فصل ششم

سینتیک صفحه ای اجسام صلب

فهرست مطالب فصل ششم

- مقدمه
- قسمت الف- نیرو ، جرم و شتاب
- قسمت ب- کار و انرژی
- قسمت ج- ضربه و اندازه حرکت

مقدمه

در **سینتیک اجسام صلب** روابط بین نیروهای خارجی وارد بر جسم و حرکت های انتقالی و چرخشی متناظر جسم بررسی می شود.

در **حرکت صفحه ای** ، نقاط جسم در یک صفحه یا صفحات موازی حرکت می کنند.

در سینتیک ذرات ، دو معادله نیرو برای تحلیل حرکت صفحه ای ذره کافی بود. اما برای تعریف حرکت صفحه ای جسم صلب ، معادله ای اضافی نیز لازم است تا حالت چرخش جسم را مشخص کند.

بنابراین دو معادله نیرو و یک معادله لنگر ، برای تعیین حالت حرکت صفحه ای جسم صلب لازم است.

در سینتیک اجسام صلبی که حرکت زاویه ای دارند ، باید خاصیتی از جسم را معرفی کنیم که توزیع شعاعی جرم جسم را نسبت به محور چرخش قائم بر صفحه حرکت جسم نشان می دهد. این خاصیت را **لنگر لختی جرم** می نامند.

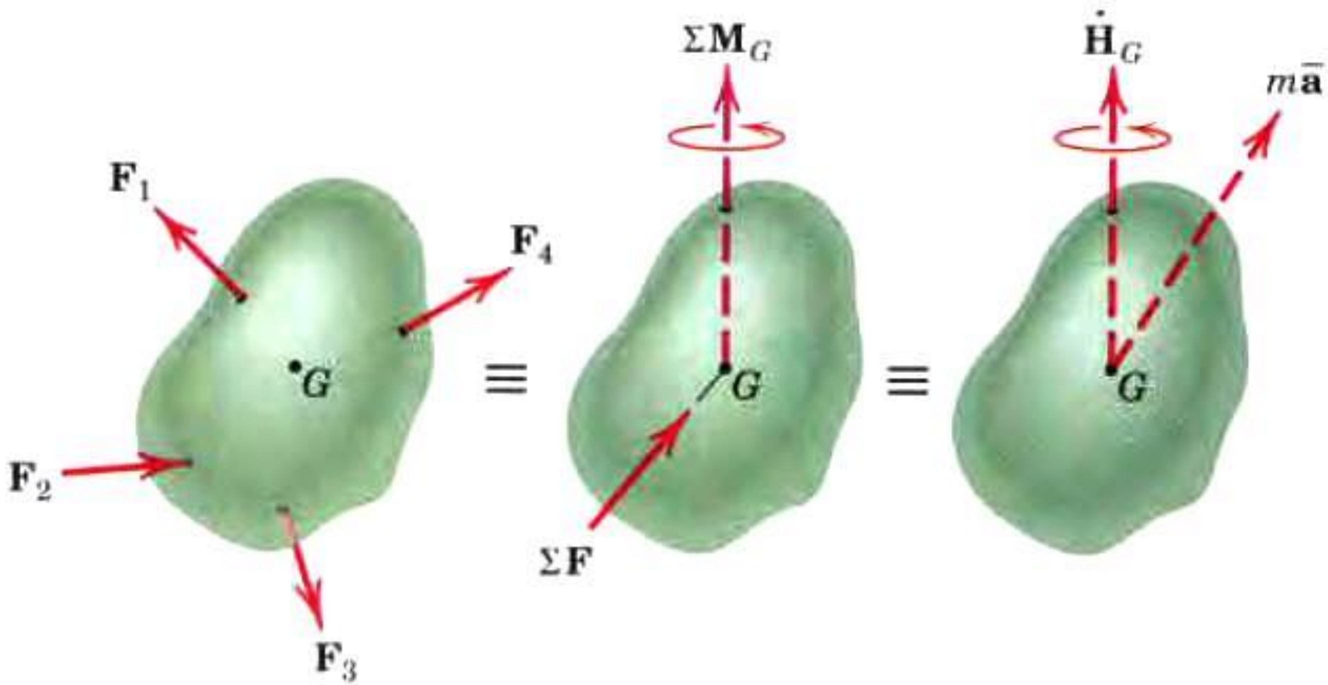
قسمت الف- نیرو ، جرم و شتاب

معادله های کلی حرکت

در فصل چهارم ، معادلات برداری نیرو و لنگر را برای حرکت جرم کلی سیستم بدست آوردیم.

$$\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$$

$$\sum \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$$

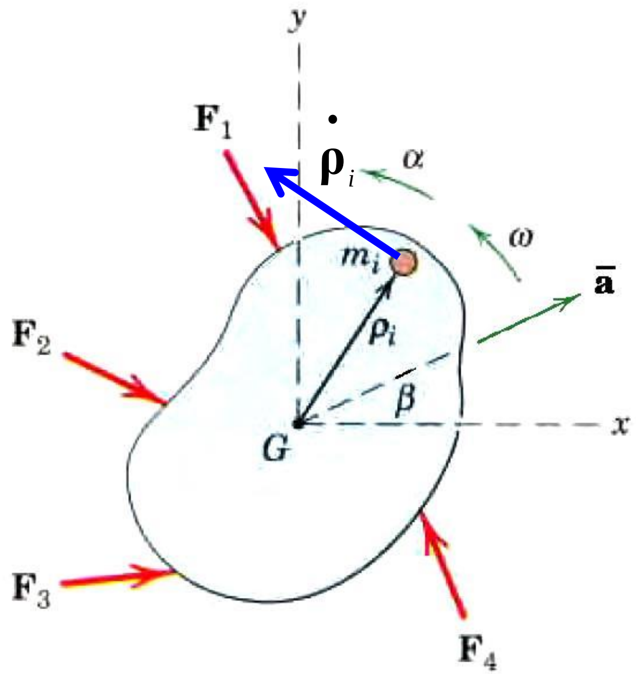


نمودار پیکر آزاد
(الف)

نیرو-جفت نیروی همارز
(ب)

نمودار سینتیکی
(ج)

معادله های حرکت صفحه ای



اندازه حرکت زاویه ای کل سیستم :

$$\mathbf{H}_G = \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

سرعت m_i نسبت به G

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$$

اندازه ای برابر $\rho_i \omega$ و جهت آن عمود بر $\boldsymbol{\rho}_i$ در جهت سرعت زاویه ای است.

بنابراین $\boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ اندازه ای برابر $\rho_i^2 \omega$ داشته و جهت آن عمود بر صفحه x-y (هم جهت با ω) خواهد بود.

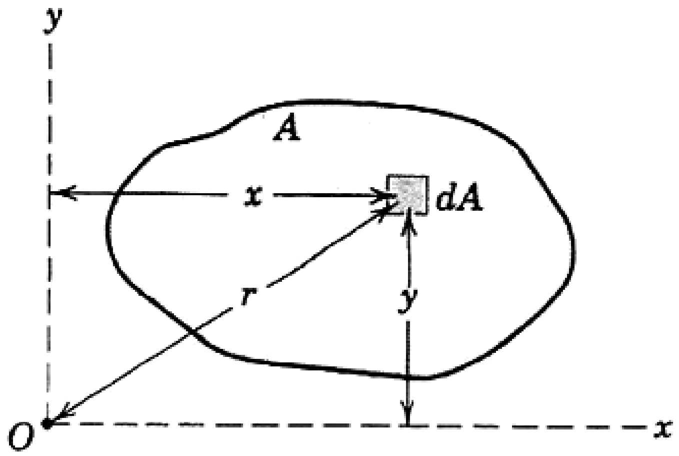
$$H_G = \sum \rho_i^2 m_i \omega = \omega \sum \rho_i^2 m_i = \omega \int \rho^2 dm \qquad H_G = \bar{I}\omega$$

$\bar{I}$: لنگر لختی جرم جسم حول محور z گذرنده از G

$$\sum \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I}\boldsymbol{\alpha}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= m\bar{\mathbf{a}} \\ \sum \mathbf{M}_G &= \bar{I}\boldsymbol{\alpha} \end{aligned}}$$

لنگرهای لختی سطحی



لنگر سطحی لختی حول محور x

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

لنگر سطحی لختی حول محور y

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

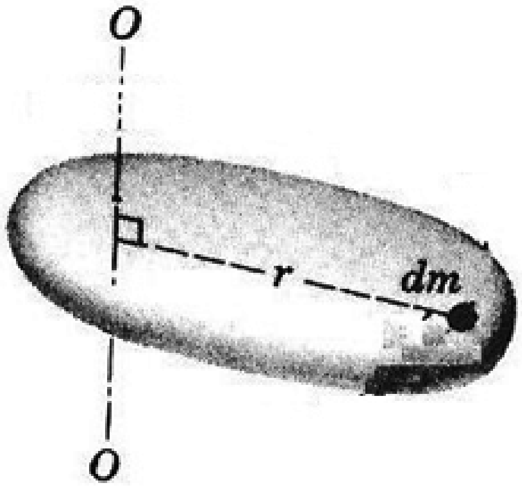
لنگر سطحی لختی حول محورz

$$J_z = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

لنگر لختی سطحی معیاری از توزیع سطح حول محور مورد نظر به شمار می رود.

بعد لنگر لختی سطحی در سیستم SI (m^4) می باشد

لنگرهای لختی جرمی



جرم جسم معیاری از مقاومت در مقابل شتاب انتقالي است.

لنگر لختی جرمی معیاری برای مقاومت جسم در مقابل شتاب چرخشی است.

$$I = \sum r_i^2 m_i = \int_m r^2 dm$$

اگر چگالی جسم در تمام جسم ثابت باشد داریم:

$$I = \rho \int r^2 dV$$

ابعاد لنگر لختی $kg\,m^2$ می باشد.

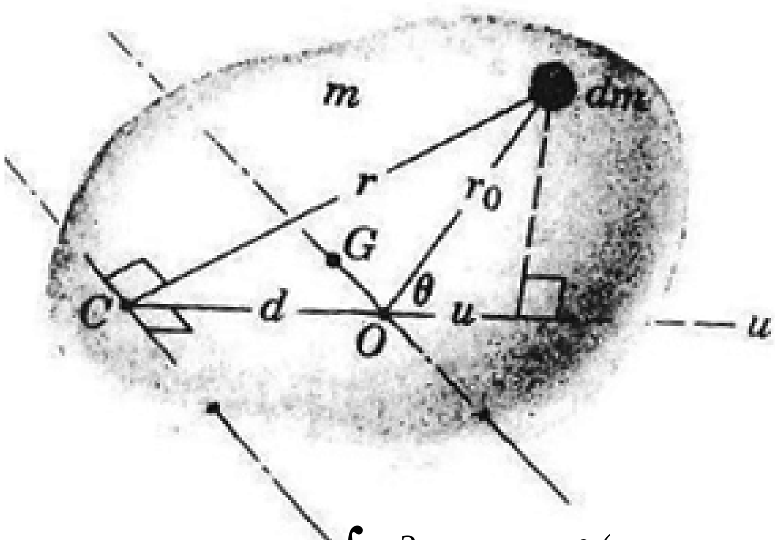
شعاع چرخش (ژیراسیون)

شعاع چرخش جرم m حول محوری که برای آن لنگر لختی I باشد بصورت زیر تعریف می شود.

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \Rightarrow I = k^2 m$$

اگر تمامی جرم را بتوان در فاصله k از محور متمرکز کرد ، لنگر لختی آن k^2m خواهد بود.

انتقال محورها



اگر لنگر لختی جسمی حول محور گذرنده از مرکز جرم مشخص باشد ،

می توان بسادگی آنرا حول هر محور موازی دیگر تعیین نمود.

$$I=\int r^2 dm=\int\left(r_\circ^2+d^2+2r_\circ d\cos\theta\right)dm=\int r_\circ^2 dm+d^2\int dm+2d\cancelto{0}{\int u\,dm}$$

قضیه محور های موازی

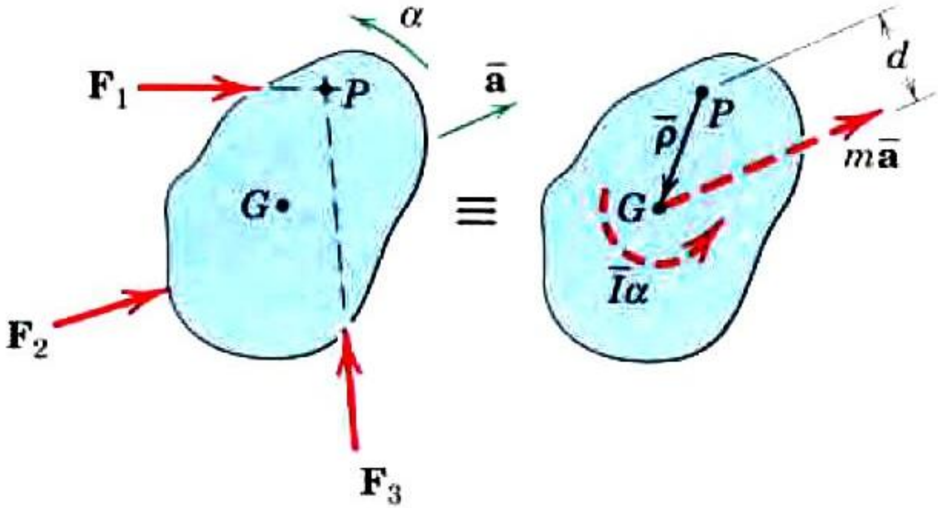
$$\boxed{I=\bar{I}+md^2}$$

$\bar{I}$: لنگر لختی حول محوری که از مرکز جرم می گذرد.

I: لنگر لختی حول محوری موازی محور فوق با فاصله d

$$mk^2=m\bar{k}^2+md^2 \quad\Rightarrow\quad k^2=\bar{k}^2+d^2$$

شکل های دیگری از معادله لنگر



Free-Body Diagram   Kinetic Diagram

از فصل 4 ، معادله ای کلی برای لنگر حول نقطه اختیاری P بصورت زیر بدست

آمده است :

$$\sum M_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{a}}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I}\boldsymbol{\alpha}$$

$$\left|\bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{a}}\right| = m\bar{a}d$$

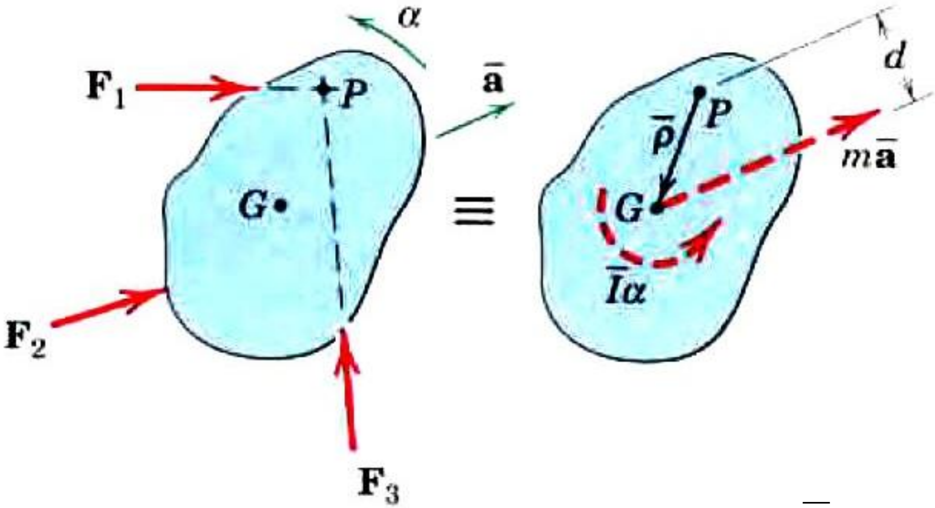
$$\boxed{\Sigma M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d}$$

معادله دیگری از فصل 4 :

$$\sum M_P = \left(\dot{\mathbf{H}}_P\right)_{rel} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\mathbf{a}_P$$

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_P = I_P\boldsymbol{\alpha} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\mathbf{a}_P}$$

شکل های دیگری از معادله لنگر



$$\Sigma \mathbf{M}_P = I_P \boldsymbol{\alpha} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\mathbf{a}_P$$

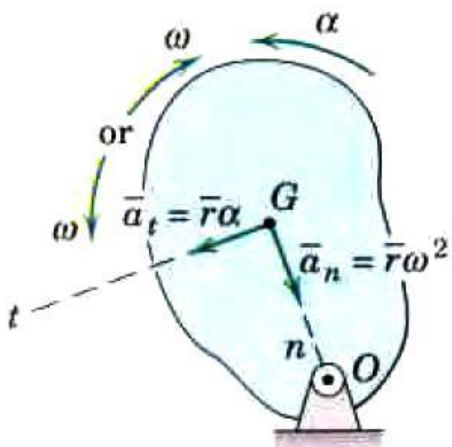
وقتی $\bar{\boldsymbol{\rho}} = 0$ ، نقطه P همان مرکز جرم G می شود و داریم :

$$\sum \mathbf{M}_G = \bar{I}\boldsymbol{\alpha}$$

وقتی نقطه P به نقطه O ثابت در دستگاه مختصات لخت تبدیل شود :

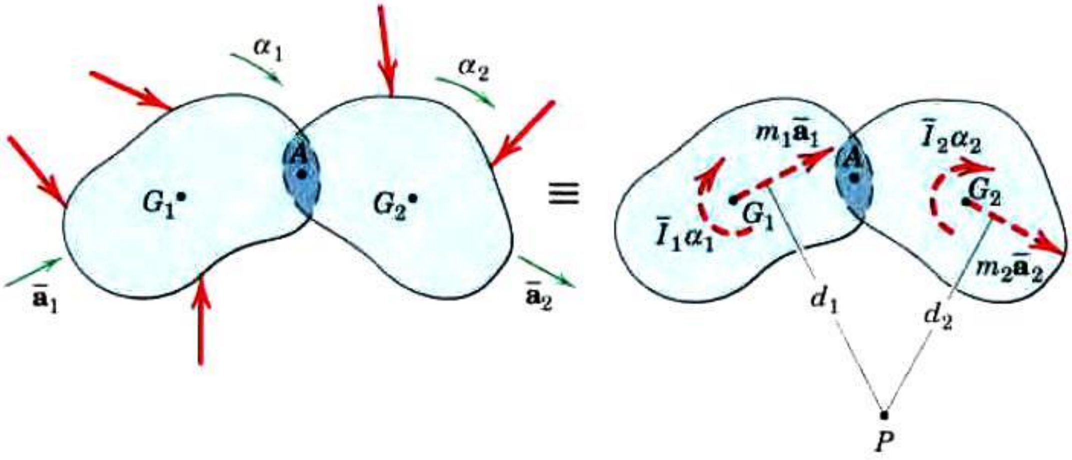
$$\mathbf{a}_P = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum \mathbf{M}_O = I_O \boldsymbol{\alpha}$$



Fixed-Axis Rotation

سیستم های اجسام متصل به هم



Free-Body Diagram of System ≡ Kinetic Diagram of System

دو جسم صلب در نقطه A به هم لولا شده اند.

نیروهای اتصال A نسبت به سیستم داخلی اند و نشان داده نمی شوند.

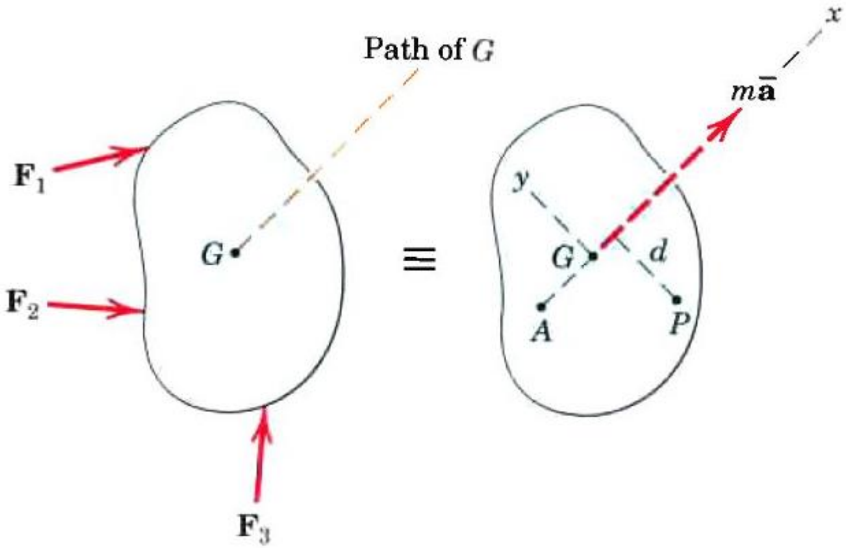
برایند همه نیروهای خارجی باید با جمع برداری دو برایند $m_1\bar{\mathbf{a}}_1$ و $m_2\bar{\mathbf{a}}_2$ برابر باشد

جمع لنگرهای همه نیروهای خارجی حول نقطه ای اختیاری مانند باید با لنگر برایندها $\bar{I}_1\alpha_1+\bar{I}_2\alpha_2+m_1\bar{a}_1d_1+m_2\bar{a}_2d_2$ برابر باشد

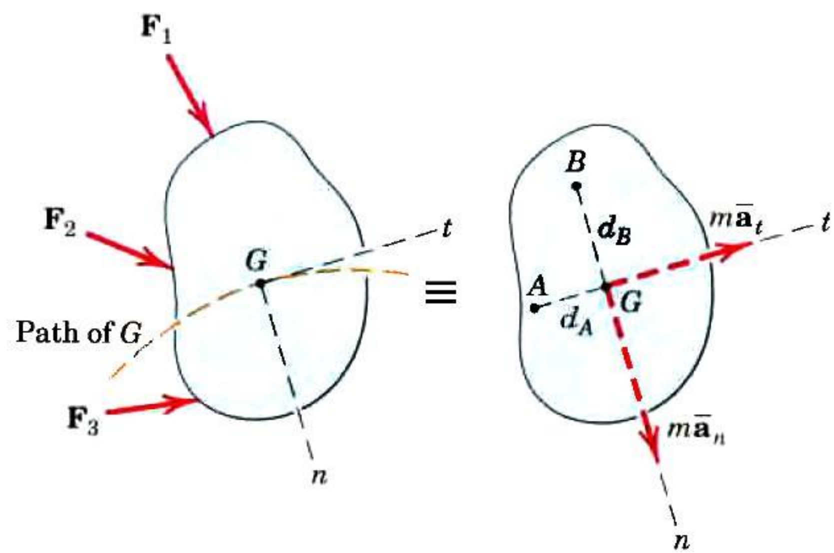
$$\Sigma\mathbf{F}=\Sigma m\bar{\mathbf{a}}$$

$$\Sigma M_P=\Sigma\bar{I}\alpha+\Sigma m\bar{a}d$$

انتقال



در انتقال راست خط همه نقاط روی خطوط مستقیم حرکت می کنند.



در انتقال خمیده خط همه نقاط روی مسیرهای منحنی هم نهشت حرکت می کنند.

در هر دو حالت جسم انتقال یابنده حرکت زاویه ای ندارد و ω و α صفرند.

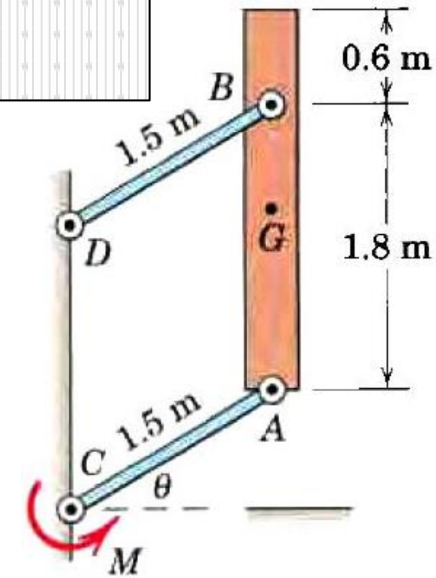
بنابراین معادلات کلی حرکت صفحه ای برای جسم انتقال یابنده برابر است با :

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$$
$$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha = 0$$

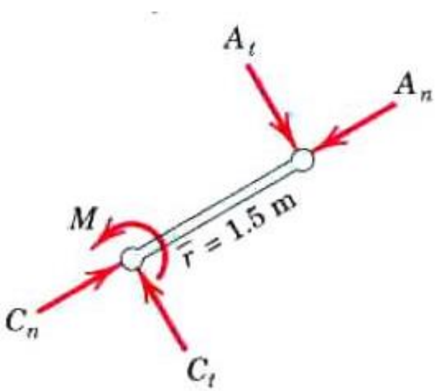
$$\Rightarrow \quad \sum M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d = 0 + m\bar{a}d$$

مسئله نمونه 6-2

جرم میله عمودی AB برابر 150 kg و مرکز جرم آن نقطه G واقع در وسط میله است. میله را از حالت سکون در وضعیت $\theta=0$ توسط میله های موازی با جرم قابل چشم پوشی ، به کمک کوپل ثابت **M**=5 kN.m که در نقطه C به میله پایینی وارد می کنند ، بالا می برند. مطلوب است تعیین α ، شتاب زاویه ای میله ها بصورت تابعی از θ و محاسبه نیروی B در میله DB در لحظه ای که $\theta=30^{o}$.



حل : حرکت میله ، انتقال خمیده خط است. بنابراین برای حرکت دایره ای مرکز جرم G ، دستگاه مختصات n-t را انتخاب می کنیم.

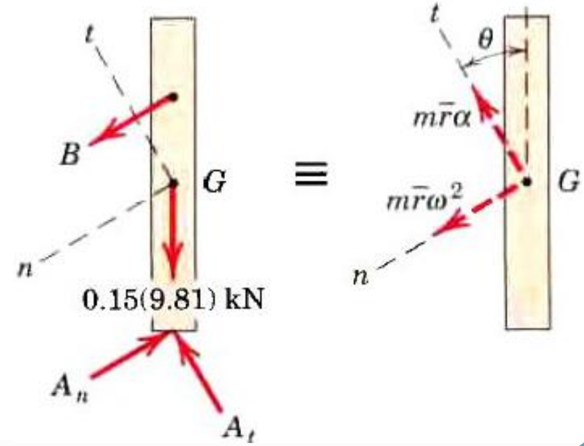


$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M = A_t\left(\overline{AC}\right)$$

$$\Rightarrow A_t = \frac{5}{1.5} = 3.33\ kN$$

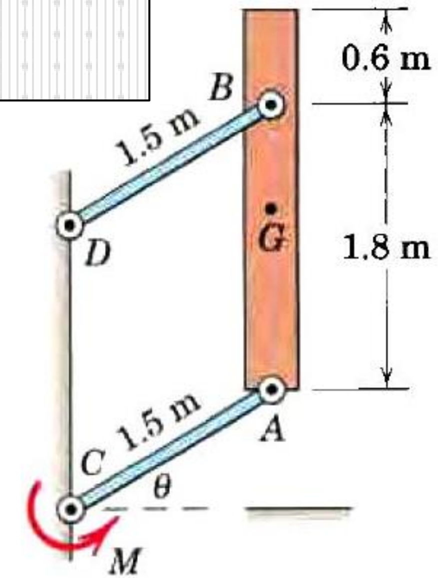
$$\sum F_t = m\bar{a}_t \Rightarrow 3.33\times10^3 - 150(9.81)\cos\theta = 150(1.5\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 14.81 - 6.54\cos\theta \quad rad/s^2}$$



مسئله نمونه 6-2

جرم میله عمودی AB برابر 150 kg و مرکز جرم آن نقطه G واقع در وسط میله است. میله را از حالت سکون در وضعیت θ=0 توسط میله های موازی با جرم قابل چشم پوشی ، به کمک کوپل ثابت **M**=5 kN.m که در نقطه C به میله پایینی وارد می کنند ، بالا می برند. مطلوب است تعیین α ، شتاب زاویه ای میله ها بصورت تابعی از θ و محاسبه نیروی B در میله DB در لحظه ای که θ=30°.

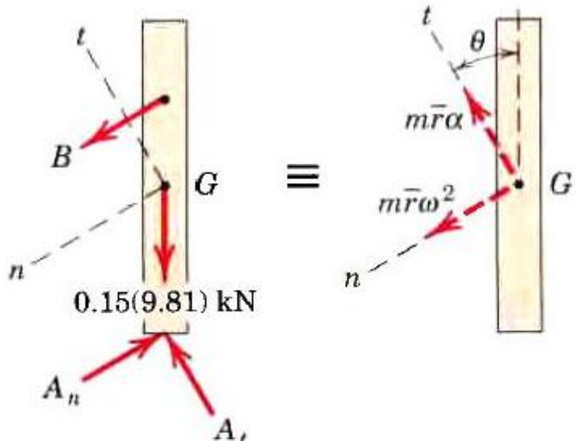


$$\int_0^{\omega}\omega d\omega=\int_0^{\theta}\alpha d\theta \;\Rightarrow\; \int_0^{\omega}\omega d\omega=\int_0^{\theta}(14.81-6.54\cos\theta)d\theta$$

$$\omega^2=29.6\theta-13.08\sin\theta \xrightarrow{\boxed{\theta=30^\circ}} \begin{aligned}\omega^2&=8.97(rad/s)^2\\ \alpha&=9.15\ rad/s^2\end{aligned}$$

$$m\bar{r}\omega^2=150\times1.5\times8.97=2.02\ kN$$

$$m\bar{r}\alpha=150\times1.5\times9.15=2.06\ kN$$



$$\sum M_A=m\bar{a}d$$

$$B(1.8\cos30^\circ)=2.02(1.2\cos30^\circ)+2.06(1.2\sin30^\circ)$$

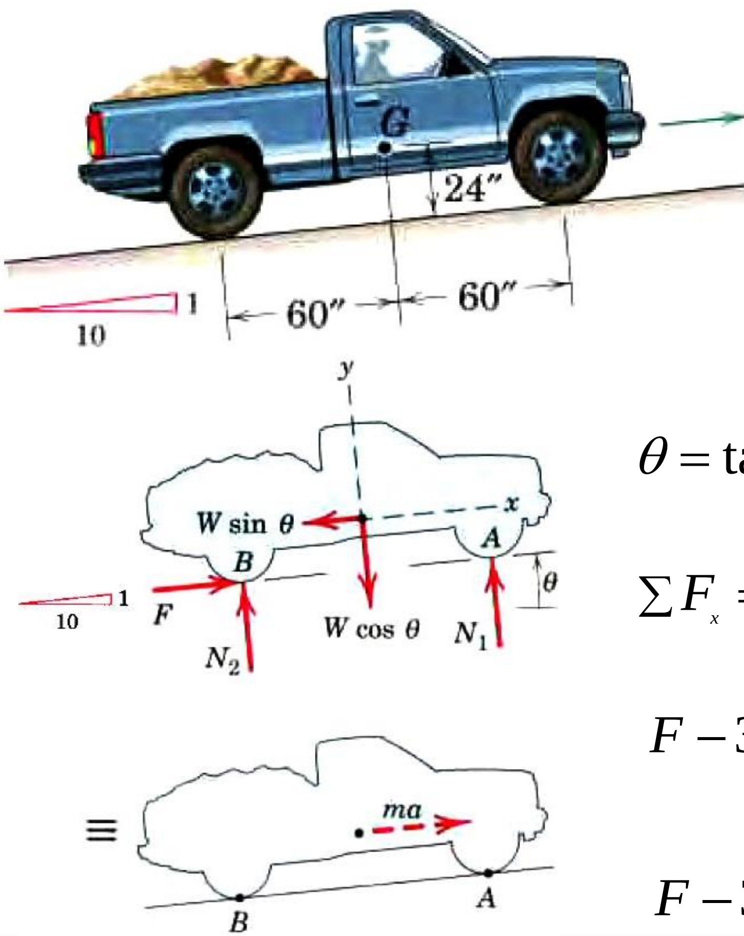
$$\Rightarrow \boxed{B=2.14\ kN}$$

مسئله نمونه 6-1

وانتی به وزن 3220 lb از حالت سکون به حرکت در می آید و پس از پیمودن 200 ft با شتاب ثابت روی سطح شیب دار با شیب 10درصد ، سرعت آن به 44 ft/sec می رسد.

مطلوب است محاسبه نیروی قائم زیر هر جفت از چرخ های وانت و نیروی اصطکاک زیر چرخ های محرک عقب. ضریب اصطکاک موثر بین لاستیک و جاده 0.8 است.

حل : فرض می کنیم جرم چرخ های وانت ، در مقایسه با جرم کل آن قابل چشم پوشی است. می توان وانت را جسم صلبی فرض کرد که انتقال راست خط با شتاب زیر انجام می دهد.



$$\left[v^2 = 2as\right] \Rightarrow \bar{a} = \frac{44^2}{2\times 200} = 4.84 \quad ft/\sec^2$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.1) = 5.71^\circ$$

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \quad \Rightarrow \quad F - W\sin\theta = m\bar{a}$$

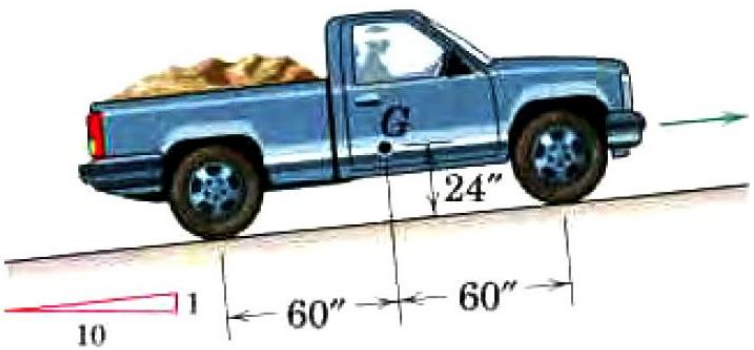
$$F - 3220\sin 5.71^\circ = \frac{3220}{32.2}\times 4.84$$

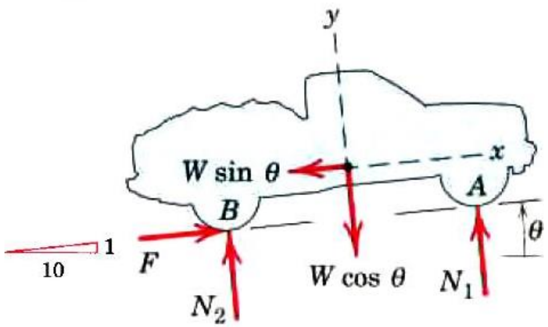
$$F - 320 = 484 \quad \Rightarrow \quad F = 804\ lb$$

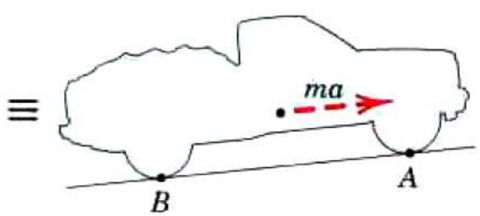
مسئله نمونه 6-1

وانتی به وزن 3220 lb از حالت سکون به حرکت در می آید و پس از پیمودن 200 ft با شتاب ثابت روی سطح شیب دار با شیب 10درصد ، سرعت آن به 44 ft/sec می رسد.

مطلوب است محاسبه نیروی قائم زیر هر جفت از چرخ های وانت و نیروی اصطکاک زیر چرخ های محرک عقب. ضریب اصطکاک موثر بین لاستیک و جاده دست کم 0.8 است.







$$\sum F_y = m\bar{a}_y \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 - W\cos\theta = 0$$

$$N_1 + N_2 = 3220\cos 5.71^\circ = 3200 \qquad \boxed{A}$$

$$\sum M_G = \bar{I}\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_1(60) - N_2(60) + 804\times 24 = 0 \qquad \boxed{B}$$

$$\begin{array}{c}\boxed{A}\\ \boxed{B}\end{array} \Rightarrow \quad N_1 = 1441\,lb, \quad N_2 = 1763\,lb$$

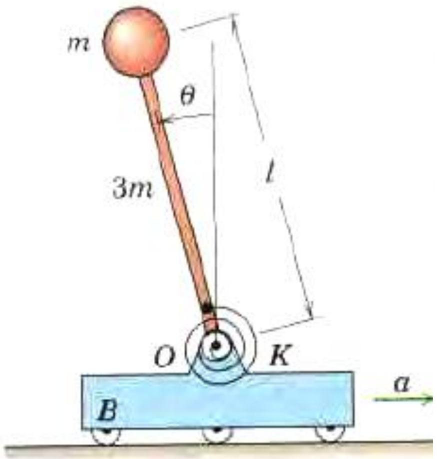
راه حل دیگر: N1 و N2 را می توان با نوشتن معادله های جداگانه لنگر حول نقاط A و B بدست آورد.

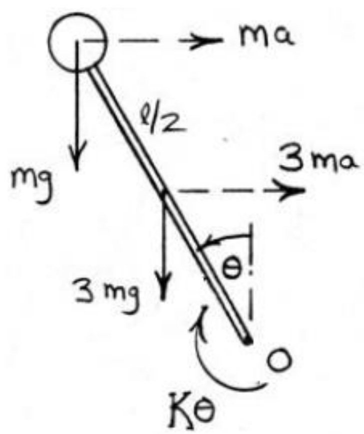
مسئله 6-23

گاری B با شتاب a=2g به سمت راست می رود. انحراف زاویه ای حالت پایای میله باریک یکنواخت به جرم 3m برابر °20 است. مطلوب است تعیین مقدار k ، ثابت فنر پیچشی.

این فنر که لنگری با اندازه M=kθ بر میله وارد می کند ، وقتی میله عمودی است ، تغییر شکل نیافته است. m و l را بترتیب برابر 0.5 kg و 0.6 mفرض کنید. کره کوچک سر میله را ذره ای به جرم m بگیرید.

حل :





$$\sum M_o = mad$$

$$-k\theta + 3mg(\frac{l}{2}\sin\theta) + mg(l\sin\theta)$$

$$= -3ma(\frac{l}{2}\cos\theta) - ma(l\cos\theta)$$

$$-k\theta + \frac{5}{2}mgl\sin\theta = -\frac{5}{2}mal\cos\theta$$

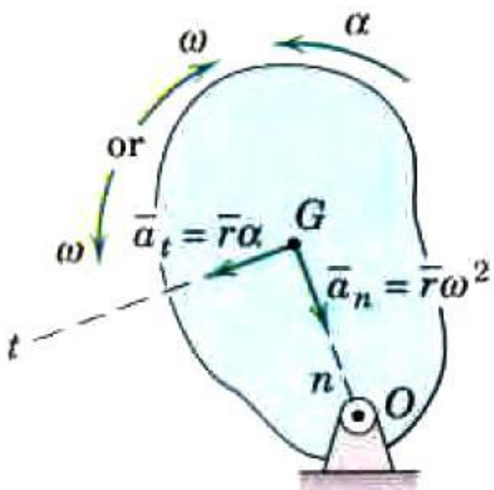
$$k = \frac{5ml(a\cos\theta + g\sin\theta)}{2\theta}$$

$$k = \frac{5\times0.5\times0.6\times(2\times9.81\times\cos 20^\circ + 9.81\times\sin 20^\circ)}{2(20\times\frac{\pi}{180})}$$

$$k = 46.8\ N.m/rad$$

چرخش حول محور ثابت

همه نقاط جسم دایره های هم مرکزی را می پیمایند.

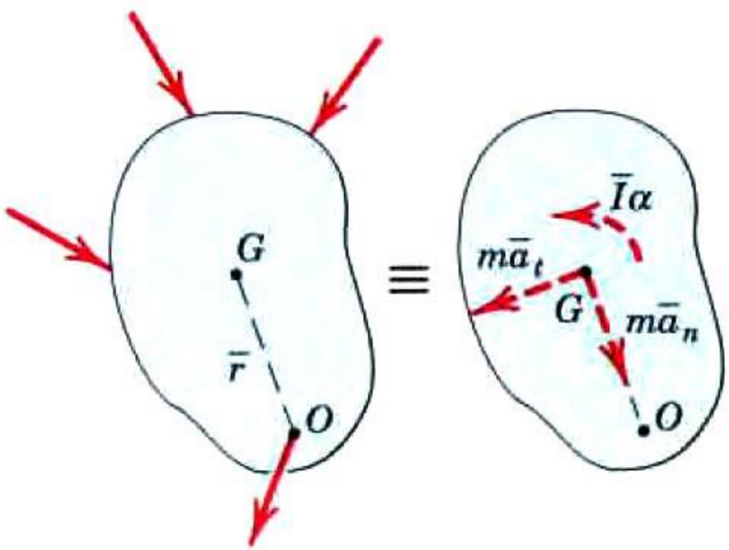


همه خطوط جسم در صفحه حرکت ، سرعت زاویه ای برابر و شتاب زاویه ای برابر دارند.

مختصات n-t برای مطالعه این حرکت مناسب می باشند.

$$\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$$

$$\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$$



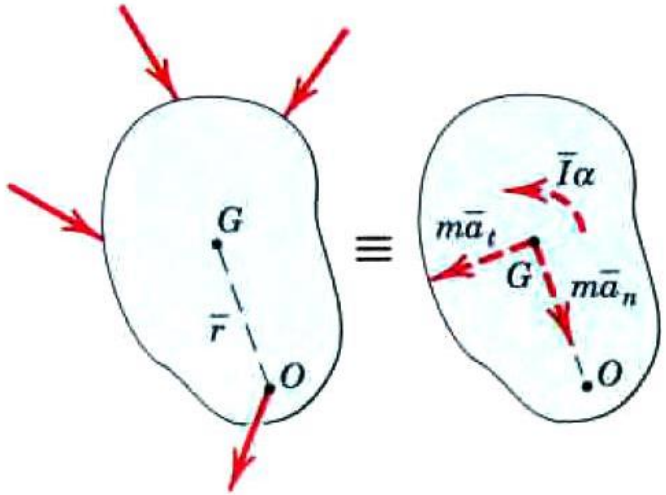
$$\sum \vec{F} = m\bar{\mathbf{a}} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_n = m\bar{a}_n = m\bar{r}\omega^2 \\ \sum F_t = m\bar{a}_t = m\bar{r}\alpha \end{cases}$$

$$\sum M_G = \bar{I}\alpha$$

استفاده از رابطه زیر سودمندتر است :

$$\sum M_o = I_o\alpha$$

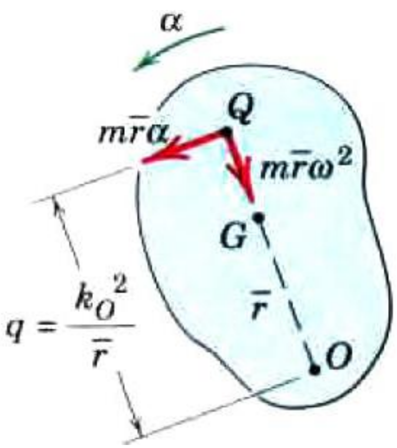
چرخش حول محور ثابت



رابطه اخیر از راه دیگری نیز قابل اثبات است :

$$\xrightarrow{\text{از نمودار سینتیکی}} \quad \sum M_o = \bar{I}\alpha + m\bar{a}_t\bar{r}$$

$$\Rightarrow \quad \sum M_o = \left(I_o - m\bar{r}^2\right)\alpha + m\bar{r}\alpha\bar{r} = I_o\alpha$$



مرکز ضربه

می توان مولفه نیروی برایند $m\bar{a}_t$ و برایند کوپل $\bar{I}\alpha$ را با انتقال $m\bar{a}_t$ به وضعیتی موازی و گذرنده از نقطه Q روی خط OG ، با هم ترکیب کرد.

$$m\bar{r}\alpha q = \bar{I}\alpha + m\bar{r}\alpha(\bar{r}) \longrightarrow \left.\begin{array}{l} I_O = m\bar{r}q \\ I_O = k_O^2 m \end{array}\right\} \quad k_O^2 = \bar{r}q$$

$$\Downarrow$$

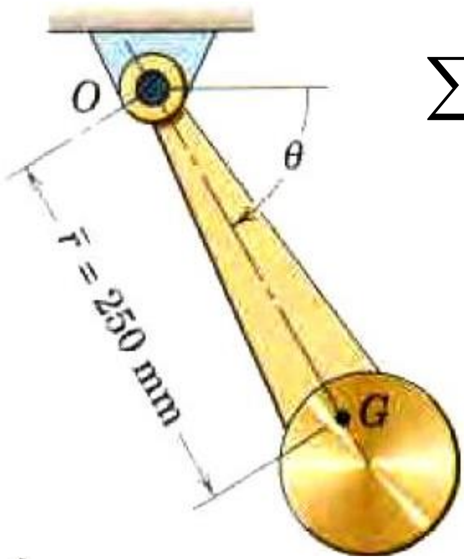
$$q = \frac{k_O^2}{\bar{r}}$$

نقطه Q را **مرکز ضربه** نامند و این خاصیت منحصربفرد را دارد که برایند همه نیروهای وارد بر جسم باید از آن بگذرد. در نتیجه جمع لنگرهای همه نیروها حول مرکز ضربه همواره صفر است.

$$\sum M_Q = 0$$

مسئله نمونه 6-4

آونگی به جرم 7.5 kg و مرکز جرم G با شعاع چرخش 295 mm حول لولای O مفروض است. آونگ را از حالت سکون در $\theta=0$ رها می کنیم. مطلوب است تعیین نیروی کل وارد بر بلبرینگ ، در لحظه ای که $\theta=60^o$. اصطکاک در بلبرینگ قابل چشم پوشی است.



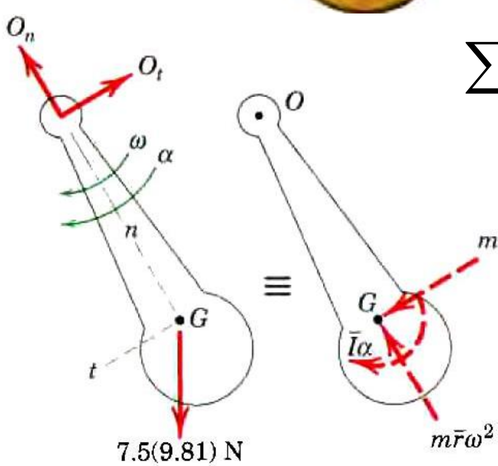
حل :

$$\sum M_o = I_o\alpha \quad \Rightarrow \quad 0.25\times 7.5\times 9.81\cos\theta = 7.5(0.295)^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 28.2\cos\theta \ \ {rad}/{s^2}$$

$$\int \omega d\omega = \int \alpha d\theta \ \xrightarrow{in\,\theta=60^\circ} \ \int_0^{\omega} \omega d\omega = \int_0^{\pi/3} \alpha d\theta$$

$$\searrow \quad \omega^2 = 48.8\ {rad^2}/{s^2}$$



$$\sum F_n = m\bar{r}\omega^2 \quad \Rightarrow \quad O_n - 7.5\times 9.81\sin 60^o = 7.5\times 0.25\times 48.8$$

$$\Rightarrow \quad O_n = 155.2N$$

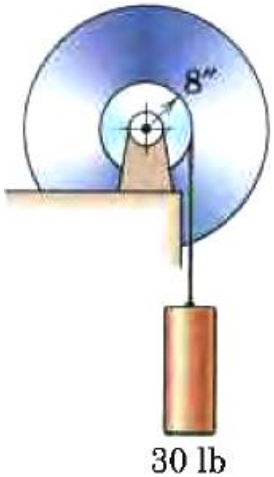
$$\sum F_t = m\bar{r}\alpha \ \Rightarrow -O_t + 7.5\times 9.81\times\cos 60^o = 7.5\times 0.25\times 28.8\cos 60^o$$

$$\Rightarrow \quad O_t = 10.37N$$

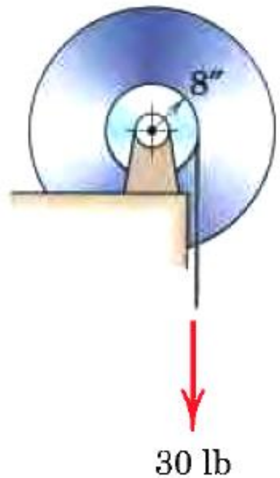
مسئله 6-38

هر یک از این دو طبلک و توپی های آن ها با شعاع 8 in وزنی برابر 200 lb دارد و شعاع چرخش آن حول مرکزش (شعاع ژیراسیون) 15 inاست. مطلوب است محاسبه شتاب زاویه ای هر طبلک.

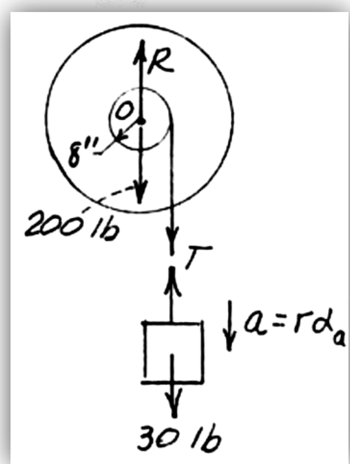
اصطکاک در هر بلبرینگ قابل چشم پوشی است.

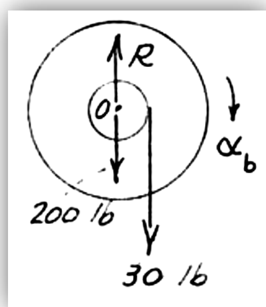


(a)



(b)





حل :

$$a)\quad \sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow T\left(\frac{8}{12}\right) = \frac{200}{32.2}\left(\frac{15}{12}\right)^2 \alpha_a$$

$$\sum F = ma \Rightarrow 30 - T = \frac{30}{32.2}\left(\frac{18}{12}\alpha_a\right)$$

با حل 2 معادله و 2 مجهول:

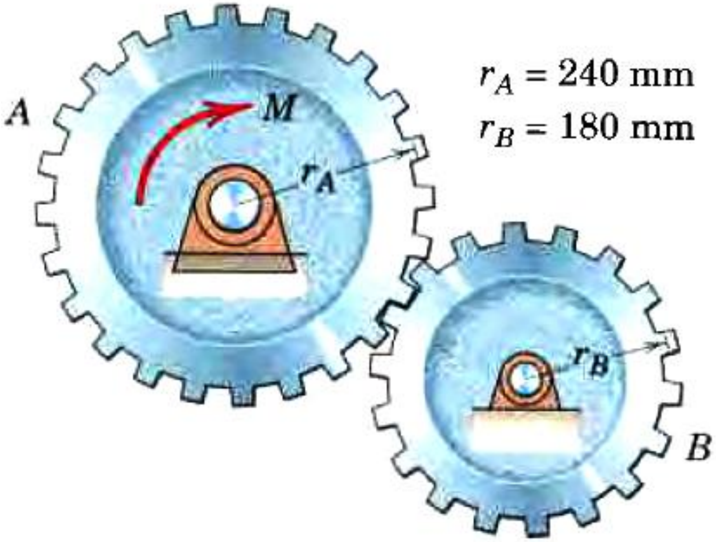
$$T = 28.77\ lb\,,\quad \alpha_a = 1.976\ rad/s^2$$

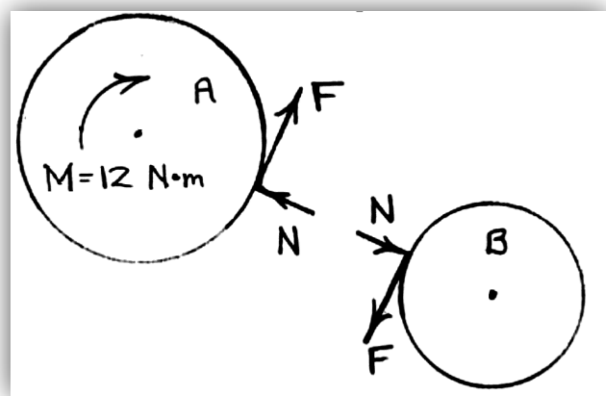
$$b)\quad \sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow 30\left(\frac{8}{12}\right) = \frac{200}{32.2}\left(\frac{15}{12}\right)^2 \alpha_b$$

$$\Rightarrow \alpha_b = 2.06\ rad/s^2$$

مسئله 6-56

جرم چرخدنده A برابر 20 kg و شعاع چرخش آن 150 mm است. جرم چرخدنده B برابر 10 kg و شعاع چرخش آن 100 mm است. مطلوب است محاسبه شتاب زاویه ای چرخدنده B وقتی گشتاور 12 N.m بر محور چرخدنده A وارد می شود. از اصطکاک چشم پوشی کنید.





حل :

$$\sum M_{O_A} = I_A \alpha_A \Rightarrow -12 + F(0.24) = 20(0.15)^2 \alpha_A \quad (1)$$

$$\sum M_{O_B} = I_B \alpha_B \Rightarrow F(0.18) = 10(0.1)^2 \alpha_B \quad (2)$$

اندازه شتاب خطی در نقطه تماس دو چرخدنده برابر است:

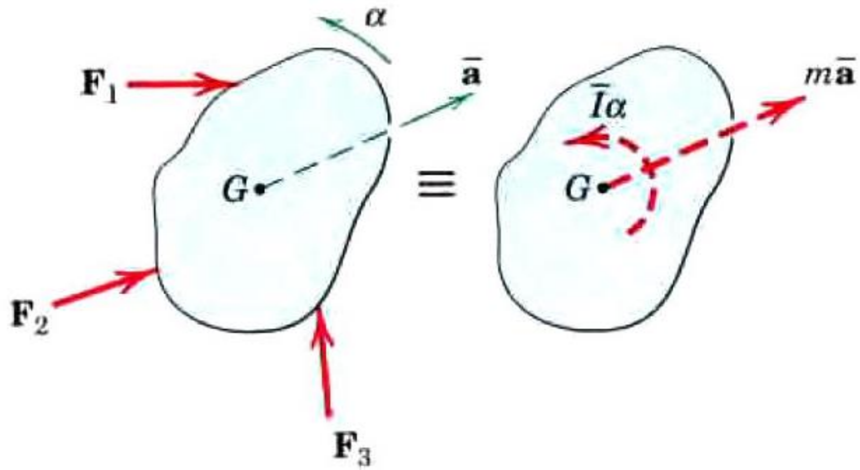
$$|r_A \alpha_A| = |r_B \alpha_B| \Rightarrow 0.24\alpha_A + 0.18\alpha_B = 0 \quad (3)$$

با حل سه معادله و سه مجهول:

$$F = 14.16\ N$$
$$\alpha_A = -19.12\ rad/s^2$$
$$\alpha_B = 25.5\ rad/s^2$$

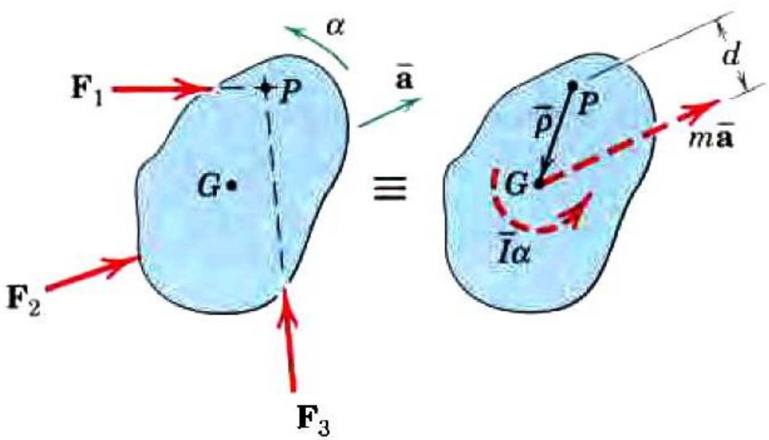
حرکت صفحه ای کلی

دینامیک جسم صلب در حرکت صفحه ای کلی ، تلفیقی از انتقال و چرخش است.



$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$$

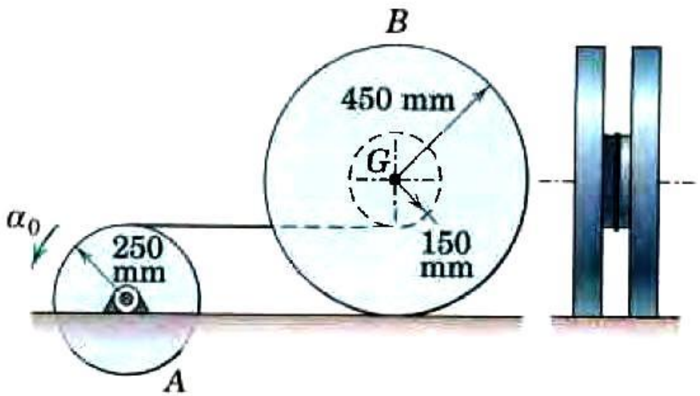
$$\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$$



$$\Sigma M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$

مسئله نمونه 6-6

به استوانه A شتاب زاویه ای ثابت $\alpha_0=3\ rad/s^2$ داده شده ، تا سبب غلتش قرقره 70kg روی سطح افقی گردد. K شعاع چرخش قرقره حول G 250 mm ، و ضریب اصطکاک بین قرقره و سطح 0.25 است. T کشش کابل و F نیروی اصطکاک از طرف سطح به قرقره را بیابید:.



حل :

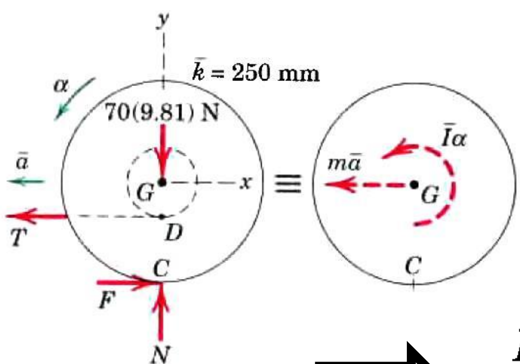
شتاب کابل :

$$a_t = r\alpha = 0.25(3) = 0.75\ \text{m/s}^2$$

فرض: قرقره بدون لغزش می غلتد

$$\alpha = (a_D)_x/\overline{DC} = 0.75/0.30 = 2.5\ \text{rad/s}^2$$

$$\bar{a} = r\alpha = 0.45(2.5) = 1.125\ \text{m/s}^2$$ به سمت چپ



$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad F - T = 70(-1.125) \qquad (1)$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y] \qquad N - 70(9.81) = 0 \qquad N = 687\ \text{N}$$

$$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha] \qquad F(0.450) - T(0.150) = 70(0.250)^2(2.5) \qquad (2)$$

$$F = 75.8\ \text{N}$$

$$T = 154.6\ \text{N}$$

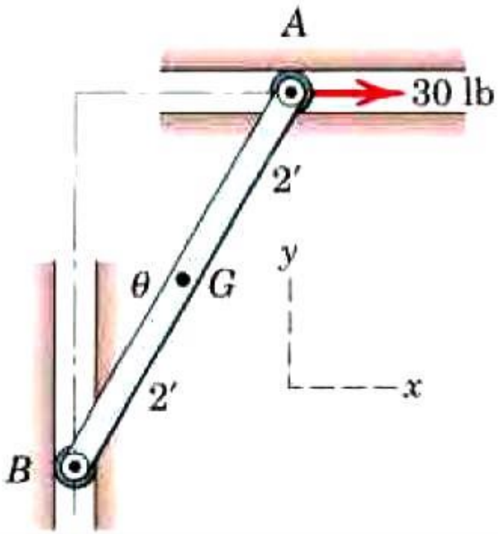
برای تعیین اعتبار فرض «عدم لغزش» ، حداکثر نیروی اصطکاک قابل تحمل توسط سطوح بصورت زیر محاسبه می شود:

$$F_{\max} = \mu_s N = 0.25(687) = 171.7\ \text{N}$$

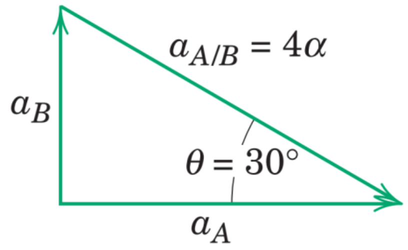
بنابراین فرض عدم لغزش معتبر است

مسئله نمونه 6-7

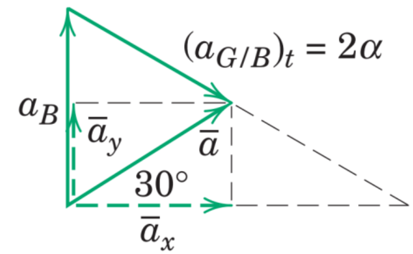
میله باریک AB به وزن 60 lb در صفحه قائم حرکت می کند و سر آن مقید به حرکت در راهنماهای صاف افقی و قائم است. نیروی 30 lb در نقطه A وارد می شود و میله ابتدا در وضعیتی در حال سکون است که به ازای آن $\theta=30°$ است. شتاب زاویه ای میله و نیروهای وارد به غلتک های کوچک A و B چقدر است ؟



حل :



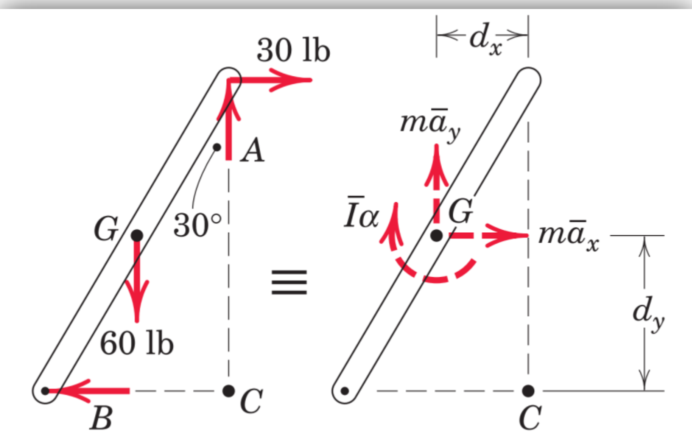
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$$



$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{G/B}$$

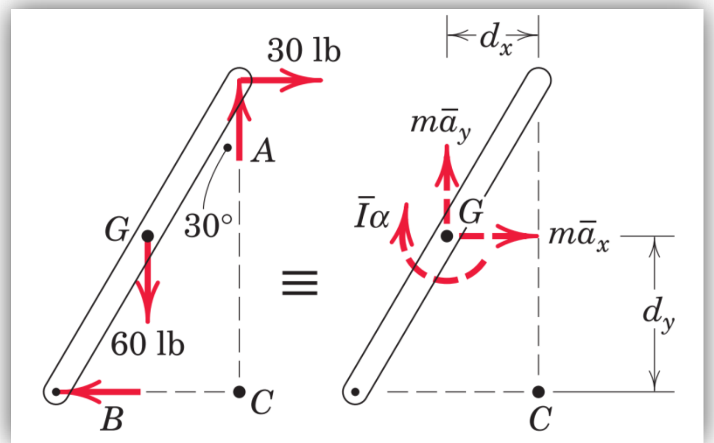
$$\bar{a}_x = \bar{a}\cos 30° = 2\alpha \cos 30° = 1.732\alpha \text{ ft/sec}^2$$

$$\bar{a}_y = \bar{a}\sin 30° = 2\alpha \sin 30° = 1.0\alpha \text{ ft/sec}^2$$



$$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha]$$

$$30(2\cos 30°) - A(2\sin 30°) + B(2\cos 30°) = \frac{1}{12}\,\frac{60}{32.2}\,(4^2)\alpha \qquad (1)$$



$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad 30 - B = \frac{60}{32.2}(1.732\alpha) \qquad (2)$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y] \qquad A - 60 = \frac{60}{32.2}(1.0\alpha) \qquad (3)$$

با حل سه معادله و سه مجهول:

$$A = 68.2 \text{ lb} \qquad B = 15.74 \text{ lb} \qquad \alpha = 4.42 \text{ rad/sec}^2$$

روش دوم:

$$[\Sigma M_C = \bar{I}\alpha + \Sigma m\bar{a}d]$$

$$30(4\cos 30°) - 60(2\sin 30°) = \frac{1}{12}\frac{60}{32.2}(4^2)\alpha + \frac{60}{32.2}(1.732\alpha)(2\cos 30°) + \frac{60}{32.2}(1.0\alpha)(2\sin 30°)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 4.42 \text{ rad/sec}^2$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y] \qquad A - 60 = \frac{60}{32.2}(1.0)(4.42) \qquad A = 68.2 \text{ lb}$$

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad 30 - B = \frac{60}{32.2}(1.732)(4.42) \qquad B = 15.74 \text{ lb}$$

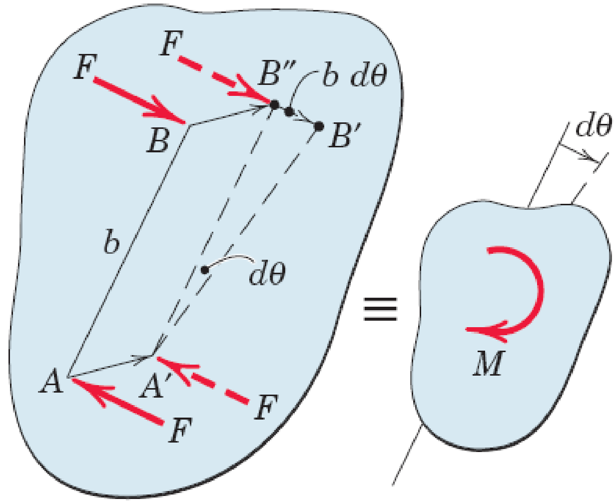
قسمت ب) کار و انرژی

کار نیرو $\Longrightarrow$ $\boxed{U = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad \text{or} \qquad U = \int (F \cos \alpha)\, ds}$

$$M = Fb$$

$$dU = F(b\ d\theta) = M\ d\theta$$

کار کوپل $\Longrightarrow$ $\boxed{U = \int M\, d\theta}$

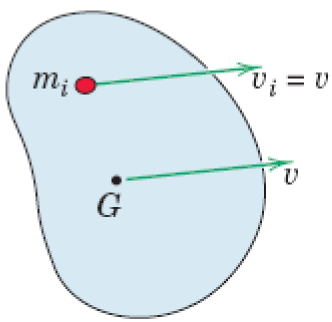


انرژی جنبشی

الف- حرکت انتقالی

برای ذره iام $\quad T_i = \frac{1}{2} m_i v^2$

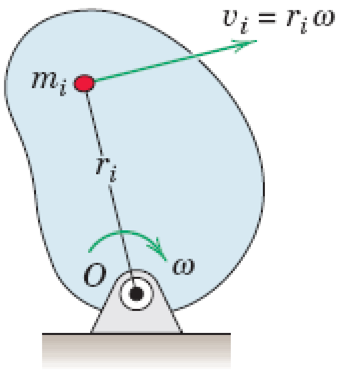
$$T = \Sigma \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \Sigma m_i$$



(a) Translation

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2}$$

ب- چرخش حول محور ثابت



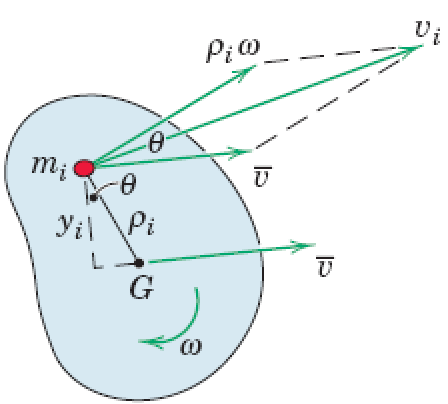
(b) Fixed-Axis Rotation

برای ذره iام $\quad T_i = \frac{1}{2} m_i (r_i\omega)^2.$

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \Sigma m_i r_i^2$$

$$I_O = \Sigma m_i r_i^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = \frac{1}{2} I_O \omega^2}$$

ج- حرکت کلی صفحه ای



(c) General Plane Motion

$$T = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \Sigma \frac{1}{2} m_i (\bar{v}^2 + \rho_i^2\omega^2 + 2\underbrace{\bar{v}\rho_i\omega \cos\theta}_{0})$$

$$\boxed{\omega\bar{v}\,\Sigma m_i\rho_i \cos\theta = \omega\bar{v}\,\Sigma m_i y_i = 0}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{T = \frac{1}{2} m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2}$$

همچنین انرژی جنبشی حرکت کلی صفحه ای را می توان برحسب سرعت چرخشی حول مرکز آنی سرعت صفر C نیز بیان کرد:

$$T = \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

توان

آهنگ انجام کار توسط نیرو :

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

آهنگ انجام کار توسط کوپل :

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{M\, d\theta}{dt} = M\omega$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + M\omega}$$

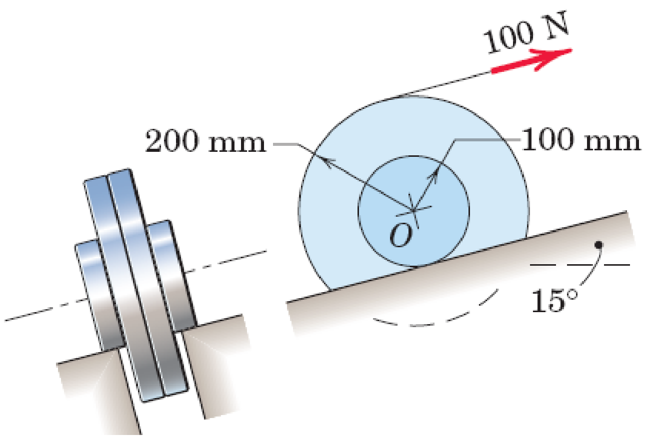
معادله کار و انرژی

$$T_1 + U_{1-2} = T_2$$

$$T_1 + V_1 + {U'}_{1-2} = T_2 + V_2$$

مسئله نمونه 6-9

چرخی مطابق شکل روی توپی خود ، بدون لغزش ، از سطح شیب دار بالا می رود و نیروی 100 N که به طنابی وارد می شود که روی لبه آن سفت پیچیده شده است ، عامل این حرکت است. چرخ از حالت سکون به حرکت در می آید. مطلوب است محاسبه سرعت زاویه ای ω پس از آنکه مرکز چرخ به اندازه 3 m از سطح شیبدار بالا رفته است. جرم چرخ 40 kg و مرکز جرم آن در نقطه O است. شعاع چرخش مرکزواری (شعاع ژیراسیون) آن نیز 150 mm است. مطلوب است تعیین توانی که نیروی 100 N در پایان 3 m حرکت چرخ به آن داده است.

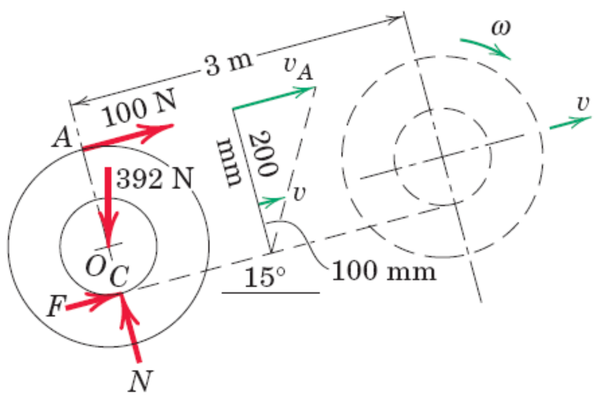


$$mg = 40 \times 9.81 = 392\ N$$

چرخ بدون لغزش می غلتد ، بنابراین نقطه C مرکز آنی است

$$v_A = 3v_O$$

نکته مهم: نیروی اصطکاک تا زمانی که چرخ لغزش نکند ، کاری انجام نمی دهد



وقتی مرکز چرخ به اندازه 3 متر جابجا شود ، نقطه A به اندازه 3 برابر آن (9 متر) جابجا می شود.

$$U_{1\text{-}2} = 100\,\frac{200 + 100}{100}(3) - (392 \sin 15°)(3) = 595\ \text{J}$$

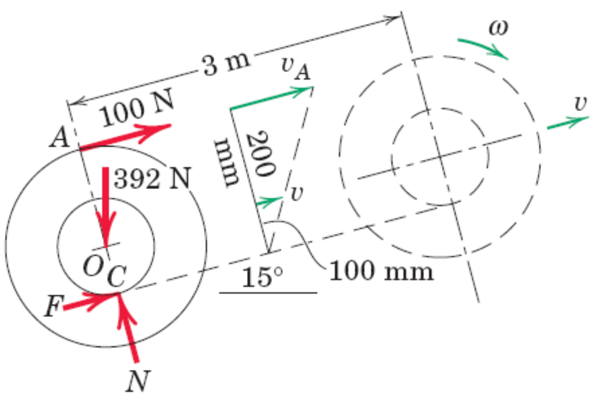
$$[T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2] \qquad T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}40(0.10\omega)^2 + \frac{1}{2}40(0.15)^2\omega^2 = 0.650\omega^2$$

همچنین انرژی جنبشی را می توان برحسب سرعت چرخشی حول مرکز آنی سرعت صفر C نیز بدست آورد:

$$[T = \frac{1}{2}I_C\omega^2] \longrightarrow T = \frac{1}{2}40[(0.15)^2 + (0.10)^2]\omega^2 = 0.650\omega^2$$

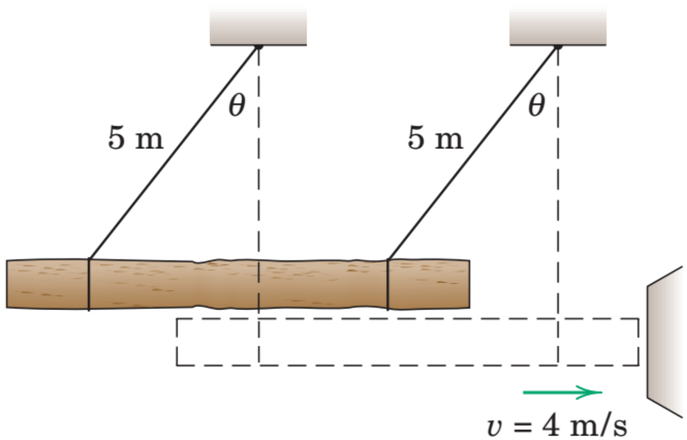
$$[T_1 + U_{1\text{-}2} = T_2] \longrightarrow 0 + 595 = 0.650\omega^2 \longrightarrow \boxed{\omega = 30.3 \text{ rad/s}}$$



$$[P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}] \longrightarrow \boxed{P_{100} = 100(0.3)(30.3) = 908 \text{ W}}$$

مسئله 6-118

گرده بینه ای توسط دو کابل موازی به طول 5m آویزان شده است و به عنوان کوبه از آن استفاده می کنند. گرده بینه از کدام زاویه θ رها شود تا با سرعت 4m/s به دیواره برخورد کند؟



$$U' = 0$$

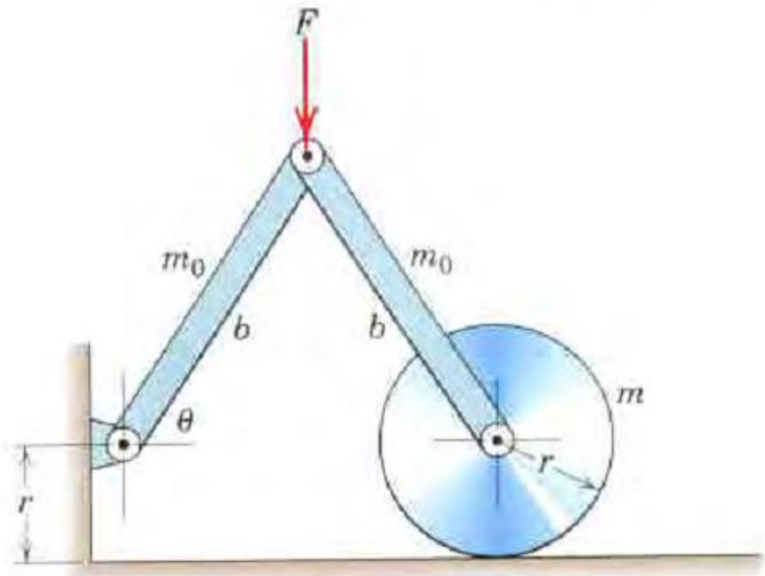
$$\Delta T = \frac{1}{2}m(4^2 - 0^2)$$

$$\Delta V = -mg(5)(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 33.2^\circ}$$

مسئله 6-125

نیروی ثابت F در امتداد عمودی بر میله بندی متقارن وارد می شود و آن را از حالت سکون ، مطابق شکل ، به حرکت در می آورد. مطلوب است تعیین ω ، سرعت زاویه ای میله ها پس از رسیدن به وضعیت θ=0. جرم هر میله m0 است. چرخ دیسکی دایره ای به جرم m است که روی سطح افقی غلتش بدون لغزش انجام می دهد.



$$U' = \Delta T + \Delta V_g$$

$$U' = Fb\sin\theta$$

$$\Delta V_g = -2m_0 g\left(\frac{b}{2}\right)\sin\theta$$

چرخ هیچ سرعتی در ابتدا و انتهای حرکت ندارد

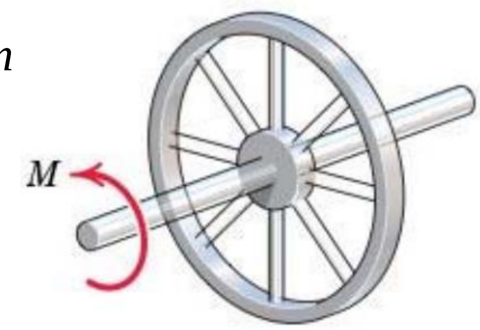
$$\Delta T = 2\left(\frac{1}{2}I_c\omega^2\right) = \left(\frac{1}{3}m_0 b^2\right)\omega^2$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{3(F+m_0 g)\sin\theta}{m_0 b}}}$$

مسئله 6-132

چرخ نشان داده شده به جرم 50 kg و شعاع ژیراسیون k=0.4 m حول محور خود ، تحت تاثیر گشتاور زیر قرار دارد. اگر در موقعیت θ=0 ، چرخ در حالت سکون باشد ، سرعت زاویه ای آن را پس از 5 دور چرخش تعیین کنید.

$$M = 2\left(1-e^{-0.1\theta}\right) \quad N.m$$



Problem 6/132

$$U' = \Delta T + \Delta V_g$$

$$\Delta V_g = 0$$

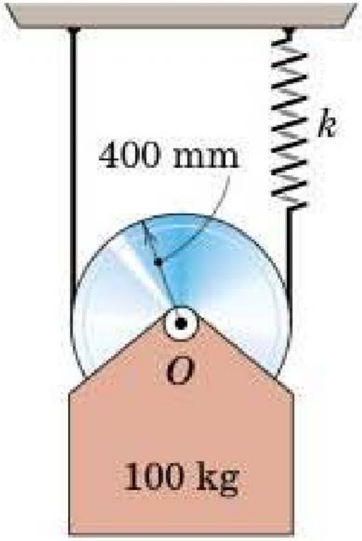
$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}(50)(0.4)^2\omega^2 = 4\omega^2$$

$$U' = \int M d\theta = \int_0^{10\pi} 2\left(1-e^{-0.1\theta}\right)d\theta = \left(2\theta + \frac{2}{0.1}e^{-0.1\theta}\right)\Bigg|_0^{10\pi} = 43.7\ j$$

$$4\omega^2 = 43.7 \longrightarrow \boxed{\omega = 3.31\ rad/s}$$

مسئله 6-140

قرقره بزرگی به شعاع 400 mm و جرم 50 kg ، دارای شعاع ژیراسیون 300 mm است. قرقره و بار آن به جرم 100 kg ، توسط کابل و فنر (به سفتی 1.5 kN/m) آویخته شده اند. مجموعه از حالت سکون در وضعیتی رها می شود که فنرها به اندازه 100 mm کشیدگی اولیه دارند. سرعت نقطه O را پس از 50 mm کاهش ارتفاع بیابید.



$$U' = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$$U' = 0$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}(1500)[(0.1 + 2 \times 0.05)^2 - 0.1^2] = 22.5\ j$$

$$\Delta V_g = -150 \times 9.81 \times 0.05 = -73.58\ j$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}(150)v^2 + \frac{1}{2}(50)(0.3)^2\left(\frac{v}{0.4}\right)^2$$

$$v^2 = 0.573 \longrightarrow \boxed{v = 0.757\ m/s}$$

تعیین شتاب از اصل کار-انرژی ، کار مجازی

علاوه بر تعیین سرعت های اعضای مختلف ، می توان معادله کار-انرژی را بگونه ای بکار برد تا شتاب های لحظه ای اعضای یک مجموعه را نیز بدست آید.

معادله کار-انرژی برای حرکت های جزیی

در یک بازه زمانی بسیار کوتاه (دیفرانسیلی) از حرکت ، معادله کار-انرژی را بصورت زیر می توان نوشت:

$$dU' = dT + dV$$

$$dT = d(\Sigma \tfrac{1}{2} m_i \bar{v}_i^{\,2} + \Sigma \tfrac{1}{2} \bar{I}_i \omega_i^{\,2}) = \Sigma m_i \bar{v}_i \, d\bar{v}_i + \Sigma \bar{I}_i \omega_i \, d\omega_i$$

$$m_i \bar{v}_i \, d\bar{v}_i = m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i \qquad \bar{I}_i \omega_i \, d\omega_i = \bar{I}_i \alpha_i \, d\theta_i,$$

$$\boxed{dT = \Sigma m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \bar{I}_i \alpha_i \, d\theta_i} \Longrightarrow \boxed{dT = \Sigma \mathbf{R}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \mathbf{M}_{G_i} \cdot d\boldsymbol{\theta}_i}$$

$$dV = d(\Sigma m_i g h_i + \Sigma \frac{1}{2} k_j {x_j}^2) = \Sigma m_i g \, dh_i + \Sigma k_j x_j \, dx_j$$

$$dU' = \Sigma m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \bar{I}_i \alpha_i \, d\theta_i + \Sigma m_i g \, dh_i + \Sigma k_j x_j \, dx_j$$

معادله فوق دارای این مزیت است که شتاب ها را مستقیما به نیروهای فعال ارتباط می دهد.

لذا نیاز به جداسازی اجسام مجموعه از یکدیگر و حذف نیروهای داخلی و واکنش ها از طریق حل همزمان معادلات نیرو-جرم-شتاب نخواهد بود.

در استفاده از رابطه فوق ،

حرکات دیفرانسیلی عبارتند از تغییرات دیفرانسیلی در جابجایی های واقعی یا حقیقی که به وقوع می پیوندند.

کار مجازی

برای یک مجموعه مکانیکی که در حین حرکت با شتاب ثابت ، ترکیب هندسی پایا و ثابتی را به خود می گیرد ، استفاده از مفهوم کار مجازی ساده تر و مناسب تر خواهد بود.

یک جابجایی مجازی ، عبارت است از هرگونه جابجایی فرضی و اختیاری خطی یا زاویه ای ، نسبت به موقعیت طبیعی یا واقعی مجموعه.

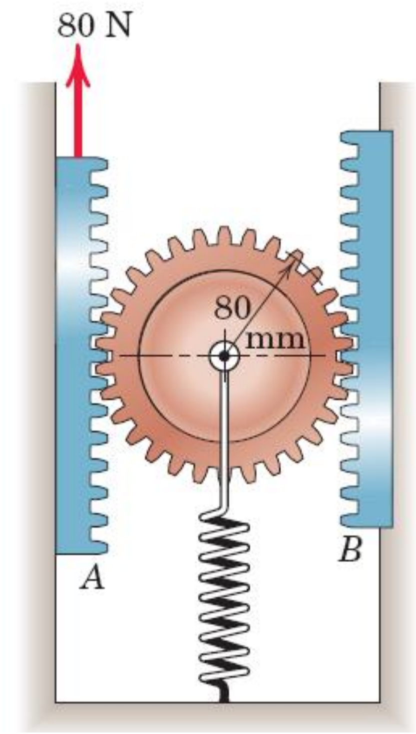
$$\delta U' = \Sigma m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot \delta \bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \bar{I}_i \alpha_i \, \delta\theta_i + \Sigma m_i g \, \delta h_i + \Sigma k_j x_j \, \delta x_j$$

نماد d: برای مشخص کردن تغییرات دیفرانسیلی در جابجایی های حقیقی

نماد δ: برای بیان تغییرات دیفرانسیلی در جابجایی های فرضی یا مجازی

مسئله نمونه 6-12

میل دنده متحرک A جرمی برابر 3kg دارد و میل دنده B ثابت است. جرم چرخ دنده 2kg و شعاع چرخش آن 60mm است. در وضعیتی مطابق شکل ، فنر با سفتی 1.2kN/m به اندازه 40mm کشیده شده است. مطلوب است تعیین a ، شتاب میل دنده A تحت اثر نیروی 80N در لحظه ای مطابق شکل. صفحه شکل عمودی است.



حل:

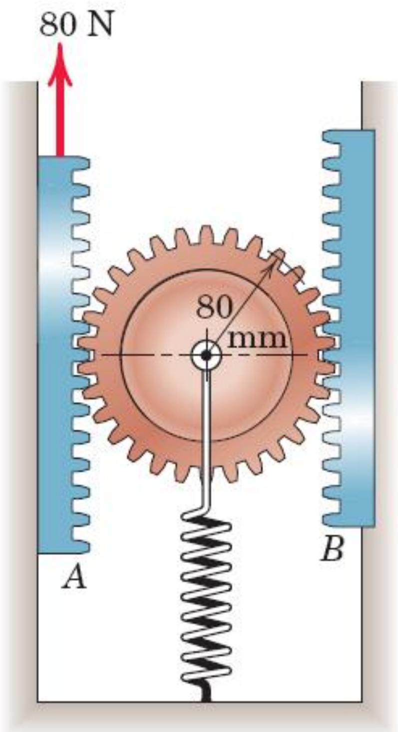
در طی تغییر مکان بسیار جزیی dx عضو A به سمت بالا ، کار انجام شده dU' بر روی مجموعه برابر 80dx خواهد بود.

این مقدار کار باید برابر مجموع تغییرات متناظر در انرژی کل مجموعه باشد.

$$[dT = \Sigma m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \bar{I}_i \alpha_i \, d\theta_i]$$

$$dT_{\text{rack}} = 3a \, dx$$

$$dT_{\text{gear}} = 2 \frac{a}{2} \frac{dx}{2} + 2(0.06)^2 \frac{a/2}{0.08} \frac{dx/2}{0.08} = 0.781a \, dx$$



$$[dV = \Sigma m_i g \, dh_i + \Sigma k_j x_j \, dx_j]$$

$$dV_{\text{rack}} = 3g \, dx = 3(9.81) \, dx = 29.4 \, dx$$

$$dV_{\text{gear}} = 2g(dx/2) = g \, dx = 9.81 \, dx$$

$$dV_{\text{spring}} = k_j x_j \, dx_j = 1200(0.04) \, dx/2 = 24 \, dx$$

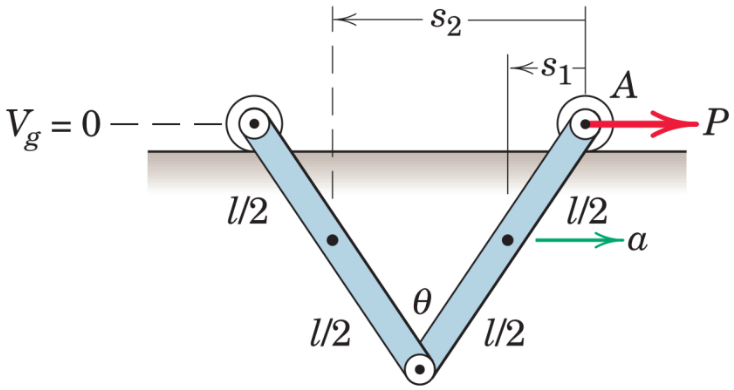
$$\boxed{80 \, dx = 3a \, dx + 0.781a \, dx + 29.4 \, dx + 9.81 \, dx + 24 \, dx}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a = 16.76/3.78 = 4.43 \text{ m/s}^2}$$

مسئله نمونه 6-13

نیروی ثابت P بر انتهای A مجموعه زیر وارد می شود. اعضای این مجموعه ، یکسان هستند. مجموعه در صفحه قایم و با شتاب افقی a به سمت راست حرکت می کند. زاویه پایای بین دو عضو را تعیین کنید.



حل:

با سنجش جابجایی های مجازی نسبت به انتهای A ، کار انجام شده توسط نیروی اعمالی در طی جابجایی مجازی برابر صفر خواهد بود.

$$\delta U' = 0$$

$$V_g = 2mg\left(-\frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

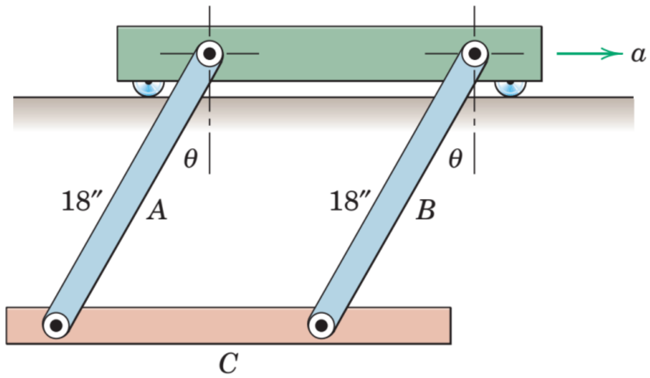
$$\delta V_g = \delta\left(-2mg\,\frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = \frac{mgl}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\delta\theta$$

$$\begin{aligned} m\bar{\mathbf{a}}\cdot\delta\bar{\mathbf{s}} &= ma(-\delta s_1) + ma(-\delta s_2) \\ &= -ma\left[\delta\left(\frac{l}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right) + \delta\left(\frac{3l}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ &= -ma\left(l\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\right) \end{aligned}$$

$$0 = -mal\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta + \frac{mgl}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\delta\theta \;\Longrightarrow\; \theta = 2\tan^{-1}\frac{2a}{g}$$

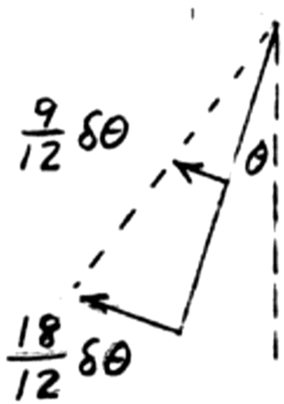
مسئله 6-158

وزن هر یک از میله های A و B برابر 8lb و وزن میله C برابر 12lb است. مطلوب است محاسبه زاویه θ وقتی به جسمی که میله ها با پین به آن متصل شده اند ، شتاب افقی پایای a برابر 4ft/sec2 داده شود.



$$V_g = -2(8)\frac{9}{12}\cos\theta - 12\frac{18}{12}\cos\theta = -30\cos\theta$$

$$\boxed{\delta V_g = 30\sin\theta\,\delta\theta}$$



$$\delta T = \sum m\bar{a}\,\delta s$$

$$= 2\frac{8}{32.2}4\left(-\frac{9}{12}\delta\theta\cos\theta\right) + \frac{12}{32.2}4\left(-\frac{18}{12}\delta\theta\cos\theta\right)$$

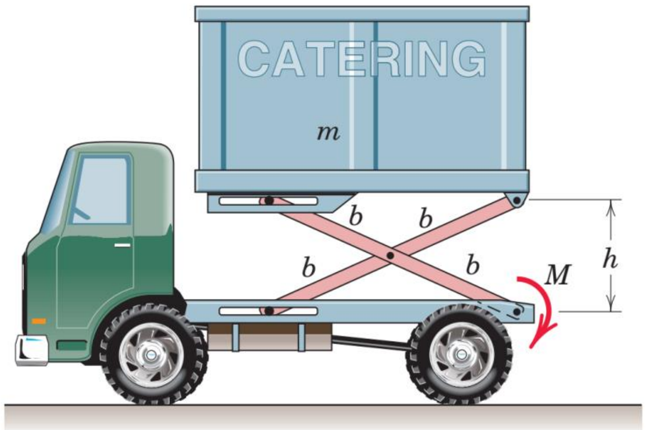
$$\boxed{\delta T = -3.73\cos\theta\,\delta\theta}$$

$$\delta T + \delta V_g = 0;\quad -3.73\cos\theta\,\delta\theta + 30\sin\theta\,\delta\theta = 0$$

$$\boxed{\theta = 7.08^\circ}$$

مسئله 6-161

جرم جعبه بار کامیون حمل غذای هواپیما با بار داخل آن m است و با وارد کردن کوپل M به سر پایینی میله ای که به شاسی کامیون متصل است ، بالا می رود. شیارهای افقی به میله بندی امکان می دهند که وقتی جعبه بالا می رود ، از هم باز شود. مطلوب است تعیین شتاب رو به بالای جعبه برحسب h به ازای مقدار ثابت M. از جرم میله ها چشم پوشی کنید.



$$dU' = dT + dV_g \; ; \; dU' = M\,d\theta$$

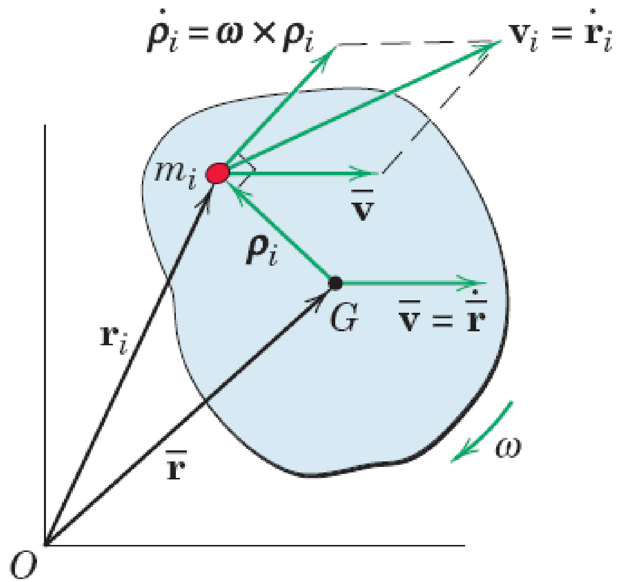
$$dT = ma\,dh = ma\,d(2b\sin\theta)$$
$$= 2mba\cos\theta\,d\theta$$

$$dV_g = mg\,dh = 2mbg\cos\theta\,d\theta$$

$$M\,d\theta = 2mb\cos\theta\,(a+g)\,d\theta \rightarrow a+g = \frac{M}{2mb\cos\theta}$$

$$\boxed{a = \frac{M}{2mb\sqrt{1-(h/2b)^2}} - g}$$

قسمت ج) ضربه و اندازه حرکت



اندازه حرکت خطی:

$$\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}} \quad \Longleftarrow \quad \text{از فصل چهارم}$$

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F}\, dt = \mathbf{G}_2$$

$$\Sigma F_x = \dot{G}_x$$
$$\Sigma F_y = \dot{G}_y$$

$$(G_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x\, dt = (G_x)_2$$
$$(G_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y\, dt = (G_y)_2$$

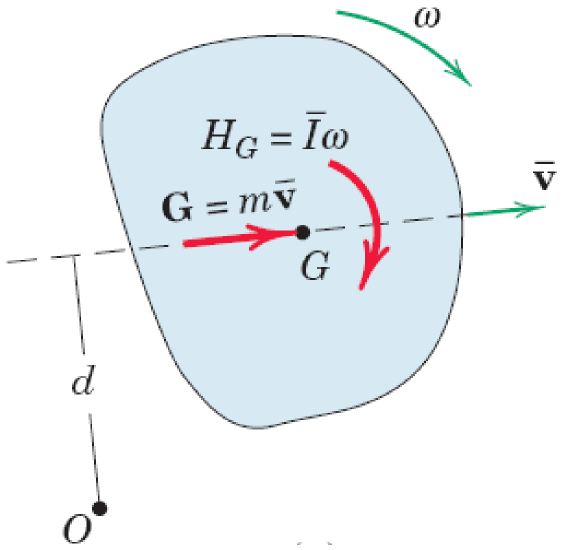
اندازه حرکت زاویه ای:

$$H_G = \bar{I}\omega \quad \Longleftarrow \quad \text{ابتدای این فصل}$$

$$\Sigma M_G = \dot{H}_G \quad \Longrightarrow \quad (H_G)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_G\, dt = (H_G)_2$$

این عبارت در هر لحظه خاص از زمان ، حول نقطه O ، که می تواند نقطه ای ثابت یا متحرک روی جسم یا خارج از جسم باشد ، صادق است.

$$\boxed{H_O = \bar{I}\omega + m\bar{v}d}$$

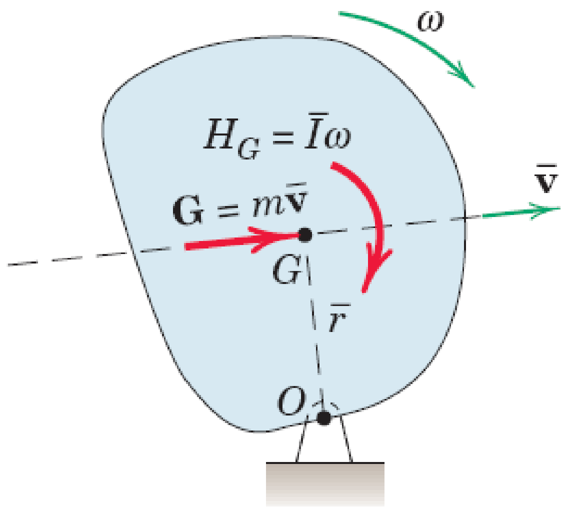


وقتی نقطه O لولای ثابت باشد:

$$\bar{v} = \bar{r}\omega$$

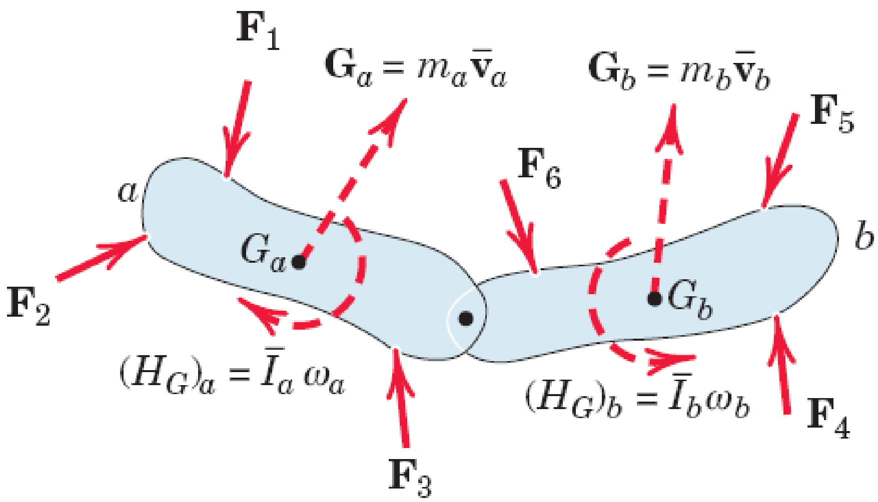
$$d = \bar{r}$$

$$H_O = (\bar{I}\omega + m\bar{r}^2\omega) \Longrightarrow \boxed{H_O = I_O\omega}$$



$$\Sigma M_O = \dot{H}_O \Longrightarrow (H_O)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O \, dt = (H_O)_2$$

اجسام صلب متصل به هم:



$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}_a + \dot{\mathbf{G}}_b + \cdots$$
$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_a + (\dot{\mathbf{H}}_O)_b + \cdots$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F}\,dt = (\Delta\mathbf{G})_{\text{system}} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{M}_O\,dt = (\Delta\mathbf{H}_O)_{\text{system}}$$

پایستگی اندازه حرکت

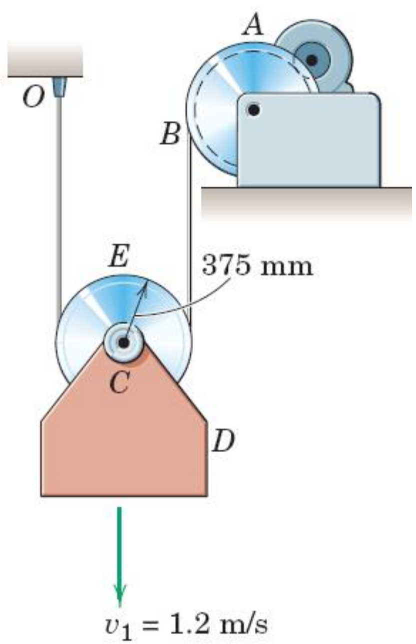
$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$$

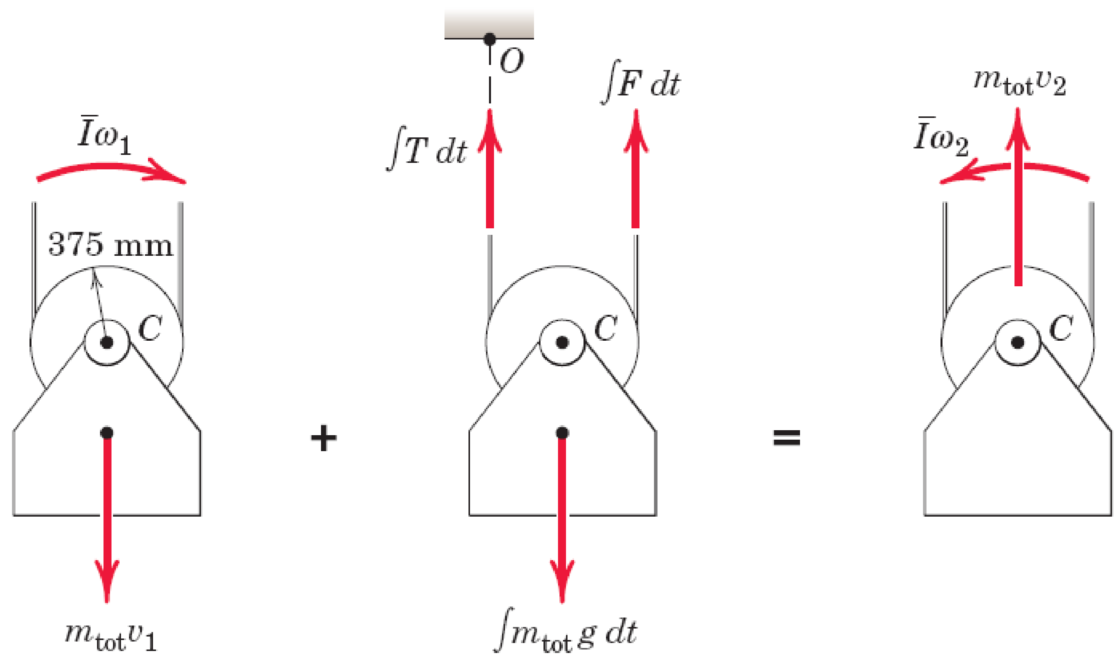
$$\sum M_o = 0 \longrightarrow (\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

$$\sum M_G = 0 \longrightarrow (\mathbf{H}_G)_1 = (\mathbf{H}_G)_2$$

مسئله نمونه 6-15

قرقره E دستگاه بالابر ، جرمی برابر 30kg دارد و شعاع ژیراسیون آن 250mm است. بار D با اندازه 40kg که توسط قرقره حمل می شود ، در لحظه اعمال گشتاوری ساعت گرد به طبلک بالابر A برای تامین نیروی ثابت F=380N در کابل B ، سرعت اولیه رو به پایین v1=1.2m/s دارد. مطلوب است محاسبه سرعت زاویه ای ω2 قرقره ، 5 ثانیه پس از اعمال گشتاور به طبلک و تعیین کشش T کابل در نقطه O در همین فاصله. از همه اصطکاک ها چشم پوشی کنید.





اندازه حرکت زاویه ای حول نقطه O $\Rightarrow (H_O)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum M_O\,dt = (H_O)_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_o \, dt = \int_0^5 \left[380 \times 0.75 - (30+40)(9.81)(0.375)\right] dt = 137.4 \quad N.m.s$$

$$(H_o)_1 = -(m_E+m_b) v_1 d - \bar{I}\omega_1 = -(30+40)(1.2)(0.375) - 30(0.25)^2\left(\frac{1.2}{0.375}\right)$$

$$= -37.5 \quad N.m.s$$

$$(H_o)_2 = (m_E+m_b) v_2 d + \bar{I}\omega_2 = (30+40)(0.375\,\omega_2)(0.375) + 30(0.25)^2\omega_2 = 11.72\,\omega_2$$

$$\Rightarrow -37.5 + 137.4 = 11.72\,\omega_2 \Longrightarrow \boxed{\omega_2 = 8.53 \ rad/s} \quad ccw$$

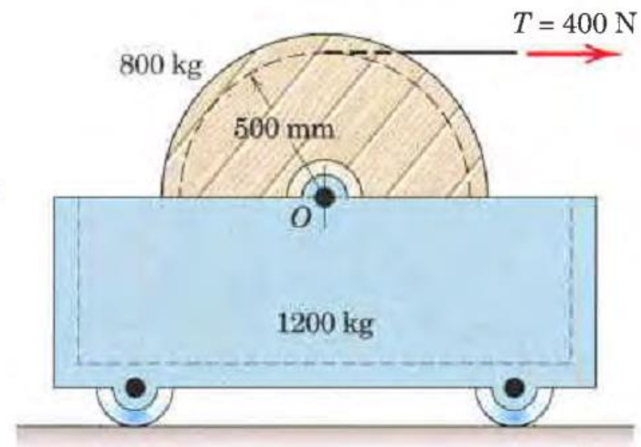
اندازه حرکت خطی سیستم $\Rightarrow G_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F \, dt = G_2$

$$70(-1.2) + \int_0^5 [T + 380 - 70 \times 9.81] dt = 70 \times (0.375 \times 8.53)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 368 \ N}$$

مسئله 6-180

جرم قرقره کابل 800kg و شعاع ژیراسیون آن حول مرکز O برابر 480mm است و در یاتاقان هایی روی گاری 1200kg نصب شده است. این گاری ابتدا با سرعت 1.5m/s به طرف چپ حرکت می کند و قرقره چرخش پادساعتگرد با سرعت زاویه ای 3rad/s دارد که در لحظه t=0 ، کشش افقی ثابت T=400N بر کابل وارد می شود. مطلوب است تعیین سرعت v گاری و سرعت زاویه ای ω قرقره ، هنگامی که t=10s.



System $\xrightarrow{+}$ $\quad \int_0^{10} \Sigma F\,dt = \Delta G \Rightarrow 400 \times 10 = (1200 + 800)\,(v - (-1.5))$

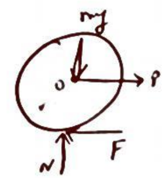
$$\Rightarrow \boxed{v = 0.5\ m/s \rightarrow}$$

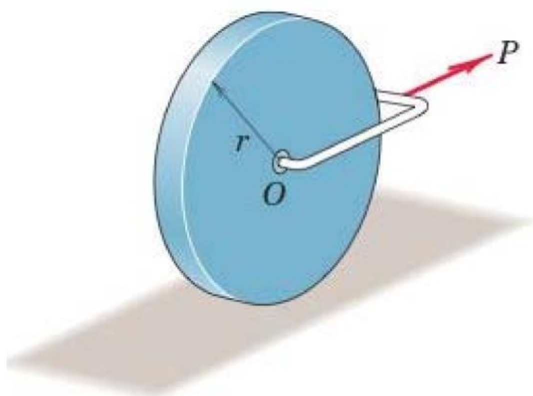
$\circlearrowright + \Rightarrow \int_0^{10} \Sigma M\,dt = \Delta H = \bar{I}(\omega_2 - \omega_1) \Rightarrow (400 \times 0.5) \times 10 = 800 \times 0.48^2\,(\omega - (-3))$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = 7.85\ rad/s \quad cw}$$

مسئله 176-6

نیروی افقی ثابت P به مرکز O دیسک دایره ای (با جرم m) وارد می شود. حرکت دیسک از حالت سکون آغاز شده و به مدت t ثانیه بر روی سطح افقی ادامه می یابد (بدون لغزش). سرعت v مرکز O را برحسب t بیان کنید.





$$\int \Sigma F_x\,dt = \Delta G_x \Rightarrow (P-F)\,t = m(v_2-0)$$

$$\int \Sigma M_O\,dt = \Delta H_O \Rightarrow (Fr)\,t = \tfrac{1}{2}mr^2\left(\tfrac{v_2}{r}-0\right)$$

$$\Delta H_O \rightarrow I_O(\omega_2-\omega_1)$$

با حذف F از روابط $\Rightarrow$ $\boxed{v=\dfrac{2Pt}{3m}}$

مسئله 6-191

طرح زیر برای کاهش خودکار سرعت سیستم های دورانی در نظر گرفته شده است. در آغاز ، بازوها در موقعیت AB قرار داشته و مجموعه با سرعت 600 rpm حول محور O دوران می کند. پس از آزادشدن ، بازوها چرخیده و در موقعیت خط چین ثابت می شوند. جرم دیسک برابر 30 kg بوده و شعاع ژیراسیون آن حول O برابر 90 mm است. هر یک از بازوها نیز دارای طول 160 mm و جرم 0.84 kg بوده و می توان آن ها را میله های باریک یکنواختی در نظر گرفت. پس از بازشدن بازوها ، سرعت دورانی مجموعه و انرژی تلف شده سیستم را تعیین کنید.

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow \Delta H_O = 0 \Rightarrow H_{O_1} = H_{O_2}$$

$$\left(\tfrac{1}{12} mL^2 + md^2\right)$$

$$(I_O)_{\text{هرمیله}} = \tfrac{1}{12}(0.84)(0.16)^2 + (0.84)(0.11^2 + 0.08^2) = 0.01733 \ kg.m^2$$

$$(I_O)_{\text{دیسک}} = 30(0.09)^2 = 0.243 \ kg.m^2$$

$$\omega_1 = 600 \times 2\pi/60 = 62.8 \ rad/s$$

$$\Rightarrow H_{O_1} = I_O \omega_1 = (4 \times 0.01733 + 0.243) \times 62.8$$

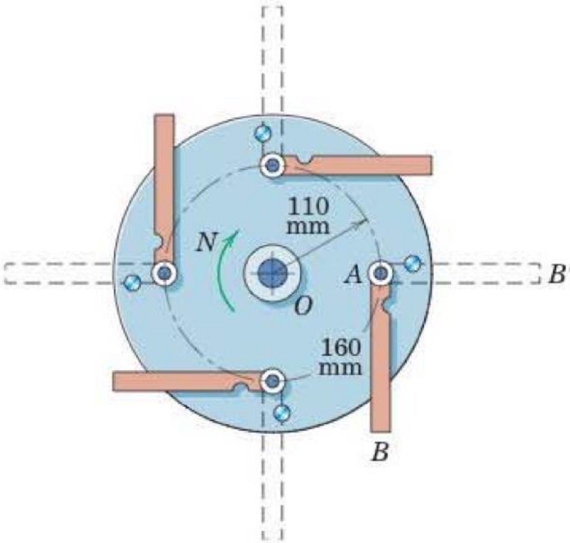
$$\Rightarrow \boxed{H_{O_1} = 19.62 \ kg.m^2/s}$$

گیرافتادگی

$$(I_O)_{\text{هرمیله}} = \tfrac{1}{12}(0.84)(0.16)^2 + (0.84)(0.11 + 0.08)^2 = 0.0321 \ kg.m^2$$

$$(I_O)_{\text{دیسک}} = 0.243 \ kg.m^2$$

$$H_{O_2} = [4 \times 0.0321 + 0.243]\omega_2 = 0.371 \omega_2$$



Problem 6/191

$$H_{o_1} = H_{o_2} \Rightarrow \omega_2 = 52.8\ rad/s$$

$$\boxed{\omega_2 = 504\ rpm}$$

$$T_1 = \sum \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2}(4\times 0.01733 + 0.243)(62.8)^2 = 617\ J$$

$$T_2 = \sum \frac{1}{2} I'_o \omega'^2 = \frac{1}{2}(4\times 0.0321 + 0.243)(52.8)^2 = 518\ J$$

$$\Rightarrow |\Delta E| = T_1 - T_2 = 98.1\ J$$