نام و نام خانوادگی : .... | گروه آموزشی : **ریاضی**

شماره دانشجویی : .... | تاریخ : **۱۴۰۲/۳/۲۰**

نام مدرس : .... | وقت : **۱۳۵** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس **ریاضی۱ فنی** (۱۶ گروه هماهنگ)

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۴۰۲-۱۴۰۱**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- تابع $f(x)=\int_{۱}^{x}\sqrt{۱+t^{۶}}\,dt$ مفروض است.

الف) $f'(x)$ را محاسبه کنید. **(۵ نمره)**

ب) نشان دهید که این تابع یک به یک است. **(۵ نمره)**

ج) $\left(f^{-۱}\right)'(۰)$ را محاسبه کنید. **(۵ نمره)**

سوال ۲- مطلوب است محاسبه $A=\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\left(\sin x\right)^{\sin x}$. **(۱۵ نمره)**

سوال ۳- انتگرال‌های نامعین زیر را محاسبه کنید.

$K=\int \frac{x^{۲}+۲}{x^{۳}+x}\,dx$ **(۲۰ نمره)** $\qquad$ $L=\int \frac{۱}{x^{۲}\sqrt{۶۴-x^{۲}}}\,dx$ **(۱۵ نمره)**

سوال ۴- ناحیه محدود به منحنی $y=\ln x$ و خطوط $y=۰$ ، $x=e$ و $x=e^{۲}$ مفروض است.

الف) این ناحیه را در صفحه xy مشخص کنید. **(۵ نمره)**

ب) مساحت این ناحیه را بدست آورید. **(۱۰ نمره)**

سوال ۵- حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y=۱+\sin x$ و خطوط $y=۰$ ، $x=۰$ و $x=\pi$ حول محور xها را بیابید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۶- شعاع و بازه همگرایی سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{۲^{n}}(x-۳)^{n}$ را بیابید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۷- چهار جمله اول بسط مک‌لورن تابع $f(x)=(۱+۲x)^{\frac{۱}{۳}}$ را بیابید. **(۱۰ نمره)**

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : الف) $f'(x)=\sqrt{1+x^6}$

ب) چون $f'(x)$ همه جا موجود و همواره مثبت است پس تابع f صعودی یکنوا و در نتیجه یک به یک است.

ج) $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}(0)}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

پاسخ سوال۲ : از لگاریتم استفاده می‌کنیم. داریم $\ln f(x)=\ln\left(\sin x\right)^{\sin x}=\sin x\ln\sin x$ بنابر این

$$\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\sin x=0\times(-\infty)$$

که یک حالت مبهم است. می‌توانیم بنویسیم $\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin x}{1/\sin x}=\dfrac{-\infty}{\infty}$

که باز هم یک حالت مبهم است اما می‌توانیم از قاعده هوپیتال استفاده کنیم.

چون $\lim_{x\to 0^+}\sin x=0=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x/\sin x}{-\cos x/\sin^2 x}$ پس $\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)=0$ و در نتیجه :

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=e^{0}=1$$

نکته : با تغییر متغیر $t=\sin x$ داریم $\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x\right)^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}t^t$ و می‌توانستیم از شر توابع مثلثاتی خلاص شویم.

پاسخ سوال۳ : برای پیدا کردن K از تجزیه به کسرهای ساده استفاده می‌کنیم. می نویسیم : $\dfrac{x^2+2}{x^3+x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

اکنون داریم $A=\lim_{x\to 0}x\times\dfrac{x^2+2}{x^3+x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+2}{x^2+1}=2$ و $\dfrac{Bx+C}{x^2+1}=\dfrac{x^2+2}{x^3+x}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{-x^2}{x^3+x}=\dfrac{-x}{x^2+1}$

و در نتیجه : $K=\int\dfrac{x^2+2}{x^3+x}dx=\int(\dfrac{2}{x}-\dfrac{x}{x^2+1})dx=2\ln x-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$

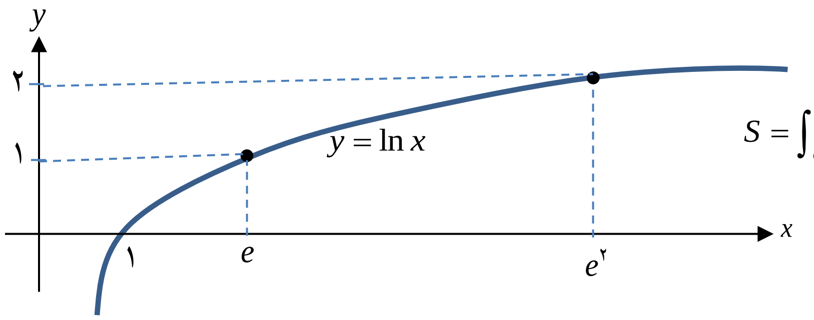
برای پیدا کردن L از تغییر متغیر $x=8\sin t$ استفاده می‌کنیم.

$$L=\int\frac{1}{x^2\sqrt{64-x^2}}dx=\int\frac{1}{64\sin^2 t\sqrt{64-64\sin^2 t}}(8\cos t\,dt)=\frac{1}{64}\int\frac{1}{\sin^2 t}dt=\frac{-1}{64}\cot t+c$$

چون $x=8\sin t$ پس $\sin t=\dfrac{x}{8}$ و $\cos t=\dfrac{\sqrt{64-x^2}}{8}$ و در نتیجه : $L=\int\dfrac{1}{x^2\sqrt{64-x^2}}dx=-\dfrac{\sqrt{64-x^2}}{64x}+c$

نکته : با تغییر متغیر $x=\dfrac{1}{t}$ خواهیم داشت $L=\int\dfrac{1}{x^2\sqrt{64-x^2}}dx=-\int\dfrac{t}{\sqrt{64t^2-1}}dt$ که یک انتگرال مشتق همراه است

بنابر این : $L=\int\dfrac{1}{x^2\sqrt{64-x^2}}dx=\dfrac{-1}{64}\sqrt{64t^2-1}+c=-\dfrac{\sqrt{64-x^2}}{64x}+c$



پاسخ سوال ۴ : الف)

ب) مساحت خواسته شده برابر است با : $S=\int_e^{e^۲}\ln x\,dx$

از روش انتگرالگیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

قرار می‌دهیم $u'=۱$, $v=\ln x$ و داریم

بنابر این : $u=x$, $v'=\frac{۱}{x}$

$$S=\int_e^{e^۲}\ln x\,dx = x\ln x\,|_e^{e^۲}-\int_e^{e^۲}x\times\frac{۱}{x}dx = x\ln x\,|_e^{e^۲}-x\,|_e^{e^۲}=(e^۲\ln e^۲-e\ln e)-(e^۲-e)=۲e^۲-e-e^۲+e=e^۲$$

پاسخ سوال ۵ : چون همواره داریم $y=۱+\sin x\geq ۰$ پس ناحیه مورد نظر بالای محور xها قرار دارد و برای محاسبه حجم از روش قرص مستدیر استفاده می‌کنیم.

$$V=\pi\int_۰^{\pi}(۱+\sin x)^۲dx=\pi\int_۰^{\pi}(۱+۲\sin x+\sin^۲x)dx=\pi\int_۰^{\pi}(\frac{۳}{۲}+۲\sin x-\frac{۱}{۲}\cos ۲x)dx$$

$$=\pi[\frac{۳x}{۲}-۲\cos x-\frac{۱}{۴}\sin ۲x]_۰^{\pi}=\pi[\frac{۳\pi}{۲}+۲-۰-۰+۲+۰]=\frac{۱}{۲}\pi(۳\pi+۴)$$

پاسخ سوال ۷ : $a=۳$ مرکز سری و شعاع همگرایی سری برابر است با : $R=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{۲^n}\div\frac{n+۱}{۲^{n+۱}})=\lim_{n\to\infty}(\frac{۲n}{n+۱})=۲$

پس $a+R=۵$ و $a-R=۱$ نقاط مرزی ناحیه همگرایی هستند. اگر $x=۵$ آنگاه سری به صورت $\sum_{n=۱}^{\infty}n$ و اگر $x=۱$ آنگاه سری به صورت $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n n$ در می آید که هر دو سری واگرا هستند. بنابر این ، بازه همگرایی سری عبارت است از : $(۱,۵)$

پاسخ سوال ۷ : سری مک لورن به صورت $f(x)=a_۰+a_۱x+a_۲x^۲+a_۳x^۳+\cdots$ است که : $a_n=f^{(n)}(۰)/n!$

$$f(x)=(۱+۲x)^{\frac{۱}{۳}}\to f'(x)=\frac{۲}{۳}(۱+۲x)^{\frac{-۲}{۳}}\to f''(x)=\frac{-۸}{۹}(۱+۲x)^{\frac{-۵}{۳}}\to f'''(x)=\frac{۸۰}{۲۷}(۱+۲x)^{\frac{-۸}{۳}}$$

$$f(۰)=۱\quad,\quad f'(۰)=\frac{۲}{۳}\quad,\quad f''(۰)=\frac{-۸}{۹}\quad,\quad f'''(۰)=\frac{۸۰}{۲۷}\quad\to a_۰=۱\,,\ a_۱=\frac{۲}{۳}\,,\ a_۲=\frac{-۴}{۹}\,,\ a_۳=\frac{۴۰}{۸۱}$$

اکنون داریم :
$$f(x)=(۱+۲x)^{\frac{۱}{۳}}=۱+\frac{۲}{۳}x-\frac{۴}{۹}x^۲+\frac{۴۰}{۸۱}x^۳+\cdots$$