



دانشکده علوم ریاضی

گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۲/۲/۱۱

وقت : ۷۵ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

امتحان میان ترم درس مبانی علوم ریاضی

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۲ - ۱۴۰۱

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- گزاره $((\sim p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)) \rightarrow p$ در کدام حالتها نادرست است. ۱۵ نمره

سوال ۲- اگر p یک گزاره درست ، q یک گزاره نادرست و r یک گزاره دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره های زیر را مشخص کنید. ۲۰ نمره

- | | |
|--|---|
| i) $\sim (p \wedge \sim q) \wedge r$ | ii) $(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim (p \vee q)$ |
| iii) $(p \leftrightarrow \sim q) \vee r$ | iv) $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$ |

سوال ۳- تعداد زیرمجموعه های چهار عضوی مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ که شامل ۸ باشد ولی شامل ۴ نباشد را بیابید. ۱۵ نمره

سوال ۴- اگر A ، B و C سه مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند ، $((A - B)^C - (B - C)) - C$ با کدامیک از مجموعه های زیر برابر است؟ ۲۰ نمره

$D_1 = (A^C \cup B^C) - C$	$D_2 = C - (A \cup B)$
$D_3 = B - (A \cup C)$	$D_4 = A^C - (B \cup C)$

سوال ۵- ثابت کنید که اگر ۴ عدد از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16\}$ انتخاب کنیم ، در میان آنها دو عدد وجود دارد که حاصل ضرب آنها مربع کامل است. ۱۵ نمره

موفق باشید



پاسخ سوال ۱: روش اول: می توان جدول ارزش را با چهار سطر کامل کرد و به جواب رسید.

می دانیم که یک گزاره شرطی وقتی نادرست است که مقدم آن درست و تالی آن نادرست باشد. پس $(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$ باید درست و p باید نادرست باشد.

روش دوم: می توان دید که $(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \equiv (\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim p) \equiv q \leftrightarrow \sim p$

پس برای درستی $(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$ باید گزاره $q \leftrightarrow \sim p$ درست باشد و این گزاره وقتی درست است که $\sim p$ و q هم ارزش باشند و چون p نادرست است پس q باید درست باشد.

روش سوم: برای اینکه گزاره $(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$ درست باشد باید هر دو گزاره $\sim p \rightarrow q$ و $p \rightarrow \sim q$ درست باشند. چون p نادرست است پس گزاره $p \rightarrow \sim q$ همواره درست است اما گزاره $\sim p \rightarrow q$ وقتی درست است که q درست باشد. در نتیجه، گزاره داده شده فقط وقتی نادرست است که p نادرست و q درست باشد.

پاسخ سوال ۲: (i) چون گزاره $(p \wedge \sim q) \wedge r$ نادرست است پس $(p \wedge \sim q) \wedge r$ نادرست است.

(ii) چون گزاره $\sim p \vee \sim q$ درست و گزاره $(p \vee q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$ نادرست است پس گزاره $(p \vee q) \leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$ نادرست است.

(iii) گزاره $p \leftrightarrow \sim q$ درست است پس گزاره $(p \leftrightarrow \sim q) \vee r$ هم درست است.

(iv) چون هر دو گزاره $p \leftrightarrow \sim q$ و $p \rightarrow \sim q$ درست هستند پس گزاره $(p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \sim q)$ هم درست است.

پاسخ سوال ۳: برای حل این سوال کافی است که دو عدد ۴ و ۸ را از مجموعه حذف کرده و تعداد زیرمجموعه های سه عضوی مجموعه جدید

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \quad \text{را بشماریم. این تعداد برابر است با:}$$

پاسخ سوال ۴: ابتدا با یک مثال، در مورد جواب درست تحقیق می کنیم. قرار می دهیم:

$$A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}, U = \{1, 2, 3\}$$

$$((A - B)^C - (B - C)) - C = \emptyset \quad \text{و همچنین} \quad D_1 = \{1, 2\}, D_2 = \{3\}, D_3 = \{2\}, D_4 = \emptyset$$

برای اینکه نشان دهیم عبارت داده شده همواره با D_4 برابر است می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} ((A - B)^C - (B - C)) - C &= ((U - (A - B)) - (B - C)) - C = U - ((A - B) \cup (B - C) \cup C) \\ &= U - ((A - B) \cup (B \cup C)) = U - (A \cup B \cup C) = (A \cup B \cup C)^C \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$D_4 = A^C - (B \cup C) = (U - A) - (B \cup C) = U - (A \cup (B \cup C)) = U - (A \cup B \cup C) = (A \cup B \cup C)^C$$

و مساله حل شده است.

پاسخ سوال ۵: سعی می کنیم بزرگترین مجموعه ممکن را بسازیم که حاصل ضرب هیچ دو عضوی از آن مربع کامل نباشد.

اگر عدد ۱ را انتخاب کنیم آنگاه هیچکدام از عددهای ۴ و ۹ و ۱۶ را نباید انتخاب کنیم. در حقیقت از مجموعه چهار عضوی $\{1, 4, 9, 16\}$ فقط یک عدد می توان انتخاب کرد. اگر عدد ۳ را انتخاب کنیم آنگاه عدد ۱۲ را نباید انتخاب کنیم. پس از مجموعه دو عضوی $\{3, 12\}$ هم فقط یک عدد می توان انتخاب کرد. انتخاب عدد ۸ هیچ مشکلی ایجاد نخواهد کرد.

بنابر این، از هر یک از سه مجموعه $\{1, 4, 9, 16\}$ و $\{3, 12\}$ و $\{8\}$ حداکثر می توان یک عدد انتخاب کرد.

اکنون طبق اصل لانه کبوتری، در هر زیرمجموعه ۴ عضوی از مجموعه داده شده، حداقل از یک مجموعه دو عدد انتخاب شده است و حاصل ضرب آنها مربع کامل است.