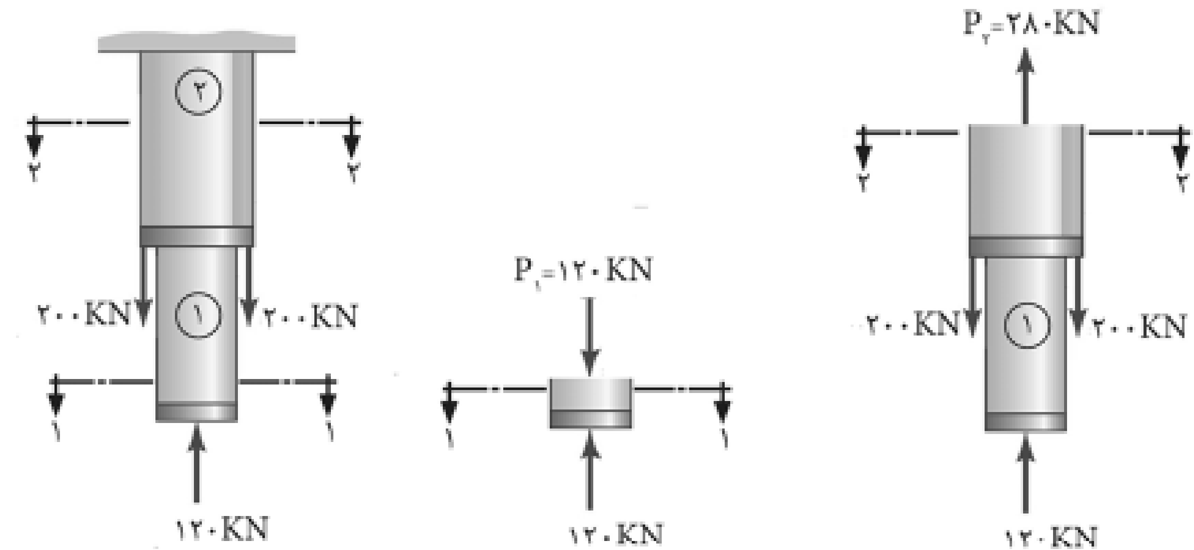
تغییر طول کلی جسم فولادی مطابق شکل زیر را محاسبه کنید.

$$(E = 2 \times 10^{5}\ \frac{N}{mm^{2}})$$



مثال ۸۰

حل مساله:



حل مساله:

تغییر طول کلی جسم برابر است با جمع جبری تغییر طول هر یک از قطعات ۱ و ۲ یعنی:

$$\Delta L_t = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

الف) تغییر طول قطعه شماره ۱:

$$P_1 = -120\ KN = -120000\ N$$ نیروی P فشاری می‌باشد.

$$L_1 = 75\ cm = 750\ mm$$

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{3/14 \times 10^2}{4} = 78/5\ mm^2$$

$$E = 2 \times 10^5\ \frac{N}{mm^2}$$

$$\Delta L_1 = \frac{P_1 .\ L_1}{A_1 .\ E_1} = \frac{-120000 \times 750}{78/5 \times 2 \times 10^5}$$

$$\boxed{\Delta L_1 = -5/73\ mm}$$ با توجه به علامت منفی، طول قطعهٔ ۱ کاهش می‌یابد.

مثال ۸۰

حل مساله:

ب) تغییر طول قطعه شماره ۲:

$$P_۲ = ۲۰۰ + ۲۰۰ - ۱۲۰ = ۲۸۰ \ KN = ۲۸۰۰۰۰ \ N$$

$$L_۲ = ۱۲۰ \ cm = ۱۲۰۰ \ mm$$

$$A_۲ = \frac{\pi D_۲^۲}{۴} = \frac{۳/۱۴ \times ۳۰^۲}{۴} = ۷۰۶/۵ \ mm^۲$$

$$E = ۲ \times ۱۰^۵ \ \frac{N}{mm^۲}$$

$$\Delta L_۲ = \frac{P_۲ L_۲}{A_۲ E_۲} = \frac{۲۸۰۰۰۰ \times ۱۲۰۰}{۷۰۶/۵ \times ۲ \times ۱۰^۵}$$

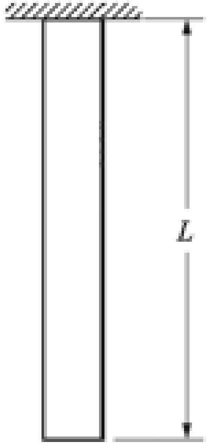
$$\boxed{\Delta L_۲ = ۲/۳۸ \ mm}$$ افزایش طول قطعهٔ ۲

تغییر طول کلی جسم برابر است با:

$$\Delta L_t = \Delta L_۱ + \Delta L_۲ = -۵/۷۳ + ۲/۳۸ \Rightarrow \boxed{\Delta L_t = -۳/۳۵ \ mm}$$

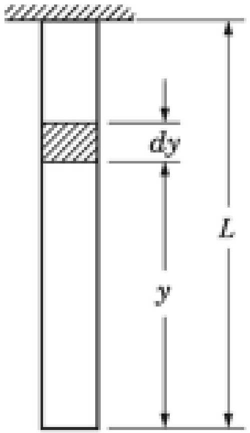
با توجه به علامت منفی، طول کل جسم کاهش می‌یابد.

مثال ۰۹



میله منشوری نشان داده شده دارای مساحت A، طول L و مدول الاستیسیته E می باشد. تغییر طول میله را تحت اثر وزن خود میله محاسبه کنید.

حل مساله:



اگر میله را به تکه های زیادی تقسیم کنیم، هر تکه تحت اثر وزن خود تغییر شکل می دهد. با جمع تغییرشکل تمامی تکه ها می توان تغییرشکل نهایی را محاسبه نمود.

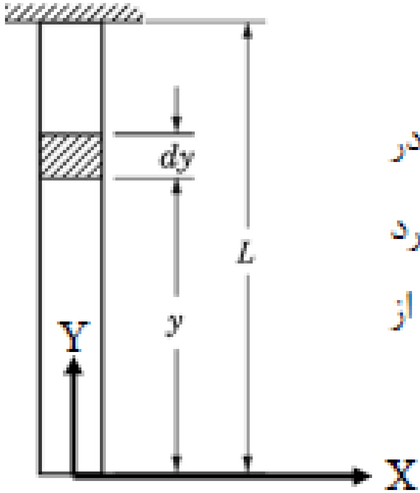
$$\Delta = \sum \delta_i \Longrightarrow \delta_i = \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

یا

$$\Delta = \int d\delta \Longrightarrow d\delta = d\left(\frac{P_i L_i}{E_i A_i}\right)$$

73

مثال ۰۹ حل مساله:



برای حل مساله، ابتدا دستگاه مختصات را مشخص می کنیم. در این مساله مبدا را در نقطه آزاد میله قرار می دهیم. سپس المانی به طول dy را در فاصله y از مبدا مورد بررسی قرار داده و پس از محاسبات مربوط به آن، محاسبات نهایی را با استفاده از انتگرال با تغییرات dy از صفر تا L انجام می دهیم.

نیروی وارده به المان دیفرانسیلی $= \gamma * A * y$

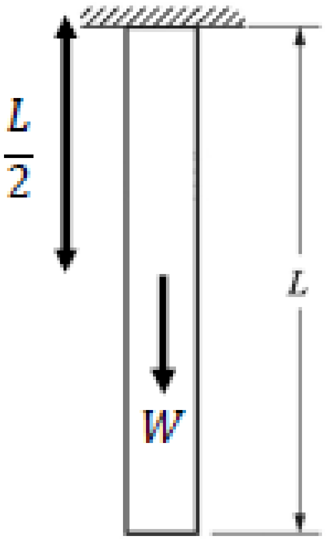
تغییرطول المان دیفرانسیلی $= d\Delta = \dfrac{(\gamma A y) * dy}{AE}$

تغییرطول میله $= \Delta = \int_0^L d\Delta = \int_0^L \dfrac{(\gamma A y) * dy}{AE} = \dfrac{\gamma A}{AE} \int_0^L y dy = \dfrac{\gamma A}{AE} * \dfrac{L^2}{2}$

$$\Delta = \frac{\gamma A}{AE} * \frac{L^2}{2} = \frac{(\gamma A L) * L}{AE} = \frac{WL}{2AE}$$

مثال ۰۹ حل مساله:

راه حل کوتاه



با توجه به منشوری بودن میله، وزن کل میله را محاسبه کرده و آنرا در محل مرکز جرم میله قرار می دهیم.

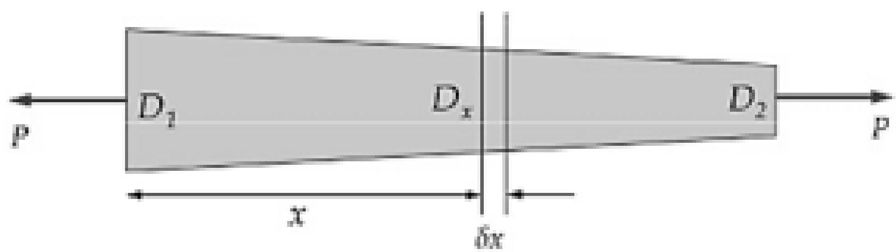
$$W = \gamma AL$$

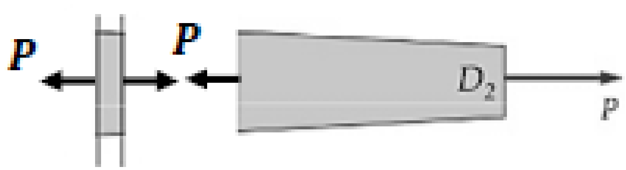
$$\Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{W * \frac{L}{2}}{AE} = \frac{WL}{2AE}$$

میله غیرمنشوری با مقطع دایره در شکل نشان داده شده و دارای طول L و مدول الاستیسیته E می باشد. تغییر طول میله را تحت اثر نیروی وارده محاسبه کنید.

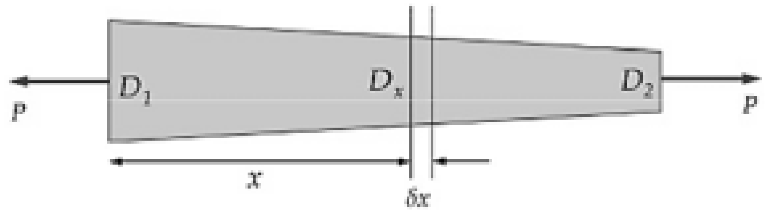
حل مساله:

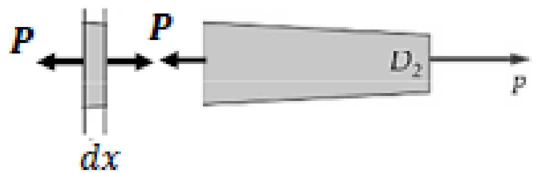
با توجه به ثابت نبودن مساحت میله بایستی از انتگرال گیری استفاده نمود.





مثال ۱۰ حل مساله:





تغییرطول المان دیفرانسیلی $= d\Delta = \dfrac{P * dx}{A(x) * E}$

مساحت المان دیفرانسیلی $= \pi * \dfrac{(D_x)^2}{4}$

قطر المان دیفرانسیلی $= D_x = D_1 - \left(\dfrac{D_1 - D_2}{L}\right) * x$

تغییرطول میله $= \Delta = \int_0^L d\Delta = \int_0^L \dfrac{P * dx}{A(x) * E} = \int_0^L \dfrac{P * dx}{\pi * \dfrac{(D_x)^2}{4} * E} = \dfrac{4P}{\pi E} \int_0^L \dfrac{dx}{(D_x)^2}$

$$\Delta = \frac{4PL}{\pi E D_1 D_2}$$