تیرها

- تیر یکی از اعضاء اصلی در مجموعه المان‌های مورد استفاده در سازه‌های ساختمانی است.
- در واقع وظیفه اصلی تیرها تحمل تنش‌های حاصل از نیروی برشی و لنگر خمشی ناشی از بارهای وارد بر آن و وزن خود تیر است.
- در طراحی سازه‌ها، معمولاً تیرها بر اساس لنگر خمشی موجود طراحی گشته و ضابطه برش در آن‌ها کنترل می‌گردد.

تحلیل تیرها:

تحلیل تیرها:

هدف ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی در طول تیر می باشد که به کمک آن مقادیر حداکثر آنها (نیرو و گشتاور) تعیین شده و جهت طراحی تیر مورد استفاده قرار می گیرد. برای ترسیم نمودارهای مذکور از دو روش زیر استفاده می شود:

۱- روش برش

۲- روش سطح زیر منحنی (روش جمع زنی)

تیرها را بر حسب تکیه گاهشان طبقه بندی می کنند:

تیری که در دو انتها روی تکیه گاه ساده قرار دارد

تیر نیمه آویزان

تیر یک سرگیردار

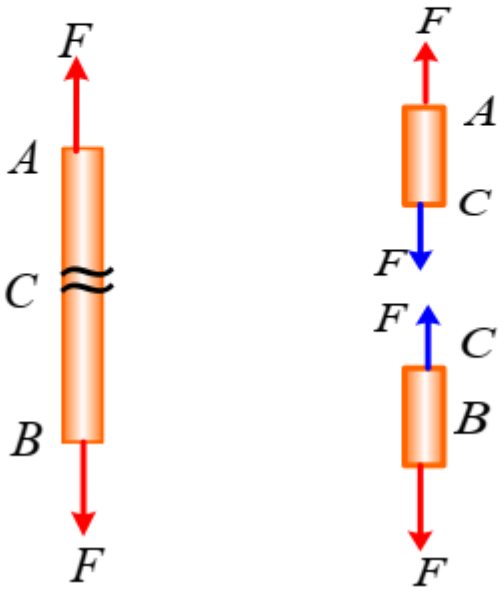
تیر دو سرگیردار

تیری که در یک سر گیردار و در سر دیگر روی تکیه گاه قرار دارد

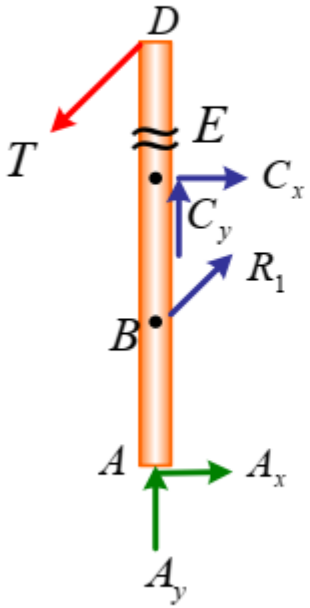
تیر با تکیه گاه های ساده متعدد

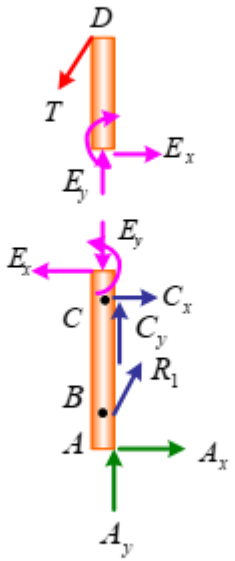
تحلیل تیرها

نیروهای داخلی در عضوهای دو نیرویی



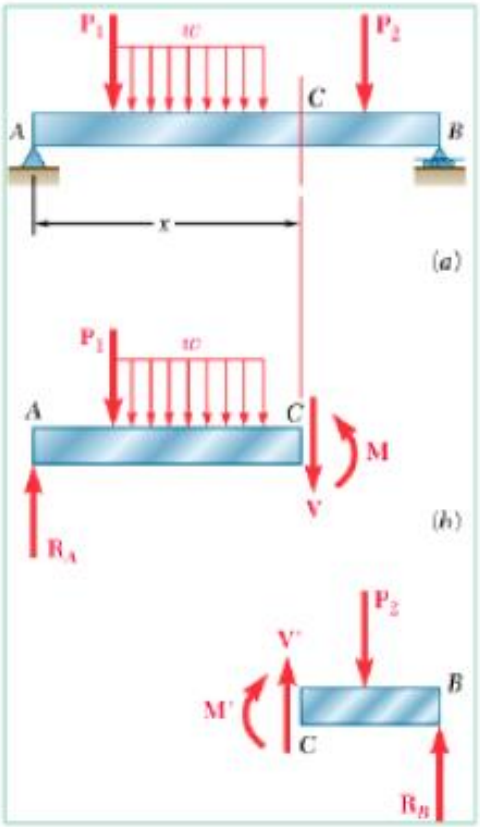
نیروهای داخلی در عضوهای چند نیرویی





به صورت یک سیستم نیرو و کوپل ظاهر می شود.

روش برش برای ترسیم نمودار V و M



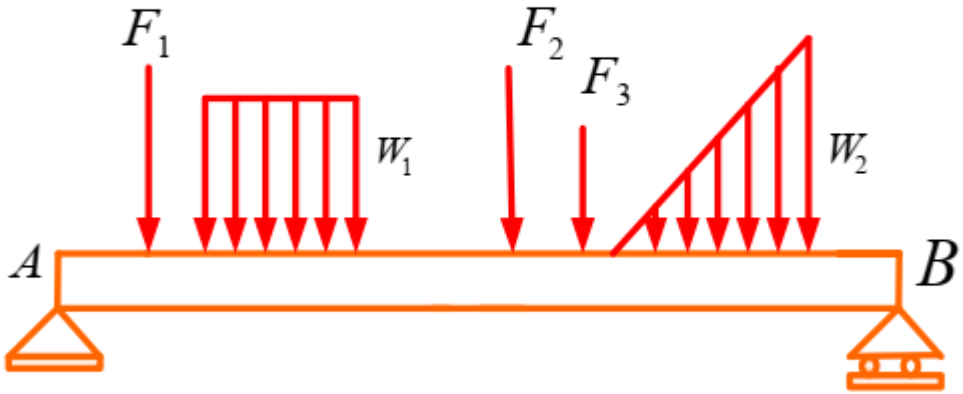
در روش برش مراحل زیر (جهت ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی) انجام می شود:

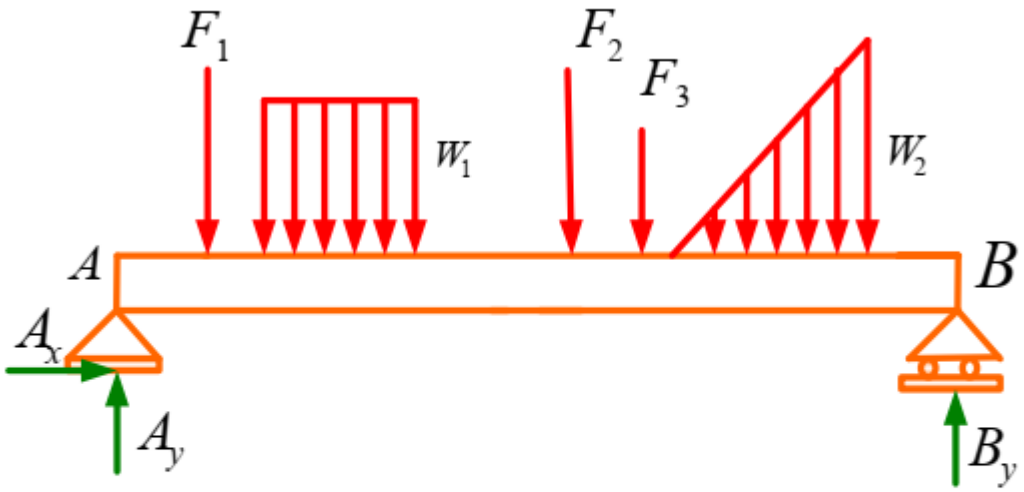
۱– تعیین نیروی عکس العمل تکیه‌گاهی.

۲– برش تیر در حد فاصل نیروهای اعمالی به آن. در مقطع برش، جهتهای نیروی برشی و گشتاور خمشی بصورت مقابل در نظر گرفته می شود.

۳– نوشتن معادلات تعادل برای یکی از دو قسمت برش خورده. که براساس این معادلات، نیروی برشی V و گشتاور خمشی M بر حسب طول تیر x (در حد فاصل مورد نظر) تعیین می شود.

تعیین نیروی برشی و گشتاور خمشی در تیرها

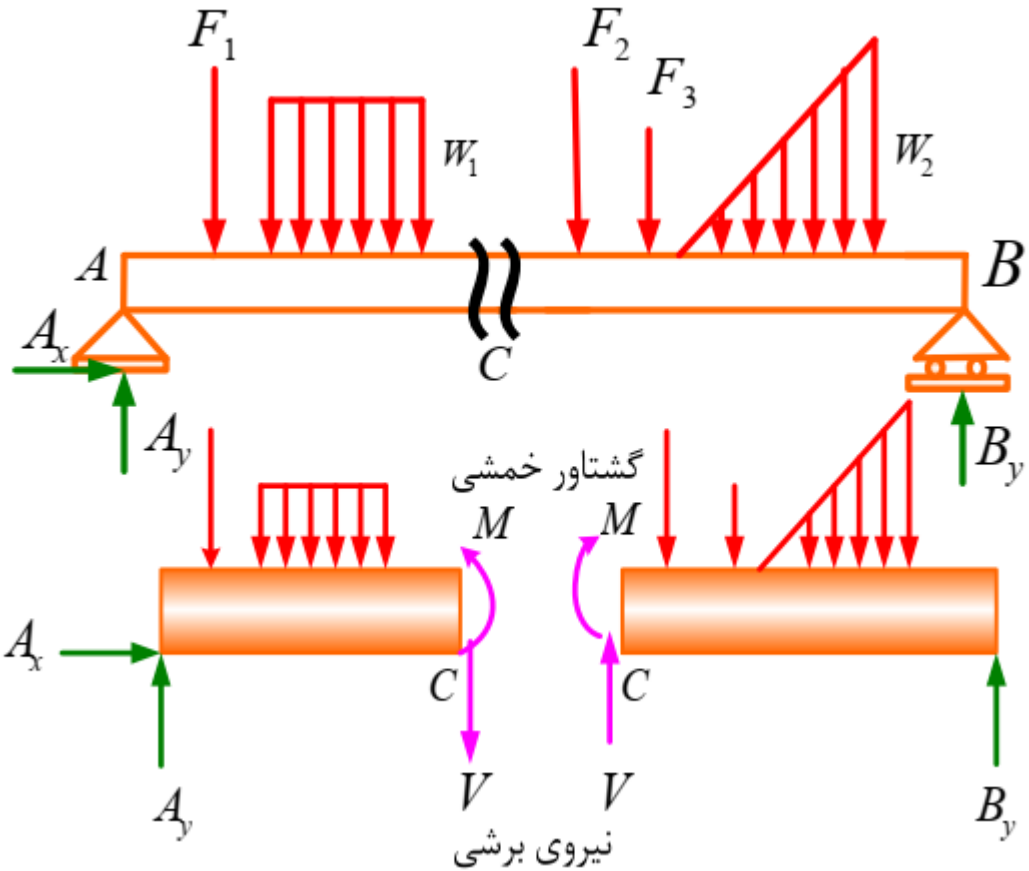




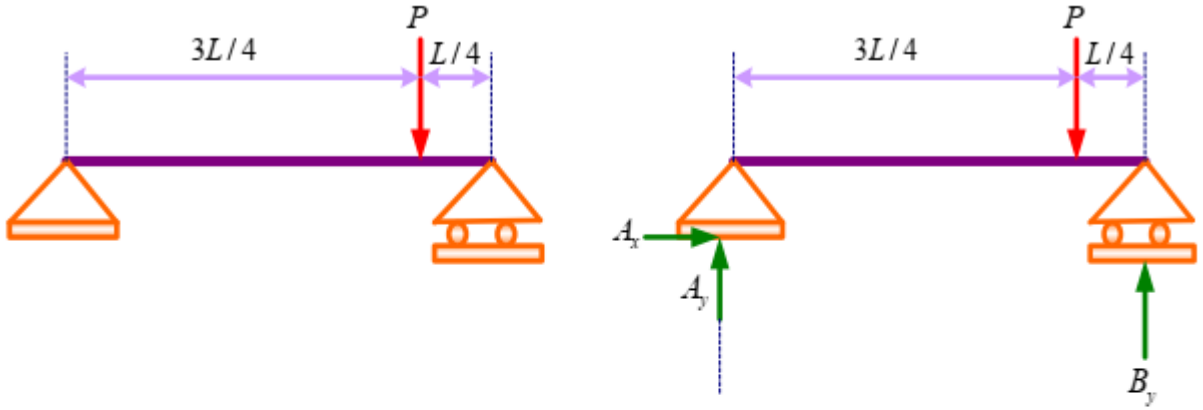
$\sum M_A = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول $B_y \longrightarrow$ تعیین میشود B_y

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول $A_y \longrightarrow$ تعیین میشود A_y

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

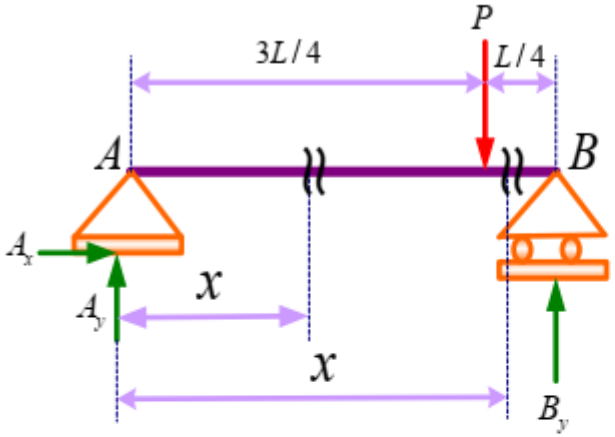

F_1
F_2
F_3
w_1
w_2
A
B
C
A_x
A_y
B_y
گشتاور خمشی
M
M
C
C
V
V
نیروی برشی

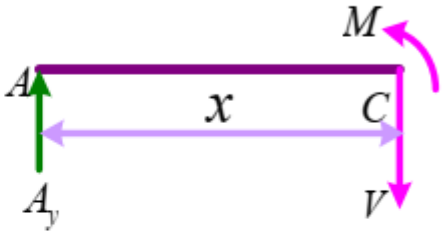
تمرین

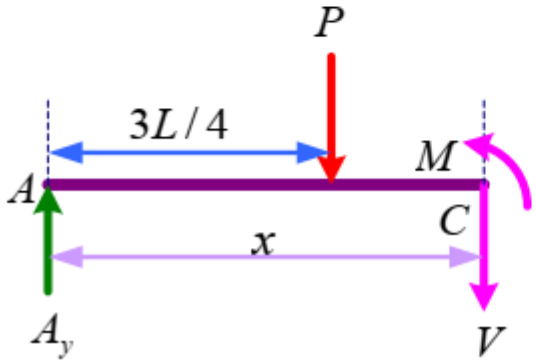


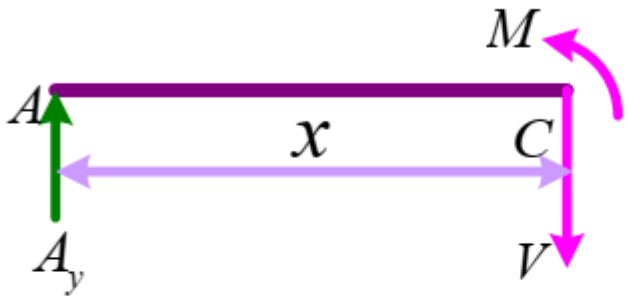
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \quad LB_y - P\left(\frac{3l}{4}\right) = 0 \Rightarrow B_y = \frac{3P}{4}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - P = 0 \Rightarrow \quad A_y = \frac{P}{4}$$

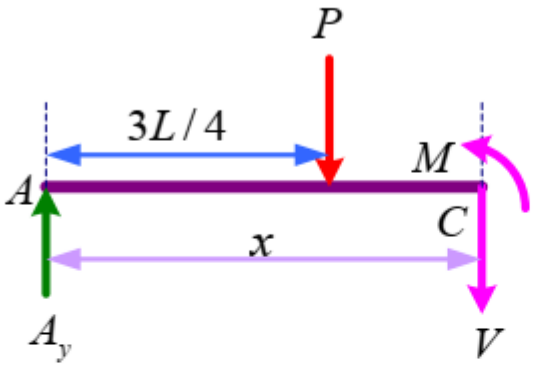

P
3L / 4
L / 4
A
B
A_x
A_y
x
x
B_y


M
A
x
C
A_y
V

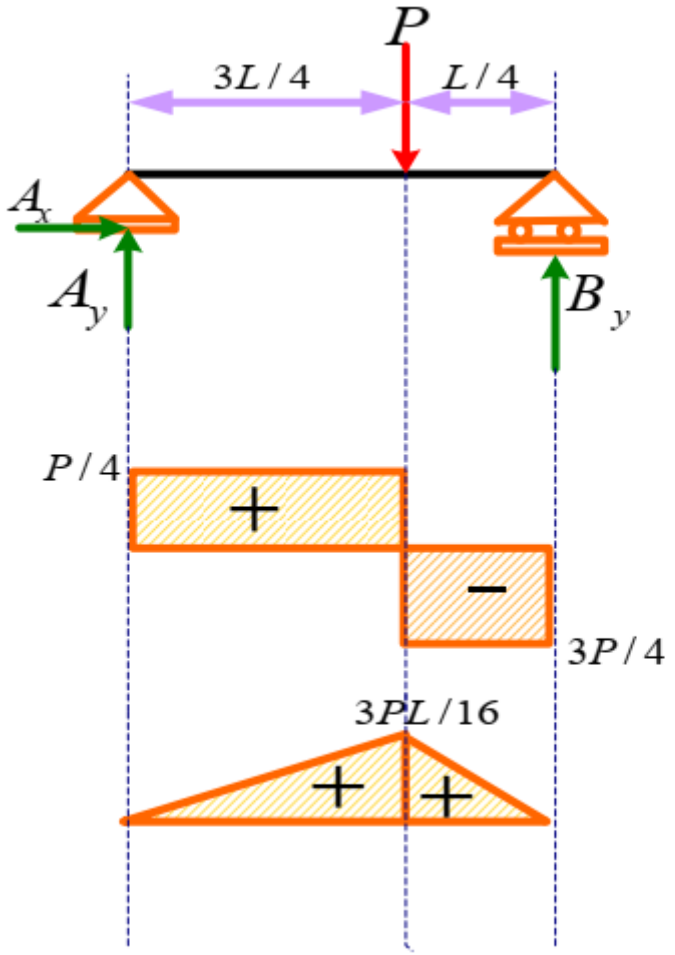

P
3L / 4
M
A
C
x
A_y
V



$$\left.\begin{aligned} \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - V = 0 \Rightarrow V = \frac{P}{4} \\ \sum M_C = 0 \Rightarrow A_y x - M = 0 \Rightarrow M = \frac{P}{4}x \end{aligned}\right\} \quad 0 \le x \le 3L/4$$



$$\left.\begin{aligned} \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - P - v = 0 \;\Rightarrow\; v = \frac{-3P}{4} \\ \sum M_C = 0 \Rightarrow A_y x - \left(x - \frac{3L}{4}\right)P - M = 0 \Rightarrow M = \frac{3P}{4}(l - x) \end{aligned}\right\} \quad 3L/4 \le x \le L$$



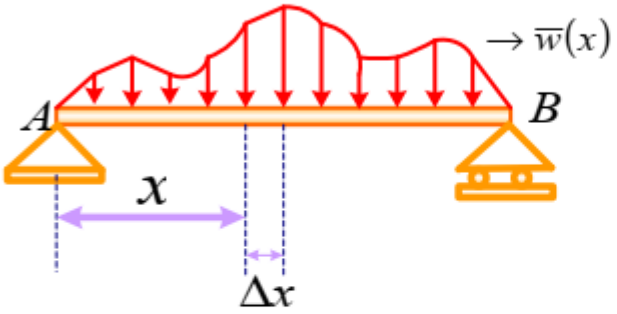
$$V = \frac{P}{4} \qquad M = \frac{P}{4}x$$

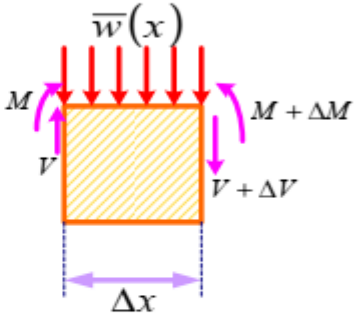
$$0 \le x \le 3L/4$$

$$v = \frac{-3P}{4} \qquad M = \frac{3P}{4}(l - x)$$

$$3L/4 \le x \le L$$

رابطه ما بین نیروی برشی و گشتاور خمشی

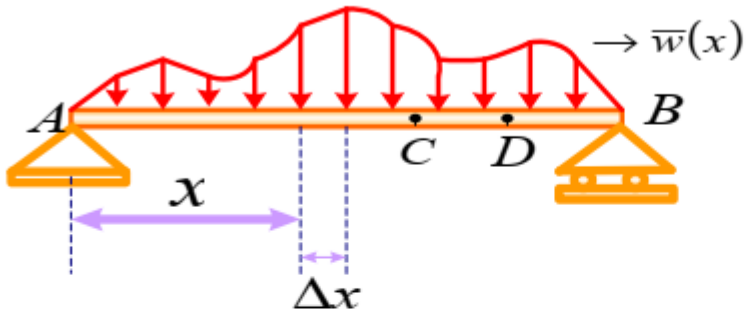




$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + \Delta V - V + \overline{W}\Delta x = 0 \qquad \frac{\Delta V}{\Delta x} = -\overline{W}(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dv}{dx} = -\overline{W}(x) \qquad \frac{dv}{dx} = -\overline{W}(x)$$

منهای شدت نیرو = شیب منحنی تغییرات نیروی برشی برحسب طول تیر

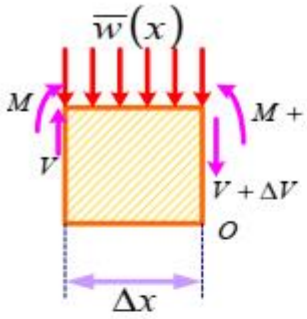


$$\frac{dv}{dx} = -\overline{W}(x)$$

$$dv = -\overline{W}(x)dx$$

$$\int_{V_c}^{V_d} dv = -\int_{x_c}^{x_d} \overline{W}(x)dx \Rightarrow V_d - V_c = -\int_{x_c}^{x_d} \overline{W}(x)dx$$

سطح زیر منحنی تغییرات شدت نیرو **برحسب** طول تیر در فاصله x_c تا x_d



$$\sum M_O = 0 \Rightarrow V\Delta x + M - \overline{W}(x)\Delta x\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - (M+\Delta M) = 0$$

$$V\Delta x - \overline{W}(x)\frac{\Delta x^2}{2} - \Delta M = 0$$

$$V - \frac{\overline{W}(x)}{2}\Delta x - \frac{\Delta M}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta x} = -\frac{\overline{W}(x)}{2}\Delta x + V \qquad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx} = V$$

$$V = \frac{dM}{dx}$$

نیروی برشی = شیب منحنی تغییرات گشتاور خمشی بر حسب طول تیر

$$dM = Vdx \Rightarrow$$

$$\int_{M_c}^{M_d} dM = \int_{x_c}^{x_d} Vdx \Rightarrow M_d - M_c = \int_{x_c}^{x_d} Vdx$$

سطح زیر منحنی تغییرات نیروی برشی بر حسب طول تیر در فاصله x_c تا x_d

روش سطح زیر منحنی برای ترسیم نمودار V و M (روش جمع زنی)

در روش جمع زنی مراحل زیر (جهت ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی) انجام می شود:

۱– تعیین نیروی عکس العمل تکیه‌گاهی و ترسیم نمودار برش.
مجموع نیروها در جهت قائم (در طول) برابر صفر است.

۲– ترسیم نمودار گشتاور خمشی بر اساس سطح زیر منحنی نیروی برشی و گشتاورهای متمرکز اعمالی به تیر.

۳– در صورت نیاز، استفاده از روابط بین بار، برش و گشتاور .

$$w = -\frac{dV}{dx}$$

$$\int_{V_0}^{V} dV = -\int_{x_0}^{x} w\,dx$$

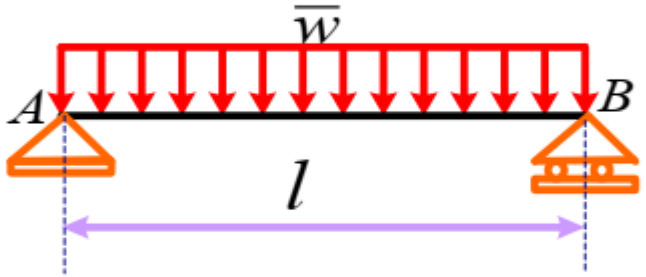
$V = V_0 +$ (the negative of the area under the loading curve from x_0 to x)

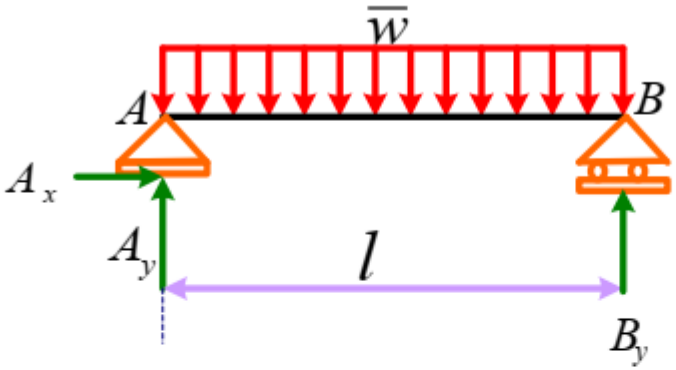
$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$\int_{M_0}^{M} dM = \int_{x_0}^{x} V\,dx$$

$M = M_0 +$ (area under the shear diagram from x_0 to x)

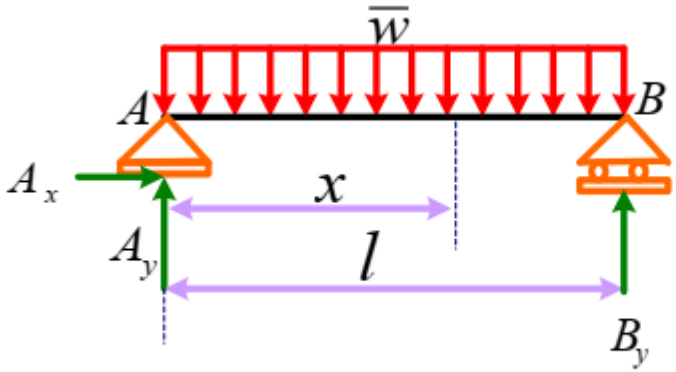
مثال: برای تیر نشانداده شده در شکل دیاگرام های نیروی برشی وگشتاور خمشی را رسم کنید.





$$\sum M_A = 0 \Rightarrow LB_y - \bar{W}(l)\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow B_y = \bar{W}\frac{l}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - \bar{W}(l)\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow A_y = \overline{W}\frac{l}{2}$$



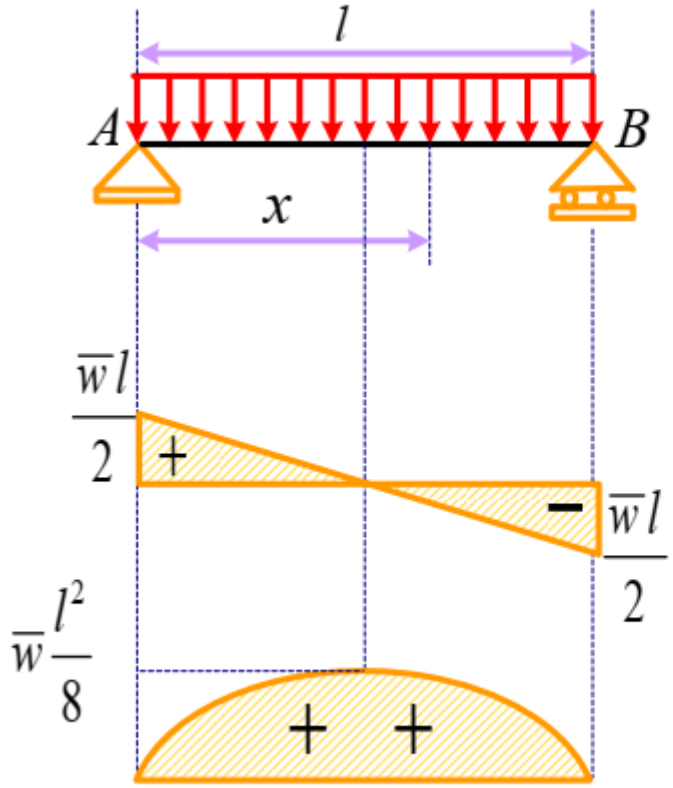
$$A_y = \overline{W}\frac{l}{2}$$

$$\frac{dV}{dx} = -\overline{W} \Rightarrow dV = -\overline{W}dx \Rightarrow \int_{A_y}^{V} dV = -\overline{W}\int_0^x dx$$

$$\Rightarrow V - A_y = -\overline{W}x \Rightarrow V = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$\frac{dM}{dx} = V = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right) \Rightarrow dM = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right)dx$$

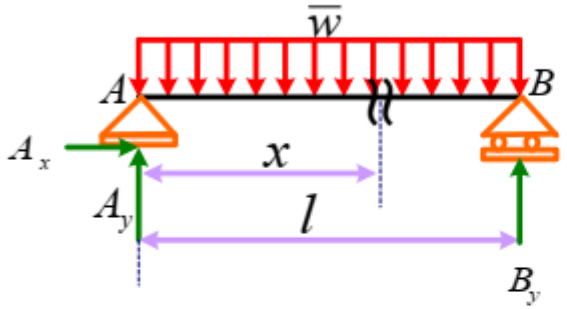
$$\int_0^M dM = \overline{W}\int_0^x \left(\frac{l}{2} - x\right)dx \Rightarrow M = \overline{W}\left(\frac{l}{2}x - \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow M = \frac{\overline{W}}{2}\left(lx - x^2\right)$$

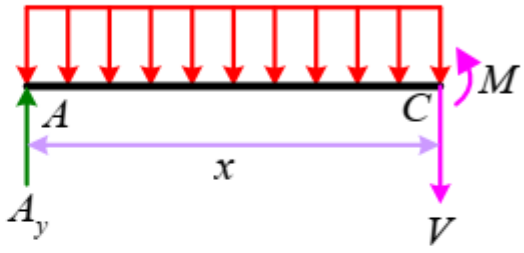


$$V = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$M = \frac{\overline{W}}{2}\left(lx - x^2\right)$$

حل مسئله قبل با روش مقطع:



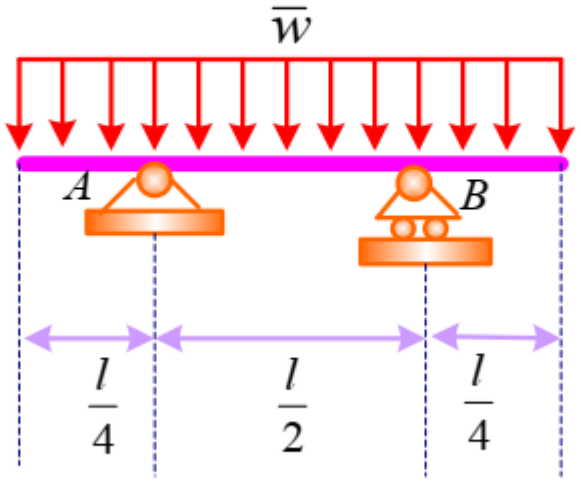


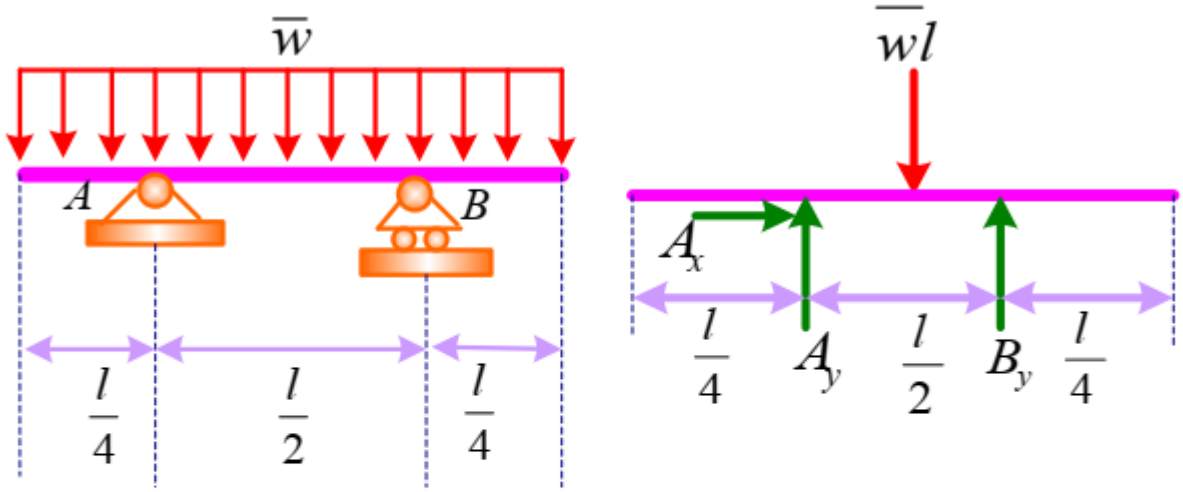
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \overline{W}x - V = 0 \qquad V = A_y - \overline{W}(x) = \overline{W}\frac{l}{2} - \overline{W}x$$

$$V = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right) \qquad \sum M_C = 0 \Rightarrow A_y x - \overline{W}x\left(\frac{x}{2}\right) - M = 0$$

$$M = \overline{W}\frac{l}{2}x - \overline{W}\frac{x^2}{2} = \frac{\overline{W}}{2}\left(lx - x^2\right)$$

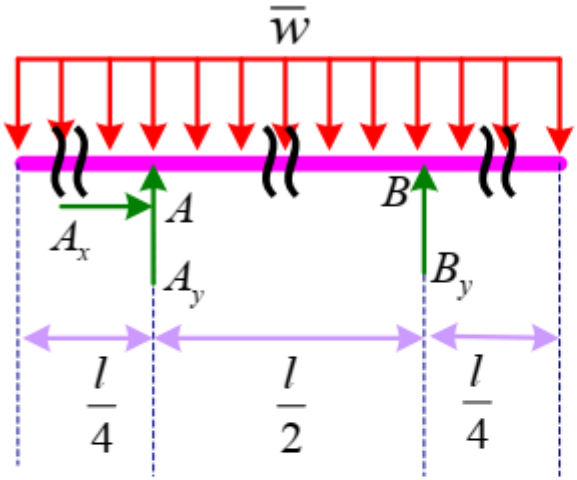
مثال: دیاگرام های نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر نشان داده شـده در شکل که تحت تأثیر بار توزیعی با شدت ثابت قرار گرفته است رسم کنید.

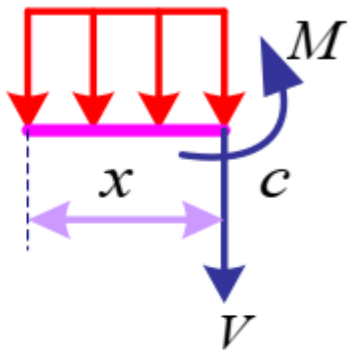




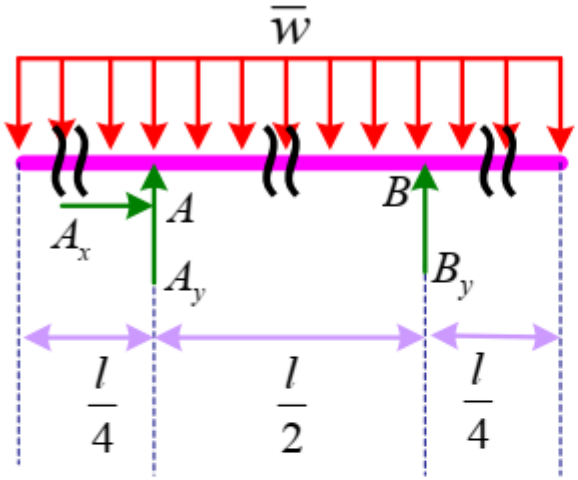
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y\left(\frac{l}{2}\right) - \overline{W}l\left(\frac{l}{4}\right) = 0 \Rightarrow B_y = \frac{\overline{W}l}{2}$$

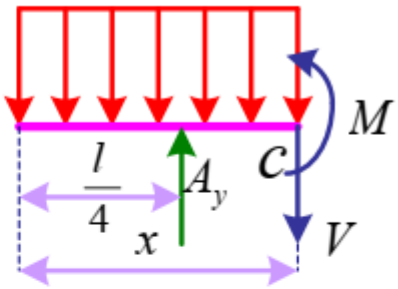
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - \overline{W}l = 0 \Rightarrow A_y = \overline{W}\frac{l}{2}$$





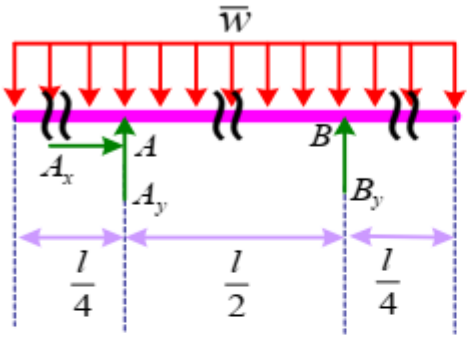
$$\left.\begin{aligned} \sum F_y = 0 \Rightarrow \overline{W}x + v = 0 \Rightarrow v = -\overline{W}x \\ \sum M_c = 0 \Rightarrow \overline{W}x\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0 \Rightarrow M = -\frac{Wx^2}{2} \end{aligned}\right\} 0 \le x \le l/4$$

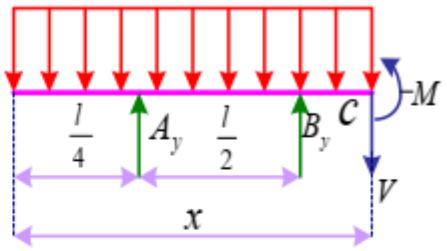




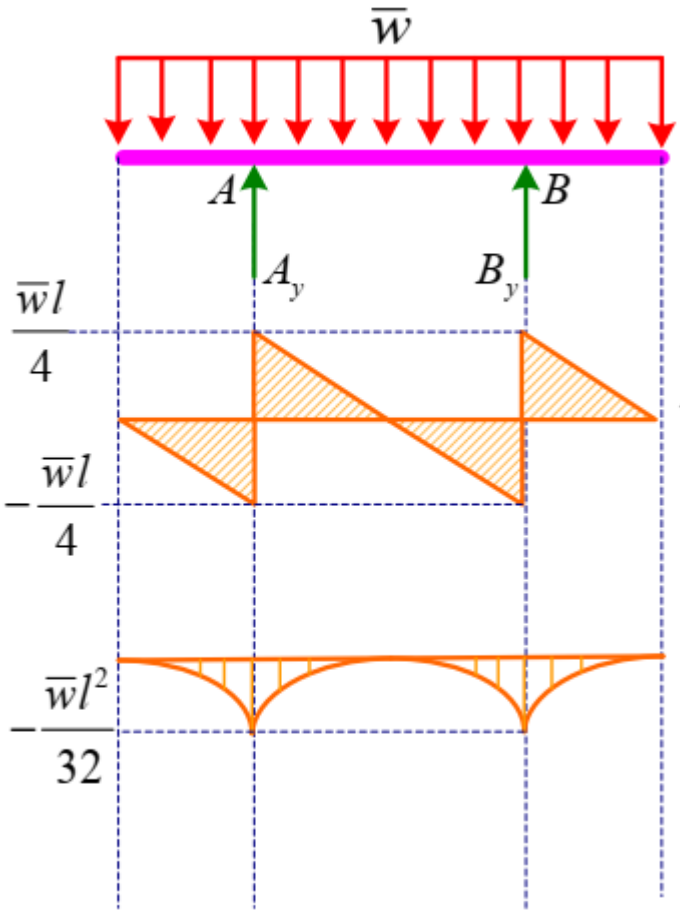
$$A_y = \overline{W}\frac{l}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \overline{W}x - v = 0 \Rightarrow v = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right)\\
&\sum M_C = 0 \Rightarrow -A_y\left(x - \frac{l}{4}\right) + \overline{W}x\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0\\
&\Rightarrow M = -\frac{\overline{W}x^2}{2} + \frac{\overline{W}l}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \frac{l}{4} \le x \le 3\frac{l}{4}$$





$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - \overline{W}x - v = 0 \Rightarrow v = \overline{W}(l-x) \\
&\sum M_C = 0 \Rightarrow -A_y\left(x-\frac{l}{4}\right)+\overline{W}x\left(\frac{x}{2}\right)-B_y\left(x-\frac{3l}{4}\right)+M=0 \\
&\Rightarrow M = \frac{\overline{W}l}{2}\left(x-\frac{l}{4}\right)+\frac{\overline{W}l}{2}\left(x-\frac{3l}{4}\right)-\frac{\overline{W}x^2}{2}
\end{aligned}\right\} \frac{3l}{4} \le x \le l$$



$$A_y = \overline{W}\frac{l}{2} \qquad B_y = \frac{\overline{W}l}{2}$$

$$v = -\overline{W}x \qquad M = -\frac{\overline{W}x^2}{2}$$

$$0 \le x \le l/4$$

$$v = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right) \qquad M = -\frac{\overline{W}x^2}{2} + \frac{\overline{W}l}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right)$$

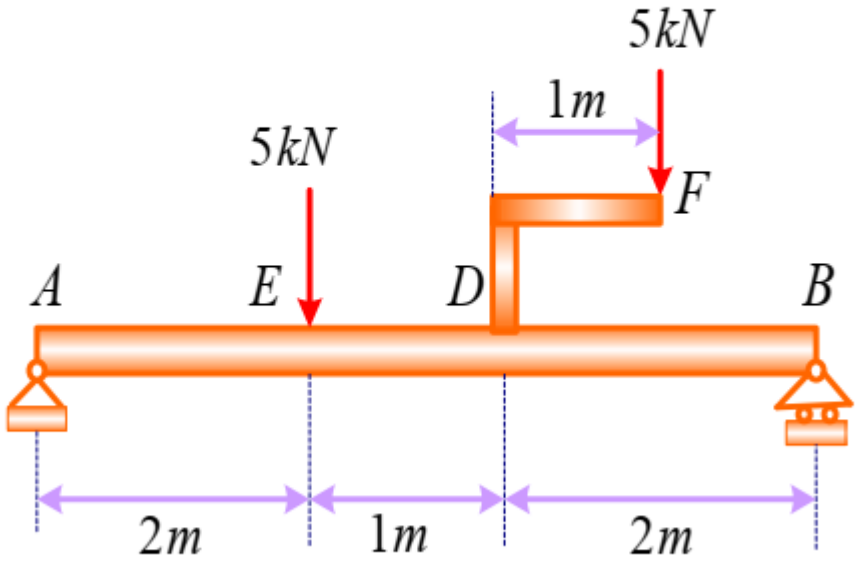
$$l/4 \le x \le 3l/4$$

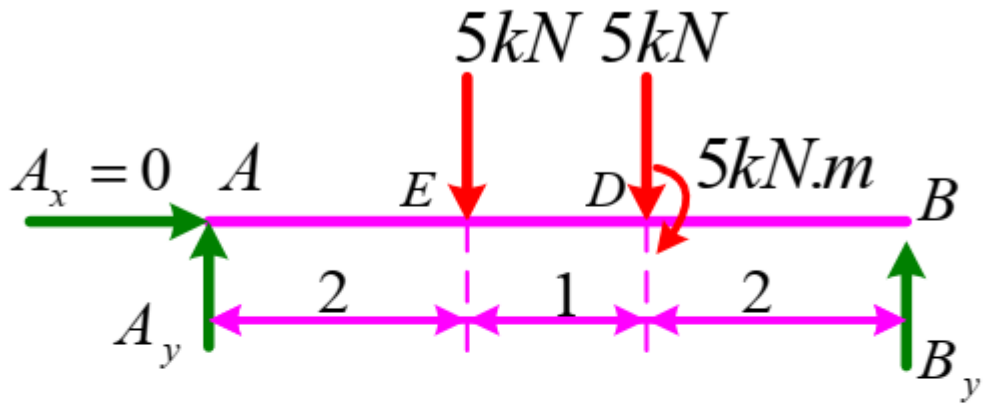
$$v = \overline{W}(l - x)$$

$$M = \frac{\overline{W}l}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right) + \frac{\overline{W}l}{2}\left(x - \frac{3l}{4}\right) - \frac{\overline{W}x^2}{2}$$

$$3l/4 \le x \le l$$

مثال: دیاگرام های نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر نشان داده شده در شکل رسم کنید؟



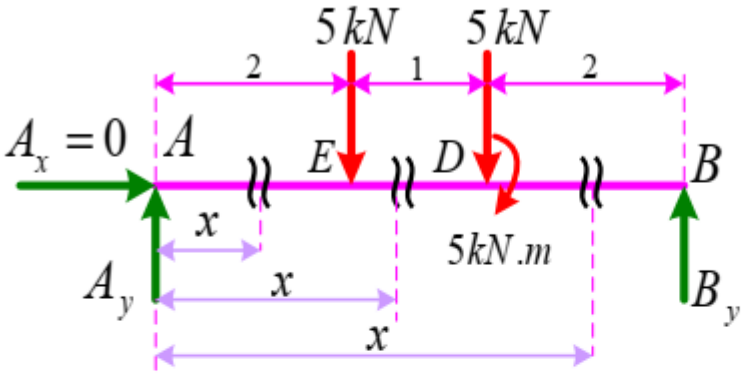


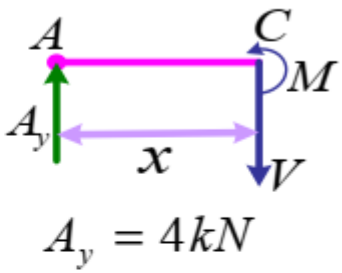
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2\times 5 + 3\times 5 + M - 5B_y = 0$$

$$B_y = 6kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 = 0$$

$$A_y = 4kN$$

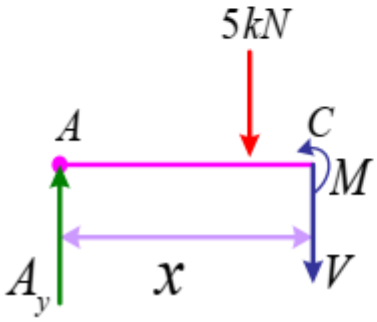




$A_y = 4kN$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow v = 4kN$ $\sum M_C = 0 \Rightarrow M - A_y x = 0 \Rightarrow M = 4x$

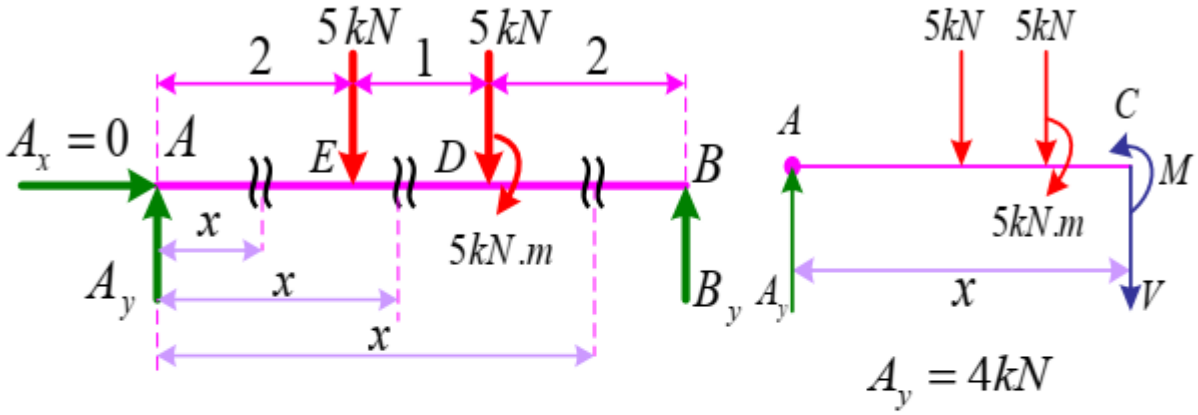
$0 \le x \le 2$



$\sum F_y = 0 \Rightarrow v = -1kN$

$\sum M_C = 0 \Rightarrow M + 5(x-2) - 4x = 0$

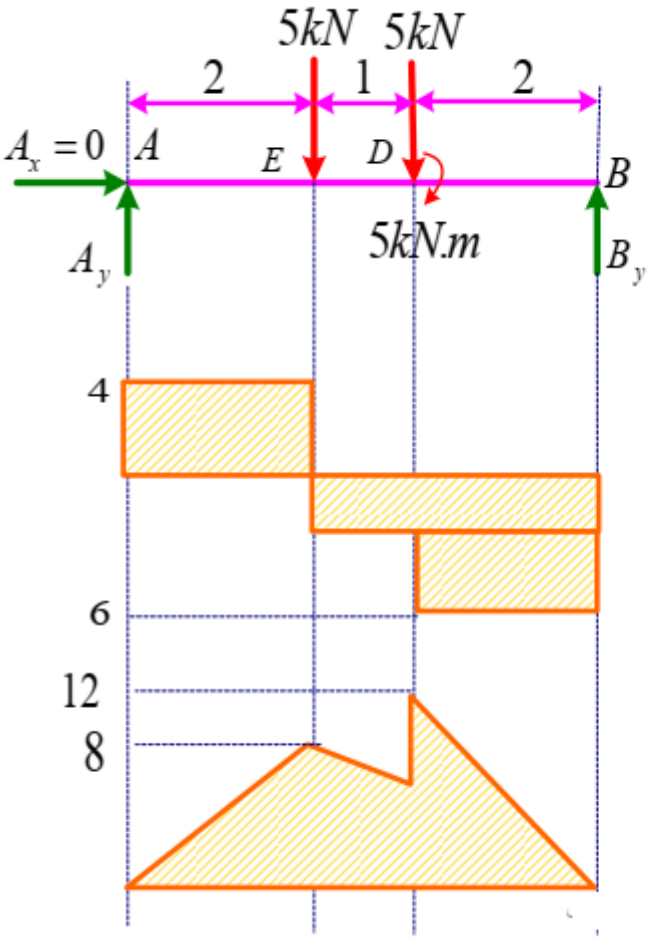
$\Rightarrow M = -x + 10$ $2 \le x \le 3$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow v = -6kN$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -M - 5(x-3) - 5(x-2) + 5 + 4x = 0$$

$$M = -6x + 30 \qquad 3 \le x \le 5$$



$v = 4kN \quad M = 4x$

$0 \le x \le 2$

$v = -1kN \quad M = -x + 10$

$2 \le x \le 3$

$v = -6kN \quad M = -6x + 30$

$3 \le x \le 5$

$A_y = 4kN \quad B_y = 6kN$