نام و نام خانوادگی :	دانشگاه صنعتی شاهرود	گروه آموزشی : **ریاضی**
شماره دانشجویی :		تاریخ : **۱۴۰۳/۲/۱۷**
نام مدرس :	**دانشکده علوم ریاضی**	وقت : **۹۰** دقیقه

امتحان میان‌ترم درس **ریاضی۲** (۱۷ گروه هماهنگ)

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۴۰۳-۱۴۰۲**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- معادله صفحه‌ای را بنویسید که بر صفحه $x+3y-z=7$ عمود و شامل دو نقطه $A=(2,0,5)$ و $B=(0,2,-1)$ باشد. **۱۵ نمره**

سوال ۲- نوع رویه $\sin\varphi\sin\theta=\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho\cos^2\varphi$ را مشخص و آن را رسم کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۳- الف) اگر $f(u,v)=\dfrac{1}{u+v}+\ln v$ و $\begin{cases} u=x+y^2 \\ v=e^{2x}\cos y \end{cases}$، مطلوب است $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. **۱۰ نمره**

ب) مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ را در نقطه $M(1,-1,3)$ و در امتداد بردار $\overrightarrow{PQ}$ بیابید که $P=(1,-1,3)$ و $Q=(2,1,5)$. **۱۰ نمره**

سوال ۴- نقاط ماکزیمم یا مینیمم نسبی و نقاط زینی رویه $f(x,y)=9x^3+\dfrac{1}{3}y^3+4xy$ را مشخص کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۵- انحنا و بردار یکه قائم N برای منحنی $r(t)=(2\cos t,3\sin t,2)$ در $t=\dfrac{\pi}{2}$ را بیابید. **۱۵ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوال۱: بردار یکه قائم صفحه $x+3y-z=7$ برابر است با : $\vec{u}=(1,3,-1)$

صفحه خواسته شده باید موازی دو بردار $\vec{u}=(1,3,-1)$ و $\overrightarrow{AB}=(-2,2,-6)$ باشد.

پس بردار قائم آن ، می‌تواند حاصل‌ضرب خارجی این دو بردار باشد. $\vec{N}=\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=(-16,8,8)$

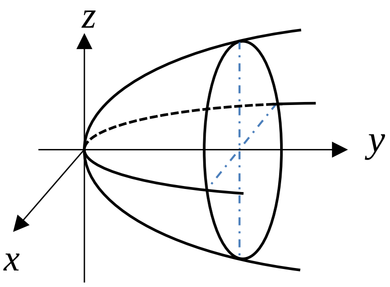
معادله صفحه مورد نظر عبارت است از : $-16(x-0)+8(y-2)+8(z+1)=0 \;\rightarrow\; -2x+y+z=1$

پاسخ سوال۲: معادله رویه در دستگاه مختصات کروی نوشته شده است.

برای تبدیل آن به مختصات دکارتی ، دو طرف معادله را در ρ ضرب می‌کنیم.

$$\rho\sin\varphi\sin\theta=\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\cos^2\varphi$$

اکنون داریم $y=x^2+z^2$ که معادله یک سهمیگون دوار است و محور تقارن آن محور y ها می‌باشد.



پاسخ سوال۳ : الف)

$$w_x=w_u\times u_x+w_v\times v_x \;\rightarrow\; w_x=\frac{-1}{(u+v)^2}\times(1)+\left(\frac{-1}{(u+v)^2}+\frac{1}{v}\right)\times(2e^{2x}\cos y)$$

ب) ابتدا بردار یکه جهت مورد نظر را پیدا می‌کنیم :

$$\overrightarrow{PQ}=(2-1,1+1,5-3)=(1,2,2)\;\rightarrow |\overrightarrow{PQ}|=3 \;\rightarrow\; \vec{u}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

سپس بردار گرادیان تابع را در نقطه داده شده پیدا می‌کنیم :

$$\nabla f(x,y,z)=(y+z,x+z,x+y)\;\rightarrow\;\nabla f(1,-1,3)=(2,4,0)$$

اکنون می‌توانیم مشتق سویی خواسته شده را بیابیم : $D_{\vec{u}}f(M)=(2,4,0)\cdot\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$

پاسخ سوال۴ : برای پیدا کردن نقاط ماکزیمم یا مینیمم نسبی یا نقاط زینی تابع ، مشتقات مرتبه اول آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} f_x=27x^2+4y=0 \\ f_y=y^2+4x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 27x^2+4y=0 \\ y^2+4x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 27x^2=-4y \\ 4x=-y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 27x^2=-4y \\ 16x^2=y^4 \end{cases} \rightarrow -64y=27y^4 \rightarrow \begin{cases} y=0\;,\;x=0 \\ y=\frac{-4}{3}\;,\;x=\frac{-4}{9} \end{cases}$$

فقط دو نقطه $O=(0,0)$ و $A=\left(\frac{-4}{9},\frac{-4}{3}\right)$ ممکن است که نقاط ماکزیمم یا مینیمم نسبی یا نقاط زینی تابع باشند.

به کمک مشتقات مرتبه دوم می‌توانیم وضعیت هر یک از آنها را مشخص کنیم :

$$\begin{cases} f_{xx}=54x \\ f_{yy}=2y \\ f_{xy}=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_{xx}(O)=0 \\ f_{yy}(O)=0 \\ f_{xy}(O)=4 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=-16 \quad , \quad \begin{cases} f_{xx}(A)=-24 \\ f_{yy}(A)=\frac{-8}{3} \\ f_{xy}(A)=4 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} -24 & 4 \\ 4 & \frac{-8}{3} \end{vmatrix}=64-16=48$$

با توجه به نتایج این آزمون ، مبدا مختصات یک نقطه زینی و نقطه $A=\left(\frac{-4}{9},\frac{-4}{3},\frac{64}{81}\right)$ یک نقطه ماکزیمم نسبی تابع است.

پاسخ سوال۵ : ابتدا مشتقات مرتبه اول و دوم تابع برداری را محاسبه می‌کنیم.

$$r(t)=(۲\cos t,۳\sin t,۲)\ \rightarrow\ r'(t)=(-۲\sin t,۳\cos t,۰)\ \rightarrow\ r''(t)=(-۲\cos t,-۳\sin t,۰)$$

سپس مقادیر لازم برای محاسبه انحنا را در نقطه $t=\frac{\pi}{۲}$ محاسبه می‌کنیم.

$$r(\frac{\pi}{۲})=(۰,۳,۲)\ ,\ r'(\frac{\pi}{۲})=(-۲,۰,۰)\ ,\ r''(\frac{\pi}{۲})=(۰,-۳,۰)\ ,\ |r'(t)|=\sqrt{۴\sin^۲ t+۹\cos^۲ t}=\sqrt{۴+۵\cos^۲ t}$$

$$|r'(\frac{\pi}{۲})|=۲\quad ,\quad r'(\frac{\pi}{۲})\times r''(\frac{\pi}{۲})=(-۲,۰,۰)\times(۰,-۳,۰)=(۰,۰,۶)\rightarrow |r'(\frac{\pi}{۲})\times r''(\frac{\pi}{۲})|=۶$$

اکنون می‌توانیم انحنای تابع را در نقطه $t=\frac{\pi}{۲}$ بیابیم :

$$\kappa(\frac{\pi}{۲})=\frac{|r'(\frac{\pi}{۲})\times r''(\frac{\pi}{۲})|}{|r'(\frac{\pi}{۲})|^۳}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

برای پیدا کردن بردار یک قائم بر منحنی ، ابتدا بردار یکه مماس را مشخص می‌کنیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم.

$$T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=\frac{۱}{\sqrt{۴+۵\cos^۲ t}}(-۲\sin t,۳\cos t,۰)$$

$$\rightarrow\ T'(t)=\frac{-۵\sin t\cos t}{\sqrt{(۴+۵\cos^۲ t)^۳}}(-۲\sin t,۳\cos t,۰)+\frac{۱}{\sqrt{۴+۵\cos^۲ t}}(-۲\cos t,-۳\sin t,۰)$$

$$T'(\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{۲}(۰,-۳,۰)\ \rightarrow |T'(\frac{\pi}{۲})|=\frac{۳}{۲}\ \rightarrow\ N(\frac{\pi}{۲})=\frac{T'(\frac{\pi}{۲})}{|T'(\frac{\pi}{۲})|}=\frac{۱}{۳}(۰,-۳,۰)=(۰,-۱,۰)$$