نام و نام خانوادگی : ....
شماره دانشجویی : ....
نام مدرس : ....

دانشکده علوم ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**
تاریخ : **۱۴۰۲/۳/۲۱**
وقت : **۱۲۰** دقیقه

امتحان پایان ترم درس **مبانی علوم ریاضی**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۴۰۲-۱۴۰۱**

توجه :
از نوشتن با مداد خودداری نمائید.
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- گزاره‌های p ، q، r و s را در نظر بگیرید. ثابت کنید : **۲۰ نمره**

$$\left[(p\to r)\vee(q\to s)\right]\equiv\left[(p\wedge q)\to(r\vee s)\right]$$

سوال ۲- نقیض گزاره $\forall x\, \exists y\, \left(\sim p(x)\to q(y)\right)$ را بنویسید. **۱۵ نمره**

سوال ۳- اگر A، B و C سه مجموعه ناتهی باشند، تساوی زیر را ثابت یا رد کنید : **۲۰ نمره**

$$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

سوال ۴- به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید : **۱۵ نمره**

$$۱^۳+۲^۳+\cdots+n^۳=\frac{۱}{۴}n^۲(n+۱)^۲ \;\; , n=۱,۲,۳,\cdots$$

سوال ۵- رابطه عاد کردن روی مجموعه اعداد صحیح غیر صفر یعنی $\mathbb{Z}-\{۰\}$ ، با ذکر دلیل ، یک رابطه **۳۰ نمره**

الف) انعکاسی است ؟ ب) تقارنی است؟ ج) پاد تقارنی است؟

د) تراگذری است؟ هـ) هم‌ارزی است؟ و) ترتیب است؟

تعریف: می‌گوییم عدد صحیح a عدد صحیح b را عاد می‌کند و می‌نویسیم $a\,|\,b$ هرگاه به ازای یک عدد صحیح c داشته باشیم : $b=ac$

سوال ۶- فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد و $A,B\subseteq X$. تساوی زیر را ثابت یا رد کنید: **۱۵ نمره**

$$f(A-B)=f(A)-f(B)$$

سوال ۷- اگر A یک مجموعه ۵ عضوی و B یک مجموعه ۴ عضوی باشد، تعداد تابع‌هایی که می‌توان از A به B تعریف کرد چقدر است؟ **۲۰ نمره**

توجه : دامنه تابع لزوما مجموعه A نیست.

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : برای نشان دادن اینکه دو گزاره $(p \wedge q) \to (r \vee s)$ و $(p \to r) \vee (q \to s)$ هم ارز هستند ، می توان جدول ارزش گزاره‌ها را رسم کرد. اما این جدول شامل ۱۶ سطر و ۱۰ ستون خواهد بود. بنابر این ، بهتر است به صورت زیر بحث کنیم.
اگر r یک گزاره درست باشد آنگاه دو گزاره $r \vee s$ و $p \to r$ درست هستند و در نتیجه دو گزاره $(p \wedge q) \to (r \vee s)$ و $(p \to r) \vee (q \to s)$ هم درست خواهند بود. پس هم ارزی دو گزاره وقتی که r درست باشد ثابت شده است.
بطور مشابه اگر s یک گزاره درست باشد آنگاه دو گزاره $(p \wedge q) \to (r \vee s)$ و $(p \to r) \vee (q \to s)$ درست و هم ارز هستند.
اگر p یک گزاره نادرست باشد آنگاه گزاره $p \wedge q$ نادرست و گزاره $p \to r$ درست است و در نتیجه دو گزاره $(p \wedge q) \to (r \vee s)$ و $(p \to r) \vee (q \to s)$ هر دو درست خواهند بود. پس هم ارزی دو گزاره وقتی که p نادرست باشد ثابت شده است.
بطور مشابه اگر q یک گزاره نادرست باشد آنگاه دو گزاره $(p \wedge q) \to (r \vee s)$ و $(p \to r) \vee (q \to s)$ درست و هم ارز هستند.
تنها حالت باقیمانده حالتی است که r و s نادرست و p و q درست باشند. در این حالت می توان دید که هر دو گزاره نادرست اما هم ارز هستند.

پاسخ سوال۲ : این گزاره را می‌توان به این صورت ترجمه کرد :
به از ای هر x دلخواه ، حداقل یک y وجود دارد که درستی $\sim p(x)$ درستی $q(y)$ را نتیجه می‌دهد.
برای رد کردن این گزاره کافی است بتوانیم یک x مناسب پیدا کنیم که به ازای هر y که انتخاب شود گزاره $\sim p(x) \to q(y)$ نادرست باشد. پس می‌توانیم بنویسیم: $\exists x \ \forall y \sim (\sim p(x) \to q(y))$
یا بطور ساده تر می‌توانیم بنویسیم : $\exists x \ \forall y \ (\sim p(x) \wedge \sim q(y))$
این گزاره را می‌توان به این صورت ترجمه کرد :
حداقل یک x وجود دارد که به ازای هر y دلخواه ، با اینکه $\sim p(x)$ درست است اما $q(y)$ نادرست است.

پاسخ سوال۳ : برای اثبات تساوی دو مجموعه ، نشان می‌دهیم که هر مجموعه ، زیرمجموعه مجموعه دیگر است.

$$(a,e) \in A \times (B-C) \to a \in A, e \in B-C \to a \in A, e \in B, e \notin C \to (a,e) \in A \times B, (a,e) \notin A \times C$$
$$\to (a,e) \in (A \times B) - (A \times C) \qquad \to A \times (B-C) \subseteq (A \times B) - (A \times C)$$
$$(a,e) \in (A \times B) - (A \times C) \to (a,e) \in A \times B, (a,e) \notin A \times C \to a \in A, e \in B, e \notin C \to a \in A, e \in B-C$$
$$\to (a,e) \in A \times (B-C) \qquad \to (A \times B) - (A \times C) \subseteq A \times (B-C)$$

اکنون می‌توان گفت : $A \times (B-C) = (A \times B) - (A \times C)$

پاسخ سوال۴ : درستی این تساوی را به ازای مقادیر کوچک n به راحتی می‌توان بررسی کرد.

$$n=۱ \to ۱^۳ = ۱ , \ \frac{۱}{۴} \times ۱^۲ \times (۱+۱)^۲ = ۱ \to ۱^۳ = \frac{۱}{۴} \times ۱^۲ \times (۱+۱)^۲$$

$$n=۲ \to ۱^۳ + ۲^۳ = ۹ , \ \frac{۱}{۴} \times ۲^۲ \times (۲+۱)^۲ = ۹ \to ۱^۳ + ۲^۳ = \frac{۱}{۴} \times ۲^۲ \times (۲+۱)^۲$$

اکنون فرض می‌کنیم این تساوی برای تمام مقدارهای $n \le k$ درست باشد و ثابت می‌کنیم که برای $n = k+۱$ هم درست است.

فرض استقرا : $۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + k^۳ = \dfrac{k^۲ (k+۱)^۲}{۴}$

حکم استقرا : $۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + k^۳ + (k+۱)^۳ = \dfrac{(k+۱)^۲ (k+۲)^۲}{۴}$

(به کمک فرض استقرا)

$$
\begin{aligned}
1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 &= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3\\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4(k+1))\\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4k+4)\\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2
\end{aligned}
$$

حکم استقرا ثابت شده است.

پاسخ سوال۵ : الف) انعکاسی(بازتابی) هست. برای هر عدد غیر صفر مانند m داریم $m \mid m$.

ب) تقارنی نیست. چون $1 \mid 2$ اما $2 \nmid 1$.

ج) پادتقارنی نیست. چون $2 \mid (-2)$ و $(-2) \mid 2$ اما $2 \neq -2$

د) تراگذری هست. چون اگر $a \mid b$ و $b \mid c$ آنگاه به ازای دو عدد صحیح m_1 و m_2 داریم $b = am_1$ و $c = bm_2$ که نتیجه می‌دهند $c = a(m_1 m_2)$. اکنون با توجه به صحیح بودن عدد $m_1 m_2$ می‌توانیم بنویسیم $a \mid c$.

هـ) رابطه هم ارزی نیست. چون رابطه عاد کردن انعکاسی نیست پس نمی‌تواند یک رابطه هم ارزی باشد.

و) رابطه ترتیب نیست. چون رابطه عاد کردن پادمتقارن نیست پس نمی‌تواند یک رابطه ترتیب باشد.

پاسخ سوال۶ : ابتدا حدس می‌زنیم که تساوی برقرار است و تلاش می‌کنیم که آن را ثابت کنیم. اگر ثابت شد که حدس ما درست بوده و مساله حل شده است. اما اگر در اثبات به مشکل برخورد کردیم سعی می‌کنیم مثال نقض پیدا کنیم.

اگر $y \in f(A) - f(B)$ آنگاه داریم $y \in f(A), y \notin f(B)$. بنابر این به ازای یک $x \in A$ داریم $y = f(x)$ اما به ازای هر $b \in B$ داریم $y \neq f(b)$ که نتیجه می‌دهد $x \notin B$ پس $x \in A - B$ و در نتیجه $y \in f(A-B)$. به این ترتیب ثابت شد که :

$$f(A) - f(B) \subseteq f(A-B)$$

اگر $y \in f(A-B)$ آنگاه به ازای یک $x \in A - B$ داریم $y = f(x)$. چون $x \in A$ پس $y \in f(A)$ و چون $x \notin B$ نمی توانیم در مورد $y \in f(B)$ و یا $y \notin f(B)$ نظر بدهیم. پس نمی توان ادعا کرد که $y \in f(A) - f(B)$.

برای مثال نقض تابعی می سازیم بطوریکه $x \notin B$ اما $y = f(x) \in f(B)$

تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^2$ را در نظر می گیریم. اگر $A = \{0,1\}$ و $B = \{-1,0\}$ آنگاه :

$$f(A-B) = f(\{1\}) = \{1\} \quad , \quad f(A) - f(B) = \{0,1\} - \{0,1\} = \varnothing$$

پس تساوی در حالت کلی برقرار نیست.

پاسخ سوال۷ : برای ساختن یک تابع ، با انتخاب هر عضو از A ، ۴ انتخاب برای مولفه دوم داریم. پس اگر بخواهیم دامنه تابع یک زیرمجموعه k عضوی مشخص از A باشد می‌توانیم 4^k تابع بسازیم. اما تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی برابر $\binom{5}{k}$ است.

بنابر این تعداد کل تابع‌هایی که می‌توان ساخت برابر است با :

$$\binom{5}{0}\times 4^0 + \binom{5}{1}\times 4^1 + \binom{5}{2}\times 4^2 + \binom{5}{3}\times 4^3 + \binom{5}{4}\times 4^4 + \binom{5}{5}\times 4^5 = (1+4)^5 = 5^5 = 3125$$