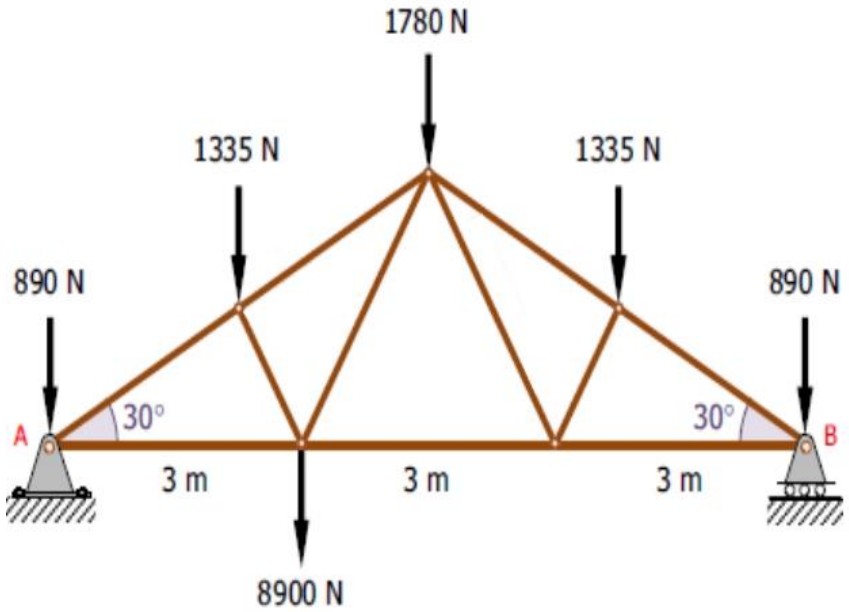
دانشگاه صنعتی شاهرود

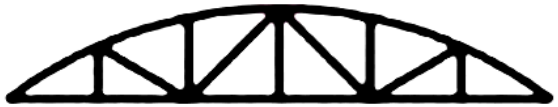
فصل ششم
تحلیل خرپا

خرپا سازه‌ای چند عضوی است که تمامی بخش‌های آن به یکدیگر پین شده‌اند. معنی پین این است که در هیچ مفصلی گشتاوری وجود ندارد؛ بنابراین در خرپا فقط نیرو وجود دارد.



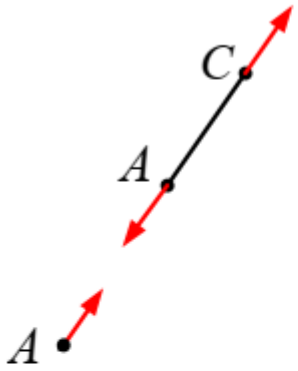
- خرپاها از جمله ساده‌ترین سازه‌های باربر هستند که در کل به عنوان سازه خمشی عمل نموده و در سقف‌ها، پل‌ها، مورد استفاده قرار می‌گیرند.
- دراین گونه سازه‌ها به علت عدم وجود نیروی برشی و لنگر خمشی در تک تک اعضاء متشکله خرپا، اتصالات باید به صورت مفصلی مدل شود.

برخی از خرپاهای مهم

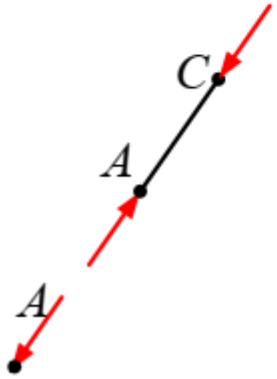
نوع	شکل خرپا
پرات (Pratt)	
هاو (Howe)	
فینک (Fink)	
قوسی (Bowstring)	
دندانه‌ای Saw Tooh	

نوع خرپا	شکل خرپا	جنس خرپا	محل استفاده	توضیحات
پرات (Pratt)		معمولا فولاد، در بعضی موارد چوب	معمولا در سقف و پل	دهانه حداکثر در حدود ۳۰ الی ۶۰ متر
هاو (Howe)		معمولا چوب	معمولا در سقف، در گذشته برای ساخت پل نیز مورد استفاده بود	دهانه حد اکثر حدود ۳۰ متر
فینک (Fink)		معمولا فولاد	معمولا در سقف	معمولا دهانه در حدود ۲۰ متر
قوسی (Bowstring)		معمولا فولاد	معمولا در سقف	معمولا برای سقف انبارها و گاراژها، دهانه ممکن است به ۳۰ متر برسد

اگرنیرو به بیرون گره متوجه باشد آن عضوی که به آن مربوط می شود تحت تأثیرکشش است.



اگر نیرو به طرف گره متوجه باشد آن عضوی که به آن مربوط می شود تحت تأثیر تراکم است.



روش‌های تحلیل نیرو در خرپا

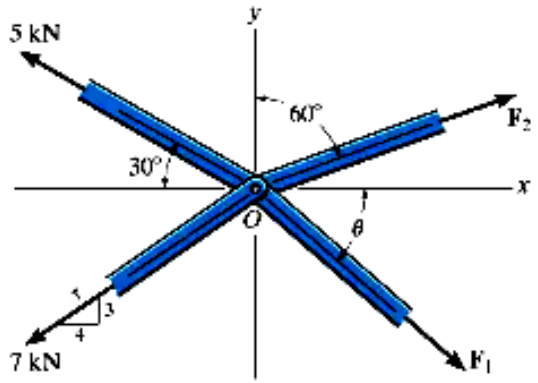
- روش مفاصل
- روش مقاطع

روش مفاصل

- در این روش هر مفصل را به صورت تنها تصور کنید؛ سپس برآیند تمامی نیروهای وارد شده به آن را صفر قرار دهید. بنابراین به منظور تحلیل نیرویی خرپا با استفاده از روش مفاصل، به ترتیب زیر عمل کنید:

- هر مفصل را به صورت جدا تصور کنید.
- نیروهای وارد شده به مفصل را معین کنید.
- برآیند نیروهای رسم شده روی مفصل را در راستای x و yبرابر با صفر قرار دهید.

برای درک بهتر این روش، به مثال‌های ارائه شده در انتهای این مطلب مراجعه فرمایید.

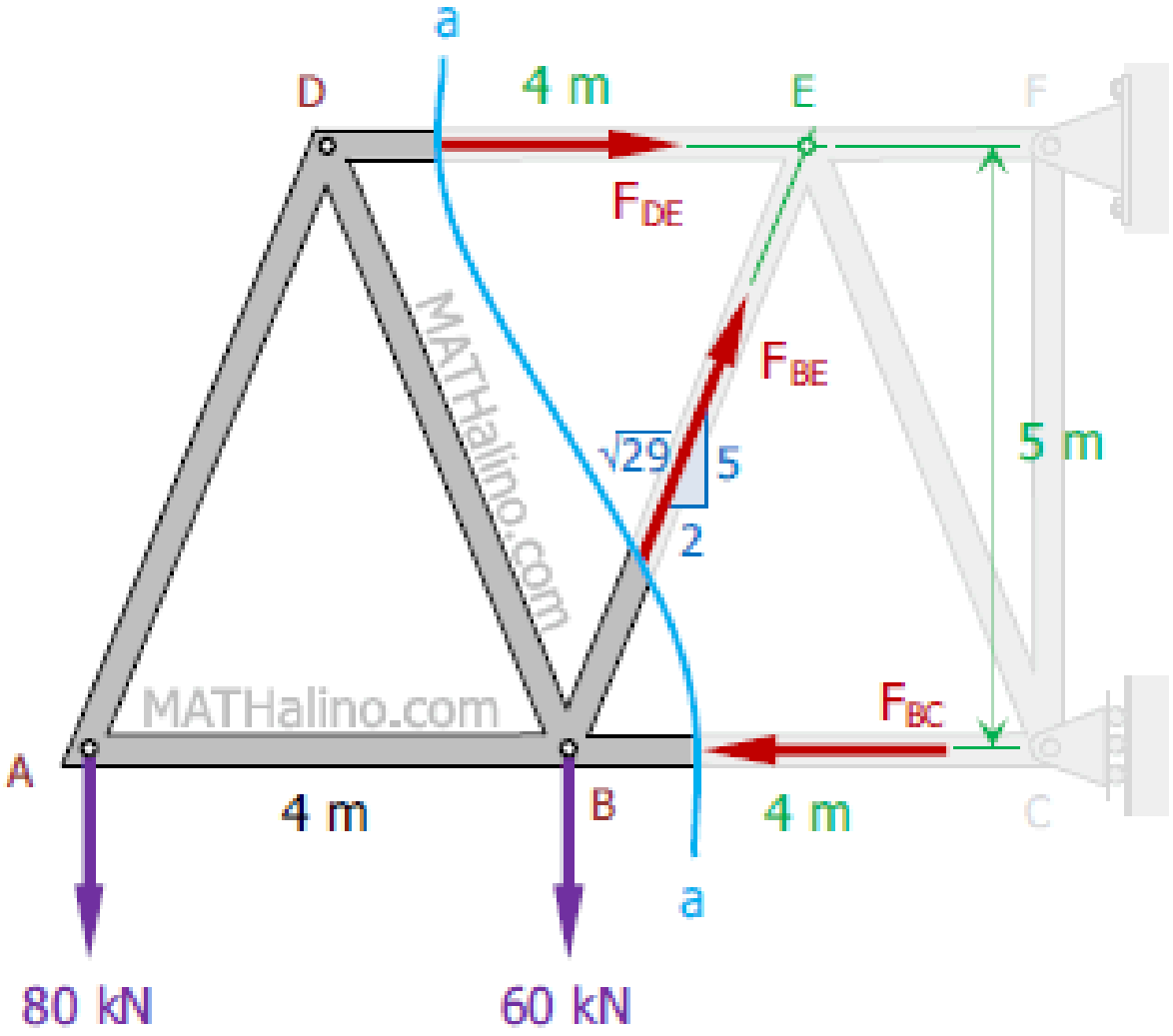


نیروی وارد شده به یک مفصل می‌تواند از نوع کششی یا فشاری باشد.

روش مقاطع

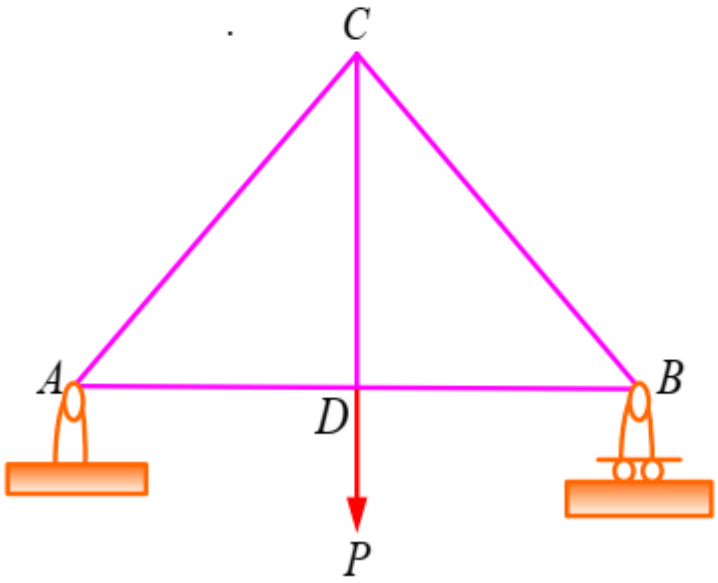
در این روش بخشی از خرپا جدا شده و به عنوان سیستم در نظر گرفته می‌شود. سپس برآیند نیروها و گشتاورهای وارد شده به آن برابر با صفر قرار داده شده و نیروهای مجهول در مسئله بدست می‌آیند. بنابراین برای بدست آوردن نیروهای مجهول موجود در یک خرپا به ترتیب زیر عمل کنید:

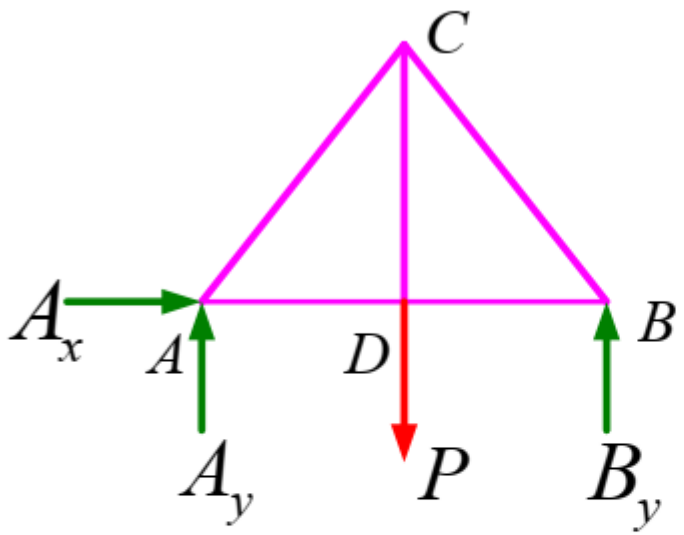
- انتخاب بخشی مناسب از خرپا به عنوان سیستم
- قرار دادن تمامی نیروهای خارجی وارد شده به سیستم انتخاب شده
- نوشتن معادله تعادل گشتاور و نیرو برای سیستم مفروض و محاسبه نیروهای مجهول قرار گرفته روی آن


a
D
4 m
E
F
F_{DE}
F_{BE}
$\sqrt{29}$
5
2
5 m
MATHalino.com
MATHalino.com
F_{BC}
A
4 m
B
4 m
C
a
80 kN
60 kN

تحلیل تراس ها

۱) روش مفصل ها





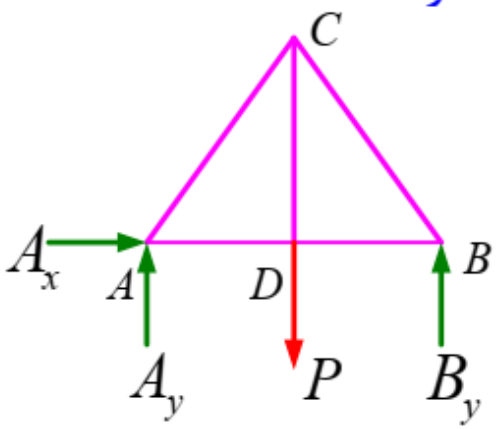
از وزن تراس در مقال نیروهای اعمالی صرف نظر می شود.

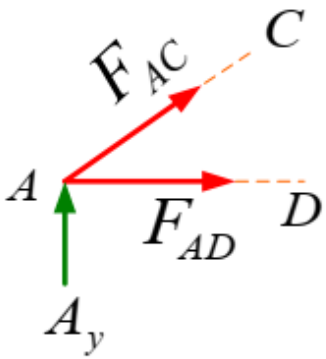
$\sum M_A = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول B_y است $\rightarrow$ B_y تعیین می شود

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول A_y است $\rightarrow$ A_y تعیین می شود

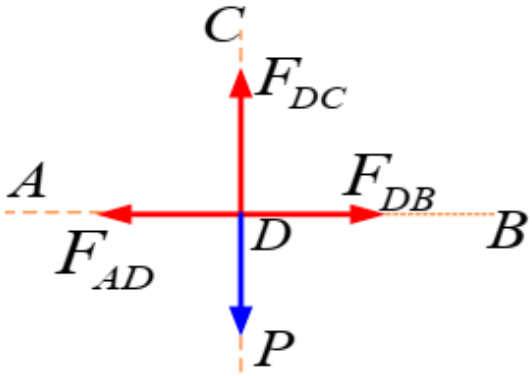
$\sum F_x = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول A_x است $\rightarrow$ A_x تعیین می شود

دیاگرام آزاد برای تک تک گره ها

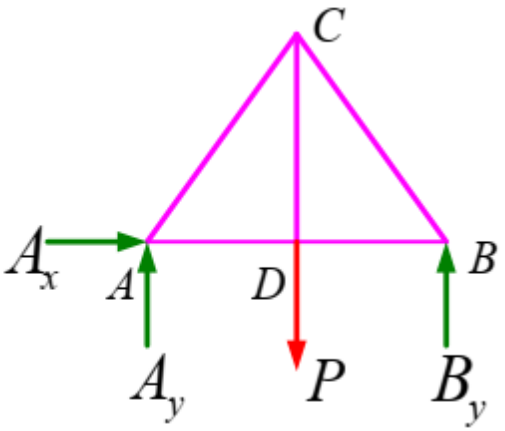


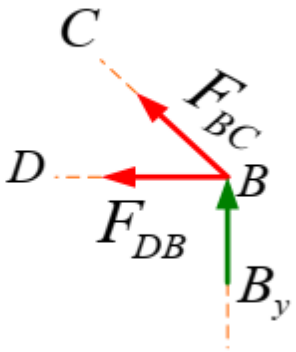


$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

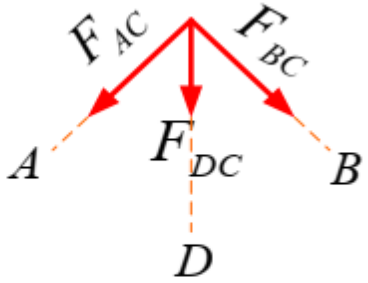


$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$





$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

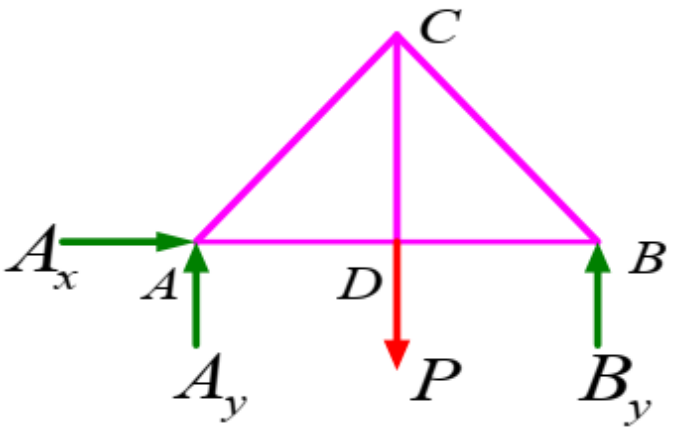


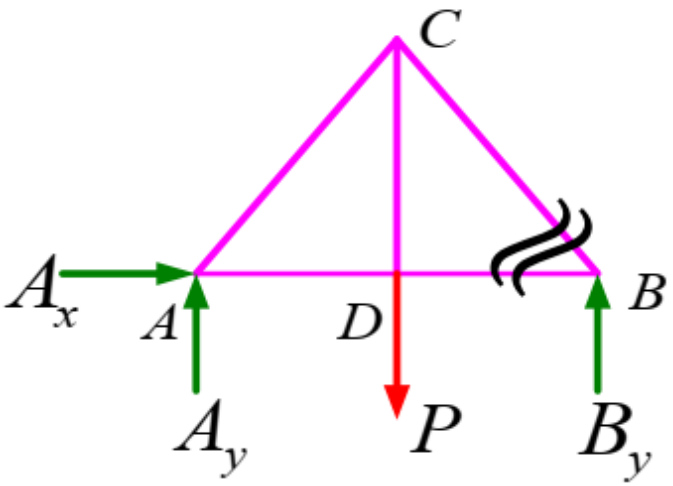
$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

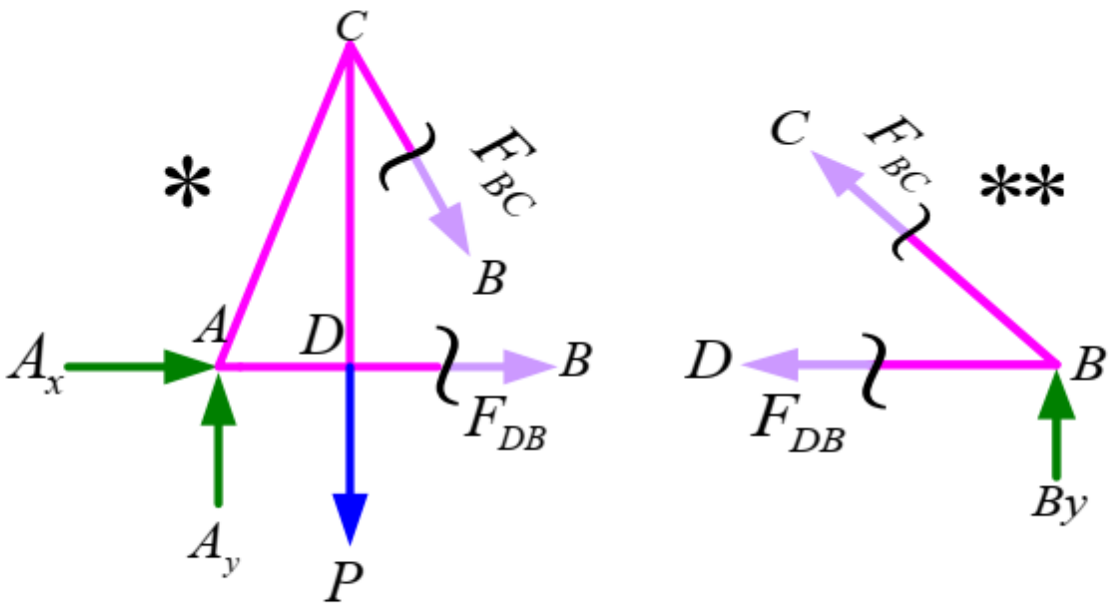
مجهولات: $F_{AC}, F_{AD}, F_{BC}, F_{DB}, F_{DC}$

روش مقاطع

در تراس قبلی می خواهیم نیروی داخلی در عضو DB را بدست آوریم:





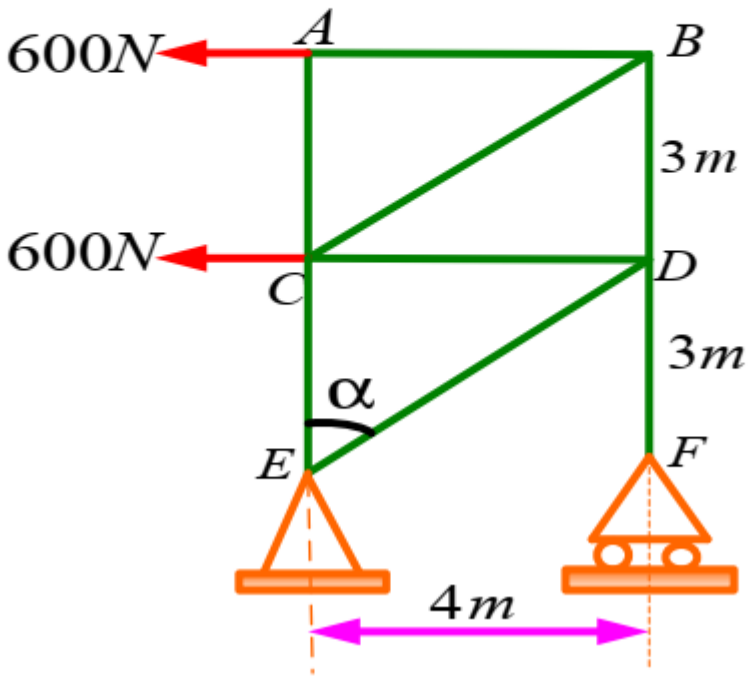


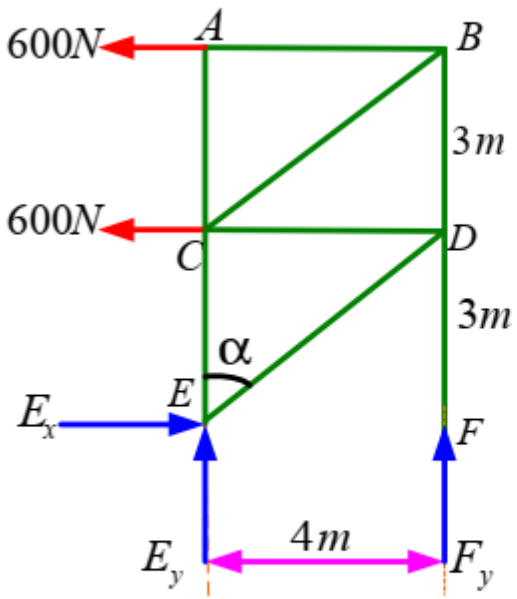
$* \rightarrow \sum M_C = 0 \Rightarrow$ F_{DB} تعیین می شود

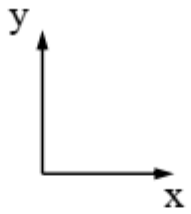
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

مثال: با استفاده از روش مفصل ها نیروهای داخلی را در هریک از اعضای تراس ذیل بدست آورید.







$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -600 - 600 + E_x = 0$$

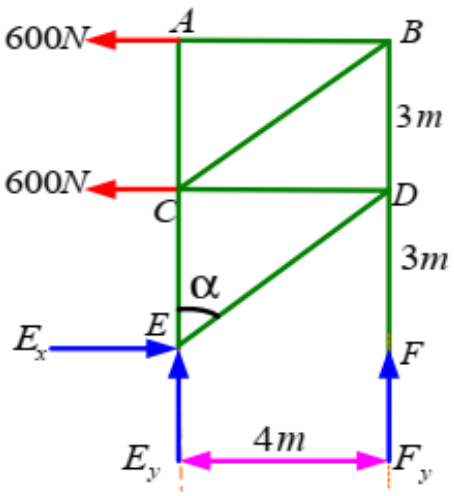
$$E_x = 1200N$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow$$

$$4F_y + 600(6) + 600(3) = 0$$

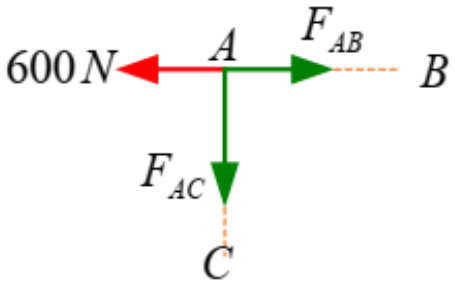
$$F_y = -1350N$$

$$\sum F_y \Rightarrow E_y + F_y = 0 \Rightarrow E_y = 1350$$



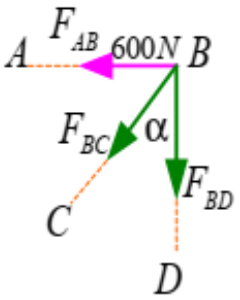
$\sin\alpha = 0.8$

$\cos\alpha = 0.6$



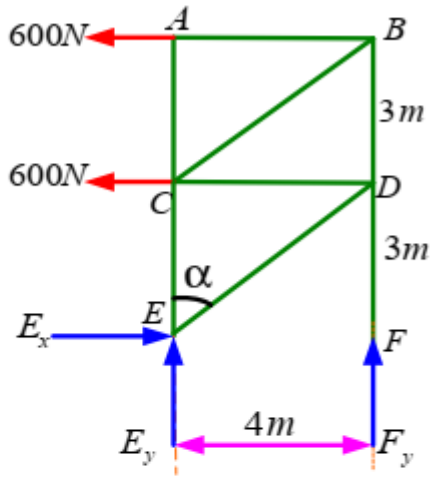
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} - 600 = 0 \qquad F_{AB} = 600N$$

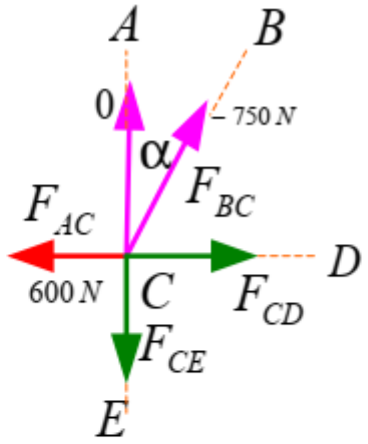
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \qquad F_{AC} = 0$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + 0.8F_{BC} = 0 \Rightarrow \qquad F_{BC} = -750N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BD} + 0.6F_{BC} = 0 \Rightarrow \qquad F_{BD} = 450N$$



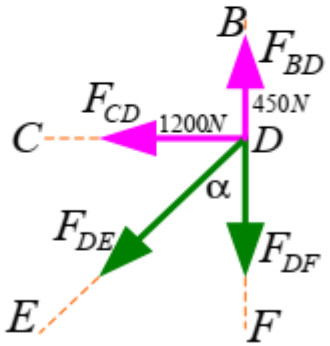


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} - 600 + 0.8F_{BC} = 0$$

$$F_{CD} = 1200N$$

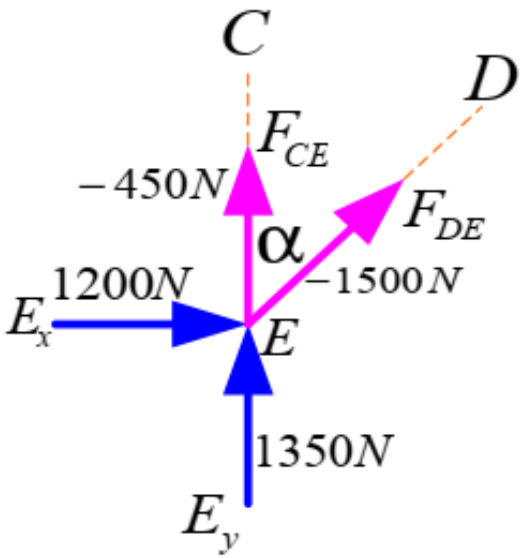
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 0.6F_{BC} + F_{AC} - F_{CE} = 0$$

$$F_{CE} = -450N$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{CD} - 0.8F_{DE} = 0 \qquad F_{DE} = -1500N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{DF} - 0.6F_{DE} + F_{BD} = 0 \qquad F_{DF} = 1350N$$



$$\sum F_x = 0$$

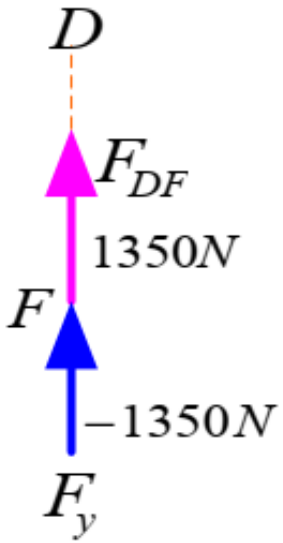
$$1200 + 0.8F_{DE} = 0$$

$$F_{DE} = -1500N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{CE} + 1350 + 0.6F_{DE} = 0$$

$$F_{CE} = -450N$$

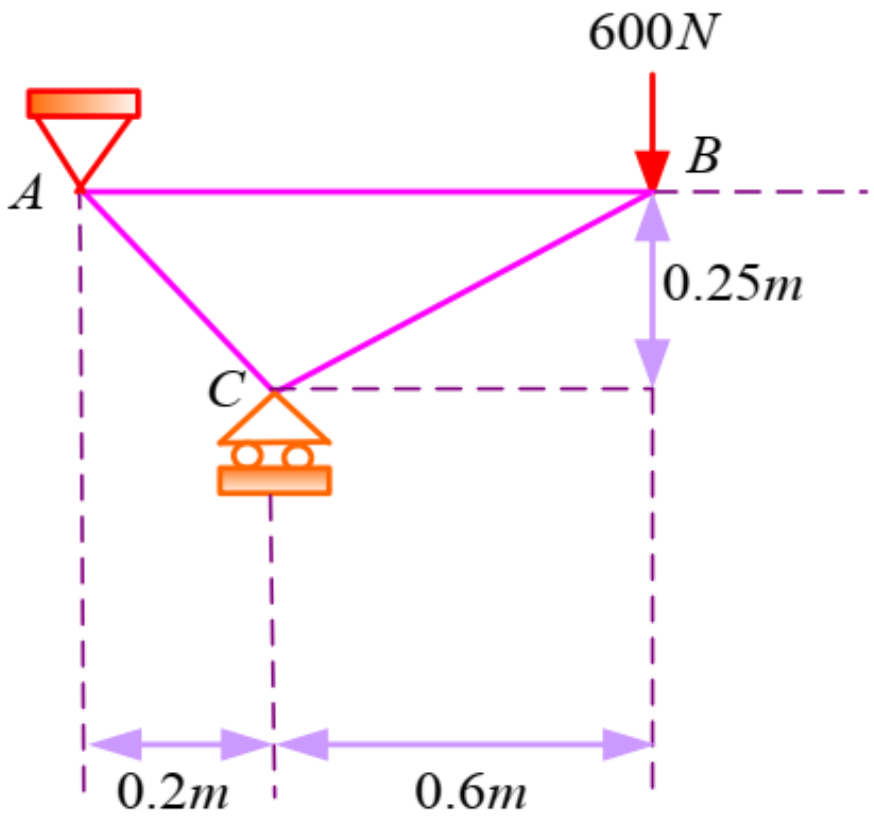


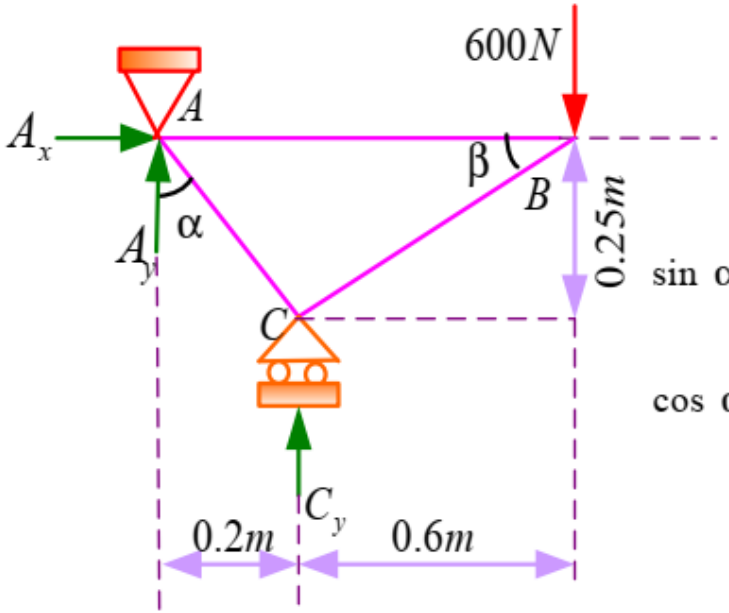
$$\sum F_y = 0$$

$$F_y + F_{DF} = 0$$

$$F_{DF} = 1350N$$

مثال: برای تراس مطابق شکل نیروهای داخلی در هر یک ازاعضا را تعیین کرده و اعـضای کششی و فشاری را مشخص کنید.





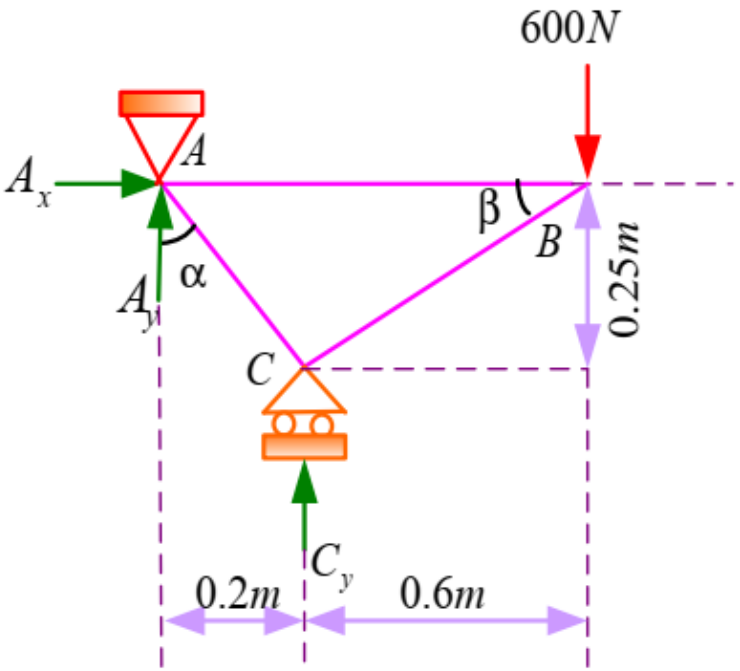
$$\sin\alpha = \frac{0.2}{\sqrt{(0.2)^2 + (0.25)^2}} = 0.63$$

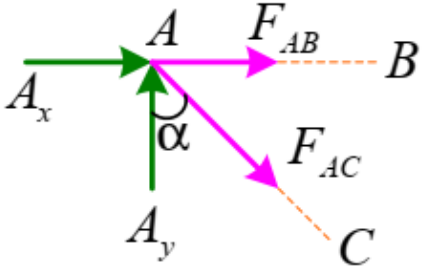
$$\cos\alpha = \frac{0.25}{\sqrt{(0.2)^2 + (0.25)^2}} = 0.78$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 0.2C_y - 600(0.8) = 0 \Rightarrow C_y = 2400N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y + A_y - 600 = 0 \Rightarrow A_y = -1800N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$





$\sin\alpha = 0.63$

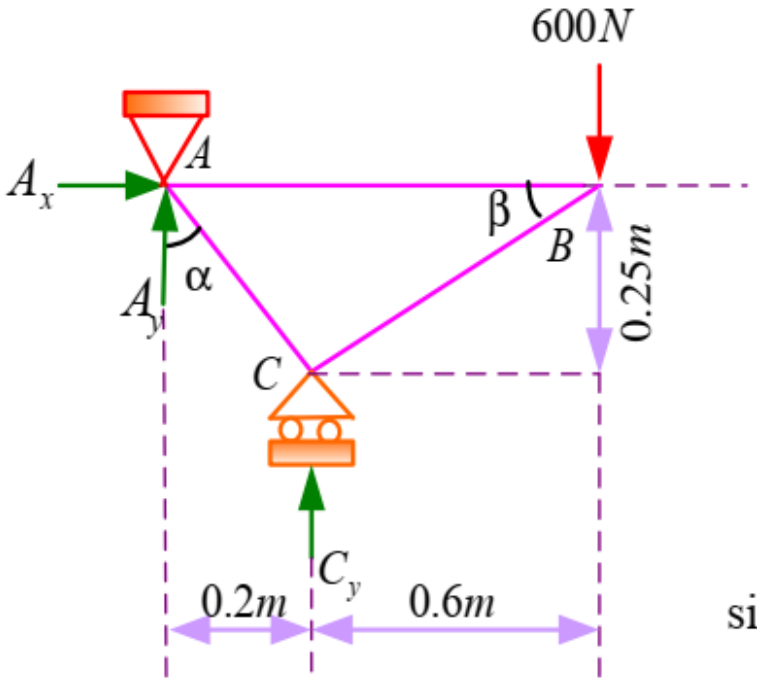
$\cos\alpha = 0.78$

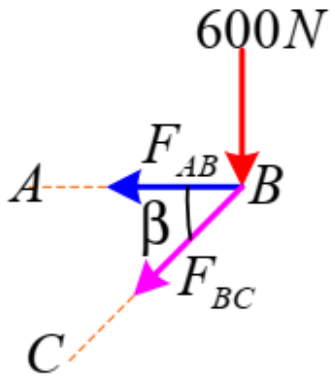
$A_x = 0 \quad A_y = -1800N$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + F_{AC}\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - F_{AC}\cos\alpha = 0$$

$$-1800 - F_{AC}(0.78) = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_{AC} = -2307.6N \\ F_{AB} = 1435.8N \end{cases}$$



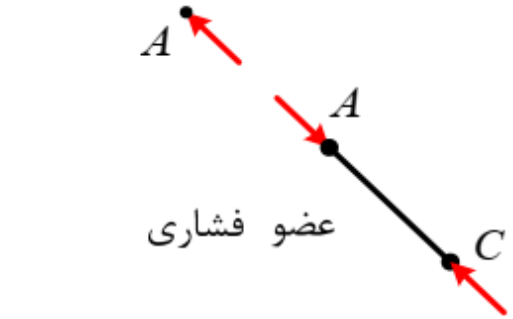


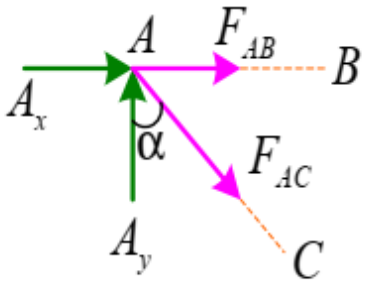
$$F_{AB} = 1435.8N$$

$$\sin\beta = \frac{0.25}{\sqrt{(0.25)^2 + (0.6)^2}} = 0.38$$

$$\cos\beta = \frac{0.6}{\sqrt{(0.25)^2 + (0.6)^2}} = 0.92$$

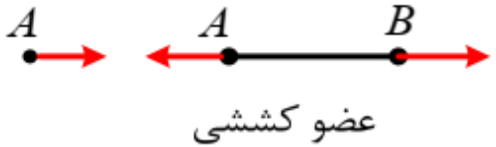
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + F_{BC}\cos\beta = 0 \Rightarrow F_{BC} = -1580.2$$

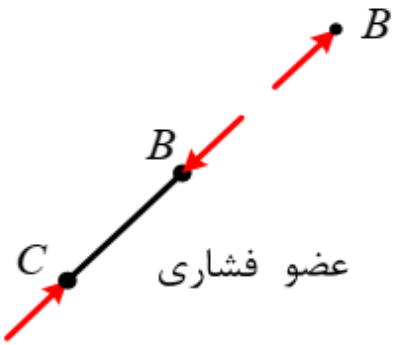


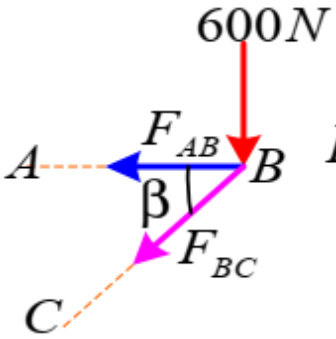


$$F_{AC} = -2307.6N$$

$$F_{AB} = 1435.8N$$

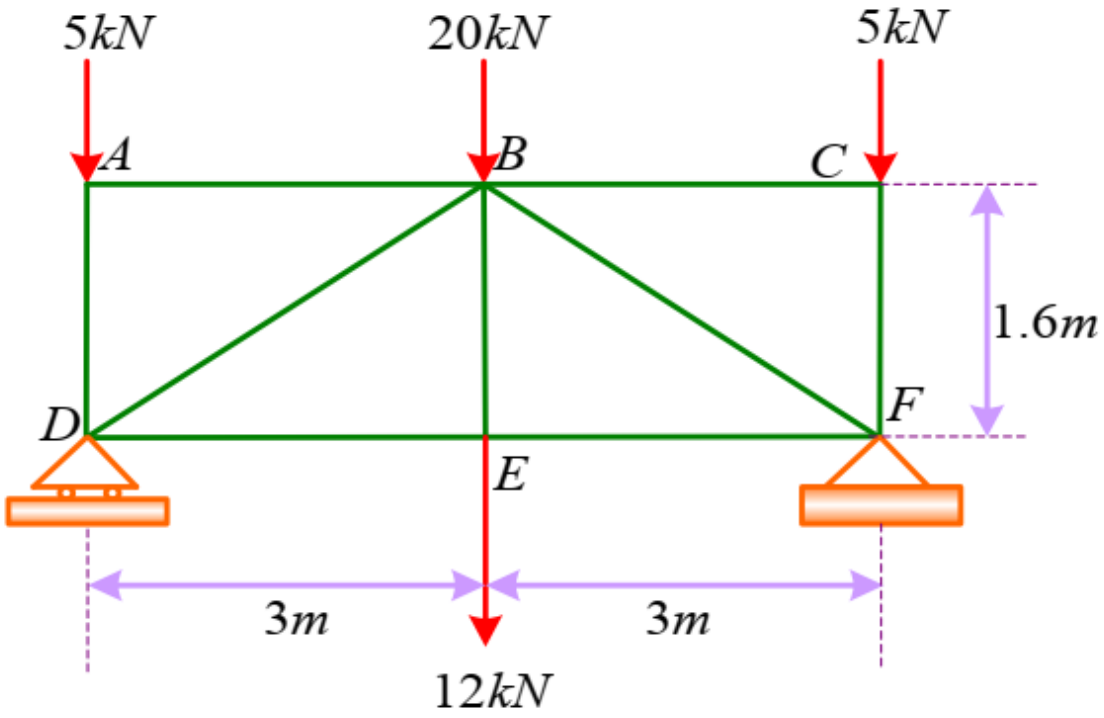


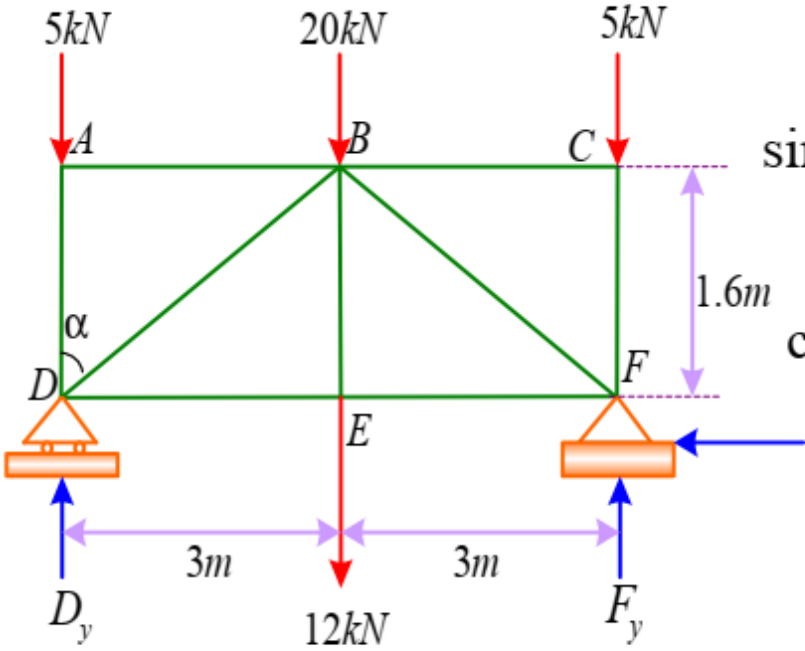




$$F_{BC} = -1580.2$$

مثال: برای تراس نشان داده شده در شکل نیروهای داخلی را در هر یـک از اعـضا مشخص کنید.





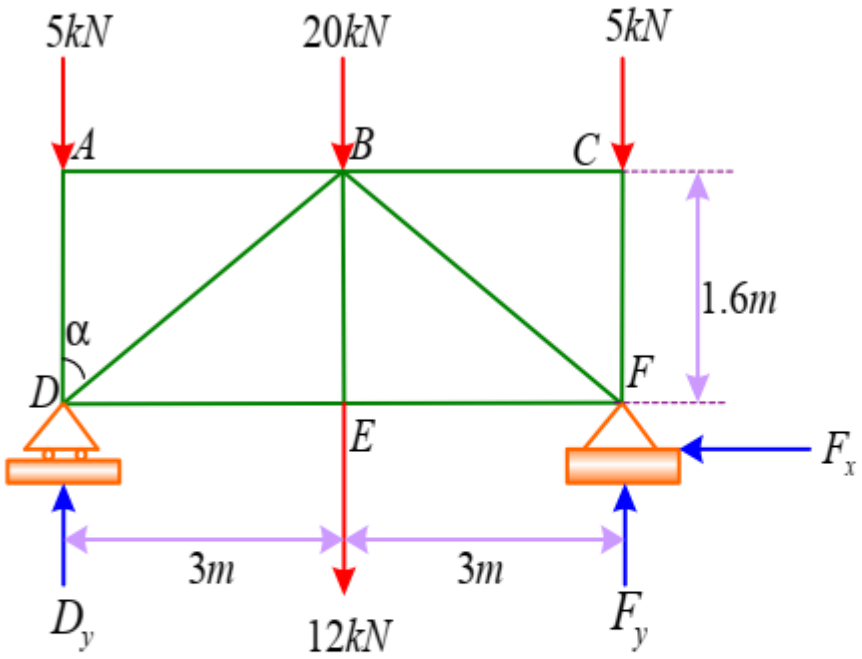
$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+(1.6)^2}} = 0.88$$

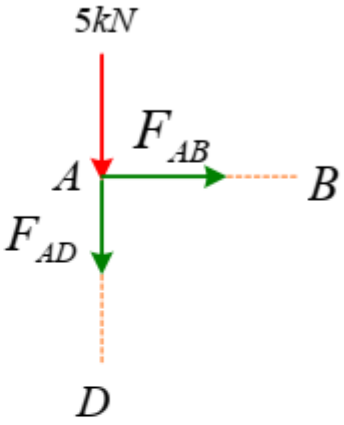
$$\cos\alpha = \frac{1.6}{\sqrt{3^2+(1.6)^2}} = 0.47$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_x = 0$$

$$\sum M_F = 0 \quad D_y(6) - 12(3) - 20(3) - 5(6) = 0 \Rightarrow \quad D_y = 21kN$$

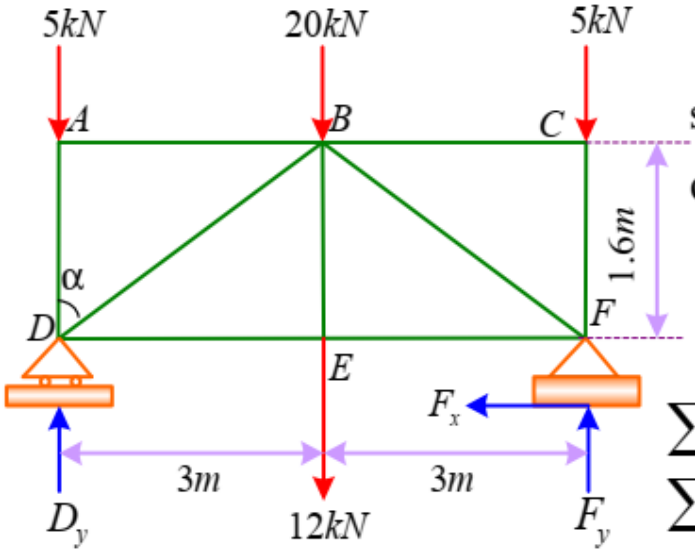
$$\sum F_y = 0 \quad F_y + D_y - 5 - 20 - 12 - 5 = 0 \Rightarrow \quad F_y = 21kN$$





$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 5 + F_{AD} = 0 \Rightarrow \quad F_{AD} = -5kN$$

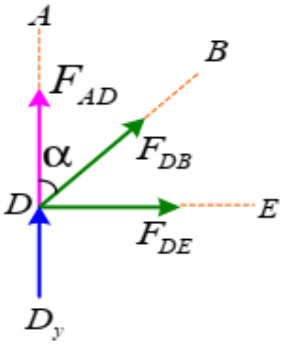


$\sin\alpha = 0.88$

$\cos\alpha = 0.47$

$F_{AD} = -5kN$

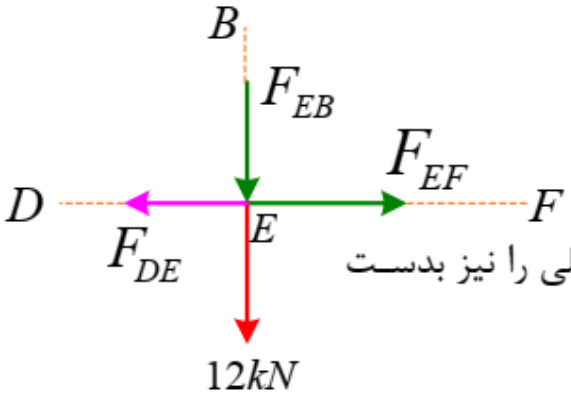
$D_y = 21kN$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y + F_{AD} + F_{DB}\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{DE} + F_{DB}\sin\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_{DB} = -34\,kN \\ F_{DE} = 30\,kN \end{cases}$$

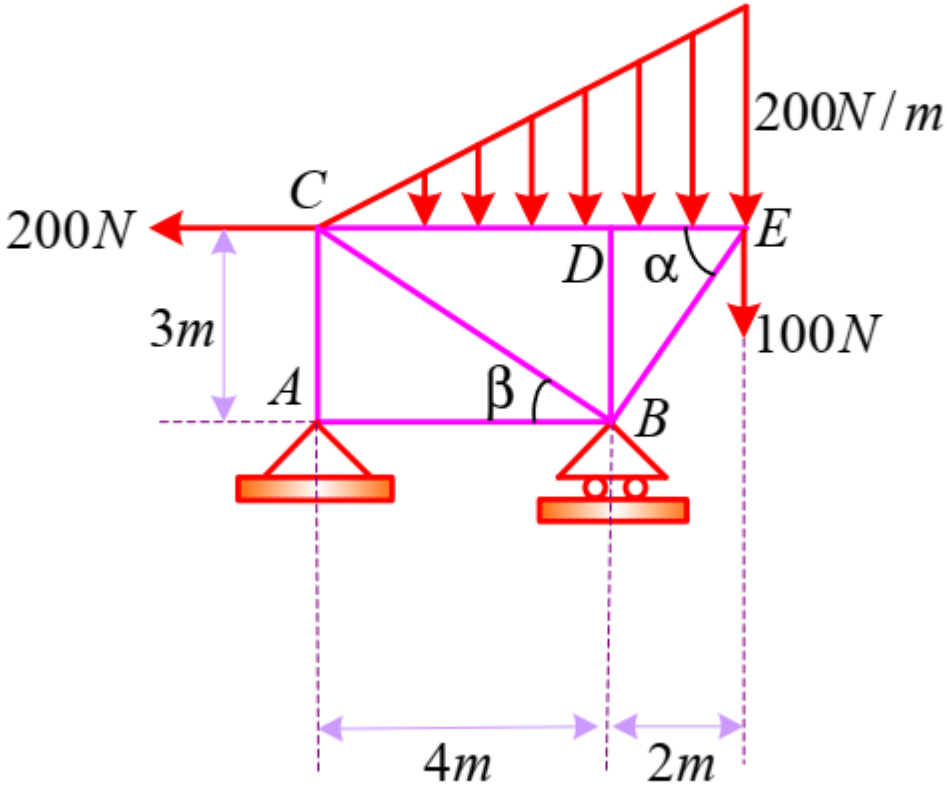


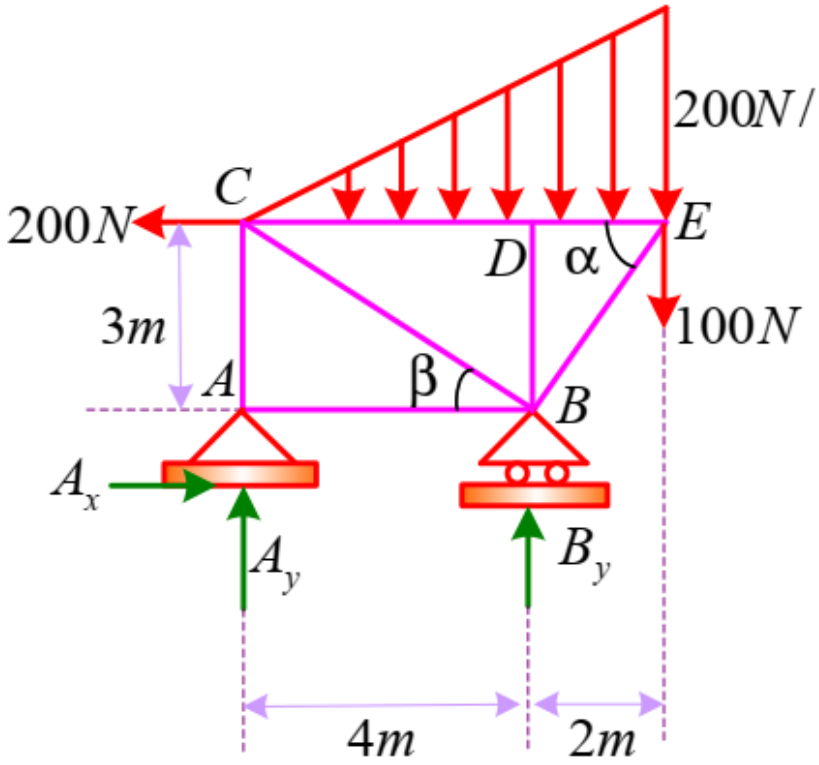
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{EF} - F_{DE} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{EF} = 30kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{EB} - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{EB} = 12kN}$$

چون شکل متقارن است می توانیم بقیه نیروهای داخلی را نیز بدست آوریم.

مثال: برای تراس نشان داده شده در شکل نیروهای داخلی در هر یک از اعضا را تعیین کنید.



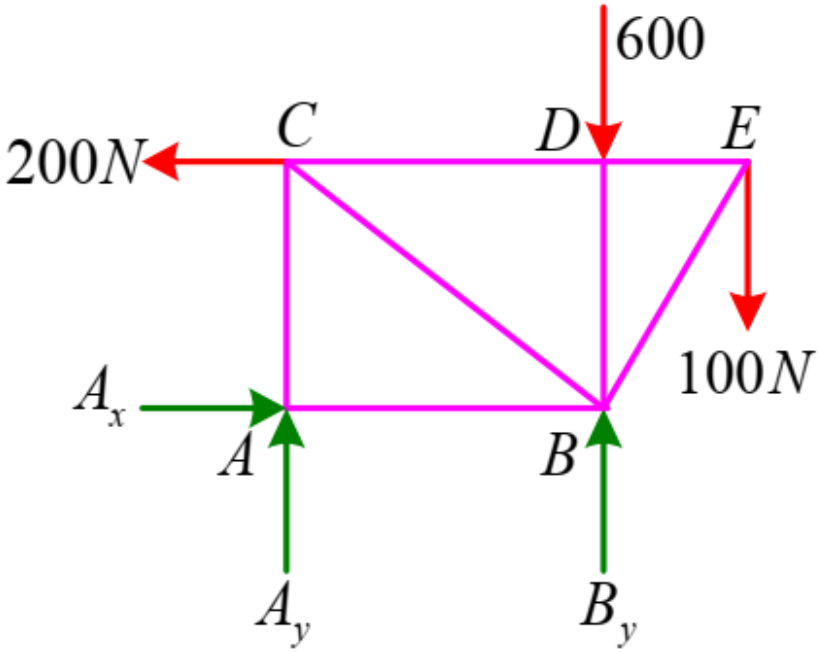


$$F = \frac{1}{2}(200 \times 6) = 600N$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$ از نقطه c

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

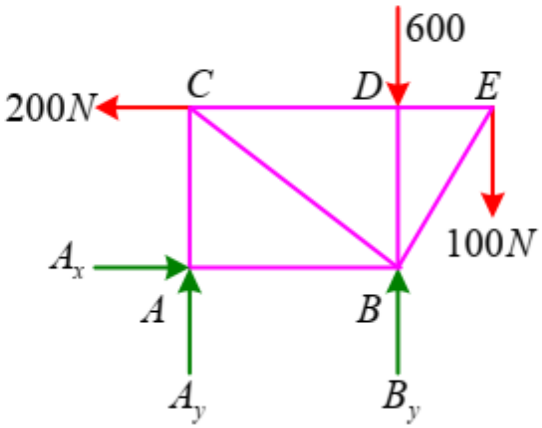
$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 200 = 0 \Rightarrow \quad A_x = 200\,N$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 200(3) + 4B_y - 100(6) - 600(4) = 0 \Rightarrow \; B_y = 600N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \; A_y + B_y - 600 - 100 = 0 \Rightarrow \; A_y = 100N$$

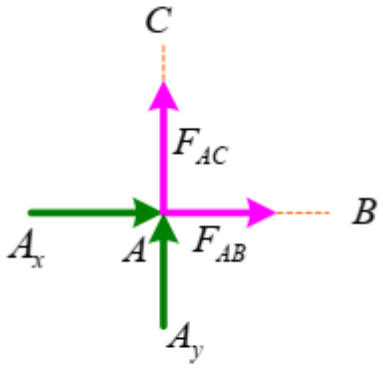


$$A_x = 200N$$

$$A_y = 100N$$

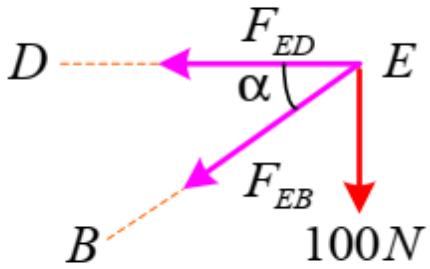
$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$



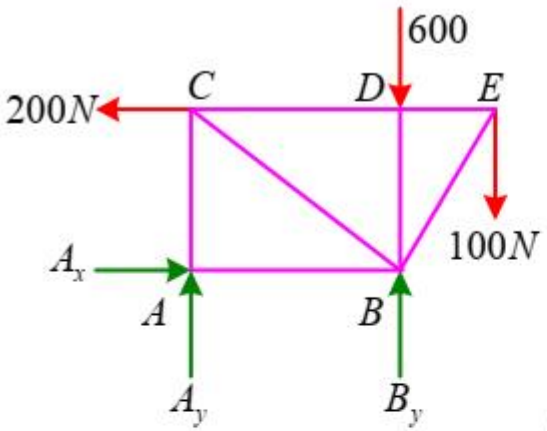
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \; F_{AB} + A_x = 0 \Rightarrow \; F_{AB} = -200N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AC} + A_y = 0 \Rightarrow \; F_{AC} = -100N$$



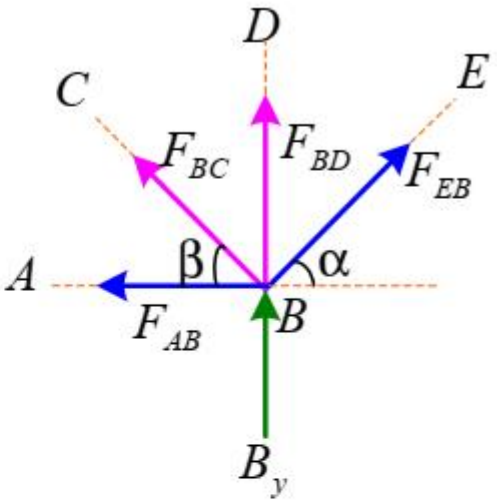
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 100 + F_{EB}\,\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_{EB} = -100\frac{\sqrt{13}}{3}N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{ED} + F_{EB}\,\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_{ED} = \frac{200}{3}N$$



$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$



$$F_{AB} = -200N \qquad F_{EB} = -100\frac{\sqrt{13}}{3}N$$

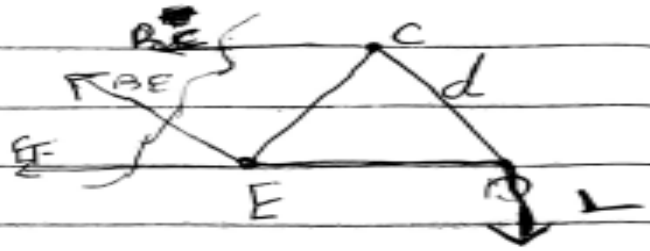
$$\cos\beta = \frac{4}{5}\ ,\ \sin\beta = \frac{3}{5}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + F_{BC}\cos\beta - F_{EB}\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_{BC} = \frac{500}{3}N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y + F_{BD} + F_{BC}\sin\beta + F_{EB}\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_{BD} = -600N$$

برای خرپایی که در شکل زیر می بینید، نیرو های داخلی در عضوهای BE و BC را تعیین کنید. مثلث ها متساوی الاضلاع هستند.

$\sum F_y = 0$

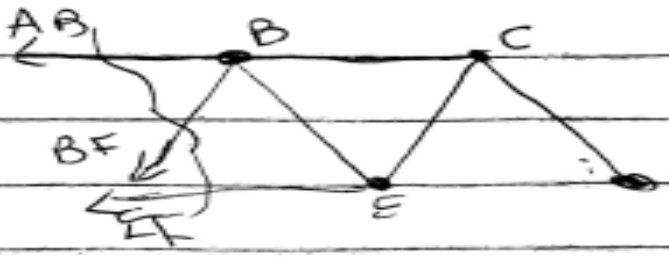


$BE \sin 60^\circ - L = 0$

$BE = \frac{L}{\sin 60^\circ} = \frac{2L}{\sqrt{3}}$

$\sum M_E = 0 \quad BC\, d \sin 60^\circ - L d = 0 \Rightarrow BC = \frac{2L}{\sqrt{3}}$

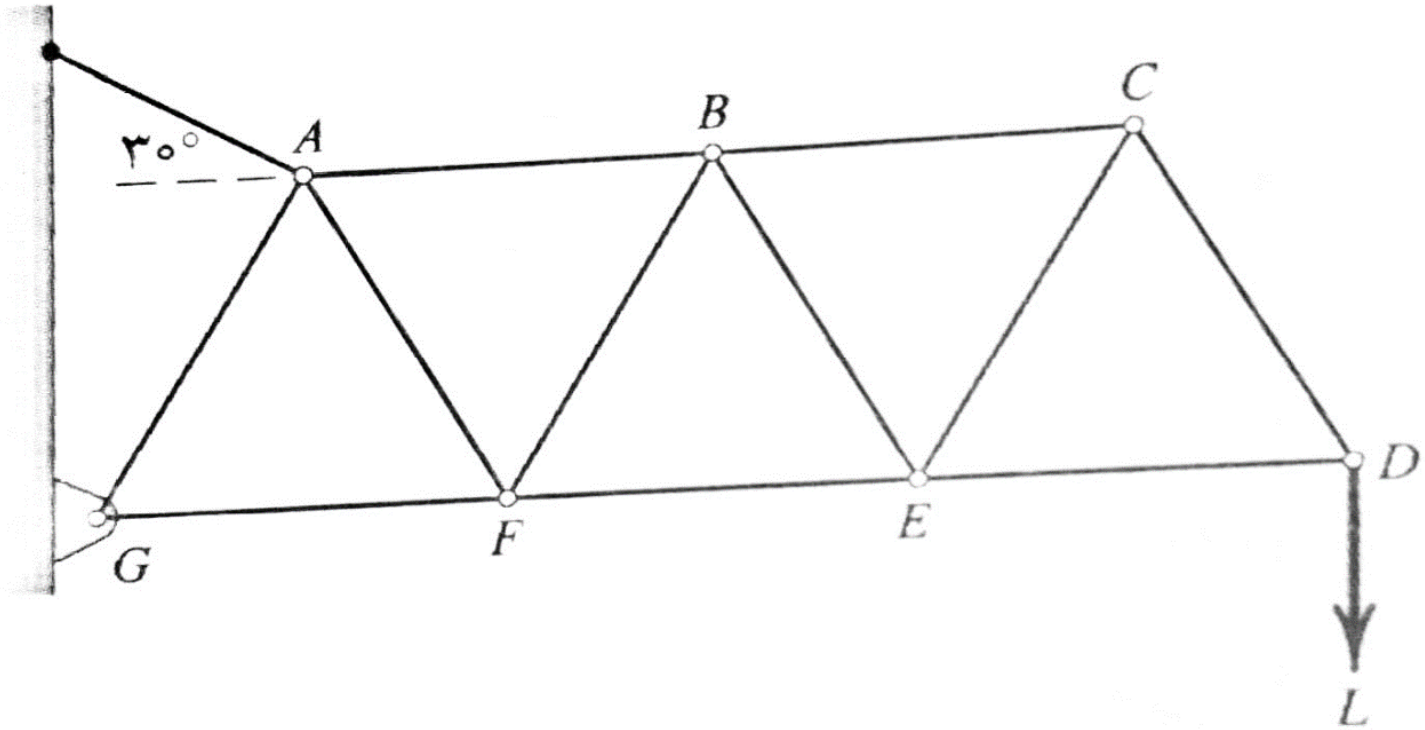
مقطع دوم



$\sum F_y = 0$

$BF \sin 60^\circ - L = 0$

$BF = \frac{L}{\sin 60^\circ} = \frac{2L}{\sqrt{3}}$


٣٠°
A
B
C
D
E
F
G
L