بسمه تعالی

تکلیف مکانیک آماری پیشرفته ۲

۱- اختلال وابسته به زمانی را در نظر بگیرید که در آن اختلال اعمال شده خارجی، $f(t)$، با متغیر دینامیکی A دستگاه جفت شده است ($\triangle\mathcal{H} = -fA$). می توان در یک رژیم خطی، رفتار کلی دستگاه عدم تعادل را با بهره گیری از مفهوم تابع پاسخ، $\chi(t,t') = \chi(t-t')$، و رابطه زیر را بدست آورد

$$\triangle\bar{A}(t) = \bar{A}(t) - \langle A\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\chi(t-t')f(t') + \mathcal{O}(f^{۲})$$

فرض کنید $f(t) = f_0\Theta(t-t_1)\ \Theta(t_2-t)$ بوده و $\langle\delta A(0)\delta A(t)\rangle = \langle(\delta A)^2\rangle\exp\left(-t/\tau\right)$ می باشد ($\Theta(t)$ تابع پله ای هویساید است). $\triangle\bar{A}(t)$ را به صورت تابعی از زمان محاسبه نموده و تغییرات زمانی آن را به طور کیفی رسم نمائید.

۲- معادله حرکت یک نوسانگر هماهنگ میرا تحت اثر نیروی خارجی $f(t)$، به شکل: $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$ است. در این معادله ω_0 فرکانس طبیعی نوسانگر در غیاب میرایی و $\gamma > 0$ ضریب میرایی است. می توان بااستفاده از تابع پاسخ، $\chi(t-t')$، دینامیک حرکت ذره را از $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\chi(t-t')f(t')$ بدست آورد. تابع پاسخ دستگاه در فضای فرکانس، $\chi(\omega)$، را محاسبه نموده، نشان دهید پاسخ علّی است. با فرض اینکه $f(t) = \cos\left(\omega t\right)$، توان اتلافی متوسط را بدست آورید. ω چقدر باشد تا توان اتلافی متوسط بیشینه گردد.

۳- دستگاه گاز یک بعدی متشکل از الکترونهای بدون اسپین یک بعدی با هامیلتونی $\mathcal{H} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_k^\dagger a_k$ را در نظر بگیرید. می خواهیم پاسخ خطی دستگاه به پتانسیل خارجی $\phi_{ext}(x,t)$ را محاسبه نمائیم. هامیلتونی اختلال به صورت $\mathcal{H}' = \int dx\ \phi_{ext}(x,t)\rho_e(x) = -e\int dx\ \phi_{ext}(x,t)a_k^\dagger(x)a_k(x)$ خواهد بود. با استفاده از فرمول کوبو پاسخ خطی یا تابع قطبش پذیری $\chi_e^R(x-x',t-t')$ را بدست آورید. نشان دهید می توان تبدیل فوریه $\chi_e^R(x-x',t-t')$ در فضای تکانه و فرکانس یعنی $\chi_e^R(q,\omega)$ را به شکل زیر نوشت:

$$\chi_e^R(q,\omega) = e^{۲}\sum_k \frac{f(\epsilon_{k+q}) - f(\epsilon_k)}{\omega + \epsilon_k - \epsilon_{k+q} + i\eta}\ , \qquad \eta \to ۰^+$$

که در آن $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ بوده و $f(\epsilon)$ تابع توزیع فرمی دیراک می باشد.

۴- حرکت کاتوره ای یک ذره کوچک (با قطری از مرتبه بزرگی میکرون) در یک سیال که از افت و خیز گرمایی فشار وارد بر ذره ناشی می شود، حرکت براونی نامیده می شود. در غیاب نیروهای خارج از دستگاه ذره و سیال، بررسی حرکت براونی بر اساس معادله لانژون و با احتساب نیروهای کاتوره ای و اصطکاک که توسط قضیه اتلاف افت و خیز به هم مربوط می شوند، میسر است. در بسیاری از موارد نیروی اصطکاک بخش قالب نیروی لحظه ای وارد بر ذره را تشکیل می دهد. با فرض اینکه در زمان اولیه t_0 ذره دارای سرعت معین v_0بوده و تابع همبستگی زمانی نیروی کاتوره ای به شکل $\langle F(t)F(t')\rangle = A\delta(t-t')$ است، تابع همبستگی بین نیروی کاتوره ای و سرعت $\langle v(t)F(t')\rangle$ را بدست آورید.