



جلسه سوم  
زوج نیرو و گشتاور زوج نیرو



# کوپل و زوج نیرو

## تعریف

گشتاوری است که دو نیروی مساوی، مختلف‌الجهت که روی یک خط نیستند، ایجاد می‌کنند.

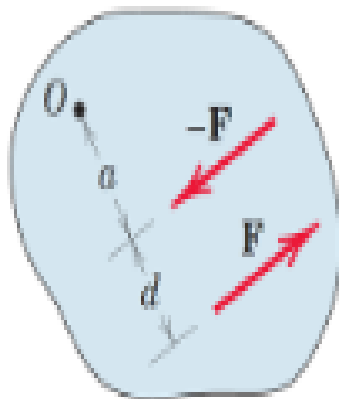
$$M = F(a + d) - Fa \implies M = Fd$$

بنابراین مقدار کوپل، به اندازه  $d$  یعنی فاصله نیروها تا مرکز گشتاور بستگی ندارد.

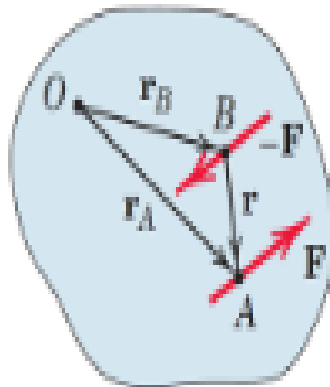
تنها تمایل کوپل این است که جسم را حول محوری عمود بر صفحه زوج نیرو به گردش در آورد.

## بررسی برداری کوپل

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \implies \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



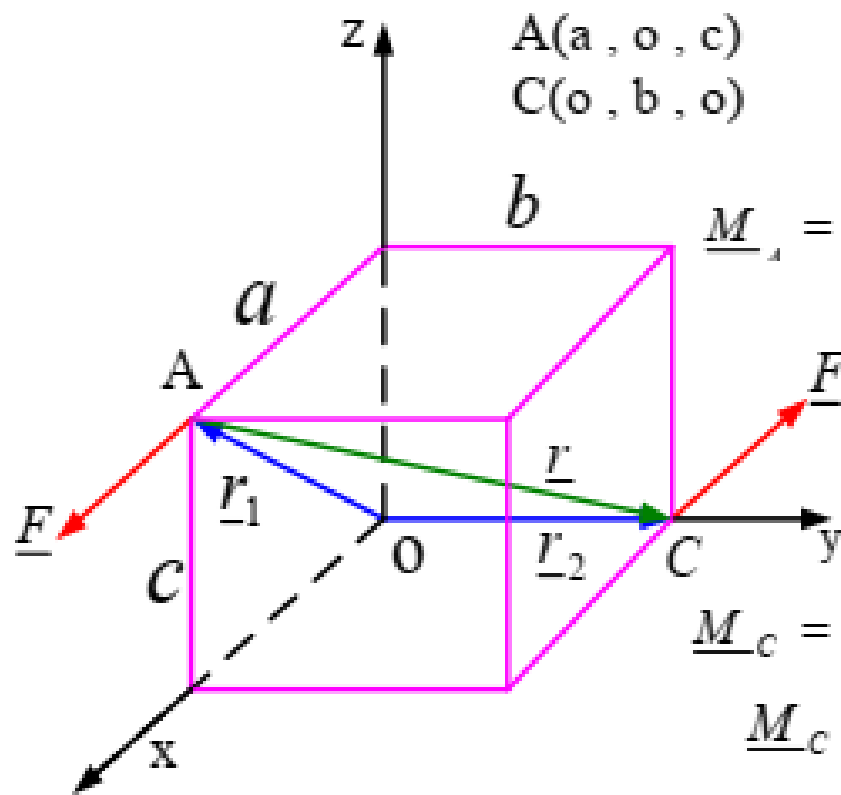
(a)



(b)

## زوج نیرو (Force Couple) و گشتاور زوج نیرو

دو نیرو با اندازه های یکسان و راستاهای موازی را که مخالف جهت هم به دو نقطه از جسمی وارد شوند زوج نیرو میگویند.



$$A(a, 0, c)$$

$$C(0, b, 0)$$

$$\underline{r} = -a\underline{i} + b\underline{j} - c\underline{k}$$

$$\underline{F})_c = -F\underline{i}$$

$$\underline{M}_A = \underline{r} \times \underline{F})_c = (-a\underline{i} + b\underline{j} - c\underline{k}) \times (-F\underline{i})$$

$$= F(c\underline{j} + b\underline{k})$$

$$\underline{r}^* = -\underline{r} = a\underline{i} - b\underline{j} + c\underline{k}$$

$$\underline{F})_A = F\underline{i}$$

$$\underline{M}_C = \underline{r}^* \times \underline{F})_A = (a\underline{i} - b\underline{j} + c\underline{k}) \times F\underline{i}$$

$$\underline{M}_C = F(c\underline{j} + b\underline{k})$$



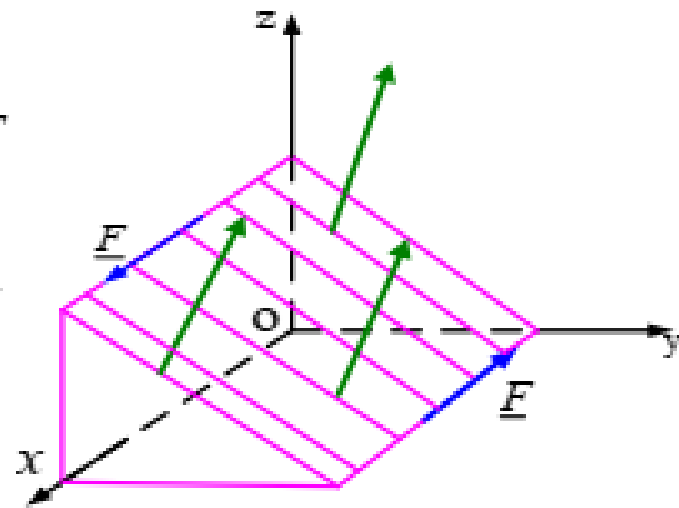
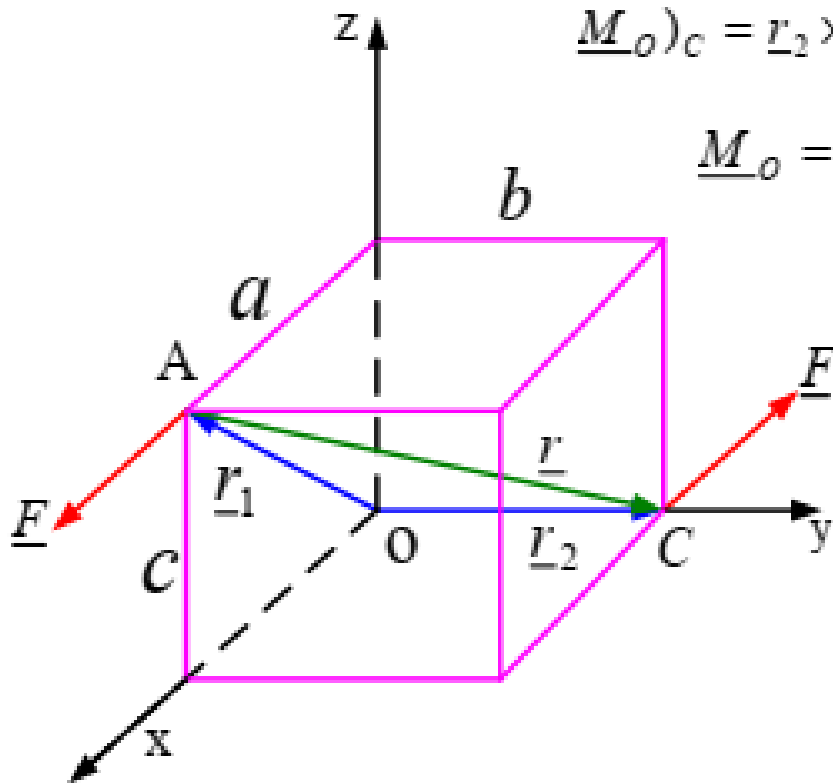
$$\underline{r}_1 = (a\underline{i} + c\underline{k}) \quad \underline{F})_A = F\underline{i}$$

$$\underline{M}_O)_A = \underline{r}_1 \times \underline{F})_A = (a\underline{i} + c\underline{k}) \times (F\underline{i}) = cF\underline{j}$$

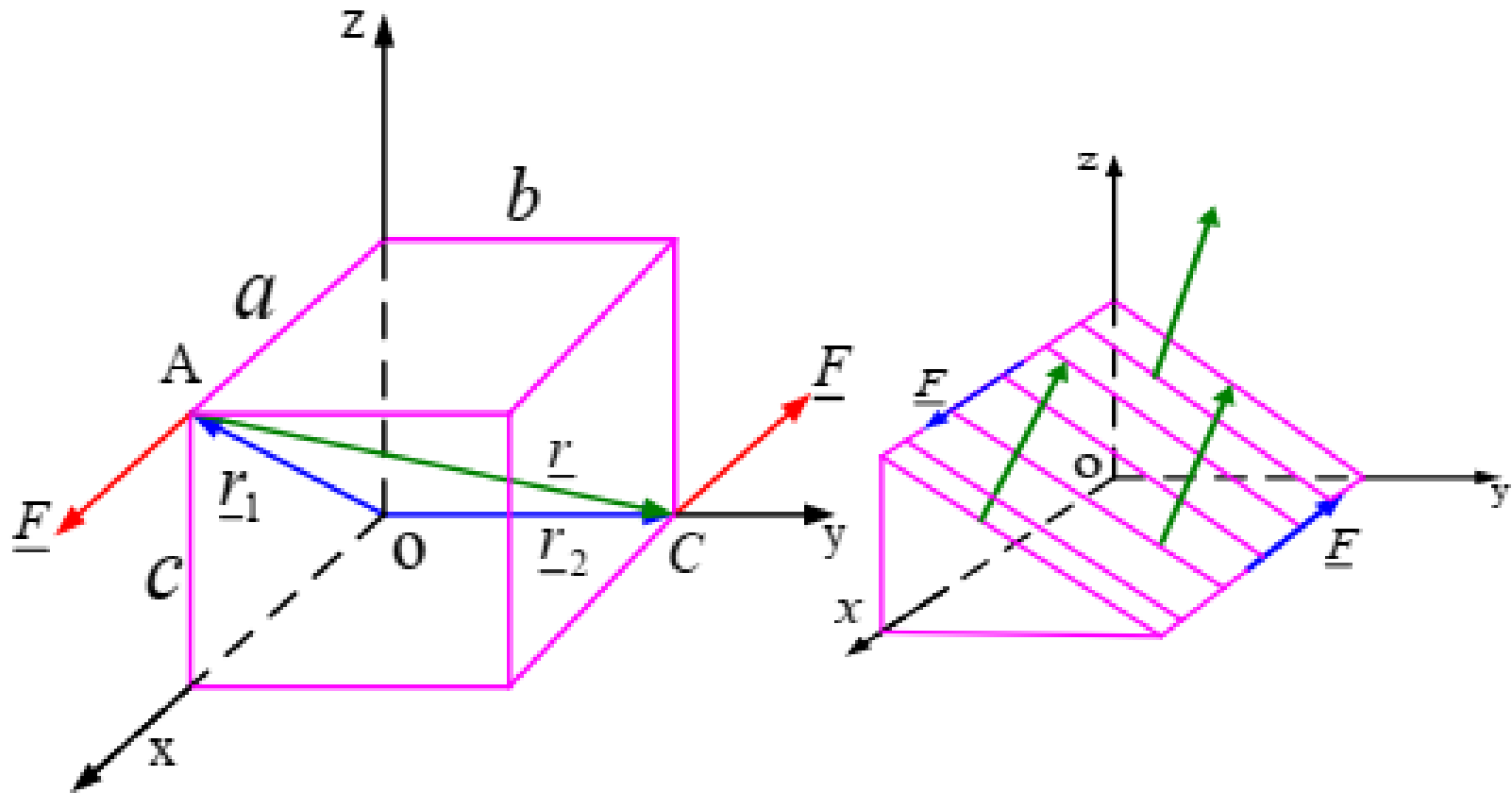
$$\underline{r}_2 = b\underline{j} \quad \underline{F})_C = -F\underline{i}$$

$$\underline{M}_O)_C = \underline{r}_2 \times \underline{F})_C = (b\underline{j}) \times (-F\underline{i}) = bF\underline{k}$$

$$\underline{M}_O = \underline{M}_O)_A + \underline{M}_O)_C = F(c\underline{j} + b\underline{k})$$



گشتاور زوج نیرو یک بردار آزاد (Free vector) است



## انواع بردارها

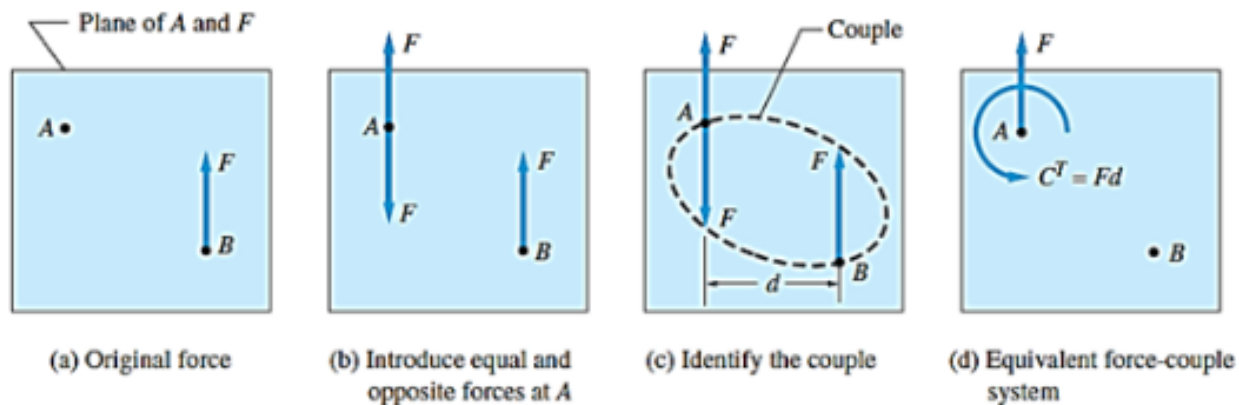
- کمیت‌هایی که با بردار مشخص می‌شوند به سه دسته کلی تقسیم می‌شوند بردارهای آزاد، لغزان و ثابت.
- الف) بردار آزاد: برداری است که عمل آن مربوط به خط منحصر به فردی نباشد مثلاً اگر جسمی حرکت انتقالی داشته باشد برداری که برای جابجایی آن در نظر می‌گیریم برداری آزاد است. یعنی می‌توانیم با حفظ اندازه و جهت آن، تغییر نقطه ابتدای بردار حرکت داشته باشیم.
- ب) بردار لغزان: بردار لغزان برداری است که خط و امتداد منحصر به فردی در فضا دارد. مثلاً در وارد کردن یک نیروی خارجی به جسم نیرو را می‌توانیم در امتداد خط اثرش بر جسم جابجا کنیم.
- ج) بردار ثابت: برداری است که عملاً فقط در یک نقطه در فضای می‌تواند وارد شود، مثلاً نیروی داخلی اجسام.



## سیستم کوپل- نیرو

نیروی وارد شده به جسم آن را کشیده یا هل می‌دهد، و یا حول هر محوری غیر از خط اثر خود نیرو، جسم را می‌چرخاند. این اثر دوگانه نیرو بر جسم را می‌توان با جایگزین کردن آن با یک نیروی موازی و یک کوپل بهتر نشان داد.

در فصل اول گفته شد که اگر نیروی وارد شده بر جسم صلب در راستای خط اثر خود جابجا شود، تاثیری که بر جسم می‌گذارد تغییر نمی‌کند. حال می‌خواهیم بررسی کنیم اگر نیرو در راستایی غیر از راستای خط اثر خود جابجا شود چه اتفاقی می‌افتد. به شکل دقت کنید. همانطور که مشاهده می‌شود، با انتقال نیروی  $F$  به نقطه  $A$ ، کوپلی برابر  $Fd$  تولید می‌شود که  $d$  فاصله عمودی بین دو راستا است. در مثال زیر، کوپل تولید شده پادساعتگرد است.



نمایش جابجایی خط اثر نیرو

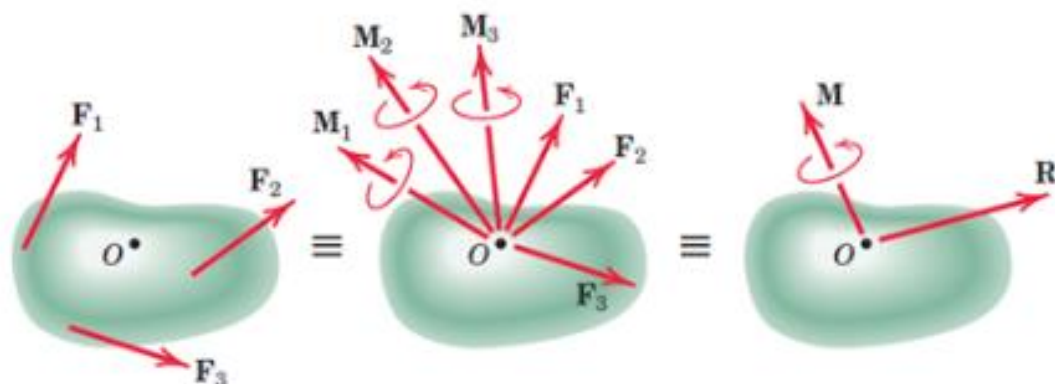


بنابراین وقتی نیرو به راستایی غیر از راستای خط اثر خودش منتقل شود، در اثر این انتقال یک کوپل برای جبران تغییر گشتاور ایجاد می‌شود.

اغلب به سیستم‌ها نیروهای متفاوتی وارد می‌شود (تصویر چپ) که برای بررسی راحت‌تر سیستم، همه نیروها را به روش گفته شده یک نقطه خاص انتقال می‌دهیم. این نقطه می‌تواند مرکز جرم جسم و یا هر نقطه دیگری که در صورت سوال ذکر شده است باشد. دو سیستم نیرو زمانی با هم معادلند که بتوان آن‌ها را به یک سیستم نیرو-کوپل یکسان در یک نقطه معین مثل  $O$  تبدیل کرد. در شکل زیر، به جسم سه نیرو وارد شده است که با انتقال آنها به نقطه  $O$ ، سه کوپل تولید می‌شود (تصویر وسط). می‌توان برآیند نیروها را با بردار  $R$  و برآیند کوپل‌ها را با بردار  $M$  نمایش داد (تصویر راست).

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots = \Sigma \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \dots = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



نمایش یک سیستم نیرو و سیستم نیرو-کوپل معادل آن در نقطه  $O$

دقت شود مقدار  $R$ ، یعنی نیروی برآیند، مستقل از نقطه‌ای است که سیستم به آن انتقال داده می‌شود؛ اما مقدار  $M$  و جهت کوپل برآیند  $M$  به موقعیت این نقطه بستگی دارد.

## رنج

وقتی بردار ممان برایند  $M$  موازی بردار نیروی برایند  $R$  باشد، به این برایند رنج گفته می‌شود. وقتی جهت بردارهای  $R$  و  $M$  یکسان باشد، رنج مثبت (شکل ۲۰- تصویر چپ) و در غیر اینصورت، رنج منفی است (شکل تصویر راست).



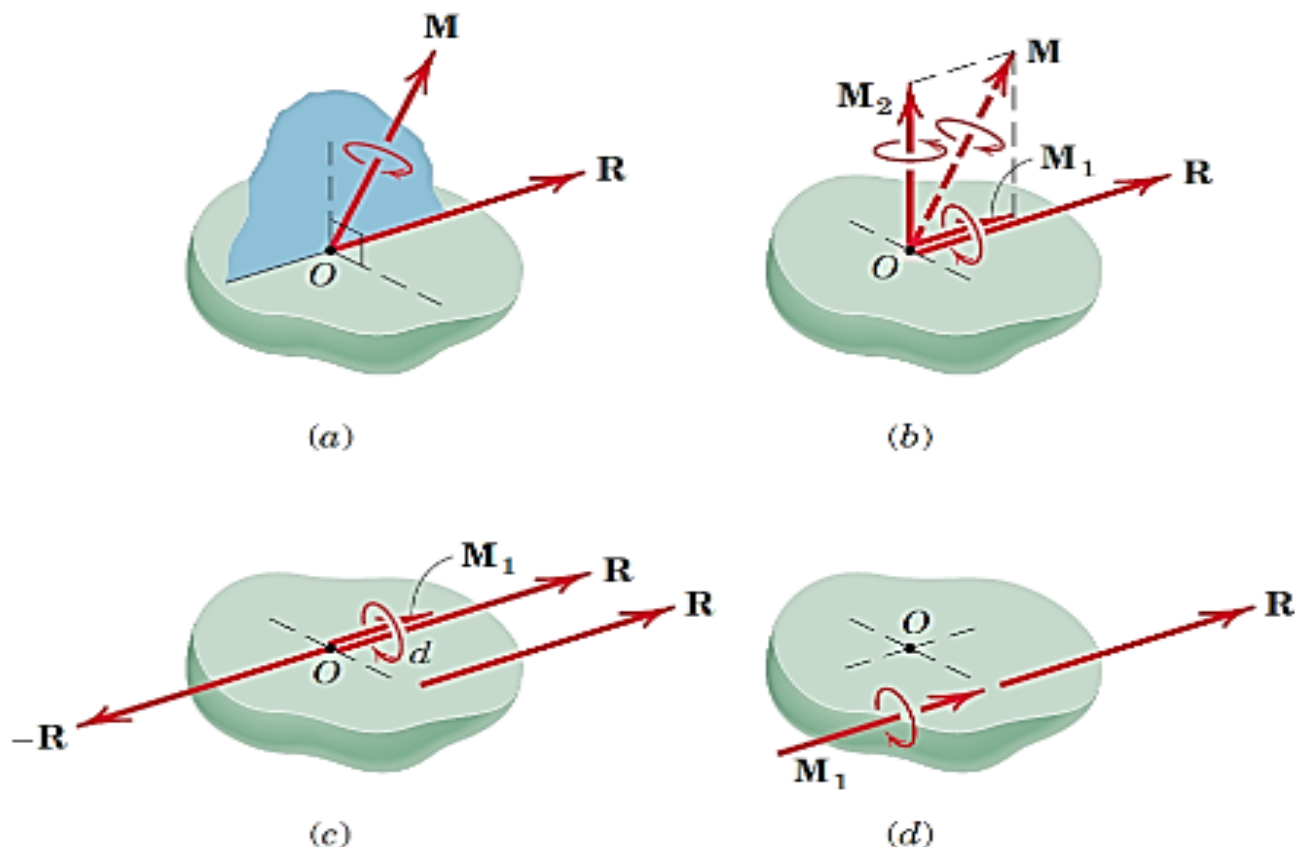
Positive wrench



Negative wrench

نمایش رنج مثبت (تصویر چپ) و منفی (تصویر راست)

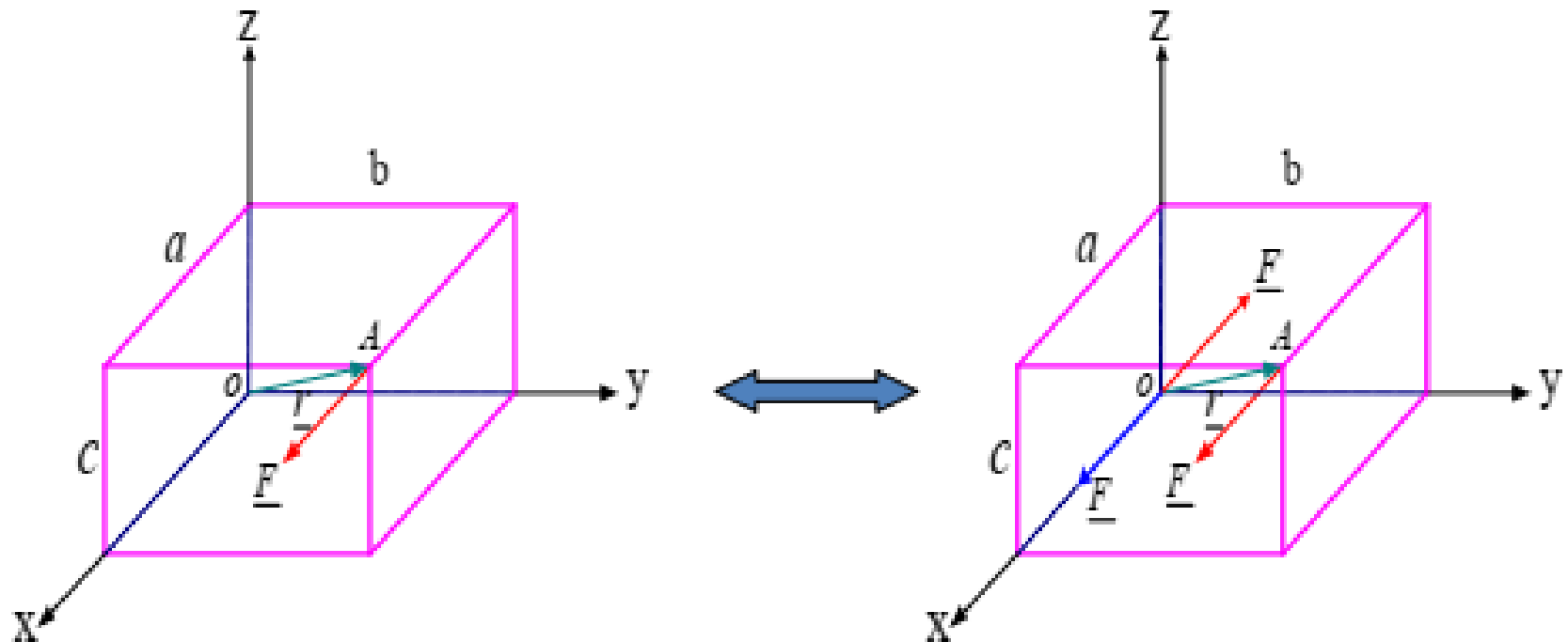
در شکل ۲۱-۸، حالت عمومی سیستم کوپل- نیروی معادل یک سیستم نیرو را مشاهده می‌کنیم که  $R$  نیروی برآیند  $M$  کوپل برآیند است. با توجه به اینکه  $M$  یک بردار آزاد است، برای راحتی در نمایش سیستم، آن را به گونه‌ای قرار دادیم که از نقطه  $O$  بگذرد. حال  $M$  را در دو راستا تجزیه می‌کنیم؛ راستای بردار  $R$  ( $M_1$ ) و راستای عمود بر آن ( $M_2$ ) (شکل ۲۱-۸). می‌توان کوپل  $M_2$  را با دو نیروی  $R$  و  $-R$  با فاصله  $d = M_2/R$  جایگزین کرد (شکل ۲۱-۹). حال برآیند نیروی اولیه و نیروی  $-R$  صفر می‌شود. در نتیجه آنچه باقی می‌ماند، نیروی  $R$  در یک راستای جدید و کوپل  $M_1$  است که  $M$  نیز یک بردار آزاد است. بنابراین سیستم نیروی اولیه به یک رنج مثبت تبدیل شد.



شکل تبدیل سیستم نیرو به یک رنج

# تجزیه (تعویض) یک نیروی مفروض به یک نیرو و بردار کوپل در نقطه ای مثال ۰

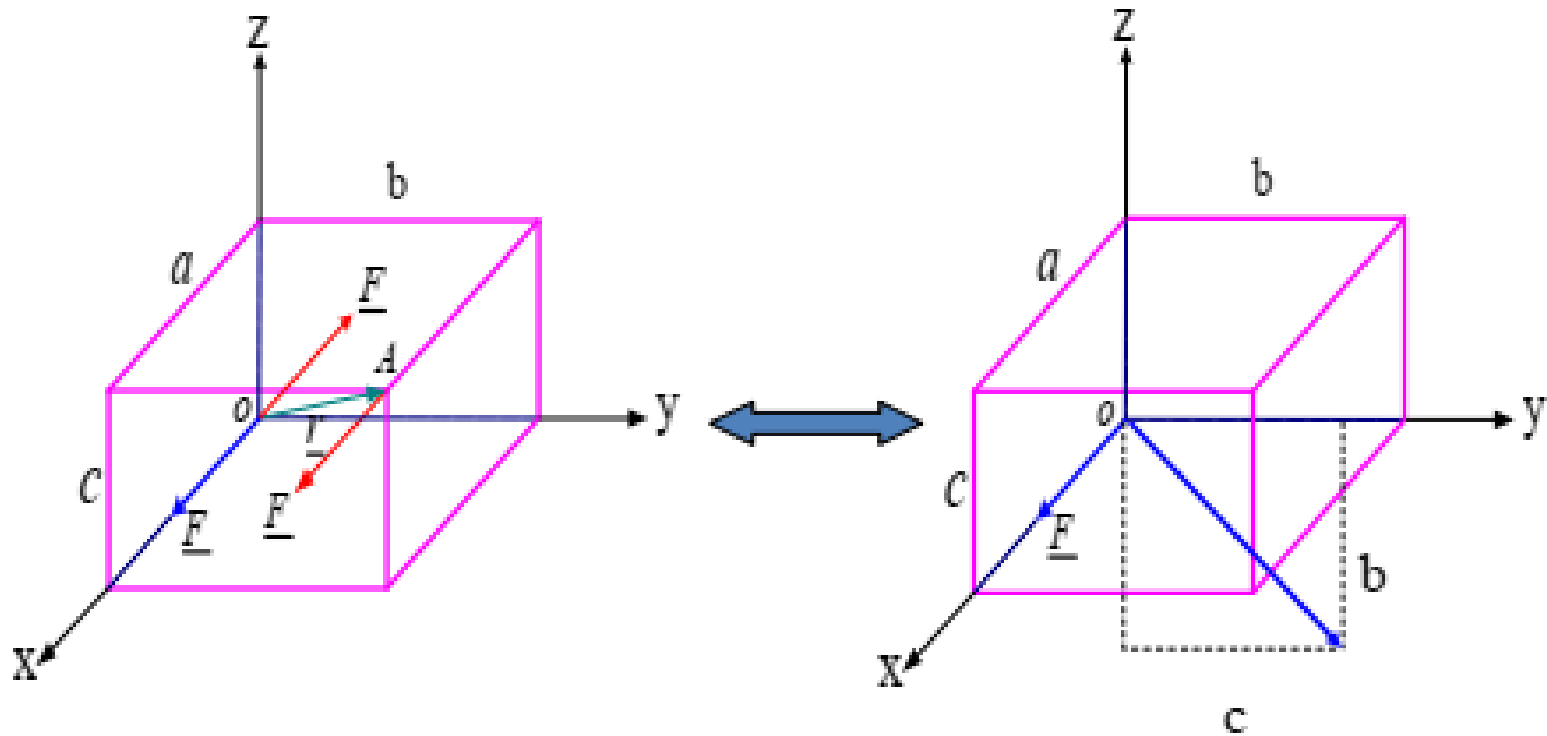
اثر زوج نیرو ایجاد گشتاور است.



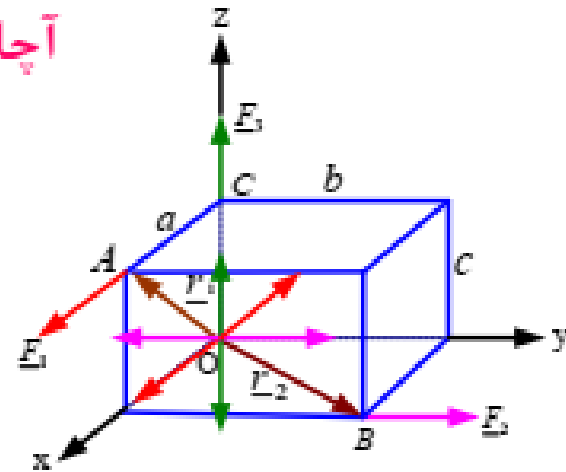
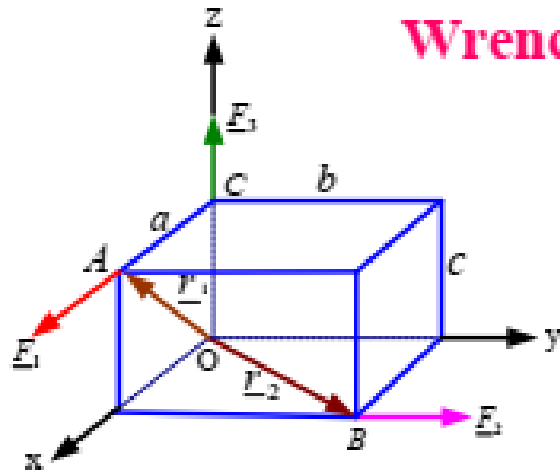
$$\underline{M}_O = (\underline{r} \times \underline{F})_A \quad \underline{r} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k} \quad \underline{F})_A = F\underline{i}$$

$$\underline{M}_O = (\underline{r} \times \underline{F})_A = (a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}) \times F\underline{i} = F(c\underline{j} - b\underline{k})$$

$$\underline{M}_O \cdot \underline{F} = F(c\underline{j} - b\underline{k}) \cdot (F\underline{i}) = 0$$



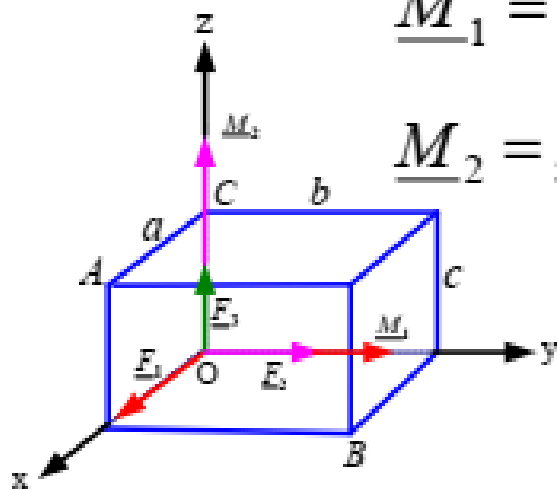
## آچار Wrench



$$\underline{M}_1 = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 = (a\underline{i} + c\underline{k}) \times F_1\underline{i} = cF_1\underline{j}$$

$$\underline{M}_2 = \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 = (a\underline{i} + b\underline{j}) \times F_2\underline{j} = aF_2\underline{k}$$

$$\underline{M}_3 = 0$$

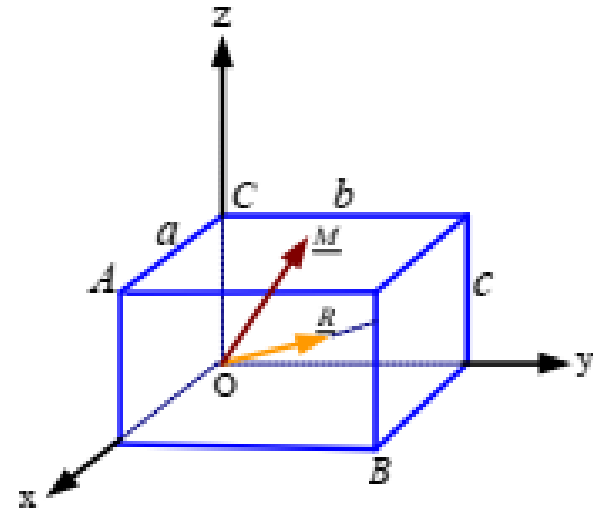
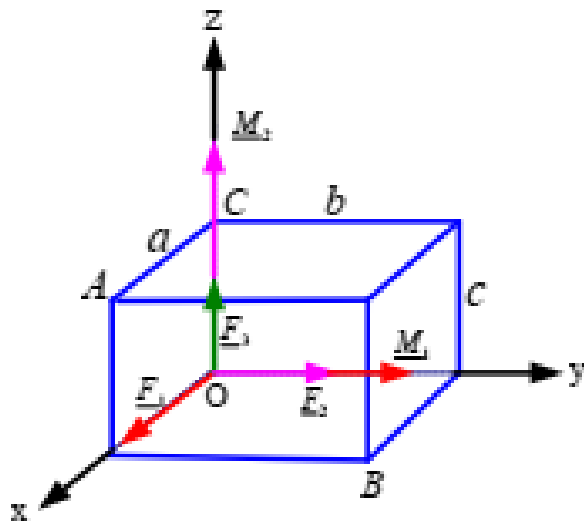


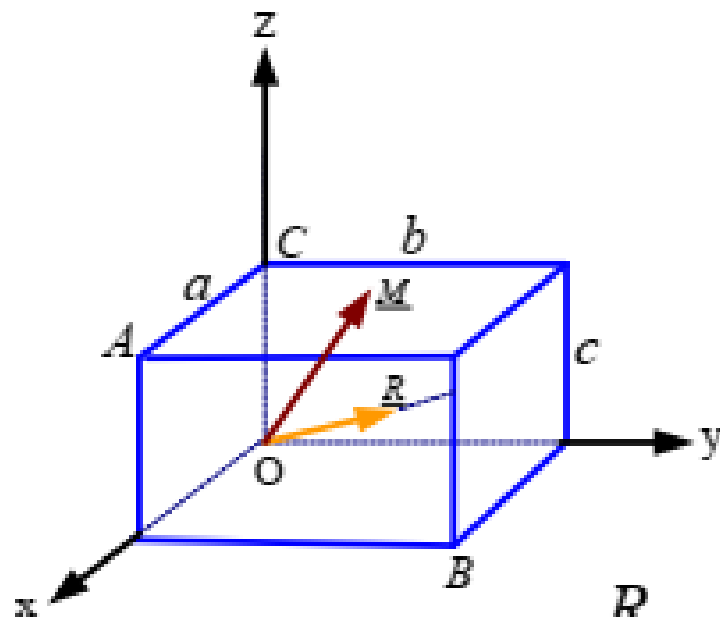
$$\underline{F}_1 = F_1 \underline{i} \quad \underline{F}_2 = F_2 \underline{j} \quad \underline{F}_3 = F_3 \underline{k}$$

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = (F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k})$$

$$\underline{M}_1 = cF_1 \underline{j} \quad \underline{M}_2 = aF_2 \underline{k} \quad \underline{M}_3 = 0$$

$$\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 = (cF_1 \underline{j} + aF_2 \underline{k})$$





$$\underline{R} = F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k}$$

$$\underline{M} = (cF_1 \underline{j} + aF_2 \underline{k})$$

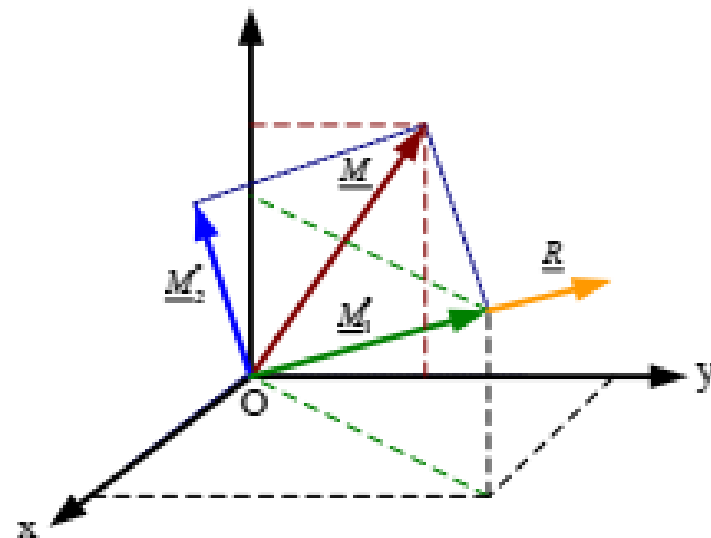
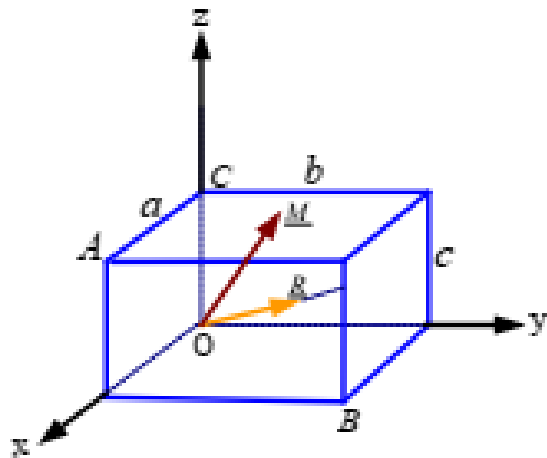
$$\underline{R} \cdot \underline{M} = F_2 (cF_1 + aF_3) \neq 0$$

هر نیرو و بردار کوپل مربوط به خودش بر هم عمودند لیکن بردارهای برآیند نیروها و برآیند کوپل‌ها بر هم عمود نیستند



$$\underline{R} = F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k}$$

$$\underline{M} = {}_z \left( cF_1 \underline{j} + aF_2 \underline{k} \right)$$

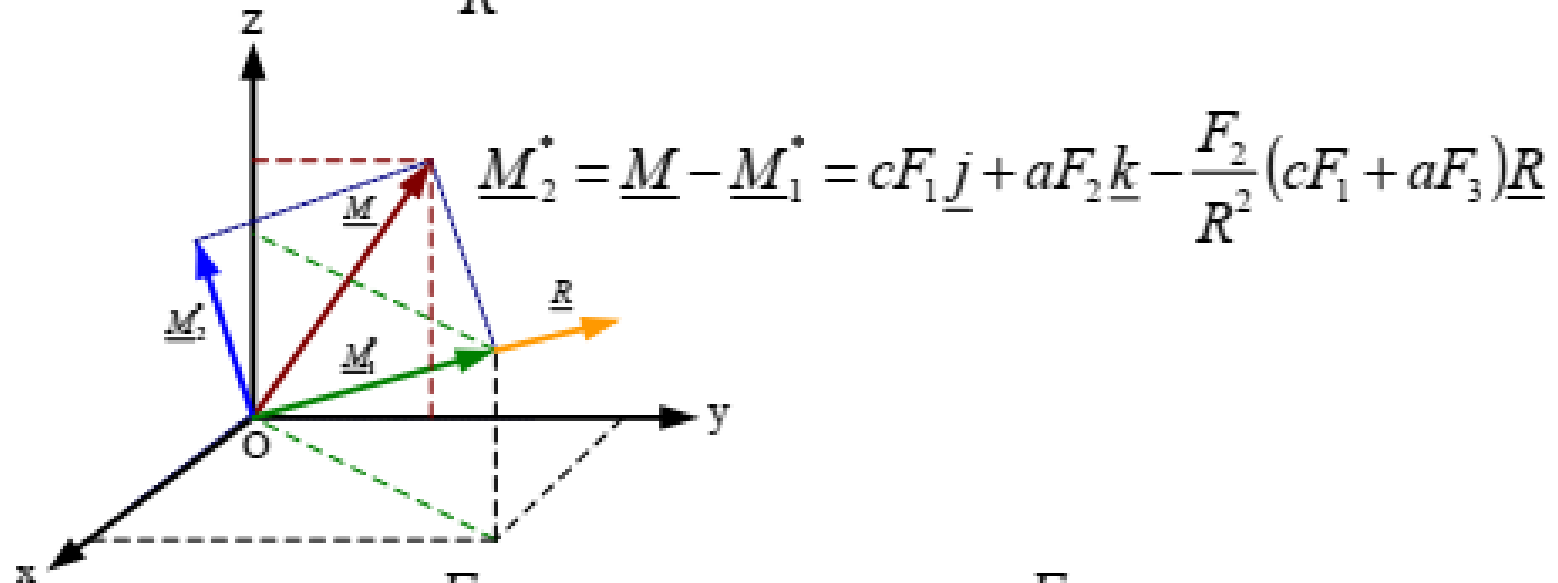


$$\underline{M} = \underline{M}_1^* + \underline{M}_2^* \quad \underline{\lambda}_R = \frac{\underline{R}}{R} = \frac{F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}}$$

$$\underline{M}_1^* = \underline{\lambda}_R \cdot \underline{M} = \frac{F_2}{R} (cF_1 + aF_3)$$

$$\underline{M}_1^* = \underline{M}_1^* \underline{\lambda}_R = \frac{F_2}{R^2} (cF_1 + aF_3) \underline{R}$$

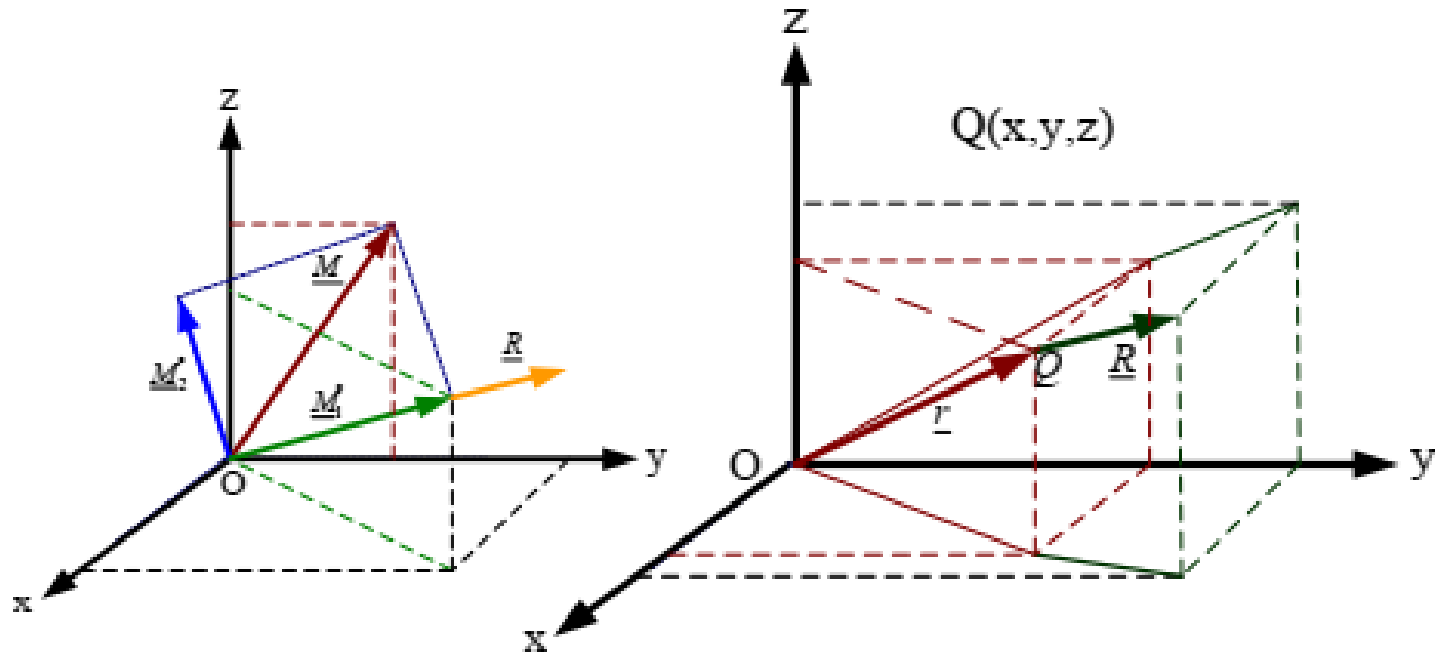
$$\underline{M}_1^* = M_1^* \underline{\lambda}_R = \frac{F_2}{R^2} (cF_1 + aF_3) \underline{R} \quad \underline{M} = (cF_1 \underline{j} + aF_2 \underline{k})$$



$$\underline{M}_2^* = \underline{M} - \underline{M}_1^* = cF_1 \underline{j} + aF_2 \underline{k} - \frac{F_2}{R^2} (cF_1 + aF_3) \underline{R}$$

$$\underline{M}_2^* = -\frac{F_2}{R^2} (cF_1 + aF_3) F_1 \underline{i} + [cF_1 - \frac{F_2}{R^2} (cF_1 + aF_3) F_2] \underline{j} \\ + [aF_2 - \frac{F_2}{R^2} (cF_1 + aF_3) F_3] \underline{k}$$





$$\underline{R} = F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k}$$

$$\underline{r} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}$$

$$\underline{M}_2^* = \underline{r} \times \underline{R} = (x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}) \times (F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k})$$

$$= (yF_3 - zF_2) \underline{i} + (zF_1 - xF_3) \underline{j} + (xF_2 - yF_1) \underline{k}$$

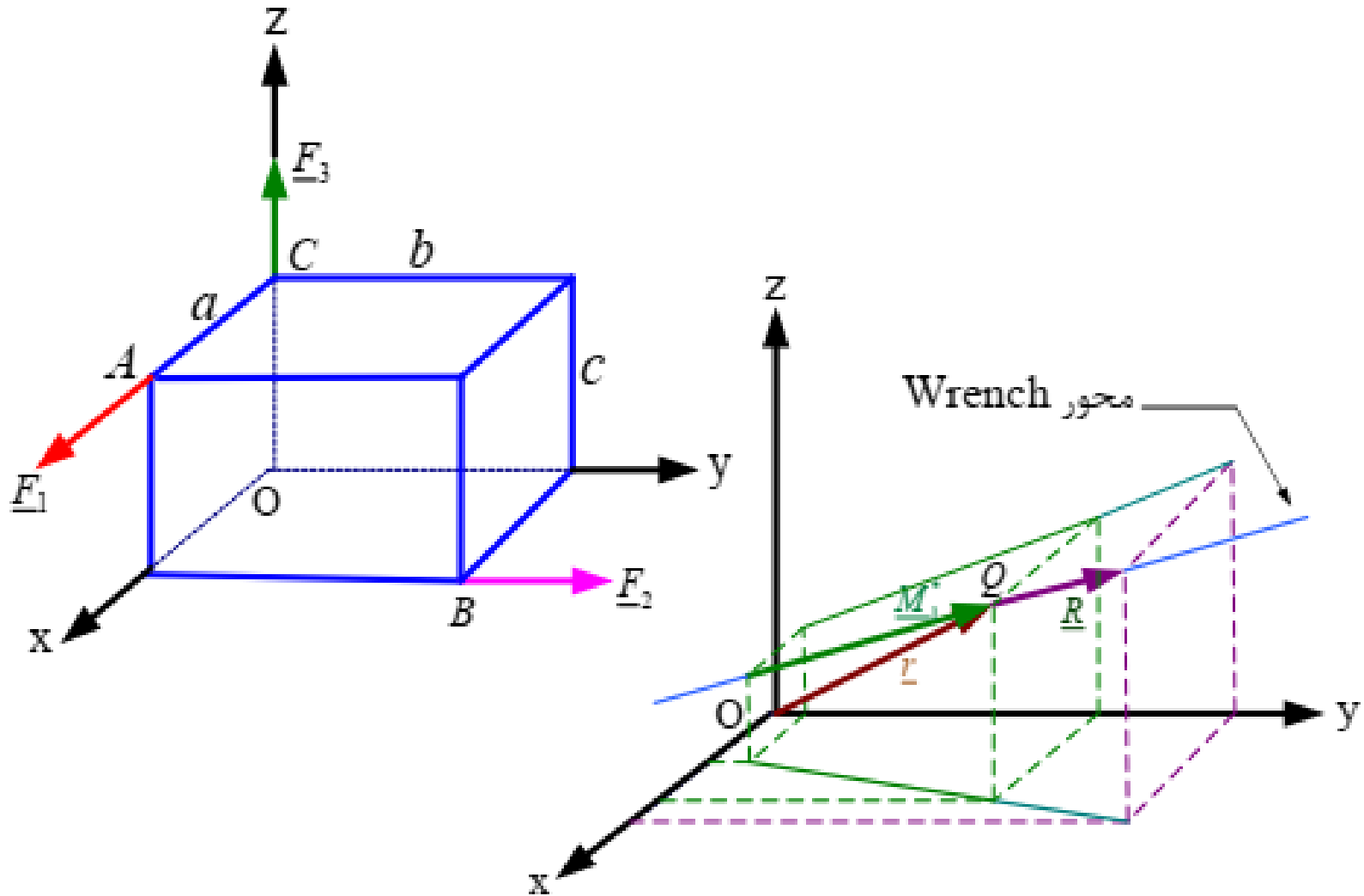
$$\underline{M}_2^* = (yF_3 - zF_2)\underline{i} + (zF_1 - xF_3)\underline{j} + (xF_2 - yF_1)\underline{k}$$

$$\underline{M}_2^* = cF_1\underline{j} + aF_2\underline{k} - \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)\underline{R}$$

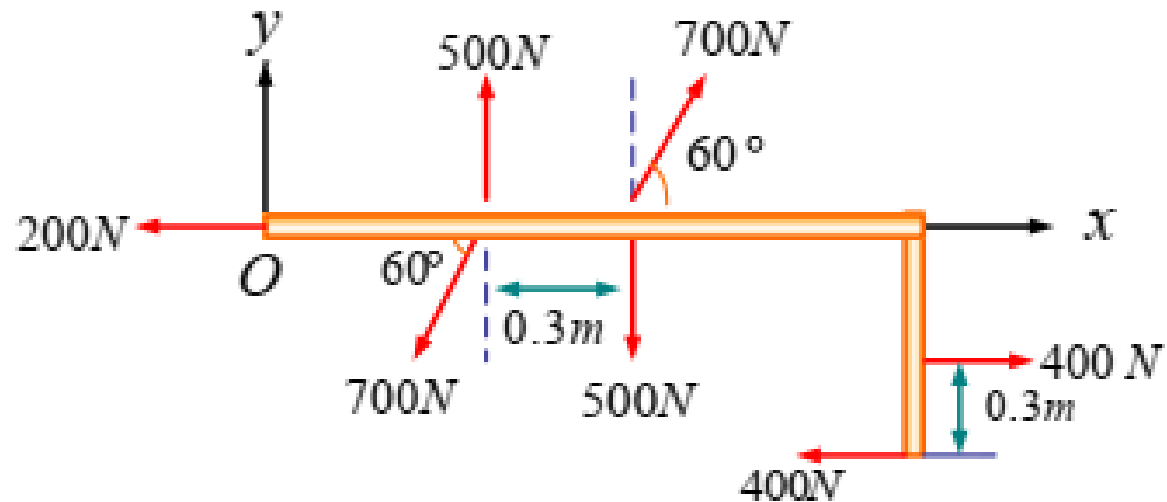
$$\underline{M}_2^* = -\frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_1\underline{i} + [cF_1 - \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_2]\underline{j} + [aF_2 - \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_3]\underline{k}$$

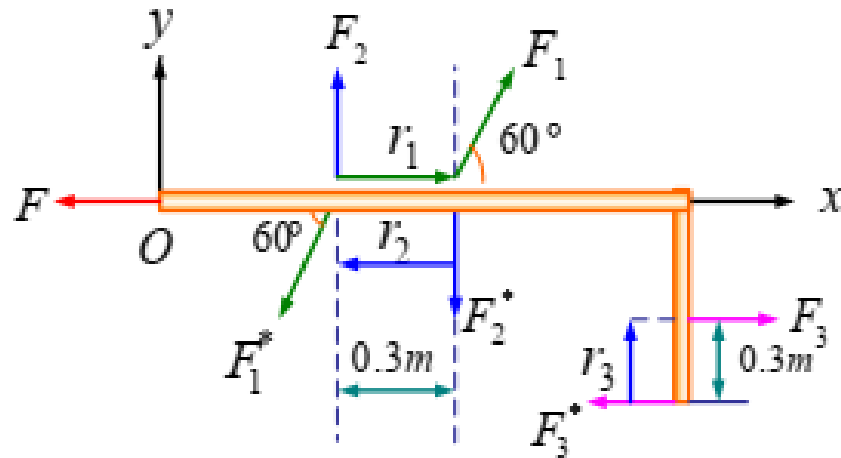
$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_1 = yF_3 - zF_2 \\ cF_1 - \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_2 = zF_1 - xF_3 \\ aF_2 - \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)F_3 = xF_2 - yF_1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{F_2}{R^2 F_3}(cF_1 + aF_3)F_2 - c \frac{F_1}{F_3} \\ y = -\frac{F_1 F_2}{R^2 F_3}(cF_1 + aF_3) \\ z = 0 \end{array} \right.$$





مثال: سیستم نشان داده شده در شکل را با یک نیرو و بردار کوپل در نقطه  $O$  تعویض کنید.





$$\underline{F}_2 = 500 \underline{j} \quad \underline{F}_3 = 400 \underline{i}$$

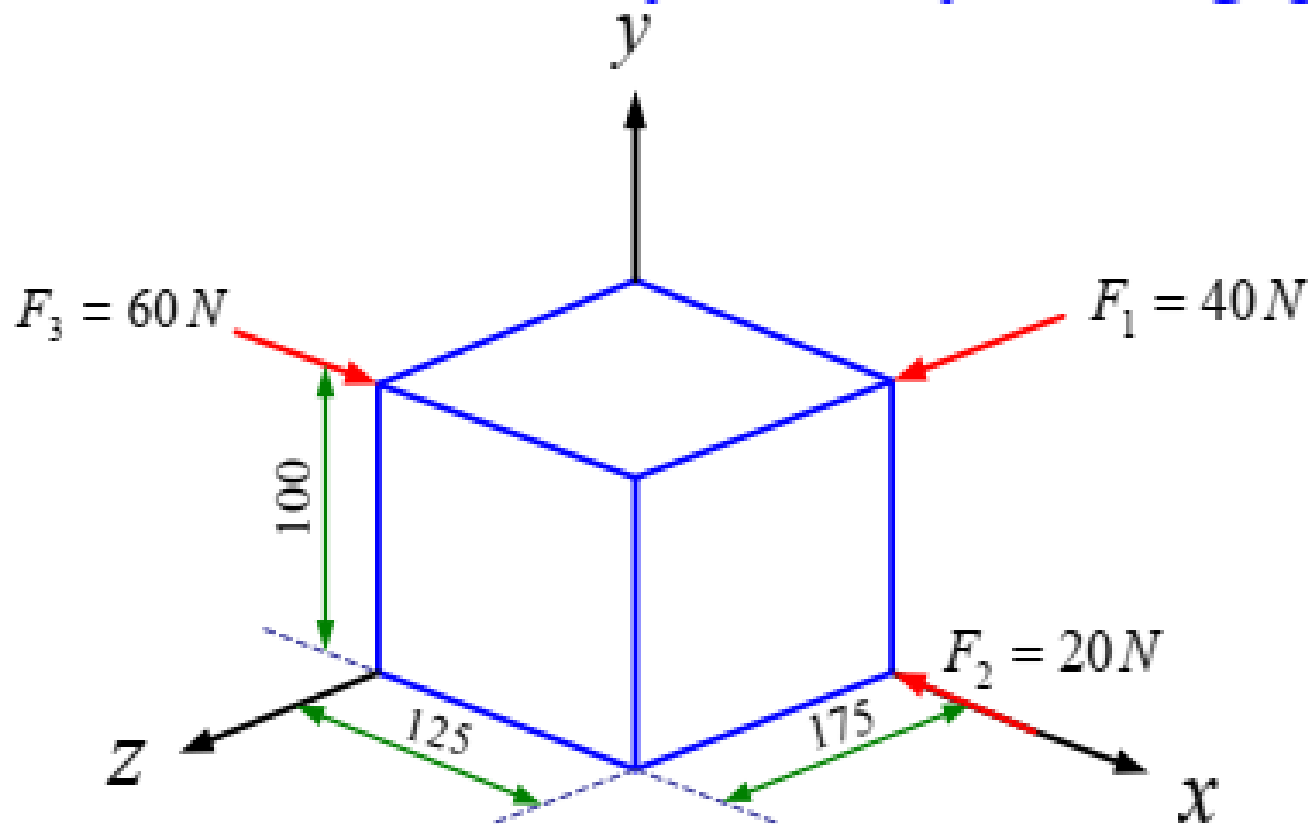
$$\underline{r}_2 = -0.3 \underline{i} \quad \underline{M}_2 = \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 = -0.3 \underline{i} \times 500 \underline{j} = -150 \underline{k}$$

$$\underline{r}_3 = 0.3 \underline{j} \quad \underline{M}_3 = 0.3 \underline{j} \times 400 \underline{i} = -120 \underline{k}$$

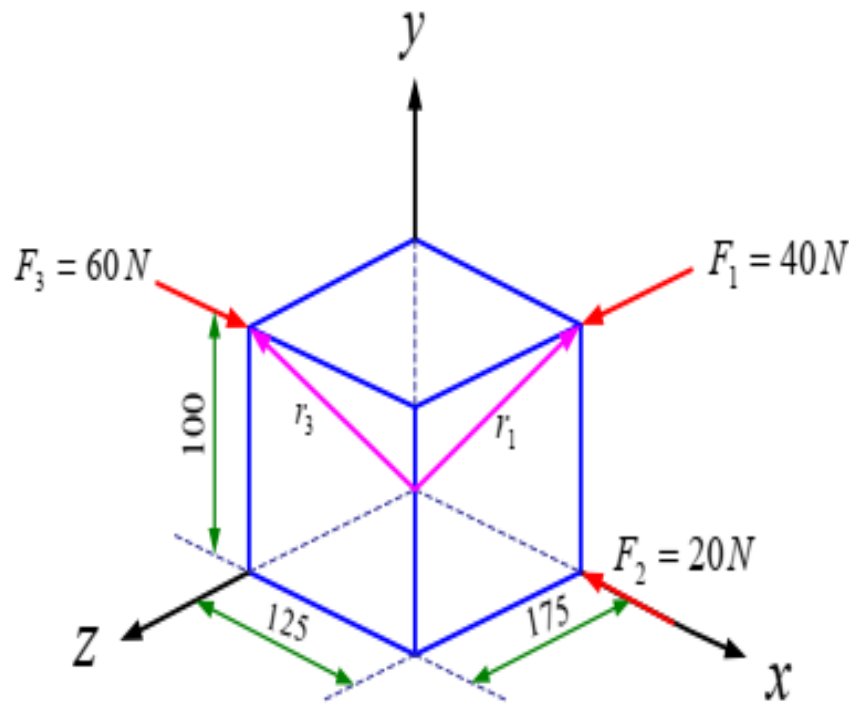
$$\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 = \left( -270 + 105\sqrt{3} \right) \underline{k} = -88.14 \underline{k}$$



**مثال:** سه نیرو در امتداد یال های یک جسم مکعب مستطیل شکل اعمال میشوند. مطلوب است: 1- تعویض این نیروها با یک رنج معادل 2- بزرگی و جهت برآیند  $R$  3- نقطه ای که محور رنج صفحه  $YZ$  را قطع می کند. (ابعاد بر حسب میلیمتر هستند)







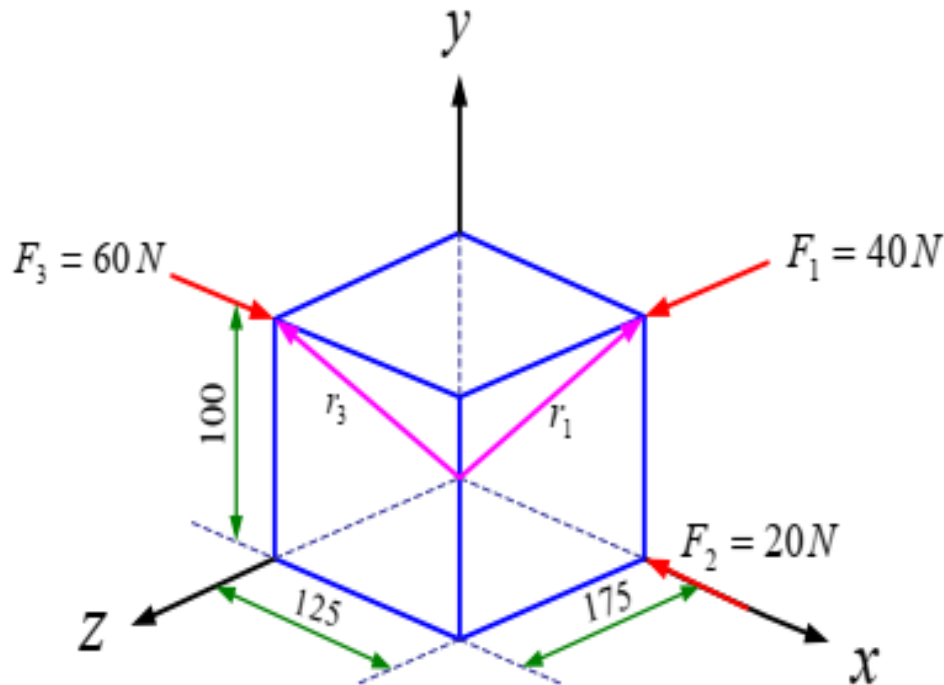
$$\underline{F}_1 = 40 \underline{k} \quad \underline{F}_2 = -20 \underline{i} \quad \underline{F}_3 = 60 \underline{i}$$

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = 40(\underline{i} + \underline{k})$$

$$\underline{r}_1 = 0.125 \underline{i} + 0.1 \underline{j}$$

$$\underline{M}_1 = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 = (0.125 \underline{i} + 0.1 \underline{j}) \times (40) \underline{k} = -5 \underline{j} + 4 \underline{i}$$

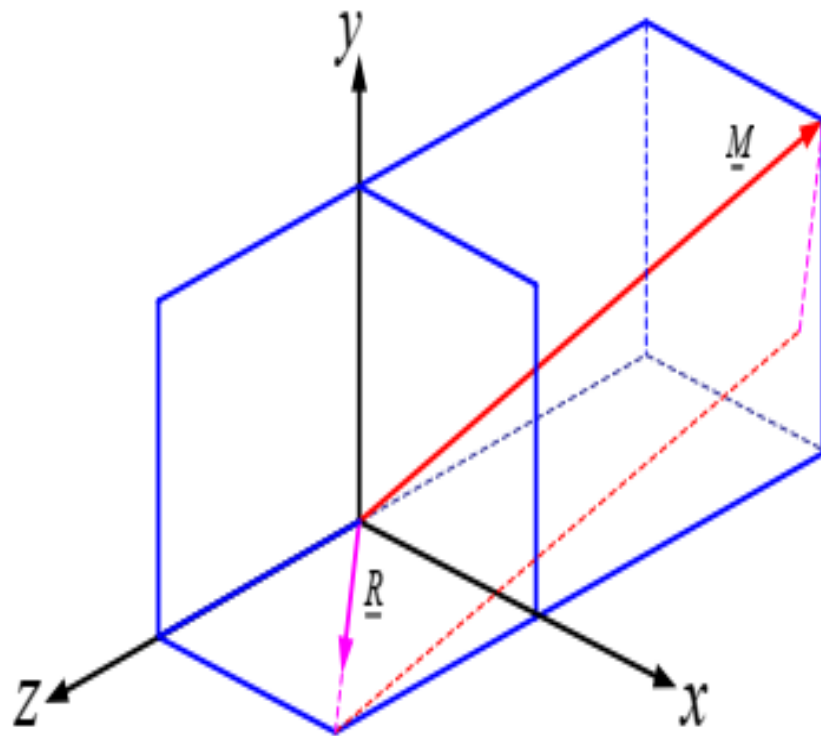




$$\underline{M}_2 = 0 \quad \underline{F}_3 = 60 \underline{i} \quad \underline{r}_3 = 0.1 \underline{j} + 0.175 \underline{k}$$

$$\underline{M}_3 = \underline{r}_3 \times \underline{F}_3 = (0.1 \underline{j} + 0.175 \underline{k}) \times 60 \underline{i} = -6 \underline{k} + 10.5 \underline{j}$$

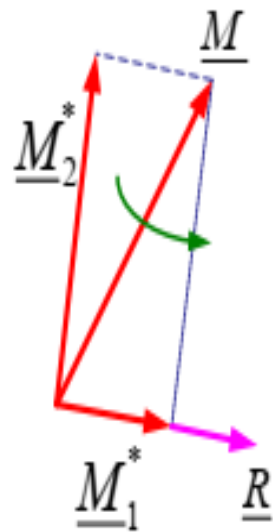
$$\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 = 4 \underline{i} + 5.5 \underline{j} - 6 \underline{k}$$



$$\underline{M} = 4\underline{i} + 5.5\underline{j} - 6\underline{k}$$

$$\underline{R} = 40(\underline{i} + \underline{k})$$

$$\underline{M} = \underline{M}_1^* + \underline{M}_2^*$$

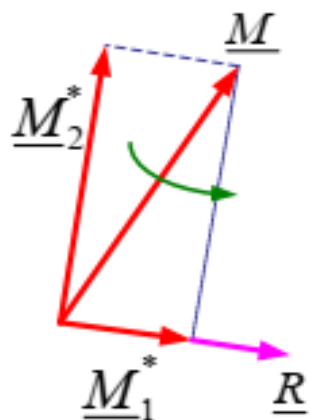


$$\underline{\lambda} = \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|} = \frac{40(\underline{i} + \underline{k})}{40\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{i} + \underline{k})$$

$$\underline{M}_1^* = \underline{M}\underline{\lambda} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$\underline{M}_2^* = \underline{M}_1^*\underline{\lambda} = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{i} + \underline{k})\right) = -(\underline{i} + \underline{k})$$





$$\underline{R} = 40(\underline{i} + \underline{k})$$

$$\underline{M}_1^* = -(\underline{i} + \underline{k}) \quad \underline{M} = 4\underline{i} + 5.5\underline{j} - 6\underline{k}$$

$$\underline{M}_2^* = \underline{M} - \underline{M}_1^* = 5\underline{i} + 5.5\underline{j} - 5\underline{k}$$

$$\begin{aligned} \underline{M}_2^* &= \underline{r} \times \underline{R} = 40(x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}) \times (\underline{i} + \underline{k}) \\ &= 40y\underline{i} - 40(x - z)\underline{j} - 40y\underline{k} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 40y = 5 \\ 40(x - z) = -5.5 \end{cases} \quad x = 0 \Rightarrow \quad y = 1/8 \text{ m} , \quad z = 11/88 \text{ m}$$

