

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





استاتیک ومقاومت مصالح

محمد احمدی دریاکناری



برنامه درسی

هفته

موضوع

1

نیرو و تعادل ذره مادی

2

گشتاور و زوج نیرو

3

4

تعادل

5

تعیین مراکز تعادل

6

تحلیل سازه ها

7

8

استاتیک سیالات

9

10

ممان اینرسی

11

اصطکاک

12

تحلیل تیرها

13

تحلیل کابل ها

14 , 15

مفهوم تنش و کرنش و قانون هوک

16

دایره موهر



- ۱- نمره کوییز ۶
- ۲- نمره میان ترم ۴
- ۳- نمره پایان ترم ۱۰



۱- مقدمه، ارایه برداری نیرو و تعادل ذره مادی

تعاریف:

مکانیک: بخشی از علوم است که درباره وضع سکون و حرکت اجسام تحت تأثیر نیروها گفتگو میکند.

فضا: یک ناحیه هندسی است که بوسیله اجسام اشغال میشود و در آن رویدادها بوقوع میپیوندد. موقعیت هر نقطه از جسمی بوسیله مختصات مربوط به آن نقطه با انتخاب دستگاه مختصات مناسب مشخص میشود.

زمان: معیار توالی رویدادهاست. در مکانیک نیوتونی زمان یک کمیت مطلق محسوب میشود.



نیرو (Force) :

اثر برداری یک جسم بر جسم دیگر است. نیرویی که بر جسمی وارد میشود، تمایل دارد آن جسم را در راستا و جهتی که بر آن اثر کرده است به حرکت درآورد.

ذره مادی (Particle) :

نمایشگر یک جسم است با ابعاد قابل اغماض. به هنگامیکه ابعاد یک جسم در تشریح حرکت آن و یا اثر نیروهای وارده بر آن مطرح نیستند، جسم را ذره مادی فرض میکنند.

جسم صلب (Rigid body) :

جسمی است که بین اجزاء تشکیل دهنده آن هیچ تغییر شکل نسبی بوجود نیاید. عبارت دیگر: هرگاه تغییر شکل جسم در مقایسه با ابعاد کلی جسم ناچیز باشد، جسم را صلب فرض میکنیم.



استاتیک (Statics) :

شاخه ای از علم مکانیک است که در ارتباط با تعادل اجسام بحث می کند. در استاتیک، فرض بر آنست که جسم مورد نظر کاملاً صلب است؛ یعنی هیچ تغییر شکلی بواسطه نیروهای اعمالی در آن ایجاد نمی شود.

دیاگرام آزاد (Free body diagram) :

یک سیستم مکانیکی را میتوان بصورت یک جسم یا گروهی از اجسام که میتوان آنها را از یکدیگر مجزا نمود تعریف کرد. در حل مسایل مکانیک لازم است که نیروهای وارده بر جسم یا اجزای تشکیل دهنده سیستم مکانیکی مورد بررسی قرار گیرد. بدین منظور از دیاگرام آزاد که نمایشگر نیروهای وارده بر جسم یا اجزای تشکیل دهنده سیستم مکانیکی میباشد استفاده میکنند.



فرمول	نماد	یکا	کمیت
m/s^2	...	متر بر مجذور ثانیہ	شتاب
*	rad	رادیان	زاویہ
rad/s^2	...	رادیان بر مجذور ثانیہ	شتاب زاویہ‌ای
rad/s	...	رادیان بر ثانیہ	سرعت زاویہ‌ای
m^2	...	متر مربع	سطح
kg/m^3	...	کیلوگرم بر متر مکعب	چگالی
N.m	J	ژول	انرژی
$kg \cdot m/s^2$	N	نیوتون	نیرو
s^{-1}	Hz	ہرتز	بسامد
$kg \cdot m/s$...	نیوتون - ثانیہ	ضربه
**	m	متر	طول
**	kg	کیلوگرم	جرم
N.m	...	نیوتون - متر	گشتاور نیرو
J/s	W	وات	توان
N/m^2	Pa	پاسکال	فشار
N/m^2	Pa	پاسکال	تنش
**	s	ثانیہ	زمان
m/s	...	متر بر ثانیہ	سرعت
m^3	...	متر مکعب	حجم
$10^{-3} m^3$	L	لیٹر	مایعات
N.m	J	ژول	کار



قانون اول نیوتن حرکت بیان می کند که

یک جسم در هر حالتی (سکون یا حرکت) باشد به حالت خود ادامه می دهد. به شرطی که برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد.

کاربرد

ورزشکار معمولاً قبل از پرش از راه دور مسافتی می دود. او این کار را برای غلبه بر اینرسی سکون و بدست آوردن حرکت انجام می دهد. از این رو در زمان پرش سرعت بیشتری دارد.



قانون دوم نیوتن حرکت بیان می کند که

شتاب جسم در حال حرکت به جرم جسم و همچنین نیرویی که بر جسم وارد می شود بستگی دارد. $F = ma$ ، که در آن، F نیرو، m جرم و a شتاب می باشد..

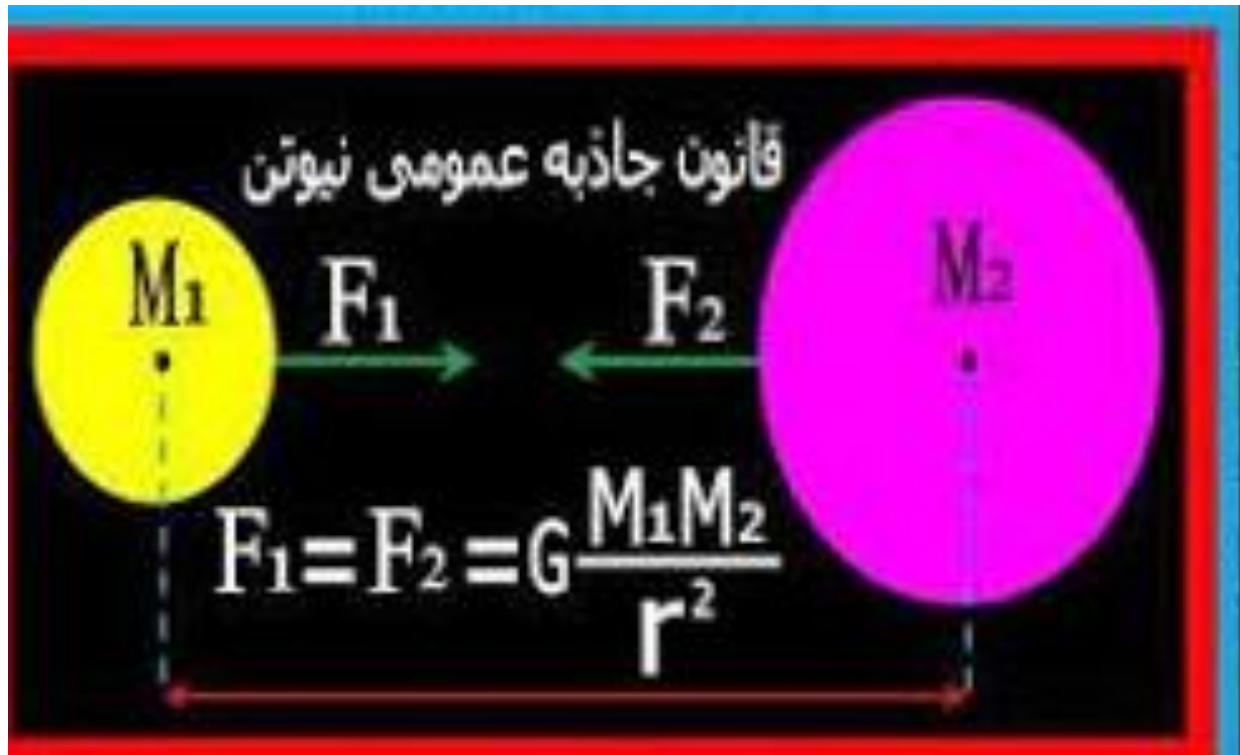
کاربرد

بازی طناب کشی را در نظر بگیرید، دو تیم طنابها را در جهت مخالف می کشند. اما حرکت طناب در نتیجه نیروی خالص روی طناب خواهد بود. نیروی خالص به نوبه خود توسط اختلاف نیرویی که دو تیم اعمال می کنند تعیین می شود. هر کدام از تیمها که سخت تر می کشند یا نیروی بیشتری اعمال می کنند، پیروز می شوند.



قانون سوم نیوتن حرکت بیان می کند که
برای هر عملی، عکس العملی برابر و خلاف جهت آن وجود دارد

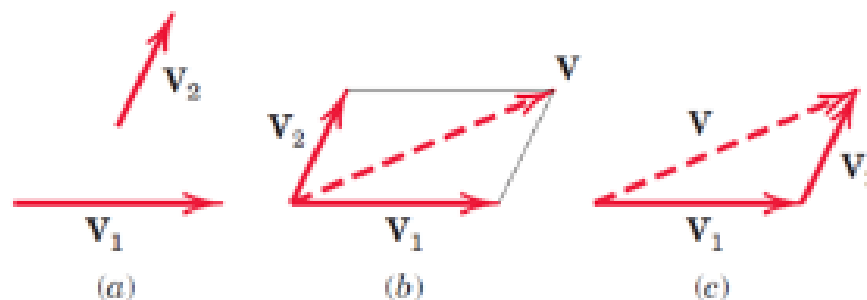
کاربرد



مقدمه ای بر بردارها

بردارها در صفحه

برایند بردارها: برای بدست آوردن براین دو بردار به روش ترسیمی، از دو روش متوازی الاضلاع و مثلث استفاده می‌کنیم (شکل ۲). در روش متوازی الاضلاع ابتدا از یک نقطه، هم‌سنگ بردار اول را رسم کرده و از ابتدای آن، هم‌سنگ بردار دوم را رسم می‌کنیم. برای پیدا کردن شکل متوازی الاضلاع، از انتهای بردار اول خطی به موازات بردار دوم رسم می‌کنیم. از انتهای بردار دوم هم خطی به موازات بردار اول می‌کشیم و بدین ترتیب متوازی الاضلاع بدست می‌آید. قطر این متوازی الاضلاع، برایند دو بردار است (شکل ۲-ب). در روش مثلث، هم‌سنگ بردار اول را از نقطه ای کشیده و از انتهای آن، هم‌سنگ بردار دوم را رسم می‌کنیم. ابتداء بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کنیم و بردار حاصل، همان برایند دو بردار است (شکل ۲-ج). پررنگ بودن V ها در شکل بیانگر این است که اینکمیت‌ها برداری هستند.

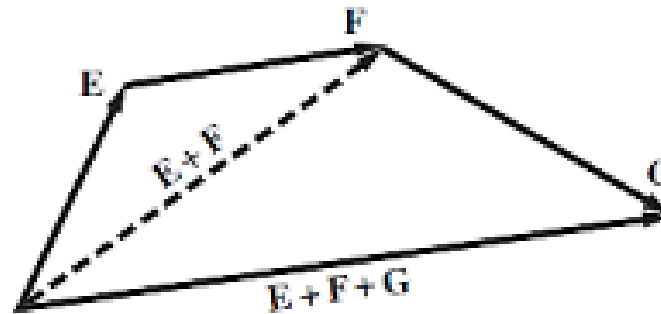


شکل ۲- (a) نمایش دو بردار. (b) برایند بردارها به روش متوازی الاضلاع. (c) برایند بردارها به روش مثلث
 $V = V_1 + V_2$ برایند بردارهاست.

برایند بیش از دو بردار

برای پیدا کردن بردار برایند بیش از دو بردار، هم‌سنگ بردارها را به دنبال هم رسم می‌کنیم (مشابه روش مثلثی).

برداری که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می‌کند، برایند بردارهاست (شکل ۳).

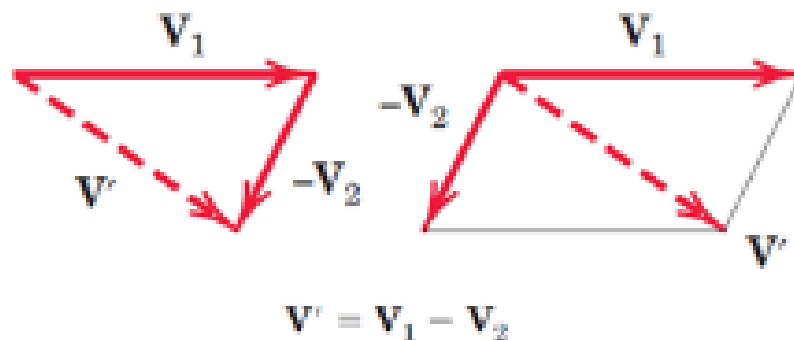


شکل ۳- نمایش رسم برایند سه بردار



تفاضل دو بردار

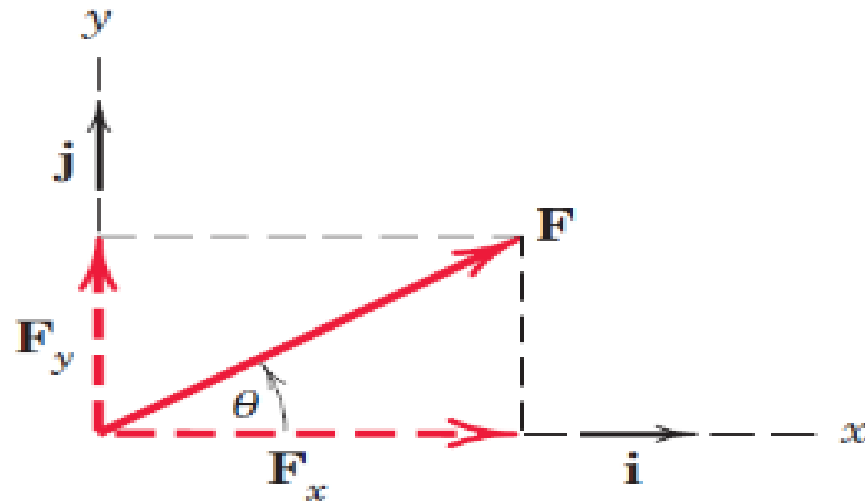
تفاضل بردارها: برای پیدا کردن حاصل تفاضل $V_1 - V_2$ کافیست بردار $-V_2$ را رسم کرده و سپس به دو روش ذکر شده در پیدا کردن براینند دو بردار، براینند $-V_2$ و V_1 را پیدا کنیم (شکل ۴).



شکل ۴- (a) نمایش دو بردار. (b) تفاضل بردارها به روش متوازی الاضلاع (c). تفاضل بردارها به روش مثلث

تجزیه بردارها به بردارهای متعامد

در قسمت قبل مشاهده شد که می‌توان مجموع دو بردار را به روش متوازی الاضلاع یا مثلث پیدا کرد. حال در صورتی که دو امتداد متعامد در صفحه و برداری مانند F داشته باشیم، می‌توان آن را مطابق شکل ۵ بر دو امتداد تجزیه کرد.



شکل ۳- تجزیه بردار F به دو بردار متعامد F_x و F_y

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$$

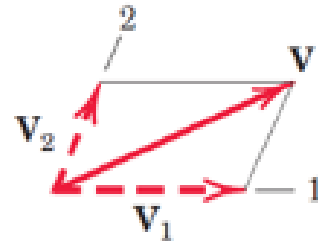
$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$$

$$F_x = F \cos \theta \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$F_y = F \sin \theta \quad \theta = \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x}$$

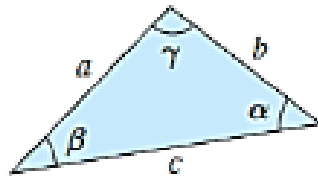
تجزیه بردارها به بردارهای غیر متعامد

در شکل ۶ تجزیه بردار V را بر دو امتداد غیر متعامد ۱ و ۲ می‌بینیم.



شکل ۴- تجزیه بردار V به دو بردار غیر متعامد V_1 و V_2

در تجزیه بردار به مولفه‌های غیر متعامد، استفاده از قانون سینوس‌ها و کوسینوس‌ها بسیار کارآمد است (شکل ۷).

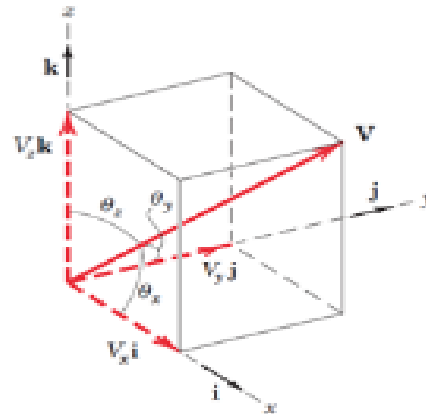


Law of sines	$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$
Law of cosines	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

بردارها در فضا

بردارها در فضا

بردار \mathbf{v} شکل ۸ را در نظر بگیرید.



شکل ۶- نمایش بردار در فضا

این بردار در هر سه راستای x, y, z مولفه دارد که آنها را با V_x, V_y و V_z نشان می‌دهیم و داریم:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

می‌توان نوشت:

$$V_x = lV \quad V_y = mV \quad V_z = nV$$

منظور از l, m و n ، کوسینوس‌های هادی (کوسینوس بردار \mathbf{v} با هر یک از سه محور x, y, z) است.

$$l = \cos \theta_x \quad m = \cos \theta_y \quad n = \cos \theta_z$$

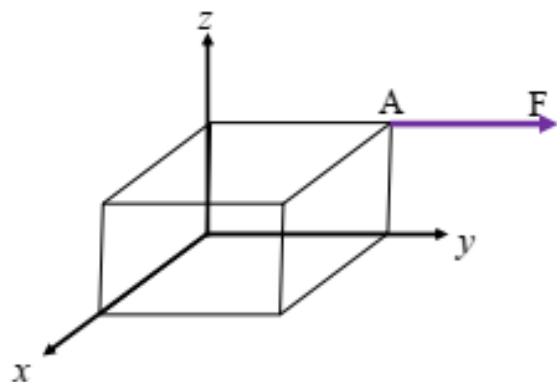
لازم به ذکر است که مجموع مربعات کوسینوس‌های هادی برابر یک است.

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

مربع اندازه بردار \mathbf{v} برابر مجموع مربعات اندازه مولفه‌های آن در سه راستاست:

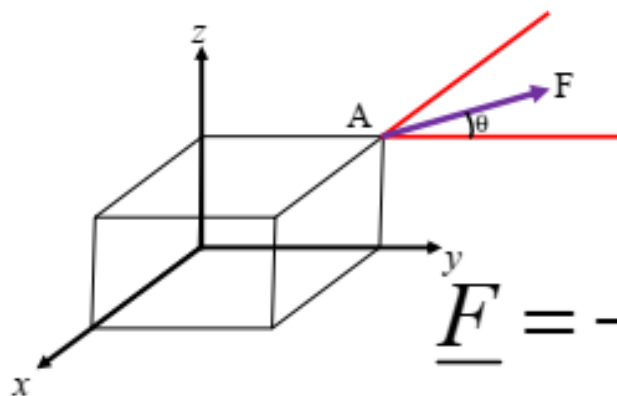
$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

نمایش نیروها:



نیروی محوری:

$$\underline{F} = F \underline{j}$$

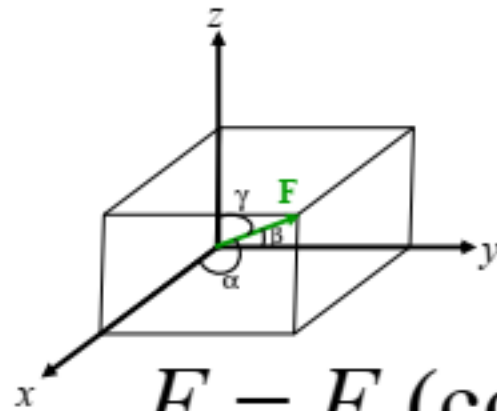


نیروی صفحه ای:

$$\underline{F} = -F_x \underline{i} + F_y \underline{j}$$

$$\underline{F} = -F \sin\theta \underline{i} + F \cos\theta \underline{j}$$

نیروی فضایی:



$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$$

$$\underline{F} = F (\cos \alpha \underline{i} + \cos \beta \underline{j} + \cos \gamma \underline{k})$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos \beta = \frac{F_y}{F}$$

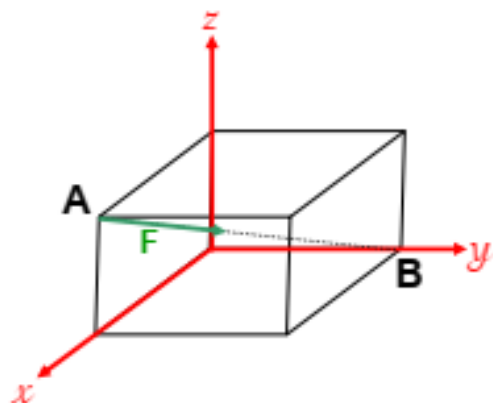
$$\cos \gamma = \frac{F_z}{F}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



نحوه ارایه یک نیرو در فضا به شکل برداری:

روش اول: با معلوم بودن مختصات دو نقطه از امتداد نیرو:



$$A = (x_A, y_A, z_A)$$

$$B = (x_B, y_B, z_B)$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = \underline{\lambda} = \frac{\underline{AB}}{AB} = \frac{(x_B - x_A)\underline{i} + (y_B - y_A)\underline{j} + (z_B - z_A)\underline{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

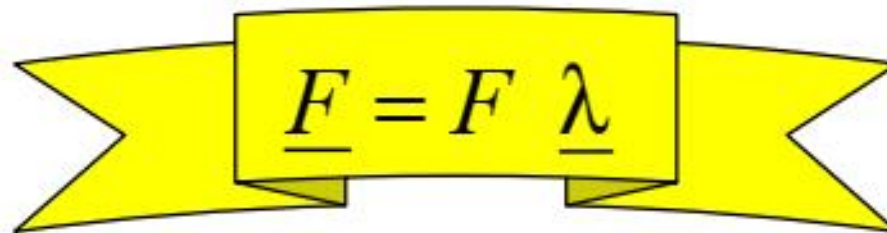
$$\underline{F} = F \underline{\lambda}$$

$$\underline{\lambda}_{BA} = -\underline{\lambda}_{AB}$$

روش دوم:

اگر کسینوس های هادی معلوم باشند، آنگاه داریم:

$$\underline{\lambda}_{AB} = \underline{\lambda} = \cos \alpha_x \underline{i} + \cos \alpha_y \underline{j} + \cos \alpha_z \underline{k}$$


$$\underline{F} = F \underline{\lambda}$$

تعادل ذره مادی (Equilibrium of a particle)

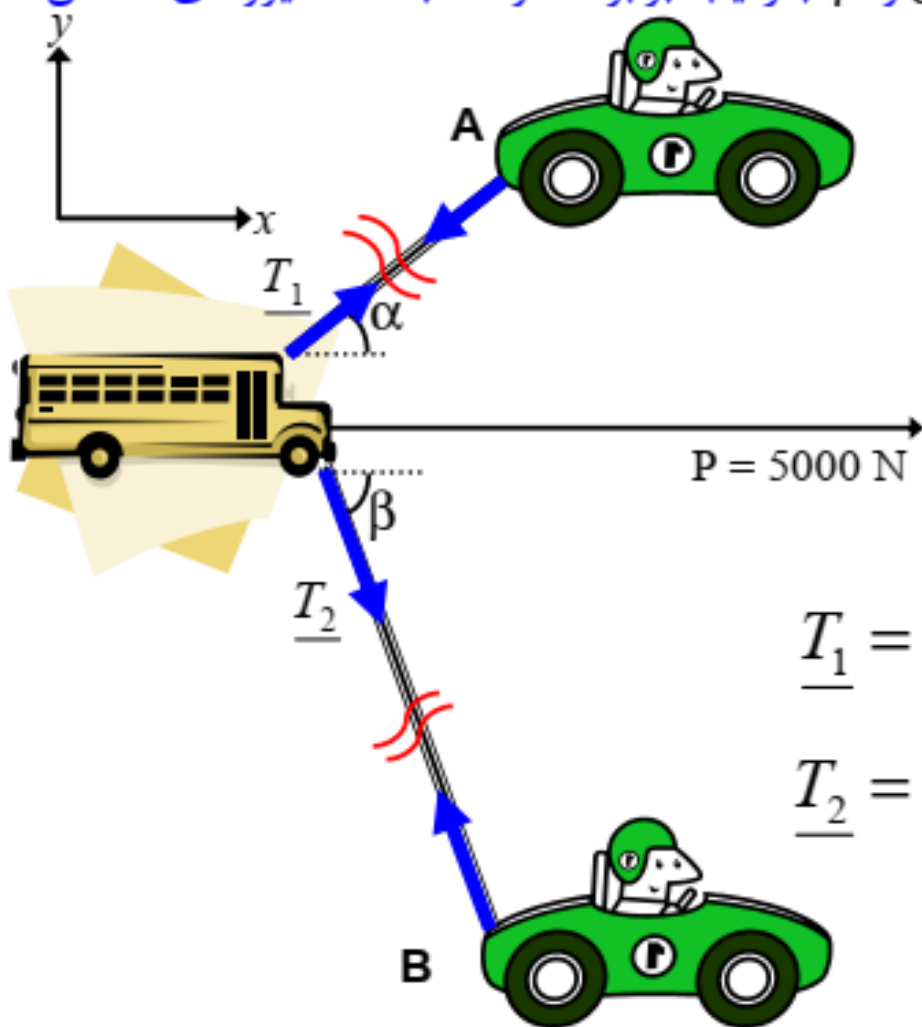
یک ذره مادی به هنگامی در وضعیت تعادل است که برآیند نیروهای وارده بر آن برابر صفر باشد.

بعبارت دیگر؛ جهت ارضای قانون اول نیوتون میبایست داشته باشیم:

$$\underline{R} = \sum \underline{F} = 0$$



مثال: اتوبوسی بوسیله دو خودرو A و B در جهت و امتداد نشان داده شده در شکل تحت تأثیر نیروی کشیده می شود. چنانچه زوایای α و β به ترتیب برابر 30 و 45 باشند، نیروهای کشش وارده از طرف کابل ها را بر اتوبوس بیابید:



قدم اول: انتخاب دستگاه مختصات

قدم دوم: دیاگرام آزاد (رسم نیروها)

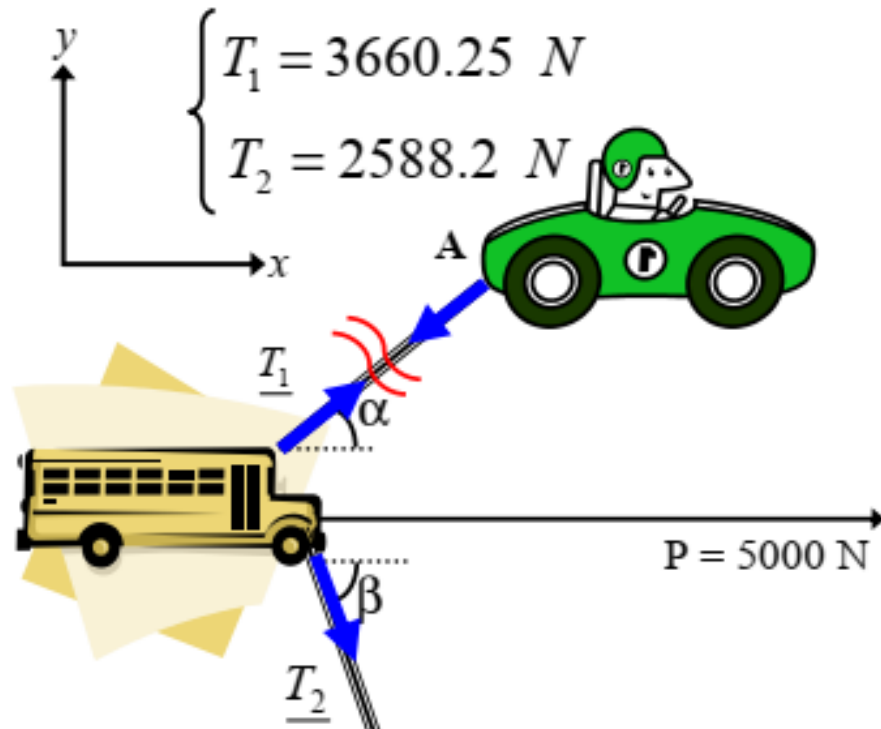
قدم سوم: معرفی نیروها

$$\underline{P} = 5000 \underline{i}$$

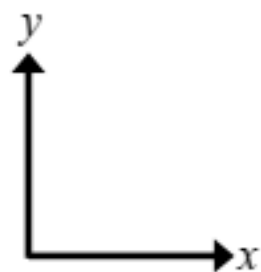
$$\underline{T}_1 = T_1 (\cos \alpha \underline{i} + \sin \alpha \underline{j})$$

$$\underline{T}_2 = T_2 (\cos \beta \underline{i} - \sin \beta \underline{j})$$

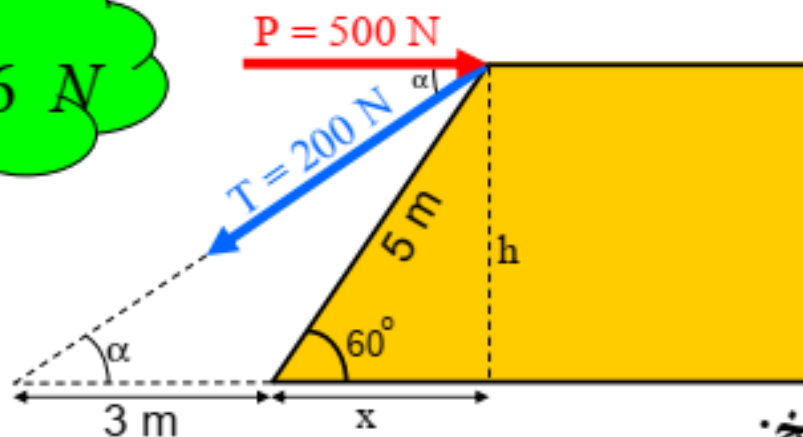
قدم آخر: محاسبه خواسته سؤال



مثال: بر سازه زیر دو نیروی P و T مطابق شکل وارد می شود. مطلوبست محاسبه برآیند نیروها و بزرگی آن؟



$R = 364.46 \text{ N}$



پاسخ:

$$\underline{P} = 500 \underline{i}$$

$$\underline{T} = -200 (\cos \alpha \underline{i} + \sin \alpha \underline{j})$$

$$\underline{T} = -200 (0.79 \underline{i} + 0.62 \underline{j})$$

$$\underline{R} = \underline{P} + \underline{T}$$

$$\underline{R} = (500 - 157.17)\underline{i} - 123.68\underline{j}$$

$$\underline{R} = 342.83\underline{i} - 123.68\underline{j} \text{ N}$$

$$x = 5 \cos 60^\circ = 2.5$$

$$h = 5 \sin 60^\circ = 4.3$$

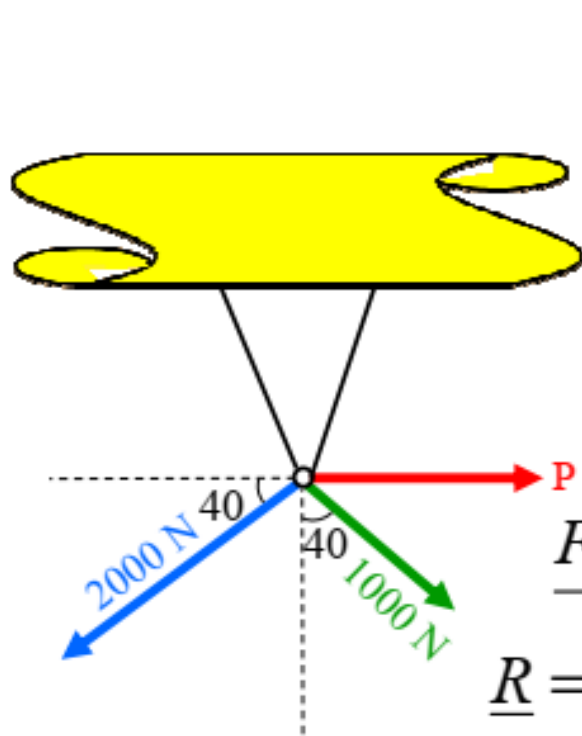
$$\tan \alpha = \frac{h}{x+3} = \frac{4.3}{5.5}$$

$$\alpha = 38.2^\circ$$



مثال: یک جرثقیل سقفی مطابق شکل تحت تأثیر سه نیرو قرار گرفته است. نیروی P را بنحوی تعیین کنید که برآیند نیروها در امتداد قائم باشد؛

پاسخ:



$$\underline{P} = P \underline{i}$$

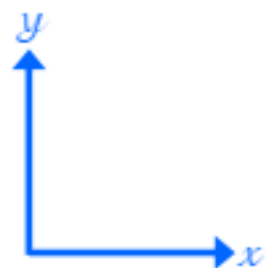
$$\underline{F}_1 = 1000 (\sin 40^\circ \underline{i} - \cos 40^\circ \underline{j})$$

$$\underline{F}_2 = -2000 (\cos 40^\circ \underline{i} + \sin 40^\circ \underline{j})$$

$$\underline{R} = \underline{P} + \underline{F}_1 + \underline{F}_2$$

$$\underline{R} = (P - 889.3)\underline{i} - (2051.62)\underline{j} \implies \begin{cases} \underline{P} = 889.3 \underline{i} \text{ N} \\ \underline{R} = -2051.62 \underline{j} \text{ N} \end{cases}$$

مثال: به سازه ای مطابق شکل که شامل دو میله AB و AC است، نیروی F در نقطه A اعمال شده است. این نیرو در امتداد اعضای AB و AC سازه چه نیروهایی را ایجاد میکند؟



$$F_{AB} = -313.8 \text{ N}$$

$$F_{AC} = 256.2 \text{ N}$$

$$\underline{F}_1 = F_{AB} (\cos 45 \underline{i} + \sin 45 \underline{j})$$

$$\underline{F}_2 = F_{AC} (\cos 30 \underline{i} - \sin 30 \underline{j})$$

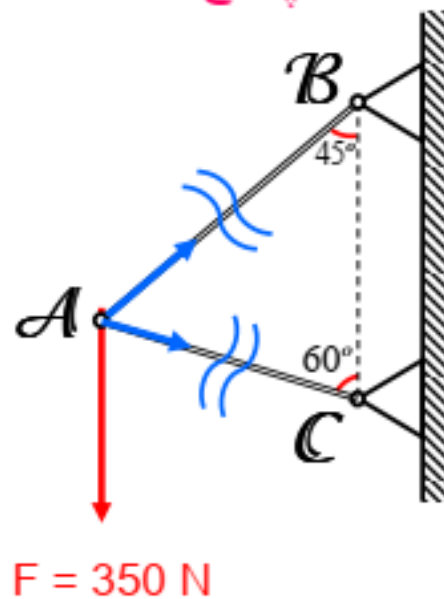
$$\underline{F} = -350 \underline{j} \quad \underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{F}$$

$$\underline{R} = (F_{AB} \cos 45 + F_{AC} \cos 30) \underline{i} + (F_{AB} \sin 45 - F_{AC} \sin 30) \underline{j} = -350 \underline{j}$$

$$F_{AB} \cos 45 + F_{AC} \cos 30 = 0$$

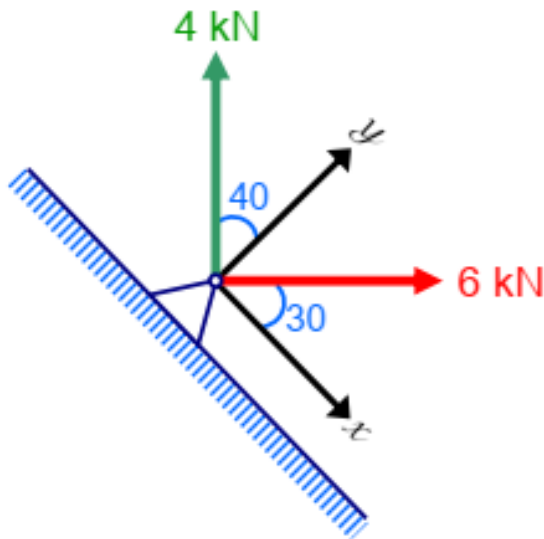
$$F_{AB} \sin 45 - F_{AC} \sin 30 = -350$$

پاسخ:



مثال: به مفصلی از یک سازه مطابق شکل دو نیرو در امتدادهای نشان داده شده، اعمال شده اند. آن ها را با یک نیرو تعویض نمایید و امتداد نیروی تعویضی را مشخص کنید:

پاسخ:



$$\underline{F}_1 = 6 (\cos 30 \underline{i} + \sin 30 \underline{j})$$

$$\underline{F}_2 = -4 (\sin 40 \underline{i} - \cos 40 \underline{j})$$

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$$

$$\underline{R} = (6 \cos 30 - 4 \sin 40)\underline{i} + (6 \sin 30 + 4 \cos 40)\underline{j}$$

$$\underline{R} = 2.62\underline{i} + 6.06\underline{j}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6.06}{2.62}\right) \Rightarrow \theta = 66.6^\circ$$

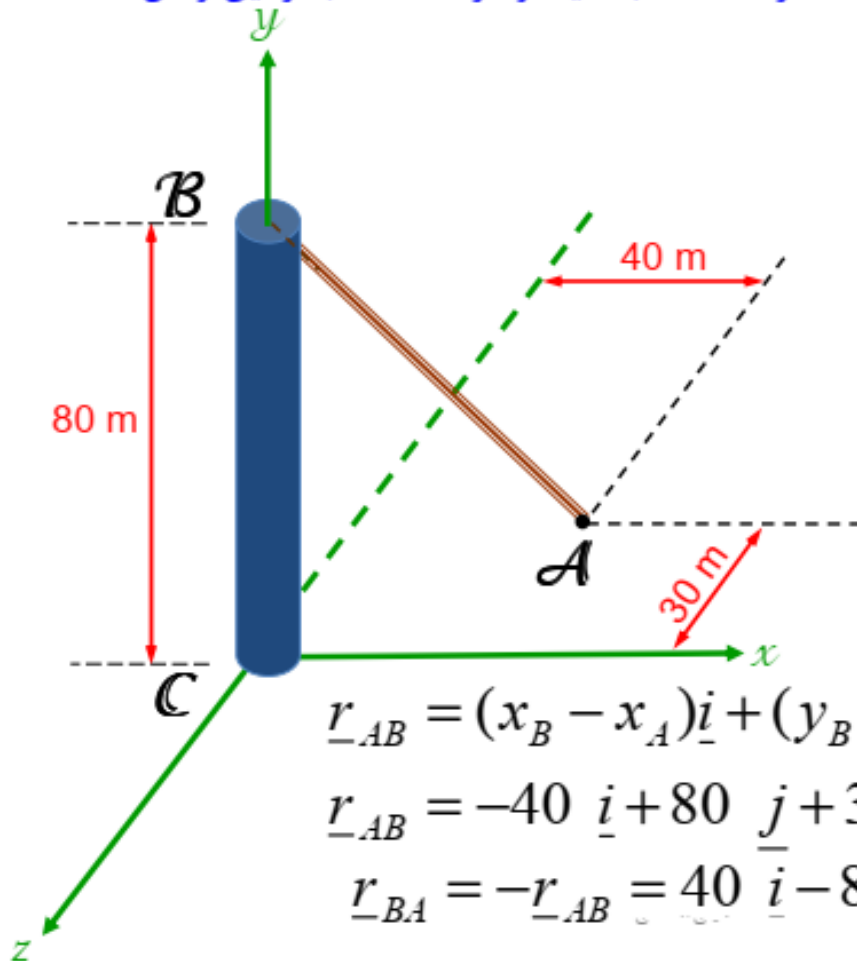
مثال: میله قائم BC بوسیله کابل AB در نقطه B به میله و در نقطه A به زمین وصل شده است. مطلوبست:

الف. بردار وضعیت AB ؛

ب. بردار وضعیت BA ؛

پ. بردار یکه AB .

پاسخ:



$$A(40, 0, -30)$$

$$B(0, 80, 0)$$

$$\underline{r}_{AB} = (x_B - x_A)\underline{i} + (y_B - y_A)\underline{j} + (z_B - z_A)\underline{k}$$

$$\underline{r}_{AB} = -40 \underline{i} + 80 \underline{j} + 30 \underline{k}$$

$$\underline{r}_{BA} = -\underline{r}_{AB} = 40 \underline{i} - 80 \underline{j} - 30 \underline{k}$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = \frac{\underline{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{(x_B - x_A)\underline{i} + (y_B - y_A)\underline{j} + (z_B - z_A)\underline{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

$$A(40,0,-30)$$

$$B(0,80,0)$$

$$\underline{r}_{AB} = -40 \underline{i} + 80 \underline{j} + 30 \underline{k}$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = \frac{\underline{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{-40 \underline{i} + 80 \underline{j} + 30 \underline{k}}{\sqrt{(-40)^2 + (80)^2 + (30)^2}} = -0.42 \underline{i} + 0.85 \underline{j} + 0.32 \underline{k}$$

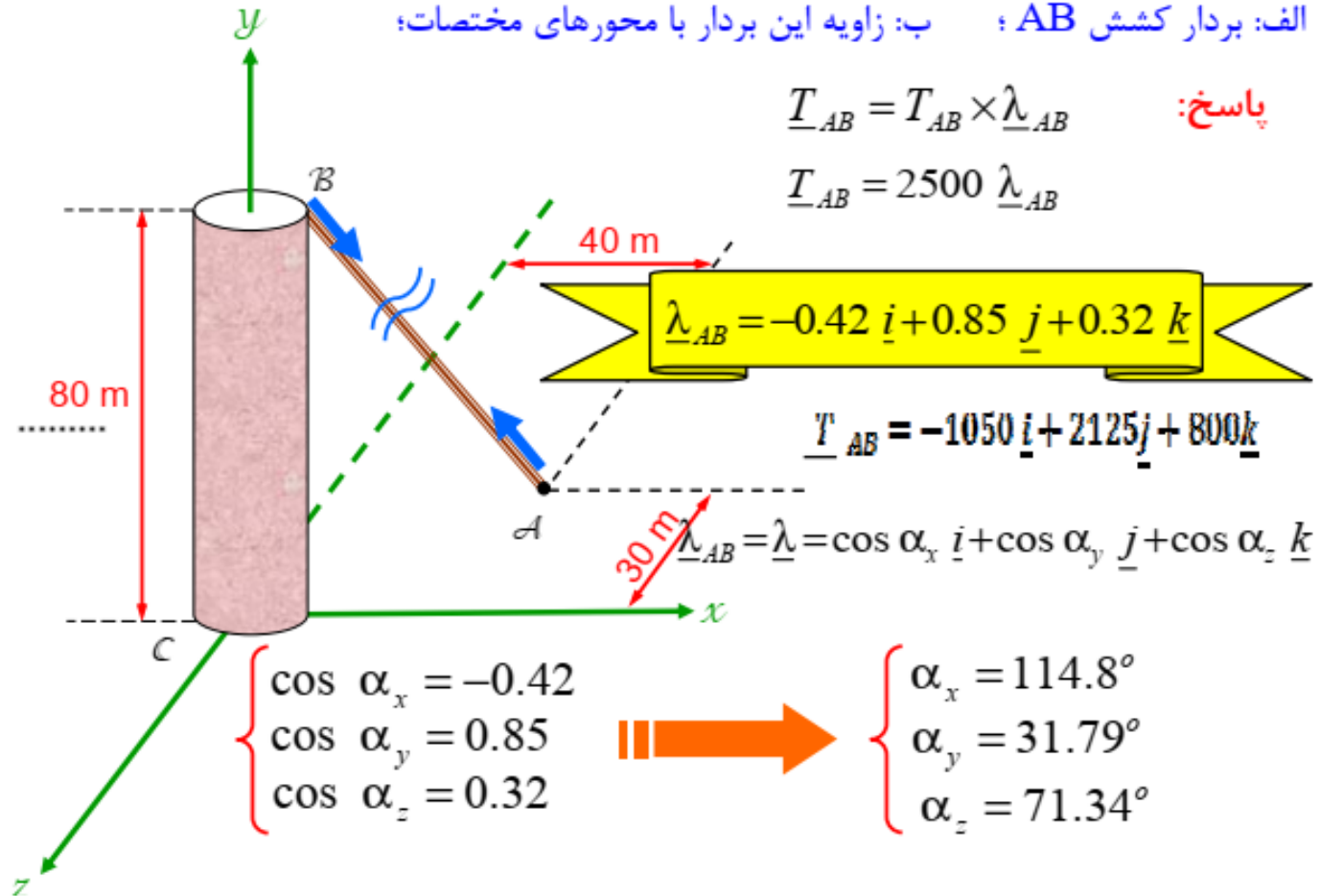


مثال: چنانچه در مثال قبل بزرگی نیروی کشش در کابل برابر 2500 N باشد، مطلوبست:

الف: بردار کشش AB ؛ ب: زاویه این بردار با محورهای مختصات؛

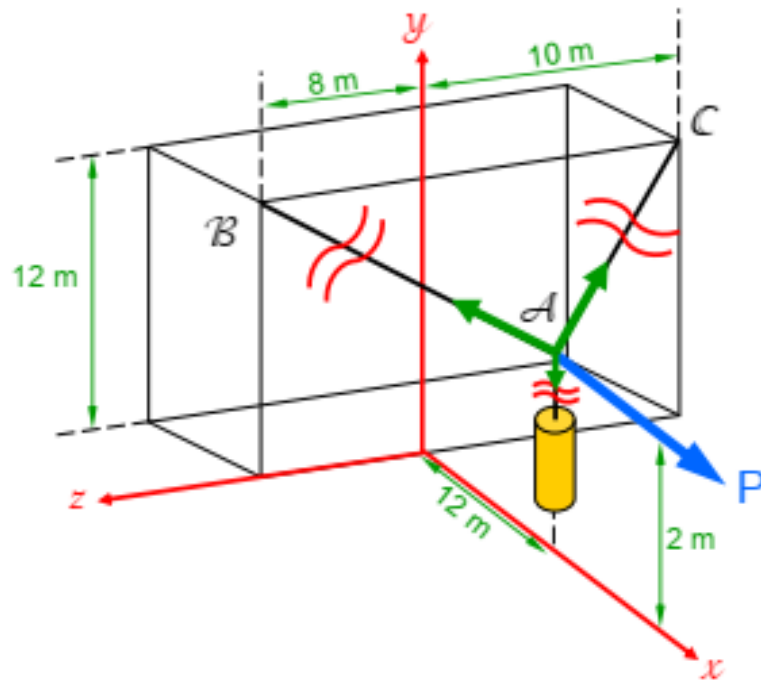
پاسخ: $\underline{T}_{AB} = T_{AB} \times \underline{\lambda}_{AB}$

$$\underline{T}_{AB} = 2500 \underline{\lambda}_{AB}$$



مثال: یک وزنه ۲۰۰ کیلوگرمی بوسیله دو کابل AB و AC و نیروی P در وضعیت شکل نگهداری شده است. مطلوبست: محاسبه بزرگی نیروی کشش کابل ها و بزرگی نیروی P

پاسخ



$$\underline{P} = P \underline{i}$$

$$\underline{W} = -2000 \underline{j}$$

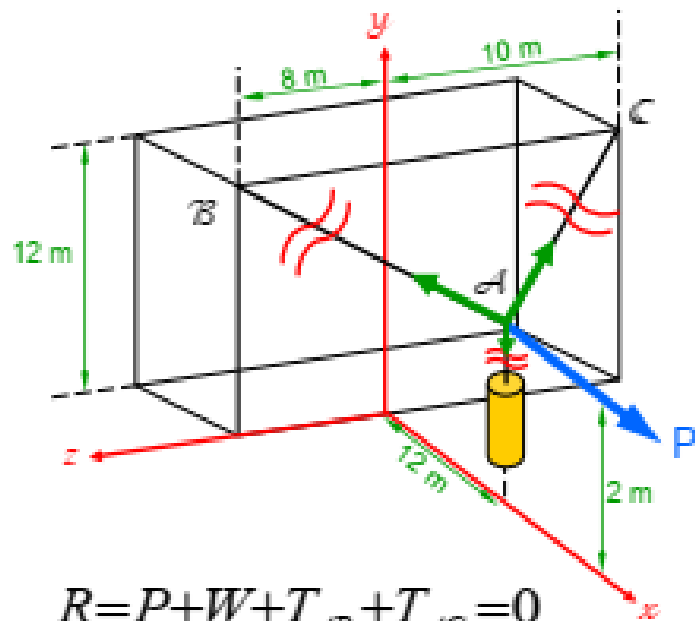
$$\underline{T}_{AB} = T_{AB} (-0.68 \underline{i} + 0.57 \underline{j} + 0.46 \underline{k})$$

$$A (12, 2, 0)$$

$$C (0, 12, -10)$$

$$\underline{T}_{AC} = T_{AC} \times \underline{\lambda}_{AC} = T_{AC} \times \frac{-12 \underline{i} + 10 \underline{j} - 10 \underline{k}}{18.55} = T_{AC} (-0.65 \underline{i} + 0.54 \underline{j} - 0.54 \underline{k})$$





$$\underline{R} = \underline{P} + \underline{W} + \underline{T}_{AB} + \underline{T}_{AC} = 0$$

$$\underline{R} = (-0.65T_{AC} - 0.68T_{AB} + P)\underline{i} + (0.54T_{AC} + 0.57T_{AB} - 2000)\underline{j} + (0.46T_{AB} - 0.54T_{AC})\underline{k} = 0$$

$$P = 2395.54 \text{ N}$$

$$T_{AB} = 1941.75 \text{ N}$$

$$T_{AC} = 1654.08 \text{ N}$$

$$\underline{P} = P \underline{i}$$

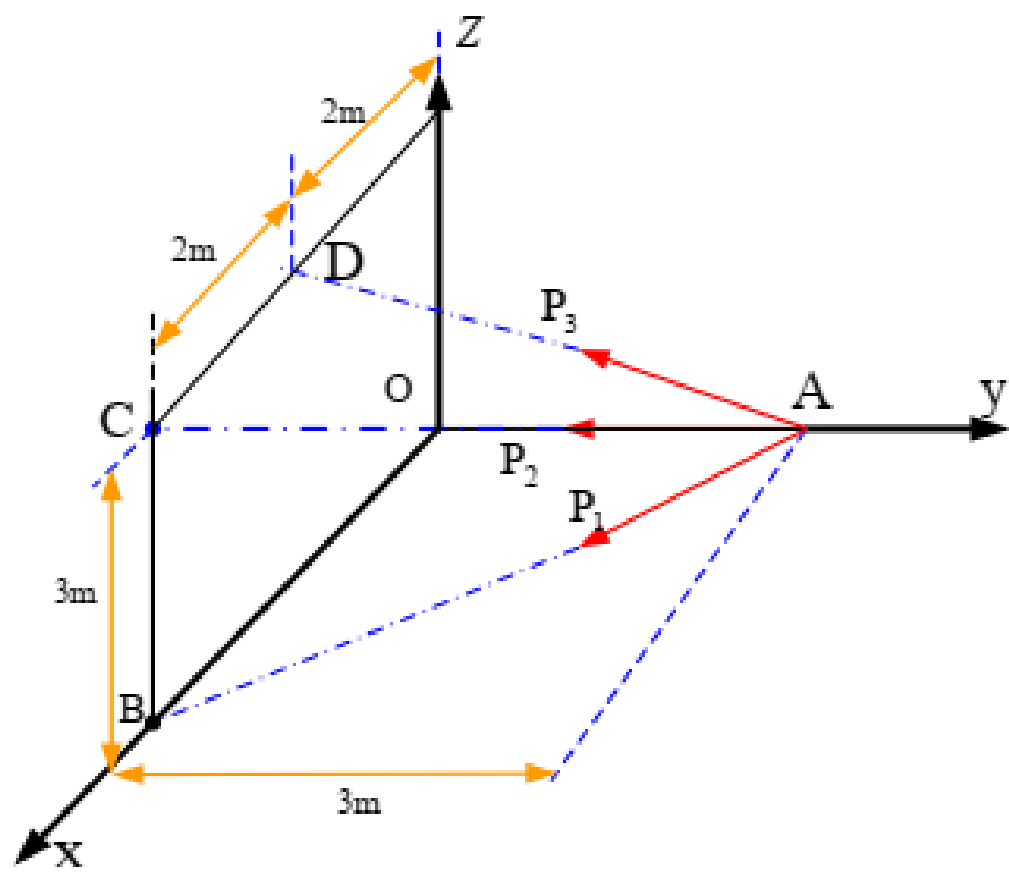
$$\underline{W} = -2000 \underline{j}$$

$$\underline{T}_{AB} = T_{AB}(-0.68 \underline{i} + 0.57 \underline{j} + 0.46 \underline{k})$$

$$\underline{T}_{AC} = T_{AC}(-0.65 \underline{i} + 0.54 \underline{j} - 0.54 \underline{k})$$

$$\begin{cases} 0.54 T_{AC} + 0.57 T_{AB} = 2000 \\ 0.46 T_{AB} - 0.54 T_{AC} = 0 \\ -0.65 T_{AC} - 0.68 T_{AB} + P = 0 \end{cases}$$

مثال: مقادیر سه نیروی نشان داده شده در شکل را با توجه به اینکه نیروی برآیند آنها برابر با $\underline{R} = 200\underline{i} - 100\underline{j} + 50\underline{k}$ (kN) باشد تعیین کنید.



$A(0,3,0)$, $B(4,0,0)$, $C(4,0,3)$, $D(2,0,3)$

پاسخ

$$\underline{\lambda}_{AB} = \frac{\underline{AB}}{AB} = \frac{4\underline{i} - 3\underline{j}}{5} = \frac{1}{5}(4\underline{i} - 3\underline{j})$$

$$\underline{\lambda}_{AC} = \frac{\underline{AC}}{AC} = \frac{4\underline{i} - 3\underline{j} + 3\underline{k}}{\sqrt{34}} = \frac{1}{\sqrt{34}}(4\underline{i} - 3\underline{j} + 3\underline{k})$$

$$\underline{\lambda}_{AD} = \frac{\underline{AD}}{AD} = \frac{2\underline{i} - 3\underline{j} + 3\underline{k}}{\sqrt{22}} = \frac{1}{\sqrt{22}}(2\underline{i} - 3\underline{j} + 3\underline{k})$$

$$\underline{P}_1 = P_1 \underline{\lambda}_{AB} = \frac{P_1}{5}(4\underline{i} - 3\underline{j})$$

$$\underline{P}_2 = P_2 \underline{\lambda}_{AC} = \frac{P_2}{\sqrt{34}}(4\underline{i} - 3\underline{j} + 3\underline{k})$$



$$\underline{P}_3 = P_3 \underline{\lambda}_{AD} = \frac{P_3}{\sqrt{22}}(2\underline{i} - 3\underline{j} + 3\underline{k})$$

$$\begin{aligned} \underline{R} = \underline{P}_1 + \underline{P}_2 + \underline{P}_3 &= \left(\frac{4}{5}P_1 + \frac{4}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{2}{\sqrt{22}}P_3 \right)\underline{i} - \left(\frac{3}{5}P_1 + \frac{3}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{3}{\sqrt{22}}P_3 \right)\underline{j} \\ &+ \left(\frac{3}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{3}{\sqrt{22}}P_3 \right)\underline{k} = 200\underline{i} - 100\underline{j} + 50\underline{k} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{5}P_1 + \frac{2}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{1}{\sqrt{22}}P_3 = 100 \\ \frac{1}{5}P_1 + \frac{1}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{1}{\sqrt{22}}P_3 = \frac{100}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{1}{\sqrt{22}}P_3 = \frac{50}{3} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = 250 \text{ kN} \\ P_2 = -293.3 \text{ kN} \\ P_3 = 471.86 \text{ kN} \end{array} \right.$$