مبانی نظریه محاسبه

مرجع

۱. کتاب مقدمه‌ای بر نظریه زبانها و ماشینها نویسنده پیتر لینز

مترجم دکتر مهدی صادق زاده

۲. کتاب مقدمه‌ای بر نظریه محاسبات مایکل سیپسر

مترجم : جواد وحیدی

حسین رسولی

مقدمات ریاضی

• مجموعه: دسته‌ای از عناصر بدون هیچ ساختاری، صرفاً عضو مجموعه هستند

$A=\{1,2,3\}$

$B=\{\text{book}, \text{bus}, \text{teacher}, \text{student}\}$

می‌نویسیم: $1\in A$ ، $\text{ship}\notin B$

• نمایش مجموعه:

۱- نمایش با اعضا:

$A=\{a,b,c,d,e,f\}$

$A=\{a,b,\dots,f\}$ → مجموعه متناهی

$B=\{1,2,3,\dots\}$ → مجموعه نامتناهی

2- نمایش با نماد ریاضی:

$B=\{i \mid i>0\}$

مجموعه جهانی (U): همه عناصر ممکن

مجموعه تهی $(\emptyset)$

$\{\}$

• عملگرهای مجموعه: اجتماع، اشتراک، تفاضل، متمم

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5,6\}$

اجتماع $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

اشتراک $A\cap B=\{3\}$

تفاضل $A-B=\{1,2\}$ $B-A=\{4,5,6\}$

متمم if $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$\overline{A}=\{4,5,6,7,8\}$

• قوانین دمورگان :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

• مفاهیم اساسی مجموعه‌ها :

زیر مجموعه بودن :

$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad A \subseteq B$

مجموعه‌های مجزا :

$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{4, 5\} \quad A \cap B = \phi$

کاردینالیتی مجموعه : برای مجموعه‌های متناهی

$A = \{1, 2, 3\} \quad |A| = 3$

مجموعه توانی : مجموعه توانی A یعنی مجموعه تمام زیرمجموعه‌های A

$A = \{1, 2, 3\}$

$$2^A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$|2^A| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$$

• حاصلضرب دکارتی :

$$A_1 \times A_2 = \{(x, y) \mid x \in A_1, y \in A_2\}$$
$\vdots$
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in A_i \quad i = 1, \ldots, n\}$$

$A = \{1, 2\} \quad , B = \{2, 3, 4\}$

$$A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\}$$

$$|A \times B| = |A| \, |B|$$

• توابع :

$f: \underset{\text{دامنه}}{A} \longrightarrow \underset{\text{برد}}{B}$ ، f را تابع گوییم هرگاه

$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 = x_2 \longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

if $D_f = A \longrightarrow$ f تابع کلی یا تام o.w تابع جزئی

• رابطه : رابطه کلی‌تر از تابع هست

$R = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots\}$

$x_i R y_i$ می‌نویسیم

به عنوان مثال if $R = '>'$; $2>1$, $3>2$, $3>1$

در رابطه x می‌تواند تکرار شود

رابطه هم‌ارزی :

خاصیت انعکاسی xRx

خاصیت تقارن $xRy \to yRx$

خاصیت تعدی xRy and $yRz \to xRz$

کلاس هم‌ارزی :

برای رابطه هم‌ارزی R ، کلاس هم‌ارزی X به صورت زیر است

$X = \{\cancel{Y} \mid XRY\}$

مثال

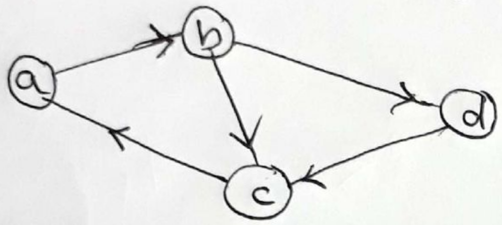
$R = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1), (3,3), (4,4), (3,4), (4,3)\}$

کلاس هم ارزی 1 $= \{1, 2\}$

کلاس هم ارزی 3 $= \{3, 4\}$

گرافها و درختها :

گراف ساده - گراف جهت دار - گراف برچسب دار



راس ها : $V = \{a, b, c, d\}$

یال ها : $E = \{(a,b), (b,c), (c,a), (b,d), (d,c)\}$

گشت = دنباله ای از یال که متصل به هم

طول یک گشت = تعداد یال های گشت از ابتدا (مبدا) تا مقصد

مسیر = راهی که یال تکراری ندارد

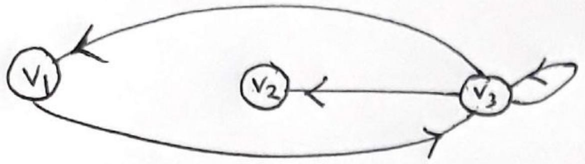
مسیر ساده = مسیری که راس تکراری ندارد

دور (چرخه) = یک گشت از راس v به خودش بدون یال تکراری

دور ساده = دوری که هیچ راس تکراری ندارد (بجز راس v)

درخت جهت دار = گراف جهت داری که دور ندارد و دارای یک گره خاص به نام ریشه دارد.

مثال: گراف زیر را در نظر می‌گیریم



یک گشت:

(v_1,v_3), (v_3,v_3), (v_3,v_1), (v_1,v_3), (v_3,v_2)

یک مسیر:

(v_1,v_3) (v_3,v_2)

یک دور:

(v_1,v_3), (v_3,v_3), (v_3,v_1)

• روش‌های اثبات

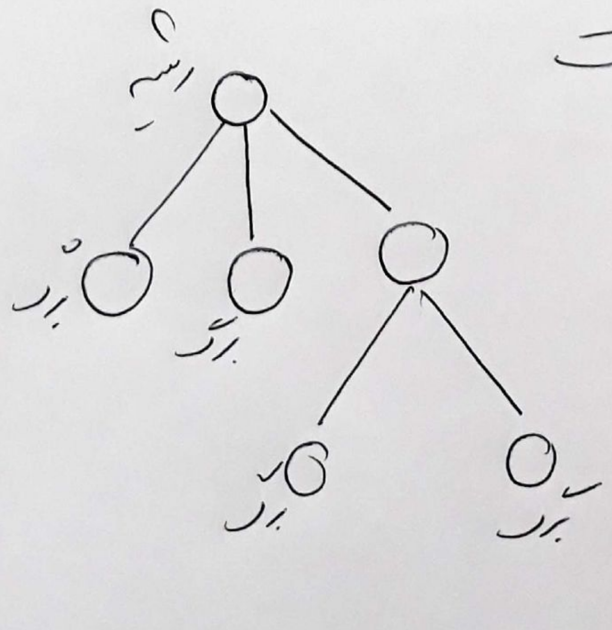
حکم استقرا   فرض استقرا   ابتدای استقرا

۱- استقراء: $P(1)$ درست، فرض $P(n)$، حکم $P(n+1)$

۲- برهان خلف: عکس آنچه که می‌خواهیم اثبات کنیم

ثابت کنید که $\sqrt{2}$ عدد گویا نیست.

درخت



مفاهیم اساسی در نظریه محاسبات:

زبانها - گرامرها - اتوماتا (ماشین ها)

نماد: کوچک ترین و بنیادی ترین عضو یک زبان است در برخی مواقع به نمادها حرف هم گفته می شود. نمادها را معمولا با حروف لاتین کوچک مثل a,b و ... نشان می دهند

الفبا: یک مجموعه متناهی از نمادهاست که با Σ نشان می دهیم (معمولا)

رشته: دنباله ای از نمادهای یک مجموعه الفباست که با عمل الحاق به هم پیوسته اند

رشته ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد

مثال: اگر الفبا $\Sigma = \{a,b\}$ باشد آنگاه aab ، abab

aaabbba رشته هایی روی Σ هستند

ما برای نامگذاری رشته ها از حروف u,v,w,... استفاده می کنیم

در مثال بالا می توانیم بنویسیم

$u = aab$

$v = abab$

$w = aaabbba$

که نشان می دهد که رشته ای با نام u دارای مقدار خاص aab می باشد.

• الحاق دو رشته: اگر u و v دو رشته باشند، حاصل الحاق u,v رشته ای است که از قرار دادن v به دنبال u به صورت uv بدست می آید.

مثال. فرض کنید $u = abba$, $v = bbbaaa$ آنگاه

$$uv = \underbrace{abba}_{u}\underbrace{bbbaaa}_{v}$$

• معکوس یک رشته بوسیله نوشتن نمادها به ترتیب معکوس حاصل می‌شود

فرض کنید $u = a_1a_2\cdots a_n$ آنگاه $u^R = a_n\cdots a_2a_1$

• طول رشته u، تعداد نمادها در رشته می‌باشد و با $|u|$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $u = a_1a_2 \cdots a_n$ آنگاه $|u| = n$

$v = aabbb$ آنگاه $|v| = 5$

• رشته تهی، رشته‌ای بدون هیچ نمادی است. آن را با λ نمایش می‌دهیم

$$|\lambda| = 0$$

رشته تهی (λ) عضو خنثای عمل الحاق است $\quad \lambda u = u\lambda = u \quad \forall u$

• زیر رشته: بخشی از حروف متوالی رشته u را زیررشته u گویند. اگر

$$u = vw$$

آنگاه زیررشته‌های v و w را به ترتیب پیشوند و پسوند u گویند

مثال: اگر $u = abbab$ آنگاه $\{\lambda, a, ab, abb, abba, abbab\}$

~~همچنین b~~ b، مجموعه همه پیشوندهای u است. b, ab, bab برخی از پسوندهای آن است

۱۸

اگر u یک رشته باشد آنگاه u^n نشان دهنده رشته ای است که به وسیله عمل
u به تکرار n بار حاصل می شود

$$u^n = \underbrace{uu\ldots u}_{n \text{ بار}}$$

تعریف:

$$u^0 = \lambda \quad \forall u$$

یک مورد خاص

مثال

$$(abba)^2 = abbaabba$$

$$(abba)^0 = \lambda$$

* الفبای Σ را در نظر بگیرید، مجموعه تمام رشته ای ممکن از الفبای Σ را با
Σ^* نشان می دهیم

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$$

همچنین

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$$

اگرچه Σ متناهی است، اما Σ^* و Σ^+ همیشه نامتناهی هستند

• زبان

یک زبان مجموعه ای از رشته های یک الفبا است یعنی $L \subseteq \Sigma^*$

اگر مجموعه L متناهی باشد، ما یک زبان متناهی است در غیر این صورت نامتناهی است

مثال : L_1 , L_2 هر دو زبان‌هایی بر روی الفبای $\Sigma=\{a,b\}$ هستند

$L_1=\{a, aa, aab\}$ زبان متناهی

$L_2=\{a^n b^n : n \geq 0\}$ زبان نامتناهی

عملیات روی زبان‌ها :

فرض می‌کنیم $L, L_1, L_2 \in \Sigma^*$

- اجتماع دو زبان : $L_1 \cup L_2 = \{x \mid x \in L_1 \vee x \in L_2\}$
- اشتراک دو زبان $L_1 \cap L_2 = \{x \mid x \in L_1 \wedge x \in L_2\}$
- تفاضل دو زبان $L_1 - L_2 = \{x \mid x \in L_1 \wedge x \notin L_2\}$
- متمم یک زبان $\overline{L} = \Sigma^* - L$
- معکوس یک زبان $L^R = \{x^R \mid x \in L\}$
- الحاق دو زبان $L_1 L_2 = \{x_1 x_2 \mid x_1 \in L_1 \wedge x_2 \in L_2\}$
- توان یک زبان

$L^0 = \{\lambda\}$

$L^{n+1} = L^n L = L L^n$

• بستار

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

$$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

مثال . اگر $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ آنگاه

$$L^R = \{ b^n a^n \mid n \geq 0 \}$$

$$L^2 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}\{a^m b^m \mid m \geq 0\} = \{a^n b^n a^m b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$$

مثال

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, abb, aabb, baa, bab, \ldots\}$

و مجموعه $\{a, ab, bab\}$ یک زبان روی الفبای Σ است (زبان متناهی)

یک زبان روی Σ، یک زیرمجموعه ای از Σ^* است

حل

$L_1 = \{a, aa, aab\}$

$L_2 = \{ab, a^2b^2, a\}$

$L_1 \cup L_2 = \{a, aa, aab, ab, a^2b^2\}$

$L_1 \cap L_2 = \cancel{\phi}\ \{a\}$

$L_1 - L_2 = \{aa, aab\}$

$L_1^R = \{a, aa, baa\}$

$L_2^R = \{ba, b^2a^2, a\}$

$L_1L_2 = \{aab, aa^2b^2, aa, aaab, aaa^2b^2, aaa,$

$aabab, aaba^2b^2, aaba\}$

$L_2L_1 = \{aba, abaa, abaab, a^2b^2a, a^2b^2aa, a^2b^2aab$

$aa, aaa, aaab\}$

$L_1L_1 = \{aa, aaa, aaab, aaa, aaaa, aaaab,$

$aaba, aabaa, aabaab\} =$

$\{a^2, a^3, a^4, a^3b, a^{\cancel{3}4}b, a^2ba, a^2ba^2, a^2ba^2b\}$

مثال

$$L_1=\{a^nb^n \mid n\geq 0\}=\{\lambda, ab, a^2b^2, a^3b^3, \dots\}$$

$$L_2=\{ab^2, a^2b^2\}$$

$$L_1\cup L_2=\{a^nb^n \mid n\geq 0\}\cup\{ab^2\}$$

$$L_1\cap L_2=\{a^2b^2\}$$

$$L_1-L_2=\{a^nb^n \mid n\geq 0 \;\&\; n\neq 2\}$$

$$L_2-L_1=\{ab^2\}$$

$$L_1^R=\{b^na^n \mid n\geq 0\}$$

$$L_2^R=\{b^2a, b^2a^2\}$$

$$L_2L_2=\{\underline{ab^2}ab^2, \underline{ab^2}a^2b^2, \underline{a^2b^2}ab^2, \underline{a^2b^2}a^2b^2\}$$

$$L_1L_2=\{\underbrace{\lambda}_{\in L_1}\overbrace{ab^2}^{\in L_2}, \underbrace{\lambda}_{\in L_1}\overbrace{a^2b^2}^{\in L_2}, \underbrace{ab}_{\in L_1}\overbrace{ab^2}^{\in L_2}, \underbrace{ab}_{\in L_1}\overbrace{a^2b^2}^{\in L_2}, \underbrace{a^2b^2}_{\in L_1}\overbrace{ab^2}^{\in L_2}, \underbrace{a^2b^2}_{\in L_1}\overbrace{a^2b^2}^{\in L_2}, \dots\}$$

$$=\{a^nb^nab^2, a^nb^na^2b \mid n\geq 0\}$$

$$L_1L_1=\{\lambda, \lambda ab, \lambda a^2b^2, \lambda a^3b^3, \dots, ab\lambda, abab, aba^2b^2, aba^3b^3, \dots, a^2b^2\lambda, a^2b^2ab, a^2b^2a^2b^2, a^2b^2a^3b^3, \dots\}=\{a^nb^na^mb^m \mid n\geq 0, m\geq 0\}.$$

n,m هیچ ارتباطی به هم ندارند .

$\underbrace{aabb}_{\in L_1}\underbrace{aaabbb}_{\in L_2}$ در L_1^2 است