نام و نام خانوادگی :		گروه آموزشی : **ریاضی**
شماره دانشجویی :	دانشگاه صنعتی شاهرود	تاریخ : **۱۴۰۳/۲/۱۰**
نام مدرس :	**دانشکده علوم ریاضی**	وقت : **۹۰** دقیقه

امتحان میان‌ترم درس **معادلات دیفرانسیل** (۱۵ گروه هماهنگ)

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۴۰۳**- **۱۴۰۲**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- معادله زیر را حل کنید : **۱۵ نمره**

$$xy'\sin(\frac{y}{x}) = y\sin(\frac{y}{x}) + x\,, \quad x > 0$$

سوال ۲- یک عامل انتگرالساز به شکل $\mu = x^m y^n$ برای معادله زیر بیابید و به کمک آن ، معادله را حل کنید. **۱۵ نمره**

$$y(2 - 3x)dx - xdy = 0$$

سوال ۳- جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید : **۱۵ نمره**

$$y' + \frac{1}{x}y = xe^{2x}y^2 \;\;, \;\; x > 0$$

سوال ۴- می‌دانیم که تابع $y_1 = x^2$ یک جواب معادله $(x > 0)\,,\; x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ می‌باشد. **۲۰ نمره**

جواب عمومی معادله زیر را با روش کاهش مرتبه بدست آورید.

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = \frac{1}{4}x^2, \;\; x > 0$$

سوال ۵- با روش ضرایب نامعین ، معادله زیر را حل کنید. **۱۵ نمره**

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$$

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : این معادله یک معادله همگن است. از تغییر متغیر $y = xu$ استفاده می‌کنیم.

$$y'\sin\frac{y}{x} = \frac{y}{x}\sin\frac{y}{x} + 1 \rightarrow (u + xu')\sin u = u\sin u + 1 \rightarrow xu'\sin u = 1 \rightarrow \sin y\,du = \frac{dx}{x}$$

این معادله ، یک معادله جدایی پذیر است. بنابر این :

$$\int \sin u\,du = \int \frac{dx}{x} \rightarrow -\cos u = \ln x + c \rightarrow -\cos\frac{y}{x} = \ln x + c$$

پاسخ سوال۲ : دو طرف معادله را در $\mu = x^m y^n$ ضرب می‌کنیم. $(2x^m y^{n+1} - 3x^{m+1}y^{n+1})dx - x^{m+1}y^n dy = 0$

اکنون داریم $M = 2x^m y^{n+1} - 3x^{m+1}y^{n+1}$, $N = x^{m+1}y^n$ و باید داشته باشیم : $M_y = N_x$

$$2(n+1)x^m y^n - 3(n+1)x^{m+1}y^n = N = (m+1)x^m y^n \rightarrow 2(n+1) = m+1 \;,\; -3(n+1) = 0$$

که نتیجه می‌دهد $m = n = -1$. پس تابع $\mu = x^{-1}y^{-1} = \frac{1}{xy}$ یک عامل انتگرالساز و معادله $(\frac{2}{x} - 3)dx - \frac{1}{y}dy = 0$

یک معادله کامل است. اکنون داریم : $\int (\frac{2}{x} - 3)dx = 2\ln x - 3x \;,\; \int -\frac{1}{y}dy = -\ln y$

جواب معادله عبارت است از : $2\ln x - 3x - \ln y = c$

پاسخ سوال۳ : این معادله ، یک معادله برنولی است. آن را به صورت $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\times\frac{1}{y} = xe^{2x}$ می‌نویسیم.

از تغییر متغیر $u = \frac{1}{y}$ استفاده می‌کنیم. $-u' + \frac{1}{x}\times u = xe^{2x} \rightarrow u' - \frac{1}{x}u = -xe^{2x}$

به یک معادله مرتبه اول خطی رسیده‌ایم. داریم $\mu = e^{\int \frac{-1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ و در نتیجه :

$$u = x(c + \int \frac{1}{x}(-xe^{2x})dx) = x(c - \int e^{2x}dx) = x(c - \frac{1}{2}e^{2x}) \rightarrow y = \frac{2}{x(2c - e^{2x})}$$

پاسخ سوال۴ : برای استفاده از روش کاهش مرتبه ، از تغییر متغیر $y = x^2 u$ استفاده می‌کنیم.

$$x^2(x^2u'' + 4xu' + 2u) - 3x(x^2u' + 2xu) + 4x^2u = \frac{1}{4}x^4 \rightarrow x^4u'' + x^3u' = \frac{1}{4}x^4 \rightarrow u'' + \frac{1}{x}u' = \frac{1}{4x^2}$$

این معادله ، یک معادله فاقد u است. از تغییر متغیر $u' = v$ استفاده می‌کنیم و به معادله مرتبه اول خطی $v' + \frac{1}{x}v = \frac{1}{4x^2}$ می‌رسیم که جواب آن عبارت است از :

$$v = e^{-\int \frac{1}{x}dx}(c + \int \frac{1}{4}e^{\int \frac{1}{x}dx}dx) = \frac{1}{x}(c + \int \frac{1}{4x^2}x\,dx) = \frac{1}{x}(c + \frac{1}{4}\ln x) \rightarrow v = \frac{c}{x} + \frac{1}{4x}\ln x$$

اکنون داریم $u' = \frac{c}{x} + \frac{1}{4x}\ln x$ که نتیجه می‌دهد $u = c\ln x + \frac{1}{8}\ln^2 x + c_0$ و بالاخره ، جواب معادله اصلی عبارت است از :

$$y = x^2(c_0 + c\ln x + \frac{1}{8}\ln^2 x)$$

پاسخ سوال۵ : ابتدا معادله همگن $y''-7y'+6y=0$ را حل می‌کنیم. معادله مشخصه عبارت است از $m^2-7m=6=0$
که دو ریشه حقیقی و متمایز $m_1=1\,,\,m_2=6$ دارد. بنابر این داریم : $y_h=c_1e^x+c_2e^{6x}$
برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله غیر همگن ، حدس می‌زنیم که $y_p=(ax^2+bx)e^x$ و آن را در معادله قرار می‌دهیم.

$$(ax^2+(4a+b)x+(2a+2b))e^x-7(ax^2+(2a+b)x+b)e^x+6(ax^2+bx)e^x=(x-2)e^x$$

بعد از ساده کردن عبارت‌ها خواهیم داشت : $-10ax+(2a-5b)=x-2$

اکنون باید داشته باشیم $-10a=1\;,\;2a-5b=-2$ که نتیجه می‌دهد $a=\frac{-1}{10}\,,\,b=\frac{9}{25}$ و $y_p=\frac{1}{50}(-5x^2+18x)e^x$.

و بالاخره جواب عمومی معادله داده شده برابر است با : $y_g=c_1e^x+c_2e^{6x}+\frac{1}{50}(-5x^2+18x)e^x$