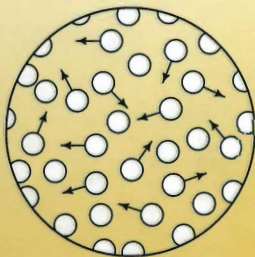


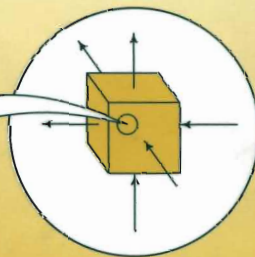
رابت بايرن برِد  
وارن ای. استوارت  
ادوين ان. لایت فوت

ویراست دوم

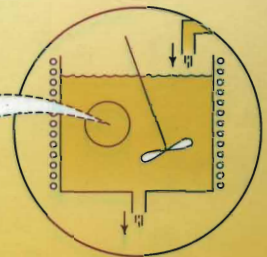
# پدیده‌های انتقال



مولکولی



میکروسکوپی



ماکروسکوپی

ترجمهٔ محمدرضا افضل‌لی



نشر کتاب دانشگاهی

## پدیده‌های انتقال





نشر کتاب دانشگاهی

رابرت بایرن برد • وارن ای. استوارت • ادوین ان. لایت فوت

### پدیده‌های انتقال

ترجمه محمدرضا افضلی

فرزانه فرزانیان	ویرایش و نمونه‌خوانی
مصطفی داوودی‌نژاد	حروف چینی و صفحه‌آرایی
الهام احمدی	تصویر
بشیرا گل محمدی	لیتوگرافی
افیمانه کریمی	گرافیک
فاران اتحاد	فاران اتحاد

۱۳۸۹	چاپ اول
دانش و تصویر	لیتوگرافی
فرهنگ معاصر	چاپ و صحافی
۱۰۶۴، وزیر	تعداد صفحات

۲۰۰۰ نسخه

۲۴۰۰۰ تومان

شابک ۹-۴۴-۵۱۰۷-۶۰۰-۹۷۸-۹۷۸-۶۰۰-۵۱۰۷-۴۴-۹ ISBN 978-600-5107-44-9



مرکز پخش: خیابان بزرگمهر، بین وصال و قدس، شماره ۸۷، تلفکس ۶۶۴۶۷۲۲۶  
 فروشگاه روز نو: خیابان انقلاب، بین فخرزادی و دانشگاه، شماره ۱۲۰۲، تلفکس ۶۶۹۵۰۵۲۰  
 Website: www.ketabedane shgahi.com E-mail: info@ketabedane shgahi.com

حقوق چاپ و نشر دائم این اثر محفوظ و مخصوص نشر کتاب دانشگاهی است.

## پیشگفتار

انتقال اندازه حرکت، انتقال گرما و انتقال جرم، هر یک به طور مستقل و مدت‌ها قبل، به عنوان شاخه‌های علم فیزیکی پی‌ریزی شدند، اما امروزه مطالعه آن‌ها به صورت یکپارچه، به عنوان یکی از علوم بنیادی مهندسی، جایگاه خاصی یافته است. این علم، که نزدیک به نیم قرن عمر دارد، هم‌چنان به رشد خود ادامه می‌دهد و کاربردهای تازه‌ای در حوزه‌های جدیدی مانند فناوری زیستی، بیوتکنولوژی، میکروالکترونیک، فناوری نانو، (نانوتکنولوژی)، و علوم پلیمر پیدا می‌کند. علم پدیده‌های انتقال به اندازه‌ای سریع و همه‌جانبه تکامل یافته است که نمی‌توان آن را به طور کامل در یک کتاب بررسی کرد. ما مثال‌های متعدد و متنوعی در کتاب گنجانده‌ایم، اما باز هم ضرورتاً بر جنبه‌های بنیادی این حوزه تأکید می‌کنیم. به علاوه، در گفتگو با همکاران دریافته‌ایم که پدیده‌های انتقال به شیوه‌های گوناگون و در سطوح مختلف تدریس می‌شود. مطلب کافی برای ارائه دو درس، یکی مقدماتی و دیگری پیشرفته، در کتاب گنجانده‌ایم. درس مقدماتی، به‌نوبه خود، قابل تفکیک به دو درس، یکی درباره انتقال اندازه حرکت، و دیگری درباره انتقال گرما و جرم است؛ به این ترتیب فرصت بیشتری برای به‌کارگیری این مطالب در کاربردهای عملی فراهم می‌شود. مشخص کردن بعضی از بخش‌ها با نشانه (o) به معنای اختیاری و بعضی دیگر با نشانه (•) به معنای پیشرفته، راهنمای مفیدی برای دانشجویان و مدرسان است.

پدیده‌های انتقال، که مدت‌ها به عنوان موضوعی تقریباً ریاضی مطرح بود، به سبب مفهوم فیزیکی‌اش اهمیت بیشتری دارد. جوهر این موضوع را بیان دقیق و موجز اصول پایستگی بقا، همراه با عبارات‌های شار، با تأکید بر شباهت‌ها و تفاوت‌های بین این سه فرایند انتقال، تشکیل می‌دهد. غالباً خاص کردن هر مسئله به شرایط مرزی و خواص فیزیکی می‌تواند بینش سودمندی را با کم‌ترین تلاش، ایجاد کند. با وجود این، زبان پدیده‌های انتقال، زبان ریاضی است. در این کتاب فرض کرده‌ایم که دانشجو با معادله‌های دیفرانسیل عادی و جبر برداری مقدماتی آشنایی دارد. کاربرد معادله‌های دیفرانسیل جزئی را، همراه با توضیح کافی، نشان داده‌ایم تا دانشجوی علاقه‌مند بتواند بر مطالب ارائه شده تسلط یابد. روش‌های عددی را، با وجود اهمیت آشکار آن‌ها، کنار گذاشته‌ایم تا دانشجو بیشتر روی درک بنیادی مطلب متمرکز شود.

در سرتاسر کتاب بر نقل قول از نوشته‌های انتشار یافته، هم به منظور استقرار پدیده‌های انتقال در بافت تاریخی مناسب خود، و هم با هدف راهنمایی خواننده در جهت آشنایی با مطالب و اصول مرتبط با این حوزه و کاربردهای آن، تأکید کرده‌ایم. به‌ویژه به معرفی پیشگامانی اشتیاق داشته‌ایم که خود را بسیار مدیون آنان می‌دانیم و هنوز هم از آنان الهام می‌گیریم. این انسان‌ها با ما تفاوت چندانی نداشتند و شاید بعضی از خوانندگان این کتاب نیز در ساختن آینده سهمی به اندازه آنان داشته باشند.

بدیهی است که از زمان انتشار نخستین ویراست این کتاب در بیش از چهل سال قبل، هم نیازهای خوانندگان و هم ابزارهای آنان تغییر کرده است. به جد کوشیده‌ایم که این کتاب را، در محدوده حجم کتاب و توانایی خود، روزآمد کنیم و سعی کرده‌ایم پیشرفت‌های آینده را نیز پیش‌بینی کنیم و در نظر بگیریم. تغییرات مهم این کتاب، نسبت به ویراست نخست، عبارت‌اند از:

- خواص انتقالی سیستم‌های دوفاز
- استفاده از «شارهای مرکب» برای نوشتن موازنه‌های پوسته‌ای و معادله‌های تغییر
- پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای و پیامدهای آن
- اشتقاق کامل موازنه انرژی مکانیکی
- بررسی مفصل نظریه لایه مرزی

- پراکنش تیلر
- بحث کامل تری در مورد انتقال تلاطمی
- تحلیل فوریه انتقال تلاطمی هنگام بالا بودن Pr یا Sc
- مطالب بیشتر تری در مورد ضرایب انتقال گرما و جرم
- بحث مفصل تری درباره تحلیل ابعادی و مقیاس بندی
- روش های ماتریسی برای انتقال جرم چندجزئی
- سیستم های یونی، جداسازهای غشایی و محیط های متخلخل
- رابطه بین معادله بولتزمن و معادله های پیوستار
- استفاده از قرارداد «Q+W» در بحث انرژی، به منظور ایجاد سازگاری با کتاب های درسی معروف در حوزه های فیزیک و شیمی فیزیک.

اما همیشه این جوان ترین نسل حرفه ای هاست، که آینده را واضح تر می بیند و موظف است میراث ناقص خود را تکمیل کند.

هنوز کارهای بسیاری مانده که باید انجام داد، اما می توان انتظار داشت که فایده پدیده های انتقال بیشتر شود و کم تر نشود. هریک از فناوری های مهیج نوین که در دنیای اطراف ما به بار می نشیند، تابع قوانین پایستگی و عبارت های شار، همراه با اطلاعاتی در مورد ضرایب انتقال است. تردیدی نیست که تطبیق فرمول بندی مسئله و روش های حل آن با این عرصه های جدید، مدت ها ذهن مهندسان را به خود مشغول خواهد کرد و ما فقط می توانیم امیدوار باشیم که اساس مناسبی برای شروع کار آن ها پی افکنده ایم.

مدیسون، ویسکانسین  
رابرت بایرن برد  
وارن ای. استوارت  
ادوین ان. لایت فوت

نکته هایی در مورد چاپ تصحیح شده ویراست دوم:

از زمان انتشار ویراست دوم این کتاب در سال ۲۰۰۲، نویسندگان اشتباهاتی در آن یافته اند که بعضی مهم و بعضی دیگر پیش پا افتاده اند. کوشیده ایم که این اشتباهات را در ویراست جدید تصحیح کنیم. به علاوه، خوانندگان زیادی برای ارائه بهتر مطالب یا تصحیح اشتباهات یاد شده پیشنهادهایی داده اند. نامه هایی از دانشجویان، مدرسان، و شاغلان در حوزه های مرتبط دریافت کرده ایم. از نامه های آنان سپاس گزاریم و از مکاتبه با آنان لذت برده ایم. از هر نوع مشکل یا آشفتگی ناشی از اشتباهات خود عمیقاً متأسفیم و کوشیده ایم که در این ویراست تصحیح شده، تا حد ممکن، چیزی از آن اشتباهات باقی نگذاریم. ناشر سخاوتمندانه ما را در این راه همراهی کرده است، هم چنین از شکیبایی همه کسانی که به نوعی دست اندرکار بوده اند صمیمانه سپاس گزاریم.

سپتامبر ۲۰۰۶  
رابرت بایرن برد  
وارن ای. استوارت  
ادوین ان. لایت فوت

## فهرست

۱	فصل ۰ موضوع کتاب پدیده‌های انتقال
۱	۱.۰ پدیده‌های انتقال کدام‌اند؟
۲	۲.۰ سه سطح بررسی پدیده‌های انتقال
۴	۳.۰ قوانین پایستگی
۷	۴.۰ جمع‌بندی
۹	فصل ۱ ویسکوزیته و مکانیسم‌های انتقال اندازه حرکت
۹	۱.۱ قانون ویسکوزیته نیوتون (انتقال مولکولی اندازه حرکت)
۱۴	۲.۱ تعمیم قانون ویسکوزیته نیوتون
۲۰	۳.۱ وابستگی ویسکوزیته به فشار و دما
۲۲	۴.۱ نظریه مولکولی ویسکوزیته گازها در چگالی پایین
۲۹	۵.۱ نظریه مولکولی ویسکوزیته مایعات
۳۲	۶.۱ ویسکوزیته سوسپانسیون‌ها و امولسیون‌ها
۳۵	۷.۱ انتقال همرفتی اندازه حرکت
۴۳	فصل ۲ موازنه لایه‌ای اندازه حرکت و توزیع سرعت در جریان آرام
۴۴	۱.۲ موازنه لایه‌ای اندازه حرکت و شرایط مرزی
۴۵	۲.۲ جریان فیلم ریزان
۵۱	۳.۲ جریان در لوله مدور
۵۷	۴.۲ جریان در حلقه
۶۰	۵.۲ جریان دو سیال امتزاج‌ناپذیر مجاور هم
۶۲	۶.۲ جریان خزشی حول یک کره
۸۱	فصل ۳ معادله‌های تغییر برای سیستم‌های هم‌دما
۸۳	۱.۳ معادله پیوستگی
۸۵	۲.۳ معادله حرکت
۸۷	۳.۳ معادله انرژی مکانیکی
۸۸	۴.۳ معادله اندازه حرکت زاویه‌ای
۸۹	۵.۳ معادله‌های تغییر برحسب مشتق مادی
۹۳	۶.۳ استفاده از معادله‌های تغییر برای حل مسئله‌های جریان
۱۰۵	۷.۳ تحلیل ابعادی معادله‌های تغییر

۱۳۱	فصل ۴ توزیع سرعت با بیش از یک متغیر مستقل
۱۳۱	۱.۴ جریان وابسته به زمان سیالات نیوتونی
۱۳۹	۲.۴ حل مسئله با استفاده از تابع جریان
۱۴۴	۳.۴ جریان سیالات غیرویسکوز با استفاده از پتانسیل سرعت
۱۵۳	۴.۴ جریان در نزدیکی سطوح جامد طبق نظریه لایه مرزی
۱۷۷	فصل ۵ توزیع سرعت در جریان متلاطم
۱۷۹	۱.۵ مقایسه جریان‌های آرام و متلاطم
۱۸۱	۲.۵ معادله‌های هموارشده زمانی تغییر برای سیالات تراکم‌ناپذیر
۱۸۴	۳.۵ توزیع سرعت هموارشده زمانی در نزدیکی جدار
۱۸۸	۴.۵ عبارتهای تجربی برای شار اندازه حرکت تلاطمی
۱۹۱	۵.۵ جریان متلاطم در مجراها
۱۹۴	۶.۵ جریان متلاطم در جت‌ها
۲۰۵	فصل ۶ انتقال میان‌فازی در سیستم‌های هم‌دما
۲۰۶	۱.۶ تعریف ضرایب اصطکاک
۲۰۸	۲.۶ ضرایب اصطکاک برای جریان در لوله‌ها
۲۱۴	۳.۶ ضرایب اصطکاک برای جریان در اطراف کره‌ها
۲۱۸	۴.۶ ضرایب اصطکاک برای ستون‌های پر شده
۲۳۱	فصل ۷ موازنه‌های ماکروسکوپی سیستم‌های جریان هم‌دما
۲۳۳	۱.۷ موازنه ماکروسکوپی جرم
۲۳۵	۲.۷ موازنه ماکروسکوپی اندازه حرکت
۲۳۶	۳.۷ موازنه ماکروسکوپی اندازه حرکت زاویه‌ای
۲۳۸	۴.۷ موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی
۲۴۱	۵.۷ تخمین اتلاف ویسکوز
۲۴۴	۶.۷ استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت پایا
۲۵۴	۷.۷ استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت ناپایا
۲۵۹	۸.۷ استنتاج موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی
۲۷۱	فصل ۸ مایعات پلیمری
۲۷۳	۱.۸ نمونه‌هایی از رفتار مایعات پلیمری
۲۷۷	۲.۸ سیال‌سنجی و توابع ماده
۲۸۱	۳.۸ ویسکوزیته غیر نیوتونی و مدل‌های تعمیم‌یافته نیوتون

۲۸۶	کشسانی و مدل‌های ویسکوکشسان خطی	۰۴.۸
۲۹۰	مشتق‌های هم‌چرخشی و مدل‌های ویسکوکشسان غیرخطی	۰۵.۸
۲۹۵	نظریه‌های مولکولی برای مایعات پلیمری	۰۶.۸
۳۰۷	<b>فصل ۹ رسانندگی گرمایی و مکانیسم‌های انتقال انرژی</b>	
۳۰۸	۱.۹ قانون رسانش گرمای فوریه (انتقال مولکولی انرژی)	
۳۱۴	۲.۹ وابستگی رسانندگی گرمایی به دما و فشار	
۳۱۶	۰۳.۹ نظریه رسانندگی گرمایی گازها در چگالی پایین	
۳۲۲	۰۴.۹ نظریه رسانندگی گرمایی مایعات	
۳۲۴	۰۵.۹ رسانندگی گرمایی جامدات	
۳۲۵	۰۶.۹ رسانندگی گرمایی مؤثر جامدات مرکب	
۳۲۸	۷.۹ انتقال همرفتی انرژی	
۳۲۹	۸.۹ کار مربوط به حرکت‌های مولکولی	
۳۳۷	<b>فصل ۱۰ موازنه‌های لایه‌ای انرژی و توزیع دما در جامدات و جریان آرام</b>	
۳۳۸	۱.۱۰ موازنه‌های لایه‌ای انرژی؛ شرایط مرزی	
۳۳۹	۲.۱۰ رسانش گرما با منبع گرمای الکتریکی	
۳۴۳	۳.۱۰ رسانش گرما با منبع گرمای هسته‌ای	
۳۴۵	۴.۱۰ رسانش گرما با منبع گرمای ویسکوز	
۳۴۷	۵.۱۰ رسانش گرما با منبع گرمای شیمیایی	
۳۵۱	۶.۱۰ رسانش گرما از طریق جدارهای مرکب	
۳۵۴	۷.۱۰ رسانش گرما در پره خنک‌کن	
۳۵۷	۸.۱۰ همرفت واداشته	
۳۶۳	۹.۱۰ همرفت آزاد	
۳۸۵	<b>فصل ۱۱ معادله‌های تغییر برای سیستم‌های غیرهم‌دما</b>	
۳۸۶	۱.۱۱ معادله انرژی	
۳۸۸	۲.۱۱ صورت‌های خاص معادله انرژی	
۳۹۱	۳.۱۱ معادله بوسینسک حرکت برای همرفت واداشته و آزاد	
۳۹۲	۴.۱۱ کاربرد معادله‌های تغییر برای حل مسئله‌های حالت پایا	
۴۰۸	۵.۱۱ تحلیل بعدی معادله‌های تغییر برای سیستم‌های غیرهم‌دما	
۴۳۳	<b>فصل ۱۲ توزیع دما با بیش از یک متغیر مستقل</b>	
۴۳۳	۱.۱۲ رسانش ناپایا در جامدات	



۴۴۱	.....	رسانش پایا در جریان تراکم‌ناپذیر آرام	۰۲.۱۲
۴۴۵	.....	جریان پتانسیل پایای گرما در جامدات	۰۳.۱۲
۴۴۷	.....	نظریه لایه مرزی برای جریان غیرهم‌دما	۰۴.۱۲
۴۷۳	.....	<b>فصل ۱۳ توزیع دما در جریان متلاطم</b>	
۴۷۴	.....	۱.۱۳ معادله‌های هموارشده زمانی تغییر برای جریان تراکم‌ناپذیر غیرهم‌دما	
۴۷۵	.....	۲.۱۳ توزیع دمای هموارشده زمانی در نزدیکی جدار	
۴۷۶	.....	۳.۱۳ روابط تجربی برای شار گرمای متلاطمی	
۴۷۸	.....	۰۴.۱۳ توزیع دما برای جریان متلاطم داخل لوله	
۴۸۱	.....	۰۵.۱۳ توزیع دما برای جریان متلاطم در جت	
۴۸۳	.....	۰۶.۱۳ تحلیل فوریه از انتقال انرژی در جریان داخل لوله به‌ازای اعداد پرانتل بزرگ	
۴۹۱	.....	<b>فصل ۱۴ انتقال میان‌فازی در سیستم‌های غیرهم‌دما</b>	
۴۹۲	.....	۱.۱۴ تعریف ضرایب انتقال گرما	
۴۹۷	.....	۲.۱۴ محاسبات تحلیلی ضرایب انتقال گرما برای همرفت واداشته از میان لوله‌ها و شکاف‌ها	
۵۰۲	.....	۳.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای همرفت واداشته در لوله‌ها	
۵۰۸	.....	۴.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای همرفت واداشته در اطراف اجسام غوطه‌ور	
۵۱۱	.....	۵.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای همرفت واداشته از میان بسترهای پر شده	
۵۱۳	.....	۰۶.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای همرفت آزاد و مختلط	
۵۱۷	.....	۰۷.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای چگالش بخار خالص روی سطوح جامد	
۵۲۹	.....	<b>فصل ۱۵ موازنه‌های ماکروسکوپی در سیستم‌های غیرهم‌دما</b>	
۵۳۰	.....	۱.۱۵ موازنه ماکروسکوپی انرژی	
۵۳۲	.....	۲.۱۵ موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی	
۵۳۴	.....	۳.۱۵ کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی در حل مسئله‌های حالت‌پایا با توزیع سرعت تخت	
۵۳۷	.....	۴.۱۵ صورت‌های $d$ موازنه ماکروسکوپی	
	.....	۰۵.۱۵ کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی در حل مسئله‌های حالت‌پایا	
۵۴۳	.....	و مسئله‌های با توزیع سرعت غیرتخت	
۵۶۹	.....	<b>فصل ۱۶ انتقال انرژی از طریق تابش</b>	
۵۷۰	.....	۱.۱۶ طیف تابش الکترومغناطیسی	
۵۷۲	.....	۲.۱۶ جذب و گسیل در سطوح جامد	
۵۷۵	.....	۳.۱۶ قانون توزیع پلانک، قانون جابه‌جایی وین، و قانون استفان-بولتزمن	
۵۷۹	.....	۴.۱۶ تابش مستقیم بین اجسام سیاه در خلأ در دماهای مختلف	

۵۸۵	تابش بین اجسام غیرسیاه در دماهای مختلف	۵.۱۶
۵۹۰	انتقال انرژی تابشی در محیط‌های جاذب	۶.۱۶
۵۹۷	فصل ۱۷ نفوذ و مکانیسم‌های انتقال جرم	
۵۹۸	۱.۱۷ قانون فیک برای نفوذ دوتایی (انتقال جرم مولکولی)	
۶۰۵	۲.۱۷ وابستگی ضریب نفوذ به دما و فشار	
۶۱۰	۳.۱۷ نظریه نفوذ در گازها در چگالی پایین	
۶۱۴	۴.۱۷ نظریه نفوذ در مایعات دوتایی	
۶۱۸	۵.۱۷ نظریه نفوذ در سوسپانسیون‌های کلئیدی	
۶۱۹	۶.۱۷ نظریه نفوذ در پلیمرها	
۶۲۰	۷.۱۷ انتقال جرم و انتقال مولی از طریق همرفت	
۶۲۳	۸.۱۷ جمع‌بندی شارهای جرمی و مولی	
۶۲۵	۹.۱۷ معادلات ماکسول-استفان برای نفوذ چندجزئی در گازها در چگالی پایین	
۶۳۱	فصل ۱۸ توزیع غلظت در جامدات و در جریان آرام	
۶۳۳	۱.۱۸ موازنه لایه‌ای جرم؛ شرایط مرزی	
۶۳۴	۲.۱۸ نفوذ در فیلم گاز ساکن	
۶۴۰	۳.۱۸ نفوذ با واکنش شیمیایی ناهمگن	
۶۴۳	۴.۱۸ نفوذ با واکنش شیمیایی همگن	
۶۴۷	۵.۱۸ نفوذ در فیلم مایع ریزان (جذب گاز)	
۶۵۲	۶.۱۸ نفوذ در فیلم مایع ریزان (انحلال جامد)	
۶۵۴	۷.۱۸ نفوذ و واکنش شیمیایی در کاتالیزگر متخلخل	
۶۵۷	۸.۱۸ نفوذ در سیستم گازی سه‌جزئی	
۶۷۷	فصل ۱۹ معادله‌های تغییر برای سیستم‌های چندجزئی	
۶۷۷	۱.۱۹ معادله‌های پیوستگی برای مخلوط چندجزئی	
۶۸۱	۲.۱۹ خلاصه معادله‌های چندجزئی تغییر	
۶۸۵	۳.۱۹ خلاصه شارهای چندجزئی	
۶۸۸	۴.۱۹ استفاده از معادله‌های تغییر برای مخلوط‌ها	
۶۹۶	۵.۱۹ تحلیل ابعادی معادله‌های تغییر برای مخلوط‌های دوتایی	
۷۱۱	فصل ۲۰ توزیع غلظت با بیش از یک متغیر مستقل	
۷۱۲	۱.۲۰ نفوذ وابسته به زمان	
۷۲۳	۲.۲۰ انتقال حالت پایا در لایه‌های مرزی دوتایی	

۷۳۴	نظریه لایه مرزی دوتایی برای جریان در اطراف اجسام	۰۳.۲۰
۷۳۹	انتقال جرم لایه مرزی با حرکت فصل مشترکی پیچیده	۰۴.۲۰
۷۴۵	پراکنش تیلر در جریان آرام در لوله	۰۵.۲۰
۷۶۳	فصل ۲۱ توزیع‌های غلظت در جریان متلاطم	
۷۶۳	۱.۲۱ نوسانات غلظت و غلظت هموار شده زمانی	
۷۶۴	۲.۲۱ هموارسازی زمانی معادله پیوستگی A	
۷۶۵	۳.۲۱ عبارتهای شبه تجربی برای شار جرمی تلاطمی	
۷۶۶	۰۴.۲۱ تقویت انتقال جرم توسط واکنش مرتبه اول در جریان متلاطم	
۷۷۰	۰۵.۲۱ اختلاط تلاطمی و جریان متلاطم با واکنش مرتبه دوم	
۷۷۹	فصل ۲۲ انتقال میان فازی در مخلوط‌های غیرهم‌دما	
۷۸۰	۱.۲۲ تعریف ضرایب انتقال در یک فاز	
۷۸۴	۲.۲۲ عبارتهای تحلیلی برای ضرایب انتقال جرم	
۷۸۸	۳.۲۲ رابطه همبستگی ضرایب انتقال دوتایی در یک فاز	
۷۹۸	۴.۲۲ تعریف ضرایب انتقال در دو فاز	
۸۰۵	۰۵.۲۲ انتقال جرم و واکنش‌های شیمیایی	
۸۰۹	۰۶.۲۲ انتقال مرکب گرما و جرم از طریق همرفت آزاد	
۸۱۲	۰۷.۲۲ آثار نیروهای فصل مشترکی بر انتقال گرما و جرم	
۸۱۶	۰۸.۲۲ ضرایب انتقال در آهنگ‌های بالای انتقال جرم خالص	
۸۳۰	۰۹.۲۲ تقریب‌های ماتریسی برای انتقال جرم چندجزئی	
۸۴۱	فصل ۲۳ موازنه‌های ماکروسکوپی برای سیستم‌های چندجزئی	
۸۴۲	۱.۲۳ موازنه‌های ماکروسکوپی جرم	
۸۵۵	۰۲.۲۳ موازنه‌های ماکروسکوپی اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای	
۸۵۶	۳.۲۳ موازنه ماکروسکوپی انرژی	
۸۵۶	۴.۲۳ موازنه ماکروسکوپی مکانیکی	
۸۵۶	۵.۲۳ استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت پایا	
۸۷۱	۰۶.۲۳ استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت ناپایا	
۸۸۷	فصل ۲۴ سایر مکانیسم‌های انتقال جرم	
۸۸۸	۰۱.۲۴ معادله تغییر آنتروپی	
۸۹۱	۰۲.۲۴ عبارتهای شار برای گرما و جرم	
۸۹۸	۰۳.۲۴ نفوذ غلظتی و نیروهای رانش	

۹۰۰	کاربردهای معادلات تعمیم‌یافتهٔ ماکسول-استفان	۰۴.۲۴
۹۱۲	انتقال جرم در غشاهای تراوای گزینشی	۰۵.۲۴
۹۲۱	نفوذ در محیط‌های متخلخل	۰۶.۲۴
۹۳۵	پس‌گفتار	
۹۳۷	پیوست الف نمادگذاری برداری و تانسوری	
۹۳۸	۱. الف عملیات برداری از دیدگاه هندسی	
۹۴۱	۲. الف عملیات برداری برحسب مؤلفه‌ها	
۹۴۷	۳. الف عملیات تانسوری برحسب مؤلفه‌ها	
۹۵۲	۴. الف عملیات دیفرانسیلی برداری و تانسوری	
۹۵۸	۵. الف قضیه‌های انتگرال برداری و تانسوری	
۹۵۹	۶. الف جبر برداری و تانسوری در مختصات خمیده‌خطی	
۹۶۳	۷. الف عملیات دیفرانسیلی در مختصات خمیده‌خطی	
۹۷۵	۸. الف عملیات انتگرالی در مختصات خمیده‌خطی	
۹۷۶	۹. الف نکته‌هایی دیگر در مورد نمادگذاری برداری-تانسوری	
۹۷۹	پیوست ب شارها و معادله‌های تغییر	
۹۸۰	۱. ب قانون ویسکوزیتهٔ نیوتون	
۹۸۱	۲. ب قانون رسانش گرمای فوریه	
۹۸۲	۳. ب قانون (اول) فیک برای نفوذ دوتایی	
۹۸۲	۴. ب معادلهٔ پیوستگی	
۹۸۳	۵. ب معادلهٔ حرکت برحسب $\tau$	
۹۸۴	۶. ب معادلهٔ حرکت برای سیال نیوتونی با $\mu$ و $\rho$ ثابت	
۹۸۶	۷. ب تابع اتلاف $\Phi_v$ برای سیالات نیوتونی	
۹۸۶	۸. ب معادلهٔ انرژی برحسب $q$	
۹۸۷	۹. ب معادلهٔ انرژی برای سیالات نیوتونی خالص با $k$ و $\rho$ ثابت	
۹۸۷	۱۰. ب معادلهٔ پیوستگی گونهٔ $\alpha$ برحسب $J_\alpha$	
۹۸۸	۱۱. ب معادلهٔ پیوستگی گونهٔ $A$ برحسب $\omega_A$ به‌ازای $\rho D_{AB}$ ثابت	
۹۸۹	پیوست ج موضوعات ریاضی	
۹۸۹	۱. ج بعضی معادله‌های دیفرانسیل معمولی و جواب‌های آن‌ها	
۹۹۱	۲. ج بسط توابع به‌صورت سری تیلر	

۹۹۲	.....	دیفرانسیل‌گیری از انتگرال‌ها (فرمول لایب‌نیس)	ج. ۳
۹۹۲	.....	تابع گاما	ج. ۴
۹۹۳	.....	توابع هذلولوی	ج. ۵
۹۹۵	.....	تابع خطا	ج. ۶
۹۹۷	.....	پیوست د نظریه سینتیکی گازها	
۹۹۷	.....	معادله بولتزمن	د. ۱
۹۹۸	.....	معادلات تغییر	د. ۲
۹۹۹	.....	عبارت‌های مولکولی برای شارها	د. ۳
۹۹۹	.....	جواب معادله بولتزمن	د. ۴
۱۰۰۰	.....	شارها برحسب خواص انتقال	د. ۵
۱۰۰۰	.....	خواص انتقال برحسب نیروهای بین‌مولکولی	د. ۶
۱۰۰۱	.....	چند نکته پایانی	د. ۷
۱۰۰۳	.....	پیوست ه جدول‌های پیش‌بینی خواص انتقال	
۱۰۰۴	.....	پارامترهای نیروی بین‌مولکولی و خواص بحرانی	ه. ۱
۱۰۰۷	.....	توابع پیش‌بینی خواص انتقال گازها در چگالی‌های پایین	ه. ۲
۱۰۰۹	.....	پیوست و ثابت‌ها و ضریب‌های تبدیل	
۱۰۰۹	.....	ثابت‌های ریاضی	و. ۱
۱۰۱۰	.....	ثابت‌های فیزیکی	و. ۲
۱۰۱۰	.....	ضریب‌های تبدیل	و. ۳
۱۰۲۳	.....	واژه‌نامه	
۱۰۲۹	.....	نمایه	
۱۰۴۳	.....	درباره نویسندگان	

## فصل ۰

### موضوع کتاب پدیده‌های انتقال

۱.۰ پدیده‌های انتقال کدام‌اند؟

۲.۰ سه سطح بررسی پدیده‌های انتقال

۳.۰ قوانین پایستگی

۴.۰ جمع‌بندی

هدف از نگارش این فصل مقدماتی، توصیف چشم‌انداز، اهداف، و روش‌های بررسی موضوع پدیده‌های انتقال است. بهتر است قبل از پرداختن به جزئیات، ابتدا درباره ساختار این حوزه اطلاعاتی کسب کنیم. بدون این چشم‌انداز، نمی‌توان اصول وحدت‌بخش این موضوع را به‌درستی شناخت و روابط متقابل بین مباحث گوناگون را درک کرد. برای درک بسیاری از فرایندهای مهندسی، کشاورزی، هواشناسی، فیزیولوژی، زیست‌شناسی، شیمی تجزیه، علم مواد، داروسازی، و سایر رشته‌ها، درک پدیده‌های انتقال ضرورت دارد. پدیده‌های انتقال شاخه‌ای تکامل یافته و بسیار سودمند از فیزیک است که بر بسیاری از حوزه‌های علوم کاربردی سایه افکنده است.

#### ۱.۰ پدیده‌های انتقال کدام‌اند؟

موضوع پدیده‌های انتقال شامل سه مبحث کاملاً مربوط به هم است: دینامیک سیالات، انتقال گرما، و انتقال جرم. دینامیک سیالات شامل انتقال اندازه حرکت است، انتقال گرما با انتقال انرژی سروکار دارد، و انتقال جرم به انتقال گونه‌های شیمیایی مختلف مربوط است. به دلایل زیر، در سطح مقدماتی، این سه پدیده انتقال را باید باهم مطالعه کرد:

- در مسائل صنعتی، زیست‌شناختی، کشاورزی، و هواشناختی غالباً این سه پدیده هم‌زمان رخ می‌دهند؛ درحقیقت وقوع یک پدیده انتقال به‌تنهایی، استثناست، نه قاعده؛
- معادلات پایه‌ای که این سه پدیده انتقال را توصیف می‌کنند، کاملاً به هم مربوط‌اند. شباهت این معادله‌ها، تحت شرایط ساده، اساس حل مسئله از طریق «قیاس» است؛
- ابزارهای ریاضی لازم برای توصیف این پدیده‌ها بسیار به هم شبیه‌اند. اگرچه هدف این کتاب آموزش ریاضیات نیست، از دانشجو انتظار می‌رود با پیشرفت موضوع پدیده‌های انتقال، مباحث گوناگون ریاضی را مرور کند. شاید یادگیری نحوه استفاده از ریاضیات پیامد جانبی بسیار سودمند مطالعه پدیده‌های انتقال باشد؛

- مکانیسم‌های مولکولی که اساس پدیده‌های گوناگون انتقال را تشکیل می‌دهند، رابطه‌ای تنگاتنگ باهم دارند. همهٔ مواد از مولکول ساخته شده‌اند و بر ویسکوزیته، رسانندگی گرمایی و نفوذ، حرکت‌ها و برهم‌کنش‌های مولکولی یکسانی مبتنی‌اند.

هدف اصلی این کتاب شرح متوازن خطوط کلی حوزه پدیده‌های انتقال، ارائهٔ معادلات بنیادی این حوزه، و نمایش نحوهٔ استفاده از آن‌ها برای حل مسئله است.

رساله‌های عالی بسیاری در باب دینامیک سیالات، انتقال گرما، و انتقال جرم نگاشته شده‌است. گذشته از آن نشریات پژوهشی و نقد و بررسی متعددی به این موضوعات، به‌طور انفرادی، و حتی به مباحث فرعی تخصصی زیرمجموعهٔ آن‌ها، اختصاص یافته‌است. خواننده‌ای که بر محتویات این کتاب مسلط باشد، باید بتواند به این رساله‌ها و نشریات رجوع کند و سایر جنبه‌های نظری، فنون تجربی، روابط همبستگی تجربی، روش‌های طراحی، و کاربردها را به‌صورت عمیق‌تری مطالعه کند. به عبارت دیگر، این کتاب را نباید جامع همهٔ مباحث پدیده‌های انتقال دانست، بلکه پله‌ای است برای دستیابی به گنجینهٔ دانش سرشاری که در ورای آن نهفته است.

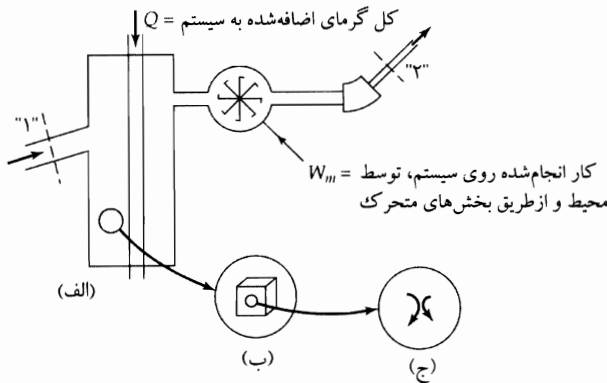
## ۲.۰ سه سطح بررسی پدیده‌های انتقال

در شکل ۲-۰۱ نموداری شماتیک از یک سیستم بزرگ - مثلاً دستگاه بزرگی که مخلوط سیالی از داخل آن عبور می‌کند - نشان داده شده‌است. انتقال جرم، اندازه حرکت، انرژی، و اندازه حرکت زاویه‌ای را در سه سطح می‌توانیم توصیف کنیم. در سطح ماکروسکوپی، (شکل ۲-۰۱ الف)) مجموعه‌ای از معادلات، موسوم به «موازنه‌های ماکروسکوپی»، می‌نویسیم که نحوهٔ تغییر جرم، اندازه حرکت، انرژی، و اندازه حرکت زاویه‌ای را، در نتیجهٔ اضافه یا کم شدن آن‌ها از طریق جریان‌های ورودی و خروجی و به‌علت ورودی‌های مختلف دیگر سیستم از محیط اطراف توصیف می‌کنند. برای درک همهٔ جزئیات سیستم تلاش نمی‌کنیم. در بررسی هر سیستم مهندسی یا زیست‌شناختی، بهتر است کار را با همین توصیف ماکروسکوپی آغاز کنیم تا بتوانیم مسئله را به‌طور کلی ارزیابی کنیم؛ در بعضی موارد هم فقط به همین بررسی کلی نیاز داریم.

در سطح میکروسکوپی (شکل ۲-۰۱ ب)) آنچه را در ناحیهٔ کوچکی در داخل دستگاه، برای مخلوط سیال رخ می‌دهد، بررسی می‌کنیم. در این سطح مجموعه‌ای از معادلات موسوم به «معادلات تغییر» را می‌نویسیم که نحوهٔ تغییر جرم، اندازه حرکت، انرژی، و اندازه حرکت زاویه‌ای را در این ناحیهٔ کوچک توصیف می‌کنند. در این جا هدف کسب اطلاعاتی در مورد چگونگی توزیع سرعت، دما، فشار، و غلظت در داخل سیستم است. این اطلاعات تفصیلی‌تر را می‌توان برای درک بعضی از فرایندها به‌دست آورد.

در سطح مولکولی (شکل ۲-۰۱ ج)) خواستار درک بنیادی مکانیسم‌های انتقال جرم، اندازه حرکت، انرژی، و اندازه حرکت زاویه‌ای، برحسب ساختار مولکولی و نیروهای بین‌مولکولی هستیم. معمولاً این سطح قلمرو فیزیکدان نظری، یا متخصص شیمی فیزیک است، اما گاهی مهندسان و متخصصان علوم کاربردی نیز با این سطح سروکار پیدا می‌کنند. این گفته به‌ویژه هنگامی صادق است که فرایندهای مورد بررسی شامل مولکول‌های کمپلکس، گستره‌های اکستریم دما و فشار، یا سیستم‌های با واکنش شیمیایی باشند.

بدیهی است که این سه سطح توصیف، شامل «مقیاس‌های طول» متفاوت‌اند؛ مثلاً، در یک مسئلهٔ معمول صنعتی، در سطح ماکروسکوپی، ابعاد سیستم‌های جریان ممکن است از مرتبهٔ سانتی‌متر یا متر باشد؛ سطح میکروسکوپی با پدیده‌هایی سروکار دارد که در گسترهٔ میکرون تا سانتی‌متر رخ می‌دهد و مسائل سطح مولکولی با گستره‌های حدود ۱ تا ۱۰۰۰ نانومتر سروکار دارد.



شکل ۱۰-۲۰۰ الف) سیستم جریان ماکروسکوپی حاوی  $O_2$  و  $N_2$ ؛ (ب) ناحیه‌ای میکروسکوپی در داخل سیستم ماکروسکوپی حاوی  $O_2$  و  $N_2$  که در حالت جریان‌اند؛ (ج) برخورد بین یک مولکول  $N_2$  و یک مولکول  $O_2$ .

این کتاب به سه قسمت تقسیم شده‌است که با موضوعات زیر سروکار دارند:

- جریان سیالات خالص در دمای ثابت (با تأکید بر انتقال ویسکوز و همرفتی اندازه حرکت)، فصل‌های ۱ تا ۸؛
  - جریان سیالات خالص با دمای متغیر (با تأکید بر انتقال انرژی رسانشی، همرفتی، و تابشی)، فصل‌های ۹ تا ۱۶؛
  - جریان مخلوط‌های سیال با ترکیب‌های متغیر (با تأکید بر انتقال جرم نفوذی و همرفتی)، فصل‌های ۱۷ تا ۲۴.
- به عبارت دیگر، کار خود را از مسائل ساده آغاز می‌کنیم و به سمت مسائل دشوارتر می‌رویم. هریک از این قسمت‌ها، با فصلی مقدماتی آغاز می‌شود که با بعضی از نتایج نظریه مولکولی خواص انتقال (ویسکوزیته، رسانندگی گرمایی، و ضریب نفوذ) سروکار دارد. سپس به سطح میکروسکوپی می‌رسیم و نحوه تعیین توزیع‌های سرعت، دما، و غلظت را در سیستم‌های مختلف می‌آموزیم. بحث با بررسی در سطح ماکروسکوپی و توصیف سیستم‌های بزرگ پایان می‌یابد. با پیشرفت بحث، خواننده درمی‌یابد که ارتباطات بسیاری بین سه سطح توصیف وجود دارد. خواص انتقال که توسط نظریه مولکولی توصیف می‌شوند، در سطح میکروسکوپی به کار می‌روند. به علاوه، معادله‌های پی‌ریزی شده در سطح میکروسکوپی برای به دست آوردن بعضی داده‌های ورودی برای حل مسئله در سطح ماکروسکوپی لازم‌اند. بین سه حوزه انتقال اندازه حرکت، انتقال انرژی، و انتقال جرم نیز روابط بسیاری وجود دارد. با یاد گرفتن نحوه حل مسئله در یک حوزه، فنون حل مسئله در حوزه‌ای دیگر را نیز می‌آموزیم. شباهت معادله‌ها در این سه حوزه به معنای آن است که در بسیاری از موارد می‌توان مسئله‌ای را «به قیاس» حل کرد، یعنی می‌توانیم جوابی را مستقیماً از یک حوزه برداریم، نمادها را در معادله‌ها تغییر بدهیم، و جواب مسئله‌ای را در حوزه دیگر بنویسیم. دانشجوی خواهد فهمید که این ارتباطات - بین سطوح مختلف و بین پدیده‌های گوناگون انتقال- فرایند یادگیری را تقویت می‌کند. با گذر از قسمت اول کتاب (انتقال اندازه حرکت)، به قسمت دوم (انتقال انرژی)، و سپس به قسمت سوم (انتقال جرم) داستان تفاوت چندانی نمی‌کند، اما «نام بازیگران» تغییر خواهد کرد.
- جدول ۱۰-۲۰۰ آرایش فصل‌های این کتاب را به صورت «ماتریسی»  $8 \times 3$  نشان می‌دهد. نگاهی اجمالی به این ماتریس آشکار می‌کند که در جریان مطالعه کتاب چه نوع ارتباطاتی را می‌توان انتظار داشت. توصیه می‌کنیم که، به ویژه در دوره‌های کارشناسی، کتاب به صورت ستونی مطالعه شود. از طرف دیگر، برای دانشجویان دوره‌های کارشناسی ارشد، مطالعه مطالب کتاب به صورت سطری می‌تواند به تحکیم ارتباط بین سه حوزه پدیده‌های انتقال کمک کند.



جدول ۱-۲۰۰ سازمان‌بندی مباحث در این کتاب.

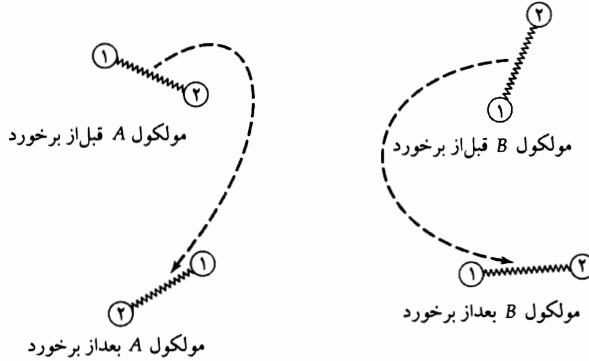
نوع انتقال	اندازه حرکت	انرژی	جرم
انتقال توسط حرکت مولکولی	ویسکوزیته و تانسور تنش (شار اندازه حرکت)	رسانندگی گرمایی و بردار شار گرما	ضریب نفوذ و بردارهای شار جرم
انتقال در یک بعد روش‌های موازنه لایه‌ای	موازنه‌های لایه‌ای اندازه حرکت و توزیع‌های سرعت	موازنه‌های لایه‌ای انرژی و توزیع دما	موازنه‌های لایه‌ای جرم و توزیع‌های غلظت
انتقال در پیوستار دلخواه (کاربرد معادله‌های عمومی انتقال)	معادله‌های تغییر و کاربرد آن‌ها (هم‌دما)	معادله‌های تغییر و کاربرد آن‌ها (غیرهم‌دما)	معادله‌های تغییر و کاربرد آن‌ها (مخلوط‌ها)
انتقال با دو متغیر مستقل (روش‌های خاص)	انتقال اندازه حرکت با دو متغیر مستقل	انتقال انرژی با دو متغیر مستقل	انتقال جرم با دو متغیر مستقل
انتقال در جریان متلاطم؛ و خواص انتقال گردابی	انتقال اندازه حرکت متلاطم؛ ویسکوزیته گردابی	انتقال انرژی متلاطم؛ رسانندگی گرمایی گردابی	انتقال جرم متلاطم؛ ضریب نفوذ گردابی
انتقال بین مرزهای فاز	عامل‌های اصطکاک؛ کاربرد در روابط همبستگی تجربی	ضرایب انتقال گرما؛ کاربرد در روابط همبستگی تجربی	ضرایب انتقال جرم؛ کاربرد در روابط همبستگی تجربی
انتقال در سیستم‌های بزرگ، مانند دستگاه‌ها یا بخش‌هایی از آن‌ها	موازنه‌های ماکروسکوپی (هم‌دما)	موازنه‌های ماکروسکوپی (غیرهم‌دما)	موازنه‌های ماکروسکوپی (مخلوط‌ها)
انتقال از طریق؛ مکانیسم‌های دیگر	انتقال اندازه حرکت در مایعات پلیمری	انتقال انرژی توسط تابش	انتقال جرم در سیستم‌های چندجزئی آثار متقابل

در هر سه سطح توصیف - مولکولی، میکروسکوپی، و ماکروسکوپی - قوانین پایستگی نقش مهمی دارند. به دست آوردن قوانین پایستگی برای سیستم‌های مولکولی سراسر و آموزنده است. با استفاده از فیزیک مقدماتی و حداقلی از دانش ریاضی، می‌توان مفاهیم اصلی را نشان داد و کمیت‌های فیزیکی مهم دخیل در سراسر این کتاب را مرور کرد. این موضوع بخش بعدی این فصل است.

### ۳.۰ قوانین پایستگی: یک مثال

سیستمی که آن را بررسی می‌کنیم از دو مولکول دواتمی تشکیل شده است که با هم برخورد می‌کنند. برای ساده‌سازی، فرض می‌کنیم که مولکول‌ها برهم‌کنش شیمیایی ندارند و هر مولکول جوهرسته است؛ یعنی هسته‌های اتمی آن‌ها یکسان است. این مولکول‌ها در گازی با چگالی پایین قرار دارند، بنابراین لازم نیست برهم‌کنش‌های آن‌ها را با مولکول‌های همسایه در نظر بگیریم. در شکل ۱-۳۰۰ برخورد بین دو مولکول دواتمی جوهرسته  $A$  و  $B$  نشان داده شده است و در شکل ۲-۳۰۰ نمادگذاری به کاررفته برای مشخص کردن مکان دو اتم یک مولکول، با استفاده از بردارهای مکان ترسیم شده از مبدأ اختیاری، مشاهده می‌شود.

درواقع توصیف رویدادها در سطح اتمی و مولکولی، باید با استفاده از مکانیک کوانتومی انجام شود. اما، به‌استثنای سبک‌ترین مولکول‌ها ( $\text{He}$ ,  $\text{H}_2$ ) در دماهای پایین‌تر از  $5^\circ\text{K}$ ، با استفاده از مکانیک کلاسیک، می‌توان نظریه سینتیک گازها را، به‌نحو نسبتاً رضایت‌بخشی، پی‌ریزی کرد.



شکل ۱-۳۰. برخورد بین مولکول‌های دواتمی جوهرسته، مانند  $\text{O}_2$  و  $\text{N}_2$ . مولکول  $A$  از دو اتم  $A_1$  و  $A_2$ ، و مولکول  $B$  از دو اتم  $B_1$  و  $B_2$  ساخته شده‌است.

قبل و بعد از برخورد باید چندین رابطه بین کمیت‌ها برقرار باشد. در هر دو صورت فرض می‌شود فاصله مولکول‌ها از هم کافی باشد تا دو مولکول نتوانند نیروی بین‌مولکولی بین خود را «حس کنند»؛ وقتی فاصله از حدود پنج برابر قطر مولکول بیش‌تر شود، نیروی بین‌مولکولی را قابل چشم‌پوشی تلقی می‌کنیم. کمیت‌های بعد از برخورد را با نشانه «پریم» مشخص می‌کنیم.

(الف) طبق قانون پایستگی جرم، جرم کل مولکول‌هایی که وارد برخورد می‌شوند یا برخورد را ترک می‌کنند، باید مساوی باشد:

$$m_A + m_B = m'_A + m'_B \quad (۱-۳۰)$$

در این رابطه  $m_A$  و  $m_B$  جرم مولکول‌های  $A$  و  $B$  است. چون واکنش شیمیایی انجام نمی‌شود، جرم هرگونه از مولکول‌ها پایسته می‌ماند، به‌طوری‌که:

$$m_A = m'_A, \quad m_B = m'_B \quad (۲-۳۰)$$

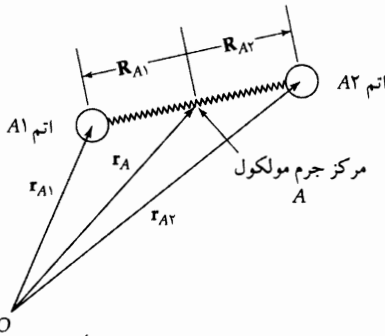
(ب) طبق قانون پایستگی اندازه‌حرکت، جمع اندازه‌حرکت‌های همه اتم‌ها قبل از برخورد، باید با بعد از برخورد برابر باشد، بنابراین:

$$\begin{aligned} m_{A1}\dot{\mathbf{r}}_{A1} + m_{A2}\dot{\mathbf{r}}_{A2} + m_{B1}\dot{\mathbf{r}}_{B1} + m_{B2}\dot{\mathbf{r}}_{B2} = \\ m'_{A1}\dot{\mathbf{r}}'_{A1} + m'_{A2}\dot{\mathbf{r}}'_{A2} + m'_{B1}\dot{\mathbf{r}}'_{B1} + m'_{B2}\dot{\mathbf{r}}'_{B2} \end{aligned} \quad (۳-۳۰)$$

که در آن بردار مکان اتم ۱ از مولکول  $A$ ، و  $\dot{\mathbf{r}}_{A1}$  سرعت آن است. اکنون می‌توان نوشت  $\mathbf{r}_{A1} = \mathbf{r}_A + \mathbf{R}_{A1}$ ، بنابراین به‌صورت مجموع بردار مکان مرکز جرم و بردار مکان اتم نسبت به مرکز جرم نوشته می‌شود و مشاهده می‌کنیم که  $\mathbf{R}_{A2} = -\mathbf{R}_{A1}$ ؛ همین رابطه را برای بردارهای سرعت نیز می‌نویسیم.

اکنون می‌توان معادله (۳-۳.۰) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$m_A \dot{\mathbf{r}}_A + m_B \dot{\mathbf{r}}_B = m_A \dot{\mathbf{r}}'_A + m_B \dot{\mathbf{r}}'_B \quad (۴-۳.۰)$$



شکل ۳-۲. بردارهای مکان اتم‌های  $A_1$  و  $A_2$  در مولکول  $A$ .

یعنی عبارت پایستگی را می‌توان برحسب جرم‌های مولکولی و سرعت‌ها نیز نوشت و در این صورت کمیت‌های اتمی متناظر حذف می‌شوند. برای به دست آوردن معادله (۴-۳.۰) از معادله (۲-۳.۰) و این نکته استفاده کردیم که برای مولکول‌های دو اتمی جور هسته، داریم:

$$m_{A1} = m_{A2} = \frac{1}{2} m_A$$

(ج) طبق قانون پایستگی انرژی، انرژی یک جفت مولکول برخوردکننده، باید قبل و بعد از برخورد برابر باشد. انرژی یک مولکول تنها برابر است با مجموع انرژی‌های جنبشی دو اتم آن، و انرژی پتانسیل بین اتمی  $\phi_A$ ، که نیروی پیوند شیمیایی بین دو اتم ۱ و ۲ در مولکول  $A$  را توصیف می‌کند و تابعی از فاصله بین مولکولی  $|\mathbf{r}_{A2} - \mathbf{r}_{A1}|$  است. بنابراین پایستگی انرژی به روابط زیر منتهی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} m_{A1} \dot{r}_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_{A2} \dot{r}_{A2}^2 + \phi_A \right) + \left( \frac{1}{2} m_{B1} \dot{r}_{B1}^2 + \frac{1}{2} m_{B2} \dot{r}_{B2}^2 + \phi_B \right) = \\ & \left( \frac{1}{2} m'_{A1} \dot{r}'_{A1}{}^2 + \frac{1}{2} m'_{A2} \dot{r}'_{A2}{}^2 + \phi'_A \right) + \left( \frac{1}{2} m'_{B1} \dot{r}'_{B1}{}^2 + \frac{1}{2} m'_{B2} \dot{r}'_{B2}{}^2 + \phi'_B \right) \quad (۵-۳.۰) \end{aligned}$$

توجه کنید که از نمادگذاری اختصاری استاندارد استفاده می‌کنیم که در آن  $\dot{r}_{A1}^2 = (\dot{\mathbf{r}}_{A1} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{A1})$  است. حال سرعت اتم ۱ مولکول  $A$  را به صورت مجموع سرعت مرکز جرم  $A$  و سرعت  $u$ ، نسبت به این مرکز جرم می‌نویسیم؛ یعنی  $\dot{\mathbf{r}}_{A1} = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{R}}_{A1}$ . بنابراین معادله (۵-۳.۰) چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} m_A \dot{r}_A^2 + u_A \right) + \left( \frac{1}{2} m_B \dot{r}_B^2 + u_B \right) = \\ & \left( \frac{1}{2} m'_A \dot{r}'_A{}^2 + u'_A \right) + \left( \frac{1}{2} m'_B \dot{r}'_B{}^2 + u'_B \right) \quad (۶-۳.۰) \end{aligned}$$

که در آن  $u_A = \frac{1}{2} m_{A1} \dot{R}_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_{A2} \dot{R}_{A2}^2 + \phi_A$  مجموع انرژی‌های جنبشی اتم‌ها، نسبت به مرکز جرم مولکول  $A$ ، و انرژی پتانسیل بین مولکولی مولکول  $A$  است. به عبارت دیگر، انرژی هر مولکول را به انرژی جنبشی آن نسبت به دستگاه مختصات ثابت، و انرژی داخلی مولکول (که شامل انرژی‌های ارتعاشی، چرخشی، و پتانسیل آن است) تفکیک می‌کنیم. معادله (۶-۳.۰) روشن می‌سازد که انرژی‌های جنبشی مولکول‌های برخوردکننده را می‌توان به انرژی داخلی، یا برعکس، تبدیل کرد. ایده تبادل بین انرژی جنبشی و داخلی، باردیگر در هنگام تشریح روابط انرژی در سطوح میکروسکوپی و ماکروسکوپی مطرح خواهد شد.

(د) سرانجام، قانون پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای را می‌توان در مورد برخورد به‌کار برد و نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned} & ([\mathbf{r}_{A1} \times m_{A1} \dot{\mathbf{r}}_{A1}] + [\mathbf{r}_{A2} \times m_{A2} \dot{\mathbf{r}}_{A2}]) + ([\mathbf{r}_{B1} \times m_{B1} \dot{\mathbf{r}}_{B1}] + [\mathbf{r}_{B2} \times m_{B2} \dot{\mathbf{r}}_{B2}]) \\ &= ([\mathbf{r}'_{A1} \times m'_{A1} \dot{\mathbf{r}}'_{A1}] + [\mathbf{r}'_{A2} \times m'_{A2} \dot{\mathbf{r}}'_{A2}]) \\ &+ ([\mathbf{r}'_{B1} \times m'_{B1} \dot{\mathbf{r}}'_{B1}] + [\mathbf{r}'_{B2} \times m'_{B2} \dot{\mathbf{r}}'_{B2}]) \end{aligned} \quad (۷-۳.۰)$$

که در آن از علامت  $\times$  برای نشان دادن ضرب برداری دو بردار استفاده شده است. حال، مانند قبل، مرکز جرم، بردارهای مکان نسبی، و سرعت نسبی را معرفی می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} & ([\mathbf{r}_A \times m_A \dot{\mathbf{r}}_A] + \mathbf{l}_A) + ([\mathbf{r}_B \times m_B \dot{\mathbf{r}}_B] + \mathbf{l}_B) = \\ & ([\mathbf{r}'_A \times m_A \dot{\mathbf{r}}'_A] + \mathbf{l}'_A) + ([\mathbf{r}'_B \times m_B \dot{\mathbf{r}}'_B] + \mathbf{l}'_B) \end{aligned} \quad (۸-۳.۰)$$

که در آن  $\mathbf{l}_A = [\mathbf{R}_{A1} \times m_{A1} \dot{\mathbf{R}}_{A1}] + [\mathbf{R}_{A2} \times m_{A2} \dot{\mathbf{R}}_{A2}]$  مجموع اندازه حرکت‌های زاویه‌ای اتم‌ها نسبت به مبدأ مختصات واقع در مرکز جرم مولکول است؛ یعنی «اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی» است. نکته مهم این است که امکان تبادل بین اندازه حرکت زاویه‌ای مولکول‌ها (نسبت به مبدأ مختصات) و اندازه حرکت داخلی آن‌ها (نسبت به مرکز جرم مولکول‌ها) وجود دارد. بعدها، در ارتباط با معادله تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای، به این نکته اشاره خواهیم کرد.

قوانین پایستگی، به صورتی که در مورد برخورد مولکول‌های تک‌اتمی به‌کار می‌رود، از نتایج بالا به دست می‌آید: معادله‌های (۱-۳.۰)، (۲-۳.۰) و (۴-۳.۰) مستقیماً قابل کاربردند؛ معادله (۶-۳.۰) در صورتی قابل کاربرد است که سهم انرژی داخلی حذف شود؛ و معادله (۸-۳.۰) را در صورتی می‌توان به‌کار برد که جمله‌های اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی کنار گذاشته شوند.

در بخش عمده این کتاب با پی‌ریزی قوانین پایستگی در سطوح میکروسکوپی و ماکروسکوپی، و کاربرد آن‌ها در مسائل مهندسی و علوم سروکار خواهیم داشت. بحث بالا پیش‌زمینه مناسبی برای این کار است. برای مرور اجمالی قوانین پایستگی جرم، اندازه حرکت، و انرژی در سطوح میکروسکوپی و ماکروسکوپی به جدول‌های ۱-۲.۱۹ و ۱-۵.۲۳ رجوع کنید.

#### ۴۰ جمع‌بندی

برای استفاده هوشمندانه از موازنه‌های ماکروسکوپی، باید از اطلاعاتی درباره انتقال میان‌فازی استفاده کرد که از معادلات تغییر حاصل می‌شوند. برای استفاده از معادلات تغییر به خواص انتقال نیاز داریم که توسط نظریه‌های مولکولی گوناگون توصیف می‌شوند. بنابراین از دیدگاه آموزشی، به نظر می‌رسد بهتر است که کار را از سطح مولکولی آغاز کنیم و به سمت سیستم‌های بزرگ‌تر برویم.

همه بحث‌های نظری با مثال همراه‌اند تا نحوه کاربرد نظریه در حل مسئله نشان داده شود. سپس در پایان هر فصل، مسئله‌هایی برای کسب تجربه بیشتر در استفاده از ایده‌های ارائه شده در طول فصل، مطرح می‌شود. این مسئله‌ها به چهار دسته تقسیم می‌شوند:

دسته (الف): مسئله‌های عددی، که برای روشن شدن معادله‌های مهم مطرح شده در متن و ایجاد حس از مرتبه‌های بزرگی طرح شده‌اند؛

دسته (ب): مسئله‌های تحلیلی که مستلزم استنتاج‌های ابتدایی با استفاده از ایده‌هایی است که عمدتاً در همان فصل مطرح شده‌اند؛

دسته (ج): مسئله‌های تحلیلی پیشرفته‌تر که در آن‌ها ایده‌هایی از فصل‌های دیگر، یا کتاب‌های دیگر مطرح می‌شود؛ دسته (د): مسئله‌هایی که برای حل آن‌ها به مهارت ریاضی متوسط نیاز است. بسیاری از مسائل و مثال‌های روشن‌تر نسبتاً مقدماتی‌اند، زیرا شامل سیستم‌های بسیار ساده‌شده، یا مدل‌های بسیار ایده‌آل هستند. اما ضروری است که کار را از همین مسائل مقدماتی آغاز کنید تا کاربرد نظریه را بهتر بفهمید و در استفاده از مطالب نظری اعتماد به نفس پیدا کنید. به‌علاوه، بعضی از این مسائل مقدماتی می‌توانند در تخمین مرتبه بزرگی مسئله‌های پیچیده سودمند واقع شوند.

در ادامه مطلب چند پیشنهاد برای مطالعه موضوع پدیده‌های انتقال مطرح می‌کنیم:

- همیشه در هنگام مطالعه متن، کاغذ و قلم در کنارتان باشد تا جزئیات به‌دست آوردن روابط ریاضی، و هر مرحله حذف‌شده از عملیات را، خودتان انجام دهید.
  - در صورت لزوم، به کتاب‌های درسی ریاضی رجوع کنید تا معادلات دیفرانسیل و انتگرال، بردارها، و غیره را مرور کنید. این فرصتی مغفتم برای مرور ریاضیاتی است که قبلاً آموخته‌اید (اما احتمالاً نه با دقت لازم)؛
  - نتایج مهم و کلیدی را، از لحاظ فیزیکی تعبیر کنید؛ یعنی عادت کنید که مفاهیم فیزیکی را به معادله‌های ریاضی مربوط کنید؛
  - همیشه از خودتان سؤال کنید که آیا نتایج حاصل منطقی به‌نظر می‌رسند یا نه؟ اگر نتایج حاصل با ادراک شهودی شما در توافق نیست، باید بفهمید که کدامیک نادرست است؛
  - خودتان را به بررسی ابعاد همه نتایج عادت دهید. این بررسی راه بسیار خوبی برای یافتن خطاهایی است که در به‌دست آوردن روابط مرتکب شده‌اید؛
- امیدواریم که خواننده در علاقه ما به موضوع پدیده‌های انتقال سهم شود. یادگیری مطالب مستلزم تلاش است، و حاصل کار ارزش صرف وقت و انرژی را دارد.

### پرسش‌های تشریحی

۱. اندازه حرکت، اندازه حرکت زاویه‌ای، و انرژی جنبشی ذره را تعریف کنید. ابعاد این کمیت‌ها چیست؟
۲. ابعاد سرعت، سرعت زاویه‌ای، فشار، چگالی، نیرو، کار، و گشتاور چیست؟ بعضی از واحدهای مورد استفاده برای این کمیت‌ها را نام ببرید.
۳. نشان دهید که می‌توان معادله  $(۴-۳.۰)$  را از معادله  $(۳-۳.۰)$  به‌دست آورد.
۴. جزئیات عملیات لازم برای به‌دست آوردن معادله  $(۶-۳.۰)$  از معادله  $(۵-۳.۰)$  را نشان دهید.
۵. فرض کنید مبدأ مختصات به مکان جدیدی انتقال یافته‌است. این انتقال چه اثری بر معادله  $(۷-۳.۰)$  خواهد داشت؟ آیا این معادله تغییر می‌کند؟
۶. سرعت زاویه‌ای و اندازه حرکت زاویه‌ای را باهم مقایسه کنید و تفاوت‌های آن‌ها را شرح دهید.
۷. منظور از انرژی داخلی چیست؟
۸. آیا قانون پایستگی جرم همواره معتبر است؟ محدودیت‌های این قانون کدام‌اند؟

## فصل ۱

### ویسکوزیته و مکانیسم‌های انتقال اندازه حرکت

- ۱.۱ قانون ویسکوزیته نیوتون (انتقال مولکولی اندازه حرکت)
- ۲.۱ تعمیم قانون ویسکوزیته نیوتون
- ۳.۱ وابستگی ویسکوزیته به فشار و دما
- ۴.۱ نظریه مولکولی ویسکوزیته گازها در چگالی پایین
- ۵.۱ نظریه مولکولی ویسکوزیته مایعات
- ۶.۱ ویسکوزیته سوسپانسیون‌ها و امولسیون‌ها
- ۷.۱ انتقال همرفتی اندازه حرکت

قسمت اول این کتاب به بحث درباره سیالات ویسکوز اختصاص دارد. در سیالاتی با وزن مولکولی پایین، خاصیتی فیزیکی که مقاومت سیال در برابر جریان را مشخص می‌کند، ویسکوزیته نام دارد. هرکس که روغن موتور خریده باشد، می‌داند که بعضی از روغن‌ها نسبت به روغن‌های دیگر «ویسکوز» ترند و ویسکوزیته تابع دماست.

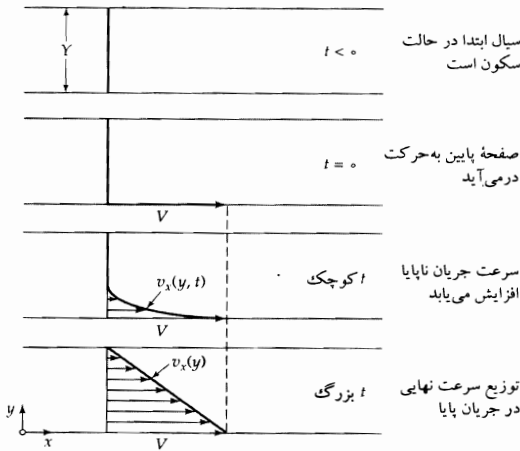
در بخش ۱.۱ بحث را با جریان برشی ساده بین صفحه‌های موازی آغاز می‌کنیم و نحوه انتقال اندازه حرکت در سیال، توسط کنش ویسکوز را شرح می‌دهیم. این نوع انتقال نمونه‌ای ابتدایی از انتقال مولکولی اندازه حرکت است و براساس آن «قانون ویسکوزیته نیوتون» را معرفی و ویسکوزیته،  $\mu$ ، را تعریف می‌کنیم. سپس در بخش ۲.۱ نحوه تعمیم قانون ویسکوزیته نیوتون برای الگوهای جریان دلخواه را نشان می‌دهیم. آثار دما و فشار بر ویسکوزیته گازها و مایعات در بخش ۳.۱، به وسیله نموداری بدون بُعد، جمع‌بندی می‌شود. در بخش ۴.۱ با استفاده از نظریه سینتیک گازها با روش محاسبه ویسکوزیته گازها آشنا می‌شویم و در بخش ۵.۱ همین بحث را در مورد مایعات دنبال می‌کنیم. در بخش ۶.۱ چند نکته را در مورد ویسکوزیته سوسپانسیون‌ها و امولسیون‌ها یادآور می‌شویم. سرانجام، در بخش ۷.۱ نشان می‌دهیم که اندازه حرکت از طریق توده سیال نیز منتقل می‌شود و این انتقال همرفتی اندازه حرکت با چگالی سیال،  $\rho$ ، متناسب است.

### ۱.۱ قانون ویسکوزیته نیوتون (انتقال مولکولی اندازه حرکت)

در شکل ۱-۱.۱ یک جفت صفحه موازی بزرگ، هریک به مساحت  $A$  نشان داده شده که به فاصله  $\Delta$  از یکدیگر قرار دارند. فضای بین این دو صفحه را سیالی گاز یا مایع پر کرده است. این سیستم ابتدا در حالت سکون است، اما در زمان

$t = 0$ ، صفحه زیری با سرعت ثابت  $V$  درجهت مثبت  $x$  به حرکت درمی‌آید. با گذشت زمان، سیال اندازه حرکت کسب می‌کند و سرانجام، مطابق شکل، توزیع سرعت خطی حالت پایا ایجاد می‌شود. این جریان باید از نوع آرام باشد (جریان «آرام» نوع منظمی از جریان است که هنگام ریختن شربت مشاهده می‌شود؛ برعکس، جریان «متلاطم»؛ جریان بی‌نظم و آشفتگی است که در مخلوطکن‌های پرسرعت می‌توان دید). هنگامی که حالت نهایی حرکت پایا حاصل شد، برای ادامه حرکت صفحه زیری، نیروی ثابتی مانند  $F$  لازم است. عقل سلیم حکم می‌کند که این نیرو را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y} \quad (۱-۱.۱)$$



شکل ۱-۱.۱ تشکیل پروفیل سرعت آرام حالت پایا برای سیال واقع بین دو صفحه. این نوع جریان را «آرام» می‌نامند، زیرا در آن لایه‌های مجاور سیال به شیوه‌ای منظم و «آرام» از روی یکدیگر می‌لغزند.

یعنی این نیرو باید با مساحت و سرعت متناسب باشد و با فاصله بین صفحه‌ها نسبت عکس داشته باشد. ثابت تناسب،  $\mu$ ، خاصیت سیال است و آن را ویسکوزیته می‌نامند.

حال به سراغ آن نوع نمادگذاری می‌رویم که در سراسر این کتاب به کار خواهیم برد. ابتدا  $F/A$  را با نماد  $\tau_{yx}$  جایگزین می‌کنیم که عبارت است از: نیرو درجهت  $x$  که بر واحد سطح عمود بر جهت  $y$  وارد می‌شود. این نیرویی است که سیال با  $y$  کم‌تر، بر سیال با  $y$  بیش‌تر وارد می‌کند. به علاوه،  $V/Y$  را با  $-dv_x/dy$  جایگزین می‌کنیم. سپس معادله (۲-۱.۱) را برحسب این نمادها می‌نویسیم:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (۲-۱.۱)$$

این معادله که براساس آن، نیروی برشی بر واحد سطح با منفی گرادینان سرعت متناسب است، غالباً قانون ویسکوزیته نیوتون<sup>۲</sup> نامیده می‌شود.

۱. بعضی از مؤلفان معادله (۲-۱.۱) را به صورت زیر می‌نویسند:

$$g_c \tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (۲-۱.۱ \text{ الف})$$

که در آن  $\mu [=] \text{lb}_m/\text{ft} \cdot \text{s}$  و  $\tau_{yx} [=] \text{lb}_f/\text{ft}^2$ ،  $v_x [=] \text{ft}/\text{s}$  و  $y [=] \text{ft}$  و  $g_c$  «ضریب تبدیل گرانشی» و مقدار آن  $\text{lb}_f$  / پوندال  $32.174$  است. در این کتاب همواره به جای معادله (۲-۱.۱ الف) از معادله (۲-۱.۱) استفاده خواهیم کرد.   
 ۲. سِر آیزاک نیوتون (۱۶۴۳-۱۷۲۷)، استاد دانشگاه کمبریج و بعدها رئیس ضرابخانه سلطنتی، بنیان‌گذار مکانیک کلاسیک بود و در سایر حوزه‌های فیزیک نیز نقش اثرگذار داشت. معادله (۲-۱.۱) عملاً در رساله اصول ریاضی آیزاک نیوتون دیده نمی‌شود، اما جوهر این ایده در آن نهفته است. برای آشنایی بیش‌تر با این مطلب، ر.ک.



درواقع نباید معادله (۲-۱.۱) را «قانون» بنامیم، زیرا نیوتون آن را به صورت تجربی مطرح کرد؛ این رابطه، ساده‌ترین رابطه‌ای است که می‌توان بین تنش و گرادیان سرعت برقرار کرد. اما مشخص شده‌است که مقاومت همه گازها و مایعاتی با وزن مولکولی کم‌تر از حدود  $5000$ ، در برابر جریان، با معادله (۲-۱.۱) توصیف می‌شود و این سیالات را سیالات نیوتونی می‌نامند. معادله (۲-۱.۱) سیالات پلیمری، سوسپانسیون‌ها، خمیرها، دوغاب‌ها، و سایر سیالات پیچیده را توصیف نمی‌کند و آن‌ها را سیالات غیرنیوتونی می‌نامند. مایعات پلیمری را در فصل ۸ شرح می‌دهیم.

معادله (۲-۱.۱) را می‌توان به شیوه دیگری نیز تفسیر کرد. در مجاورت سطح جامد متحرک، در نقطه  $y = 0$ ، سیال اندازه‌حرکتی درجهت  $x$  کسب می‌کند. این سیال، به‌نوبه خود، به لایه مجاور مایع اندازه‌حرکت می‌دهد و حرکت آن را درجهت  $x$  تداوم می‌بخشد. بنابراین اندازه‌حرکت جهت  $x$ ، درجهت مثبت  $y$  در سیال انتقال می‌یابد. پس  $\tau_{yx}$  را می‌توان به صورت شار اندازه‌حرکت جهت  $x$ ، درجهت مثبت  $y$  نیز تعریف کرد که در آن اصطلاح «شار» به معنای «جریان بر واحد سطح» است. این تفسیر با تصویر مولکولی انتقال اندازه‌حرکت و نظریه‌های سینتیک گازها و مایعات سازگار است. چنین تفسیری با تفسیر مشابهی که بعداً برای انتقال گرما و انتقال جرم ارائه خواهد شد نیز هماهنگ است.

ایده‌ای را که در پاراگراف قبل مطرح شد به این صورت نیز می‌توان بیان کرد که اندازه‌حرکت از ناحیه‌ای با سرعت بالا به طرف ناحیه‌ای با سرعت پایین «سرازیر» می‌شود؛ درست همان‌طور که سورت‌مه از ناحیه‌ای مرتفع به ناحیه‌ای با ارتفاع کم سرازیر می‌شود، یا همان‌گونه که گرما از ناحیه‌ای با دمای بالا به ناحیه‌ای با دمای پایین جاری می‌شود. بنابراین می‌توان گرادیان سرعت را «نیروی رانشی» برای انتقال اندازه‌حرکت دانست.

در ادامه مطلب گاهی قانون نیوتون (معادله (۲-۱.۱)) را برحسب نیرو بیان می‌کنیم (که بر ماهیت مکانیکی موضوع تأکید می‌کند) و گاه آن را برحسب انتقال اندازه‌حرکت بیان می‌کنیم (که بر تشابه بین انتقال گرما و انتقال جرم تأکید دارد). این دیدگاه در تفسیرهای فیزیکی سودمند واقع می‌شود.

متخصصان دینامیک سیالات غالباً از نماد  $\nu$  برای نمایش ویسکوزیته سیالات تقسیم بر چگالی (جرم بر واحد حجم) آن‌ها استفاده می‌کنند، پس:

$$\nu = \mu / \rho \quad (3-1.1)$$

این کمیت را ویسکوزیته دینامیکی می‌نامند.

اکنون چند نکته درباره واحدهای کمیت‌هایی که تا این‌جا تعریف کرده‌ایم، بیان می‌کنیم. اگر از نماد [=] به معنای «با واحد»، استفاده کنیم، آنگاه در سیستم SI داریم:  $\tau_{yx} [=] \text{N/m}^2 = \text{Pa}$ ،  $v_x [=] \text{m/s}$ ،  $y [=] \text{m}$ ، به طوری که:

$$\mu = -\tau_{yx} \left( \frac{dv_x}{dy} \right)^{-1} [=] (\text{Pa}) [(\text{m/s})(\text{m}^{-1})]^{-1} = \text{Pa} \cdot \text{s} \quad (4-1.1)$$

زیرا واحدهای دو طرف معادله (۲-۱.۱) باید باهم در توافق باشند. مطالب بالا را جمع‌بندی می‌کنیم و واحدهای دستگاه c.g.s. و دستگاه انگلیسی را نیز در جدول ۱-۱.۱ نشان می‌دهیم. جدول‌های تبدیل پیوست (و) در حل آن دسته از مسائل عددی که در آن‌ها از دستگاه‌های مختلف آحاد استفاده شده‌است، بسیار سودمندند.

ویسکوزیته سیالات مختلف تا چندین مرتبه بزرگی باهم تفاوت دارند؛ مثلاً ویسکوزیته هوا در  $20^\circ\text{C}$  برابر  $1.78 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  و ویسکوزیته گلیسرین در حدود  $1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  است و بعضی از روغن‌های سیلیکونی از این هم ویسکوزترند.

۳. رابطه‌ای به شکل معادله (۲-۱.۱) از نظریه سینتیک گازها (معادله (۷-۴.۱)) نتیجه می‌شود. اما نظریه دقیق گازها که در پیوست (د) شرح داده شده‌است، به روشنی نشان می‌دهد که معادله (۲-۱.۱) به‌عنوان جمله اول یک بسط ظاهر می‌شود و باید انتظار جمله‌های دیگر (مرتبه‌های بالاتر) را نیز داشت. به علاوه، حتی در نظریه سینتیک مقدماتی مایعات نیز رفتار غیرنیوتونی (معادله (۶-۵.۱)) پیش‌بینی می‌شود.





جدول ۱-۱.۱ واحدهای اندازه‌گیری کمیت‌های مرتبط با معادله (۲-۱.۱).

	SI	c.g.s.	انگلیسی
$\tau_{yx}$	Pa	dyn/cm <sup>2</sup>	lb <sub>f</sub> /ft <sup>2</sup>
$v_x$	m/s	cm/s	ft/s
$y$	m	cm	ft
$\mu$	Pa · s	g/cm · s = poise	lb <sub>m</sub> /ft · s
$\nu$	m <sup>2</sup> /s	cm <sup>2</sup> /s	ft <sup>2</sup> /s

تذکر: پاسکال، Pa، همان N/m<sup>2</sup> و نیوتن، N، همان kg · m/s<sup>2</sup> است. «ساتی پوتاز» را به صورت اختصاری «cp» نشان می‌دهند.

جدول ۲-۱.۱ ویسکوزیته آب و هوا در فشار ۱ اتمسفر.

دما $T(^{\circ}\text{C})$	آب (مایع)		هوا	
	ویسکوزیته $\mu(\text{mPa} \cdot \text{s})$	ویسکوزیته سینماتیکی $\nu(\text{cm}^2/\text{s})$	ویسکوزیته $\mu(\text{mPa} \cdot \text{s})$	ویسکوزیته سینماتیکی $\nu(\text{cm}^2/\text{s})$
۰	۱٫۷۸۷	۰٫۰۱۷۸۷	۰٫۰۱۷۱۶	۰٫۱۳۲۷
۲۰	۱٫۰۰۱۹	۰٫۰۱۰۰۳۷	۰٫۰۱۸۱۳	۰٫۱۵۰۵
۴۰	۰٫۶۵۳۰	۰٫۰۰۶۵۸۱	۰٫۰۱۹۰۸	۰٫۱۶۹۲
۶۰	۰٫۴۶۶۵	۰٫۰۰۴۷۴۴	۰٫۰۱۹۹۹	۰٫۱۸۸۶
۸۰	۰٫۳۵۴۸	۰٫۰۰۳۶۵۱	۰٫۰۲۰۸۷	۰٫۲۰۸۸
۱۰۰	۰٫۲۸۲۱	۰٫۰۰۲۹۴۴	۰٫۰۲۱۷۳	۰٫۲۲۹۸

در جدول‌های ۲-۱.۱، ۳-۱.۱ و ۴-۱.۱ داده‌های تجربی<sup>۴</sup> مربوط به سیالات خالص در فشار اتمسفر ارائه شده‌است. توجه کنید که برای گازهای با چگالی پایین، با افزایش دما، ویسکوزیته افزایش می‌یابد، اما برای مایعات معمولاً با افزایش دما، ویسکوزیته کاهش می‌یابد. در گازها اندازه حرکت از طریق مولکول‌هایی منتقل می‌شود که بین برخوردها آزادانه پرواز می‌کنند، اما در مایعات، انتقال عمدتاً ناشی از وجود نیروهای بین مولکولی است که بر هر جفت مولکول، در هنگام دنبال کردن مسیر مارپیچ خود در میان همسایگان، وارد می‌شود. در بخش‌های ۴.۱ و ۵.۱ چند نکته مقدماتی از نظریه سینتیک، برای توضیح وابستگی ویسکوزیته به دما، ارائه می‌شود.

۴. فنون تجربی اندازه‌گیری خواص انتقال به صورت جامع در کتاب زیر ارائه شده‌است:

W. A. Wakeham, A. Nagashima, and J. V. Sengers, *Measurement of the Transport Properties of Fluids*, CRC Press, Boca Raton, Fla. (1991).

منابع داده‌های تجربی عبارت‌اند از:

Landolt-Börnstein, *Zahlenwerte und Funktionen*, Vol. II, 5, Springer (1968-1969); *International Critical Tables*, McGraw-Hill, New York (1926); Y. S. Touloukian, P. E. Liley, and S. C. Saxena, *Thermophysical Properties of Matter*, Plenum Press, New York (1970);

و همچنین تعداد زیادی هندبوک شیمی، فیزیک، دینامیک سیالات، و انتقال گرما.

جدول ۳-۱.۱ ویسکوزیته بعضی از گازها و مایعات در فشار جو.

گازها	ویسکوزیته		مایعات	ویسکوزیته	
	$T(^{\circ}C)$	$\mu(mPa \cdot s)$		$T(^{\circ}C)$	$\mu(mPa \cdot s)$
$i-C_6H_{14}$	۲۳	۰,۰۰۰۷۶	$(C_7H_8)_2O$	۰	۰,۲۸۳
$SF_6$	۲۳	۰,۰۱۵۳		۲۵	۰,۲۲۴
$CH_4$	۲۰	۰,۰۱۰۹	$C_6H_6$	۲۰	۰,۶۴۹
$H_2O$	۱۰۰	۰,۰۱۲۱۱	$Br_2$	۲۵	۰,۷۴۴
$CO_2$	۲۰	۰,۰۱۴۶	Hg	۲۰	۱,۵۵۲
$N_2$	۲۰	۰,۰۱۷۵	$C_7H_5OH$	۰	۱,۷۸۶
$O_2$	۲۰	۰,۰۲۰۴		۲۵	۱,۰۷۴
Hg	۳۸۰	۰,۰۶۵۴		۵۰	۰,۶۹۴
			$H_2SO_4$	۲۵	۲۵,۵۴
			گلیسرین	۲۵	۹۳۴,

جدول ۴-۱.۱ ویسکوزیته بعضی از فلزات مایع.

فلز	دما $T(^{\circ}C)$	ویسکوزیته $\mu(mPa \cdot s)$
Li	۱۸۳,۴	۰,۵۹۱۸
	۲۱۶,۰	۰,۵۴۰۶
	۲۸۵,۵	۰,۴۵۴۸
Na	۱۰۳,۷	۰,۶۸۸۶
	۲۵۰	۰,۳۸۱
	۷۰۰	۰,۱۸۲
K	۶۹,۶	۰,۵۱۵
	۷۰۰	۰,۱۳۶
	۲۵۰	۰,۲۵۸
Hg	-۲۰	۱,۸۵
	۲۰	۱,۵۵
	۱۰۰	۱,۲۱
	۲۰۰	۱,۰۱
Pb	۴۴۱	۲,۱۱۶
	۵۵۱	۱,۷۰۰
	۸۴۴	۱,۱۸۵

## مثال ۱-۱.۱

محاسبه شار اندازه حرکت

شار اندازه حرکت  $\tau_{yx}$  را برحسب  $\text{lb}_f/\text{ft}^2$  محاسبه کنید، هرگاه بدانیم سرعت صفحه پایینی ویسکوزیته  $V$  در شکل ۱-۱.۱ برابر  $1 \text{ ft/s}$  در جهت مثبت  $x$ ، فاصله بین دو صفحه،  $Y$  برابر  $1 \text{ ft}$  و ویسکوزیته سیال،  $\mu$ ، برابر  $0.7 \text{ cp}$  است.

حل

چون  $\tau_{yx}$  برحسب واحدهای انگلیسی خواسته شده است، باید ویسکوزیته را به این دستگاه آحاد تبدیل کنیم. بنابراین، با استفاده از پیوست (و)، مشاهده می شود که:

$$\mu = (0.7 \text{ cp})(2.0886 \times 10^{-5}) = 1.46 \times 10^{-5} \text{ lb}_f\text{s}/\text{ft}^2$$

توزیع سرعت خطی است، بنابراین:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \frac{-1 \text{ ft/s}}{1 \text{ ft}} = -1000 \text{ s}^{-1} \quad (5-1.1)$$

با جایگزینی در معادله (۲-۱.۱) نتیجه می شود:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} = -(1.46 \times 10^{-5})(-1000) = 1.46 \times 10^{-2} \text{ lb}_f/\text{ft}^2 \quad (6-1.1)$$

## ۲.۱ تعمیم قانون ویسکوزیته نیوتون

در بخش قبل ویسکوزیته را با معادله (۲-۱.۱)، برحسب یک جریان برشی حالت پایای ساده تعریف کردیم که در آن  $v_x$  فقط تابع  $y$  است و  $v_y$  و  $v_z$  صفرند. معمولاً ما به جریان‌های پیچیده‌تری علاقه‌مندیم که در آن‌ها سه مؤلفه سرعت ممکن است به هر سه مختص، و احتمالاً به زمان وابسته باشند. بنابراین باید عبارتی کلی‌تر از معادله (۲-۱.۱) داشته باشیم که برای جریان برشی حالت پایا به معادله (۲-۱.۱) ساده شود.

این تعمیم ساده نیست؛ درحقیقت یک‌ونیم قرن طول کشید تا ریاضیدان‌ها این کار را انجام دهند. در این جا مقتضی نیست که همه جزئیات این تعمیم را ارائه دهیم، زیرا می توان این جزئیات را در بسیاری از کتاب‌های دینامیک سیالات یافت.<sup>۱</sup> در عوض ایده‌های اصلی منتهی به کشف تعمیم قانون ویسکوزیته نیوتون را به اختصار توضیح می‌دهیم.

برای این منظور یک الگوی جریان کاملاً کلی را در نظر می‌گیریم که در آن سرعت سیال در محل‌های مختلف می‌تواند در امتدادهای مختلف باشد و می‌تواند به زمان  $t$  نیز وابسته باشد. مؤلفه‌های سرعت از روابط زیر به دست می‌آیند:

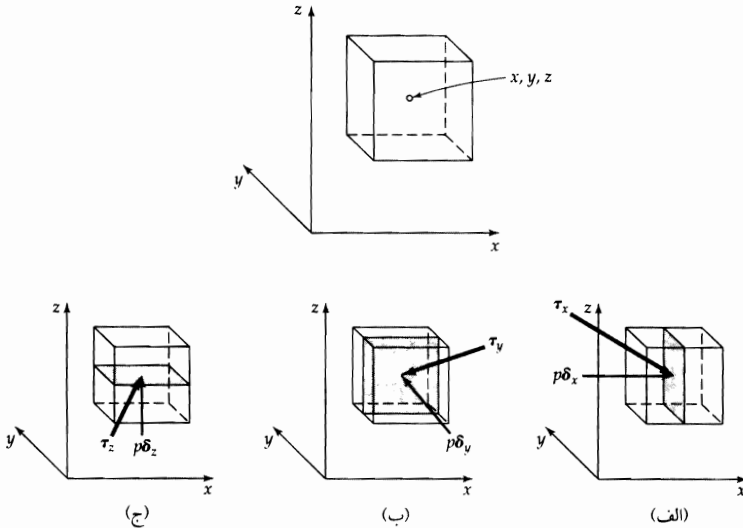
$$v_x = v_x(x, y, z, t); \quad v_y = v_y(x, y, z, t); \quad v_z = v_z(x, y, z, t) \quad (1-2.1)$$

در چنین وضعیتی، به جای  $\tau_{yx}$  که در معادله (۲-۱.۱) ظاهر می‌شود، نه مؤلفه تنش  $\tau_{ij}$  وجود دارد (که در آن  $i$  و  $j$  می‌توانند با  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  مشخص شوند). بنابراین باید کار خود را از تعریف این مؤلفه‌های تنش آغاز کنیم.

1. W. Prager, *Introduction to Mechanics of Continua*, Ginn, Boston (1961), pp. 89-91; R. Aris, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962), pp. 30-34, 99-112; L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, London, 2nd edition (1987), pp. 44-45.

لف داویدویچ لاندائو (۱۹۰۸-۱۹۶۸) به پاس تحقیقاتی که روی هلیوم مایع و دینامیک آبشارها انجام داده بود، در سال ۱۹۶۲ جایزه نوبل گرفت.

در شکل ۱-۲.۱ جزء حجم مکعب شکل کوچکی در داخل میدان جریان نشان داده شده است که هر وجه آن مساحتی برابر واحد دارد. مرکز این جزء حجم در نقطه  $x, y, z$  واقع است.



شکل ۱-۲.۱ فشار و نیروهای ویسکوزیته وارد بر صفحه های واقع در سیال، در امتداد عمود بر سه دستگاه مختصات. مساحت صفحه های سایه خورده برابر واحد است.

در هر لحظه می توان جزء حجم را طوری برش داد که نیمی از سیال داخل آن حذف شود. چنان که در شکل مشاهده می شود، می توان حجم را، به نوبت، عمود بر هریک از سه امتداد مختصات برش داد. پس از آن می توان این پرسش را مطرح کرد که کدام نیرو را باید بر سطح آزاد (سایه خورده) وارد کرد تا جایگزین نیرویی شود که سیال حذف شده بر آن سطح وارد می کرده است. این نیرو از دو بخش تشکیل می شود: بخشی که مربوط به فشار است و بخشی که مربوط به نیروهای ویسکوز است.

نیروی فشار همیشه بر سطح مورد نظر عمود است. بنابراین در بخش (الف) شکل نیرو بر واحد سطح سایه خورده، برداری مانند  $p\delta_x$  است؛ یعنی فشار (کمیتی اسکالر) ضرب در بردار یکه  $\delta_x$  در راستای  $x$ . به همین ترتیب، نیروی وارد بر سطح سایه خورده در (ب) برابر  $p\delta_y$  و در (ج) برابر  $p\delta_z$  خواهد بود. نیروهای فشار هم در هنگام سکون و هم در هنگام حرکت سیال وارد می شوند.

نیروهای ویسکوز فقط هنگامی اهمیت پیدا می کنند که در داخل سیال گرادیان های سرعت وجود داشته باشد. در حالت کلی این نیروها نه بر جزء سطح عمودند و نه با آن موازی اند، بلکه با سطح زاویه تشکیل می دهند (شکل ۱-۲.۱ را ببینید). در بخش (الف) شکل مشاهده می کنیم که نیرو بر واحد سطح،  $\tau_x$ ، بر سطح سایه خورده وارد می شود و در بخش های (ب) و (ج) نیروهای  $\tau_y$  و  $\tau_z$  مشاهده می شوند. هریک از این نیروها (که بردارند) مؤلفه هایی (اسکالر) دارند؛ مثلاً  $\tau_x$  دارای مؤلفه های  $\tau_{xx}$ ،  $\tau_{xy}$ ، و  $\tau_{xz}$  است. بنابراین اکنون می توانیم نیروهای وارد بر سه سطح سایه خورده شکل ۱-۲.۱ را در جدول ۱-۲.۱ خلاصه کنیم. این جدول بندی خلاصه ای از نیروهای وارد بر واحد سطح (تنش ها) در داخل سیال را نشان می دهد که منشأ آن ها هم فشار ترمودینامیکی است و هم تنش های ویسکوز.

گاهی راحت‌ترین است نمادی را به‌کار ببریم که شامل هردو نوع تنش باشد؛ بنابراین تنش‌های مولکولی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pi_{ij} = p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \text{که در آن } i \text{ و } j \text{ می‌توانند } x, y, \text{ یا } z \text{ باشند} \quad (2-2.1)$$

در این رابطه  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر است که هرگاه  $i = j$  برابر ۱ و اگر  $i \neq j$ ، برابر صفر خواهد بود.

درست همان‌طور که در بخش قبل دیدیم،  $\tau_{ij}$  (و هم‌چنین  $\pi_{ij}$ ) را می‌توان به دو روش تعبیر کرد:

واقع در ناحیه‌ای با  $x_i$  کم‌تر بر سیال دارای  $x_i$  بیش‌تر، نیرو وارد می‌کند.  
نیرو درامتداد  $j$  وارد بر واحد سطح عمود بر امتداد  $i$ ، که از آن استنباط می‌شود، سیال

در این کتاب از هردو تعبیر استفاده می‌کنیم؛ تعبیر اول به‌ویژه برای توصیف نیروهایی که سیال بر سطوح صلب وارد می‌کند، مفید است. تنش‌های  $\pi_{xx} = p + \tau_{xx}$ ،  $\pi_{yy} = p + \tau_{yy}$ ،  $\pi_{zz} = p + \tau_{zz}$  را تنش‌های قائم می‌نامند، و بقیه کمیت‌ها، «تانسور» نامیده می‌شوند، و کمیت‌هایی (مانند سرعت) که یک اندیس مربوط به امتدادهای مختصات دارند، «بردار» نامیده می‌شوند. بنابراین  $\tau$  را تانسور تنش ویسکوز (با مؤلفه‌های  $\tau_{ij}$ ) و  $\pi$  را تانسور تنش مولکولی (با مؤلفه‌های  $\pi_{ij}$ ) می‌نامند. هنگامی که احتمال اشتباه وجود ندارد، صفت‌های «ویسکوز» و «مولکولی» را می‌توان حذف کرد. در پیوست (الف) بحثی درمورد بردارها و تانسورها ارائه شده است.

جدول ۱-۲.۱ مؤلفه‌های تانسور تنش مولکولی (تانسور شار اندازه حرکت مولکولی). الف

مؤلفه‌های نیروهای وارد بر واحد سطح وجه سایه خورده (شار اندازه حرکت در وجه سایه خورده)	نیروی برداری بر واحد سطح وارد بر سطح سایه خورده (شار اندازه حرکت در وجه سایه خورده)	مؤلفه‌های تانسور تنش مولکولی		
		مؤلفه $x$	مؤلفه $y$	مؤلفه $z$
$\pi_{xx} = p + \tau_{xx}$	$\pi_{xx} = p + \tau_{xx}$	$\pi_{xx} = p + \tau_{xx}$	$\pi_{xy} = \tau_{xy}$	$\pi_{xz} = \tau_{xz}$
$\pi_{yx} = \tau_{yx}$	$\pi_{yx} = \tau_{yx}$	$\pi_{xy} = \tau_{xy}$	$\pi_{yy} = p + \tau_{yy}$	$\pi_{yz} = \tau_{yz}$
$\pi_{zx} = \tau_{zx}$	$\pi_{zx} = \tau_{zx}$	$\pi_{xz} = \tau_{xz}$	$\pi_{zy} = \tau_{zy}$	$\pi_{zz} = p + \tau_{zz}$

الف) این مؤلفه‌ها را مؤلفه‌های «تانسور شار اندازه حرکت مولکولی» می‌نامند، زیرا چنان‌که در بخش ۴.۱ و پیوست (د) نشان داده شده است، به حرکت‌های مولکولی مربوط می‌شوند. مؤلفه‌های «تانسور شار اندازه حرکت هرفتی» که به حرکت توده‌ای سیال مربوط‌اند در بخش ۷.۱ شرح داده می‌شوند.

حال این پرسش مطرح می‌شود: این تنش‌های  $\tau_{ij}$  با گرادین‌های سرعت در سیال چه رابطه‌ای دارند؟ در تعمیم دادن معادله (۱-۱.۱)، چندین قید به‌شرح زیر برای تنش‌ها قائل شدیم:

- تنش‌های ویسکوز می‌توانند ترکیب‌های خطی همه گرادین‌های سرعت باشند:

$$\tau_{ij} = - \sum_k \sum_l \mu_{ijkl} \frac{\partial v_x}{\partial x_l} \quad \text{در آن } i, j, k, \text{ و } l \text{ می‌توانند } ۱, ۲, ۳ \text{ باشند.} \quad (3-2.1)$$

در این رابطه، ۸۱ کمیت  $\mu_{ijkl}$  «ضریب‌های ویسکوزیته» اند. کمیت‌های  $x_1, x_2, x_3$  در مشتق‌ها نشان‌دهنده مختصات دکارتی  $x, y, z$  هستند و  $v_1, v_2, v_3$  با  $v_x, v_y, v_z$  همانندند.

- تأکید می‌کنیم که مشتق‌ها یا انتگرال‌های زمانی نباید در این عبارت ظاهر شوند. (در سیالات ویسکوکشسان، چنان‌که در فصل ۸ شرح داده می‌شود، مشتق‌های زمانی یا انتگرال‌های زمانی برای توصیف پاسخ‌های کشسان لازم‌اند.)

• هرگاه سیال درحالت چرخش محض باشد، انتظار نمی‌رود هیچ نیروی ویسکوزی وجود داشته باشد. این شرط ایجاب می‌کند که  $\tau_{ij}$  ترکیبی متقارن از گرادیان‌های سرعت باشد. منظور این است که اگر جای  $i$  و  $j$  عوض شود، ترکیب گرادیان‌های سرعت بدون تغییر باقی می‌ماند. می‌توان نشان داد که تنها ترکیب‌های خطی متقارن گرادیان‌های سرعت عبارت‌اند از:

$$(4-2.1) \quad \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{و} \quad \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \delta_{ij}$$

• اگر سیال همسان‌گرد باشد - یعنی هیچ جهت قابل ترجیحی نداشته باشد - آنگاه ضرایب جلو دو عبارت معادله (۴-۲.۱) باید اسکالر باشند، به طوری که:

$$(5-2.1) \quad \tau_{ij} = A \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + B \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \delta_{ij}$$

به این ترتیب تعداد «ضریب‌های ویسکوزیته» از ۸۱ به ۲ کاهش می‌یابد!

• البته می‌خواهیم برای وضعیت جریان شکل ۱-۱.۱، معادله (۵-۲.۱) را به معادله (۲-۱.۱) ساده کنیم. برای این جریان ابتدایی، معادله (۵-۲.۱) به  $\tau_{yx} = A dv_x/dy$  ساده می‌شود، بنابراین ثابت اسکالر  $A$  باید با منفی ویسکوزیته  $\mu$  برابر باشد.

• سرانجام، براساس اتفاق نظر اغلب متخصصان دینامیک سیالات، ثابت اسکالر  $B$  برابر  $\kappa - 2/3\mu$  است که  $\kappa$  را ویسکوزیته اتساعی می‌نامند. دلیل نوشتن  $B$  به این شیوه، آن است که از نظریه سینتیک می‌دانیم که  $\kappa$  برای گازهای تک‌اتمی با چگالی پایین، متحد با صفر است.

بنابراین تعمیم لازم برای قانون ویسکوزیته نیوتون در معادله (۲-۱.۱) مجموعه‌ی نه رابطه است (شش مورد از آن‌ها مستقل‌اند):

$$(6-2.1) \quad \tau_{ij} = -\mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left( \frac{2}{3}\mu - \kappa \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \delta_{ij}$$

در این رابطه  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  و  $i$  و  $j$  می‌توانند مقادیر ۱، ۲، ۳ را اختیار کنند. این روابط برای تنش در سیال نیوتونی با نام‌های ناویه، پواسون، و استوکس همراه‌اند.<sup>۲</sup> در صورت نیاز می‌توان این مجموعه از معادلات را به صورت فشرده‌تر و با نمادگذاری بردار-تانسور پیوست (الف) نیز نوشت:

$$(7-2.1) \quad \tau = -\mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger) + \left( \frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta$$

که در آن  $\delta$  تانسور یکه با مؤلفه‌های  $\delta_{ij}$  و  $\nabla \mathbf{v}$ ، تانسور گرادیان سرعت با مؤلفه‌های  $v_j(\partial/\partial x_i)$  و  $(\nabla \mathbf{v})^\dagger$  «ترانهاده» تانسور گرادیان سرعت با مؤلفه‌های  $v_i(\partial/\partial x_j)$  و  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$  دیورژانس بردار سرعت است.

2. C.-L.-M.-H. Navier, *Ann. Chimie*, **19**, 244-260 (1821); S.-D. Poisson, *J. École Polytech.*, **13**, Cahier 20, 1-174 (1831); G. G. Stokes, *Trans, Camb. Phil. Soc.*, **8**, 287-305 (1845).

کلودلویی-ماری-هانری ناویه (۱۸۳۶-۱۷۸۵) مهندس عمران بود و در ساخت راه و پل تخصص داشت؛ جورج گابریل استوکس (۱۸۱۹-۱۸۰۳) در دانشگاه کمبریج تدریس می‌کرد و رئیس انجمن سلطنتی بود. ناویه و استوکس به خاطر معادلات ناویه-استوکس (فصل ۳) شهرت دارند. هم‌چنین نگاه کنید به

نتیجه مهم این است که تعمیمی از معادله (۲-۱.۱) حاصل شده است و این تعمیم شامل یک ضریب نیست، بلکه شامل دو ضریب<sup>۳</sup> مشخص‌کننده سیال است: ویسکوزیته<sup>۴</sup>  $\mu$  و ویسکوزیته اتساعی<sup>۵</sup>  $\kappa$ . معمولاً در حل مسائل دینامیک سیالات، دانستن  $\kappa$  ضرورت ندارد. اگر سیال گاز باشد، غالباً فرض می‌کنیم رفتاری همانند رفتار گاز ایده‌آل تک‌اتمی دارد که برای آن  $\kappa$  متحد با صفر است. اگر سیال مایع باشد، غالباً فرض می‌کنیم تراکم‌ناپذیر است و در فصل ۳ نشان می‌دهیم که برای مایعات تراکم‌ناپذیر  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ، و بنابراین جمله حاوی  $\kappa$ ، در هر دو حالت، حذف می‌شود. ویسکوزیته اتساعی در توصیف جذب صوت در گازهای چنداتمی<sup>۴</sup> و در توصیف دینامیک سیالات مایعات حاوی حباب‌های گاز اهمیت دارد.<sup>۵</sup>

معادله (۲-۱.۱) یا (۲-۱.۲) معادله مهمی است و همان معادله‌ای است که غالباً از آن استفاده خواهیم کرد. بنابراین به صورت کامل و در دستگاه‌های مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ ، استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ ، و کروی  $(r, \theta, \phi)$  در جدول ب.۱ آمده است. مدخل‌های این جدول برای مختصات خمیده خطی با استفاده از روش‌های تشریح شده در بخش‌های الف.۶ و الف.۷ به دست آمده‌اند. پیشنهاد می‌کنیم که دانشجویان مبتدی با جزئیات به دست آوردن این معادلات درگیر نشوند، بلکه بیشتر روی کاربرد نتایج جدول‌بندی شده تمرکز کنند. در فصل‌های ۲ و ۳ تمرین کافی برای این کار انجام می‌شود.

در دستگاه‌های مختصات خمیده خطی مؤلفه‌های تنش همان معنایی را دارند که در دستگاه‌های مختصات دکارتی دارند. مثلاً  $\tau_{rz}$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای، که در فصل ۲ با آن سروکار داریم، به صورت‌های زیر قابل تعبیر است:

۱. نیروی ویسکوز در امتداد  $z$  روی سطح واحد عمود بر امتداد  $r$ ؛

۲. شار ویسکوز اندازه حرکت  $z$  در امتداد مثبت  $r$ .

در شکل ۲-۱.۱ بعضی از مؤلفه‌های تانسور تنش و جزء سطح‌های معمول که در دینامیک سیالات مطرح می‌شوند، نشان داده شده است.

تجسم تنش‌های برشی معمولاً آسان است، اما تنش‌های قائم ممکن است مشکلات مفهومی ایجاد کنند. مثلاً  $\tau_{zz}$  نیرو بر واحد سطح در امتداد  $z$  روی صفحه عمود بر امتداد  $z$  است. برای جریان سیالی تراکم‌ناپذیر در مجرای همگرای شکل ۲-۱.۳، به طور شهودی می‌دانیم که کاهش  $z$  سبب افزایش  $v_z$  می‌شود، بنابراین طبق معادله (۲-۱.۱) تنش غیرصفر  $\tau_{zz} = -2\mu(\partial v_z / \partial z)$  بر سیال وارد می‌شود.

نکته‌ای در مورد قرارداد علامت تانسور تنش: در ارتباط با معادله (۲-۱.۱) (و در تعمیمی که در این بخش انجام دادیم) بر این نکته تأکید ورزیدیم که  $\tau_{yx}$  نیرو در امتداد مثبت  $x$ ، بر واحد سطح عمود بر امتداد  $y$  است، که همان نیرویی بر واحد سطح است که سیال واقع در ناحیه  $y$  کم‌تر بر سیال واقع در ناحیه  $y$  بیشتر وارد می‌کند. در اغلب کتاب‌های دینامیک سیالات و کشسانی، کلمات «کم‌تر» و «بیش‌تر» جای خود را باهم عوض می‌کنند و معادله (۲-۱.۱) به صورت  $\tau_{yx} = +\mu(dv_x/dy)$  نوشته می‌شود.

۳. بعضی از نویسندگان  $\mu$  را «ویسکوزیته برشی» می‌نامند، اما این نام‌گذاری مناسب نیست، زیرا  $\mu$  می‌تواند هم در جریان‌های برشی مطرح شود و هم در جریان‌های غیربرشی. اصطلاح «ویسکوزیته دینامیکی» نیز گاهی به چشم می‌خورد، اما این اصطلاح در حوزه ویسکوکشسانی معنای بسیار خاصی دارد و اصطلاح مناسبی برای  $\mu$  نیست.

4. L. Landau and E. M. Lifshitz, *op. cit.*, Ch. VIII.

5. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967), pp. 253-255.

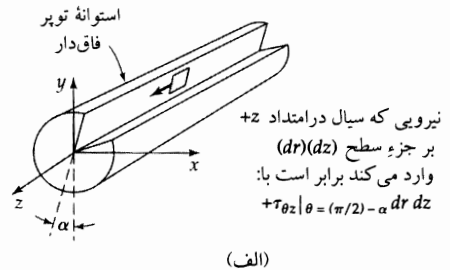
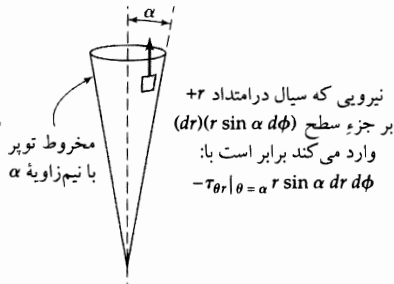
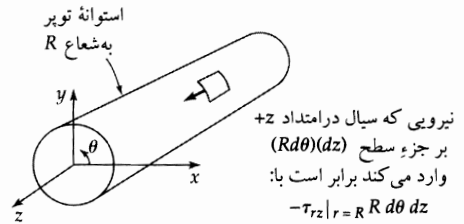
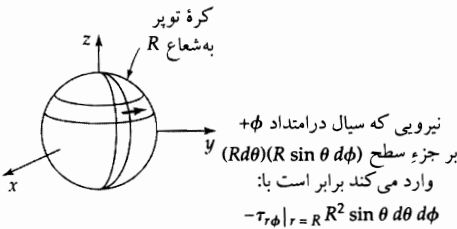
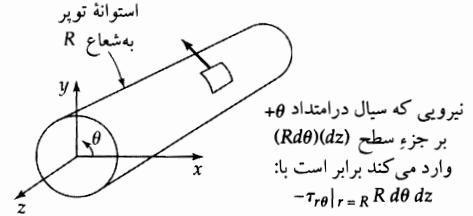
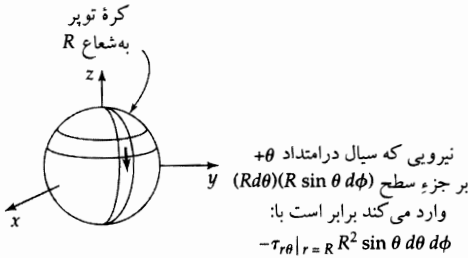
مزایای قرارداد علامت به کار رفته در این کتاب عبارت‌اند از:

(الف) قرارداد علامت در قانون ویسکوزیته نیوتون با قرارداد علامت در قانون رسانش گرمای فوریه و قانون نفوذ فیک سازگار است؛

(ب) قرارداد علامت برای  $\tau_{ij}$  همان قراردادی است که برای شار اندازه حرکت همرفتی  $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$  به کار می‌رود (بخش ۷.۱ و جدول ۲-۲.۱۹ را ببینید)؛

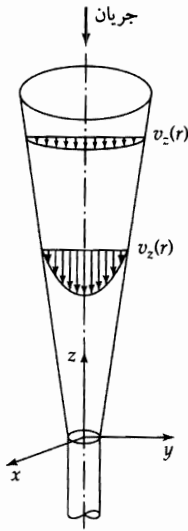
(ج) در معادله ۲-۲.۱، جمله‌های  $p \delta_{ij}$  و  $\tau_{ij}$  علامت یکسان دارند و جمله‌های  $p$  و  $\tau_{ij}$  در فشار مثبت‌اند (مطابق آنچه در ترمودینامیک رایج است)؛

(د) همه جمله‌های دخیل در تولید آنتروپی در معادله (۵-۱.۲۴) علامت یکسان دارند. آشکار است که قرارداد علامت در معادله‌های (۲-۱.۱) و (۶-۲.۱) اختیاری است، و از هر یک از دو قرارداد علامت می‌توان استفاده کرد، به شرط آنکه مفهوم فیزیکی قرارداد علامت به‌وضوح درک شود.



شکل ۲-۲.۱ (الف) برخی از تنش‌های برشی و جزء سطح‌های معمول در دستگاه مختصات استوانه‌ای؛ (ب) برخی از تنش‌های برشی و جزء سطح‌های معمول در دستگاه مختصات کروی.





شکل ۳-۲۰-۱ جریان در مجرای همگرا نمونه‌ای از وضعیتی است که در آن تنش‌های قائم صفر نیستند. چون  $v_z$  تابعی از  $r$  و  $z$  است، مؤلفه تنش قائم  $\tau_{zz} = -2\mu(\partial v_z/\partial z)$  غیرصفر است. به علاوه، از آن‌جا که  $v_r$  به  $r$  و  $z$  وابسته است، مؤلفه تنش قائم  $\tau_{rr} = -2\mu(\partial v_r/\partial r)$  توصیف می‌شوند، تنش‌های قائم روی جدار مجرا صفر می‌شوند، به شرط آن‌که چگالی ثابت باشد (مثال ۱-۱۰-۳ و مسئله ۳-۲۰-۳ را ببینید).

### ۳-۱ وابستگی ویسکوزیته به فشار و دما

در هندبوک‌های گوناگون علوم و مهندسی، داده‌های فراوانی در مورد ویسکوزیته مایعات و گازهای خالص یافت می‌شود.<sup>۱</sup> در نبود داده‌های تجربی و فرصت کافی برای به دست آوردن آن‌ها، می‌توان با استفاده از روش‌های تجربی و به کارگیری داده‌های دیگری که از ماده مورد نظر در دست است، ویسکوزیته آن را تخمین زد. در این‌جا یک رابطه همبستگی حالت‌های متناظر را ارائه می‌دهیم که انجام این قبیل تخمین‌ها را ساده می‌کند و روندهای کلی ویسکوزیته با دما و فشار را، برای سیالات عادی نشان می‌دهد. از اصل حالت‌های متناظر، که مبنای محکم علمی دارد<sup>۲</sup> برای برقراری رابطه همبستگی بین معادله حالت و داده‌های ترمودینامیکی استفاده گسترده‌ای می‌شود.

نمودار شکل ۱-۳-۱ چشم‌اندازی کلی از وابستگی فشار و دما را نشان می‌دهد. ویسکوزیته فروکاسته  $\mu_r = \mu/\mu_c$  بر حسب دمای فروکاسته  $T_r = T/T_c$ ، به ازای مقادیر مختلف فشار فروکاسته  $p_r = p/p_c$  ترسیم شده است. کمیت «فروکاسته» کمیتی است که با تقسیم شدن بر کمیت متناظر در نقطه بحرانی، بدون بعد شده است. این نمودار نشان می‌دهد که با کم تر شدن فشار، ویسکوزیته گاز به مقداری حدی می‌رسد (حد چگالی پایین)؛ برای اغلب گازها، این حد در فشاری نزدیک به ۱ اتمسفر حاصل می‌شود. ویسکوزیته گاز در چگالی پایین، با افزایش دما افزایش می‌یابد، حال آن‌که ویسکوزیته مایع با افزایش دما، کاهش می‌یابد.

مقادیر تجربی ویسکوزیته بحرانی را می‌توان به یکی از روش‌های زیر تخمین زد: (۱) اگر مقدار ویسکوزیته در فشار و دمای فروکاسته مفروض، ترجیحاً در شرایطی نزدیک به شرایط مورد نظر، معلوم باشد، آن‌گاه می‌توان  $\mu_c$  را از رابطه  $\mu_c = \mu/\mu_r$  به دست آورد؛ (۲) اگر داده‌های بحرانی  $p$ - $V$ - $T$  در دسترس باشند، آن‌گاه می‌توان  $\mu_c$  را با 1. J. A. Schetz and A. E. Fuhs (eds.), *Handbook of Fluid Dynamics and Fluid Machinery*, Wiley-Interscience, New York (1996), Vol. 1, Chapter 2; W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, and Y. I. Cho, *Handbook of Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 3rd edition (1998), Chapter 2.

منابع دیگری در پانویست شماره ۴ بخش ۱-۱ گفته شده است.

2. J. Millat, J. H. Dymond, and C. A. Nieto de Castro (eds.), *Transport Properties of Fluids*, Cambridge University Press (1996), Chapter 11, by E. A. Mason and F. J. Uribe and Chapter 12, by M. L. Huber and H. M. M. Hanley.

استفاده از روابط تجربی زیر تخمین زد:

$$\mu_c = 61/6 (MT_c)^{1/2} (\hat{V}_c)^{-2/3} \quad , \quad \mu_c = 7.70 M^{1/2} p_c^{2/3} T_c^{-1/6} \quad (\text{ب، ۱-۳.۱})$$

در این روابط  $\mu_c$  برحسب میکروپوئاز،  $p_c$  برحسب اتمسفر،  $T_c$  برحسب K، و  $\hat{V}_c$  برحسب  $\text{cm}^3/\text{g-mole}$  است. مقادیر ویسکوزیته بحرانی<sup>۳</sup> که با استفاده از روش (۱) محاسبه شده‌اند، در پیوست (ه) به صورت جدول آمده‌است. از شکل ۱-۳.۱ برای تخمین اولیه ویسکوزیته مخلوط‌ها نیز می‌توان استفاده کرد. برای سیالات  $N$  جزئی با کسرهای مولی  $x_\alpha$  خواص «شبه‌بحرانی»<sup>۴</sup> عبارت‌اند از:

$$p'_c = \sum_{\alpha=1}^N x_\alpha p_{c\alpha} \quad T'_c = \sum_{\alpha=1}^N x_\alpha T_{c\alpha} \quad \mu'_c = \sum_{\alpha=1}^N x_\alpha \mu_{c\alpha} \quad (\text{ج، ب، ۲-۳.۱})$$

یعنی می‌توانیم از نمودار درست همان‌طور استفاده کنیم که برای سیالات خالص استفاده می‌شود، با این تفاوت که به جای خواص بحرانی، خواص شبه‌بحرانی را به‌کار می‌بریم. این روش تجربی نتایج معقولی به‌بار می‌آورد، مگر در شرایطی که در مخلوط موادی نامشابه از لحاظ شیمیایی وجود داشته‌باشد، یا خواص بحرانی اجزای سازنده بسیار متفاوت باشند. روش بالاگونه‌های مختلفی دارد و تعدادی روش دیگر نیز موجود است. این روش‌ها را می‌توان در تألیف جامع ریڈ، پراسیتس، و پولینگ یافت.<sup>۵</sup>

### مثال ۱-۳.۱

تخمین ویسکوزیته از روی خواص بحرانی

مطلوب است تخمین ویسکوزیته  $N_2$  در دمای  $50^\circ\text{C}$  و فشار  $854$  اتمسفر، هرگاه بدانیم  $T_c = 126.2 \text{ K}$ ،  $p_c = 35.5 \text{ atm}$ ،  $M = 28.0 \text{ g/g-mole}$

حل

با استفاده از معادله (ب، ۱-۳.۱)، نتیجه می‌شود:

$$\mu_c = 7.70 (28.0)^{1/2} (33.5)^{2/3} (126.2)^{-1/6} \\ = 189 \text{ پوئاز} = 189 \times 10^{-6} \text{ میکروپوئاز} \quad (\text{۳-۳.۱})$$

دما و فشار فروکاسته عبارت‌اند از:

$$T_r = \frac{273.2 + 50}{126.2} = 2.56; \quad p_r = \frac{854}{33.5} = 25.5 \quad (\text{ب، ۴-۳.۱})$$

از شکل ۱-۳.۱، نتیجه می‌شود:  $\mu_r = \mu/\mu_c = 2.39$ . بنابراین مقدار پیش‌بینی شده برای ویسکوزیته برابر است با:

$$\mu = \mu_c (\mu/\mu_c) = (189 \times 10^{-6}) (2.39) = 452 \times 10^{-6} \text{ پوئاز} \quad (\text{۵-۳.۱})$$

مقدار اندازه‌گیری شده<sup>۶</sup> برابر است با:  $455 \times 10^{-6}$  پوئاز. این نتیجه از توافقی خوب و غیرعادی برخوردار است.

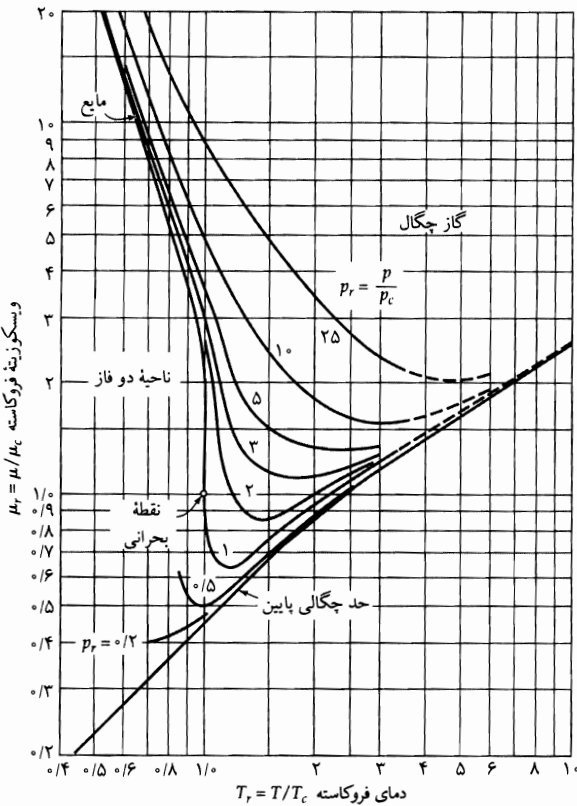
3. O. A. Hougen and K. M. Watson, *Chemical Process Principles*, Part III, Wiley, New York (1947), p. 873.

اولاف آندرئاس هارگن (۱۸۹۳-۱۹۸۶) طی چهار دهه در مهندسی شیمی پیشگام بود؛ او، همراه کی. ام. واتسون و ار. ای. راگاتس، کتاب‌های تأثیرگذاری در ترمودینامیک و سینتیک نوشت.

4. O. A. Hougen and K. M. Watson, *Chemical process Principles*, Part II, Wiley, New York (1947), p. 604.

5. R. C. Reid, J. M. Prausnitz, and B. E. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill, New York, 4th edition (1987), Chapter 9.

6. A. M. J. F. Michels and R. E. Gibson, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A134**, 288-307 (1931).



شکل ۱-۳-۱ ویسکوزیته فروکاسته  
 به صورت تابعی از دمای  
 فروکاسته، به ازای مقادیر مختلف فشار فروکاسته.

#### ۴.۱ نظریه مولکولی ویسکوزیته گازها در چگالی پایین

برای درک بهتر مفهوم انتقال اندازه حرکت مولکولی، این مکانیسم انتقال را از دیدگاه نظریه مقدماتی سینتیک گازها بررسی می‌کنیم. گاز خالصی را در نظر می‌گیریم که از مولکول‌های صلب کروی و غیرجاذب، به قطر  $d$  و جرم  $m$  تشکیل شده است و چگالی عددی (تعداد مولکول‌ها در واحد حجم) را  $n$  می‌گیریم. فرض می‌کنیم غلظت مولکول‌های گاز به اندازه کافی کم باشد تا فاصله بین مولکول‌ها به چندین برابر قطر  $d$  برسد. می‌دانیم<sup>۱</sup> در چنین گازی، در حالت تعادل، سرعت‌های مولکولی امتداد تصادفی دارند و اندازه متوسط آن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید (مسئله ۱-ج):

۱. چهار معادله نخست این بخش بدون اثبات مطرح شده‌اند. در کتاب‌هایی که درباره نظریه سینتیک نوشته شده می‌توان توجهات مفصلی یافت. از جمله این کتاب‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

E. H. Kennard, *Kinetic Theory of Gases*, McGraw-Hill, New York (1938), Chapters II and III.

در فصل هفتم کتاب

E. A. Guggenheim, *Elements of the Kinetic Theory of Gases*, Pergamon Press, New York (1960)

نیز بحث کوتاهی در مورد نظریه مقدماتی ویسکوزیته مطرح شده است. برای اطلاع از جمع‌بندی‌های خواندنی در مورد نظریه سینتیک گازها رجوع کنید به

R. J. Silbey, S. A. Alberty, *physical Chemistry*, Wiley, New York, 3rd edition (2001), Chapter 17, or R. S. Berry, S. A. Rice, and J. Ross, *Physical Chemistry*, Oxford University Press, 2nd edition (2000), Chapter 28.

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}} \quad (۱-۴.۱)$$

که در آن  $K$  ثابت بولتزمن است (پوست  $w$ ) را ببینید). بسامد بمباران مولکولی در واحد سطح، در یک سمت هر سطح ساکن قرارگرفته در معرض گاز، برابر است با:

$$Z = \frac{1}{4} n \bar{u} \quad (۲-۴.۱)$$

فاصله متوسطی که هر مولکول بین دو برخورد متوالی می‌بیند، مسافت آزاد میانگین  $\lambda$  نامیده می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad (۳-۴.۱)$$

به طور متوسط، مولکول‌هایی که به یک صفحه می‌رسند آخرین برخورد خود را در فاصله  $a$  از این صفحه انجام می‌دهند و مقدار تقریبی  $a$  را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$a = \frac{2}{3} \lambda \quad (۴-۴.۱)$$

مفهوم مسافت آزاد میانگین از لحاظ شهودی جذاب است، اما فقط هنگامی با معناست که  $\lambda$  در مقایسه با گستره نیروهای بین مولکولی بزرگ باشد. این مفهوم برای مدل مولکولی کره صلب که در این جا در نظر گرفتیم، مناسب است. برای تعیین ویسکوزیته گاز بر حسب پارامترهای مدل مولکولی، رفتار گاز را وقتی به موازات صفحه  $xz$  با گردان سرعت  $dv_x/dy$  جریان می‌یابد، در نظر می‌گیریم (شکل ۱-۴.۱ را ببینید). فرض می‌کنیم که معادله‌های (۱-۴.۱) تا (۴) در این وضعیت غیرتعادلی، هم‌چنان معتبرند، به شرط آن‌که همه سرعت‌های مولکولی را نسبت به سرعت متوسط  $v$  در ناحیه‌ای محاسبه کنیم که مولکول مفروض آخرین برخورد خود را انجام داده‌است. شار مؤلفه  $x$  اندازه حرکت در صفحه‌ای با  $y$  ثابت با جمع کردن مؤلفه‌های  $x$  اندازه حرکت‌های مولکول‌هایی که در امتداد مثبت  $y$  حرکت می‌کنند، و تفریق کردن مؤلفه‌های  $x$  اندازه حرکت‌های آن‌هایی که در جهت مخالف حرکت می‌کنند، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tau_{yx} = Z m v_x|_{y-a} - Z m v_x|_{y+a} \quad (۵-۴.۱)$$

در نوشتن این معادله، فرض کرده‌ایم که همه مولکول‌ها سرعتی دارند که معرف ناحیه‌ای است که آخرین برخورد خود را در آن ناحیه انجام داده‌اند و توزیع سرعت  $v_x(y)$  در فاصله‌ای چندین برابر مسافت آزاد میانگین، اساساً خطی است. با توجه به فرض اخیر، می‌توان نوشت:

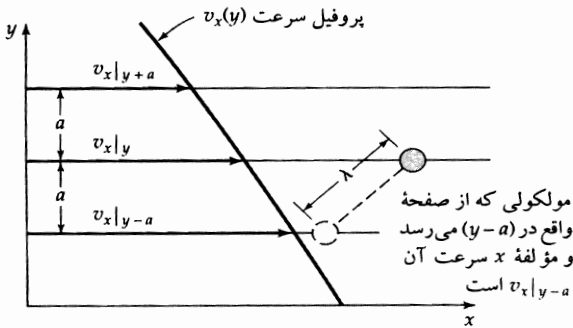
$$v_x|_{y \pm a} = v_x|_y \pm \frac{2}{3} \lambda \frac{dv_x}{dy} \quad (۶-۴.۱)$$

با ترکیب معادله‌های (۱-۴.۱)، (۲-۴.۱)، (۳-۴.۱) و (۶) شار خالص مؤلفه  $x$  اندازه حرکت در امتداد مثبت  $y$  به دست می‌آید:

$$\tau_{yx} = -\frac{1}{3} n m \bar{u} \lambda \frac{dv_x}{dy} \quad (۷-۴.۱)$$

این عبارت همان صورتی را دارد که معادله (۱-۲.۱) برای قانون ویسکوزیته نیوتون داشت. با مقایسه این دو معادله، معادله‌ای برای ویسکوزیته به دست می‌آید:

$$\mu = \frac{1}{3} n m \bar{u} \lambda = \frac{1}{3} \rho \bar{u} \lambda \quad (۸-۴.۱)$$

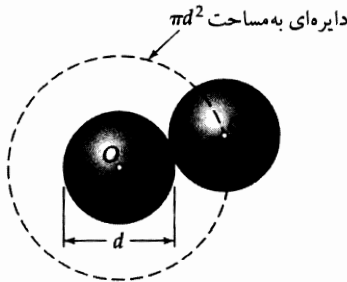


شکل ۱-۴.۱ انتقال مولکولی مؤلفه  $x$  اندازه حرکت از صفحه واقع در  $(y - a)$  واقع در  $y$ .

یا با تلفیق معادله‌های (۱-۴.۱)، (۳، ۸) و نتیجه می‌شود:

$$\mu = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{mKT/\pi}}{\pi d^2} = \frac{3}{3\pi} \frac{\sqrt{\pi mKT}}{\pi d^2} \quad (9-4.1)$$

این عبارت را ماکسول<sup>۲</sup> در سال ۱۸۶۰ برای ویسکوزیته به دست آورد. کمیت  $\pi d$  را مقطع برخورد می‌نامند (شکل ۲-۴.۱ را ببینید).



شکل ۲-۴.۱ وقتی دو کره صلب به قطر  $d$  به هم نزدیک می‌شوند، مرکز یک کره (در نقطه  $O'$ ) دایره‌ای به مساحت  $\pi d^2$  را حول مرکز کره دیگر (در نقطه  $O$ ) «می‌بیند» که برخورد می‌تواند روی آن رخ دهد. مساحت  $\pi d^2$  را «مقطع برخورد» می‌نامند.

عبارتی که در بالا به دست آمد و تصویر کیفی صحیحی که از انتقال اندازه حرکت در گازی با چگالی پایین ارائه می‌دهد، روشن می‌کند که چرا می‌خواستیم در بخش ۱.۱ اصطلاح «شار اندازه حرکت» را برای  $\tau_{yx}$  به کار ببریم. این پیش‌بینی معادله (۹-۴.۱) که  $\mu$  مستقل از فشار است، با داده‌های تجربی به دست آمده تا فشار  $10^5$  اتمسفر در دماهایی بالای دمای بحرانی در توافق است (شکل ۱-۳.۱ را ببینید). وابستگی دمایی پیش‌بینی شده تا این اندازه رضایت‌بخش نیست؛ داده‌های مربوط به گازهای مختلف نشان می‌دهند که  $\mu$  سریع‌تر از  $\sqrt{T}$  افزایش می‌یابد. برای توصیف بهتر وابستگی دمایی  $\mu$ ، باید مدل کره صلب را با مدلی تعویض کنیم که نیروهای جاذبه و دافعه را دقیق‌تر نشان می‌دهد.

۲. جیمز کلرک ماکسول (۱۸۳۱-۱۸۷۹) یکی از بزرگ‌ترین فیزیکدان‌های همه اعصار بود؛ او به‌ویژه به سبب بسط نظریه میدان الکترومغناطیسی و سهمی که در نظریه سینتیک گازها داشت، مشهور است. در ارتباط با نظریه اخیر نگاه کنید به:

J. C. Maxwell, *Phil. Mag.*, **19**, 19, Prop. XIII (1860); S. G. Brush, *Am. J. Phys.*, **30**, 269-281 (1962).

در مورد معادله‌های (۴-۴.۱) و (۹-۴.۱) اختلاف نظرهایی وجود دارد (نگاه کنید به

S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, 3rd edition 1970, p. 98; R. E. Cunningham and R. J. J. Williams, *Diffusion in Gases and Porous Media*, Plenum Press, New York (1980), 6.4.

کنار گذاشتن نظریه‌های مسافت آزاد میانگین و استفاده از معادله بولتزمن برای به دست آوردن توزیع دقیق‌تر سرعت مولکولی در سیستم‌های غیرتعادلی نیز ضرورت دارد. جزئیات کار را به پیوست (د) ماکول می‌کنیم و نتایج اصلی را در این جا نشان می‌دهیم.<sup>۵،۴،۳</sup>

یکی از نظریه‌های دقیق سینتیک گازهای تک‌اتمی با چگالی پایین در اوایل قرن بیستم، توسط چاپمن در انگلستان، و به صورت مستقل از او، توسط انسکوگ در سوئد پی‌ریزی شد. نظریه چاپمن-انسکوگ عبارت‌هایی برای خواص انتقال، برحسب انرژی پتانسیل بین مولکولی  $\phi(r)$ ، ارائه می‌دهد؛  $r$  فاصله بین یک جفت مولکول است که با هم برخورد می‌کنند. بنابراین نیروی بین مولکولی از رابطه  $F(r) = -d\phi/dr$  به دست می‌آید. صورت تابعی دقیق  $\phi(r)$  معلوم نیست؛ اما یک رابطه تجربی رضایت‌بخش برای مولکول‌های غیرقطبی پتانسیل لندارد-جونز (۱۲-۶)<sup>۶</sup> است:

$$\phi(r) = \epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (۱۰-۴.۱)$$

که در آن  $\sigma$  قطر مشخصه مولکول‌هاست که غالباً قطر برخورد نامیده می‌شود و  $\epsilon$  انرژی مشخصه است که عملاً انرژی جاذبه ماکزیمم بین یک جفت مولکول است. این تابع که در شکل ۳-۴.۱ نشان داده شده است، ویژگی‌های مشخصه نیروهای بین مولکولی را نمایش می‌دهد: جاذبه ضعیف در فواصل زیاد و دافعه قوی در فواصل کم. مقدار پارامترهای  $\sigma$  و  $\epsilon$  را برای بسیاری از مواد می‌دانیم؛ در جدول ۱.۵ فهرست بعضی از آن‌ها ارائه شده است و فهرست‌های کامل‌تر را در منابع دیگر می‌توان یافت.<sup>۴</sup>

۳. سیدنی چاپمن (۱۸۸۸-۱۹۷۰) در امپریال کالج لندن تدریس می‌کرد و پس از آن در رصدخانه بولدر در کلرادو به کار پرداخت؛ او گذشته از کار تأثیرگذارش روی نظریه سینتیک گازها، در نظریه سینتیک پلاسماها و نظریه شعله و انفجار نیز سهم داشت. دیوید انسکوگ (۱۸۸۴-۱۹۴۷) به سبب کار روی نظریه‌های سینتیک گازهای با چگالی پایین و بالا، شهرت دارد. مرجع استاندارد در مورد نظریه سینتیک چاپمن-انسکوگ برای گازهای رقیق

S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, 3rd edition (1970); pp. 407-409

تاریخچه کوتاهی از نظریه سینتیک ارائه می‌دهد. هم‌چنین نگاه کنید به

D. Enskog, *Inaugural Dissertation*, Uppsala (1917), in addition too J. H. Ferziger and H. G. Kaper *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*, North-Holland, Amsterdam (1972)

شرحی بسیار خواندنی در مورد نظریه مولکولی است.

۴. تعمیم نظریه چاپمن-انسکوگ به مخلوط‌های گازی چندجزئی توسط کورتیس-هیرشفلدر،<sup>۵</sup> هم‌چنین جدول‌های مفید برای محاسبات را می‌توان در کتاب زیر یافت:

J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, New York, 2nd corrected printing (1964),

هم‌چنین نگاه کنید به

C. F. Curtiss, *J. Chem. Phys.*, **49**, 2917-2919 (1968).

و نیز مراجع گفته شده در پیوست (ه). جوزف اولکلند هیرشفلدر (۱۹۱۱-۱۹۹۰)، مدیر مؤسس انستیتو شیمی نظری در دانشگاه ویسکانسین، در نیروهای بین مولکولی و کاربردهای نظریه سینتیک تخصص داشت.

5. C. F. Curtiss and J. O. Hirschfelder, *J. Chem. phys.*, **17**, 550-555 (1949).

6. J. E. (Lennard-) Jones, *Proc. Roy. Soc.*, **A106**, 441-462, 463-477 (1924).

هم‌چنین نگاه کنید به

R. J. Silbey and R. A. Alberty, *Physical Chemistry*, Wiley, 2nd edition (2001), §§11.10, 16.14, and 17.9; and R. S. Berry, S. A. Rice, and J. Ross, *Physical Chemistry*, Oxford University Press, 2nd edition (2000), §10.2.

وقتی  $\sigma$  و  $\varepsilon$  معلوم نباشند، می‌توان آن‌ها را از روی خواص سیال در نقطه بحرانی (c)، مایع در نقطه جوش متعارفی (b)، یا جامد در نقطه ذوب (m)، و با استفاده از روابط تجربی زیر تخمین زد:

$$\varepsilon/K = 0.77 T_c \quad \sigma = 0.841 \tilde{V}_c^{1/3} \quad \sigma = 2.44 (T_c/p_c)^{1/3} \quad (\text{ج، الف، ب، ۱۱-۴.۱})$$

$$\varepsilon/K = 1.15 T_b \quad \sigma = 1.166 \tilde{V}_{b,liq}^{1/3} \quad (\text{الف، ب، ۱۲-۴.۱})$$

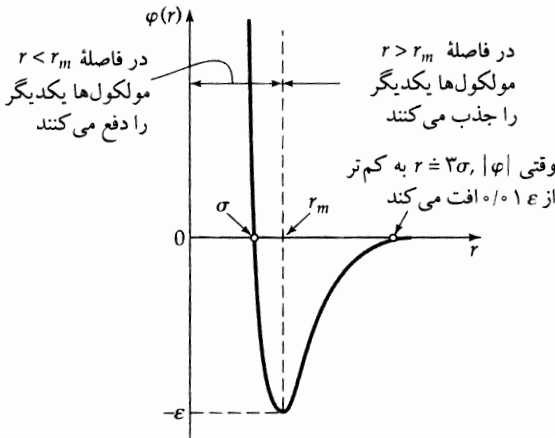
$$\varepsilon/K = 1.92 T_m \quad \sigma = 1.222 \tilde{V}_{m,sol}^{1/3} \quad (\text{الف، ب، ۱۳-۴.۱})$$

در این روابط  $\varepsilon/K$  و  $T$  برحسب K،  $\sigma$  برحسب آنگستروم ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ )،  $\tilde{V}$  برحسب  $\text{cm}^3/\text{g-mole}$  و  $p_c$  برحسب اتمسفر است.

ویسکوزیته یک گاز تک‌اتمی با وزن مولکولی  $M$  را می‌توان برحسب پارامترهای لنارد-جونز، به صورت زیر نوشت:

$$\mu = \frac{5}{16} \frac{\sqrt{\pi m K T}}{\pi \sigma^2 \Omega_{\mu}} \quad \text{یا} \quad \mu = 2.6693 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{M T}}{\sigma^2 \Omega_{\mu}} \quad (۱۴-۴.۱)$$

در صورت دوم این معادله، اگر  $T [=] \text{K}$  و  $\sigma [=] \text{\AA}$ ، آن‌گاه  $\mu [=] \text{g/cm} \cdot \text{s}$ . کمیت بدون بُعد  $\Omega_{\mu}$  تابعی با تغییرات آهسته از دمای بدون بُعد  $K T / \varepsilon$ ، از مرتبه بزرگی واحد است که در جدول ۲.۰ه گفته شده است. این تابع را (انتگرال برخورد برای ویسکوزیته) می‌نامند، زیرا جزئیات مسیریایی را که مولکول‌ها در حین برخورد دوتایی دنبال می‌کنند، به حساب می‌آورد. اگر گاز از کره‌های صلبی به قطر  $\sigma$  (به جای مولکول‌های حقیقی با نیروهای جاذبه و دافعه) تشکیل شده بود، آن‌گاه  $\Omega_{\mu}$  دقیقاً برابر واحد می‌شد. بنابراین تابع  $\Omega_{\mu}$  را می‌توان به صورت تابع توصیف‌کننده انحراف از رفتار کره صلب تعبیر کرد.



شکل ۴-۴.۱ تابع انرژی پتانسیل  $\varphi(r)$  که برهم‌کنش دو مولکول غیرقطبی کروی را توصیف می‌کند. پتانسیل لنارد-جونز (۶-۱۲)، که از معادله (۱۰-۴.۱) به دست می‌آید، یکی از چندین رابطه تجربی است که برای برآزش به این منحنی پیشنهاد شده‌اند به ازای  $r < r_m$  مولکول‌ها یکدیگر را دفع، و به ازای  $r > r_m$  مولکول‌ها یکدیگر را جذب می‌کنند.

اگرچه معادله (۱۴-۴.۱) یکی از نتایج نظریه سینتیک گازهای تک‌اتمی است، برای گازهای چنداتمی هم، به همان خوبی، کاربرد دارد. علت این است که در معادله پایستگی اندازه حرکت در برخورد بین مولکول‌های چنداتمی، مختصات مرکز جرم، از مختصات داخلی بسیار مهم‌تر است [نگاه کنید به بخش ۳.۰ (ب)]. وابستگی دمای پیش‌بینی شده توسط معادله (۱۴-۴.۱) با آنچه از خط چگالی پایین در رابطه همبستگی تجربی شکل ۱-۳.۱ حاصل می‌شود، توافق خوبی دارد. ویسکوزیته گازها در چگالی پایین با دما، تقریباً با توان  $0.76$  تا  $1.0$  دمای مطلق، افزایش می‌یابد و مستقل از فشار است.

برای محاسبه ویسکوزیته مخلوط گازی، می‌توان از تعمیم چندجزئی نظریه چاپمن-انسکوگ استفاده کرد.<sup>۵،۴</sup> راه دیگر، استفاده از فرمول تجربی بسیار رضایت‌بخش زیر است:<sup>۶</sup>

$$\mu_{\text{mix}} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{x_{\alpha} \mu_{\alpha}}{\sum_{\beta} x_{\beta} \Phi_{\alpha\beta}} \quad (۱۵-۴.۱)$$

که در آن کمیت‌های بدون بُعد  $\Phi_{\alpha\beta}$  عبارت‌اند از:

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( 1 + \frac{M_{\alpha}}{M_{\beta}} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_{\alpha}}{\mu_{\beta}} \right)^{1/2} \left( \frac{M_{\beta}}{M_{\alpha}} \right)^{1/2} \right]^2 \quad (۱۶-۴.۱)$$

در این جا  $N$  تعداد گونه‌های شیمیایی در مخلوط،  $x_{\alpha}$  کسر مولی گونه‌های  $\alpha$ ،  $\mu_{\alpha}$  ویسکوزیته گونه خالص  $\alpha$  در سیستم دما و فشار، و  $M_{\alpha}$  وزن مولکولی گونه  $\alpha$  است. با استفاده از معادله (۱۶-۴.۱) می‌توان مقادیر اندازه‌گیری شده سرعت مخلوط‌ها را، با انحراف متوسط ۲٪، به دست آورد. وابستگی ویسکوزیته مخلوط به ترکیب شیمیایی، برای بعضی مخلوط‌ها، به‌ویژه مخلوط‌های گازهای سبک و سنگین، به شدت غیرخطی است (مسئله الف ۲ را ببینید). به‌عنوان جمع‌بندی می‌توان گفت که معادله‌های (۱۶-۴.۱)، (۱۵-۴.۱) فرمول‌های مفیدی برای محاسبه ویسکوزیته گازها و مخلوط‌های گازی غیرقطبی در چگالی پایین، با استفاده از مقادیر جدول‌بندی شده پارامترهای نیروی بین‌مولکولی  $\sigma$  و  $\varepsilon/K$  به‌شمار می‌روند. نتایج حاصل از این فرمول‌ها برای گازهای شامل مولکول‌های قطبی یا طویل، قابل اعتماد نیست، زیرا بین این نوع مولکول‌ها میدان‌های نیروی وابسته به زاویه وجود دارد. برای بخارهای قطبی، مانند  $\text{H}_2\text{O}$ ،  $\text{CH}_3\text{OH}$ ،  $\text{NH}_3$ ، و  $\text{NOCl}$  استفاده از صورت اصلاح‌شده معادله (۱۶-۴.۱) برای منظور کردن وابستگی زاویه‌ای، نتایج خوبی به‌بار آورده است.<sup>۸</sup> برای گازهای سبک  $\text{H}_2$  و  $\text{He}$  در پایین‌تر از دمای حدود  $100^\circ \text{K}$ ، آثار کوانتومی را نیز باید به حساب آورد.<sup>۹</sup>

فرمول‌های تجربی دیگری هم برای تخمین زدن ویسکوزیته گازها و مخلوط‌های گازی موجود است. یکی از مراجع استاندارد کتاب رید، پراسنیتس، و پولینگ است.<sup>۱۰</sup>

### مثال ۴.۱

محاسبه ویسکوزیته گاز خالص با چگالی پایین

ویسکوزیته گاز  $\text{CO}_2$  را در دماهای  $300^\circ$ ،  $400^\circ$  و  $800^\circ \text{K}$  و فشار ۱ اتمسفر محاسبه کنید.

حل

با استفاده از معادله (۱۶-۴.۱) از جدول ۱.۰، پارامترهای لئارد-جونز برای گاز  $\text{CO}_2$  را به دست می‌آوریم:  $\varepsilon/K = 190^\circ \text{K}$

و  $\sigma = 3.996 \text{ \AA}$ . وزن مولکولی  $\text{CO}_2$  برابر است با  $44.01$ .

7. C. R. Wilke, *J. Chem. Phys.*, **18**, 517-519 (1950), see also J. W. Buddenberg and C. R. Wilke, *Ind. Eng. Chem.*, **41**, 1345-1347 (1949).

8. E. A. Mason and L. Monchick, *J. chem. phys.*, **35**, 1676-1697 (1961) and **36**, 1622-1639, 2746-2757 (1962).

9. J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *op. cit.*, Chapter 10; H. T. Wood and C. F. Curtiss, *J. Chem. Phys.*, **41**, 1167-1173 (1964); R. J. Munn, F. J. Smith, and E. A. Mason, *J. Chem. Phys.*, **42**, 537-539 (1965); S. Imam-Rahajoe, C. F. Curtiss, and R. B. Bernstein, *J. Chem. Phys.*, **42**, 530-536 (1965).

10. R. C. Reid, J. M. Prausnitz, and B. E. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill, New York, 4th edition (1987).



با قرار دادن  $M$  و  $\sigma$  در معادله (۱۴-۴.۱) نتیجه می‌شود:

$$\mu = 2,6693 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{44,01T}}{(3,996)^2 \Omega_\mu} = 1,109 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{T}}{\Omega_\mu} \quad (17-4.1)$$

که در آن  $T [=] K$  و  $\mu [=] g/cm \cdot s$ . بقیه محاسبات را به صورت جدول نشان می‌دهیم.

ویسکوزیته (g/cm · s)					
T(K)	KT/ε	Ω <sub>μ</sub>	√T	پیش‌بینی شده	مشاهده شده <sup>۱۱</sup>
۲۰۰	۱,۰۵۳	۱,۵۴۸	۱۴,۱۴	۱,۰۱۳ × ۱۰ <sup>-۴</sup>	۱,۰۱۵ × ۱۰ <sup>-۴</sup>
۳۰۰	۱,۵۸	۱,۲۸۶	۱۷,۳۲	۱,۴۹۴ × ۱۰ <sup>-۴</sup>	۱,۴۹۵ × ۱۰ <sup>-۴</sup>
۸۰۰	۴,۲۱	۰,۹۵۹۵	۲۸,۲۸	۳,۲۶۹ × ۱۰ <sup>-۴</sup>	...

داده‌های تجربی، برای مقایسه، در آخرین ستون نشان داده شده‌اند. می‌توان توافق خوبی را انتظار داشت، زیرا پارامترهای لئارد-جونز جدول ۱.۰ با استفاده از داده‌های ویسکوزیته به دست آمده‌اند.

### مثال ۲-۴.۱

پیش‌بینی ویسکوزیته مخلوط گازی با چگالی پایین

ویسکوزیته مخلوط گازی زیر را در فشار ۱ اتمسفر و دمای ۲۹۳ K، با استفاده از داده‌های مربوط به اجزای خالص آن در فشار و دمای مشابه، تخمین بزنید:

گونه α	کسر مولی x <sub>α</sub>	وزن مولکولی M <sub>α</sub>	ویسکوزیته μ <sub>α</sub> (g/cm · s)
۱. CO <sub>2</sub>	۰,۱۳۳	۴۴,۰۱	۱۴۶۲ × ۱۰ <sup>-۷</sup>
۲. O <sub>2</sub>	۳۲,۰۰	۰,۰۳۹	۲۰۳۱ × ۱۰ <sup>-۷</sup>
۳. N <sub>2</sub>	۰,۸۲۸	۲۸,۰۲	۱۷۵۴ × ۱۰ <sup>-۷</sup>

حل

از معادله‌های (۱۶-۴.۱) و (۱۵) استفاده می‌کنیم (ترتیب گفته شده باید رعایت شود). محاسبات را می‌توان به صورت جدول زیر خلاصه کرد:

α	β	M <sub>α</sub> /M <sub>β</sub>	μ <sub>α</sub> /μ <sub>β</sub>	Φ <sub>αβ</sub>	∑ <sub>β=۱</sub> <sup>r</sup> x <sub>β</sub> Φ <sub>αβ</sub>
۱.	۱	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۰,۷۶۳
	۲	۱,۳۷۵	۰,۷۲۰	۰,۷۳۰	
	۳	۱,۵۷۱	۰,۸۳۴	۰,۷۲۷	
۲.	۱	۰,۷۲۷	۱,۳۸۹	۱,۳۹۴	۱,۰۵۷
	۲	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	
	۳	۱,۱۴۲	۱,۱۵۸	۱,۰۰۶	
۳.	۱	۰,۶۳۷	۱,۲۰۰	۱,۳۷۰	۱,۰۴۹
	۲	۰,۸۷۶	۰,۸۶۴	۰,۹۹۳	
	۳	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	

سپس، از معادله (۱۵-۴.۱) نتیجه می‌شود:

$$\mu = \frac{(0,1333)(1462)(10^{-7})}{0,763} + \frac{(0,039)(2031)(10^{-7})}{1,057} + \frac{(0,828)(1754)(10^{-7})}{1,049}$$

$$= 1714 \times 10^{-7} \text{ g/cm} \cdot \text{s}$$

مقدار مشاهده شده<sup>۱۲</sup> برابر است با:  $1793 \times 10^{-7} \text{ g/cm} \cdot \text{s}$ .

### ۵.۱ نظریه مولکولی ویسکوزیته مایعات

یکی از نظریه‌های دقیق سینتیک خواص انتقال مایعات تک‌اتمی را کرک‌وود و همکارانش پی‌ریزی کردند.<sup>۱</sup> اما این نظریه به نتایجی منتهی نمی‌شود که کاربرد آسان داشته باشند. نظریه‌ای قدیمی‌تر که توسط آیرینگ<sup>۲</sup> و همکارانش پی‌ریزی شده است، اگرچه مبنای نظری سست‌تری دارد، تصویری کیفی از مکانیسم انتقال اندازه حرکت در مایعات ارائه می‌دهد و تخمین ویسکوزیته از روی سایر خواص فیزیکی را، ممکن می‌کند. این نظریه را اجمالاً بررسی می‌کنیم. در مایع خالص در حال سکون، هر مولکول مدام در حرکت است. اما به علت فشردگی، این حرکت عمدتاً به ارتعاش هر مولکول در داخل «قفسی» محدود می‌شود که توسط نزدیک‌ترین همسایگان آن مولکول تشکیل شده است. این قفس توسط یک سد انرژی به ارتفاع  $\Delta \bar{G}^\ddagger / \bar{N}$  نشان داده می‌شود که در آن  $\Delta \bar{G}^\ddagger$  انرژی آزاد فعال‌سازی مولی، برای گریز از قفس در سیال ساکن است (شکل ۱-۵.۱ را ببینید). طبق نظر آیرینگ، مایع در حال سکون به‌طور پیوسته تجدید آرایش می‌یابد و در آن هر بار یک مولکول از «قفس» خود به «حفره» مجاور می‌گریزد و به این ترتیب مولکول‌ها با جهش‌هایی به مسافت  $a$  و بسامد  $\nu$  در مولکول، در هر یک از امتدادهای مختصات، حرکت می‌کنند. بسامد این حرکت از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\nu = \frac{KT}{h} \exp(-\Delta \bar{G}^\ddagger / RT) \quad (1-5.1)$$

که در آن  $K$  و  $h$  ثابت‌های بولتزمن و پلانک،  $\bar{N}$  عدد آووگادرو، و  $R = \bar{N}K$  ثابت گاز است (پیوست (و) را ببینید). در سیالی که با گرادیان سرعت  $dv_x/dy$ ، درامتداد  $x$  جریان دارد، بسامد تجدید آرایش مولکولی افزایش می‌یابد. این اثر را می‌توان با توجه به تغییر شکل سد انرژی پتانسیل، تحت تنش اعمالی  $\tau_{yx}$  (شکل ۱-۵.۱) توضیح داد؛ داریم:

$$-\Delta \bar{G}^\ddagger = -\Delta \bar{G}_0^\ddagger \pm \left(\frac{a}{\delta}\right) \left(\frac{\tau_{yx} \bar{V}}{\gamma}\right) \quad (2-5.1)$$

12. F. Herning and L. Zipperer, *Gas-und Wasserfach*, **79**, 49-54, 69-73 (1936).

1. J. H. Irving and J. G. Kirkwood, *J. Chem. Phys.*, **18**, 817-823 (1950); R. J. Bearman and J. G. Kirkwood, *J. Chem. Phys*, **28**, 136-146 (1958).

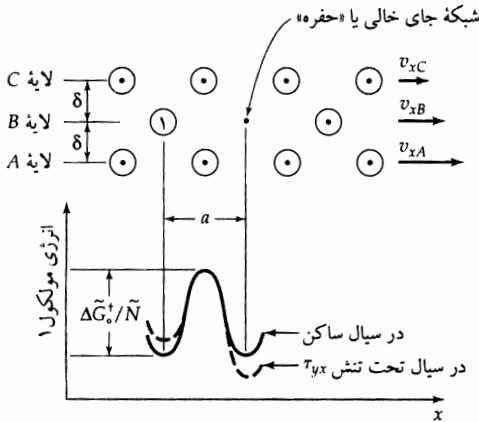
برای مطالعه منابع بیشتر نگاه کنید به

John Gamble Kirkwood, *Collected Works*, Gordon and Breach, New York (1967).

جان گمبل کرک‌وود (۱۹۵۹-۱۹۰۷) در پی‌ریزی نظریه سینتیک مایعات، خواص محلول‌های پلیمری، نظریه الکترولیت‌ها، و ترمودینامیک فرایندهای بازگشت‌ناپذیر سهم مهمی داشت.

2. S. Glasstone, K. J. Laidler, and H. Eyring, *Theory of Rate Processes*, McGraw-Hill, New York (1941), Chapter 9; H. Eyring, D. Henderson, B. J. Stover, and E. M. Eyring, *Statistical Mechanics*, Wiley, New York (1964), Chapter 16. see also R. J. Silbey and R. A. Alberty, *Physical Chemistry*, Wiley, 3rd edition (2001), 20.1; and R. S. Berry, S. A. Rice, and J. Ross, *Physical Chemistry*, Oxford University Press, 2nd edition (2000), Ch. 29.

هنری آیرینگ (۱۹۸۱-۱۹۰۱) نظریه‌هایی برای خواص انتقال پی‌ریزی کرد که بر مدل‌های ساده فیزیکی مبتنی بودند؛ او نظریه آهنگ‌های واکنش مطلق را نیز پی‌ریزی کرد.



شکل ۱-۵.۱ تصویر فرایند گریز در جریان مایع. مولکول ۱ باید از «گلوگاه» بگذرد تا به جای خالی برسد.

که در آن حجم یک مول مایع و  $(a/\delta)(\tau_{yx}\tilde{V}/2) \pm$  تقریبی از کار انجام شده روی مولکول‌ها در حین حرکت آن‌ها به طرف بالای سد انرژی است، که با تنش برشی اعمالی (علامت به اضافه)، یا برخلاف تنش برشی اعمالی (علامت منهای)، در حرکت است. اکنون  $\nu_+$  را به صورت بسامد جهش‌های روبه جلو و  $\nu_-$  را به عنوان بسامد جهش‌های روبه عقب تعریف می‌کنیم. از معادله‌های (۱-۵.۱) و (۲-۵.۱)، نتیجه می‌شود که:

$$\nu_{\pm} = \frac{KT}{h} \exp(-\Delta\tilde{G}_*^{\ddagger}/RT) \exp(\pm a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT) \quad (3-5.1)$$

سرعت خالص لغزش به جلوی مولکول‌های لایه A، نسبت به مولکول‌های لایه B (شکل ۱-۵.۱) درست برابر مسافت پیموده شده در هر جهش (a) ضرب در بسامد خالص جهش‌های روبه جلو ( $\nu_+ - \nu_-$ ) است، در نتیجه:

$$v_{xA} - v_{xB} = a(\nu_+ - \nu_-) \quad (4-5.1)$$

در فاصله بسیار کوچک  $\delta$  بین لایه‌های A و B می‌توان توزیع سرعت را خطی فرض کرد، به طوری که:

$$-\frac{dv_x}{dy} = \left(\frac{a}{\delta}\right) (\nu_+ - \nu_-) \quad (5-5.1)$$

سرانجام، با ترکیب معادله‌های (۳-۵.۱) و (۵-۵.۱)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} -\frac{dv_x}{dy} &= \left(\frac{a}{\delta}\right) \left(\frac{KT}{h} \exp(-\Delta\tilde{G}_*^{\ddagger}/RT)\right) (\exp(+a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT) - \exp(-a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT)) \\ &= \left(\frac{a}{\delta}\right) \left(\frac{KT}{h} \exp(-\Delta\tilde{G}_*^{\ddagger}/RT)\right) \left(2 \sinh \frac{a\tau_{yx}\tilde{V}}{2\delta RT}\right) \end{aligned} \quad (6-5.1)$$

به این ترتیب رابطه‌ای غیرخطی بین تنش برشی (شار اندازه حرکت) و گرادیان سرعت پیش‌بینی می‌شود؛ به عبارت دیگر جریان غیرنیوتونی است. این نوع رفتار غیرخطی را در فصل ۸ شرح می‌دهیم.

اما وضعیت معمول آن است که  $a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT \ll 1$ . بنابراین می‌توانیم از سری تیلر (بخش ج. ۲)  $\sinh x = x + (1/3!)x^3 + (1/5!)x^5 + \dots$  استفاده کنیم و فقط یک جمله را نگه داریم. پس معادله (۶-۵.۱) صورتی نظیر معادله (۲-۱.۱) پیدا می‌کند و در آن ویسکوزیته از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mu = \left(\frac{\delta}{a}\right)^2 \frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}} \exp(\Delta\tilde{G}_*^{\ddagger}/RT) \quad (7-5.1)$$

عامل  $\delta/a$  را می‌توان برابر واحد گرفت. این ساده‌سازی سبب کاهش دقت نمی‌شود، زیرا  $\Delta\tilde{G}^\ddagger$  معمولاً به روش تجربی تعیین می‌شود تا معادله‌ها با داده‌های تجربی ویسکوزیته توافق پیدا کنند.

معلوم شده که انرژی آزاد فعال‌سازی،  $\Delta\tilde{G}^\ddagger$ ، که از طریق برازش معادله (۷-۵.۱) با داده‌های تجربی روی نمودار ویسکوزیته برحسب دما تعیین شده‌باشد، برای سیالی مفروض تقریباً ثابت است و به‌سادگی به انرژی داخلی تبخیر در نقطه جوش متعارفی مربوط می‌شود؛ داریم:<sup>۳</sup>

$$\Delta\tilde{G}^\ddagger \approx 0.408 \Delta\tilde{U}_{\text{vap}} \quad (۸-۵.۱)$$

با استفاده از این رابطه تجربی و قرار دادن  $\delta/a = ۱$ ، معادله (۷-۵.۱) چنین نوشته می‌شود:

$$\mu = \frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}} \exp(0.408 \Delta\tilde{U}_{\text{vap}}/RT) \quad (۹-۵.۱)$$

با استفاده از قاعده تروتون می‌توان انرژی تبخیر در نقطه جوش متعارفی را تخمین زد:

$$\Delta\tilde{U}_{\text{vap}} \approx \Delta\tilde{H}_{\text{vap}} - RT_b \cong 9.4 RT_b \quad (۱۰-۵.۱)$$

با این تقریب، معادله (۹-۵.۱) چنین نوشته می‌شود:

$$\mu = \frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}} \exp(3.78 T_b/T) \quad (۱۱-۵.۱)$$

معادله‌های (۹-۵.۱) و (۱۱) با رابطه تجربی قدیمی و موفق  $\mu = A \exp(B/T)$  در توافق است. این نظریه، اگرچه ماهیت صرفاً تقریبی دارد و کاهش مشاهده‌شده ویسکوزیته با دما را نشان می‌دهد، اما در هنگام استفاده از معادله‌های (۹-۵.۱) و (۱۱)، تا ۳۰٪ خطا متداول است. از این معادله‌ها نباید در مورد مولکول‌های باریک و بلند، مانند  $n\text{-C}_{20}\text{H}_{42}$  استفاده کرد.

علاوه بر این‌ها، فرمول‌های تجربی بسیاری برای پیش‌بینی ویسکوزیته مایعات و مخلوط‌های مایع وجود دارند. برای آشنایی با این فرمول‌ها باید به کتاب‌های درسی شیمی فیزیک و مهندسی شیمی رجوع کنید.<sup>۴</sup>

### مثال ۱-۵.۱

تخمین ویسکوزیته مایع خالص ویسکوزیته بنزن مایع  $\text{C}_6\text{H}_6$  را در  $20^\circ\text{C}$  ( $293/2\text{K}$ ) تخمین بزنید.

حل

معادله (۱۱-۵.۱) را با اطلاعات زیر به‌کار ببرید:

$$\tilde{V} = 89.0 \text{ cm}^3/\text{g-mole} \quad T_b = 80.1^\circ\text{C}$$

3. J. F. Kincaid, H. Eyring, and A. E. Stearn, *Chem. Revs.*, **28**, 301-365 (1941).

۴. مثلاً نگاه کنید به

J. R. Partington, *Treatise on Physical Chemistry*, Longmans, Green (1949); R. C. Reid, J. M. Prausnitz, and B. E. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill, New York, 4th edition (1987). see also P. A. Egelstaff, *An Introduction to the Liquid State*, Oxford University Press, 2nd edition (1994), Chapter 13; and J. P. Hansen and I. R. McDonald, *Theory of Simple Liquids*, Academic Press, London (1986) Chapter 8.

چون این اطلاعات در دستگاه واحدهای c.g.s. داده شده است، از مقادیر عدد آوگادرو و ثابت پلانک در همین دستگاه استفاده می‌کنیم. با قرار دادن در معادله (۱۱-۵.۱) نتیجه می‌شود:

$$\mu = \frac{(6,023 \times 10^{23})(6,624 \times 10^{-27})}{(89,0)} \exp\left(\frac{3,8 \times (273,2 + 80,1)}{293,2}\right)$$

$$= 4,5 \times 10^{-3} \text{ g/cm} \cdot \text{s} \text{ یا } 4,5 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s} \text{ یا } 0,45 \text{ mPa} \cdot \text{s}$$

## ۶.۱ ویسکوزیته سوسپانسیون‌ها و امولسیون‌ها

تا این‌جا در مورد سیالاتی بحث کردیم که از یک فاز همگن تشکیل شده‌اند. اکنون می‌خواهیم سیستم‌های دوفاز را نیز به‌اجمال بررسی کنیم. البته توصیف کامل این نوع سیستم‌ها نسبتاً پیچیده است، اما غالباً می‌توان سوسپانسیون یا امولسیون را با یک سیستم تک‌فاز فرضی جایگزین کرد، سپس این سیستم را می‌توان با استفاده از قانون ویسکوزیته نیوتون (معادله (۲-۱.۱) یا (۲-۲.۱)) با دو تغییر، توصیف کرد؛ این تغییرات عبارت‌اند از: (۱) به‌جای ویسکوزیته  $\mu$  از ویسکوزیته موثر  $\mu_{\text{eff}}$  استفاده می‌کنیم (۲) سپس مؤلفه‌های سرعت و تنش را دوباره (بدون تغییر نماد) به‌صورت کمیت‌های مشابه متوسط‌گیری شده روی حجمی بزرگ، نسبت به فواصل بین ذره‌ای و کوچک نسبت به ابعاد سیستم جریان، تعریف می‌کنیم. این نوع نظریه، مادام که جریان پایاست، نتایج مطلوبی به‌بار می‌آورد. در جریان‌های وابسته به‌زمان، نشان داده شده که قانون ویسکوزیته نیوتون مناسب نیست و سیستم‌های دوفازی را باید مواد ویسکوکشسان تلقی کرد.<sup>۱</sup>

نخستین سهم مهم در پی‌ریزی نظریه ویسکوزیته سوسپانسیون‌های کره‌ها از آن انشتین است.<sup>۲</sup> او سوسپانسیونی

۱. برای سوسپانسیون‌های رقیق از کره‌های صلب، رفتار ویسکوکشسان خطی توسط

H. Fröhlich and R. Sack, *Proc. Roy. Soc., A* **185**, 415-430 (1946)

مطالعه شده است، و برای امولسیون‌های رقیق، مطالعات مشابهی توسط

J. G. Oldroyd, *Proc. Roy. Soc., A* **218**, 122-132 (1953)

انجام شده است. در هر دو اثر، سیال با مدل جفریز توصیف شده است (معادله (۴-۴.۸) را ببینید). نویسندگان روابطی بین سه پارامتر مدل جفریز و ثابت‌های توصیف‌کننده ساختار سیستم دوفاز یافتند (کسر حجمی ماده معلق و سرعت‌های دو فاز). برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد سوسپانسیون‌ها و رئولوژی، نگاه کنید به

R. B. Bird and J. M. Wiest, Chapter 3 in *Handbook of Fluid Dynamics and Fluid Machinery*, J.

A. Schetz and A. E. Fuhs (eds.), Wiley, New York (1996).

۲. آلبرت انشتین (۱۸۷۹-۱۹۵۵) برای توضیح اثر فوتوالکتریک جایزه نوبل گرفت، نه برای پی‌ریزی نظریه نسبیت خاص. اثر تأثیرگذار

او در باب سوسپانسیون‌ها در

A. Einstein, *Ann. Phys. (Leipzig)*, **19**, 289-306 (1906); erratum, *ibid.*, **24**, 591-592 (1911)

منتشر شد. در مقاله نخست، انشتین در پی‌ریزی رابطه دچار خطا شد و به‌جای  $\frac{5}{4}\phi$  از  $\phi$  استفاده کرد. پس از انجام آزمایش‌هایی که نشان داد معادله او با داده‌های تجربی توافق ندارد، این ضریب را دوباره محاسبه کرد. رابطه اولی که انشتین به‌دست آورد نسبتاً طولانی است؛ برای اطلاع از رابطه فشرده‌تر، نگاه کنید به

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 2nd edition. (1987), pp. 73-75.

فرمول‌بندی ریاضی رفتار سیال چند فاز را می‌توان در منبع زیر یافت:

D. A. Drew and S. L. Passman, *Theory of Multicomponent Fluids*, Springer, Berlin (1999).

را که از کره‌های صلب در نظر گرفت چنان رقیق بود که در آن حرکت یک کره در جریان سیال درهمسایگی هر کره دیگر تأثیر نمی‌گذاشت. در این صورت کافی بود که فقط حرکت سیال را دور یک کره تحلیل کند و آثار ناشی از کره‌های مختلف را با هم جمع کند. معادله انشتین چنین است:

$$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu_0} = 1 + \frac{5}{2}\phi \quad (1-6.1)$$

که در آن  $\mu_0$  ویسکوزیته محیط سوسپانسیون و  $\phi$  کسر حجمی کره‌هاست. نتیجه پیشگامانه انشتین به طرق متعدد اصلاح شده‌است که در این جا چند مورد از آن‌ها را شرح می‌دهیم.

برای سوسپانسیون‌های رقیق ذراتی با شکل‌های مختلف، ثابت  $\frac{5}{2}$  را باید توسط ضریب متفاوتی که به شکل ذره وابسته است، جایگزین کرد. سوسپانسیون‌های ذرات دراز یا انعطاف‌پذیر ویسکوزیته غیرنیوتونی دارند.  $^{۶,۵,۴,۳}$  برای سوسپانسیون‌های غلیظ ذرات کروی (یعنی  $\phi$  بزرگ‌تر از حدود  $0.5^\circ$ ) برهم‌کنش‌های ذرات درخور اعتنا می‌شود. چندین عبارت نیمه تجربی مطرح شده‌است که یکی از ساده‌ترین آن‌ها معادله مونی است:<sup>۷</sup>

$$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu_0} = \exp\left(\frac{\frac{5}{2}\phi}{1 - (\phi/\phi_0)}\right) \quad (2-6.1)$$

که در آن  $\phi_0$  ثابتی تجربی، بین حدود  $0.74^\circ$  و  $0.52^\circ$  است و این مقادیر با مقدار  $\phi$ ، به ترتیب، برای فشرده‌ترین چینش و چینش مکعبی متناظرند.

رهیافت دیگر برای سوسپانسیون‌های غلیظ ذرات کروی «نظریه سلول» است که در آن انرژی تلف شده در «جریان فشرده» بین کره‌ها بررسی می‌شود. به عنوان مثالی از این نوع نظریه معادله گراهام<sup>۸</sup> را انتخاب می‌کنیم

$$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu_0} = 1 + \frac{5}{2}\phi + \frac{9}{4} \left( \frac{1}{\psi(1 + \frac{1}{\psi})^2(1 + \psi)^2} \right) \quad (3-6.1)$$

که در آن  $\psi = 2[(1 - \sqrt{\phi/\phi_{\text{max}}})/\sqrt{\phi/\phi_{\text{max}}}]$  و  $\phi_{\text{max}}$  کسر حجمی متناظر با فشرده‌ترین چینش کره‌هاست که به صورت تجربی تعیین شده‌است. وقتی  $\phi \rightarrow 0$ ، این عبارت به معادله انشتین ساده می‌شود و هرگاه  $\phi \rightarrow \phi_{\text{max}}$ ، به معادله فرانکل-آکریوس<sup>۹</sup> تبدیل می‌شود.

برای سوسپانسیون‌های غلیظ ذرات غیرکروی، می‌توان از معادله کریگر-داخرتی<sup>۱۰</sup> استفاده کرد:

$$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu_0} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\text{max}}}\right)^{-A\phi_{\text{max}}} \quad (4-6.1)$$

3. H. L. Frisch and R. Simha, Chapter 14 in *Rheology*, Vol. 1, (F. R. Eirich, ed.), Academic Press, New York (1956), section II and III.

4. E. W. Merrill, Chapter 4 in *Modern Chemical Engineering*, Vol. 1, (A. Acrivos, ed.), Reinhold, New York (1963), p. 165.

5. E. J. Hinch and L. G. Leal, *J. Fluid Mech.*, **52**, 683-712 (1972); 76, 187-208 (1976).

6. W. R. Schowalter, *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*, Pergamon, Oxford (1978), Chapter 13.

7. M. Mooney, *J. Coll. Sci.*, **6**, 162-170 (1951).

8. A. L. Graham, *Appl. Sci. Res.*, **37**, 275-286 (1981).

9. N. A. Frankel and A. Acrivos, *Chem. Engr. Sci.*, **22**, 847-853 (1967).

10. I. M. Krieger and T. J. Dougherty, *Trans. Soc. Rheol.*, **3**, 137-152 (1959).

در جدول ۱-۶.۱ پارامترهای  $A$  و  $\phi_{max}$  برای کاربرد در این معادله، برای سوسپانسیون‌های چندین ماده گفته شده است.<sup>۱۱</sup>

جدول ۱-۶.۱ ثابت‌های بدون بُعد برای کاربرد در معادله (۱-۶.۱).

مرجع	$\phi_{max}$	$A$	سیستم
الف	۰٫۷۱	۲٫۷	کره‌ها (زیرمیکرونی)
ب	۰٫۶۱	۳٫۲۸	کره‌ها ( $40 \mu m$ )
ج	۰٫۶۹	۳٫۲۵	ژیپس ساییده
ج	۰٫۵۵	۵٫۰	تیتانیم دی‌اکسید
ج	۰٫۳۵	۹٫۰	لاتریت
د	۰٫۲۶۸	۹٫۲۵	میله‌های شیشه‌ای ( $30 \times 700 \mu m$ )
د	۰٫۳۸۲	۹٫۸۷	صفحه‌های شیشه‌ای ( $100 \times 400 \mu m$ )
د	۰٫۳۷۱	۵٫۸	دانه‌های کوارتز ( $53-76 \mu m$ )
ب	۰٫۳۷۴	۳٫۸	تاره‌های شیشه (نسبت محوری ۷)
ب	۰٫۲۶	۵٫۰۳	تاره‌های شیشه (نسبت محوری ۱۴)
ب	۰٫۲۳۳	۶٫۰	تاره‌های شیشه (نسبت محوری ۲۱)

<sup>a</sup> C. G. dekruij, E. M. F. vanlevsel, A, Vrij, and W. B. Russel, in *Viscoelasticity and Rheology* (A. S. Lodge, M. Renardy, J. A. Nohel, eds.), Academic Press, New York (1985).

<sup>b</sup> H. Gieseckus, in *physical properties of Foods* (J. Jowitt et al., eds.), Applied Science Publishers (1983), Chapter 13.

<sup>c</sup> R. M. Turian and T.-F. Yuan, *AIChE Journal*, **23**, 232-243 (1977).

<sup>d</sup> B. Clarke, *Trans. Inst. Chem. Eng.*, **45**, 251-256 (1966).

در سوسپانسیون‌های غلیظ رفتار غیرنیوتونی مشاهده می‌شود، حتی وقتی ذرات معلق کروی باشند؛ یعنی ویسکوزیته به گرادبان سرعت وابسته است و ممکن است در برش متفاوت با جریان دنباله‌ای باشد. بنابراین، معادله‌هایی مانند معادله (۱-۶.۱) را باید با احتیاط به‌کار برد.

برای امولسیون‌ها یا سوسپانسیون‌های ریخته‌شده، که در آن ماده معلق ممکن است در معرض گردش داخلی قرار گیرد، اما بازم شکل کروی دارد، ویسکوزیته مؤثر می‌تواند بسیار کم‌تر از ویسکوزیته مؤثر سوسپانسیون‌های کره‌های توپر باشد. در این صورت ویسکوزیته امولسیون‌های رقیق توسط معادله نیلر توصیف می‌شود:<sup>۱۲</sup>

$$\frac{\mu_{eff}}{\mu_0} = 1 + \left( \frac{\mu_0 + \frac{5}{3}\mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \right) \phi \quad (5-6.1)$$

11. H. A. Barnes, J. F. Hutton, and K. Walters, *An Introduction to Rheology*, Elsevier, Amsterdam (1989), p. 125.

12. G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc.*, **A138**, 41-48 (1932).

جفری اینگرام نیلر (۱۹۷۵-۱۸۸۶) به‌خاطر پاشش نیلر، گرده‌های نیلر، و تحقیقاتی که روی نظریه آماری تلاطم انجام داد، شهرت دارد؛ او به روش‌هایی ساده برای حل بسیاری از مسئله‌های پیچیده اقدام کرد؛ روش‌هایی که در آن‌ها از فرایندهای فیزیکی حداکثر استفاده به‌عمل می‌آمد.

که در آن  $\mu_1$  ویسکوزیته فاز پراکنده است. اما باید توجه داشته باشید که آلاینده‌های فعال سطحی که غالباً، حتی در مایعاتی که با دقت تصفیه شده‌اند، حضور دارند، می‌توانند گردش داخلی را به شیوه مؤثری متوقف کنند؛<sup>۱۳</sup> بنابراین ریزقطره‌ها به صورت کره‌های صلب رفتار می‌کنند.

برای سوسپانسیون‌های رقیق کره‌های باردار، معادله (۶-۱) را می‌توان با معادله اسمولوخوفسکی<sup>۱۴</sup> جایگزین کرد:

$$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu_0} = 1 + \frac{5}{2} \phi \left( 1 + \frac{(D\zeta/2\pi R)^2}{\mu_0 k_e} \right) \quad (6-1)$$

که در آن  $D$  ثابت دی‌الکتریک سیال معلق،  $k_e$  رسانندگی الکتریکی ویژه سوسپانسیون،  $\zeta$  پتانسیل الکتروستاتیکی ذرات، و  $R$  شعاع ذره است. بارهای سطحی در سوسپانسیون‌های پایدار غیرمعمول نیستند. سایر نیروهای سطحی، که به این خوبی درک نشده‌اند، نیز اهمیت دارند و غالباً سبب می‌شوند ذرات توده‌های ناهمگیر تشکیل دهند.<sup>۴</sup> در این جا بازمه با رفتار غیرنیوتونی سروکار داریم.<sup>۱۵</sup>

## ۷.۱ انتقال همرفتی اندازه حرکت

تا این جا انتقال مولکولی اندازه حرکت را شرح دادیم، و این شرح به مجموعه‌ای از کمیت‌های  $\pi_{ij}$  منتهی شد که شار مؤلفه  $j$  اندازه حرکت روی سطحی عمود بر امتداد  $i$  را به دست می‌دهند. سپس  $\pi_{ij}$  را به گرادینان‌های سرعت و فشار مربوط کردیم و دریافتیم که این رابطه شامل دو پارامتر ماده  $\mu$  و  $\kappa$  است. سپس در بخش‌های ۴.۱ و ۵.۱ دیدیم که چگونه با در نظر گرفتن حرکت تصادفی مولکول‌ها در سیال - یعنی حرکت تصادفی مولکولی نسبت به حرکت توده سیال - ویسکوزیته حاصل می‌شود. به علاوه در مسئله ۱ ج. ۳ نشان می‌دهیم که سهم فشار در  $\pi_{ij}$  از حرکات مولکولی تصادفی ناشی می‌شود.

به علاوه اندازه حرکت را می‌توان توسط جریان حجمی سیال انتقال داد و این فرایند را انتقال همرفتی می‌نامند. برای شرح این فرایند از شکل ۷.۱-۱ استفاده می‌کنیم و روی ناحیه‌ای مکعبی در فضا تمرکز می‌کنیم که سیال در آن جریان دارد. در مرکز این مکعب (واقع در نقطه  $(x, y, z)$  بردار سرعت سیال،  $\mathbf{v}$  است. مانند بخش ۲.۱، سه صفحه دوه‌دو عمود برهم در نظر می‌گیریم (صفحه‌های سایه‌خورده) که از نقطه  $x, y, z$  می‌گذرند و این پرسش را مطرح می‌کنیم که از هریک از این صفحه‌ها چه مقدار اندازه حرکت عبور می‌کند. سطح هریک از این صفحه‌ها را برابر واحد می‌گیریم. آهنگ جریان حجمی در واحد سطح سایه‌خورده در (الف) برابر است با  $v_x$ . این سیال اندازه حرکت  $\rho \mathbf{v}$  بر واحد حجم را با خود حمل می‌کند. بنابراین شار روی سطح سایه‌خورده برابر است با  $v_x \rho \mathbf{v}$ . توجه کنید که این شار همان شار اندازه حرکت از ناحیه‌ای با  $x$  کم‌تر به ناحیه‌ای با  $x$  بیش‌تر است. به همین ترتیب، شار روی سطح سایه‌خورده در (ب) برابر است با  $v_z \rho \mathbf{v}$ ، و شار اندازه حرکت روی سطح سایه‌خورده در (ج) برابر  $v_z \rho \mathbf{v}$  است.

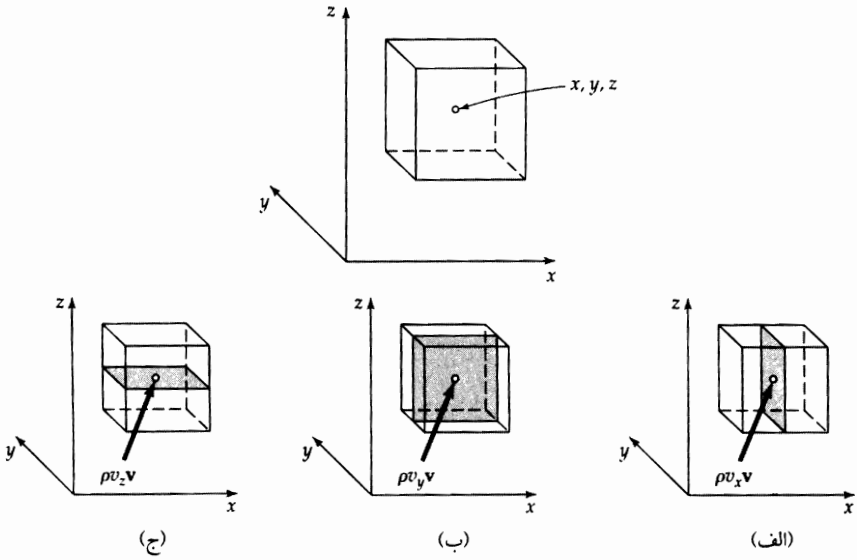
13. V. G. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962), Chapter 8.

و نیامین گریگوریوویچ لویچ (۱۹۸۷-۱۹۱۷)، فیزیکدان و الکتروشیمی‌دان، سهم به‌سزایی در حل مسئله‌های مهم نفوذ و انتقال جرم داشت.

14. M. von Smoluchowski, *Kolloid Zeits.*, **18**, 190-195 (1916).

15. W. B. Russel, *The Dynamics of Colloidal Systems*, U. of Wisconsin Press, Madison (1987), Chapter 4; W. B. Russel, D. A. Saville, and W. R. Schowalter, *Colloidal Dispersions*, Cambridge University Press (1989); R. G. Larson, *The Structure and Rheology of Complex Fluids*, Oxford University Press (1998).





شکل ۱-۷.۱ شارهای اندازه حرکت همرفتی در صفحه‌هایی با سطح واحد و عمود بر امتدادهای مختصات.

این سه بردار  $\rho v_x \mathbf{v}$ ،  $\rho v_y \mathbf{v}$ ، و  $-\rho v_z \mathbf{v}$  شار اندازه حرکت روی سه ناحیه عمود بر محورهای مختصات مربوطه را توصیف می‌کنند. هریک از این بردارها یک مؤلفه  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  دارد. این مؤلفه‌ها را می‌توان مطابق جدول ۱-۷.۱ آراست. کمیت  $\rho v_x v_y$  شار همرفتی مؤلفه  $y$  اندازه حرکت روی سطحی عمود بر امتداد  $x$  است. این کمیت را باید با کمیت  $\tau_{xy}$  مقایسه کرد که شار مولکولی مؤلفه  $y$  اندازه حرکت روی سطحی عمود بر امتداد  $x$  است. قرارداد علامت برای هردو حالت انتقال یکسان است.

مجموعه نُه مؤلفه اسکالر ارائه شده در جدول ۱-۷.۱ را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

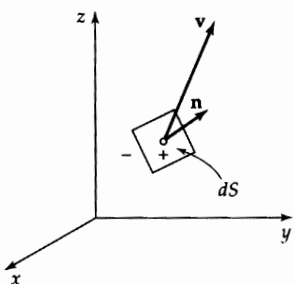
$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} &= \left( \sum_i \delta_i \rho v_i \right) \mathbf{v} = \left( \sum_i \delta_i \rho v_i \right) \left( \sum_j \delta_j v_j \right) \\ &= \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \rho v_i v_j \end{aligned} \quad (1-7.1)$$

چون هر مؤلفه  $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$  دو اندیس دارد، که هرکدام به یکی از امتدادهای مختصات مربوط است،  $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$  یک تانسور مرتبه دوم است؛ آن را تانسور شار اندازه حرکت همرفتی می‌نامند. جدول ۱-۷.۱ برای مؤلفه‌های تانسور شار اندازه حرکت همرفتی را باید با جدول ۱-۲.۱ برای مؤلفه‌های تانسور شار اندازه حرکت مولکولی مقایسه کرد.

جدول ۱-۷.۱ خلاصه مؤلفه‌های شار اندازه حرکت همرفتی.

امتداد قائم بر سطح سایه خورده	شار اندازه حرکت در سطح سایه خورده	مؤلفه‌های شار اندازه حرکت همرفتی		
		مؤلفه $x$	مؤلفه $y$	مؤلفه $z$
$x$	$\rho v_x \mathbf{v}$	$\rho v_x v_x$	$\rho v_x v_y$	$\rho v_x v_z$
$y$	$\rho v_y \mathbf{v}$	$\rho v_y v_x$	$\rho v_y v_y$	$\rho v_y v_z$
$z$	$\rho v_z \mathbf{v}$	$\rho v_z v_x$	$\rho v_z v_y$	$\rho v_z v_z$

سپس این پرسش را مطرح می‌کنیم که شار اندازه حرکت همرفتی در جزء سطحی که جهت آن با بردار یکه قائم  $\mathbf{n}$  نشان داده می‌شود، چه قدر است؟ (شکل ۲-۷.۱ را ببینید). اگر سیالی با سرعت  $\mathbf{v}$  از سطح  $dS$  عبور کند، آهنگ جریان حجمی آن در عبور از این سطح، از سمت منفی به سمت مثبت، برابر است با  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})dS$ ، و شار اندازه حرکت همرفتی برابر است با  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\rho\mathbf{v}$ . طبق قواعد نمادگذاری برداری-تانسوری که در پیوست (الف) ارائه شده است، این شار را می‌توان به صورت  $[\mathbf{n} \cdot \rho\mathbf{v}\mathbf{v}]$ ؛ یعنی ضرب نقطه‌ای بردار قائم یکه  $\mathbf{n}$  با تانسور شار اندازه حرکت همرفتی  $\rho\mathbf{v}\mathbf{v}$  نیز نوشت. اگر فرض کنیم  $\mathbf{n}$  متوالیاً بردارهای یکه در امتدادهای  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  باشند (یعنی  $\delta_x$ ،  $\delta_y$ ، و  $\delta_z$ )، مدخل‌های دومین ستون جدول ۱-۷.۱ را به دست می‌آوریم.



شکل ۲-۷.۱ شار اندازه حرکت در صفحه‌ای با جهت‌گیری اختیاری  $\mathbf{n}$  برابر است با:  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\rho\mathbf{v} = [\mathbf{n} \cdot \rho\mathbf{v}\mathbf{v}]$ .

به همین ترتیب، شار اندازه حرکت مولکولی کل در سطحی با جهت‌گیری  $\mathbf{n}$  از رابطه  $[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi}] = p\mathbf{n} + [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}]$  به دست می‌آید. درمی‌یابیم که این شار از سمت منفی به سمت مثبت سطح است. این کمیت را می‌توان به صورت نیرو بر واحد سطح تعبیر کرد که ماده منفی بر ماده مثبت وارد می‌کند. تعبیر هندسی  $[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi}]$  در مسئله ۲.د۱ ارائه می‌شود. در این فصل انتقال مولکولی اندازه حرکت را در بخش ۲.۱ تعریف کردیم و انتقال همرفتی اندازه حرکت را در این بخش توصیف کردیم. در هنگام نوشتن موازنه‌های لایه‌ای اندازه حرکت در فصل ۲، و موازنه کلی اندازه حرکت در فصل ۳، تعریف شار اندازه حرکت مرکب را، که مجموع شار اندازه حرکت مولکولی و شار اندازه حرکت همرفتی است، سودمند می‌یابیم:

$$\phi = \boldsymbol{\pi} + \rho\mathbf{v}\mathbf{v} = p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{v}\mathbf{v} \quad (۲-۷.۱)$$

در نظر داشته باشید که سهم  $p\boldsymbol{\delta}$  حاوی عامل سرعت نیست و فقط تابع فشار است؛ ترکیب  $\rho\mathbf{v}\mathbf{v}$  شامل چگالی و حاصل ضرب‌های مؤلفه‌های سرعت است؛ سهم  $\boldsymbol{\tau}$  شامل ویسکوزیته است و در مورد سیال نیوتونی با گرا دیان سرعت تغییرات خطی دارد. همه این کمیت‌ها تانسورهای مرتبه دوم اند.

اغلب اوقات با مؤلفه‌های این کمیت‌ها سروکار داریم. مثلاً مؤلفه‌های  $\phi$  عبارت‌اند از:

$$\phi_{xx} = \pi_{xx} + \rho v_x v_x = p + \tau_{xx} + \rho v_x v_x \quad (الف \ ۳-۷.۱)$$

$$\phi_{xy} = \pi_{xy} + \rho v_x v_y = \tau_{xy} + \rho v_x v_y \quad (ب \ ۳-۷.۱)$$

و غیره، که همتای مدخل‌های جدول‌های ۱-۲.۱ و ۱-۷.۱ به شمار می‌روند. نکته مهمی که باید به خاطر سپرد این است که:  $\phi_{xy}$  = شار مرکب مؤلفه  $y$  اندازه حرکت روی سطحی عمود بر امتداد  $x$ ، از طریق مکانیسم‌های مولکولی و همرفتی است.

اندیس دوم مؤلفه اندازه حرکت انتقال یافته، و اندیس نخست امتداد انتقال را نشان می‌دهد.

نمادها و نام‌گذاری‌های مختلف مورداستفاده برای شارهای اندازه حرکت، در جدول ۲-۷.۱ گفته شده‌اند. برای همه شارها از یک قرارداد علامت استفاده می‌شود.

جدول ۲-۷.۱ نمادگذاری شارهای اندازه حرکت.

نماد	معنا	مرجع
$\rho v v$	تانسور شار اندازه حرکت همرفتی	جدول ۱-۷.۱
$\tau$	تانسور شار اندازه حرکت ویسکوز الف	جدول ۱-۲.۱
$\pi + p\delta = \tau$	تانسور شار اندازه حرکت مولکولی ب	جدول ۱-۲.۱
$\phi = \pi + \rho v v$	تانسور شار اندازه حرکت مرکب	معادله (۲-۷.۱)

الف) برای سیالات ویسکوکشسان (فصل ۸ را ببینید)، این تانسور را باید تانسور شار اندازه حرکت ویسکوکشسان، یا تانسور تنش ویسکوکشسان نامید.

ب) این تانسور را می‌توان تانسور تنش مولکولی نامید.

### پرسش‌های تشریحی

۱. قانون ویسکوزیته نیوتون و قانون کشسانی هوک را مقایسه کنید. منشأ این «قوانین» چیست؟
۲. نشان دهید که «اندازه حرکت بر واحد سطح بر واحد زمان» ابعادی همانند «نیرو بر واحد سطح» دارد.
۳. مکانیسم‌های مولکولی و همرفتی انتقال اندازه حرکت را مقایسه کنید.
۴. معانی فیزیکی پارامترهای لنارد-جونز را شرح دهید و نشان دهید که چگونه می‌توان با استفاده از داده‌های ویسکوزیته آن‌ها را تعیین کرد؟ آیا نتایج تعیین شده منحصر به فردند؟
۵. رابطه وابستگی سرعت مایعات و گازهای با چگالی پایین با دما و فشار چیست؟
۶. پتانسیل لنارد-جونز فقط به فاصله بین مولکولی وابسته است. به نظر شما این نوع پتانسیل برای کدام نوع مولکول‌ها مناسب نیست؟
۷. تابع انرژی پتانسیل  $\varphi(r)$  را برای کره‌های صلب غیرجاذب ترسیم کنید.
۸. مولکول‌هایی که فقط از لحاظ ایزوتوپ‌های اتمی باهم متفاوت‌اند، مقادیر یکسانی از پارامترهای پتانسیل لنارد-جونز دارند. آیا انتظار دارید ویسکوزیته  $CD_4$  از ویسکوزیته  $CH_4$ ، در دما و فشار برابر، بیش‌تر باشد یا کم‌تر؟
۹. ویسکوزیته سیال  $A$  دو برابر ویسکوزیته سیال  $B$  است؛ به نظر شما کدام سیال از لوله‌ای افقی به طول  $L$  و شعاع مقطع  $R$ ، سریع‌تر عبور می‌کند؟ اختلاف فشار اعمالی برای هر دو سیال یکسان است.
۱۰. نمودار نیروی بین مولکولی  $F(r)$  حاصل از تابع لنارد-جونز به ازای  $\varphi(r)$  را ترسیم کنید. به علاوه مقدار  $r_m$  در شکل ۳-۴.۱ را برحسب پارامترهای لنارد-جونز تعیین کنید.
۱۱. وقتی از قانون ویسکوزیته نیوتون (معادله ۱-۱.۱) به تعمیم آن به صورت معادله (۲-۲.۱) می‌رسید، از کدام ایده‌های اصلی استفاده می‌کنید؟
۱۲. برای کسب اطلاعات بیش‌تر در مورد نظریه گازها و مایعات، و هم‌چنین به دست آوردن روابط تجربی مفید برای محاسبه ویسکوزیته، به کدام منابع رجوع می‌کنید؟

مسئله‌ها

الف ۱. تخمین ویسکوزیته گاز چگال. ویسکوزیته نیتروژن در  $68^\circ\text{F}$  و  $1000 \text{ psig}$  را با استفاده از شکل ۱-۳.۱ تخمین بزنید؛ از ویسکوزیته بحرانی گفته شده در جدول ۱. استفاده کنید. نتیجه را برحسب واحدهای  $\text{lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s}$  بیان کنید. برای اطلاع از معنای «psig» به جدول ۲-۳ و ۲-۳ رجوع کنید.  
جواب:  $1.4 \times 10^{-5} \text{ lb}_m/\text{ft}\cdot\text{s}$ .

الف ۲. تخمین ویسکوزیته متیل فلئوراید. با استفاده از شکل ۱-۳.۱ ویسکوزیته  $\text{CHF}_3$  را در دمای  $37^\circ\text{C}$  و فشار  $12^\circ$  اتمسفر، برحسب  $\text{Pa}\cdot\text{s}$  بیابید از مقادیر زیر<sup>۱</sup> برای ثابت‌های بحرانی استفاده کنید:  $T_c = 455^\circ\text{C}$ ،  $\rho_c = 0.300 \text{ g/cm}^3$  و  $p_c = 58.7 \text{ atm}$ .

الف ۳. محاسبه ویسکوزیته گازها در چگالی پایین. ویسکوزیته اکسیژن و نیتروژن مولکولی، و متان را در دمای  $20^\circ\text{C}$  و فشار جو محاسبه، و نتایج را برحسب  $\text{mPa}\cdot\text{s}$  بیان کنید. این نتایج را با داده‌های تجربی ارائه شده در این فصل مقایسه کنید.  
جواب:  $0.0172 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ ،  $0.0107 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  و  $0.0202 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ .

الف ۴. ویسکوزیته مخلوط گاز در چگالی پایین. داده‌های زیر<sup>۲</sup> برای ویسکوزیته‌های مخلوط‌های هیدروژن و فرتون-۱۲ (دی‌کلرودی‌فلئورومتان) در دمای  $25^\circ\text{C}$  و فشار ۱ اتمسفر مفروض است:  
کسر مولی  $\text{H}_2$ :  $0.000$ ،  $0.25$ ،  $0.50$ ،  $0.75$  و  $1.00$ .  
 $10^6 \mu$  (پوناز):  $1.24$ ،  $1.28$ ،  $1.31$ ،  $1.35$ ، و  $1.40$ .  
برای محاسبه ویسکوزیته در سه ترکیب میانی، از ویسکوزیته اجزای خالص و معادله‌های (۱-۴.۱) و (۱-۴.۲) استفاده کنید.  
جواب: در  $0.5^\circ$   $\mu = 0.1317 \text{ cp}$ .

الف ۵. ویسکوزیته مخلوط کلر-هوا در چگالی پایین. ویسکوزیته مخلوط‌های کلر-هوا را (برحسب cp) در دمای  $75^\circ\text{F}$  و فشار ۱ اتمسفر، هرگاه کسرهای مولی کلر عبارت باشند از  $0.000$ ،  $0.25$ ،  $0.50$ ،  $0.75$  و  $1.00$  پیش‌بینی کنید. هوا را یک جزء بگیریید و از معادله‌های (۱-۴.۱) تا (۱-۴.۲) استفاده کنید.  
جواب:  $0.183$ ،  $0.164$ ،  $0.150$ ،  $0.139$ ،  $0.130 \text{ cp}$  و  $0.130 \text{ cp}$ .

الف ۶. تخمین ویسکوزیته مایع. مطلوب است تخمین ویسکوزیته آب مایع اشباع در دماهای  $0^\circ\text{C}$  و  $100^\circ\text{C}$  با استفاده از: (الف) معادله (۱-۵.۱) با  $\Delta \bar{U}_{\text{vap}} = 897.5 \text{ Btu/lb}_m$  در  $100^\circ\text{C}$ ؛ (ب) معادله (۱-۵.۱). این نتایج را با مقادیر گفته شده در جدول ۲-۱.۱ مقایسه کنید.  
جواب: (ب)  $0.47 \text{ cp}$ ،  $0.95 \text{ cp}$ .

الف ۷. ویسکوزیته مولکولی و مسافت آزاد میانگین. ویسکوزیته میانگین  $\bar{\mu}$  را (برحسب  $\text{cm/s}$ ) و مسافت آزاد میانگین  $\lambda$  را (برحسب  $\text{cm}$ ) برای اکسیژن در فشار ۱ اتمسفر و دمای  $273.2 \text{ K}$  محاسبه کنید. مقدار معقول  $d$  برابر  $3 \text{ \AA}$  است. نسبت مسافت آزاد میانگین به قطر مولکولی، تحت این شرایط چه قدر است؟ مرتبه بزرگی این نسبت در حالت مایع چه قدر است؟  
جواب:  $\lambda = 9.3 \times 10^{-6} \text{ cm}$  و  $\bar{\mu} = 4.25 \times 10^4 \text{ cm/s}$ .

1. K. A. Kobe and R. E. Lynn, Jr., Chem. Revs. 52, 117-236 (1953), p. 202.

2. J. W. Buddenberg and C. R. Wilke, Ind. Eng. Chem. 41, 1345-1347 (1949).

۱.۱ پروفیل‌های ویسکوزیته و مؤلفه‌های تنش  $\tau_{ij}$ . برای هر توزیع سرعت زیر، نموداری بامعنا ترسیم کنید که الگوی جریان را نشان دهد. سپس همه مؤلفه‌های  $\tau$  و  $\rho v v$  را برای سیال نیوتونی به دست آورید. پارامتر  $b$  ثابت است.

(الف)  $v_x = by, v_y = 0, v_z = 0$

(ب)  $v_x = by, v_y = bx, v_z = 0$

(ج)  $v_x = -by, v_y = bx, v_z = 0$

(د)  $v_x = -\frac{1}{4}bx, v_y = -\frac{1}{4}by, v_z = bz$

۲.۱ سیال در حالت چرخش جسم صلب.

(الف) نشان دهید که توزیع سرعت (ج) در مسئله ۱.۱ سیالی را در حالت چرخش محض توصیف می‌کند؛

یعنی درحالتی که سیال مانند جسمی صلب می‌چرخد. سرعت زاویه‌ای چرخش را تعیین کنید؛

(ب) برای این الگوی جریان، ترکیب‌های متقارن و پادمتقارن مشتق‌های سرعت را تعیین کنید:

(۱)  $(\partial v_y / \partial x) + (\partial v_x / \partial y)$       (۲)  $(\partial v_y / \partial x) - (\partial v_x / \partial y)$

(ج) درباره نتایج (ب) در ارتباط با عبارت به دست آمده در بخش ۲.۱ بحث کنید.

۳.۱ ویسکوزیته سوسپانسیون‌ها. داده‌های واند<sup>۳</sup> برای سوسپانسیون گوی‌های شیشه‌ای کوچک  $ZnI_2$  در

محلول‌های آبی گلیسرین تا حدود  $\phi = 0.05$  از رابطه تجربی زیر به دست می‌آید:

(۱-۳)  $\frac{\mu_{eff}}{\mu_0} = 1 + 2.0\phi + 7.17\phi^2 + 16.2\phi^3 + \dots$

این نتیجه را با معادله (۲-۶.۱) مقایسه کنید.

جواب: معادله مونی بر داده‌های واند منطبق می‌شود، هرگاه مقدار بسیار معقول  $0.07$  به  $\phi$  داده شود.

۱.۱ ج بعضی از پیامدهای توزیع ماکسول-بولتزمن. در نظریه ساده‌شده سینتیک در بخش ۴.۱، چندین عبارت

در ارتباط با رفتار تعادلی گاز مطرح شد، بدون این‌که هیچ‌یک از آن‌ها اثبات شود. در این مسئله و در مسئله

بعد، نشان می‌دهیم که بعضی از این عبارات پیامدهای دقیق توزیع سرعت ماکسول-بولتزمن‌اند.

توزیع سرعت مولکولی ماکسول-بولتزمن در گاز ایده‌آل در حال سکون عبارت است از:

(۱-۱.ج)  $f(u_x, u_y, u_z) = n(m/2\pi KT)^{3/2} \exp(-mu^2/2KT)$

که در آن  $u$  سرعت مولکولی،  $n$  چگالی عددی، و  $f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z$  تعداد مولکول‌هایی در

واحد حجم است که انتظار می‌رود سرعت‌های بین  $u_x$  و  $u_x + du_x$  و  $u_y$  و  $u_y + du_y$  و  $u_z$  و  $u_z + du_z$  داشته باشند.

از این معادله نتیجه می‌شود که توزیع سرعت مولکولی  $u$  برابر است با:

(۲-۱.ج)  $f(u) = 4\pi n u^2 (m/2\pi KT)^{3/2} \exp(-mu^2/2KT)$

(الف) درستی معادله (۱-۴.۱) را با به دست آوردن عبارتی برای سرعت میانگین  $\bar{u}$  با استفاده از معادله

زیر نشان دهید:

(۳-۱.ج)  $\bar{u} = \frac{\int_0^\infty u f(u) du}{\int_0^\infty f(u) du}$

(ب) مقادیر میانگین مؤلفه‌های سرعت  $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$  را به دست آورید. نخستین مقدار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{u}_x = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z} \quad (۴-۱.ج)$$

از این جواب‌ها چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

(ج) انرژی جنبشی میانگین به ازای هر مولکول را از رابطه زیر به دست آورید:

$$\frac{1}{2} m \bar{u}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m u^2 f(u) du}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du} \quad (۵-۱.ج)$$

جواب صحیح  $\frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m \bar{u}^2$  است.

۲.ج۱ بسامد برخورد با جدار. می‌خواهیم بسامد  $Z$  را که مولکول‌های گازی ایده‌آل با این بسامد، فقط از یک

طرف، به جداری با سطح واحد برخورد می‌کنند به دست آوریم. این گاز در دمای  $T$  در حال سکون و تعادل

است و چگالی عددی مولکول‌های آن  $n$  است. جرم همه مولکول‌ها  $m$  است. همه مولکول‌ها در ناحیه

$x < 0$  یا  $x > 0$ ، در زمان کوتاه  $\Delta t$  با جداری به سطح  $S$  در صفحه  $yz$  برخورد می‌کنند، هرگاه در

حجم  $S u_x \Delta t$  قرار داشته باشند. تعداد برخوردها با جدار در واحد سطح و در واحد زمان برابر است با:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (S u_x \Delta t) f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z}{S \Delta t} \\ &= n \left( \frac{m}{\sqrt{\pi} K T} \right)^{3/2} \left( \int_0^{+\infty} u_x \exp(-m u_x^2 / 2 K T) du_x \right) \\ &\quad \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-m u_y^2 / 2 K T) du_y \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-m u_z^2 / 2 K T) du_z \right) \\ &= n \sqrt{\frac{K T}{2 \pi m}} = \frac{1}{2} n \bar{u} \end{aligned} \quad (۱-۲.ج)$$

درستی عبارت بالا را نشان دهید.

۳.ج۱ فشار گاز ایده‌آل.<sup>۴</sup> می‌خواهیم فشاری را که گاز ایده‌آل بر یک جدار وارد می‌کند، با در نظر گرفتن آهنگ

انتقال اندازه حرکت از مولکول‌ها به جدار، و فرض بازتاب‌های آینه‌ای، به دست آوریم.

(الف) وقتی مولکولی که با سرعت  $u$  در حرکت است به جدار برخورد می‌کند، مؤلفه‌های سرعت ورودی آن

عبارت‌اند از:  $u_x, u_y, u_z$ ؛ پس از بازتاب آینه‌ای از جدار، مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از:  $-u_x, u_y, u_z$ .

بنابراین اندازه حرکت خالص انتقالی به جدار توسط مولکول برابر است با:  $2 m u_x$ . مولکول‌هایی که مؤلفه

$x$  سرعت آن‌ها برابر  $u_x$  است و در فاصله زمانی کوتاه  $\Delta t$  با جدار برخورد می‌کنند، باید در داخل حجم

$S u_x \Delta t$  باشند. چند مولکول با مؤلفه‌های سرعتی در گستره  $u_x, u_y, u_z$  تا  $u_x + \Delta u_x, u_x + \Delta u_x$  و

$u_y + \Delta u_y, u_y + \Delta u_y$  و  $u_z + \Delta u_z, u_z + \Delta u_z$  در فاصله زمانی  $\Delta t$  به سطح  $S$  از جدار برخورد می‌کنند؟ جواب عبارت است از:

$f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z$  ضرب در  $S u_x \Delta t$ . بنابراین فشاری که گاز بر جدار وارد می‌کند برابر است با:

$$p = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (S u_x \Delta t) (2 m u_x) f(u_x, u_y, u_z) du_x du_y du_z}{S \Delta t} \quad (۱-۳.ج)$$

4. R. J. Silbey and R. A. Alberty, *Physical Chemistry*, Wiley, New York, 3rd edition (2001), pp. 639-640.

توضیح دهید که چرا این عبارت به دست می‌آید. نشان دهید که این رابطه از لحاظ ابعادی صحیح است.  
 (ب) معادله (۱-ج-۱) برای توزیع تعادلی ماکسول-بولتزمن را در معادله (۱-ج-۱) قرار دهید و انتگرال‌گیری کنید. نشان دهید که دنبال کردن این روش به رابطه  $p = nKT$ ، یعنی معادله گاز ایده‌آل، منتهی می‌شود.

۱.۵۱ چرخش یکنواخت سیال.

(الف) نشان دهید که توزیع سرعت در سیالی در حالت چرخش محض (یعنی چرخش به صورت جسم صلب) از رابطه  $\mathbf{v} = [\mathbf{w} \times \mathbf{r}]$  به دست می‌آید که در آن  $\mathbf{w}$  سرعت زاویه‌ای (ثابت) و  $\mathbf{r}$  بردار مکان با مؤلفه‌های  $x, y, z$  است.

(ب)  $(\nabla \mathbf{v})^\dagger + \nabla \mathbf{v}$  و  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$  را برای میدان جریان قسمت (الف) تعیین کنید.

(ج) معادله (۷-۲.۱) را برحسب نتایج حاصل از قسمت (ب) تفسیر کنید.

۲.۵۱ نیروی وارد بر سطحی با جهت‌گیری اختیاری<sup>۵</sup> (شکل ۲.۵۱) ماده‌ای را در داخل جزئی به حجم  $OABC$  در نظر بگیرید که در حالت تعادل است، بنابراین مجموع نیروهای وارد بر وجه مثلثی  $\Delta OBC$ ،  $\Delta OCA$ ،  $\Delta OAB$  و  $\Delta ABC$  باید صفر باشد. فرض کنید مساحت وجه  $\Delta ABC$  برابر  $dS$  و نیروی وارد از سمت منفی  $dS$  به سمت مثبت  $dS$  بر واحد سطح بردار  $\pi_n$  باشد. نشان دهید که  $\pi_n = [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi}]$ .

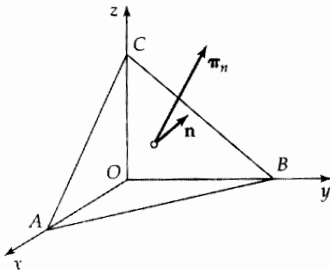
(الف) نشان دهید که مساحت  $\Delta OBC$  با مساحت تصویر  $\Delta ABC$  روی صفحه  $yz$  مساوی است؛ مقدار این مساحت برابر است با:  $(\mathbf{n} \cdot \delta_x) dS$ . عبارتهای مشابهی برای مساحت وجوه  $\Delta OCA$  و  $\Delta OAB$  بنویسید.

(ب) نشان دهید طبق جدول ۱-۲.۱، نیرو بر واحد سطح  $\Delta OBC$  برابر است با:  $\delta_x \pi_{xx} + \delta_y \pi_{xy} + \delta_z \pi_{xz}$ . عبارتهای مشابهی برای  $\Delta OBA$  و  $\Delta OCA$  بنویسید.

(ج) نشان دهید که موازنه نیرو برای جزء حجم  $OABC$  نتیجه می‌دهد:

$$\pi_n = \sum_i \sum_j (\mathbf{n} \cdot \delta_i) (\delta_j \pi_{ij}) = [\mathbf{n} \cdot \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \pi_{ij}] \quad (۲-۱.۵۱)$$

که در آن اندیس‌های  $i$  و  $j$  مقادیر  $x, y, z$  را اختیار می‌کنند. جمع دوگانه در آخرین عبارت تانسور تنش  $\pi$  است که به صورت مجموع حاصل ضرب‌های دوتایه‌های یکه و مؤلفه‌ها بیان می‌شود.



شکل ۲.۵۱ جزء حجم  $OABC$  که موازنه نیرو روی آن انجام می‌شود. بردار  $\pi_n = [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi}]$  برابر است با نیرویی بر واحد سطح که ماده کمتر (ماده داخل جزء  $OABC$ ) بر ماده بیشتر (ماده خارج از جزء  $OABC$ ) وارد می‌کند. بردار  $\mathbf{n}$  بردار قائم یکه روبه‌بیرون، روی وجه  $ABC$  است.

5. M. Abraham and R. Becker, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism*, Blackie and sons, London (1952), pp. 44-45.

## فصل ۲

### موازنه لایه‌ای اندازه حرکت و توزیع سرعت در جریان آرام

۱.۲ موازنه لایه‌ای اندازه حرکت و شرایط مرزی

۲.۲ جریان فیلم ریزان

۳.۲ جریان در لوله مدور

۴.۲ جریان در حلقه

۵.۲ جریان دو سیال امتزاج‌ناپذیر مجاور هم

۶.۲ جریان خزشی حول یک کره

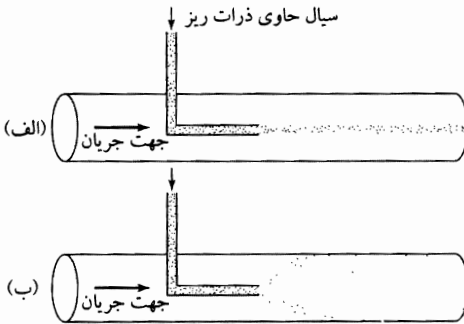
در این فصل نحوه به دست آوردن توزیع‌های سرعت جریان‌های آرام سیالات را در سیستم‌های جریان ساده نشان می‌دهیم. در به دست آوردن این عبارات‌ها از تعریف ویسکوزیته، عبارات‌های مربوط به شارهای اندازه حرکت مولکولی و همرفتی، و مفهوم موازنه اندازه حرکت استفاده می‌کنیم. وقتی توزیع سرعت به دست آمد، می‌توانیم کمیت‌های دیگری مانند سرعت ماکزیمم، سرعت متوسط، یا تنش برشی در سطح را به دست آوریم. غالباً در مسائل مهندسی به همین کمیت‌های اخیر علاقه مندیم.

در بخش اول این فصل چند نکته را در مورد نحوه تشکیل موازنه‌های دیفرانسیلی اندازه حرکت گوشزد می‌کنیم و در بخش‌های بعدی چندین مثال کلاسیک از الگوهای جریان ویسکوز را به تفصیل حل می‌کنیم. این مثال‌ها را باید کاملاً بفهمید، زیرا در فصل‌های آینده به دفعات به آن‌ها رجوع خواهیم کرد. اگرچه این مسائل نسبتاً ساده‌اند و سیستم‌های ایده‌آل‌سازی شده را شامل می‌شوند، اما غالباً در حل مسئله‌های عملی به کار می‌روند.

سیستم‌هایی که در این فصل بررسی می‌شوند، چنان آرایش یافته‌اند که دانشجو را به تدریج با عامل‌های گوناگونی که در حل مسئله‌های جریان ویسکوز مطرح‌اند، آشنا می‌کنند. در بخش ۲.۲، مسئله فیلم ریزان، نقش نیروهای گرانشی و کاربرد مختصات دکارتی را نشان می‌دهد؛ به علاوه، نحوه حل مسئله را، درحالی که ویسکوزیته تابع مکان باشد، نشان می‌دهد. در بخش ۳.۲ علاوه بر نمایش جریان در لوله مدور، نقش نیروهای فشار، گرانش، و استفاده از مختصات استوانه‌ای، تعمیم تقریبی جریان تراکم‌پذیر نیز ارائه می‌شود. در بخش ۴.۲ جریان در حلقه استوانه‌ای بر نقش شرایط مرزی تأکید می‌کند. پس از آن، در بخش ۵.۲، مسئله شرایط مرزی، با عمق بیشتر، در بحث جریان دو مایع امتزاج‌ناپذیر مجاور هم، دنبال خواهد شد. سرانجام، در بخش ۶.۲، جریان حول کره را به اختصار



بررسی می‌کنیم و با طرح مسئله‌ای در مختصات کروی نحوه تعیین نیروهای مماسی و قائم را روشن می‌کنیم. روش‌ها و مسئله‌های این فصل فقط در مورد جریان راست خط پایا صادق‌اند. منظور از «پایا» این است که فشار، چگالی، و مؤلفه‌های سرعت در هر نقطه از جریان، با زمان تغییر نمی‌کنند. معادله‌های جریان ناپایا را در فصل ۳ ارائه می‌دهیم. در این فصل فقط با جریان آرام سروکار داریم. «جریان آرام» جریان منظمی است که، مثلاً در جریان داخل لوله، با سرعت‌هایی به اندازه کافی پایین، مشاهده می‌شود که در آن ذرات ریز تزریق شده به داخل لوله در طول خطی نازک حرکت می‌کنند. این جریان با «جریان متلاطم» که کاملاً آشفته و بی‌نظم است، تفاوت آشکاری دارد. جریان اخیر در سرعت‌های بالا مشاهده می‌شود که در آن‌ها ذرات به اطراف پراکنده و در تمام سطح مقطع لوله پاشیده می‌شوند. جریان متلاطم موضوع فصل ۵ است. در شکل ۱-۰.۲ اختلاف بین دو نوع جریان نشان داده شده است.



شکل ۱-۰.۲ الف) جریان آرام که در آن لایه‌های سیال به آرامی روی یکدیگر و در جهت جریان حرکت می‌کنند؛ ب) جریان متلاطم که در آن الگوی جریان پیچیده و وابسته به زمان است و حرکت چشم‌گیری در امتداد عمود بر جهت جریان مشاهده می‌شود.

## ۱.۲ موازنه لایه‌ای اندازه حرکت و شرایط مرزی

برای حل مسئله‌هایی که در بخش‌های ۲.۲ تا ۵.۲ مطرح می‌شوند، باید موازنه اندازه حرکت را روی «لایه» نازکی از سیال نوشت. برای جریان پایا، موازنه اندازه حرکت چنین است:

$$+ \{ \text{آهنگ خروج اندازه حرکت از طریق انتقال همرفتی} \} - \{ \text{آهنگ ورود اندازه حرکت از طریق انتقال همرفتی} \}$$

$$+ \{ \text{آهنگ خروج اندازه حرکت از طریق انتقال مولکولی} \} - \{ \text{آهنگ ورود اندازه حرکت از طریق انتقال مولکولی} \}$$

$$= 0 \quad (1-1.2)$$

این رابطه، بیان محدود قانون پایستگی اندازه حرکت است. در این فصل از این بیان فقط در مورد یک مؤلفه از اندازه حرکت استفاده می‌کنیم، که مؤلفه درجهت جریان است. برای نوشتن موازنه اندازه حرکت، به عبارت‌های شارهای اندازه حرکت همرفتی که در جدول ۱-۷.۱ آمده است و شارهای اندازه حرکت مولکولی که در جدول ۱-۲.۱ ارائه شده است، نیاز داریم؛ در نظر داشته باشید که شار اندازه حرکت مولکولی شامل هردو بخش فشاری و ویسکوز است. در این فصل موازنه اندازه حرکت فقط در مورد سیستم‌هایی به کار می‌رود که یک مؤلفه سرعت دارند که تنها به یک متغیر مکانی وابسته است، به علاوه، جریان باید راست خط باشد. در فصل بعد مفهوم موازنه اندازه حرکت را به سیستم‌های حالت ناپایا با حرکت خمیده خطی و بیش از یک مؤلفه سرعت تعمیم می‌دهیم.

روش کار ما در این فصل تعریف و حل مسئله‌های جریان ویسکوز به ترتیب زیر است:

- مؤلفه غیر صفر سرعت و متغیر مکانی را که این مؤلفه به آن وابسته است، شناسایی کنید؛
- موازنه اندازه حرکتی به صورت معادله (۱-۱.۲)، روی لایه نازکی عمود بر متغیر مکانی مربوط بنویسید؛

- ضخامت این لایه را به سمت صفر میل دهید و از تعریف مشتق اول برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل متناظر برای شار اندازه حرکت استفاده کنید؛
- از این معادله انتگرال بگیرید تا توزیع شار اندازه حرکت حاصل شود؛
- قانون ویسکوزیته نیوتون را به کار ببرید و معادله دیفرانسیلی برای سرعت به دست آورید؛
- از این معادله انتگرال بگیرید تا توزیع سرعت حاصل شود؛
- با استفاده از توزیع سرعت، کمیت‌های دیگر، مانند سرعت ماکزیمم، سرعت متوسط، یا نیروی وارد بر سطح جامد را به دست آورید.

در انتگرال‌گیری‌های بالا، چندین ثابت انتگرال‌گیری ظاهر می‌شوند که باید با استفاده از «شرایط مرزی» - یعنی عبارتهایی در مورد سرعت یا تنش در مرزهای سیستم- آن‌ها را تعیین کرد. متداول‌ترین شرایط مرزی عبارت‌اند از:

(الف) در فصل مشترک‌های جامد-مایع، سرعت سیال با سرعت حرکت سطح جامد برابر است؛ این نکته هم در مورد مؤلفه‌های مماسی و هم در مورد مؤلفه‌های قائم بردار سرعت، صادق است. برابری مؤلفه‌های مماسی را «شرط عدم لغزش» می‌نامند. برای کسب اطلاعات بیشتر به مسئله ۳.۵۲ رجوع کنید.

(ب) در صفحه فصل مشترک مایع-مایع با  $x$  ثابت، مؤلفه‌های سرعت مماسی  $v_x$  و  $v_y$  در سراسر فصل مشترک پیوسته‌اند، «شرط عدم لغزش»، همان‌طور که مؤلفه‌های تانسور تنش مولکولی، یعنی  $T_{xx} + p$ ،  $T_{xy}$ ، و  $T_{xz}$  نیز پیوسته‌اند.

(ج) در صفحه فصل مشترک مایع-گاز با  $x$  ثابت، مؤلفه‌های تانسور تنش  $T_{xy}$  و  $T_{xz}$  را صفر می‌گیریم، به شرط آنکه گرادینان سرعت در سمت گاز خیلی بزرگ نباشد. این فرض منطقی است، زیرا ویسکوزیته گازها بسیار کم‌تر از ویسکوزیته مایعات است.

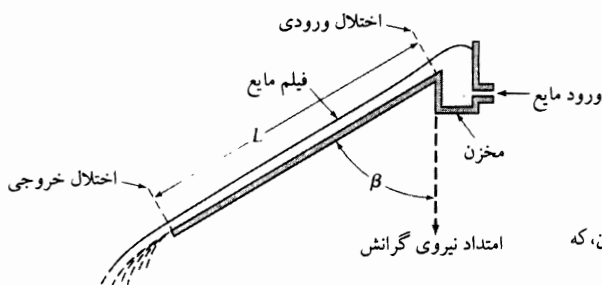
در همه این شرایط مرزی فرض بر این است که هیچ ماده‌ای از فصل مشترک عبور نمی‌کند؛ یعنی جذب سطحی، جذب، انحلال، تبخیر، ذوب، یا واکنش شیمیایی در سطح بین دو فاز انجام نمی‌شود. شرایط مرزی دخیل در چنین پدیده‌هایی در مسئله‌های ۳.۵، ۱۱.ج.۶، و بخش ۱.۱۸ مطرح می‌شود.

در این بخش رهنمودهایی برای حل مسئله‌های جریان ویسکوز ساده ارائه دادیم. ممکن است در بعضی از مسائل تغییر مختصری در این رهنمودها، لازم و مفید باشد.

## ۲.۲ جریان فیلم ریزان

نخستین مثال جریان مایعی است که روی صفحه تخت شیب‌دار به طول  $L$  و عرض  $W$ ، مطابق شکل ۲.۲-۱ پایین می‌رود. چنین فیلم‌هایی در ارتباط با برج‌های جدارخیس، آزمایش‌های تبخیر و جذب گاز، و پوشش‌کاری‌ها بررسی شده‌اند. ویسکوزیته و چگالی سیال را ثابت فرض می‌کنیم.

توصیف کامل جریان مایع، به علت آشفتگی در لبه‌های سیستم ( $z = L$ ،  $z = 0$ ،  $y = W$ ،  $y = 0$ ) دشوار است. توصیف کافی غالباً با چشم‌پوشی از چنین آشفتگی‌هایی، به‌ویژه اگر  $W$  و  $L$  در مقایسه با ضخامت فیلم،  $\delta$ ، بزرگ باشند، حاصل می‌شود. در آهنگ‌های جریان پایین، انتظار می‌رود که نیروهای ویسکوز از تداوم شتاب مایع روبه پایین جدار جلوگیری کنند، به طوری که در فاصله کوتاهی در پایین صفحه،  $v_z$  از  $z$  مستقل شود. بنابراین مسلم دانستن این فرض‌ها معقول به نظر می‌رسد:  $v_z = v_z(x)$ ،  $v_x = 0$ ،  $v_y = 0$ ، و به علاوه،  $p = p(x)$ . با رجوع به جدول ب.۱ مشاهده می‌شود که تنها مؤلفه‌های غیر صفر  $\tau$  عبارت‌اند از:  $\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu(dv_z/dx)$ .



شکل ۲-۲. نمودار شماتیک آزمایش فیلیم ریزان، که آثار انتهایی را نشان می‌دهد.

حال لایه نازکی عمود بر امتداد  $x$  را به عنوان «سیستم» انتخاب می‌کنیم (شکل ۲-۲.۲ را ببینید). سپس موازنه مؤلفه  $z$  اندازه حرکت را، روی این لایه که ناحیه‌ای به ضخامت  $\Delta x$  است توسط صفحه‌های  $z = 0$  و  $z = L$  محصور شده، و تا فاصله  $W$  در امتداد  $y$  ادامه دارد، می‌نویسیم. سپس سهم‌های مختلف موازنه اندازه حرکت را به کمک کمیت‌های ستون‌های «مؤلفه  $z$ » جدول‌های ۱-۲.۱ و ۱-۷.۱ به دست می‌آوریم. با استفاده از این مؤلفه‌های «تانسور شار اندازه حرکت ترکیبی»  $\phi$ ، که در بخش‌های ۱-۷.۱ تا ۳ تعریف شد، می‌توانیم به یک باره همه مکانیسم‌های ممکن انتقال اندازه حرکت را به حساب بیاوریم:

$$(1-2.2) \quad \text{آهنگ ورود مؤلفه } z \text{ اندازه حرکت روی صفحه در } z = 0: (W \Delta x) \phi_{zz}|_{z=0}$$

$$(2-2.2) \quad \text{آهنگ خروج مؤلفه } z \text{ اندازه حرکت روی صفحه در } z = L: (W \Delta x) \phi_{zz}|_{z=L}$$

$$(3-2.2) \quad \text{آهنگ ورود مؤلفه } z \text{ اندازه حرکت روی صفحه در } x: (LW) (\phi_{xz})|_x$$

$$(4-2.2) \quad \text{آهنگ خروج مؤلفه } z \text{ اندازه حرکت روی صفحه در } x + \Delta x: (LW) (\phi_{xz})|_{x+\Delta x}$$

$$(5-2.2) \quad \text{نیروی گرانش وارد بر سیال در امتداد } z: (LW \Delta x) (\rho g \cos \beta)$$

با استفاده از کمیت‌های  $\phi_{zz}$  و  $\phi_{xz}$  می‌توانیم انتقال مؤلفه  $z$  اندازه حرکت از طریق همه مکانیسم‌ها، همرفتی و مولکولی، را به حساب بیاوریم. توجه کنید که ما جهت‌های «ورود» و «خروج» را در جهت مثبت محورهای  $x$  و  $z$  فرض می‌کنیم (در مسئله حاضر، این جهت‌ها بر امتدادهای انتقال مؤلفه  $z$  اندازه حرکت منطبق‌اند). نمادگذاری  $|_{x+\Delta x}$  به معنای «محاسبه شده در  $x + \Delta x$ »، و  $g$  شتاب گرانش است.

وقتی این جمله‌ها را در معادله موازنه مؤلفه  $z$  اندازه حرکت (معادله ۱-۱.۲) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

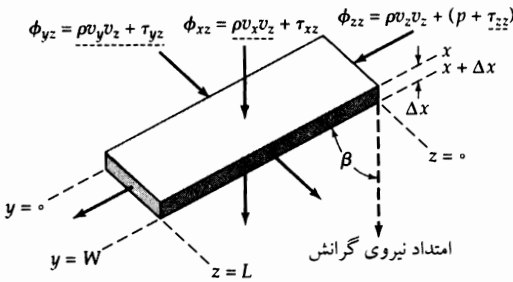
$$LW(\phi_{xz}|_x - \phi_{xz}|_{x+\Delta x}) + W \Delta x(\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}) + (LW \Delta x)(\rho g \cos \beta) = 0 \quad (6-2.2)$$

وقتی این معادله بر  $LW \Delta x$  تقسیم شود و با میل کردن  $\Delta x$  به سمت صفر، حد آن گرفته شود، داریم:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\phi_{xz}|_{x+\Delta x} - \phi_{xz}|_x}{\Delta x} \right) - \frac{\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}}{L} = \rho g \cos \beta \quad (7-2.2)$$

جمله اول سمت چپ این معادله دقیقاً تعریف مشتق  $\phi_{xz}$  نسبت به  $x$  است. بنابراین معادله (۷-۲.۲) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \phi_{xz}}{\partial x} - \frac{\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}}{L} = \rho g \cos \beta \quad (8-2.2)$$



۲-۲.۲ لایه‌ای به ضخامت  $\Delta x$  که موازنه مؤلفه  $z$  اندازه حرکت روی آن انجام می‌شود. پیکان‌ها، شارهای اندازه حرکت مربوط به سطوح لایه را نشان می‌دهند. چون  $v_x$  و  $v_y$  هردو صفرند،  $\rho v_y v_z$  و  $\rho v_x v_z$  نیز صفرند. چون  $v_z$  به  $y$  و  $z$  وابسته نیست، از جدول ب.۱ نتیجه می‌شود که  $\tau_{yz} = 0$  و  $\tau_{zz} = 0$ . بنابراین در نظر گرفتن شارهایی که با خط چین مشخص شده‌اند، لازم نیست. هم  $p$  و هم  $\rho v_z v_z$  در  $z = L$  و  $z = 0$  یکسان باشند پس در معادله نهایی موازنه مؤلفه  $z$  اندازه حرکت (معادله ۱۰-۲.۲) ظاهر نمی‌شوند.

در این نقطه باید به‌طور صریح و با استفاده از تعریف  $\phi$  در معادله‌های (۱-۷.۱ تا ۳) و عبارتهای  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{zz}$  در پیوست ب.۱، بنویسیم که مؤلفه‌های  $\phi_{xz}$  و  $\phi_{zz}$  چه هستند. به این ترتیب می‌توان مطمئن شد که هیچ‌یک از صورت‌های انتقال اندازه حرکت از قلم نمی‌افتد. بنابراین داریم:

$$\phi_{xz} = \tau_{xz} + \rho v_x v_z = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} + \rho v_x v_z \quad (۹-۲.۲ \text{ الف})$$

$$\phi_{zz} = p + \tau_{zz} + \rho v_z v_z = p - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \rho v_z v_z \quad (۹-۲.۲ \text{ ب})$$

بر اساس این فرض که  $v_x = 0$ ،  $v_y = 0$ ،  $v_z = v_z(x)$ ،  $p = p(x)$ ، مشاهده می‌کنیم که (۱) چون  $v_x = 0$ ، جمله  $\rho v_x v_z$  در معادله (۹-۲.۲ الف) صفر است؛ (۲) چون  $v_z = v_z(x)$ ، جمله  $2\mu(\partial v_z / \partial z)$  در معادله (۹-۲.۲ ب) صفر است؛ (۳) چون  $v_z = v_z(x)$ ، جمله  $\rho v_z v_z$  در  $z = L$  و  $z = 0$  مقدار یکسان دارد؛ و (۴) چون  $p = p(x)$ ، سهم  $p$  در  $z = L$  و  $z = 0$  برابر است. بنابراین فقط  $\tau_{xz}$  فقط به  $x$  وابسته است و معادله (۸-۲.۲) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\boxed{\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g \cos \beta} \quad (۱۰-۲.۲)$$

این معادله دیفرانسیل شار اندازه حرکت  $\tau_{xz}$  است. می‌توان از آن انتگرال گرفت:

$$\tau_{xz} = (\rho g \cos \beta)x + C_1 \quad (۱۱-۲.۲)$$

ثابت انتگرال‌گیری را می‌توان با استفاده از شرط مرزی در فصل مشترک گاز-مایع به دست آورد (بخش ۱.۲ را ببینید):

$$\tau_{xz} = 0 \quad \text{در } x = 0 \quad \text{داریم} \quad (۱۲-۲.۲)$$

قرار دادن این شرط مرزی در معادله (۱۱-۲.۲) نشان می‌دهد که  $C_1 = 0$ . بنابراین توزیع شار اندازه حرکت برابر است با:

$$\tau_{xz} = (\rho g \cos \beta)x \quad (۱۳-۲.۲)$$

که در شکل ۳-۲.۲ نشان داده شده است.

حال قانون ویسکوزیته نیوتون:

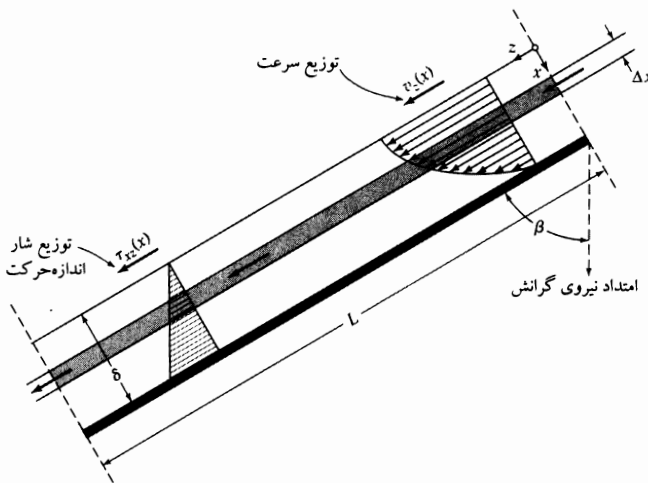
$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \quad (۱۴-۲.۲)$$

را درست چپ معادله (۱۳-۲.۲) جایگزین می‌کنیم تا نتیجه شود:

$$\frac{dv_z}{dx} = - \left( \frac{\rho g \cos \beta}{\mu} \right) x \quad (15-2.2)$$

که معادله دیفرانسیل توزیع سرعت است. با انتگرال‌گیری از این معادله نتیجه می‌شود:

$$v_z = - \left( \frac{\rho g \cos \beta}{2\mu} \right) x^2 + C_2 \quad (16-2.2)$$



شکل ۳-۲.۲ نتایج نهایی مسئله فیلم ریزان، که توزیع شار اندازه حرکت و توزیع سرعت را نشان می‌دهد. لایه به ضخامت  $\Delta x$ ، که موازنه اندازه حرکت روی آن نوشته شد، نیز نشان داده شده است.

ثابت انتگرال‌گیری با استفاده از شرط مرزی عدم لغزش در سطح جامد، محاسبه می‌شود:

$$v_z = 0 \quad \text{در } x = \delta \quad \text{شرط مرزی ۲:} \quad (17-2.2)$$

قرار دادن این شرط مرزی در معادله (۱۶-۲.۲)، نشان می‌دهد که  $C_2 = (\rho g \cos \beta / 2\mu) \delta^2$ . در نتیجه توزیع سرعت برابر است با:

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \quad (18-2.2)$$

این توزیع سرعت سهموی در شکل ۳-۲.۲ نشان داده شده است. این توزیع با فرض اولیه ما سازگار است و بنابراین باید یک جواب ممکن باشد. جواب‌های دیگری نیز ممکن‌اند، و معمولاً با آزمایش می‌توان نشان داد که آیا الگوهای جریان عملاً می‌توانند ایجاد شوند یا نه. پس از معادله (۲۳-۲.۲) دوباره به سراغ این نکته می‌آییم.

وقتی توزیع سرعت معلوم شد، می‌توان چند کمیت را محاسبه کرد:

۱. سرعت ماکزیم  $v_{z,max}$  آشکارا همان سرعت در  $x = 0$  است؛ یعنی:

$$v_{z,max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \quad (19-2.2)$$

۲. سرعت متوسط  $\langle v_z \rangle$  در مقطعی از فیلم به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \langle v_z \rangle &= \frac{\int_0^W \int_0^\delta v_z dx dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx dy} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta v_z dx = \frac{\rho g \delta^3 \cos \beta}{2\mu} \int_0^1 \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] d \left( \frac{x}{\delta} \right) \\ &= \frac{\rho g \delta^3 \cos \beta}{3\mu} = \frac{2}{3} v_{z, \max} \end{aligned} \quad (20-2.2)$$

انتگرال دوگانه در مخرج کسر سطر نخست مساحت مقطع فیلم است. انتگرال دوگانه در صورت همین کسر آهنگ جریان حجمی در جزء دیفرانسیلی از مقطع،  $v_z dx dy$ ، است که روی تمام مقطع انتگرال گیری می شود.

۳. آهنگ جریان جرمی  $w$  از سرعت متوسط یا از طریق انتگرال گیری از توزیع سرعت حاصل می شود:

$$w = \int_0^W \int_0^\delta \rho v_z dx dy = \rho W \delta \langle v_z \rangle = \frac{\rho^2 g W \delta^3 \cos \beta}{3\mu} \quad (21-2.2)$$

۴. ضخامت فیلم  $\delta$  را می توان بر حسب سرعت متوسط یا آهنگ جریان جرمی، به صورت زیر ارائه داد:

$$\delta = \sqrt{\frac{3\mu \langle v_z \rangle}{\rho g \cos \beta}} = \sqrt{\frac{3\mu w}{\rho^2 g W \cos \beta}} \quad (22-2.2)$$

۵. نیرو بر واحد سطح در امتداد  $z$  روی جزء سطح عمود بر امتداد  $x$  برابر است با:  $\tau_{xz} +$  که در  $x = \delta$  محاسبه شده باشد. این نیرویی است که سیال (ناحیه  $x$  کم تر) بر جدار (ناحیه  $x$  بیش تر) وارد می کند. مؤلفه  $z$  نیروی  $\mathbf{F}$  که سیال بر سطح جامد وارد می کند با انتگرال گیری از تنش برشی روی فصل مشترک سیال-جامد به دست می آید:

$$\begin{aligned} F_z &= \int_0^L \int_0^W (\tau_{xz}|_{x=\delta}) dy dz = \int_0^L \int_0^W \left( -\mu \frac{dv_z}{dx} \Big|_{x=\delta} \right) dy dz \\ &= (LW)(-\mu) \left( -\frac{\rho g \delta \cos \beta}{\mu} \right) = \rho g \delta LW \cos \beta \end{aligned} \quad (23-2.2)$$

این مؤلفه  $z$  وزن سیال در کل فیلم است؛ درست همان طوری که انتظار داشتیم.

مشاهدات تجربی فیلم های ریزان نشان می دهد که عملاً سه «رژیم جریان» وجود دارد که می توان آن ها را بر حسب عدد رینولدز،  $Re$ ، جریان دسته بندی کرد. عدد رینولدز برای فیلم های ریزان با رابطه  $Re = 4\delta \langle v_z \rangle \rho / \mu$  تعریف می شود.

بنابراین سه رژیم جریان عبارت اند از:

$Re < 20$	جریان آرام با موج های قابل چشم پوشی
$20 < Re < 1500$	جریان آرام با موج های درخور اعتنا
$Re > 1500$	جریان متلاطم

تحلیلی که در بالا ارائه شد فقط برای رژیم نخست معتبر است، زیرا توسط فرض هایی در ابتدای کار محدود شد. به ازای همه اعداد رینولدز، روی سطح سیال موج هایی پدیدار می شود. به ازای اعداد رینولدز کم تر از حدود ۲۰،

۱. این گروه بدون بعد را به یاد آزمون رینولدز (۱۹۱۲-۱۸۴۲)، استاد مهندسی در دانشگاه منچستر نام گذاری کرده اند. او روی گذار آرام - متلاطم، انتقال گرمای تلاطمی، و نظریه روانکاری تحقیق کرد. در فصل بعد خواهیم دید که عدد رینولدز نسبت نیروهای داخلی به نیروهای ویسکوز است.

این موج‌ها بسیار بلندند و به تدریج و درحین حرکت روی سطح مایع رشد می‌کنند؛ در نتیجه فرمول‌هایی که در بالا به دست آمد تا حدود  $Re = 20$  برای صفحه‌های با طول متوسط مفیدند. وقتی  $Re$  بزرگ‌تر باشد، رشد موج‌ها سرعت می‌گیرد، هرچند جریان آرام می‌ماند. در حدود  $Re = 1500$  جریان نامنظم و آشفته می‌شود و آن را متلاطم می‌نامند.<sup>۳</sup> در این نقطه روشن نیست که چرا برای توصیف رژیم‌های جریان باید از مقدار عدد رینولدز استفاده کرد. در بخش ۷.۳ در این مورد بیش‌تر سخن خواهیم گفت.

این بحث نکته بسیار مهمی را نشان می‌دهد: تحلیل نظری سیستم‌های جریان توسط فرض‌های اختیارشده در صورت مسئله محدود می‌شود. انجام آزمایش برای تعیین رژیم جریان و اطلاع از زمان وقوع ناپایداری (نوسانات خودبه‌خودی)، و زمان متلاطم شدن جریان، اکیداً ضروری است. با تحلیل نظری می‌توان پاره‌ای اطلاعات در مورد آستانه ناپایداری و مرزبندی رژیم‌های جریان به دست آورد، اما این موضوعی بس دشوار است. این پدیده یکی از نتایج ماهیت غیرخطی معادلات حاکم بر دینامیک سیالات است که در فصل ۳ شرح داده خواهد شد. در این جا به ذکر همین نکته اکتفا می‌کنیم که در حوزه دینامیک سیالات، آزمایش نقشی بسیار مهم دارد.

### مثال ۱-۲.۲

محاسبه سرعت فیلم

ویسکوزیته سینماتیکی نوعی روغن برابر است با:  $2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  و چگالی آن  $0.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  است. می‌خواهیم فیلم ریزانی به ضخامت  $2.5 \text{ mm}$  روی جدار عمودی داشته باشیم، آهنگ جریان جرمی مایع چه قدر باید باشد؟

حل

طبق معادله (۲.۲-۲۱)، آهنگ جریان جرمی برحسب  $\text{kg/s}$  برابر است با:

$$w = \frac{\rho g \delta^3 W}{3\nu} = \frac{(0.8 \times 10^3)(9.8)(2.5 \times 10^{-3})^3 W}{3(2 \times 10^{-4})} = 0.204W \quad (2.2-24)$$

بنابراین برای به دست آوردن آهنگ جریان جرمی باید در معادله بالا مقداری برای عرض جدار برحسب متر قرار دهیم. این نتیجه مطلوب است، هرگاه جریان آرام و بدون موج باشد. برای تعیین رژیم جریان، با استفاده از معادله‌های (۲.۲-۲۱ و ۲۴)، عدد رینولدز را محاسبه می‌کنیم:

$$Re = \frac{\rho \delta (v_z) \rho}{\mu} = \frac{\rho w / W}{\nu \rho} = \frac{\rho (0.204)}{(2 \times 10^{-4})(0.8 \times 10^3)} = 5.1 \quad (2.2-25)$$

این عدد رینولدز به اندازه کافی پایین هست که موج‌های سطحی برجسته نشوند، بنابراین عبارت آهنگ جریان جرمی در معادله (۲.۲-۲۴) معقول است.

### مثال ۲-۲.۲

فیلم ریزان با ویسکوزیته متغیر

مسئله فیلم ریزان را درحالت وابسته بودن ویسکوزیته به مکان، یعنی  $\mu = \mu_0 e^{-\alpha x/\delta}$  دوباره حل کنید؛ این حالت هنگامی پدید می‌آید که فیلم غیرهم‌دما باشد، مانند چگالش بخار روی جدار. در این جا  $\mu_0$  ویسکوزیته سطح فیلم و

2. G. D. Fulford, *Adv. Chem. Engr.*, **5**, 151-236 (1964); S. Whitaker, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **3**, 132-142 (1964); V. G. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962), §135.

3. H.-C. Chang, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **26**, 103-136 (1994); S. -H. Hwang and H. C. Chang, *Phys. Fluids*, **30**, 1259-1268 (1987).

$\alpha$  ثابتی است که سرعت کاهش  $\mu$  با افزایش  $x$  را نشان می‌دهد. این نوع تغییرات می‌تواند در جریان مایع چگالیده به طرف پایین جدار، با گرادبان خطی دما در طول فیلم، پدید آید.

حل

برای به دست آوردن جواب مانند قبل عمل می‌کنیم تا به معادلهٔ (۱۳-۲.۲) برسیم. سپس قانون نیوتون با ویسکوزیتهٔ متغیر را در معادلهٔ (۱۳-۲.۲) به کار می‌بریم، در نتیجه:

$$-\mu_0 e^{-\alpha x/\delta} \frac{dv_z}{dx} = \rho g x \cos \beta \quad (26-2.2)$$

از این معادله می‌توان انتگرال گرفت و با استفاده از شرایط مرزی معادلهٔ (۱۷-۲.۲) می‌توانیم ثابت انتگرال‌گیری را محاسبه کنیم. بنابراین توزیع سرعت عبارت است از:

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{\mu_0} \left[ e^\alpha \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) - e^{\alpha x/\delta} \left( \frac{x}{\alpha \delta} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \quad (27-2.2)$$

به عنوان واریسی، توزیع سرعت را برای مسئلهٔ ویسکوزیتهٔ ثابت (یعنی وقتی  $\alpha$  صفر است) به دست می‌آوریم. اما وقتی  $\alpha = 0$ ، برای دو عبارت داخل پرانتز داریم  $\infty - \infty$ . با بسط دادن دو عبارت نمایی سری تیلر (بخش ج. ۲.۰ را ببینید) می‌توانیم بر این مشکل غلبه کنیم؛ داریم:

$$\begin{aligned} (v_z)_{\alpha=0} &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{\mu_0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[ \left( 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \right) \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{\alpha x}{\delta} + \frac{\alpha^2 x^2}{2! \delta^2} + \frac{\alpha^3 x^3}{3! \delta^3} + \dots \right) \left( \frac{x}{\alpha \delta} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \\ &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{\mu_0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \alpha + \dots \right) - \left( \frac{1}{2} \frac{x^2}{\delta^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{\delta^3} \alpha + \dots \right) \right] \\ &= \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2 \mu_0} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \quad (28-2.2) \end{aligned}$$

که با معادلهٔ (۱۸-۲.۲) در توافق است.

با استفاده از معادلهٔ (۲۷-۲.۲) می‌توان نشان داد که سرعت متوسط برابر است با:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{\mu_0} \left[ e^\alpha \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) - \frac{2}{\alpha^2} \right] \quad (29-2.2)$$

خواننده می‌تواند نشان دهد که وقتی  $\alpha$  صفر شود، این رابطه به معادلهٔ (۲۰-۲.۲) ساده می‌شود.

### ۳.۲ جریان در لولهٔ مدور

جریان سیالات در لوله‌های مدور غالباً در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، و مهندسی مطرح می‌شود. جریان آرام سیالات در لوله‌های مدور را می‌توان با استفاده از موازنهٔ اندازه حرکت توصیف شده در بخش ۱.۲ تحلیل کرد. تنها ویژگی جدیدی که در این جا مطرح می‌شود، استفاده از مختصات استوانه‌ای است که مختصات طبیعی برای توصیف مکان در لوله‌ای با مقطع دایره‌ای است.

حال جریان آرام حالت پایایی سیالی با چگالی ثابت  $\rho$  و ویسکوزیتهٔ  $\mu$  را در لوله‌ای عمودی به طول  $L$  و شعاع مقطع  $R$  در نظر می‌گیریم. مایع تحت تأثیر اختلاف فشار و گرانش به سمت پایین جاری می‌شود، دستگاه



مختصات مورد استفاده در شکل ۱-۳.۲ نشان داده شده است. طول لوله را نسبت به شعاع مقطع آن، بسیار زیاد فرض می‌کنیم، به طوری که «آثار انتهایی» در بخش عمده‌ای از طول لوله بی‌اهمیت شوند؛ به عبارت دیگر می‌توانیم از این نکته چشم‌پوشی کنیم که در ورودی و خروجی لوله، جریان الزاماً با جدار لوله موازی است.

فرض می‌کنیم که  $v_\theta = 0$ ،  $v_r = 0$ ،  $v_z = v_z(r)$  و  $p = p(z)$ . در جدول ب.۱ مشاهده می‌شود که تنها مؤلفه‌های غیرصفر  $\tau$  عبارت‌اند از:  $\tau_{rz} = \tau_{zr} = -\mu(dv_z/dr)$ .

پوسته‌ای استوانه‌ای به ضخامت  $\Delta r$  و طول  $L$  را به‌عنوان دستگاه مختصات انتخاب، و کار را با فهرست کردن سهم‌های مختلف در موازنه مؤلفه  $z$  اندازه حرکت شروع می‌کنیم:

$$(۱-۳.۲) \quad \text{آهنگ ورودی مؤلفه } z \text{ اندازه حرکت در سطح حلقوی در } z=0: (\pi r \Delta r)(\phi_{zz})|_{z=0}$$

$$(۲-۳.۲) \quad \text{آهنگ خروجی مؤلفه } z \text{ اندازه حرکت در سطح حلقوی در } z=L: (\pi r \Delta r)(\phi_{zz})|_{z=L}$$

$$(۳-۳.۲) \quad \text{آهنگ ورودی مؤلفه } z \text{ اندازه حرکت در سطح استوانه‌ای در } r: (\pi r L)(\phi_{rz})|_r = (\pi r L \phi_{rz})|_r$$

$$(۴-۳.۲) \quad \text{آهنگ خروجی مؤلفه } z \text{ اندازه حرکت در سطح استوانه‌ای در } r+\Delta r: (\pi(r+\Delta r)L)(\phi_{rz})|_{r+\Delta r} = (\pi r L \phi_{rz})|_{r+\Delta r}$$

$$(۵-۳.۲) \quad \text{نیروی گرانش وارد درامتداد } z \text{ بر پوسته استوانه‌ای: } (\pi r \Delta r L) \rho g$$

کمیت‌های  $\phi_{zz}$  و  $\phi_{rz}$  انتقال اندازه حرکت را، از طریق همه مکانیسم‌های ممکن، همرفتی و مولکولی، به حساب می‌آورند. در معادله (۴-۳.۲)،  $(r+\Delta r)$  و  $(r)$  دو روش نوشتن یک چیز به‌شمار می‌روند. توجه کنید که ما «ورود» و «خروج» را درامتدادهای مثبت محوره‌های  $r$  و  $z$  می‌گیریم.

اکنون این سهم‌ها را در موازنه اندازه حرکت وارد می‌کنیم:

$$(۶-۳.۲) \quad (\pi r L \phi_{rz})|_r - (\pi r L \phi_{rz})|_{r+\Delta r} + (\pi r \Delta r)(\phi_{zz})|_{z=0} - (\pi r \Delta r)(\phi_{zz})|_{z=L} + (\pi r \Delta r L) \rho g = 0$$

وقتی معادله (۶-۳.۲) را بر  $\pi L \Delta r$  تقسیم کنیم و حد عبارت حاصل را، وقتی  $\Delta r \rightarrow 0$  به دست آوریم، نتیجه می‌شود:

$$(۷-۳.۲) \quad \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left( \frac{(r \phi_{rz})|_{r+\Delta r} - (r \phi_{rz})|_r}{\Delta r} \right) = \left( \frac{\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}}{L} + \rho g \right) r$$

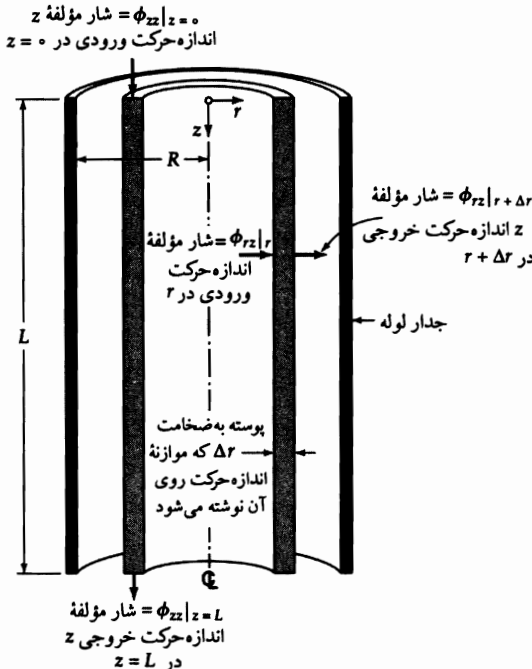
عبارت سمت چپ تعریف مشتق اول  $r \phi_{rz}$  نسبت به  $r$  است. بنابراین معادله (۷-۳.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۸-۳.۲) \quad \frac{\partial}{\partial r}(r \phi_{rz}) = \left( \frac{\phi_{zz}|_{z=0} - \phi_{zz}|_{z=L}}{L} + \rho g \right) r$$

اکنون باید مؤلفه‌های  $\phi_{zz}$  و  $\phi_{rz}$  را با استفاده از معادله (۱-۷.۱) و پیوست ب.۱ محاسبه کنیم:

$$(۹-۳.۲) \quad \phi_{rz} = \tau_{rz} + \rho v_r v_z = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} + \rho v_r v_z \quad (\text{الف})$$

$$(۱۰-۳.۲) \quad \phi_{zz} = p + \tau_{zz} + \rho v_z v_z = p - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \rho v_z v_z \quad (\text{ب})$$



شکل ۳.۲-۱ پوسته استوانه‌ای سیال که موازنه مؤلفه  $z$  اندازه حرکت برای جریان محوری در لوله مدور روی آن نوشته می شود (معادله های ۳.۲-۱ تا ۵) را ببینید. شارهای مؤلفه  $z$  اندازه حرکت، یعنی  $\phi_{rz}$  و  $\phi_{zz}$ ، به طور کامل در معادله های ۳.۲-۹ الف و ۳.۲-۹ ب) ارائه شده است.

سیس فرضی را که در ابتدای مسئله اختیار کردیم منظور می کنیم؛ این فرض که  $v_z = v_z(r)$ ،  $v_r = 0$ ،  $v_\theta = 0$  و  $p = p(z)$ . حال این ساده سازی ها را انجام می دهیم؛ (۱) چون  $v_r = 0$  می توانیم جمله  $\rho v_r v_z$  را از معادله (۳.۲-۹ الف) حذف کنیم؛ (۲) چون  $v_z = v_z(r)$ ، جمله  $\rho v_z v_z$  در هر دو سر لوله یکسان است؛ (۳) چون  $v_z = v_z(r)$  جمله  $\partial z \partial v_z$  در هر دو سر لوله یکسان خواهد بود. بنابراین معادله (۳.۲-۸) به صورت زیر ساده می شود:

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left( \frac{(p_0 - \rho g_0) - (p_L - \rho g_L)}{L} \right) r \equiv \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) r \quad (۳.۲-۱۰)$$

که در آن  $\mathcal{P} = p - \rho g z$  صورت اختصاری مناسبی برای مجموع جمله های فشار و گرانش است.<sup>۱</sup> با انتگرال گیری از معادله (۳.۲-۱۰) نتیجه می شود:

$$\tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r + \frac{C_1}{r} \quad (۳.۲-۱۱)$$

ثابت  $C_1$  را با استفاده از شرط مرزی به دست می آوریم:

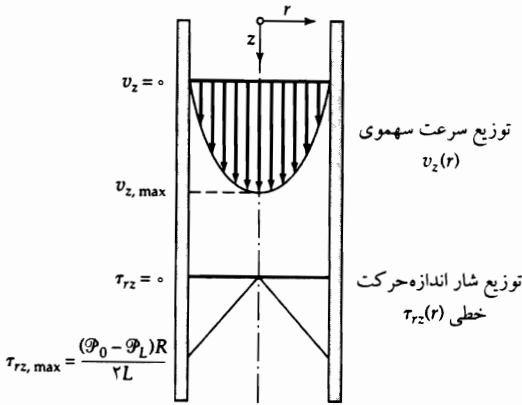
$$\tau_{rz} = 0 \quad \text{در } r = 0, \text{ داریم مقدار متناهی.} \quad (۳.۲-۱۲)$$

ثابت  $C_1$  باید صفر باشد، زیرا در غیر این صورت شار اندازه حرکت در محور لوله نامتناهی خواهد شد. بنابراین توزیع شار اندازه حرکت برابر است با:

$$\tau_{rz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r \quad (۳.۲-۱۳)$$

این توزیع در شکل ۳.۲-۲ نشان داده شده است.

۱. کمیت مشخص شده با  $\mathcal{P}$  را فشار اصلاح شده می نامند. به طور کلی این کمیت با رابطه  $\mathcal{P} = p + \rho gh$  تعریف می شود که در آن  $h$  فاصله «به طرف بالا» است؛ یعنی در جهتی مخالف با جهت نیروی گرانش از صفحه مرجع انتخابی. بنابراین در این مسئله  $h = -z$ .



شکل ۳-۳.۲ توزیع شار اندازه حرکت و توزیع سرعت برای جریان روبه پایین در لوله مدور.

قانون ویسکوزیته نیوتون برای این وضعیت از پیوست ب.۱ به دست می‌آید و به صورت زیر است:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} \quad (۱۴-۳.۲)$$

با قرار دادن این عبارت در معادله (۱۳-۳.۲) معادله دیفرانسیل زیر برای سرعت به دست می‌آید:

$$\frac{dv_z}{dr} = - \left( \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} \right) r \quad (۱۵-۳.۲)$$

از این معادله دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک پذیر می‌توان انتگرال‌گیری کرد تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$v_z = - \left( \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} \right) r^2 + C_2 \quad (۱۶-۳.۲)$$

ثابت  $C_2$  از شرط مرزی به دست می‌آید:

$$v_z = 0 \text{ در } r = R \quad (۱۷-۳.۲)$$

با استفاده از این شرط،  $C_2$  برابر  $(P_0 - P_L)R^2 / 4\mu L$  به دست می‌آید. بنابراین توزیع سرعت عبارت است از:

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (۱۸-۳.۲)$$

مشاهده می‌شود که توزیع سرعت در جریان آرام تراکم‌ناپذیر سیال نیوتونی در لوله‌ای طویل، سهموی است (شکل ۳-۳.۲ را ببینید).

پس از تعیین توزیع سرعت، می‌توان کمیت‌های اشتقاقی مختلف را به دست آورد:

۱. سرعت ماکزیم  $v_{z, \max}$  هنگامی ایجاد می‌شود که  $r = 0$  و عبارت است از:

$$v_{z, \max} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \quad (۱۹-۳.۲)$$

۲. سرعت متوسط ( $v_z$ ) از تقسیم آهنگ جریان حجمی کل بر مساحت مقطع حاصل می‌شود:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{8\mu L} = \frac{1}{4}v_{z,\max} \quad (20-3.2)$$

۳. آهنگ جریان جرمی  $w$  حاصل ضرب مساحت مقطع  $\pi R^2$ ، چگالی  $\rho$ ، و سرعت متوسط ( $v_z$ ) است:

$$w = \frac{\pi(P_0 - P_L)R^2 \rho}{8\mu L} \quad (21-3.2)$$

این نتیجهٔ نسبتاً مشهور را معادلهٔ هیگن-پواتزوی<sup>۲</sup> می‌نامند. این معادله، همراه با داده‌های تجربی برای آهنگ جریان و اختلاف فشار اصلاح‌شده، برای تعیین ویسکوزیتهٔ سیالات در «ویسکوزیته‌سنج مویین» به‌کار می‌رود (مثال ۲.۳-۱ را ببینید).

۴. مؤلفهٔ  $z$  نیروی که سیال بر سطح خیس لوله دارد می‌کند،  $F_z$ ، درست برابر انتگرال تنش برشی  $\tau_{rz}$  روی سطح خیس شده است:

$$\begin{aligned} F_z &= (2\pi RL) \left( -\mu \frac{dv_z}{dr} \right) \Big|_{r=R} = \pi R^2 (P_0 - P_L) \\ &= \pi R^2 (p_0 - p_L) + \pi R^2 L \rho g \end{aligned} \quad (22-3.2)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که نیروی ویسکوز  $F_z$  با نیروی فشاری خالص و نیروی گرانش خنثی می‌شود. این دقیقاً همان نتیجه‌ای است که از نوشتن موازنهٔ نیرو روی سیال داخل لوله به‌دست می‌آید. نتایج این بخش به‌اندازهٔ فرض‌های اختیارشده در آغاز بخش - یعنی  $v_z = v_z(r)$  و  $p = p(z)$  قابل قبول‌اند. آزمایش نشان داده‌است که این فرض‌ها در عمل برای اعداد رینولدز تا  $2100$  تحقق می‌یابند؛ بالاتر از این مقدار، در صورت وجود هرگونه اختلال درخور اعتنا در سیستم - مانند زبری جدار یا لرزش - جریان متلاطم خواهد شد.<sup>۳</sup> عدد رینولدز برای لوله‌های مدور از رابطهٔ  $Re = D(v_z)\rho/\mu$  به‌دست می‌آید که در آن  $D = 2R$  قطر لوله است. حال همهٔ فرض‌های اختیارشده برای به‌دست آوردن معادلهٔ هیگن-پواتزوی را جمع‌بندی می‌کنیم.

(الف) جریان آرام است؛ یعنی  $Re$  باید از حدود  $2100$  کوچک‌تر باشد.

(ب) چگالی ثابت است (جریان تراکم‌ناپذیر).

(ج) جریان «پایا» است (یعنی با زمان تغییر نمی‌کند).

(د) سیال نیوتونی است (معادلهٔ (۳.۲-۱۴) معتبر است).

2. G. Hagen, *Ann. Phys. Chem.*, **46**, 423-442 (1839); L. Poiseuille, *Comptes Rendus*, **11**, 961 and 1041 (1841).

ژان لویی پواتزوی (۱۷۹۹-۱۸۶۹) پزشکی بود که به تحقیق روی جریان خون علاقه داشت. اگرچه هیگن و پواتزوی وابستگی آهنگ جریان به توان چهارم شعاع لوله را نشان دادند، معادلهٔ (۳.۲-۲۱) را نخستین بار

E. Hagenbach, *Pogg. Annalen der Physik u. Chemie*, **108**, 385-426 (1860)

به‌دست آورد.

۳. ای. ای. دراد در [پایان‌نامهٔ دکتری، دانشگاه فنی دلفت (۱۹۹۶)] یک آزمایش کاملاً کنترل‌شده، جریان آرام را تا  $Re = 6000$  به‌قرار کرد. او روی توزیع سرعت غیرسه‌موی ناشی از چرخش زمین (از طریق اثر کوریولیس) نیز تحقیق کرد. هم‌چنین نگاه کنید به

A. A. Draad and F. T. M. Nieuwstadt, *J. Fluid. Mech.*, **361**, 207-308 (1998).

(ه) از آثار انتهایی چشم‌پوشی می‌شود. در واقع «طول ورودی» پس از مدخل لوله، باید از مرتبه  $L_e = 0.35 D Re$  باشد تا توزیع سهموی ایجاد شود. اگر قطعه مورد نظر از لوله شامل ناحیه ورودی باشد، باید تصحیحی را در آن اعمال کرد.<sup>۴</sup> در صورتی که  $L > L_e$ ، تصحیح جزئی اختلاف فشار یا آهنگ جریان جرمی هرگز از  $L_e/L$  بزرگ‌تر نخواهد شد.

(و) سیال مانند پیوستار رفتار می‌کنند این فرض معتبر است مگر برای گازهای بسیار رقیق یا لوله‌های مویین بسیار باریک، که در آن‌ها مسافت آزاد میانگین مولکولی با قطر لوله قابل مقایسه است (ناحیه جریان لغزشی)، یا از قطر لوله بسیار بزرگ‌تر است (رژیم «جریان کنوسن» یا «جریان مولکولی آزاد»)<sup>۵</sup>.

(ز) روی جدار لوله لغزش رخ نمی‌دهد، بنابراین شرط مرزی ۲ معتبر است؛ این فرضی عالی برای سیالات خالص تحت شرایط مفروض در (و) است. برای کسب اطلاعات بیشتر در باره لغزش روی جدار به مسئله ۲ ب. ۹ رجوع کنید.

مثال ۱-۳.۲

تعیین ویسکوزیته با استفاده از داده‌های جریان مویینه گلیسرین ( $CH_2OH \cdot CHOH \cdot CH_2OH$ ) در دمای  $26.5^\circ C$  در لوله‌ای افقی به طول ۱ ft و قطر داخلی  $0.1 \text{ in.}$  جریان دارد. به‌ازای افت فشار  $40 \text{ psi}$ ، آهنگ جریان حجمی  $w/\rho$  برابر است با:  $0.00398 \text{ ft}^3/\text{min}$ . چگالی گلیسرین در  $26.5^\circ C$  برابر است با:  $1.261 \text{ g/cm}^3$  مطلوب است تعیین ویسکوزیته گلیسرین برحسب سانتی‌پواز و  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ، با استفاده از داده‌های جریان.

حل

با استفاده از معادله هیگن-پواتزوی (معادله ۳.۲-۲۱)، داریم:

$$\mu = \frac{\pi(p_0 - p_L)R^4}{8(w/\rho)L} = \frac{\pi \left(40 \frac{\text{lb}_f}{\text{in.}^2}\right) \left(6.8947 \times 10^4 \frac{\text{dyn/cm}^2}{\text{lb}_f/\text{in.}^2}\right) \left(0.5 \text{ in.} \times \frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}}\right)^4}{8 \left(0.00398 \frac{\text{ft}^3}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) (1 \text{ ft})}$$

$$= 4.92 \text{ g/cm} \cdot \text{s} = 492 \text{ cp} = 0.492 \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad (23-3.2)$$

برای وارسی آرام بودن جریان، عدد رینولدز را محاسبه می‌کنیم:

$$Re = \frac{D(v_z)\rho}{\mu} = \frac{4(w/\rho)\rho}{\pi D\mu} = \frac{4 \left(0.00398 \frac{\text{ft}^3}{\text{min}}\right) \left(2.54 \frac{\text{cm}}{\text{in.}} \times 12 \frac{\text{in.}}{\text{ft}}\right)^2 \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) \left(1.261 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)}{\pi \left(0.1 \text{ in.} \times 2.54 \frac{\text{cm}}{\text{in.}}\right) \left(4.92 \frac{\text{g}}{\text{cm} \cdot \text{s}}\right)}$$

$$= 2.41 \text{ (بدون بُعد)} \quad (24-3.2)$$

4. J. H. Perry, *Chemical Engineers Handbook*, McGraw-Hill, New York, 3rd edition (1950), pp. 388-389; W. M. Kays and A. L. London, *Compact Heat Exchangers*, McGraw-Hill, New York (1958), p. 49.

۵. مارتین هانس کریستین کنوسن (۱۸۷۱-۱۹۴۹)، استاد فیزیک در دانشگاه کپنهاگ، آزمایش‌های مهمی روی رفتار گازهای بسیار رقیق انجام داد. درس‌هایی که او در دانشگاه گلاسکو ارائه داد به‌صورت کتاب زیر منتشر شده‌است:

M. Knudsen, *The Kinetic Theory of Gases*, Methuen, London (1934); G. N. Patterson, *Molecular Flow of Gases*, Wiley, New York (1965). see also J. H. Ferziger and H. G. Kaper, *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*, North-Holl and, Amsterdam (1972), Chapter 15.

بنابراین جریان واقعاً آرام است. به علاوه، طول ورودی برابر است با:

$$L_e = 0.7035 D Re = (0.7035)(0.1/12)(2,41) = 0.70007 \text{ ft} \quad (25-3.2)$$

پس آثار ورودی اهمیت ندارند و مقدار ویسکوزیته‌ای که در بالا به دست آمد درست محاسبه شده است.

### مثال ۲-۳-۲

جریان تراکم‌پذیر در لولهٔ مدور افقی<sup>۶</sup>

عبارتی برای بیان آهنگ جریان جرمی  $w$  در گاز ایده‌آل با جریان آرام در لولهٔ مدور طولی به دست آورید. جریان هم‌دما فرض می‌شود. فرض کنید تغییر فشار در لوله چندان زیاد نیست، به طوری که می‌توان ویسکوزیته را در همه جا ثابت گرفت.

حل

این مسئله را می‌توان به صورت تقریبی، با فرض این که معادلهٔ هیگن-پوتازوی (معادلهٔ ۲۱-۳.۲) را می‌توان در طول کوچک  $dz$  از لوله به کار برد، به ترتیب زیر حل کرد:

$$w = \frac{\pi R^f}{\lambda \mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \quad (26-3.2)$$

برای حذف  $\rho$  به نفع  $p$ ، از قانون گاز ایده‌آل به صورت  $p/\rho = p_0/\rho_0$  استفاده می‌کنیم که در آن  $p_0$  و  $\rho_0$  عبارت‌اند از فشار و چگالی در  $z = 0$ . در نتیجه:

$$w = \frac{\pi R^f}{\lambda \mu} \frac{\rho_0}{p_0} \left( -p \frac{dp}{dz} \right) \quad (27-3.2)$$

آهنگ جریان جرمی  $w$  به ازای همهٔ مقادیر  $z$  یکسان است. بنابراین می‌توان از معادلهٔ (۲۷-۳.۲) از  $z = 0$  تا  $z = L$  انتگرال گرفت تا نتیجه شود:

$$w = \frac{\pi R^f}{\sqrt{6} \mu L} \frac{\rho_0}{p_0} (p_0^2 - p_L^2) \quad (28-3.2)$$

چون  $p_0^2 - p_L^2 = (p_0 + p_L)(p_0 - p_L)$ ، سرانجام نتیجه می‌شود:

$$w = \frac{\pi (p_0 - p_L) R^f \rho_{\text{avg}}}{\lambda \mu L} \quad (29-3.2)$$

که در آن  $\rho_{\text{avg}} = \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_L)$  چگالی متوسط محاسبه شده در فشار متوسط  $p_{\text{avg}} = \frac{1}{2}(p_0 + p_L)$  است.

### ۴.۲ جریان در حلقه

حال مسئلهٔ دیگری در مورد جریان ویسکوز را در مختصات استوانه‌ای حل می‌کنیم که مسئلهٔ جریان محوری حالت پایایی مایعی تراکم‌ناپذیر در ناحیهٔ حلقوی بین دو استوانهٔ هم‌محور به شعاع‌های  $R$  و  $\kappa R$ ، مطابق شکل ۱-۴.۲ است. این

6. L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, 2nd edition (1987), §17, Problem 6.

R. K. Prud'homme, T. W. Chapman, and J. R. Bowen

یک جواب اختلالی این مسئله را

به دست آوردند و در

*Appl. Sci. Res*, **43**, 67-74 (1986)

منتشر شد.

سیال در لوله به سمت بالا - یعنی در جهتی مخالف با جهت نیروی گرانش - جریان دارد. همان فرض‌هایی را اختیار می‌کنیم که در بخش ۳.۲ اختیار کردیم:  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = 0$ ,  $v_z = v_z(r)$  و  $p = p(z)$ . حال وقتی موازنه اندازه حرکت را روی لایه استوانه‌ای نازکی از مایع می‌نویسیم، به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left( \frac{(p_o + \rho g z) - (p_L + \rho g L)}{L} \right) r \equiv \left( \frac{P_o - P_L}{L} \right) r \quad (۱-۴.۲)$$

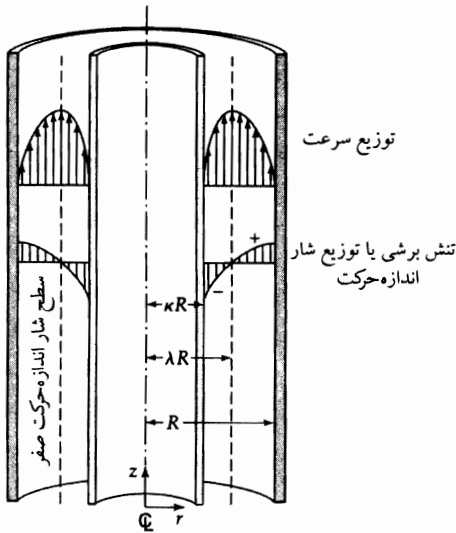
تنها تفاوت این معادله با معادله (۱۰-۳.۲) این است که در این جا  $P = p + \rho g z$ ، زیرا مختص  $z$  در جهت مخالف با جهت نیروی گرانش است (یعنی  $z$  همانند  $h$  در پانوش ۱ در بخش ۳.۲ است). با انتگرال‌گیری از معادله (۱-۴.۲) نتیجه می‌شود:

$$\tau_{rz} = \left( \frac{P_o - P_L}{2L} \right) r + \frac{C_1}{r} \quad (۲-۴.۲)$$

که همان معادله (۱۱-۳.۲) است.

ثابت  $C_1$  را نمی‌توان بلافاصله تعیین کرد، زیرا در مورد شار اندازه حرکت در سطوح ثابت  $r = R$  و  $r = \kappa R$  هیچ اطلاعی نداریم. کل معلومات ما این است که در منحنی سرعت نقطه ماکزیمی در یک صفحه  $r = \lambda R$  (که هنوز نامعلوم است) وجود دارد که به ازای آن شار اندازه حرکت صفر خواهد بود؛ یعنی:

$$0 = \left( \frac{P_o - P_L}{2L} \right) \lambda R + \frac{C_1}{\lambda R} \quad (۳-۴.۲)$$



شکل ۱-۴.۲ توزیع شار اندازه حرکت و توزیع سرعت برای جریان روبه بالا در حلقه استوانه‌ای. توجه کنید که شار اندازه حرکت به ازای مقداری از  $r$  تغییر علامت می‌دهد که سرعت در آن مقدار ماکزیمی دارد.

وقتی این معادله را برای یافتن  $C_1$  حل می‌کنیم و آن را در معادله (۲-۴.۲) قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\tau_{rz} = \frac{(P_o - P_L)R}{2L} \left[ \left( \frac{r}{R} \right) - \lambda^2 \left( \frac{R}{r} \right) \right] \quad (۴-۴.۲)$$

تنها تفاوت این معادله با معادله (۲-۴.۲) آن است که ثابت انتگرال‌گیری  $C_1$  به نفع ثابت متفاوت  $\lambda$  حذف شده است. مزیت وضعیت جدید در این است که ما مفهوم هندسی  $\lambda$  را می‌دانیم.

اکنون قانون ویسکوزیته نیوتون،  $\tau_{rz} = -\mu(dv_z/dr)$  را در معادله (۴-۴.۲) جایگزین می‌کنیم تا معادله دیفرانسیلی برای  $v_z$  به دست بیاوریم:

$$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{(P_0 - P_L)R}{2\mu L} \left[ \left(\frac{r}{R}\right) - \lambda^2 \left(\frac{R}{r}\right) \right] \quad (5-4.2)$$

با انتگرال‌گیری از این معادله دیفرانسیل تفکیک‌پذیر مرتبه اول نتیجه می‌شود:

$$v_z = -\frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\lambda^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) + C_2 \right] \quad (6-4.2)$$

حال دو ثابت انتگرال‌گیری، یعنی  $\lambda$  و  $C_2$  را، با استفاده از شرط عدم لغزش روی هر مرز جامد، تعیین می‌کنیم:

$$v_z = 0 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } r = \kappa R, \text{ داریم} \quad (7-4.2)$$

$$v_z = 0 \quad \text{شرط مرزی ۲: در } r = R, \text{ داریم} \quad (8-4.2)$$

با قرار دادن این شرایط مرزی در معادله (۶-۴.۲) یک دستگاه دو معادله‌ای نتیجه می‌شود:

$$0 = \kappa^2 - 2\lambda^2 \ln \kappa + C_2 \quad 0 = 1 + C_2 \quad (9-4.2)$$

ثابت‌های  $\lambda$  و  $C_2$  با حل این دستگاه به دست می‌آیند و داریم:

$$C_2 = -1 \quad 2\lambda^2 = \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \quad (12, 11-4.2)$$

این عبارت‌ها را می‌توان در معادله‌های (۴-۴.۲) و (۶-۴.۲) قرار داد تا توزیع شار اندازه حرکت و توزیع سرعت<sup>۱</sup> به شرح زیر حاصل شود:

$$\tau_{rz} = \frac{(P_0 - P_L)R}{2L} \left[ \left(\frac{r}{R}\right) - \frac{1 - \kappa^2}{2 \ln(1/\kappa)} \left(\frac{R}{r}\right) \right] \quad (13-4.2)$$

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right] \quad (14-4.2)$$

توجه کنید که وقتی حلقه بسیار نازک می‌شود (یعنی  $\kappa$  فقط کمی از واحد کم‌تر است)، این نتایج به نتایج مربوط به شکاف تخت ساده می‌شود. (نگاه کنید به مسئله ۵.ب.۲) بررسی «وضعیت‌های حدی» مانند این وضعیت‌ها، هر جا که فرصت مقتضی فراهم شود، توصیه می‌شود.

حد پایینی  $\kappa \rightarrow 0$  چندان ساده نیست، زیرا نسبت  $\ln(R/r)/\ln(1/\kappa)$  در ناحیه‌ای نزدیک به مرز داخلی، همواره مهم است. بنابراین معادله (۱۴-۴.۲) به توزیع سهموی ساده نمی‌شود. اما معادله (۱۷-۴.۲) برای آهنگ جریان جرمی به معادله هیگن-پوتازوی ساده می‌شود.

1. H. Lamb. *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, 2nd edition (1895), p. 522.



با دانستن توزیع شار اندازه حرکت و توزیع سرعت، به دست آوردن سایر نتایج مورد نظر کار ساده‌ای است:

۱. سرعت ماکزیم برابر است با:

$$v_{z,\max} = v_z \Big|_{r=\lambda R} = \frac{(P_o - P_L)R^2}{4\mu L} [1 - \lambda^2(1 - \ln \lambda^2)] \quad (15-4.2)$$

که در آن  $\lambda^2$  از معادله (۱۲-۴.۲) به دست می‌آید.

۲. سرعت متوسط از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\kappa R}^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{\kappa R}^R r dr d\theta} = \frac{(P_o - P_L)R^2}{8\mu L} \left[ \frac{1 - \kappa^2}{1 - \kappa^4} - \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \right] \quad (16-4.2)$$

۳. آهنگ جریان جرمی برابر است با:  $w = \pi R^2(1 - \kappa^2)\rho \langle v_z \rangle$ ، یا:

$$w = \frac{\pi(P_o - P_L)R^3 \rho}{8\mu L} \left[ (1 - \kappa^4) - \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln(1/\kappa)} \right] \quad (17-4.2)$$

۴. نیرویی که سیال بر سطوح جامد وارد می‌کند از جمع زدن نیروهای وارد بر استوانه‌های داخلی و خارجی، به ترتیب زیر، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} F_z &= (2\pi\kappa RL)(-\tau_{rz}|_{r=\kappa R}) + (2\pi RL)(+\tau_{rz}|_{r=R}) \\ &= \pi R^2(1 - \kappa^2)(P_o - P_L) \end{aligned} \quad (18-4.2)$$

دانشجو باید انتخاب علائم را در جلوی تنش‌های برشی بالا توضیح دهد و نتیجه نهایی را نیز تفسیر کند. معادله‌های به دست آمده در بالا فقط برای جریان آرام معتبرند. گذار آرام-متلاطم در همسایگی  $Re = 2000$  روی می‌دهد و عدد رینولدز به صورت  $Re = 2R(1 - \kappa)\langle v_z \rangle \rho / \mu$  تعریف می‌شود.

## ۵.۲ جریان دو سیال امتزاج‌ناپذیر مجاور هم ۱

تا این جا وضعیت‌های جریان با مرزهای جامد-سیال و مایع-گاز را بررسی کردیم. اکنون نمونه‌ای از یک مسئله جریان با فصل مشترک مایع-مایع را مطرح می‌کنیم (شکل ۱۵.۲ را ببینید).

تأثیر دو مایع تراکم‌ناپذیر و امتزاج‌ناپذیر در امتداد  $z$  در یک شکاف افقی نازک به طول  $L$  و عرض  $W$ ، تحت تأثیر گرادیان فشار افقی  $(p_o - p_L)/L$  جریان دارند. آهنگ جریان سیال طوری تنظیم می‌شود که نیمی از شکاف با سیال ۱ (که فاز چگال‌تر است) و نیم دیگر آن با سیال ۲ (که فاز کم‌چگال‌تر است) پر شود. جریان این سیال‌ها به اندازه‌ای آهسته است که هیچ ناپایداری رخ نخواهد داد؛ یعنی فصل مشترک دقیقاً صفحه‌ای می‌ماند. می‌خواهیم توزیع شار اندازه حرکت و توزیع سرعت را به دست آوریم.

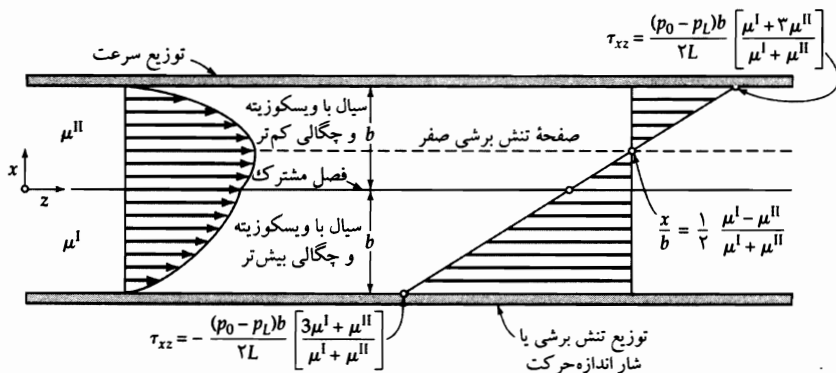
موازنه اندازه حرکت دیفرانسیلی به معادله دیفرانسیل زیر برای شار اندازه حرکت منتهی می‌شود:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{p_o - p_L}{L} \quad (15-5.2)$$

۱. جریان گازها و مایعات مجاور در مجراها در منبع زیر بررسی شده است:

این معادله برای هردو فاز ۱ و ۲ به دست می‌آید. با انتگرال‌گیری برای دو ناحیه نتیجه می‌شود:

$$\tau_{xz}^I = \left( \frac{p_0 - pL}{L} \right) x + C_1^I \quad \tau_{xz}^{II} = \left( \frac{p_0 - pL}{L} \right) x + C_1^{II} \quad (۳, ۲-۵.۲)$$



شکل ۱-۵.۲ جریان دو سیال امتزاج‌ناپذیر بین یک جفت صفحه افقی تحت تأثیر گرادیان فشار.

بلافاصله می‌توان از یکی از شرایط مرزی، مثلاً پیوستگی شار اندازه حرکت  $\tau_{xz}$  در سراسر فصل مشترک سیال-سیال، استفاده کرد:

$$\tau_{xz}^I = \tau_{xz}^{II} \quad \text{در } x = 0 \text{، داریم} \quad (۴-۵.۲)$$

این عبارت به ما می‌گوید که  $C_1^I = C_1^{II}$ ؛ بنابراین اندیس بالا را حذف می‌کنیم و هردو ثابت انتگرال‌گیری را  $C_1$  می‌نامیم. وقتی قانون ویسکوزیته نیوتون را در معادله‌های (۲-۵.۲) و (۳-۵.۲) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$-\mu^I \frac{dv_z^I}{dx} = \left( \frac{p_0 - pL}{L} \right) x + C_1 \quad -\mu^{II} \frac{dv_z^{II}}{dx} = \left( \frac{p_0 - pL}{L} \right) x + C_1 \quad (۶, ۵-۵.۲)$$

از این دو معادله انتگرال می‌گیریم؛ در نتیجه:

$$v_z^I = -\left( \frac{p_0 - pL}{2\mu^I L} \right) x^2 - \frac{C_1}{\mu^I} x + C_2^I \quad v_z^{II} = -\left( \frac{p_0 - pL}{2\mu^{II} L} \right) x^2 - \frac{C_1}{\mu^{II}} x + C_2^{II} \quad (۸, ۷-۵.۲)$$

سه ثابت انتگرال‌گیری را می‌توان با استفاده از شرط‌های مرزی عدم لغزش زیر تعیین کرد:

$$v_z^I = v_z^{II} \quad \text{در } x = 0 \text{، داریم} \quad (۹-۵.۲)$$

$$v_z^I = 0 \quad \text{در } x = -b \text{، داریم} \quad (۱۰-۵.۲)$$

$$v_z^{II} = 0 \quad \text{در } x = +b \text{، داریم} \quad (۱۱-۵.۲)$$

وقتی این سه شرط مرزی اعمال شود، یک دستگاه سه معادله‌ای برای ثابت‌های انتگرال‌گیری به دست می‌آید:

$$C_2^I = C_2^{II} \quad \text{از شرط مرزی ۲:} \quad (۱۲-۵.۲)$$

$$\circ = - \left( \frac{p_0 - p_L}{2\mu^I L} \right) b^2 + \frac{C_1}{\mu^I} b + C_1^I \quad \text{از شرط مرزی ۳: (۱۳-۵.۲)}$$

$$\circ = - \left( \frac{p_0 - p_L}{2\mu^{II} L} \right) b^2 + \frac{C_1}{\mu^{II}} b + C_1^{II} \quad \text{از شرط مرزی ۴: (۱۴-۵.۲)}$$

از این سه معادله نتیجه می‌شود:

$$C_1 = - \frac{(p_0 - p_L)b}{2L} \left( \frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \quad C_1^I = + \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^I L} \left( \frac{2\mu^I}{\mu^I + \mu^{II}} \right) = C_1^{II} \quad (۱۶, ۱۵-۵.۲)$$

توزیع‌های سرعت و شار اندازه حرکت حاصل عبارت‌اند از:

$$\tau_{xz} = \frac{(p_0 - p_L)b}{L} \left[ \left( \frac{x}{b} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \right] \quad (۱۷-۵.۲)$$

$$v_z^I = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^I L} \left[ \left( \frac{2\mu^I}{\mu^I + \mu^{II}} \right) + \left( \frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \left( \frac{x}{b} \right) - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right] \quad (۱۸-۵.۲)$$

$$v_z^{II} = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^{II} L} \left[ \left( \frac{2\mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) + \left( \frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \left( \frac{x}{b} \right) - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right] \quad (۱۹-۵.۲)$$

این توزیع‌ها در شکل ۱۵-۲ نشان داده شده‌اند. اگر هردو سرعت برابر باشند، آنگاه توزیع سرعت سهموی خواهد بود و این همان توزیعی است که در مورد سیال خالص جاری بین صفحه‌های موازی انتظار می‌رود (معادله ۲ ب. ۳-۲) را ببینید. سرعت متوسط در هر لایه را می‌توان به دست آورد و نتایج عبارت‌اند از:

$$\langle v_z^I \rangle = \frac{1}{b} \int_{-b}^0 v_z^I dx = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{12\mu^I L} \left( \frac{2\mu^I + \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \quad (۲۰-۵.۲)$$

$$\langle v_z^{II} \rangle = \frac{1}{b} \int_0^b v_z^{II} dx = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{12\mu^{II} L} \left( \frac{\mu^I + 2\mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \quad (۲۱-۵.۲)$$

با استفاده از توزیع‌های سرعت و شار اندازه حرکت که در بالا محاسبه شد، می‌توان سرعت ماکزیمم، سرعت در فصل مشترک، تنش برشی در صفحه صفر، و پسا (نیروی مقاوم) روی جدارهای شکاف را نیز محاسبه کرد.

## ۶.۲ جریان خزشی حول یک کره <sup>۴.۳.۲.۱</sup>

در بخش‌های گذشته چندین مسئله مقدماتی جریان ویسکوز را حل کردیم. در همه این مسئله‌ها با جریان‌های راست‌خطی سروکار داشتیم که فقط یک مؤلفه سرعت غیرصفر داشتند. چون جریان در اطراف کره دو مؤلفه سرعت

1. G. G. Stokes, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **9**, 8-106 (1851).

برای آشنایی با خزش در اطراف جسمی با شکل اختیاری، نگاه کنید به

H. Brenner, *Chem. Engr. Sci.*, **19**, 703-727 (1964).

2. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon, London (1987), §20.

3. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon, London (1987), §4.9.

4. S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics Principles and Selected Applications*, Butterworth-Heinemann, Boston (1991), §4.2.3;

در این کتاب بحث کاملی در مورد مسائل «جریان خزشی» ارائه شده است.

غیرصفر،  $v_\theta$  و  $v_r$  دارد، نمی‌توان با استفاده از فنونی که در آغاز فصل شرح داده شد، آن را به خوبی درک کرد. با وجود این، بحثی اجمالی در مورد جریان در اطراف کره در این جا ارائه می‌شود، زیرا جریان در اطراف اجسام غوطه‌ور اهمیت دارد. در فصل ۴ نحوهٔ به‌دست آوردن توزیع‌های سرعت و فشار را نشان می‌دهیم. در این جا فقط به ذکر نتایج اکتفا می‌کنیم و نحوهٔ استفاده از آن‌ها برای به‌دست آوردن چند رابطهٔ مهم لازم برای بحث‌های بعدی را نشان می‌دهیم. مسئله‌ای که در این جا، و هم‌چنین در فصل ۴، بررسی می‌کنیم با «جریان خزشی» سروکار دارد که جریانی بسیار آهسته است. این نوع جریان را «جریان استوکس» نیز می‌نامند.

سیال تراکم‌ناپذیری را در اطراف کره‌ای توپر به شعاع  $R$  و قطر  $D$ ، مطابق شکل ۱-۶.۲ در نظر می‌گیریم. این سیال، با چگالی  $\rho$  ویسکوزیتهٔ  $\mu$ ، در امتداد عمودی  $z$  و به طرف بالا، با سرعت یکنواخت  $v_\infty$  به کرهٔ ثابت نزدیک می‌شود. در این مسئله «جریان خزشی» به معنای این است که عدد رینولدز  $Re = Dv_\infty\rho/\mu$  از حدود  $0.1$  کم‌تر است. مشخصهٔ این رژیم جریان نبود جریان گردابی در پایین‌دست کره است.

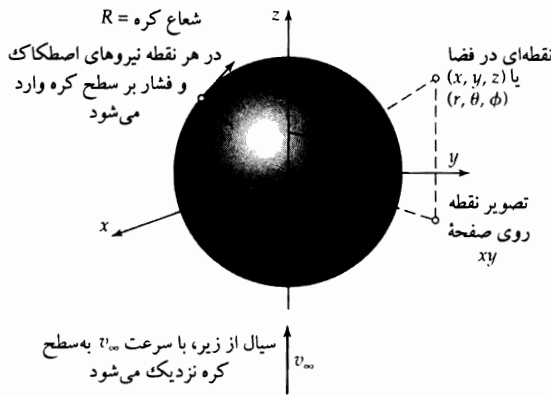
توزیع‌های سرعت و فشار برای این جریان خزشی در فصل ۴ به‌دست آمده و عبارت‌اند از:

$$v_r = v_\infty \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{R}{r} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \quad (۱-۶.۲)$$

$$v_\theta = v_\infty \left[ -1 + \frac{3}{4} \left( \frac{R}{r} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta \quad (۲-۶.۲)$$

$$v_\phi = 0 \quad (۳-۶.۲)$$

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{3}{4} \frac{\mu v_\infty}{R} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta \quad (۴-۶.۲)$$



شکل ۱-۶.۲ کره‌ای به شعاع  $R$  که در اطراف آن سیالی جریان دارد. مختصات  $r$ ،  $\theta$ ، و  $\phi$  در شکل نشان داده شده‌اند. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد مختصات کروی به شکل الف.۲-۸ رجوع کنید.

در آخرین معادله، کمیت  $p_0$  فشار در صفحهٔ  $z = 0$  است که دور از کره واقع شده‌است. جملهٔ  $-\rho g z$  فشار هیدروستاتیکی ناشی از وزن سیال و جملهٔ شامل  $v_\infty$  سهم مربوط به حرکت سیال است. معادله‌های (۱-۶.۲)، (۲-۶.۲) و (۳-۶.۲) نشان می‌دهند که سرعت سیال در سطح کره صفر است. به علاوه، در حد، وقتی  $r \rightarrow \infty$ ، سرعت سیال در امتداد  $z$  است و مقدار یکنواختی برابر  $v_\infty$  دارد؛ این نتیجهٔ منطقی این نکته است که  $v_z = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta$  که می‌توان آن را با استفاده از معادلهٔ (الف.۳-۶) به‌دست آورد و  $v_x = v_y = 0$  که از معادله‌های (الف.۳-۶) و (الف.۲-۶) نتیجه می‌شود.

مؤلفه‌های تانسور تنش  $\tau$  در مختصات کروی را می‌توان از توزیع سرعت بالا و با استفاده از جدول ب. ۱ به دست آورد. این مؤلفه‌ها عبارت‌اند از:

$$\tau_{rr} = -2\tau_{\theta\theta} = -2\tau_{\phi\phi} = \frac{3\mu v_{\infty}}{R} \left[ -\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \left(\frac{R}{r}\right)^4 \right] \cos \theta \quad (5-6.2)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \frac{3}{2} \frac{\mu v_{\infty}}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^4 \sin \theta \quad (6-6.2)$$

و همه مؤلفه‌های دیگر صفرند. توجه کنید که تنش‌های قائم برای این جریان غیرصفرند، مگر در  $r = R$ . حال می‌خواهیم نیرویی را تعیین کنیم که سیال جاری روی کره وارد می‌کند. به علت تقارن حول محور  $z$ ، نیروی برآیند درامتداد  $z$  خواهد بود. بنابراین نیروی موردنظر را می‌توان با انتگرال‌گیری از مؤلفه‌های  $z$  نیروهای قائم و مماسی روی سطح کره به دست آورد.

### انتگرال‌گیری از نیروی قائم

در هر نقطه واقع بر سطح کره، سیال نیرویی بر واحد سطح وارد می‌کند که بر سطح عمود است و مقدار آن برابر است با:  $-(p + \tau_{rr})|_{r=R}$ . چون سیال در ناحیه  $r$  بیش‌تر است و کره در ناحیه  $r$  کم‌تر، باید براساس قرارداد علامت تعیین شده در بخش ۲.۱ از علامت منها استفاده کنیم. مؤلفه  $z$  نیرو برابر است با:  $-(p + \tau_{rr})|_{r=R}(\cos \theta)$ . حال این عبارت را در جزء دیفرانسیلی سطح  $R^2 \sin \theta d\theta d\phi$  ضرب می‌کنیم تا نیروی وارد بر جزء سطح به دست آید. (شکل الف. ۸-۲ را ببینید). سپس روی سطح کره انتگرال می‌گیریم تا نیروی قائم برآیند درامتداد  $z$  حاصل شود:

$$F^{(n)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (-(p + \tau_{rr})|_{r=R} \cos \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (7-6.2)$$

طبق معادله (۵-۶.۲)، تنش قائم  $\tau_{rr}$  در  $r = R$  صفر است<sup>۵</sup> و می‌توان آن را از انتگرال معادله (۷-۶.۲) حذف کرد. توزیع فشار در سطح کره، طبق معادله (۴-۶.۲) برابر است با:

$$p|_{r=R} = p_0 - \rho g R \cos \theta - \frac{3}{2} \frac{\mu v_{\infty}}{R} \cos \theta \quad (8-6.2)$$

وقتی این عبارت را در معادله (۷-۶.۲) جایگزین کنیم و انتگرال بگیریم، جمله حاوی  $p_0$  صفر می‌شود، جمله حاوی  $g$  شتاب گرانش نیروی شناوری را به دست می‌دهد، و جمله حاوی سرعت تقرب  $v_{\infty}$  «پسای شکلی» را نتیجه می‌دهد:

$$F^{(n)} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 2 \pi \mu R v_{\infty} \quad (9-6.2)$$

نیروی شناوری برابر است با جرم سیال جابه‌جا شده  $(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho)$  ضرب در شتاب گرانش  $(g)$ .

### انتگرال‌گیری از نیروی مماسی

در هر نقطه روی سطح جامد یک تنش برشی نیز وجود دارد که درامتداد مماسی عمل می‌کند. نیرویی که سیال (ناحیه  $r$  بیش‌تر) درامتداد  $\theta$  بر واحد سطح جامد (ناحیه  $r$  کم‌تر) وارد می‌کند برابر است با:  $\tau_{r\theta}|_{r=R}$ . مؤلفه  $z$  این نیرو بر واحد سطح برابر است با:  $\tau_{r\theta}|_{r=R} \sin \theta$ . حال این عبارت را در جزء سطح  $R^2 \sin \theta d\theta d\phi$  ضرب می‌کنیم و روی کل سطح کره انتگرال می‌گیریم.

۵. در مثال ۱-۱.۳ نشان می‌دهیم که برای سیالات نیوتونی تراکم‌ناپذیر، در سطوح جامد ثابت و برای همه جریان‌ها، هر سه تنش قائم صفرند.

در نتیجه نیروی برآیند در امتداد  $z$  به دست می‌آید:

$$F^{(t)} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\tau_{r\theta}|_{r=R} \sin \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (۱۰-۶.۲)$$

توزیع تنش برشی روی سطح کره، از معادله (۶-۶.۲)، برابر است با:

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = \frac{3}{4} \frac{\mu v_\infty}{R} \sin \theta \quad (۱۱-۶.۲)$$

با قرار دادن این عبارت در انتگرال معادله (۱۰-۶.۲)، «پسای اصطکاکی» حاصل می‌شود.

$$F^{(t)} = 4\pi\mu Rv_\infty \quad (۱۲-۶.۲)$$

بنابراین نیروی کل  $F$  که سیال بر کره وارد می‌کند برابر است با مجموع معادله‌های (۹-۶.۲) و (۱۲-۶.۲):

$$F = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 2\pi\mu Rv_\infty + 4\pi\mu Rv_\infty \quad (۱۳-۶.۲)$$

پسای اصطکاکی      پسای شکلی      نیروی شناوری

یا

$$F = F_b + F_k = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 6\pi\mu Rv_\infty \quad (۱۴-۶.۲)$$

نیروی جنبشی      نیروی شناوری

جمله اول نیروی شناوری است که در سیال در حال سکون حضور دارد؛ این نیرو برابر است با جرم سیال جابه‌جا شده، ضرب در شتاب گرانشی. جمله دوم، نیروی جنبشی، از حرکت سیال نتیجه می‌شود. رابطه:

$$F_k = 6\pi\mu Rv_\infty \quad (۱۵-۶.۲)$$

قانون استوکس نامیده می‌شود. از این رابطه برای توصیف حرکت ذرات کلوئیدی در میدان الکتریکی، در نظریه ته‌نشین‌سازی، و در بررسی حرکت ذرات آئروسول استفاده می‌شود. قانون استوکس فقط تا عدد رینولدزی  $Re = \rho v_\infty R / \mu$  حدود ۰٫۱ قابل استفاده است. در  $Re = ۱$ ، قانون استوکس نیرو را در حدود ۱۰٪ پایین‌تر از پیش‌بینی می‌کند. رفتار جریان به‌ازای عددهای رینولدز بالاتر در فصل ۶ شرح داده می‌شود.

این مسئله، که نمی‌توان با استفاده از روش موازنه لایه‌ای آن را حل کرد، بر نیاز به روشی عام‌تر برای حل مسئله‌های جریان‌ی که در آن‌ها خطوط جریان راست‌خط نیستند، تأکید می‌کند. این موضوع فصل بعد است.

### مثال ۶.۲

تعیین ویسکوزیته از روی سرعت حدی کره در حال سقوط عبارتی به دست آورید که بتوان با استفاده از آن سرعت یک سیال را، از طریق اندازه‌گیری سرعت حدی  $v_t$  کره‌ای کوچک به شعاع  $R$  در سیال به دست آورد.

حل

اگر کره‌ای کوچک از حالت سکون در یک سیال ویسکوز، شروع به سقوط کند، سرعت آن افزایش می‌یابد تا این که به مقداری ثابت، موسوم به سرعت حدی برسد. وقتی این وضعیت حالت پایا برقرار شد، جمع همه نیروهای وارد بر کره باید صفر باشد. نیروی گرانش وارد بر جامد در جهت سقوط عمل می‌کند و نیروهای شناوری و جنبشی در جهت مخالف عمل می‌کنند:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 6\pi\mu Rv_t \quad (۱۶-۶.۲)$$

در این جا  $\rho_s$  و  $\rho$ ، به ترتیب، چگالی کره جامد و سیال اند. با حل این معادله برای یافتن سرعت حدی، نتیجه می‌شود:

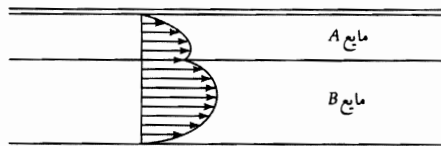
$$\mu = \frac{2}{9} R^2 (\rho_s - \rho) g / v_t \quad (17-6.2)$$

از این نتیجه فقط هنگامی می‌توان استفاده کرد که عدد رینولدز از حدود  $0.1$  کوچکتر باشد.

این آزمایش روشی ظاهراً ساده برای تعیین ویسکوزیته را نشان می‌دهد. اما به دشواری می‌توان از چرخش کره‌ای همگن، درحین سقوط در سیال، جلوگیری کرد و اگر کره بچرخد، دیگر نمی‌توان از معادله (۱۷-۶.۲) استفاده کرد. گاهی برای جلوگیری از چرخش، از کره‌های سنگین استفاده می‌کنند؛ در این صورت سمت چپ معادله (۱۶-۶.۲) را باید با  $m$ ، جرم کره، ضرب در شتاب گرانشی، جایگزین کرد.

### پرسش‌های تشریحی

۱. راهکار حل مسئله‌های جریان ویسکوز با استفاده از روش موازنه لایه‌ای را خلاصه کنید. با استفاده از این روش چه نوع مسئله‌هایی را می‌توان حل کرد و چه نوع را نمی‌توان حل کرد؟ در این روش از تعریف مشتق اول چه استفاده‌ای می‌شود؟
۲. از کدام یک از سیستم‌های جریان شرح داده شده در این فصل می‌توان به عنوان ویسکوزیته‌سنج استفاده کرد؟ مشکلاتی را که ممکن است با آن‌ها روبه‌رو شوید، نام ببرید.
۳. عدد رینولدز برای فیلم‌ها، لوله‌ها، و کره‌ها چگونه تعریف می‌شود؟ ابعاد  $Re$  چیست؟
۴. چگونه می‌توان فرمول ضخامت فیلم در بخش ۲.۲ را، برای توصیف فیلم ریزان روی جدار داخلی یک استوانه، اصلاح کرد؟ محدودیت‌های احتمالی این فرمول اصلاح شده را شرح دهید.
۵. چگونه می‌توان از نتایج به دست آمده در بخش ۳.۲ برای تخمین زمان لازم جهت تخلیه مایع از لوله عمودی دوسر باز استفاده کرد؟
۶. وابستگی شعاعی تنش برشی در جریان آرام مایع نیوتونی در لوله و حلقه را مقایسه کنید. در حلقه، چرا تابع تغییر علامت می‌دهد؟
۷. نشان دهید که فرمول هیگن-پوتازوی از لحاظ ابعادی سازگار است.
۸. بین جریان در لوله مدور به شعاع  $R$  و جریان در همان لوله که سیم نازکی در طول محور آن تعبیه شده است، چه تفاوت‌هایی وجود دارد؟
۹. تحت چه شرایطی انتظار می‌رود تحلیل بخش ۵.۲ قابل کاربرد نباشد؟
۱۰. آیا قانون استوکس برای ریزقطره‌های روغن در حال سقوط در آب معتبر است؟ برای حباب‌های هوای در حال صعود در بنزن چه طور؟ برای ذرات ریز در حال سقوط در هوا، هرگاه قطر ذرات از مرتبه مسافت آزاد میانگین مولکول در هوا باشد، چه طور؟
۱۱. دو مایع امتزاج ناپذیر  $A$  و  $B$ ، بین دو صفحه موازی، جریان آرام دارند. آیا ممکن است توزیع سرعت به شکل زیر باشد؟ توضیح دهید.



۱۲. سرعت حدی ذره کلوئیدی کروی با بار الکتریکی  $e$  در میدانی الکتریکی با شدت  $E$  چه قدر است؟ در آزمایش قطره روغن میلیکان از این سرعت حدی چگونه استفاده می‌شود؟

مستله‌ها

۱ الف ۱. ضخامت فیلم ریزان. آب با دمای  $20^\circ\text{C}$  روی جداری عمودی با  $Re = 10$  به طرف پایین جریان دارد. مطلوب است محاسبه (الف) آهنگ جریان، برحسب گالن در ساعت بر هر فوت عرض دیوار، و (ب) ضخامت فیلم برحسب اینچ.

جواب: (الف)  $0.727 \text{ gal/hr} \cdot \text{ft}$ ; (ب)  $0.00361 \text{ in.}$

۲ الف ۲. تعیین شعاع مویینی از طریق اندازه‌گیری جریان. یکی از روش‌های تعیین شعاع لوله مویین، از طریق اندازه‌گیری جریان مایع نیوتونی در لوله است. مطلوب است تعیین شعاع مویینی با استفاده از داده‌های زیر:

طول لوله مویین  $50.02 \text{ cm}$

ویسکوزیته سینماتیکی مایع  $4.03 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

چگالی مایع  $0.9552 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

افت فشار در لوله افقی  $4.829 \times 10^5 \text{ Pa}$

آهنگ جریان جرمی در لوله  $2.997 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$

در این روش با چه مشکلاتی ممکن است روبه‌رو شوید؟ روش‌های دیگری برای تعیین شعاع لوله‌های مویین پیشنهاد کنید.

۳ الف ۳. آهنگ جریان حجمی در حلقه. حلقه‌ای افقی، به طول  $27 \text{ ft}$ ، شعاع داخلی  $0.495 \text{ in.}$  و شعاع خارجی  $1.1 \text{ in.}$  مفروض است. می‌خواهیم محلول آبی  $60\%$  ساکاروز ( $\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$ ) با دمای  $20^\circ\text{C}$  را با پمپ

از این حلقه عبور دهیم. در این دما، چگالی محلول  $80.3 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$  و ویسکوزیته آن  $136.8 \text{ lb}_m/\text{ft} \cdot \text{hr}$  است. وقتی اختلاف فشار به  $5.39 \text{ psi}$  می‌رسد، آهنگ جریان حجمی محلول چه قدر است؟

جواب:  $0.110 \text{ ft}^3/\text{s}$ .

۴ الف ۴. اتلاف ذرات کاتالیزگر از طریق گاز خروجی دودکش.

(الف) قطر ماکزیمم ذرات ریزکروی کاتالیزگر را که می‌توانند همراه گاز خروجی از دودکش واحد کراکینگ سیال، تحت شرایط زیر خارج شوند، تخمین بزنید:

سرعت گاز در محور دودکش  $= 1 \text{ ft/s}$  عمودی و به طرف بالا)

ویسکوزیته گاز  $= 0.026 \text{ cp}$

چگالی گاز  $= 0.045 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$

چگالی ذره کاتالیزگر  $= 1.2 \text{ g/cm}^3$

نتیجه را برحسب میکرون بیان کنید ( $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m} = 1 \text{ میکرون}$ ).

(ب) آیا می‌توان در قسمت (الف) از قانون استوکس استفاده کرد؟

جواب: (الف)  $Re = 0.93$ ;  $110 \mu\text{m}$



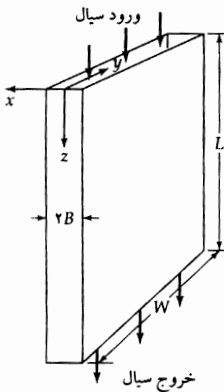
۱.۲ دستگاه‌های مختصات متفاوت برای مسئله فیلم ریزان. توزیع سرعت و سرعت متوسط به دست آمده در بخش ۲.۲ را با جایگزین کردن  $x$  توسط مختص  $\bar{x}$  که نسبت به جدار اندازه‌گیری می‌شود، دوباره به دست آورید؛ به عبارت دیگر  $\bar{x} = 0$  سطح جدار و  $\bar{x} = \delta$  فصل مشترک مایع‌گاز است. نشان دهید که توزیع سرعت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v_z = (\rho g \delta^2 / \mu) \left[ (\bar{x} / \delta) - \frac{1}{2} (\bar{x} / \delta)^2 \right] \cos \beta \quad (۱-۱.۲)$$

و سپس از این رابطه برای تعیین سرعت متوسط استفاده کنید. نشان دهید که چگونه می‌توان با تغییر متغیر، معادله (۱-۱.۲) را از معادله (۱۸-۲.۲) به دست آورد.

۲.۲ روشی دیگر برای حل مسئله‌های جریان. در این فصل از راهکار زیر استفاده کرده‌ایم: (۱) به دست آوردن معادله‌ای برای شار اندازه حرکت، (۲) انتگرال‌گیری از این معادله، (۳) قرار دادن قانون نیوتن جهت به دست آوردن معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای توزیع سرعت، (۴) انتگرال‌گیری از معادله اخیر برای به دست آوردن توزیع سرعت. روش دیگر چنین است: (۱) به دست آوردن معادله‌ای برای شار اندازه حرکت، (۲) قرار دادن قانون نیوتن در آن برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل مرتبه دوم توزیع سرعت، (۳) انتگرال‌گیری از معادله اخیر برای تعیین توزیع سرعت. با جایگزین کردن معادله (۱۴-۲.۲) در معادله (۱۰-۲.۲) و ادامه کار به ترتیب گفته شده، تا به دست آوردن توزیع سرعت و محاسبه ثابت‌های انتگرال‌گیری، روش دوم را در مورد مسئله فیلم ریزان به کار ببندید.

۳.۲ جریان آرام در شکاف باریک (شکل ۳.۲ ب.۳ را ببینید).



شکل ۳.۲ ب.۳ جریان در شکافی باریک، با  $B \ll W \ll L$ .

(الف) سیالی نیوتونی در شکاف باریک تشکیل شده توسط دو جدار موازی به فاصله  $2B$  از یکدیگر جریان دارد. می‌دانیم که  $B \ll W$ ، به طوری که «آثار لبه» اهمیت ندارند. موازنه اندازه حرکت دیفرانسیلی بنویسید و عبارت‌های زیر را برای توزیع شار اندازه حرکت و سرعت به دست آورید:

$$\tau_{xz} = \left( \frac{P_0 - P_L}{L} \right) x \quad v_z = \frac{(P_0 - P_L) B^2}{2\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{x}{B} \right)^2 \right] \quad (۲, ۱-۳.۲)$$

در این عبارت‌ها  $P = p + \rho gh = p - \rho g z$ .

(ب) نسبت سرعت متوسط به سرعت ماکزیمم این جریان چه قدر است؟

(ج) همتای شکافی معادله هیگن-پواتزوی را به دست آورید.

(د) نموداری با معنا برای نشان دادن این نکته ترسیم کنید که هرگاه  $B = W$ ، تحلیل بالا قابل کاربرد نیست.

(ه) چگونه می‌توان نتیجه قسمت (ب) را از نتایج بخش ۵.۲ به‌دست آورد؟

جواب: (ب)  $\langle v_z \rangle / v_{z, \max} = \frac{2}{3}$   
 (ج)  $w = \frac{2}{3} \frac{(P_o - P_L) B^2 W \rho}{\mu L}$

۴.ب۲ جریان آرام در شکاف با جدار متحرک (جریان صفحه‌ای کوئت). مسئله ۳.ب۲ را با فرض این‌که جدار در  $x = B$  با سرعت پایای  $v_o$  درامتداد مثبت  $z$  حرکت می‌کند، ادامه دهید. (الف) توزیع تنش برشی و (ب) توزیع سرعت را به‌دست آورید. نمودارهایی از این توابع ترسیم و آن‌ها را به‌دقت نام‌گذاری کنید.

جواب:

$$\tau_{xz} = \left( \frac{P_o - P_L}{L} \right) x - \frac{\mu v_o}{2B}$$

$$v_z = \frac{(P_o - P_L) B^2}{2\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{x}{B} \right)^2 \right] + \frac{v_o}{2} \left( 1 + \frac{x}{B} \right)$$

۵.ب۲ رابطه متقابل فرمول‌های شکاف و حلقه. وقتی حلقه‌ای بسیار نازک باشد، می‌توان با تقریب خوب، آن را شکاف نازک تلقی کرد. در این صورت نتایج مسئله ۳.ب۲ را می‌توان با اصلاحات مناسب به‌کار گرفت. مثلاً آهنگ جریان جرمی در حلقه‌ای با جداری خارجی به‌شعاع  $R$  و جداری داخلی به‌شعاع  $(1 - \varepsilon)R$  را، هرگاه  $\varepsilon$  کوچک باشد، می‌توان با جایگزین کردن  $2B$  توسط  $\varepsilon R$  و  $W$  توسط  $\varepsilon R (1 - \frac{1}{4}\varepsilon)$  از مسئله ۳.ب۲ به‌دست آورد. به این ترتیب، آهنگ جریان جرمی برابر است با:

$$w = \frac{\pi(P_o - P_L) R^2 \varepsilon^2 \rho}{6\mu L} \left( 1 - \frac{1}{4}\varepsilon \right) \quad (1-5.2)$$

نشان دهید که با قرار دادن  $\kappa$  مساوی  $1 - \varepsilon$  در فرمول‌ها و سپس بسط عبارت به‌دست‌آمده برای  $w$  به‌صورت توان‌های  $\varepsilon$  می‌توان همین نتیجه را از معادله (۱۷-۴.۲) به‌دست آورد. این کار مستلزم استفاده از سری تیلر است (بخش ج-۲ را ببینید).

$$\ln(1 - \varepsilon) = -\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\varepsilon^3 - \frac{1}{4}\varepsilon^4 - \dots \quad (2-5.2)$$

سپس باید یک تقسیم طولانی انجام داد. جمله اول در سری حاصل، معادله (۱-۵.۲) خواهد بود. تذکر: در به‌دست آوردن این معادله باید از چهار جمله اول سری تیلر در معادله (۲-۵.۲) استفاده کرد.

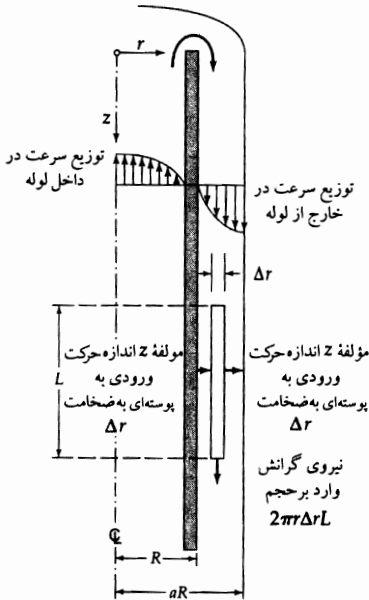
۶.ب۲ جریان فیلم روی سطح خارجی لولهٔ مدور (شکل ۶.۲ را ببینید). در آزمایش جذب گاز، سیالی ویسکوز در لولهٔ مدور کوچک بالا می‌رود و سپس از روی سطح خارجی آن پایین می‌آید. موازنهٔ اندازه‌حرکت را روی پوسته‌ای در فیلم، به‌ضخامت  $\Delta r$ ، مطابق شکل ۶.۲، بنویسید. توجه کنید که پیکان‌های «اندازه‌حرکت ورودی» و «اندازه‌حرکت خروجی» همیشه درجهت مثبت محور مختصات‌اند، هرچند در این مسئله اندازه‌حرکت در سطوح استوانه‌ای درجهت منفی  $r$  جریان دارد.

(الف) نشان دهید که توزیع سرعت ذر فیلم ریزان (با صرف‌نظر از آثار انتهایی) برابر است با:

$$v_z = \frac{\rho g R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + 2a^2 \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right] \quad (1-6.2)$$

(ب) عبارتی برای بیان آهنگ جریان جرمی در فیلم به دست آورید.

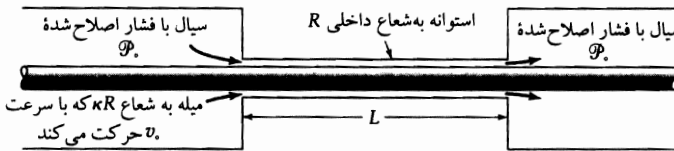
(ج) نشان دهید که هرگاه ضخامت فیلم خیلی کم باشد، نتیجه قسمت (ب) به معادله (۲.۲-۲۱) ساده می‌شود.



شکل ۲.۶. توزیع سرعت و موازنه مؤلفه  $z$  اندازه حرکت برای

جریان فیلم ریزان روی سطح خارجی لوله مدور.

۷.۲. جریان حلقه‌ای درحالتی که استوانه داخلی درامتداد محوری حرکت می‌کند (شکل ۷.۲ را ببینید). میله‌ای استوانه‌ای به شعاع  $\kappa R$  با سرعت  $v_z = v$  درامتداد محور حفره‌ای استوانه‌ای به شعاع  $R$ ، مطابق شکل، در حرکت است. فشار در دوسر حفره برابر است، به طوری که سیال در ناحیه حلقه‌ای، صرفاً به سبب حرکت میله حرکت می‌کند.



شکل ۷.۲. جریان حلقوی که در آن استوانه داخلی درامتداد محوری حرکت می‌کند.

(الف) توزیع سرعت در ناحیه حلقوی باریک را تعیین کنید.

(ب) آهنگ جریان جرمی در ناحیه حلقوی را بیابید.

(ج) نیروی ویسکوز وارد بر میله در طول  $L$  را به دست آورید.

(د) نشان دهید که نتیجه قسمت (ج) را می‌توان به صورت فرمول «شکاف تحت» ضرب در «تصحیح

انحنا» نوشت. مسئله‌هایی از این نوع در بررسی عملکرد قالب‌های پوشش سیم مطرح می‌شوند.<sup>۱</sup>

1. I. J. B. Paton, P. H. Squires, W. H. Darnell, F. M. Cash, and J. F. Carley, *Processing of Thermoplastic Materials*, F. C. Bernhardt (ed.), Reinhold, New York (1959), Chapter 4.

جواب: الف)  $\frac{v_z}{v_0} = \frac{\ln(r/R)}{\ln \kappa}$

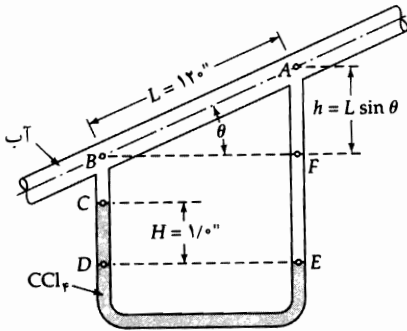
ب)  $w = \frac{\pi R^2 v_0 \rho}{2} \left[ \frac{(1 - \kappa^2)}{\ln(1/\kappa)} - 2\kappa^2 \right]$

ج)  $F_z = -2\pi L \mu v_0 / \ln(1/\kappa)$

د)  $F_z = \frac{-2\pi L \mu v_0}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \dots \right)$

که در آن  $\varepsilon = 1 - \kappa$  (مسئله ۲-ب-۵ را ببینید).

۸.۲ تحلیل جریان سنج مویین (شکل ۸.۲ ب-۸ را ببینید). آهنگ جریان (برحسب lb<sub>m</sub>/hr) را در جریان سنج مویین نشان داده شده در شکل تعیین کنید. سیال جاری در لوله شیب دار آب با دمای ۲۰°C است و سیال داخل فشارسنج کربن تتراکلرید (CCl<sub>4</sub>) با چگالی ۱/۵۹۴ g/cm<sup>۳</sup> است. قطر لوله مویین ۱۰/۱۰ in. است. تذکر: اندازه‌های H و L برای محاسبه آهنگ جریان کافی است؛ نیازی به اندازه‌گیری θ نیست. چرا؟



شکل ۸.۲ جریان سنج مویین.

۹.۲ پدیده‌های چگالی پایین در جریان تراکم‌پذیر در لوله<sup>۳.۲</sup> (شکل ۹.۲ ب-۹). با کاهش فشار در سیستم بررسی شده در مثال ۲-۳.۲، از معادله‌های (۲۸-۳.۲) و (۲۹-۳.۲) انحراف حاصل می‌شود. رفتار گاز چنان است که گویی روی جدار لوله می‌لغزد. مرسوم است که<sup>۲</sup> شرط مرزی متداول «عدم لغزش» را که بنابه آن در جدار لوله  $v_z = 0$ ، با شرط زیر جایگزین کنند:

$$v_z = -\zeta \frac{dv_z}{dr} \text{ در } r = R \quad (۱-۹.۲)$$

که در آن  $\zeta$  ضریب لغزش است. نتیجه به دست آمده در مثال ۲-۳.۲ را با استفاده از معادله (۱-۹.۲) به منزله شرط مرزی، دوباره به دست آورید. به علاوه از این نکته تجربی استفاده کنید که ضریب لغزش با عکس فشار تغییر می‌کند و داریم  $\zeta = \zeta_0 / p$  که در آن  $\zeta_0$  مقداری ثابت است. نشان دهید که آهنگ جریان جرمی برابر است با:

$$w = \frac{\pi(p_0 - p_L)R^2 \rho_{avg}}{8\mu L} \left( 1 + \frac{4\zeta_0}{Rp_{avg}} \right) \quad (۲-۹.۲)$$

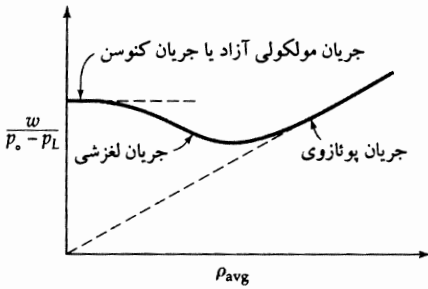
که در آن  $p_{avg} = \frac{1}{4}(p_0 + p_L)$  و چگالی متوسط محاسبه شده در  $p_{avg}$  است.

2. E. H. Kennard, *Kinetic Theory of Gases*, McGraw-Hill, New York (1938), pp. 292-295, 300-306.  
 3. M. Knudsen, *The Kinetic Theory of Gases*, Methuen, London, 3rd edition (1950). See also R. J. Silbey and R. A. Alberty, *Physical Chemistry*, Wiley, New York, 3rd edition (2001), §17.6.

وقتی فشار بیش تر کاهش پیدا کند، رژیم جریانی حاصل می‌شود که در آن مسافت آزاد میانگین مولکول‌های گاز نسبت به شعاع لوله بزرگ است (جریان کنوسن).<sup>۳</sup> در این رژیم:

$$w = \sqrt{\frac{2m}{\pi K T}} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) \left( \frac{p_0 - p_L}{L} \right) \quad (۳-۹.۲)$$

که در آن  $m$  جرم مولکولی و  $K$  ثابت بولتزمن است. برای به دست آوردن این نتیجه فرض می‌شود که همه برخورد‌های مولکول‌ها با سطوح جامد از نوع پخشی است نه بازتابی. نتایج معادله‌های (۲.۹-۳.۲)، (۲.۹-۲.۲) و (۳-۹.۲) در شکل ۹.۲ خلاصه شده است.



شکل ۹.۲ مقایسه رژیم‌های جریان در جریان گاز عبوری از داخل لوله.

۱۰.۲ جریان تراکم‌ناپذیر در لوله کمی باریک‌شونده. جریان سیالی تراکم‌ناپذیر در لوله‌ای با مقطع مدور، که شعاع آن از  $R_0$  در ورودی تا مقدار کمی کوچک‌تر  $R_L$  در خروجی، تغییرات خطی دارد، جاری است. فرض کنید معادله هیگن-پوئازوی برای جزء طول  $dz$  از لوله، تقریباً معتبر است به طوری که آهنگ جریان جرمی برابر می‌شود با:

$$w = \frac{\pi [R(z)]^4 \rho}{8\mu} \left( -\frac{dP}{dz} \right) \quad (۱-۱۰.۲)$$

این معادله دیفرانسیلی برای بیان  $P$  به صورت تابعی از  $z$  است، اما وقتی عبارت صریحی برای  $R(z)$  در آن قرار داده شود، به آسانی حل نمی‌شود.

(الف) عبارتی برای بیان  $R$  به صورت تابعی از  $z$  بنویسید.

(ب) متغیر مستقل معادله (۱-۱۰.۲) را به  $R$  تغییر دهید، تا این معادله به صورت زیر درآید:

$$w = \frac{\pi R^4 \rho}{8\mu} \left( -\frac{dP}{dR} \right) \left( \frac{R_L - R_0}{L} \right) \quad (۲-۱۰.۲)$$

(ج) از این معادله انتگرال بگیرید و سپس نشان دهید که می‌توان جواب را دوباره مرتب کرد تا نتیجه زیر حاصل شود:

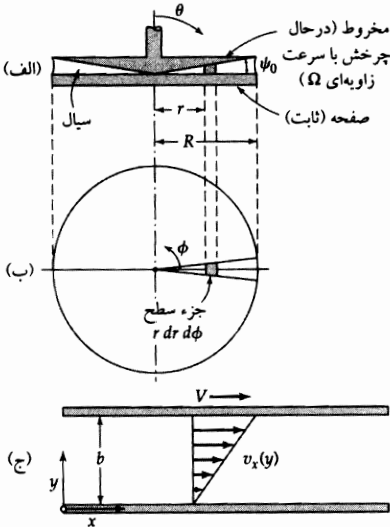
$$w = \frac{\pi (P_0 - P_L) R_0^4 \rho}{8\mu L} \left[ 1 - \frac{1 + (R_L/R_0) + (R_L/R_0)^2 - 3(R_L/R_0)^3}{1 + (R_L/R_0) + (R_L/R_0)^2} \right] \quad (۳-۱۰.۲)$$

این نتیجه را تفسیر کنید. تقریبی که در این جا به کار رفت، مبنی بر این‌که جریان بین سطوح ناموازی را، به طور موضعی، می‌توان جریان بین سطوح موازی تلقی کرد، گاهی تقریب روانکاری می‌نامند و در نظریه روانکاری کاربرد گسترده‌ای دارد.

با تحلیل دقیق مرتبه بزرگی، می‌توان نشان داد که در این مسئله، تقریب روانکاری تا جایی معتبر است که:

$$\frac{R_L}{R_0} \left( 1 - \left( \frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \ll 1 \quad (۴-۱۰.ب۲)$$

۱۱.ب۲ ویسکوزیته‌سنج مخروط و صفحه‌ای (شکل ۲.ب۱۱ را ببینید). ویسکوزیته‌سنج مخروط و صفحه‌ای از یک صفحه ثابت تخت و یک مخروط وارونه تشکیل شده است که فقط رأس آن صرفاً با صفحه تماس دارد. مایعی که ویسکوزیته آن باید اندازه‌گیری شود در شکاف بین مخروط و صفحه قرار می‌گیرد. مخروط با سرعت زاویه‌ای معلوم  $\Omega$  می‌چرخد و گشتاور  $T_z$  لازم برای چرخاندن مخروط اندازه‌گیری می‌شود. عبارتی برای بیان ویسکوزیته سیال برحسب  $\Omega$ ،  $T_z$  و زاویه  $\psi_0$  بین مخروط و صفحه به دست آورید. در ویسکوزیته‌سنج‌های تجاری  $\psi_0$  در حدود ۱ درجه است.



شکل ۱۱.ب۲ ویسکوزیته‌سنج مخروط و صفحه‌ای (الف) نمای نیم‌رخ دستگاه؛ (ب) نمای بالای سیستم مخروط و صفحه، که جزء دیفرانسیلی  $r dr d\phi$  را نشان می‌دهد؛ (ج) توزیع سرعت تقریبی در داخل ناحیه دیفرانسیلی. برای برابر گرفتن سیستم‌های (الف) و (ب) هم‌ارزی‌های زیر را در نظر می‌گیریم:  $V = \Omega r$  و  $b = r \sin \psi_0 \approx r \psi_0$ .

(الف) فرض کنید به‌طور موضعی می‌توان توزیع سرعت در این شکاف را به‌صورت خیلی نزدیک، با توزیع سرعت برای جریان بین صفحه‌های موازی تقریب زد که در آن صفحه بالایی با سرعت ثابت حرکت می‌کند. نشان دهید که این تقریب به توزیع سرعت تقریبی (در مختصات کروی) منتهی می‌شود:

$$\frac{v_\phi}{r} = \Omega \left( \frac{(\pi/2) - \theta}{\psi_0} \right) \quad (۱-۱۱.ب۲)$$

این تقریب باید نسبتاً خوب باشد، زیرا  $\psi_0$  خیلی کوچک است.

(ب) با استفاده از توزیع سرعت طبق معادله (۱-۱۱.ب۲) و پیوست ب.۱، نشان دهید که عبارتی منطقی برای تنش برشی به‌شکل زیر است:

$$\tau_{\theta\phi} = \mu(\Omega/\psi_0) \quad (۲-۱۱.ب۲)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که تنش برشی در سراسر شکاف یکنواخت است. همین نکته است که ویسکوزیته‌سنج مخروط و صفحه‌ای را وسیله اندازه‌گیری نسبتاً جذابی جلوه می‌دهد. این وسیله، به‌ویژه در صنعت پلیمر، کاربرد گسترده‌ای دارد.

(ج) نشان دهید که گشتاور لازم برای چرخاندن مخروط از رابطه زیر به دست می‌آید:

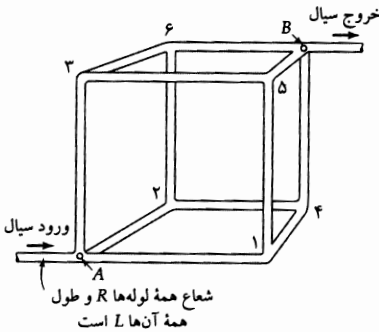
$$T_z = \frac{2}{3} \pi \mu \Omega R^3 / \psi. \quad (۳-۱۱-۲)$$

این فرمول استاندارد محاسبه ویسکوزیته براساس اندازه‌گیری گشتاور و سرعت زاویه‌ای مجموعه مخروط و صفحه، با مقادیر معلوم  $R$  و  $\psi$  است.

(د) برای اسباب اندازه‌گیری مخروط و صفحه‌ای با شعاع  $1\text{ cm}$  و زاویه  $\psi$  برابر با  $0.5^\circ$  درجه، چه گشتاوری (برحسب  $\text{dyn} \cdot \text{cm}$ ) برای چرخاندن مخروط با سرعت زاویه‌ای  $1^\circ$  رادیان بر دقیقه لازم است، هرگاه ویسکوزیته سیال  $10^6 \text{ cp}$  باشد؟  
جواب: (د)  $40000 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$ .

۱۲.۲ ب. جریان سیال در شبکه‌ای از لوله‌ها (شکل ۱۲.۲). سیالی در شبکه لوله‌کشی از نقطه  $A$  تا نقطه  $B$  مطابق شکل، جریان آرام دارد. عبارتی برای آهنگ جریان جرمی  $w$  سیال ورودی در  $A$  (یا خروجی در  $B$ )، به صورت تابعی از افت فشار اصلاح شده  $P_A - P_B$  به دست آورید. از اختلال در اتصالات مختلف شبکه چشم‌پوشی کنید.  
جواب:

$$w = \frac{3\pi(P_A - P_B)R^2 \rho}{40 \mu L}$$



شکل ۱۲.۲. جریان سیال در شبکه لوله‌کشی.

۱۰.۲ عملکرد غبارگیر الکتروستاتیکی (شکل ۱۰.۲ ج ۱)⁵

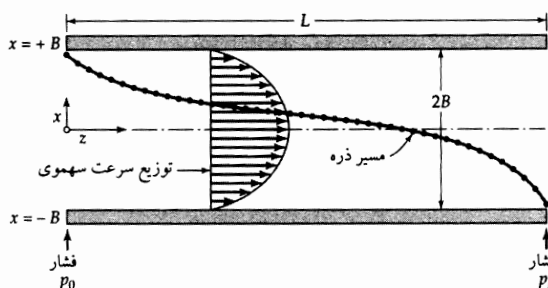
(الف) یک دستگاه غبارگیر از صفحه‌هایی با بار مخالف تشکیل شده است که جریان گاز حاوی غبار از بین آن‌ها عبور می‌کند. می‌خواهیم معیاری برای طول مینیمم غبارگیر برحسب بار ذره  $e$ ، شدت میدان الکتریکی  $\mathcal{E}$ ، اختلاف فشار  $(p_0 - p_1)$ ، جرم ذره  $m$ ، و ویسکوزیته گاز  $\mu$  به دست آورید. یعنی تعیین کنید که به ازای کدام طول  $L$  کوچک‌ترین ذره (به جرم  $m$ )، درست قبل از آن که فرصتی برای خارج شدن از مجرا پیدا کند، به کف آن می‌رسد. فرض کنید جریان بین صفحه‌ها آرام است، به طوری که توزیع سرعت با معادله (۲-۳) توصیف می‌شود. هم‌چنین فرض کنید که سرعت ذره در امتداد  $z$  با سرعت سیال در این امتداد برابر است. به علاوه، فرض کنید پسای استوکس روی کره و نیز نیروی گرانش وارد بر کره، در هنگام افزایش سرعت آن در امتداد منفی  $x$ ، قابل چشم‌پوشی است.

(ب) این مسئله را، با صرف نظر از شتاب در امتداد  $x$ ، اما در نظر گرفتن پسای استوکس، دوباره حل کنید.

۵. پاسخی که در ویسکوزیته اول این کتاب داده شده بود، اشتباه بود، این نکته را فانوگاب‌لی از دانشگاه ملی سئول در سال ۱۹۷۰، یادآور شد.

(ج) سودمندی جواب‌های (الف) و (ب) را، با توجه به این‌که ذرات آئروسول پایدار قطری در حدود ۱ تا ۱۰ میکرون و چگالی حدود  $1 \text{ g/cm}^3$  دارند، مقایسه کنید.

جواب: (الف)  $L_{\min} = [12(p_0 - p_L)^2 B^5 m / 25 \mu^2 e \mathcal{E}]^{1/4}$



شکل ۱.۲.۲ مسیر ذره در غبارگیر الکتریکی. ذره‌ای که حرکت خود را در  $z = 0$ ،  $x = B$  شروع می‌کند و در  $x = -B$  پایان می‌دهد، ممکن است لزوماً طولانی‌ترین مسافت را در امتداد  $z$  طی نکند.

۲.۲ توزیع زمان ماندگاری در جریان در لوله. تابع زمان ماندگاری  $F(t)$  را به صورت کسری از سیال تعریف کنید که در فاصله زمانی  $t$ ، به طور کامل، در مجرا جریان دارد. به علاوه زمان ماندگاری میانگین  $t_m$  را با رابطه زیر تعریف کنید:

$$t_m = \int_0^1 t dF \quad (۱-۲.۲)$$

(الف) مایع نیوتونی تراکم‌ناپذیر در لولهٔ مدور به طول  $L$  و شعاع  $R$  جریان دارد و سرعت متوسط جریان برابر  $\langle v_z \rangle$  است. نشان دهید که:

$$F(t) = 0 \quad \text{به‌ازای } t \leq (L/2\langle v_z \rangle) \quad (۲-۲.۲)$$

$$F(t) = 1 - (L/2\langle v_z \rangle t)^2 \quad \text{به‌ازای } t \geq ((L/2\langle v_z \rangle)) \quad (۳-۲.۲)$$

(ب) نشان دهید که  $t_m = (L/\langle v_z \rangle)$

۳.۲ توزیع سرعت در لوله. مقاله‌ای برای چاپ در یک نشریهٔ فنی تهیه شده و آن را برای داوری نزد شما فرستاده‌اند. موضوع مقاله انتقال گرما در جریان در لوله است. نویسندگان مقاله گفته‌اند که چون با جریان غیرهم‌دما سروکار دارند، باید عبارتی «عام» برای توزیع سرعت پیدا کنند؛ عبارتی که بتوان حتی وقتی ویسکوزیته تابع دما (و بنابراین مکان) است، آن را به‌کار برد. نویسندگان مقاله می‌گویند که «عبارتی عام برای توزیع سرعت برای جریان در لوله» چنین است:

$$\frac{v_z}{\langle v_z \rangle} = \frac{\int_y^1 (\bar{y}/\mu) d\bar{y}}{\int_0^1 (\bar{y}^2/\mu) d\bar{y}} \quad (۱-۳.۲)$$

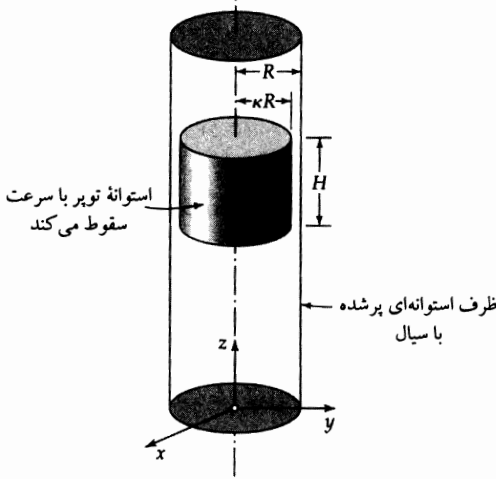
که در آن  $y = r/R$ . نویسندگان نه نحوهٔ رسیدن به این عبارت را نشان داده‌اند و نه منبعی را برای آن نقل کرده‌اند. شما، در مقام داور، وظیفه دارید که این فرمول را به‌دست آورید و محدودیت‌های آن را مشخص کنید.

۴.۲ ویسکوزیته‌سنج با استوانهٔ افتان از یک طرف (شکل ۲ ج. ۴ را ببینید).<sup>۶</sup> استوانه‌ای عمودی بلند (به‌شعاع  $R$ ) تشکیل شده‌است که هردو سر آن در پوش دارد و یک استوانهٔ کوچک توپر (به‌شعاع  $\kappa R$ ) در داخل آن است. استوانهٔ کوچک پره‌هایی دارد که سبب می‌شوند همواره با استوانهٔ بزرگ هم‌محور بماند.

6. J. Lorenz, G. W. Swift, and F. Kurata, *AIChE Journal*, **6**, 547-550 (1960) and **7**, 6s (1961); E. Ashare, R. B. Bird, and J. A. Lescaour, *AIChE Journal*, **11**, 910-916 (1956) F. J. Eichstadt and G. W. Swift, *AIChE Journal*, **12**, 1179-1183 (1966); M. C. S. Chen, J. A. Lescaour, *AIChE Journal*, **14**, 123-127 (1968).



می‌توان آهنگ سقوط استوانه کوچک در ظرف را، وقتی ظرف با سیالی پر شده‌است، اندازه‌گیری کرد. رابطه‌ای بیابید که ویسکوزیته سیال، برحسب سرعت حدی  $v$  استوانه کوچک و کمیت‌های هندسی مختلف نشان داده شده روی شکل، با استفاده از آن به دست آید.



شکل ۲.ج.۴. ویسکوزیته سنج با استوانه افتان که در آن استوانه توپری در امتداد عمودی حرکت می‌کند. این استوانه معمولاً پره‌هایی دارد که آن را هم‌محور با ظرف نگه می‌دارند. سیال کاملاً ظرف را پر می‌کند و سروه ظرف بسته است.

(الف) نشان دهید که توزیع سرعت در شکاف حلقوی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{v_z}{v_0} = -\frac{(1 - \xi^2) - (1 + \kappa^2) \ln(1/\xi)}{(1 - \kappa^2) - (1 + \kappa^2) \ln(1/\kappa)} \quad (۱-۴.۲)$$

که در آن  $\xi = r/R$  مختص شعاعی بدون بُعد است.

(ب) موازنه نیرو روی استوانه توپر را بنویسید و عبارت زیر را به دست آورید:

$$\mu = \frac{(\rho_0 - \rho)g(\kappa R)^2}{2v_0} \left[ \left( \ln \frac{1}{\kappa} \right) - \left( \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa^2} \right) \right] \quad (۲-۴.۲)$$

که در آن  $\rho$  و  $\rho_0$  به ترتیب، چگالی سیال و چگالی استوانه توپر است.

(ج) نشان دهید که، وقتی عرض شکاف کم باشد، نتیجه (ب) را می‌توان برحسب توان‌های  $\varepsilon = 1 - \kappa$  بسط داد تا نتیجه زیر حاصل شود:

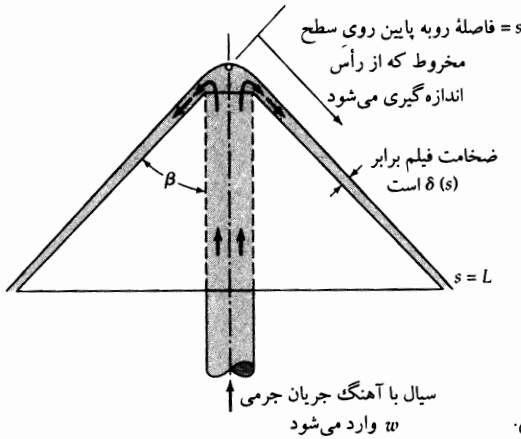
$$\mu = \frac{(\rho_0 - \rho)gR^2\varepsilon^2}{6v_0} \left( 1 - \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{13}{40}\varepsilon^2 + \dots \right) \quad (۳-۴.۲)$$

برای کسب اطلاع در مورد بسط سری تیلر به بخش ج.۲ رجوع کنید.

۵.ج.۲ فیلم ریزان روی سطح مخروطی (شکل ۲.ج.۵ را ببینید) سیالی در لوله مدور به طرف بالا در جریان است و سپس روی سطح مخروطی پایین می‌آید. مطلوب است تعیین ضخامت فیلم به صورت تابعی از فاصله  $s$  به طرف قاعده مخروط.

(الف) فرض کنید نتایج بخش ۲.۲ در هر ناحیه کوچک از سطح مخروط تقریباً صادق است. نشان دهید که موازنه جرم روی حلقه‌ای از مایع موجود بین  $s$  و  $s + \Delta s$  به نتیجه زیر منتهی می‌شود:

$$\frac{d}{ds}(s\delta\langle v \rangle) = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{d}{ds}(s\delta^3) = 0 \quad (۲.۵.ج۱)$$



شکل ۲.۵. فیلم ریزان روی سطح مخروطی.

(ب) از این معادله انتگرال بگیرید و ثابت انتگرال‌گیری را، با برابر نهادن آهنگ جریان جرمی  $w$  به طرف بالای لوله وسطی و همین آهنگ برای جریان روبه پایین روی سطح مخروطی در  $s = L$ ، محاسبه کنید. عبارت زیر را برای ضخامت فیلم به دست آورید:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\mu w}{\pi\rho^2 g L \sin^2 \beta} \left(\frac{L}{s}\right)} \quad (۲.۵.ج۲)$$

۶.ج۲ پمپ مخروط چرخان (شکل ۶.۲ را ببینید). مطلوب است تعیین آهنگ جریان جرمی در این پمپ، به صورت تابعی از شتاب گرانشی، اختلاف فشار، سرعت زاویه‌ای مخروط، ویسکوزیته و چگالی سیال، زاویه مخروط و سایر کمیت‌های هندسی نام‌گذاری شده در شکل.

(الف) کار را با تحلیل سیستم بدون چرخش مخروط شروع کنید. فرض کنید می‌توان نتایج مسئله ۲-ب-۳ را به طور موضعی به کار برد. یعنی جواب به دست آمده برای آهنگ جریان جرمی در آن مسئله را، با انجام جایگزینی‌های زیر، قبول کرد:

$(P_1 - P_2)/L$  را با  $-dP/dz$  جایگزین کنید؛  $W$  را با  $2\pi z \sin \beta$  جایگزین کنید، در نتیجه:

$$w = \frac{2}{3} \left(-\frac{dP}{dz}\right) \frac{B^2 \rho \cdot 2\pi z \sin \beta}{\mu} \quad (۱.۶.ج۲)$$

آهنگ جریان جرمی  $w$  در گستره  $z$  ثابت است. بنابراین می‌توان از این معادله انتگرال گرفت تا عبارت زیر حاصل شود:

$$(P_1 - P_2) = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu w}{B^2 \rho \sin \beta} \ln \frac{L_2}{L_1} \quad (۲.۶.ج۲)$$

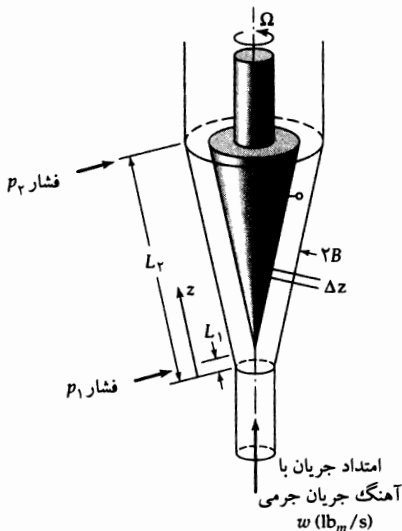
(ب) سپس، نتیجه بالا را اصلاح کنید تا این نکته نیز در آن منظور شود که مخروط با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  می‌چرخد. نیروی گریزازمرکز میانگین به‌ازای واحد حجم، وارد بر سیال در شکاف، یک مؤلفه  $z$  دارد که به‌طور تقریبی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$(F_{\text{گریزازمرکز}})_z = K \rho \Omega^2 z \sin^2 \beta \quad (۳-۶.۲)$$

مطلوب است تعیین مقدار  $K$ . این نیرو را به منزله نیرویی اضافی که تمایل دارد سیال را در مجرا به حرکت درآورد، در مسئله دخالت دهید. نشان دهید که در نتیجه این کار عبارت زیر برای آهنگ جریان جرمی حاصل می‌شود:

$$w = \frac{4\pi B^2 \rho \sin \beta}{3\mu} \left[ \frac{(P_1 - P_2) + \left(\frac{1}{3}\right) K \rho \Omega^2 \sin^2 \beta (L_1^2 - L_2^2)}{\ln(L_2/L_1)} \right] \quad (۴-۶.۲)$$

که در این جا  $P_i = p_i + \rho g L_i \cos \beta$ .



شکل ۶.۲ ج ۲ پمپ مخروط چرخان.  $r$  متغیر فاصله از محور چرخش تا مرکز شکاف را نشان می‌دهد.

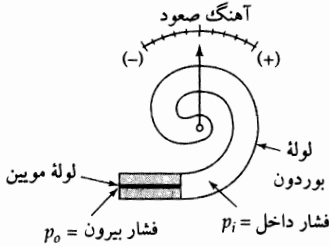
۷.۲ ج ۲ نشانگر ساده آهنگ صعود (شکل ۷.۲ ج ۲ را ببینید). در شرایط مناسب می‌توان از دستگاه ساده‌ای مطابق شکل برای اندازه‌گیری آهنگ صعود یک هواپیما استفاده کرد. فشار نسبی داخل لوله بوردون را متناسب با آهنگ صعود می‌گیرند. در این مسئله، می‌توان فرض کرد که این دستگاه خواصی به شرح زیر دارد: (۱) لوله موین (به شعاع  $R$  و طول  $L$ ، و  $R \ll L$ ) حجم قابل چشم‌پوشی دارد، اما مقاومت آن در برابر جریان چشم‌گیر است؛ (۲) لوله بوردون حجم ثابت  $V$  دارد و مقاومت آن در برابر جریان ناچیز است؛ و (۳) جریان در لوله موین آرام و تراکم‌ناپذیر است و آهنگ جریان حجمی فقط به شرایط انتهایی لوله موین بستگی دارد. (الف) عبارتی برای تغییر فشار هوا با ارتفاع به‌دست آورید؛ از تغییرات دما چشم‌پوشی کنید و فرض کنید هوا گازی ایده‌آل با ترکیب ثابت است (راهنمایی: موازنه لایه‌ای بنویسید که در آن موازنه بین وزن گاز و فشار استاتیکی برقرار شود).

(ب) با ایجاد موازنه جرمی در سنجه، رابطه‌ای تقریبی بین فشار نسبی،  $p_i - p_o$ ، و آهنگ صعود،  $v_z$ ، برای صعود مداوم طولانی با آهنگ ثابت به‌دست آورید. از تغییر ویسکوزیته هوا چشم‌پوشی کنید و فرض کنید تغییرات چگالی هوا ناچیز است.

(ج) عبارتی تقریبی برای «زمان آسایش»،  $t_{rel}$ ، نشانگر به دست آورید؛ زمان آسایش زمان لازم برای افت فشار نسبی به  $1/e$  مقدار اولیه آن است، وقتی فشار خارجی به طور ناگهانی از صفر (نسبت به داخل سنج) به مقدار ثابت دیگری تغییر کند و به طور نامحدود در این مقدار جدید بماند.

(د) در مورد سودمندی این نوع نشانگر برای هواپیماهای کوچک بحث کنید.

(ه) علامت‌های به علاوه و منهای گفته شده روی شکل را توجیه کنید.



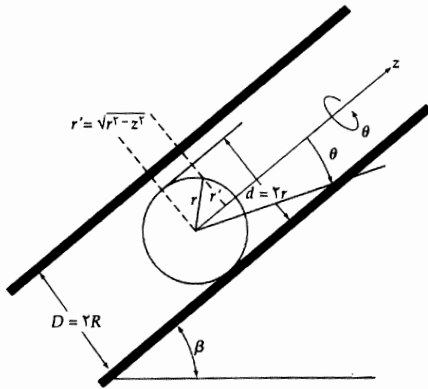
شکل ۲.ج ۷. نشانگر آهنگ صعود.

جواب: (الف)  $dp/dz = -\rho g = -(pM/RT)g$

(ب)  $p_i - p_o \approx v_z (\lambda \mu L / \pi R^4) (MgV / R_g T)$  که در آن  $R_g$  ثابت گاز و  $M$  مولکولی است؛

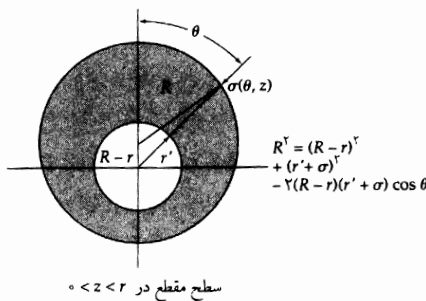
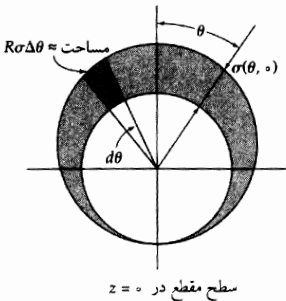
(ج)  $t_{rel} = (128/\pi)(\mu VL/D^4 \bar{p})$  که در آن  $\bar{p} = \frac{1}{2}(p_i + p_o)$

۱.۵۲ ویسکوزیته سنج گوی غلتان. تحلیل تقریبی آزمایش گوی غلتان در مقاله‌ای داده شده، که در آن از نتایج مسئله ۲.ب ۳ استفاده شده است.<sup>۸</sup> مقاله اصلی را بخوانید و درستی این نتایج را نشان دهید.



شکل ۱.۵۲ تصویر شماتیک ویسکوزیته سنج گوی غلتان؛ کمیت  $\sigma(\theta, z)$  از رابطه تقریبی زیر به دست می‌آید:

$$\sigma \approx 2(R-r) \left[ \cos^2 \frac{1}{2} \theta + \frac{R - \sqrt{R^2 - z^2}}{2(R-r)} \right]$$



8. H. W. Lewis, *Anal. Chem.*, **25**, 507 (1953); R. B. Bird and R. M. Turian, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **3**, 87 (1964); J. Sesták and F. Ambros, *Rheol. Acta*, **12**, 70-76 (1973).

۲.۵۲ تخلیه مایعات<sup>۹</sup> (شکل ۲.۵۲ را ببینید). در هنگام تخلیه مخزنی بزرگ، چه مقدار مایع به سطح داخلی آن می‌چسبد؟ مطابق شکل، با پایین رفتن سطح مایع در مخزن، فیلم نازکی از مایع روی جدار داخلی آن باقی می‌ماند. ضخامت موضعی این فیلم تابعی از  $z$  (فاصله نسبت به سطح اولیه مایع) و  $t$  (زمان سپری شده) است.

(الف) موازنه جرم حالت ناپایا روی بخشی از فیلم بین  $z$  و  $z + \Delta z$  انجام دهید تا نتیجه شود:

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle v_z \rangle \delta = - \frac{\partial \delta}{\partial t} \quad (۱-۲.۵۲)$$

(ب) با استفاده از معادله (۱۸-۲.۲) و فرض شبه پایا بودن، معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول زیر را برای  $\delta(z, t)$  به دست آورید:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\rho g}{\mu} \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial z} = 0 \quad (۲-۲.۵۲)$$

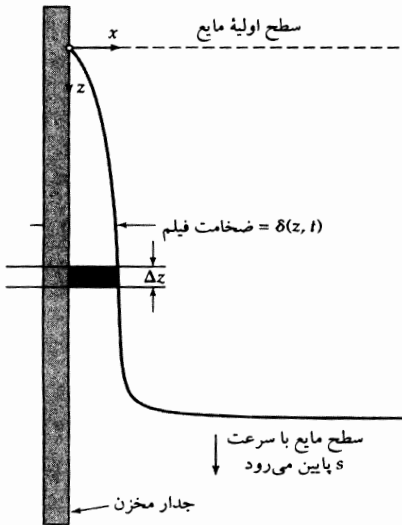
(ج) این معادله را حل کنید و نتیجه زیر را به دست آورید:

$$\delta(z, t) = \sqrt{\frac{\mu z}{\rho g t}} \quad (۳-۲.۵۲)$$

چه محدودیت‌هایی را باید برای این جواب قائل شد؟

۳.۵۲ شرط عدم لغزش در جدارهای جامد. مقاله زیر را بخوانید و مفهوم فیزیکی شرط عدم لغزش را شرح دهید:

S. Richardson, *J. Fluid Mech.*, **59**, 707-719 (1973).



شکل ۲.۵۲ چسبیدن سیال ویسکوز به جدار داخلی مخزن در هنگام تخلیه.

9. J. J. van Rossum, *Appl. Sci. Research*, **A7**, 121-144 (1958); see also V. G. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962), Chapter 12.

## فصل ۳

### معادله‌های تغییر برای سیستم‌های هم‌دما

۱.۳ معادله پیوستگی

۲.۳ معادله حرکت

۳.۳ معادله انرژی مکانیکی

۴.۳ معادله اندازه حرکت زاویه‌ای

۵.۳ معادله‌های تغییر برحسب مشتق مادی

۶.۳ استفاده از معادله‌های تغییر برای حل مسئله‌های جریان

۷.۳ تحلیل ابعادی معادله‌های تغییر

در فصل ۲، با استفاده از روش موازنه لایه‌ای اندازه حرکت، توزیع سرعت را برای چند سیستم جریان ساده به دست آوردیم. سپس از توزیع‌های به دست آمده برای یافتن کمیت‌های دیگر، (مانند سرعت متوسط و نیروی پسا) و از رهیافت موازنه لایه برای آشنا کردن مبتدیان با نمادگذاری موازنه اندازه حرکت استفاده شد. اگرچه در فصل ۲ صراحتاً از موازنه جرم سخنی به میان نیامد، اما به طور ضمنی از این ایده نیز استفاده کردیم.

نوشتن موازنه لایه برای هر مسئله‌ای که با آن روبه‌رو می‌شویم، کار دشوار و خسته‌کننده‌ای است. آن چه نیاز داریم یک موازنه جرم کلی و یک موازنه اندازه حرکت کلی است که بتوان در هر مسئله‌ای، از جمله مسئله‌های شامل حرکت غیرراست خط، از آن‌ها استفاده کرد. محور اصلی بحث در این فصل، همین موضوع است. دو معادله‌ای که به دست می‌آوریم، معادله پیوستگی (برای موازنه جرم) و معادله حرکت (برای موازنه اندازه حرکت) نام دارند. از این معادله‌ها می‌توان به عنوان نقطه شروع برای مطالعه مسئله‌های شامل جریان هم‌دمای سیال خالص استفاده کرد.

در فصل ۱۱، با پی‌ریزی معادله‌های لازم برای سیالات خالص غیرهم‌دما، از طریق اضافه کردن معادله‌ای برای دما، توانایی خود را در حل مسئله افزایش می‌دهیم. در فصل ۱۹ از این هم جلوتر می‌رویم و معادله‌های پیوستگی را برای غلظت‌های هرگونه شیمیایی اضافه می‌کنیم. بنابراین با رفتن از فصل ۳ به فصل ۱۱ و فصل ۱۹، می‌توانیم با استفاده از مجموعه معادله‌های تغییر سیستم‌هایی با پیچیدگی بیش‌تر را تحلیل کنیم. حتماً متوجه شده‌اید که فصل ۳ فصلی بسیار مهم است - شاید مهم‌ترین فصل این کتاب باشد - و باید کاملاً آن را فرا بگیرید و بر مطالب آن مسلط شوید. در بخش ۱.۳، با نوشتن موازنه جرم روی جزء حجمی کوچک، که سیال از آن عبور می‌کند، معادله پیوستگی

را به دست می‌آوریم. سپس اندازه این جزء را به سمت صفر میل می‌دهیم (به این ترتیب با سیال به صورت پیوستار برخورد می‌کنیم)، و معادله دیفرانسیل جزئی مورد نظر را به دست می‌آوریم.

در بخش ۲.۳، با نوشتن موازنه اندازه حرکت روی جزء حجمی کوچک، و میل دادن حجم این جزء به سمت مقداری بی‌نهایت کوچک، معادله حرکت را به دست می‌آوریم. در این جا نیز یک معادله دیفرانسیل جزئی حاصل می‌شود. با این معادله حرکت و کمک گرفتن از معادله پیوستگی می‌توان همه مسئله‌های فصل ۲ و مسئله‌های بسیار پیچیده‌تر را حل کرد. بنابراین معادله حرکت معادله‌ای بسیار مهم در پدیده‌های انتقال است.

در بخش‌های ۳.۳ و ۴.۳، کمی از مسیر منحرف می‌شویم تا معادله‌های تغییر انرژی مکانیکی و اندازه حرکت زاویه‌ای را معرفی کنیم. این معادله‌ها از معادله حرکت به دست می‌آیند و بنابراین اطلاعات فیزیکی جدیدی در بر ندارند، اما نقطه شروع مناسب و راحتی برای چندین کاربرد در این کتاب - به ویژه موازنه‌های ماکروسکوپی - در فصل ۷ به شمار می‌روند. در بخش ۵.۳ «مشتق مادی» را معرفی می‌کنیم که مشتق زمانی تابع حرکت ماده (یعنی سیال) است. چون در کتاب‌های دینامیک سیالات و پدیده‌های انتقال، این مشتق کاربردهای فراوان دارد، نحوه نوشتن معادله‌های مختلف تغییر بر حسب مشتق‌های مادی را نشان می‌دهیم.

در بخش ۶.۳، با استفاده از معادله‌های پیوستگی و حرکت، در مورد جواب مسئله‌های جریان بحث می‌کنیم. اگرچه این‌ها معادله‌های دیفرانسیل جزئی هستند اما می‌توانیم با فرض کردن صورتی برای جواب و سپس چشم‌پوشی از برخی جمله‌ها، مسئله‌های بسیاری را حل کنیم. به این ترتیب دستگاه معادلات ساده‌ای حاصل می‌شود که باید آن را حل کرد. در این فصل فقط مسئله‌هایی را حل می‌کنیم که در آن معادله‌های عام به یک یا چند معادله دیفرانسیل معمولی کاهش می‌یابند. در فصل ۴ مسئله‌های پیچیده‌تری را بررسی می‌کنیم که حل آن‌ها مستلزم توانایی در حل معادله‌های دیفرانسیل جزئی است. سپس در فصل ۵ از معادله‌های پیوستگی و حرکت به عنوان نقطه شروع برای بحث درباره جریان متلاطم استفاده خواهیم کرد. پس از آن، در فصل ۸، همین معادله‌ها را در مورد جریان‌های مایعات پلیمری به کار می‌گیریم که سیالات غیرنیوتونی به شمار می‌روند.

سرانجام، در بخش ۷.۳ به نوشتن معادله‌های پیوستگی و حرکت به صورت بدون بُعد می‌پردازیم. به این ترتیب منشأ عدد رینولدز،  $Re$ ، که در فصل ۲ مکرراً به آن اشاره شد، و علت اهمیت آن در دینامیک سیالات، روشن می‌شود. این بحث زمینه لازم برای مطالعات مدل و افزایش مقیاس را فراهم می‌کند. در فصل ۶ عددهای بدون بُعد، دوباره در ارتباط با روابط همبستگی تجربی نیروی پسا در سیستم‌های پیچیده، مطرح می‌شوند.

در پایان بخش ۲.۲، بر اهمیت آزمایش‌های دینامیک سیالات تأکید کردیم. در این جا این هشدار را تکرار و خاطرنشان می‌کنیم که عکس‌ها و سایر انواع تجسم جریان، در مقایسه با نظریه محض، درکی بسیار عمیق‌تر از مسائل جریان را برای ما فراهم می‌کنند.<sup>۱</sup> در نظر داشته باشید که وقتی میدان جریانی را با استفاده از معادله‌های تغییر به دست می‌آورید، این میدان الزاماً تنها جواب قابل قبول فیزیکی نیست.

گاهی در این فصل از نمادگذاری‌های برداری و تانسوری، عمدتاً با هدف خلاصه کردن عبارت‌های طولانی، استفاده می‌کنیم. دانشجوی مبتدی درخواهد یافت که برای مطالعه این فصل و حل مسئله‌های جریان، دانشی مقدماتی از نمادگذاری برداری و تانسوری لازم است. دانشجوی پیشرفته نیز پیوست (الف) را منبع مفیدی برای درک

۱. به ویژه رجوع به منابع زیر را توصیه می‌کنیم:

M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, Stanford (1982); H. Werlé, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **5**, 361-382 (1973); D. V. Boger and K. Walters, *Rheological Phenomena in Focus*, Elsevier, Amsterdam (1993).

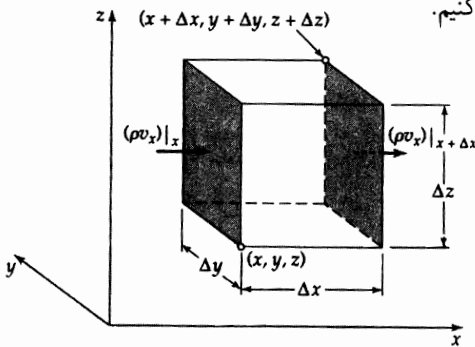
بهرتر عملیات برداری و تانسوری خواهد یافت. با توجه به این نمادگذاری، باید به خاطر سپرد که برای نشان دادن اسکالرها از حروف نازک ایتالیک، برای بردارها از حروف سیاه ایستاده، و برای تانسورها از حروف یونانی سیاه استفاده می‌شود. به علاوه عملیات ضرب نقطه‌ای در داخل ( ) اسکالر است و هرگاه این عملیات در داخل [ ] بیاید، بردار خواهد بود.

### ۱.۳ معادله پیوستگی

این معادله با نوشتن موازنه جرم روی جزء حجم  $\Delta x \Delta y \Delta z$  ثابت در فضا به دست می‌آید که سیال در آن جریان دارد (شکل ۱-۱.۳ را ببینید):

$$\{\text{آهنگ خروج جرم}\} - \{\text{آهنگ ورود جرم}\} = \{\text{آهنگ افزایش جرم}\} \quad (1-1.3)$$

حال باید این بیان ساده فیزیکی را به زبان ریاضی ترجمه کنیم.



شکل ۱-۱.۳ جزء حجم ثابت  $\Delta x \Delta y \Delta z$  که سیال در آن جریان دارد پیکان‌ها شار جرم ورودی و خروجی در دو وجه سایه‌خورده واقع در  $x + \Delta x, x$  را نشان می‌دهد.

کار را با در نظر گرفتن دو وجه سایه‌خورده آغاز می‌کنیم که بر محور  $x$  عمودند. آهنگ ورود جرم به جزء حجم، از طریق وجه سایه‌خورده در  $x$  برابر است با:  $(\rho v_x)|_x \Delta y \Delta z$ ، و آهنگ خروج جرم از وجه سایه‌خورده در  $x + \Delta x$  برابر است با:  $(\rho v_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . برای دو وجه دیگر هم می‌توان عبارات‌های مشابهی نوشت. آهنگ افزایش جرم در داخل جزء حجم برابر است با:  $\Delta x \Delta y \Delta z (\partial \rho / \partial t)$ . بنابراین موازنه جرم چنین نوشته می‌شود:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y \Delta z [(\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x}] + \Delta z \Delta x [(\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [(\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z}] \quad (2-1.3)$$

با تقسیم کردن کل معادله بر  $\Delta x \Delta y \Delta z$  و گرفتن حد وقتی  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  و  $\Delta z$ ، به سمت صفر میل می‌کنند، و آنگاه استفاده از تعریف‌های مشتق‌های جزئی، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right) \quad (3-1.3)$$

این معادله پیوستگی است، که آهنگ زمانی تغییر چگالی سیال در نقطه‌ای ثابت در فضا را توصیف می‌کند. با استفاده از نمادگذاری برداری، می‌توان این معادله را به صورت موجزتر زیر نوشت:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \quad (4-1.3)$$

آهنگ افزایش جرم در واحد حجم	آهنگ خالص اضافه شدن جرم به‌ازای واحد حجم، از طریق همرفت
-----------------------------	---



در این جا  $(\nabla \cdot \rho \mathbf{v})$  را «دیورژانس  $\rho \mathbf{v}$ » می‌نامند و گاه آن را به صورت « $\text{div } \rho \mathbf{v}$ » می‌نویسند. بردار  $\rho \mathbf{v}$  شار جرم است و دیورژانس آن مفهوم ساده‌ای دارد؛ آهنگ خالص شار جرم خروجی در واحد حجم. برای به دست آوردن عبارت مورد نیاز در مسئله ۱.۵۳ از یک جزء حجم با شکل اختیاری استفاده می‌کنیم. استفاده از جزء حجم مستطیلی، مانند کاری که در این جا انجام دادیم، همیشه ضرورت ندارد. صورت خاص بسیار مهمی از معادله پیوستگی مربوط به سیالی با چگالی ثابت است که برای آن معادله (۴-۱.۳) صورت ساده زیر را پیدا می‌کند:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{سیال تراکم‌ناپذیر}) \quad (5-1.3)$$

البته هیچ سیالی واقعاً تراکم‌ناپذیر نیست، اما غالباً در کاربردهای مهندسی و زیست‌شناسی، فرض ثابت بودن چگالی به ساده‌سازی چشم‌گیر و خطای بسیار کم منتهی می‌شود.<sup>۲۱</sup>

### مثال ۱.۱۳

تنش‌های قائم در سطوح جامد، برای سیال‌های نیوتونی تراکم‌ناپذیر نشان دهید که برای هر نوع الگوی جریان، تنش‌های قائم در مرزهای سیال-جامد، در سیال‌های نیوتونی با چگالی ثابت، صفر است. این نتیجه مهمی است، زیرا غالباً از آن استفاده خواهیم کرد.

حل  
جریان سیالی را در نزدیکی سطحی جامد، تخت یا غیرتخت، در نظر می‌گیریم. این جریان ممکن است نسبتاً کلی باشد و در آن هر سه مؤلفه سرعت توابع هر سه مختص و زمان باشند. در نقطه‌ای مانند  $P$  روی سطح، یک دستگاه مختصات دکارتی با مبدأ  $P$  برپا می‌کنیم. حال این پرسش را مطرح می‌کنیم که تنش قائم  $\tau_{zz}$  در نقطه  $P$  چه قدر است. طبق جدول ۱.۱ یا معادله (۶-۲.۱)،  
 $\tau_{zz} = -2\mu(\partial v_z / \partial z)$  است، زیرا برای سیالات تراکم‌ناپذیر داریم  
 $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ . در نقطه  $P$  روی سطح جامد داریم:

$$\tau_{zz}|_{z=0} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = +2\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \Big|_{z=0} = 0 \quad (6-1.3)$$

ابتدا با استفاده از معادله (۳-۱.۳) مشتق  $\partial v_z / \partial z$  را با ثابت  $\rho$  جایگزین می‌کنیم. اما روی سطح جامد در  $z = 0$ ، سرعت  $v_z$ ، طبق شرط عدم لغزش، صفر است (بخش ۱.۲ را ببینید)، بنابراین مشتق  $\partial v_x / \partial x$  روی این سطح باید صفر باشد. همین نکته در مورد  $\partial v_y / \partial y$  روی سطح نیز صادق است. پس  $\tau_{zz}$  صفر است. این نکته نیز صادق است که  $\tau_{xx}$  و  $\tau_{yy}$  روی سطح صفرند، زیرا در  $z = 0$ ، مشتق‌ها صفر می‌شوند.  
 (تذکر: صفر شدن تنش‌های قائم روی سطوح جامد، در مورد سیالات پلیمری که ویسکوکشسان‌اند، صادق نیست. برای سیالات تراکم‌ناپذیر، هرگاه چگالی با زمان تغییر نکند، چنان‌که در مسئله ۲.۳ ج نشان داده می‌شود، تنش‌های قائم در سطوح جامد صفرند.)

1. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1987), p. 21.

لانداو در این کتاب خاطر نشان می‌سازد که برای جریان‌های پایای هم‌انرژی، که معمولاً در آن‌رویدینامیک با آن‌ها سروکار پیدا می‌کنیم، فرض تراکم‌ناپذیری هنگامی معتبر است که سرعت سیال، در مقایسه با سرعت صوت، کم باشد (یعنی عدد ماخ آن کوچک باشد).

۲. معادله (۱-۵.۳) اساس فصل ۲ در کتاب

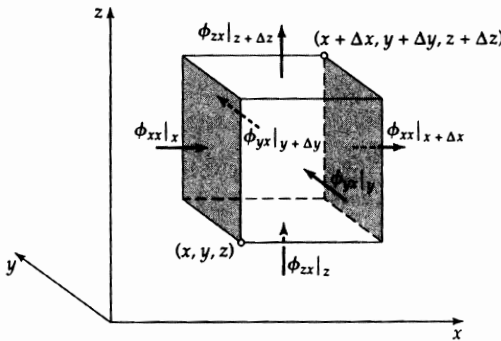
G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967)

است که بحثی طولانی در مورد پیامدهای سینماتیکی معادله پیوستگی است.

### ۲.۳ معادله حرکت

برای به دست آوردن معادله حرکت، موازنه اندازه حرکت را روی جزء حجم  $\Delta x \Delta y \Delta z$  در شکل ۱-۲.۳، به صورت زیر می نویسیم:

$$[\text{آهنگ خروج اندازه حرکت}] - [\text{آهنگ ورود اندازه حرکت}] = [\text{آهنگ افزایش اندازه حرکت}] + [\text{نیروی خارجی وارد بر سیال}] \quad (۱-۲.۳)$$



شکل ۱-۲.۳ جزء حجم ثابت  $\Delta x \Delta y \Delta z$  با شش پیکان که امتدادهای شارهای مؤلفه  $x$  اندازه حرکت عبوری از این سطوح را از طریق همه مکانیسمها نشان می دهد. سطوح سایه خورده در  $x$  و  $x + \Delta x$  واقع اند.

توجه کنید که معادله (۱-۲.۳) بسط معادله (۱-۱.۲) به مسئله های حالت ناپایاست. بنابراین تقریباً همان شیوه فصل ۲ را پیش می گیریم. اما، علاوه بر گنجانیدن جمله حالت ناپایا، باید به سیال امکان بدهیم که از هر شش وجه جزء حجم عبور کند. به خاطر داشته باشید که معادله (۱-۲.۳) برداری است و مؤلفه هایی در هر سه امتداد  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  دارد. مؤلفه  $x$  هر جمله از معادله (۱-۲.۳) را به دست می آوریم؛ مؤلفه های  $y$  و  $z$  را می توان به شیوه مشابه به دست آورد. ابتدا آهنگ های جریان مؤلفه  $x$  اندازه حرکت ورودی و خروجی از جزء حجم نشان داده شده در شکل ۱-۲.۳ را در نظر می گیریم. اندازه حرکت از طریق دو مکانیسم به جزء حجم  $\Delta x \Delta y \Delta z$  وارد یا از آن خارج می شود: انتقال همرفتی (بخش ۷.۱ را ببینید) و انتقال مولکولی (بخش ۲.۱ را ببینید).

آهنگ ورود مؤلفه  $x$  اندازه حرکت از طریق وجه سایه خورده در  $x$ ، از طریق همه مکانیسمها هم همرفتی و هم مولکولی - برابر است با:  $(\phi_{xx})|_x \Delta y \Delta z$  و آهنگ خروج اندازه حرکت از وجه سایه خورده در  $x + \Delta x$  برابر است با:  $(\phi_{xx})|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . آهنگ های ورود و خروج مؤلفه  $x$  اندازه حرکت از این وجوه در  $y$  و  $y + \Delta y$ ، به ترتیب، برابر است با:  $(\phi_{yx})|_y \Delta z \Delta x$  و  $(\phi_{yx})|_{y+\Delta y} \Delta z \Delta x$ . به همین ترتیب آهنگ های ورود و خروج مؤلفه  $x$  اندازه حرکت از وجوه  $z$  و  $z + \Delta z$ ، به ترتیب، عبارت اند از:  $(\phi_{zx})|_z \Delta x \Delta y$  و  $(\phi_{zx})|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$ . وقتی این سهمها را با هم جمع کنیم، آهنگ خالص افزایش مؤلفه  $x$  اندازه حرکت، روی هر سه جفت وجه، به دست می آید:

$$\Delta y \Delta z (\phi_{xx}|_x - \phi_{xx}|_{x+\Delta x}) + \Delta z \Delta x (\phi_{yx}|_y - \phi_{yx}|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\phi_{zx}|_z - \phi_{zx}|_{z+\Delta z}) \quad (۲-۲.۳)$$

نیروی خارجی (معمولاً نیروی گرانشی) نیز بر سیال داخل جزء حجم وارد می شود. مؤلفه  $x$  این نیرو عبارت است از:

$$\rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad (۳-۲.۳)$$

۱. در این کتاب همه معادله های تغییر با اعمال قوانین پایستگی در ناحیه  $\Delta x \Delta y \Delta z$  ثابت در فضا به دست می آیند. همین معادله ها را می توان با استفاده از ناحیه ای ثابت در فضا، یا ناحیه ای که همراه با سیال حرکت می کند، به دست آورد. روش به دست آوردن این عبارتها در مسئله ۱.۵۳ شرح داده می شود. دانشجویان پیشرفته باید با این روشها آشنا شوند.

معادله‌های (۲-۲.۳) و (۳-۲.۳) مؤلفه‌های  $x$  سه جمله سمت راست معادله (۱-۲.۳) را به دست می‌دهند. مجموع این سه جمله را باید با آهنگ افزایش مؤلفه  $x$  اندازه حرکت در داخل جزء حجم، یعنی  $\partial(\rho v_x)/\partial t \Delta x \Delta y \Delta z$ ، برابر گرفت. پس از انجام این کار، مؤلفه  $x$  موازنه اندازه حرکت به دست می‌آید. هرگاه این معادله را بر  $\Delta x \Delta y \Delta z$  تقسیم کنیم و وقتی  $\Delta x$ ،  $\Delta y$ ، و  $\Delta z$  به سمت صفر میل می‌کنند حد بگیریم، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_x = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \phi_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \phi_{zx} \right) + \rho g_x \quad (4-2.3)$$

در این جا از تعریف مشتق جزئی استفاده کرده‌ایم. برای مؤلفه‌های  $y$  و  $z$  موازنه اندازه حرکت نیز می‌توان معادلات مشابهی به دست آورد:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_y = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \phi_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \phi_{zy} \right) + \rho g_y \quad (5-2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_z = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \phi_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \phi_{zz} \right) + \rho g_z \quad (6-2.3)$$

با استفاده از نمادگذاری بردار-تانسور، این سه معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = -[\nabla \cdot \phi]_i + \rho g_i \quad i = x, y, z \quad (7-2.3)$$

یعنی، با تبدیل متوالی  $i$  به  $x$ ،  $y$ ، و  $z$ ، می‌توان معادله‌های (۴-۲.۳)، (۵ تا ۶) را به دست آورد. کمیت‌های  $\rho v_i$  مؤلفه‌های دکارتی بردار  $\rho \mathbf{v}$  هستند که عبارت است از: اندازه حرکت در واحد حجم در نقطه‌ای از سیال. به همین ترتیب، کمیت‌های  $\rho g_i$  مؤلفه‌های بردار  $\rho \mathbf{g}$  هستند که نیروی خارجی بر واحد حجم است. جمله  $[\nabla \cdot \phi]_i$ ، مؤلفه  $i$ ام بردار  $-\nabla \cdot \phi$  است. وقتی مؤلفه  $i$ ام معادله (۷-۲.۳) را در بردار یک درامداد  $i$ ام ضرب کنیم و سه مؤلفه را باهم جمع برداری کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} = -[\nabla \cdot \phi] + \rho \mathbf{g} \quad (8-2.3)$$

که عبارت دیفرانسیلی قانون پایستگی اندازه حرکت است. این ترجمه معادله (۱-۲.۳) به نمادهای مکانیکی است. در معادله (۱-۷.۱) نشان داده شد که تانسور شار اندازه حرکت مرکب  $\phi$  برابر است با مجموع تانسور شار اندازه حرکت همرفتی  $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$  و تانسور شار اندازه حرکت مولکولی  $\pi$ ، و این که کمیت اخیر را می‌توان به صورت مجموع  $p \delta + \tau$  نوشت. هنگامی که عبارت  $\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \delta + \tau = \phi$  را در معادله (۸-۲.۳) قرار می‌دهیم، معادله حرکت<sup>۲</sup> به صورت زیر حاصل می‌شود:

$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v}$	$=$	$-\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}$	$-\nabla p - [\nabla \cdot \tau]$	$+\rho \mathbf{g}$	(۹-۲.۳)
آهنگ افزایش اندازه حرکت در واحد حجم		آهنگ اضافه شدن اندازه حرکت از طریق همرفت در واحد حجم	آهنگ اضافه شدن اندازه حرکت از طریق انتقال مولکولی در واحد حجم	نیروی خارجی وارد بر سیال در واحد حجم	

در این معادله  $\nabla p$  برداری موسوم به «گرادیان (اسکالر)  $p$ » است که گاهی به صورت «grad  $p$ » نوشته می‌شود. نماد  $[\nabla \cdot \tau]$  برداری موسوم به «دیورژانس (تانسور)  $\tau$ » است و  $[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}]$  برداری به نام «دیورژانس (ضرب دو تایی)  $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ » است.

۲. این معادله به A.-L. Cauchy, *Ex. de math.*, 2, 108-111 (1827) منسوب است. (بارون) اوگوستن لویی کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) که ابتدا آموزش مهندسی دید، سهم بزرگی در حوزه ریاضیات و فیزیک نظری داشت و از جمله می‌توان به حساب متغیرهای مختلط اشاره کرد.

در دو بخش آینده بعضی از نتایج صوری را به دست می آوریم که بر معادله حرکت مبتنی اند. در این فصل از معادله های تغییر انرژی مکانیکی و اندازه حرکت زاویه ای برای حل مسئله استفاده نمی شود، بلکه در فصل ۷ به سراغ آن ها خواهیم رفت. به مبتدیان توصیه می کنیم که به این بخش فقط نگاهی اجمالی بیندازند و در زمان نیاز به آن رجوع کنید.

### ۳.۳ معادله انرژی مکانیکی

انرژی مکانیکی در سیستم سیال پایسته نیست، اما این نکته مانع از پی ریزی معادله تغییر این کمیت نمی شود. در حقیقت، در طول این کتاب، معادله های تغییر چند کمیت ناپایسته، مانند انرژی داخلی، آنتالپی، و آنتروپی را به دست خواهیم آورد. معادله تغییر انرژی مکانیکی را، که فقط شامل جمله های مکانیکی است، می توان از معادله حرکت بخش ۲.۳ به دست آورد. در بسیاری از بخش های این کتاب، به معادله حاصل ارجاع داده خواهد شد. ضرب نقطه ای بردار سرعت  $\mathbf{v}$  با معادله حرکت (۲.۳-۹) را انجام می دهیم؛ سپس با استفاده از معادله پیوستگی (۱.۳-۴) جمله های رابطه حاصل را مرتب و هریک از جمله های حاوی  $p$  و  $\boldsymbol{\tau}$  را به دو بخش تفکیک می کنیم. نتیجه نهایی معادله تغییر انرژی جنبشی برای  $\boldsymbol{\tau}$  متقارن است (معادله ۲.۱-۴):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \rho v^2 \right) = -(\nabla \cdot \frac{1}{\rho} \rho v^2 \mathbf{v}) - (\nabla \cdot p \mathbf{v}) - p(-\nabla \cdot \mathbf{v})$$

آهنگ افزایش انرژی جنبشی در واحد حجم	آهنگ اضافه شدن انرژی جنبشی از طریق همرفت، در واحد حجم	آهنگ انجام کار توسط فشار محیط اطراف روی سیال	آهنگ تبدیل بازگشت پذیر انرژی جنبشی به انرژی داخلی
	$-(\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}])$	$-(-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$	$+\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$
	آهنگ انجام کار توسط نیروهای ویسکوز روی سیال	آهنگ تبدیل برگشت ناپذیر انرژی جنبشی به انرژی داخلی	آهنگ انجام کار توسط نیروی خارجی وارد بر سیال

(۱-۳.۳)

در این نقطه هنوز روشن نیست که چرا مفهوم فیزیکی گفته شده را به جمله های  $p(\nabla \cdot \mathbf{v})$  و  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  نسبت داده ایم. قبل از مطالعه موازنه انرژی در فصل ۱۱ نمی توان معنای کامل آن ها را درک کرد. در فصل ۱۱ مشاهده خواهد شد که این دو جمله چگونه با علامت های مخالف در معادله تغییر انرژی داخلی پدیدار می شوند. حال انرژی پتانسیل<sup>۲</sup> (در واحد جرم)  $\hat{\Phi}$  را معرفی می کنیم که با رابطه  $\hat{\Phi} = -\nabla \cdot \hat{\Phi}$   $\mathbf{g} = -\nabla \hat{\Phi}$  تعریف می شود. سپس جمله آخر معادله (۱-۳.۳) را به صورت  $(\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \hat{\Phi}) + \hat{\Phi}(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\Phi}) - \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\Phi})$  بازنویسی می کنیم. اکنون می توان از معادله پیوستگی (۱.۳-۴)، برای جایگزینی  $\hat{\Phi}(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) + \hat{\Phi}(\partial \rho / \partial t)$  توسط  $-\hat{\Phi}(\partial \rho / \partial t)$  استفاده کرد. هرگاه انرژی پتانسیل از زمان مستقل باشد، عبارت اخیر را می توان به صورت  $-\partial(\rho \hat{\Phi}) / \partial t$  نوشت. این گفته در مورد میدان گرانشی در سیستم های واقع روی سطح زمین صادق است؛ در این صورت  $\hat{\Phi} = gh$  که در آن  $g$  شتاب گرانشی (ثابت) و  $h$  مختص ارتفاع در میدان گرانشی است.

با معرفی انرژی پتانسیل، معادله (۱-۳.۳) صورت زیر را پیدا می کند:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \rho v^2 + \rho \hat{\Phi} \right) = -(\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \rho v^2 + \rho \hat{\Phi} \right) \mathbf{v}) - (\nabla \cdot p \mathbf{v}) - p(-\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) - (-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) \quad (۲-۳.۳)$$

۱. تفسیر زیر جمله  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  فقط در مورد سیالات نیوتونی صادق است؛ برای سیالات ویسکوکشان، مانند پلیمرها، این جمله ممکن است شامل تبدیل برگشت پذیر به انرژی کشسان باشد.

۲. اگر  $\mathbf{g} = -\delta_z g$  برداری با اندازه  $g$  و درامتداد منفی  $z$  باشد، آن گاه انرژی پتانسیل در واحد جرم برابر است با:  $\hat{\Phi} = gz$  که در آن  $z$  ارتفاع در میدان گرانشی است.

این معادله تغییر انرژی جنبشی به‌علاوه پتانسیل است. چون معادله‌های (۱-۳.۳) و (۲-۳.۳) فقط شامل جمله‌های مکانیکی‌اند، هردو را معادله تغییر انرژی مکانیکی می‌نامیم.

جمله  $p(\nabla \cdot \mathbf{v})$ ، بسته به این‌که سیال منبسط یا متراکم شود، می‌تواند مثبت یا منفی باشد. تغییرات دمای حاصل، درمورد گازهای موجود در کمپرسورها، توربین‌ها، و لوله‌های شوکی، می‌تواند نسبتاً شدید باشد. جمله  $(-\tau : \nabla \mathbf{v})$  برای سیالات نیوتونی<sup>۲</sup> همواره مثبت است، زیرا می‌توان آن را به‌صورت جمع جمله‌های مجذور نوشت:

$$\begin{aligned} (-\tau : \nabla \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \mu \sum_i \sum_j \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \right]^2 + \kappa (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \\ &= \mu \Phi_v + \kappa \Psi_v \end{aligned} \quad (3-3.3)$$

که دو کمیت  $\Phi_v$  و  $\Psi_v$  را تعریف می‌کند. وقتی اندیس  $i$  مقادیر ۱، ۲، و ۳ را اختیار می‌کند، مؤلفه‌های سرعت  $v_i$  عبارت‌اند از:  $v_x$ ،  $v_y$ ، و  $v_z$  و مختصات دکارتی  $x_i$  به  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  تبدیل می‌شوند. نماد  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر نام دارد که وقتی  $j \neq i$  برابر صفر است و هرگاه  $j = i$  مساوی ۱ می‌شود.

کمیت  $(-\tau : \nabla \mathbf{v})$  تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی گرمایی را توصیف می‌کند که در همه سیستم‌های جریان رخ می‌دهد (گاهی آن را گرمایش اتلاف ویسکوز می‌نامند).<sup>۴</sup> این گرمایش می‌تواند سبب افزایش چشم‌گیر دما در سیستم‌های با ویسکوزیته بالا و گرادیان‌های سرعت زیاد شود که در روانکاری، روزن‌رانی سریع، و پرواز با سرعت بالا، با آن‌ها سروکار پیدا می‌کنیم. (مثال دیگری از تبدیل انرژی مکانیکی به گرما، مالیدن دو قطعه چوب به‌هم، برای روشن کردن آتش است، که پیشینیان احتمالاً قادر به انجام آن بودند).

وقتی از سیستم‌های «هم‌دما» سخن می‌گوییم، منظورمان سیستم‌هایی است که در آن‌ها گرادیان‌های دمای تحمیل‌شده از خارج وجود ندارد و تغییر دمای درخور اعتنایی، بر اثر انبساط، انقباض، یا اتلاف ویسکوز ایجاد نمی‌شود. مهم‌ترین کاربرد معادله (۲-۳.۳) نوشتن موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی (یا معادله مهندسی برنولی) در بخش ۸.۷ است.

### ۴.۳ معادله اندازه حرکت زاویه‌ای

با تشکیل حاصل ضرب برداری بردار مکان  $\mathbf{r}$  (با مؤلفه‌های دکارتی  $x$ ،  $y$ ،  $x$ ) و معادله (۹-۲.۳) می‌توان معادله دیگری از معادله حرکت به‌دست آورد. معادله حرکت، به‌صورتی که در بخش ۲.۳ به‌دست آمد، دربرگیرنده این فرض نیست که تانسور تنش  $\tau$  (یا شار اندازه حرکت) متقارن است (البته عبارت‌های ارائه‌شده در بخش ۳.۲ برای سیال نیوتونی متقارن‌اند؛ یعنی  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ). وقتی حاصل ضرب برداری تشکیل شد پس از انجام بعضی عملیات برداری-تانسوری، معادله تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای به‌شرح زیر، حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] &= -[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]] - [\nabla \cdot \{\mathbf{r} \times p \delta\}^\dagger] - [\nabla \cdot \{\mathbf{r} \times \tau^\dagger\}^\dagger] \\ &+ [\mathbf{r} \times \rho \mathbf{g}] - [\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\tau}] \end{aligned} \quad (1-4.3)$$

۳. یکی از پیامدهای سرگرم‌کننده استهلاک ویسکوز برای هوا، مطالعه‌ای است که

H. K. Moffatt [*Nature*, **404**, 833-834(2000)]

درمورد نحوه روی میز نشستن سکه‌ای که در هوا می‌چرخد انجام داد.

4. G. G. Stokes, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **9**, 8-106 (1851), pp. 57-59.

در این جا  $\varepsilon$  یک تانسور مرتبه سوم با مؤلفه‌های  $\varepsilon_{ijk}$  است (نماد جایگشت در پیوست (الف) بخش الف.۲. تعریف شده است). اگر تانسور تنش  $\tau$  متقارن باشد، چنان‌که برای سیالات نیوتونی هست، جمله آخر صفر می‌شود. طبق نظریه‌های سینتیک گازهای رقیق، مایعات تک‌اتمی، و پلیمرها، تانسور  $\tau$ ، در غیاب گشتاورهای الکتریکی و مغناطیسی، متقارن است. <sup>۱</sup> از طرف دیگر، اگر  $\tau$  نامتقارن باشد، آن‌گاه آخرین جمله، آهنگ تبدیل اندازه حرکت زاویه‌ای حجمی به اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی را توصیف می‌کند.

فرض متقارن بودن تانسور تنش، با این گفته هم‌ارز است که بین اندازه حرکت زاویه‌ای حجمی و اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی تبادل متقابل وجود ندارد و دو صورت اندازه حرکت مستقلاً پایستارند. در معادله (۸-۳.۰) این نکته متناظر است با برابر گرفتن جمله‌های حاصل ضرب برداری و جمله‌های اندازه حرکت زاویه‌ای داخلی، به صورت جداگانه. فقط در فصل ۷ به معادله (۱-۴.۳) رجوع خواهیم کرد و در آن‌جا نشان می‌دهیم که موازنه اندازه حرکت ماکروسکوپی را می‌توان از این معادله به دست آورد.

### ۵.۳ معادله‌های تغییر برحسب مشتق مادی

پیش از ادامه مطلب، یادآوری می‌کنیم که در پدیده‌های انتقال ممکن است با چندین مشتق زمانی سروکار پیدا کنیم. این مشتق‌ها را با مثالی ساده - مثلاً در مورد تراکم ماهی در رودخانه می‌سی‌سی‌پی- نشان می‌دهیم. چون ماهی‌ها به اطراف شنا می‌کنند، به طور کلی تراکم ماهی تابع مکان  $(x, y, z)$  و زمان  $(t)$  خواهد بود.

#### مشتق زمانی جزئی $\partial/\partial t$

فرض کنید روی پلی ایستاده‌ایم و تراکم ماهی را درست زیر پای خود، به صورت تابعی از زمان به دست می‌آوریم. در این صورت می‌توانیم آهنگ زمانی تغییر تراکم ماهی در نقطه‌ای ثابت را محاسبه کنیم. نتیجه عبارت است از  $(\partial c/\partial t)|_{x,y,z}$ ، یعنی مشتق جزئی  $c$  نسبت به زمان  $t$ ، در مکان ثابت  $x, y, z$ .

#### مشتق زمانی کلی $d/dt$

حال فرض کنید سوار قایق موتوری می‌شویم و در رودخانه گشت می‌زنیم؛ گاهی برخلاف جریان آب و گاهی در جهت جریان آب حرکت می‌کنیم. در تمام این مدت تراکم ماهی را بررسی می‌کنیم. در هر لحظه، آهنگ تغییر تراکم مشاهده شده عبارت است از:

$$\frac{dc}{dt} = \left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_{x,y,z} + \frac{dx}{dt} \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{y,z,t} + \frac{dy}{dt} \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_{z,x,t} + \frac{dz}{dt} \left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_{x,y,t} \quad (1-5.3)$$

که در آن  $dx/dt, dy/dt, dz/dt$  و مؤلفه‌های سرعت قایق‌اند.

#### مشتق زمانی مادی $D/Dt$

حال سوار کانو می‌شویم و چون توان زیادی برایمان باقی نمانده است، همراه جریان آب حرکت می‌کنیم و به بررسی تراکم ماهی می‌پردازیم. در این وضعیت، سرعت ناظر با سرعت،  $v$ ، جریان آب برابر است؛ سرعت  $v$  مؤلفه‌های  $v_x, v_y, v_z$  را دارد.

1. J. S. Dahler and L. E. Scriven, *Nature*, **192**, 36-37 (1961); S. R. de Groot and P. Mazur, *Nonequilibrium Thermodynamics*, North Holland, Amsterdam (1962), Chapter XII.

در منبع زیر مروری بر نوشته‌های منتشر شده در این زمینه را می‌یابید:

G. D. C. Kuiken, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **34**, 3568-3572 (1995).

اگر در هر لحظه آهنگ زمانی تغییر تراکم ماهی را گزارش دهیم، رابطه زیر را به دست آورده‌ایم:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} \quad \text{یا} \quad \frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla c) \quad (۲-۵.۳)$$

عملگر خاص  $D/Dt = \delta/\delta t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  مشتق مادی نام دارد (یعنی آهنگ زمانی تغییر درحالتی که ناظر همراه با «ماده» حرکت می‌کند). به جای این اصطلاح از اصطلاحات مشتق ماده، مشتق هیدرودینامیکی، و مشتق پیرو حرکت نیز استفاده می‌کنند.

حال باید نحوه تبدیل معادله‌های بیان‌شده برحسب  $\partial/\partial t$  را به معادله‌هایی برحسب  $D/Dt$  بدانیم. برای هر تابع اسکالر  $f(x, y, z, t)$  می‌توانیم عملیات زیر را انجام دهیم:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x f \right) + \left( \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y f \right) + \left( \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z f \right) \\ &= \rho \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) + f \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right) \\ &= \rho \frac{Df}{Dt} \end{aligned} \quad (۳-۵.۳)$$

طبق معادله پیوستگی، کمیت داخل پرانتز دوم در سطر دوم صفر است. در نتیجه، معادله (۳-۵.۳) را می‌توان به صورت برداری زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v} f) = \rho \frac{Df}{Dt} \quad (۴-۵.۳)$$

به همین ترتیب، برای هر تابع برداری  $\mathbf{f}(x, y, z, t)$  داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{f}) + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{f}) = \rho \frac{D\mathbf{f}}{Dt} \quad (۵-۵.۳)$$

با استفاده از این معادله‌ها می‌توان، مطابق جدول ۱-۵.۳، معادله‌های تغییر ارائه‌شده در بخش‌های ۱.۳ تا ۴.۳ را برحسب مشتق مادی نوشت.

جدول ۱-۵.۳ معادله‌های تغییر سیستم‌های هم‌دما به صورت  $D/Dt$  الف

تذکر: در سمت چپ، شماره معادله برای صورت  $\partial/\partial t$  گفته شده است.

---


$$(۴-۱.۳) \quad \frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{(الف)}$$

$$(۹-۲.۳) \quad \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g} \quad \text{(ب)}$$

$$(۱-۳.۳) \quad \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\bar{\tau}} v^2 \right) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla p) - (\mathbf{v} \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \quad \text{(ج)}$$

$$(۱-۴.۳) \quad \rho \frac{D}{Dt} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = -[\nabla \cdot \{\mathbf{r} \times p\delta\}^\dagger] - [\nabla \cdot \{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}\}^\dagger] + [\mathbf{r} \times \rho \mathbf{g}] \quad \text{(د) الف}$$


---

الف) عبارت‌های (الف) تا (ج) از معادله‌های (۴-۱.۳)، (۹-۲.۳) و (۱-۳.۳)، بدون اختیار کردن هیچ فرضی به دست می‌آیند. معادله (D) فقط برای  $\boldsymbol{\tau}$  متقارن نوشته می‌شود.

معادله (الف) در جدول ۱-۵.۳ نشان می‌دهد که با حرکت در امتداد حرکت سیال، در نتیجه تراکم  $[(\nabla \cdot \mathbf{v}) < 0]$  یا انبساط سیال  $[(\nabla \cdot \mathbf{v}) > 0]$ ، چگالی افزایش یا کاهش می‌یابد. معادله (ب) را می‌توان به صورت جمع نیروهای فشار، نیروهای ویسکوز، و نیروی خارجی = (جرم)  $\times$  (شتاب) تعبیر کرد. به عبارت دیگر، معادله (۱-۲.۳) با قانون دوم حرکت نیوتون در مورد قطره کوچکی از سیال که محاط آن به طور موضعی با سرعت  $\mathbf{v}$  سیال حرکت می‌کند، هم‌ارز است (مسئله ۱-۵.۳ را ببینید).

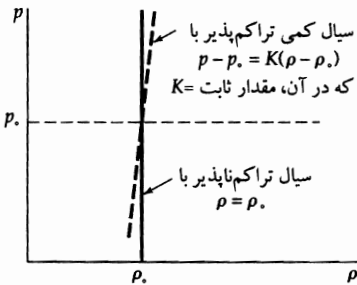
اکنون سه مورد از متداول‌ترین ساده‌سازی‌های معادله حرکت را اجمالاً بررسی می‌کنیم.<sup>۱</sup>

۱. وقتی  $\rho$  و  $\mu$  ثابت باشند، با قرار دادن عبارت نیوتون برای  $\boldsymbol{\tau}$  از معادله (۷-۲.۱) در معادله حرکت، معادله بسیار معروف ناویر-استوکس به دست می‌آید که نخستین بار از استدلال‌های مولکولی ناویه و استدلال‌های پیوستاری استوکس حاصل شد:<sup>۲</sup>

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad \text{یا} \quad \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (۷, ۶-۵.۳)$$

در صورت دوم از «فشار اصلاح‌شده»  $P = p + \rho gh$  استفاده کرده‌ایم که در فصل ۲ معرفی شد و در آن  $h$  ارتفاع در میدان گرانشی و  $gh$  انرژی پتانسیل گرانشی بر واحد جرم است. معادله (۶-۵.۳) نقطه شروع استاندارد برای توصیف جریان‌های هم‌دمای گازها و مایعات است.

این نکته را به خاطر بسپارید که وقتی  $\rho$  ثابت فرض می‌شود، معادله حالت (در  $T$  ثابت) خطی عمودی روی نمودار  $p$  برحسب  $\rho$  است (شکل ۱-۵.۳ را ببینید). بنابراین، دیگر نمی‌توان فشار مطلق را از روی  $T$  و  $\rho$  تعیین کرد، اگرچه گرادیان‌های فشار و اختلاف‌های لحظه‌ای را می‌توان با استفاده از معادله (۶-۵.۳) یا معادله (۷-۵.۳) تعیین کرد. در صورتی که  $p$  در نقطه‌ای از سیستم معلوم نباشد، فشار، مطلقاً، آن را تعیین نمی‌کند.



شکل ۱-۵.۳ معادله حالت برای سیال تراکم‌پذیر و سیال تراکم‌ناپذیر، وقتی  $T$  ثابت باشد.

۲. وقتی در معادله ناویه-استوکس از جمله‌های شتاب چشم‌پوشی شود؛ یعنی وقتی  $\rho(D\mathbf{v}/Dt) = 0$ ، نتیجه می‌شود:

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (۸-۵.۳)$$

که آن را معادله جریان استوکس می‌نامند. گاهی به آن معادله جریان خزشی نیز می‌گویند، زیرا وقتی جریان فوق‌العاده آهسته باشد، می‌توان جمله  $\rho[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}]$  را، که برحسب سرعت درجه دو است، حذف کرد. در بعضی از

۱. برای آشنایی با تاریخچه این روابط و سایر روابط معروف دینامیک سیالات، نگاه کنید به

H. Rouse and S. Ince, *History of Hydraulics*, Iowa Institute of Hydraulics, Iowa City (1959).

2. L. M. H. Navier, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 6, 389-440 (1827); G. G. Stokes, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 8, 287-319 (1845).



جریان‌ها، مانند جریان لوله هیگن-پوئازوی، جمله  $\rho[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}]$  حذف می‌شود، و محدودیت ضمنی آهسته بودن جریان وجود ندارد. معادله جریان استوکس در نظریه روانکاری، بررسی حرکات ذره در سوسپانسیون، جریان در محیط متخلخل، و حرکت میکروپها اهمیت دارد. نوشته‌های فراوانی با این موضوع یافت می‌شود.<sup>۳</sup>

۳. وقتی از نیروهای ویسکوز چشم‌پوشی شود، یعنی  $[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] = 0$ ، معادله حرکت چنین نوشته می‌شود:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (9-5.3)$$

که آن را معادله اویلر برای سیال‌های «غیرویسکوز» می‌نامند.<sup>۴</sup> بدیهی است که سیال واقعاً «غیرویسکوز» وجود ندارد، اما در بسیاری از جریان‌ها نیروهای ویسکوز نسبتاً بی‌اهمیت‌اند.

نمونه‌های این جریان‌ها عبارت‌اند از جریان حول بال‌های هواپیما (مگر در نزدیکی مرزهای جامد)، جریان رودخانه‌ها در اطراف سطوح بالادستی پایه‌های پل، بعضی از مسئله‌های دینامیک گازهای تراکم‌پذیر، و جریان‌های اقیانوسی.<sup>۵</sup>

### مثال ۱۵.۳

معادله برنولی برای جریان پایای سیالات غیرویسکوز  
معادله برنولی برای جریان پایای سیالات غیرویسکوز یکی از معروف‌ترین معادله‌های دینامیک سیالات کلاسیک است.<sup>۶</sup> نشان دهید که این معادله از معادله اویلر برای حرکت به دست می‌آید.

حل

جمله مشتق زمانی در معادله (۹-۵.۳) را حذف کنید و سپس از اتحاد برداری

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}] = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - [\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{v}]]$$

(معادله الف (۴-۲۳)) استفاده کنید و معادله را به صورت زیر بنویسید:

$$\rho \nabla \frac{1}{2} v^2 - \rho [\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{v}]] = -\nabla p - \rho \mathbf{g} \nabla h \quad (10-5.3)$$

در نوشتن جمله آخر،  $\mathbf{g}$  را به صورت  $-g \nabla h = -\nabla \Phi$  بیان کرده‌ایم که در آن  $h$  ارتفاع در میدان گرانشی است. سپس معادله (۱۰-۵.۳) را بر  $\rho$  تقسیم می‌کنیم و آن‌گاه حاصل ضرب نقطه‌ای با بردار یکه  $\mathbf{s} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$  را در امتداد

3. J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Martinus Nijhoff, The Hague (1983); S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*, Butterworth-Heinemann, Boston (1991).

4. L. Euler, *Mém. Acad. Sci. Berlin*, **11**, 217-273, 274-315, 316-361 (1755).

لئونارد اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) ریاضیدان متولد سوئیس، در سنت پترزبورگ، بازل، و برلین تدریس می‌کرد و در بسیاری از حوزه‌های ریاضی و فیزیک آثار فراوانی از او منتشر شده‌است.

5. See D. J. Acheson, *Elementary Fluid Mechanics*, Clarendon Press, Oxford (1990), Chapters 3-5; and G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967), Chapter 6.

۶. دانیل برنولی (۱۷۰۰-۱۷۸۲) یکی از اولین پژوهشگران در حوزه دینامیک سیالات و نظریه سینتیک گازها بود. ایده‌های او در

هیدرودینامیک در

D. Bernoulli, *Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Argentorati (1738)

خلاصه شده‌است، اما معادله (۱۲-۵.۳) را واقعاً او ارائه نداده‌است. اعتبار به دست آوردن این معادله از آن

L. Euler, *Histoires de l'Académie de Berlin* (1755).

است.

جریان تشکیل می‌دهیم. وقتی این کار انجام شد، می‌توان نشان داد که جمله شامل کرل میدان سرعت صفر می‌شود (تمرین خوبی در آنالیز برداری)، و  $(\mathbf{s} \cdot \nabla)$  را می‌توان با  $d/ds$  جایگزین کرد که در آن  $s$  فاصله در طول یک خط جریان است. بنابراین داریم:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\rho} v^2 \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{d}{ds} p - g \frac{d}{ds} h \quad (۱۱-۵.۳)$$

وقتی از این معادله در طول خط جریان از نقطه ۱ تا نقطه ۲ انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\rho} (v_2^2 - v_1^2) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} dp + g(h_2 - h_1) = 0 \quad (۱۲-۵.۳)$$

که معادله برنولی نام دارد. این معادله سرعت، فشار، و ارتفاع دو نقطه در طول خط جریان در یک سیال با جریان حالت پایا را به هم مربوط می‌کند. از این معادله در موقعیت‌هایی استفاده می‌شود که بتوان نقش ویسکوزیته را کم‌اهمیت فرض کرد.

### ۶.۳ استفاده از معادله‌های تغییر برای حل مسئله‌های جریان

در اغلب کاربردهای معادله حرکت، ناگزیریم عبارت مربوط به  $\tau$  را از معادله (۷-۲.۱) در معادله (۹-۲.۳) قرار دهیم (یا، هم‌ارز با آن، مؤلفه‌های  $\tau$  را از معادله (۶-۲.۱) یا پیوست ب.۱ در معادله‌های (۵-۲.۳)، (۶-۲.۳)، و (۷-۲.۳) قرار دهیم).

هم‌چنین برای توصیف جریان سیال نیوتونی در دمای ثابت، به‌طورکلی به اطلاعات زیر نیاز داریم:

معادله پیوستگی معادله (۴-۱.۳)

معادله حرکت معادله (۹-۲.۳)

مؤلفه‌های  $\tau$  معادله (۶-۲.۱)

معادله حالت  $p = p(\rho)$

معادلات ویسکوزیته  $\mu = \mu(\rho), \kappa = \kappa(\rho)$

این معادله‌ها، همراه با شرایط مرزی و اولیه لازم، به‌طور کامل توزیع فشار، چگالی، و سرعت در سیال را به‌دست می‌دهند. آن‌ها به‌ندرت در شکل کامل خود برای حل مسئله‌های دینامیک سیال به‌کار می‌روند. معمولاً در این فصل، برای سهولت کار، از صورت‌های محدودشده استفاده می‌کنیم.

اگر بتوان چگالی و ویسکوزیته را ثابت فرض کرد، آن‌گاه می‌توان از معادله‌های زیر:

معادله پیوستگی معادله (۴-۱.۳) و جدول ب.۴

معادله ناویه-استوکس معادله (۶-۵.۳) و جدول‌های ب.۵، ۶، و ۷

همراه با شرایط اولیه و مرزی، استفاده کرد. با استفاده از این‌ها می‌توان توزیع فشار و سرعت را به‌دست آورد.

در فصل ۱ مؤلفه‌های تانسور تنش را در مختصات دکارتی نشان دادیم و در این فصل معادله‌های پیوستگی و حرکت را در مختصات دکارتی به‌دست آوردیم. در جدول‌های ب.۱، ۴، ۵، ۶، و ۷ این معادله‌های مهم را در سه دستگاه مختصات متداول: دکارتی  $(x, y, z)$ ، استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ ، و کروی  $(r, \theta, \phi)$  خلاصه کرده‌ایم. دانشجویان مبتدی نباید فکر خود را برای به‌دست آوردن این معادله‌ها مشغول کنند، اما باید با جدول‌های پیوست (ب) کاملاً آشنا شوند و از آن برای حل مسئله‌های دینامیک سیالات استفاده کنند. دانشجویان پیشرفته می‌توانند وارد جزئیات پیوست (الف) شوند و نحوه به‌دست آوردن عبارت‌های مربوط به عملیات مختلف  $\nabla$  را، چنان‌که در بخش‌های الف.۶ و الف.۷ آمده‌است، بیاموزند.

در این بخش نحوه تشکیل و حل بعضی از مسئله‌های مربوط به جریان آرام، هم‌دما، و حالت پایای سیالات نیوتونی را نشان می‌دهیم. راه‌حل‌های تحلیلی نسبتاً ساده‌ای که ارائه می‌شوند، پایان راه نیست، بلکه ایجاد آمادگی برای حرکت به سوی راه‌حل‌های تحلیلی یا عددی مسائل پیچیده‌تر و استفاده از روش‌های مختلف تقریبی یا تحلیل ابعادی‌اند. حل کامل مسئله‌های مختلف جریان ویسکوز، شامل اثبات یگانگی و معیارهای پایداری، کاری دشوار است. درحقیقت، توجه بعضی از بهترین متخصصان ریاضی کاربردی جهان به حل معادله‌های پیوستگی و حرکت معطوف شده‌است. دانشجوی مبتدی، هنگامی که برای نخستین بار با این معادلات روبه‌رو می‌شود، احساس ناتوانی خواهد کرد. تلاش ما در این بخش، ارائه مثال‌های روشن‌گر و حل چند مسئله شناخته‌شده برای جریان‌های پایدار است. در هر مورد، کار را با فرض‌هایی در مورد صورت توزیع فشار و سرعت آغاز می‌کنیم؛ یعنی حدس می‌زنیم که در مسئله مورد بحث، وابستگی  $p$  و  $v$  به مکان، از چه نوع است. سپس همه جمله‌های معادلات پیوستگی و حرکت را، که طبق فرض‌های اختیار شده، ضروری نیستند، کنار می‌گذاریم. مثلاً، اگر فرض شود  $v_x$  فقط تابع  $y$  است، جمله‌هایی مانند  $\partial v_x / \partial x$  و  $\partial^2 v_x / \partial z^2$  را می‌توان کنار گذاشت. وقتی همه جمله‌های غیر ضروری حذف شدند، غالباً تعداد کمی معادله نسبتاً ساده باقی می‌ماند و اگر مسئله به اندازه کافی ساده باشد، می‌توان جواب تحلیلی به دست آورد. باید بر این نکته تأکید کرد که در اختیار کردن فرض‌ها، معمولاً از قوه شهود استفاده می‌شود. شهود بر مشاهدات و تجربیات روزمره ما از پدیده‌های جریان، متکی است. قوه شهود همواره به ما می‌گوید که جریان حول یک محور متقارن خواهد بود، یا یکی از مؤلفه‌های سرعت، صفر است. با استفاده از قوای شهودی خود برای اختیار کردن چنین فرض‌هایی، باید این نکته را به خاطر داشته باشیم که جواب نهایی متعاقباً محدودیت‌هایی خواهد داشت. اما با شروع از معادله‌های تغییر، وقتی «فرایند حذف» را به پایان برسانیم، دست‌کم فهرست کاملی از همه فرض‌های مورد استفاده در حل مسئله خواهیم داشت. در بعضی از موارد می‌توانیم به عقب برگردیم و بعضی از فرض‌ها را حذف کنیم و جواب دقیق‌تری به دست بیاوریم. در بعضی از مثال‌هایی که شرح داده می‌شود، برای معادلات دینامیک سیالات یک جواب به دست می‌آوریم. اما چون همه معادلات غیرخطی‌اند، ممکن است مسئله جواب‌های دیگری هم داشته باشد. بنابراین حل کامل مسئله‌ای در دینامیک سیالات، مستلزم تعیین حدود رژیم‌های پایدار و هم‌چنین هر گستره‌ای از رفتار ناپایدار است. یعنی، باید «نقشه‌ای» ترسیم کنیم که رژیم‌های جریان امکان‌پذیر مختلفی را نشان دهد. معمولاً فقط برای ساده‌ترین رژیم‌ها می‌توان جواب‌های تحلیلی به دست آورد؛ بقیه اطلاعات معمولاً براساس تجربه یا از طریق راه‌حل‌های عددی بسیار مفصل به دست می‌آیند. به عبارت دیگر، اگرچه معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیال را می‌شناسیم، هنوز بسیاری از نکات را درباره حل آن‌ها نمی‌دانیم. این عرصه چالش ریاضیات کاربردی از سطح یک کتاب درسی مقدماتی بسیار بالاتر است.

وقتی با مسئله‌های دشوار روبه‌رو می‌شویم، باید به جستجو در بعضی رساله‌های پیشرفته دینامیک سیالات بپردازیم.<sup>۱</sup> اکنون به سراغ مثال‌های روشن‌گر می‌رویم. دو مسئله نخست در فصل قبل شرح داده شدند؛ این مسئله‌ها را صرفاً به این سبب دوباره حل می‌کنیم تا کاربرد معادله‌های تغییر را نشان دهیم. سپس بعضی از مسئله‌های دیگر را بررسی می‌کنیم که حل آن‌ها با استفاده از روش موازنه لایه که در فصل ۲ شرح داده شد، دشوار است.

1. R. Berker, *Handbuch der Physik*, Volume VIII-2, Springer, Berlin (1963), pp. 1-384; G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967); L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 2nd edition (1987); J. A. Schetz and A. E. Fuhs (eds.), *Handbook of Fluid Dynamics and Fluid Machinery*, Wiley-Interscience, New York (1996); R. W. Johnson (ed.), *The Handbook of Fluid Dynamics*, CRC Press, Boca Raton, Fla. (1998); C. Y. Wang, *Ann. Revs. Fluid Mech.*, **23**, 159-177 (1991).

مثال ۱-۶.۳

جریان پایا در لولهٔ مدور طویل

مسئلهٔ جریان لوله‌ای مثال ۱-۳.۲ را، با استفاده از معادله‌های پیوستگی و حرکت دوباره حل کنید. این مسئله کاربرد معادله‌های جدول‌بندی‌شده برای ویسکوزیته و چگالی ثابت در دستگاه مختصات استوانه‌ای را، که در پیوست (ب) ارائه شده‌است، نشان می‌دهد.

حل

فرض می‌کنیم که  $\mathbf{v} = \delta_z v_z(r, z)$  است. این فرض متضمن آن است که جریان شعاعی ( $v_r = 0$ )، جریان مماسی ( $v_\theta = 0$ ) وجود ندارد، همچنین  $v_z$  به  $\theta$  وابسته نیست. در نتیجه، می‌توانیم بسیاری از جمله‌های معادله‌های جدول‌بندی‌شدهٔ تغییر را حذف کنیم تا معادله‌های زیر حاصل شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 && \text{(۱-۶.۳) معادلهٔ پیوستگی;} \\ 0 &= -\frac{\partial P}{\partial r} && \text{(۲-۶.۳) معادلهٔ حرکت;} \\ 0 &= -\frac{\partial P}{\partial \theta} && \text{(۳-۶.۳) معادلهٔ } \theta \text{ حرکت;} \\ 0 &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) && \text{(۴-۶.۳) معادلهٔ } z \text{ حرکت;} \end{aligned}$$

نخستین معادله نشان می‌دهد که  $v_z$  فقط به  $r$  وابسته است. بنابراین مشتق‌های جزئی جملهٔ دوم سمت راست معادله (۴-۶.۳) را می‌توان با مشتق‌های عادی جایگزین کرد. با استفاده از فشار اصلاح‌شده  $P = p + \rho gh$  (که در آن  $h$  ارتفاع نسبت به یک صفحهٔ مبنای اختیاری است)، از ضرورت محاسبهٔ مؤلفهٔ  $g$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای اجتناب می‌کنیم و جوابی به دست می‌آوریم که برای جهت‌گیری‌های محور لوله، معتبر است.

معادله‌های (۲-۶.۳) و (۳-۶.۳) نشان می‌دهند که  $P$  فقط تابع  $z$  است و مشتق جزئی جملهٔ اول معادله (۴-۶.۳) را می‌توان با مشتقی عادی جایگزین کرد. تنها امکان داشتن رابطه‌ای به صورت تابع  $r$  به علاوهٔ تابع  $z$ ، مساوی صفر، این است که هر جمله به تنهایی مقدار ثابتی باشد. مثلاً  $C_0$  به طوری که معادله (۴-۶.۳) به صورت زیر تحویل شود:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) = C_0 = \frac{dP}{dz} \quad (۵-۶.۳)$$

می‌توان بلافاصله از معادلهٔ  $P$  انتگرال گرفت. انتگرال معادلهٔ  $v_z$  را می‌توان پس از انجام عملیات روی سمت چپ معادله به دست آورد (در این جا نباید مشتق مرکب را «به دست آورید»). در نتیجه:

$$P = C_0 z + C_1 \quad v_z = \frac{C_0}{4\mu} r^2 + C_2 \ln r + C_3 \quad (۷-۶.۳)$$

چهار ثابت انتگرال‌گیری را می‌توان با استفاده از شرایط مرزی به دست آورد:

$$P = P_0 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } z = 0, \text{ داریم} \quad (۸-۶.۳)$$

$$P = P_L \quad \text{شرط مرزی ۲: در } z = L, \text{ داریم} \quad (۹-۶.۳)$$

$$v_z = 0 \quad \text{شرط مرزی ۳: در } r = R, \text{ داریم} \quad (۱۰-۶.۳)$$

$$v_z = 0 \quad \text{شرط مرزی ۴: در } r = 0, \text{ مقدار متناهی} \quad (۱۱-۶.۳)$$

جواب‌های حاصل عبارت‌اند از:

$$P = P_0 - (P_0 - P_L)(z/L) \quad v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (۱۳-۱۲-۶.۳)$$

معادله (۱۳-۶.۳) همان معادله (۱۸-۳.۲) است. توزیع فشار در معادله (۱۲-۶.۳) در مثال ۱-۳.۲ به دست نیامد، اما به‌طور ضمنی فرض شد. می‌توانستیم در این‌جا نیز همان کار را انجام دهیم، اما تصمیم گرفتیم با کم‌ترین تعداد فرض کار کنیم.

چنان‌که در مثال ۱-۳.۲ گفته شد، معادله (۱۳-۶.۳) فقط برای جریان آرام، و در نقاط دور از مجراهای خروجی و ورودی معتبر است. برای اعداد رینولدز بالاتر از حدود  $2100$ ، در پایین‌دست ناحیه ورودی رژیم جریان متلاطم وجود دارد و معادله (۱۳-۶.۳) دیگر معتبر نیست.

### مثال ۲-۶.۳

فیلم ریزان با ویسکوزیته متغیر

مثال ۲-۲.۲ را با استفاده از معادله‌های پیوست (ب) حل کنید. این مثال کاربرد معادله حرکت برحسب  $\tau$  را نشان می‌دهد.

حل

مانند مثال ۲-۲.۲، جریان را حالت‌پایا با چگالی ثابت فرض می‌کنیم، اما ویسکوزیته آن را تابع  $x$  می‌گیریم. مانند قبل فرض می‌کنیم که مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  سرعت صفرند و  $v_z = v_z(x)$  است. با این فرض‌ها، معادله پیوستگی به صورت اتحاد برقرار است. طبق جدول ب.۱ تنها مؤلفه‌های غیرصفر  $\tau$  عبارت‌اند از:  $\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu(dv_x/dx)$ . مؤلفه‌های معادله حرکت برحسب  $\tau$ ، از جدول ب.۵ عبارت‌اند از:

$$\circ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \beta \quad \circ = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (۱۵-۱۴-۶.۳)$$

$$\circ = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{d}{dx} \tau_{xz} + \rho g \cos \beta \quad (۱۶-۶.۳)$$

که در آن  $\beta$  زاویه نشان داده‌شده در شکل ۲-۲.۲ است. با انتگرال‌گیری از معادله (۱۴-۶.۳) نتیجه می‌شود:

$$p = \rho g x \sin \beta + f(y, z) \quad (۱۷-۶.۳)$$

که در آن  $f(y, z)$  تابعی اختیاری است. معادله (۱۵-۶.۳) نشان می‌دهد که  $f$  نمی‌تواند تابع  $y$  باشد. سپس به این نکته توجه می‌کنیم که فشار در فاز گاز، در فشار جوی متداول  $p_{atm}$  بسیار نزدیک به ثابت است. بنابراین در فصل مشترک گاز-مایع  $x = 0$ ، فشار نیز در مقدار  $p_{atm}$  ثابت است. در نتیجه می‌توان  $f$  را با  $p_{atm}$  برابر گذاشت تا رابطه زیر حاصل شود:

$$p = \rho g x \sin \beta + p_{atm} \quad (۱۸-۶.۳)$$

سپس معادله (۱۶-۶.۳) به صورت زیر درمی‌آید:

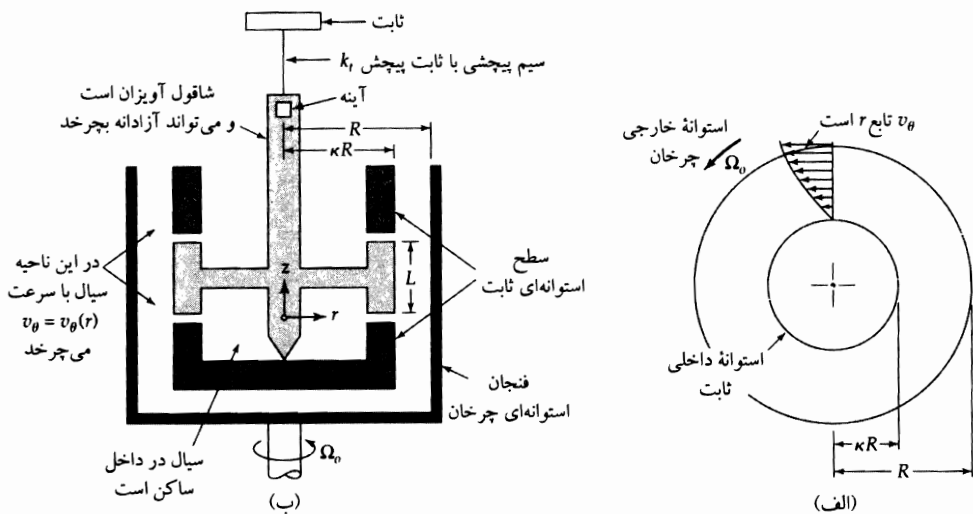
$$\frac{d}{dx} \tau_{xz} = \rho g \cos \beta \quad (۱۹-۶.۳)$$

که همان معادله (۱۰-۲.۲) است. بقیه جواب همان است که در بخش ۲.۲ دیدیم.

مثال ۳-۶.۳

طرز کار ویسکوزیته‌سنج کوئت

قبلاً گفتیم که اندازه‌گیری اختلاف فشار برحسب آهنگ جریان جرمی در لوله‌ی استوانه‌ای اساس تعیین ویسکوزیته در ویسکوزیته‌سنج‌های مومین تجاری است. با اندازه‌گیری گشتاور لازم برای چرخاندن یک جسم توپر در تماس با سیال نیز می‌توان ویسکوزیته را تعیین کرد. ویسکوزیته‌سنج کوئت، که در شکل ۱-۶.۳ نشان داده شده‌است، پیش‌درآمد ظهور انواع ویسکوزیته‌سنج چرخشی بود.



سیال را در فنجان می‌ریزند و فنجان را با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\Omega_0$  (اندیس « $\theta$ » نشانه‌ی خارجی بودن است) به‌چرخش درمی‌آورند. مایع ویسکوز چرخان سبب می‌شود که شاقول آویزان بچرخد تا گشتاور تولیدشده بر اثر انتقال اندازه‌حرکت در سیال، با حاصل‌ضرب ثابت چرخش،  $k_T$ ، و جابه‌جایی زاویه‌ای،  $\theta_0$ ، شاقول برابر شود. جابه‌جایی زاویه‌ای را می‌توان با مشاهده‌ی انحراف باریکه‌ی نور بازتاب‌یافته از آینه‌ی نصب‌شده روی شاقول اندازه‌گیری کرد. شرایط اندازه‌گیری کنترل می‌شوند تا در ناحیه‌ی حلقوی بین دو استوانه‌ی هم‌مرکز نشان داده‌شده در شکل، جریان آرام، مماسی، و حالت‌پایا ایجاد شود. به‌علت آرایش مورد‌استفاده، می‌توان از آثار انتهایی در ناحیه‌ی شامل ارتفاع،  $L$ ، شاقول چشم‌پوشی کرد.

برای تحلیل این اندازه‌گیری معادله‌های پیوستگی و حرکت را، به‌ازای  $\rho$  و  $\mu$  ثابت، درمورد جریان مماسی در ناحیه‌ی حلقوی دور شاقول به‌کار می‌بندیم. درنهایت به معادله‌ای برای ویسکوزیته (مؤلفه  $z$  آن) برحسب گشتاور،  $T_z$ ، وارد بر استوانه‌ی داخلی، سرعت زاویه‌ای،  $\Omega_0$ ، فنجان چرخان، ارتفاع،  $L$ ، شاقول، و شعاع‌های،  $R$ ، و  $\kappa R$ ، به‌ترتیب، مربوط به شاقول و فنجان، نیاز داریم.

حل

در بخش حلقوی موردبررسی، سیال حرکت دایره‌ای دارد. فرض‌های منطقی برای سرعت و فشار عبارت‌اند از:  $v_z = 0$ ،  $v_r = 0$ ،  $v_\theta = v_\theta(r)$ ، و  $p = p(r, z)$ . انتظار داریم  $p$  به‌علت گرانش به  $z$  و به‌علت نیروی گریز از مرکز به  $r$

وابسته باشد.

با استفاده از این فرض‌ها، همهٔ جمله‌های معادلهٔ پیوستگی صفر می‌شوند و مؤلفه‌های معادلهٔ حرکت به صورت

زیر ساده خواهند شد:

$$\begin{aligned} -\rho \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{مؤلفه } r \quad (۲۰-۶.۳) \\ \circ &= \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) \right) \quad \text{مؤلفه } \theta \quad (۲۱-۶.۳) \\ \circ &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad \text{مؤلفه } z \quad (۲۲-۶.۳) \end{aligned}$$

معادلهٔ دوم توزیع سرعت را نشان می‌دهد. معادلهٔ سوم اثر گرانش را بر فشار (اثر هیدروستاتیکی) نشان می‌دهد، و نخستین معادله به ما می‌گوید که نیروی گریزازمرکز چه اثری بر فشار دارد. در این مسئله فقط به مؤلفهٔ  $\theta$  معادلهٔ حرکت نیاز داریم.<sup>۲</sup>

دانشجوی مبتدی ممکن است مصرانه بخواهد قبل از حل کردن معادلهٔ دیفرانسیل، مشتق‌های موجود در معادلهٔ (۲۱-۶.۳) را به دست بیاورد، اما نباید این کار را بکند. تنها کاری که باید انجام داد، پیشروی گام به گام، به ترتیب زیر، است:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) &= C_1 & \frac{d}{dr} (rv_\theta) &= C_1 r & (۲۴, ۲۳-۶.۳) \\ rv_\theta &= \frac{1}{r} C_1 r^2 + C_2 & v_\theta &= \frac{1}{r} C_1 r + \frac{C_2}{R} & (۲۶, ۲۵-۶.۳) \end{aligned}$$

شرایط مرزی، همان شرایط مرزی مربوط به سیالی است که روی دو سطح استوانه‌ای نمی‌لغزد.

$$v_\theta = 0 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } r = \kappa R, \text{ داریم} \quad (۲۷-۶.۳)$$

$$v_\theta = \Omega_o R \quad \text{شرط مرزی ۲: در } r = R, \text{ داریم} \quad (۲۸-۶.۳)$$

از این شرایط مرزی می‌توان برای برای به دست آوردن ثابت‌های انتگرال‌گیری استفاده کرد و سپس آن‌ها را در معادلهٔ (۲۶-۶.۳) قرار داد. در نتیجه:

$$v_\theta = \Omega_o R \frac{\left( \frac{r}{\kappa R} - \frac{\kappa R}{r} \right)}{\left( \frac{1}{\kappa} - \kappa \right)} \quad (۲۹-۶.۳)$$

با نوشتن نتیجه به این صورت، و جمله‌های مشابه در صورت و مخرج، آشکار است که هردو شرط مرزی برآورده می‌شوند و این معادله از لحاظ ابعادی سازگار است.

با استفاده از توزیع سرعت می‌توان شار اندازه حرکت را با استفاده از جدول ب.۱ به دست آورد:

$$\tau_{r\theta} = -\mu r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) = -2\mu \Omega_o \left( \frac{R}{r} \right)^2 \left( \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2} \right) \quad (۳۰-۶.۳)$$

۲. نگاه کنید به

R. B. Bird, C. F. Curtiss, and W. E. Stewart, *Chem. Eng. Sci.*, **11**, 114-117 (1959)

در این منبع روشی برای به دست آوردن  $\rho(r, z)$  برای این سیستم ارائه شده است. رابطهٔ وابسته به زمان توزیع‌های حالت پایا توسط

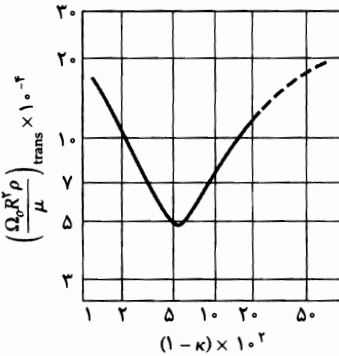
R. B. Bird and C. F. Curtiss, *Chem. Eng. Sci.*, **11**, 108-113 (1959)

ارائه شده است.

گشتاور وارد بر استوانه داخلی از ضرب شار اندازه حرکت روبه داخل  $(-\tau_r\theta)$ ، سطح استوانه، و بازوی اهرم، به صورت زیر، به دست می‌آید:

$$T_z = (-\tau_r\theta)|_{r=\kappa R} \cdot 2\pi\kappa RL \cdot \kappa R = 4\pi\mu\Omega_o R^2 L \left( \frac{\kappa^2}{1-\kappa^2} \right) \quad (۳۱-۶.۳)$$

این گشتاور از رابطه  $T_z = k_t\theta_b$  نیز به دست می‌آید. بنابراین، اندازه‌گیری سرعت زاویه‌ای فنجان و انحراف زاویه‌ای شاقول، تعیین ویسکوزیته را امکان‌پذیر می‌کند. همین نوع تحلیل برای سایر ویسکوزیته‌سنج‌های چرخشی نیز در دسترس است.<sup>۳</sup> در مورد هر ویسکوزیته‌سنج، باید از زمان وقوع تلاطم مطلع باشیم. عدد رینولدز بحرانی  $(\Omega_o R^2 \rho / \mu)_{crit}$  که بالاتر از آن، سیستم متلاطم می‌شود، در شکل ۲-۶.۳، به صورت تابعی از نسبت شعاع  $\kappa$ ، نشان داده شده است.



شکل ۲-۶.۳ عدد رینولدز بحرانی برای جریان مماسی در حلقه، درحالتی که استوانه خارجی می‌چرخد و استوانه داخلی ثابت است.

ممکن است این پرسش مطرح شود که هرگاه استوانه خارجی را ثابت نگه‌داریم و استوانه داخلی را با سرعت زاویه‌ای  $\Omega_i$  (اندیس «i» نشانه داخلی بودن است) به چرخش درآوریم، چه اتفاقی می‌افتد. در این حالت توزیع سرعت برابر است با:

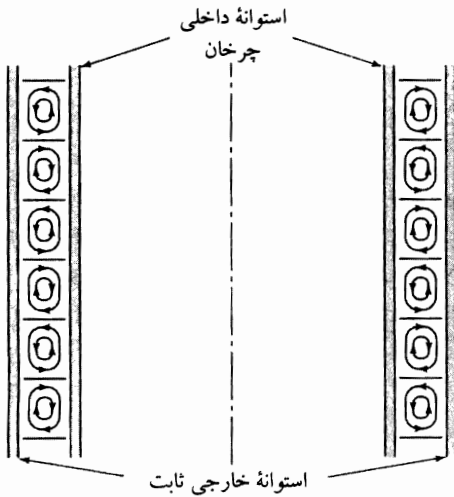
$$v_\theta = \Omega_i \kappa R \frac{\left( \frac{R}{r} - \frac{r}{R} \right)}{\left( \frac{1}{\kappa} - \kappa \right)} \quad (۳۲-۶.۳)$$

این رابطه با استفاده از همان فرض‌های قبل (نگاه کنید به بحث مقدم بر معادله (۲۰-۶.۳)) و حل همان معادله دیفرانسیل (معادله (۲۱-۶.۳))، اما با شرایط مرزی متفاوت، به دست می‌آید.

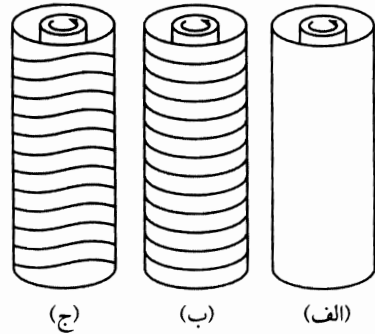
معادله (۳۲-۶.۳) جریان را به‌ازای مقادیر کوچک  $\Omega_i$  توصیف می‌کند. اما وقتی  $\Omega_i$  به مقداری بحرانی می‌رسد  $(\mu/R^2(1-\kappa)^{3/2}\rho) \approx 41/3$ ، به‌ازای  $\kappa \approx 1$ ، در سیال جریانی ثانوی ایجاد می‌شود که با جریان اولیه (مماسی) که متناوب و درجهت محوری است، جمع می‌شود. سیستم بسیار تمیزی از گردابه‌های چنبه‌ای، موسوم به گردابه‌های تیلر، به صورت نشان داده شده در شکل‌های ۳-۶.۳ و ۴-۶.۳ (ب) تشکیل می‌شود. مکان هندسی مراکز این گردابه‌ها دایره‌هایی است که مراکز آن‌ها بر محور مشترک استوانه‌ها منطبق است. این حرکت آرام است، اما با فرض‌های اختیاری در آغاز مسئله سازگار نیست. وقتی سرعت زاویه‌ای  $\Omega_i$  بیش‌تر افزایش می‌یابد، مکان هندسی مراکز گردابه‌ها به امواج متحرک تبدیل می‌شود؛ یعنی، جریان درجهت مماسی، تناوبی می‌شود. (شکل ۴-۶.۳ (ج) را ببینید). به علاوه، سرعت زاویه‌ای  $\Omega_i$  امواج متحرک تقریباً  $\frac{1}{3}\Omega_i$  است. وقتی سرعت بازمه افزایش یابد، جریان متلاطم می‌شود.

3. J. R. VanWazer, J. W. Lyons, K. Y. Kim, and R. E. Colwell, *Viscosity and Flow Measurement*, Wiley, New York (1963); K. Walters, *Rheometry*, Chapman and Hall, London (1975).





شکل ۳-۶.۳ گردابه‌های چنبره‌ای با چرخش ناهمسو، موسوم به گردابه‌های تیلر، که در فضای حلقوی بین دو استوانه مشاهده می‌شوند. خطوط جریان به شکل مارپیچ‌هایی هستند که محور آن‌ها حول محور مشترک استوانه‌ها پیچیده است. این وضعیت با شکل ۴-۶.۳(ب) متناظر است.



شکل ۴-۶.۳ طرح‌های شماتیکی که پدیده‌های مشاهده‌شده در فضای حلقوی بین دو استوانه را نشان می‌دهند: (الف) جریان مماسی محض؛ (ب) جریان تناوبی ساده (گردابه‌های تیلر)؛ و (ج) جریان تناوبی مضاعف که در آن حرکتی موج‌دار روی گردابه‌های تیلر سوار می‌شود.

شکل ۵-۶.۳ رژیم‌های جریان مختلف را نشان می‌دهد که در آن‌ها هر دو استوانه داخلی و خارجی در حال چرخش‌اند و برای دستگاه خاص و سیال خاصی ترسیم شده‌اند. این نمودار نشان می‌دهد که این سیستم ظاهراً ساده تا چه اندازه پیچیده است. جزئیات بیش‌تر را می‌توانید در منابع دیگر پیدا کنید.<sup>۵،۴</sup>

۴. تحقیق اولیه روی این موضوع توسط جان ویلیام استروت (لرد ریلی) (۱۸۴۲-۱۹۱۹) انجام شد، که با نظریه صوت خود، که آن را در یک خانه قابلی روی رود نیل نوشت، حوزه آکوستیک را بنیاد نهاد. بعضی از مراجع اصیل در مورد ناپایداری تیلر عبارت‌اند از:

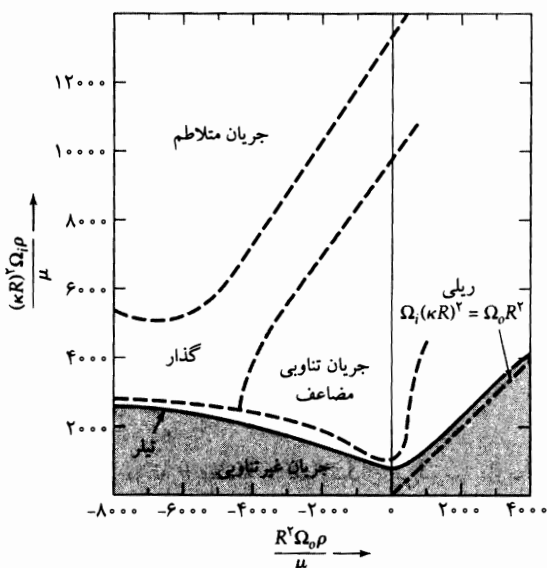
J. W. Strutt (Lord Rayleigh), *Proc. Roy. Soc.*, **A93**, 148-154 (1916); G. I. Taylor, *Phil. Trans.*, **A223**, 289-343 (1923) and *Proc. Roy. Soc.* **A157**, 546-564 (1936); P. Schultz-Grunow and H. Hein, *Zeits. Flugwiss.*, **4**, 28-30 (1956); D. Coles, *J. Fluid. Mech.* **21**, 385-425 (1965).

هم‌چنین نگاه کنید به

R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures in Physics*, Addison-Wesley, Reading, MA (1964), §41-6.

۵. سایر مراجع درباره ناپایداری تیلر، هم‌چنین ناپایداری در سایر سیستم‌های جریان عبارت‌اند از:

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford, 2nd edition (1987), pp. 99-106; S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press (1961), pp. 272-342; H. Schlichting and K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*, 8th edition Springer-Verlag, Berlin (2000), Chapter 15; P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press (1981); M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, Stanford (1982).



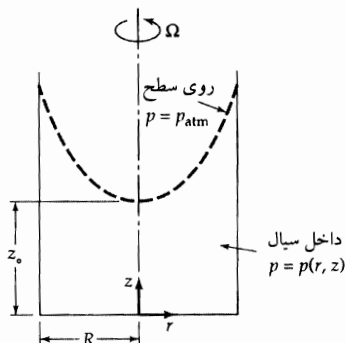
شکل ۵-۶.۳ نمودار رژیم جریان بین دو استوانه هم‌محور. خط مستقیم که با نام «ریلی» مشخص شده، جواب تحلیلی لرد ریلی برای سیال غیرویسکوز است.

بحث بالا را باید به‌مثابه هشدار اکید در این مورد تلقی کرد که فرض‌های شهودی ممکن است گمراه‌کننده باشند. اغلب ما جواب‌های تناوبی ساده و مضاعف را، به‌صورتی‌که هم‌اکنون توصیف شد، فرض نمی‌کنیم. باوجوداین، این اطلاع در معادلات ناویه-استوکس موجود است. اما چون مسئله‌های شامل ناپایداری و گذار بین چندین رژیم جریان بسیار پیچیده‌اند، ناگزیر باید تلفیقی از تئوری و آزمایش را برای توصیف آن‌ها به‌کار بگیریم. هنوز تئوری نمی‌تواند به‌تنهایی همهٔ جواب‌ها را به ما بدهد، و تا چندین سال دیگر، به انجام آزمایش تحت شرایط دقیقاً کنترل‌شده نیاز داریم.

### مثال ۴-۶.۳

شکل سطح مایع چرخان

مایعی با چگالی و ویسکوزیتهٔ ثابت در ظرفی استوانه‌ای به شعاع  $R$ ، مطابق شکل ۶-۶.۳ مفروض است. ظرف را با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  حول محور خودش به‌چرخش درمی‌آوریم. محور استوانه عمودی است، بنابراین  $g_r = 0$ ،  $g_\theta = 0$  و  $g_z = -g$  است (اندازهٔ شتاب گرانشی  $g$ ). مطلوب است تعیین شکل سطح مایع وقتی حالت پایا تثبیت شده‌است.



شکل ۶-۶.۳ مایع چرخان با سطح آزادی که شکل آن سهمی‌وار دورانی است.

حل

دستگاه مختصات استوانه‌ای برای این مسئله مناسب است و معادله‌های تغییر در جدول‌های ب.۴ و ب.۶ ارائه شده‌اند. در حالت پایا فرض می‌کنیم  $v_r$  و  $v_z$  هردو صفرند و  $v_\theta$  فقط به  $r$  وابسته است. به علاوه فرض می‌کنیم که  $p$  به علت نیروی گرانش، به  $z$  و به علت نیروی گریزازمرکز، به  $r$  وابسته است، اما به  $\theta$  وابسته نیست. با این فرض‌ها، از معادله پیوستگی نتیجه می‌شود  $\rho = \text{const}$ ، و از معادله حرکت داریم:

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{مؤلفه } r \quad (۳۳-۶.۳)$$

$$0 = \mu \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) \right) \quad \text{مؤلفه } \theta \quad (۳۴-۶.۳)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad \text{مؤلفه } z \quad (۳۵-۶.۳)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad \text{داریم:} \quad (۳۶-۶.۳)$$

که در آن  $C_1$  و  $C_2$  ثابت‌های انتگرال‌گیری‌اند. چون  $v_\theta$  نمی‌تواند در  $r = 0$  نامتناهی شود، ثابت  $C_2$  باید صفر باشد. در  $r = R$ ، سرعت  $v_\theta$  برابر  $R\Omega$  است. بنابراین  $C_1 = 2\Omega$  و:

$$v_\theta = \Omega r \quad (۳۷-۶.۳)$$

این معادله نشان می‌دهد که هر جزء از مایع در حال چرخش به صورت جزئی از یک جسم صلب حرکت می‌کند (می‌توانستیم فرض کنیم که مایع به صورت جسم صلب می‌چرخد و مستقیماً معادله (۳۷-۶.۳) را بنویسیم. وقتی نتیجه معادله (۳۷-۶.۳) را در معادله (۳۳-۶.۳) قرار دهیم، دو معادله زیر برای گرادیان‌های فشار به دست می‌آید:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega^2 r \quad \text{و} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (۳۸-۶.۳، ۳۹)$$

با انتگرال‌گیری از هر یک از این معادله‌ها نتیجه می‌شود:

$$p = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + f_1(\theta, z) \quad \text{و} \quad p = -\rho g z + f_2(r, \theta) \quad (۴۰-۶.۳، ۴۱)$$

که در آن  $f_1$  و  $f_2$  تابع‌های دلخواه انتگرال‌گیری‌اند. چون فرض کرده‌ایم که  $p$  به  $\theta$  بستگی ندارد، می‌توانیم عبارت‌های  $f_1 = -\rho g z + C$  و  $f_2 = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + C$  را انتخاب کنیم که در آن‌ها  $C$  مقداری ثابت است و در معادله‌های (۳۸-۶.۳ و ۳۹) صدق می‌کند. بنابراین جواب این معادله‌ها به صورت زیر است:

$$p = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + C \quad (۴۲-۶.۳)$$

ثابت  $C$  را می‌توان از این شرط به دست آورد که  $p = p_{\text{atm}}$  در  $r = 0$  و  $z = z_0$ ، عبارت آخر، ارتفاع سطح مایع در  $r = 0$  است. وقتی  $C$  را به این ترتیب به دست آوردیم، نتیجه می‌گیریم:

$$p - p_{\text{atm}} = -\rho g (z - z_0) + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 \quad (۴۳-۶.۳)$$

این معادله فشار همه نقاط داخل مایع را به دست می‌دهد. درست در فصل مشترک مایع-هوا،  $p = p_{atm}$  است و با این جایگزینی، معادله (۴۳-۶-۳) شکل فصل مشترک مایع-هوا را نشان می‌دهد:

$$z - z_0 = \left( \frac{\Omega^2 r}{2g} \right) r^2 \quad (44-6-3)$$

این معادله یک سهمی است. خواننده باید نشان دهد که سطح آزاد مایع در ظرف حلقوی چرخان از رابطه مشابهی پیروی می‌کند.

### مثال ۵-۶-۳

جریان در نزدیکی کره چرخان

کره توپری به شعاع  $R$  با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  در حجم زیادی از یک سیال ساکن به آهستگی می‌چرخد (شکل ۷-۶-۳). فرض را ببینید. عبارت‌هایی برای توزیع فشار و سرعت در سیال و گشتاور  $T_z$  لازم برای تداوم حرکت به دست آورید. فرض می‌شود که کره به اندازه کافی آهسته می‌چرخد و می‌توان از حالت مربوط به جریان خزشی معادله (۸-۵-۳) استفاده کرد. این مثال نحوه نوشتن و حل مسئله در مختصات کروی را نشان می‌دهد.

حل

معادله‌های پیوستگی و حرکت در مختصات کروی، به ترتیب، در جدول‌های ب.۴ و ب.۶ ارائه شده‌است. فرض می‌کنیم که، برای جریان خزشی پایا، توزیع سرعت صورت کلی  $\mathbf{v} = \delta_\phi v_\phi(r, \theta)$  را دارد و فشار اصلاح شده به صورت  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(r, \theta)$  خواهد بود، چون انتظار می‌رود جواب حول محور  $z$  متقارن باشد، وابستگی به زاویه  $\phi$  وجود نخواهد داشت.

با این فرض‌ها، معادله پیوستگی دقیقاً برقرار می‌شود و مؤلفه‌های معادله حرکت برای جریان خزشی عبارت‌اند از:

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} \quad \text{مؤلفه } r \quad (45-6-3)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} \quad \text{مؤلفه } \theta \quad (46-6-3)$$

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) \right) \quad \text{مؤلفه } \phi \quad (47-6-3)$$

شرایط مرزی را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$v_\phi = R\Omega \sin \theta \quad \text{و} \quad v_\theta = 0, \quad v_r = 0 \quad \text{در } r = R, \quad \text{داریم} \quad (48-6-3)$$

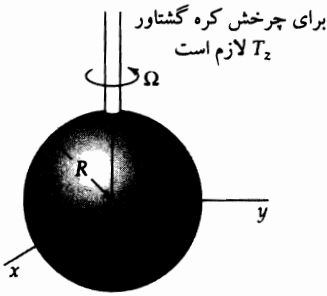
$$v_\phi \rightarrow 0, \quad v_\theta \rightarrow 0, \quad v_r \rightarrow 0 \quad \text{وقتی } r \rightarrow \infty, \quad \text{داریم} \quad (49-6-3)$$

$$\mathcal{P} \rightarrow p_0, \quad r \rightarrow \infty \quad \text{وقتی} \quad (50-6-3)$$

که در آن  $\mathcal{P} = p + \rho g z$  و  $p_0$  فشار سیال در نقطه  $z = 0$  و دور از کره است.

معادله (۴۷-۶-۳) یک معادله دیفرانسیل جزئی بر حسب  $v_\phi(r, \theta)$  است. برای حل این معادله جوابی به صورت  $v_\phi = f(r) \sin \theta$  را امتحان می‌کنیم. این صرفاً حدس است، اما با شرط مرزی معادله (۴۸-۶-۳) در توافق است. وقتی این صورت آزمایشی توزیع سرعت را در معادله (۴۷-۶-۳) قرار دهیم، معادله دیفرانسیل عادی زیر را برای  $f(r)$  به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df}{dr} \right) - 2f = 0 \quad (51-6-3)$$



شکل ۷-۶.۳ کره‌ای که در حجمی نامتناهی از سیال به آهستگی می‌چرخد. جریان اولیه عبارت است از:  $\Omega R(R/r)^2 \sin \theta$ .

این «معادله هم‌بُعد» است و می‌توان با فرض جواب آزمایشی  $f = r^n$  آن را حل کرد (معادله ج. ۱-۱۴ را ببینید) با قرار دادن این جواب آزمایشی در معادله (۵۱-۶.۳) نتیجه می‌شود  $n = 1, -2$ . پس جواب معادله (۵۱-۶.۳) عبارت است از:

$$f = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \quad (52-6.3)$$

بنابراین:

$$v_\phi(r, \theta) = \left( C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (53-6.3)$$

کاربرد شرایط مرزی نشان می‌دهد که  $C_1 = 0$  و  $C_2 = \Omega R^3$ . بنابراین عبارت نهایی برای توزیع سرعت برابر است با:

$$v_\phi = \Omega R \left( \frac{R}{r} \right)^2 \sin \theta \quad (54-6.3)$$

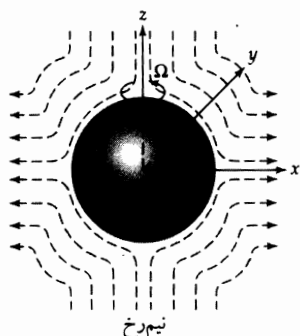
سپس گشتاور لازم برای تداوم چرخش کره را محاسبه می‌کنیم. این گشتاور برابر است با انتگرال نیروی مماسی  $(\tau_{r\phi}|_{r=R}) R^2 \sin \theta d\theta d\phi$  وارد بر سیال توسط جزء سطح جامد، که روی تمام سطح کره محاسبه شود، ضرب در بازوی اهرم  $R \sin \theta$  برای آن جزء:

$$\begin{aligned} T_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\tau_{r\phi})|_{r=R} (R \sin \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (3\mu\Omega \sin \theta) (R \sin \theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 6\pi\mu\Omega R^3 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= 8\pi\mu\Omega R^3 \quad (55-6.3) \end{aligned}$$

برای رسیدن از سطر اول به سطر دوم، از جدول ب. ۱ استفاده کرده‌ایم و برای رسیدن از سطر دوم به سطر سوم، انتگرال‌گیری را روی گستره متغیر  $\phi$  انجام داده‌ایم. انتگرال سطر سوم برابر  $\frac{4}{3}\pi$  است.

با افزایش سرعت زاویه‌ای، انحراف از «جریان اولیه» معادله (۵۴-۶.۳) رخ می‌دهد. به علت آثار نیروی گریز از مرکز، مطابق شکل ۸-۶.۳ سیال به طرف قطب‌های کره کشیده می‌شود و در استوا به طرف بیرون رانده می‌شود. برای توصیف این «جریان ثانوی» باید جمله  $[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}]$  را در معادله حرکت بگنجانیم.

این کار با استفاده از روش تابع جریان انجام می‌شود.<sup>۶</sup>



شکل ۸-۶.۳ نموداری تقریبی که جریان ثانوی پدیدار شده در اطراف کره چرخان را، وقتی عدد رینولدز افزایش می‌یابد، نشان می‌دهد.

### ۷.۳ تحلیل ابعادی معادله‌های تغییر

فرض کنید که در مورد جریان گذرا از سیستمی که نمی‌توان با حل تحلیلی معادله‌های تغییر آن را تحلیل کرد، داده‌های تجربی داریم یا از این جریان عکس گرفته‌ایم. مثالی از این نوع سیستم، جریان سیال گذرا از جریان سنج روزنه‌ای تعبیه شده در یک لوله است (این جریان سنج از قرصی تشکیل می‌شود که روزنه‌ای در مرکز آن ایجاد شده است؛ دیسک را در لوله قرار می‌دهند و در بالادست و پایین دست آن وسایل حسگر فشار نصب می‌کنند). حال فرض کنید که می‌خواهیم سیستم آزمایشی را بزرگ‌تر (یا کوچک‌تر) کنیم، تا سیستم جدیدی بسازیم که دقیقاً همان الگوی جریان در آن ایجاد می‌شود (البته با مقیاس بزرگ‌تر (یا کوچک‌تر)). قبل از هر چیز، به تشابه هندسی نیاز داریم: یعنی باید نسبت‌های همه ابعاد لوله و صفحه روزنه دار در سیستم اصلی و سیستم بزرگ (یا کوچک) شده مساوی باشد. به علاوه باید تشابه دینامیکی داشته باشیم: یعنی گروه‌های بدون بُعد (مانند عدد رینولدز) در معادله‌های دیفرانسیل و شرایط مرزی باید همانند باشند. برای درک هر چه بهتر تشابه دینامیکی باید معادله‌های تغییر را، همراه با شرایط مرزی و شرایط اولیه، به صورت بدون بُعد، نوشت.<sup>۲۱</sup>

برای ساده‌تر شدن موضوع، بحث را به سیال‌های با چگالی و ویسکوزیته ثابت محدود می‌کنیم که در مورد آن‌ها معادله‌های تغییر همان معادله‌های (۵-۱.۳) و (۷-۵.۳) هستند:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad \rho \frac{D}{Dt} \mathbf{v} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (۲, ۱-۷.۳)$$

۶. مثلاً نگاه کنید به کار O. Hassager در

R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1., Wiley-Interscience, New York, 2nd edition (1987), pp. 31-33.

هم‌چنین نگاه کنید به

L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford, 2nd edition (1987), p. 65; and L. G. Leal, *Laminar Flow and Convective Transport Processes*, Butterworth-Heinemann, Boston (1992), pp. 180-181.

1. G. Birkhoff, *Hydrodynamics*, Dover, New York (1955), Chapter IV.

روش تحلیل ابعادی ما با «تحلیل وارسانه کامل» برکوف متناظر است.

2. R. W. Powell, *An Elementary Text in Hydraulics and Fluid Mechanics*, Macmillan, New York (1951), Chapter VIII; and H. Rouse and S. Ince, *History of Hydraulics*, Dover, New York (1963).

در این منابع اطلاعات تاریخی سودمندی در مورد گروه‌های بدون بُعد و اشخاصی که این گروه‌ها به نامشان است، یافت می‌شود.

در اغلب سیستم‌های جریان می‌توان «عامل‌های مقیاس» زیر را شناسایی کرد: طول مشخصه  $l_0$ ، سرعت مشخصه  $v_0$ ، و فشار اصلاح‌شده مشخصه  $P_0 = p_0 + \rho gh_0$  (مثلاً این عامل‌ها می‌توانند قطر لوله، سرعت جریان متوسط، و فشار اصلاح‌شده در خروجی لوله باشند). در این صورت، می‌توان متغیرهای بدون بُعد و عملگرهای دیفرانسیل را به ترتیب زیر تعریف کرد:

$$\ddot{x} = \frac{x}{l_0} \quad \ddot{y} = \frac{y}{l_0} \quad \ddot{z} = \frac{z}{l_0} \quad \ddot{t} = \frac{v_0 t}{l_0} \quad (۳-۷.۳)$$

$$\ddot{v} = \frac{v}{v_0} \quad \ddot{p} = \frac{P - P_0}{\rho v_0^2 l_0} \quad \text{یا} \quad \ddot{p} = \frac{P - P_0}{\mu v_0 / l_0} \quad (۴-۷.۳)$$

$$\ddot{\nabla} = l_0 \nabla = \delta_x (\partial / \partial \ddot{x}) + \delta_y (\partial / \partial \ddot{y}) + \delta_z (\partial / \partial \ddot{z}) \quad (۵-۷.۳)$$

$$\ddot{\nabla}^2 = l_0^2 \nabla^2 = (\partial^2 / \partial \ddot{x}^2) + (\partial^2 / \partial \ddot{y}^2) + (\partial^2 / \partial \ddot{z}^2) \quad (۶-۷.۳)$$

$$D / D \ddot{t} = (l_0 / v_0) (D / Dt) \quad (۷-۷.۳)$$

دو گزینه برای فشار بدون بُعد پیشنهاد کرده‌ایم؛ گزینه اول برای اعداد رینولدز بزرگ، و گزینه دوم برای اعداد رینولدز کوچک مناسب است. وقتی معادله‌های تغییر (۱-۷.۳) و (۲-۷.۳) که برحسب کمیت‌های بدون بُعد نوشته می‌شوند، به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$(\ddot{\nabla} \cdot \ddot{v}) = 0 \quad (۸-۷.۳)$$

$$\frac{D}{D \ddot{t}} \ddot{v} = -\ddot{\nabla} \ddot{p} + \left[ \left[ \frac{\mu}{l_0 v_0 \rho} \right] \right] \ddot{\nabla}^2 \ddot{v} \quad (۹-۷.۳ \text{ الف})$$

$$\frac{D}{D \ddot{t}} \ddot{v} = - \left[ \left[ \frac{\mu}{l_0 v_0 \rho} \right] \right] \ddot{\nabla} \ddot{p} + \left[ \left[ \frac{\mu}{l_0 v_0 \rho} \right] \right] \ddot{\nabla}^2 \ddot{v} \quad (۹-۷.۳ \text{ ب})$$

در این معادله‌های بدون بُعد، چهار عامل مقیاس  $l_0$ ،  $v_0$ ،  $\rho$ ، و  $\mu$  در یک گروه بدون بُعد ظاهر می‌شوند. عکس این گروه را به نام یکی از صاحب‌نظران در علم دینامیک سیالات نام‌گذاری کرده‌اند:<sup>۳</sup>

$$Re = \left[ \left[ \frac{l_0 v_0 \rho}{\mu} \right] \right] = \text{عدد رینولدز} \quad (۱۰-۷.۳)$$

اندازه این گروه بدون بُعد نشانه‌ای از اهمیت نسبی نیروهای لختی و ویسکوز در سیستم سیال است. از دو صورت معادله حرکت (معادله ۹-۷.۳)، می‌توان چشم‌اندازی از صورت‌های خاص معادله ناویه-استوکس دید که در بخش ۵.۳ مطرح شد. وقتی  $Re \rightarrow \infty$ ، معادله (الف ۹-۷.۳) معادله اوپلر (۹-۵.۳) را نتیجه می‌دهد و هرگاه  $1 \ll Re$ ، معادله (ب ۹-۷.۳) به معادله جریان خزشی (۸-۵.۳) تبدیل می‌شود. در بخش‌های ۳.۴ و ۴.۴ در مورد نواحی کاربرد این معادله‌ها و سایر صورت‌های مجانبی معادله حرکت بیش‌تر بحث می‌شود. گروه‌های بدون بُعد دیگری در شرایط اولیه و شرایط مرزی مطرح می‌شوند؛ دومورد از این گروه‌ها که در مسئله‌هایی مطرح می‌شوند که با فصل مشترک سیال-سیال سروکار دارند، عبارت‌اند از:

$$Fr = \left[ \left[ \frac{v_0^2}{l_0 g} \right] \right] = \text{عدد فرود} \quad (۱۱-۷.۳)$$

۳. نگاه کنید به پانویشت ۱ در بخش ۲.۲.

۴. ویلیام فرود (۱۸۷۹-۱۸۱۰) در آکسفورد تحصیل کرد و در حرفه خود به‌عنوان مهندس عمران با راه‌آهن و کشتی‌های بخار سروکار داشت. عدد فرود گاهی به‌صورت ریشه دوم گروه گفته‌شده در معادله (۱۱-۷.۳) تعریف می‌شود.

$$\text{عدد وِبر} = \left[ \left[ \frac{\sigma}{l \cdot v \cdot \rho} \right] \right] = (۷.۳-۱۲) \quad ۵$$

نخستین معادله شامل شتاب گرانشی  $g$  و معادله دوم شامل کشش فصل مشترکی  $\sigma$  است که ممکن است، به صورت توصیف شده در مسئله ۳.ج.۵، در شرایط مرزی وارد شود. ممکن است گروه‌های دیگری، مانند نسبت طول‌ها در سیستم جریان (مثلاً نسبت قطر لوله به قطر سوراخ در جریان سنج روزه‌ای) نیز ظاهر شوند.

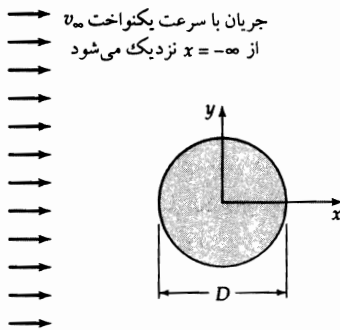
### مثال ۱-۷.۳

جریان عرضی حول استوانهٔ مدور<sup>۶</sup>

می‌خواهیم جریان یک سیال نیوتونی تراکم‌ناپذیر را که از استوانه‌ای مدور می‌گذرد، به صورت تجربی بررسی کنیم. هدف اطلاع از نحوهٔ وابستگی الگوهای جریان و توزیع فشار به قطر استوانه، طول، سرعت نزدیک شدن، چگالی، ویسکوزیتهٔ سیال است. نشان دهید که این بررسی را چگونه باید انجام داد تا تعداد آزمایش‌های لازم به حداقل ممکن برسد.

حل

برای این تحلیل، یک سیستم جریان ایده‌آل‌سازی شده را در نظر می‌گیریم: استوانه‌ای به قطر  $D$  و طول  $L$ ، در سیالی بی‌کران با چگالی و ویسکوزیتهٔ ثابت غوطه‌ور است. در ابتدا سیال و استوانه هر دو ساکن‌اند. در زمان  $t = 0$ ، استوانه به‌طور ناگهانی با سرعت  $v_\infty$  در امتداد منفی  $x$  به حرکت درمی‌آید. حرکت متعاقب سیال را با استفاده از دستگاه مختصات ثابت شده روی محور استوانه، مطابق شکل ۱-۷.۳، تحلیل می‌کنیم.



شکل ۱-۷.۳ جریان عرضی حول استوانه.

معادله‌های دیفرانسیلی که این جریان را توصیف می‌کنند، عبارت‌اند از معادلهٔ پیوستگی (معادلهٔ (۱-۷.۳)) و معادلهٔ حرکت (معادلهٔ (۲-۷.۳)). شرط اولیه برای  $t = 0$  عبارت است از:

$$(۱۳-۷.۳) \quad \text{شرط اولیه: اگر } x^2 + y^2 > \frac{1}{4}D^2 \text{ یا اگر } |z| > \frac{1}{4}L, \text{ آن‌گاه } \mathbf{v} = \delta_x v_\infty$$

۵. موریتس وبر (۱۸۷۱-۱۹۵۱) استاد کشتی‌سازی در دانشگاه برلین بود؛ گروه بدون بُعد دیگری که شامل کشش سطحی است عدد موینگی است که به صورت  $Ca = [\mu v / \sigma]$  تعریف می‌شود.  
۶. این مثال از منبع زیر اقتباس شده‌است:



شرایط مرزی به‌ازای  $t \geq 0$  و  $z$  هرچه باشد، عبارت‌اند از:

$$(۱۴-۷.۳) \quad \mathbf{v} \rightarrow \delta_x v_\infty \text{ آن‌گاه } x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \text{ وقتی } ۱: \text{ شرط مرزی}$$

$$(۱۵-۷.۳) \quad \mathbf{v} = 0 \text{ آن‌گاه } |z| > \frac{1}{\bar{\nu}} L \text{ و } x^2 + y^2 \leq \frac{1}{\bar{\nu}} D^2 \text{ وقتی } ۲: \text{ شرط مرزی}$$

$$(۱۶-۷.۳) \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_\infty \text{ آن‌گاه } y = 0 \text{ در } x \rightarrow -\infty \text{ وقتی } ۳: \text{ شرط مرزی}$$

حال مسئله را برحسب متغیرهای بدون بُعد شده با طول مشخصه  $D$ ، سرعت  $v_\infty$  و فشار اصلاح شده  $\mathcal{P}_\infty$  بازنویسی می‌کنیم. معادله‌های تغییر بدون بُعد حاصل عبارت‌اند از:

$$(\check{\nabla} \cdot \check{\mathbf{v}}) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial \check{\mathbf{v}}}{\partial \check{t}} + [\check{\mathbf{v}} \cdot \check{\nabla} \check{\mathbf{v}}] = -\check{\nabla} \check{\mathcal{P}} + \frac{1}{\text{Re}} \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{v}} \quad (۱۸, ۱۷-۷.۳)$$

که در آن  $\text{Re} = Dv_\infty \rho / \mu$  شرایط اولیه و مرزی متناظر عبارت‌اند از:

$$(۱۹-۷.۳) \quad \check{\mathbf{v}} = \delta_x \text{ آن‌گاه } |\check{z}| > \frac{1}{\bar{\nu}} (L/D) \text{ یا اگر } \check{x}^2 + \check{y}^2 > \frac{1}{\bar{\nu}} \text{ شرط اولیه: اگر } ۱:$$

$$(۲۰-۷.۳) \quad \check{\mathbf{v}} \rightarrow \delta_x \text{ آن‌گاه } \check{x}^2 + \check{y}^2 + \check{z}^2 \rightarrow \infty \text{ وقتی } ۱: \text{ شرط مرزی}$$

$$(۲۱-۷.۳) \quad \check{\mathbf{v}} = 0 \text{ آن‌گاه } |\check{z}| \leq \frac{1}{\bar{\nu}} (L/D) \text{ و } \check{x}^2 + \check{y}^2 \leq \frac{1}{\bar{\nu}} \text{ شرط مرزی } ۲: \text{ اگر}$$

$$(۲۲-۷.۳) \quad \mathcal{P} \rightarrow 0 \text{ آن‌گاه } \check{y} = 0 \text{ در } \check{x} \rightarrow -\infty \text{ وقتی } ۳: \text{ شرط مرزی}$$

اگر بتوانیم معادله‌های بدون بُعد تغییر را، همراه با شرایط مرزی بدون بُعد حل کنیم، جواب‌های آن‌ها باید صورت زیر را داشته باشند:

$$\check{\mathbf{v}} = \check{\mathbf{v}}(\check{x}, \check{y}, \check{z}, \check{t}, \text{Re}, L/D) \quad \text{و} \quad \check{\mathcal{P}} = \check{\mathcal{P}}(\check{x}, \check{y}, \check{z}, \check{t}, \text{Re}, L/D) \quad (۲۴, ۲۳-۷.۳)$$

یعنی سرعت بدون بُعد و فشار اصلاح شده بدون بُعد می‌توانند فقط به پارامترهای  $\text{Re}$  و  $L/D$  و متغیرهای مستقل بدون بُعد  $\check{x}$ ،  $\check{y}$ ،  $\check{z}$ ، و  $\check{t}$  وابسته باشند.

به این ترتیب تحلیل ابعادی مسئله کامل می‌شود. مسئله جریان را حل نکرده‌ایم، اما درمورد مجموعه مناسبی از متغیرهای بدون بُعد، برای بیان دوباره مسئله، تصمیم گرفته‌ایم و به صورت جواب دست یافته‌ایم. این تحلیل نشان می‌دهد که اگر بخواهیم الگوهای جریان عبوری از کنار استوانه را فهرست کنیم، کافی است آن‌ها را به‌ازای رشته‌ای از اعداد رینولدز  $\text{Re} = Dv_\infty \rho / \mu$  و مقادیر  $L/D$  ثبت کنیم (مثلاً به صورت عکس)؛ به این ترتیب تحقیقات جداگانه درمورد نقش  $L$ ،  $D$ ،  $v_\infty$ ،  $\rho$ ، و  $\mu$  ضرورت ندارد. با این نوع ساده‌سازی مقدار زیادی وقت و هزینه صرفه‌جویی می‌شود. درمورد جدول بندی نتایج عددی، در صورتی که بخواهیم به روش عددی به حل مسئله بپردازیم، نکات مشابهی صادق است.<sup>۸،۷</sup>

۷. جواب‌های تحلیلی این مسئله به‌ازای  $\text{Re}$  بسیار کوچک و  $L/D$  نامتناهی در منبع زیر مرور شده است:

L. Rosenhead (ed.), *Laminar Boundary Layers*, Oxford University Press (1963), Chapter IV.

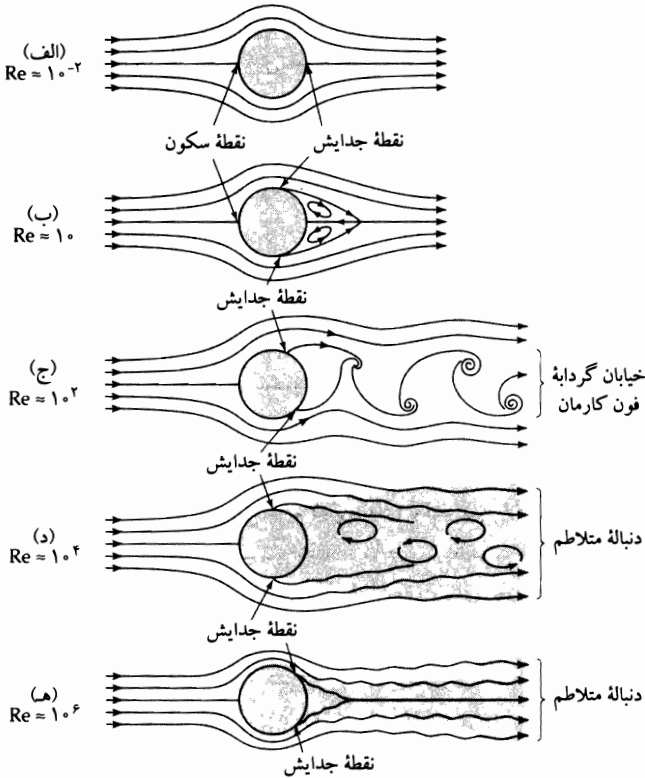
ویژگی مهم این مسئله دوبعدی، نبود جواب «جریان خزشی» است. بنابراین جمله  $[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}]$  در معادله حرکت را نیز باید در نظر گرفت، حتی در حد که  $\text{Re} \rightarrow 0$  (نگاه کنید به مسئله ۳.۹). این وضعیت با وضعیت جریان آهسته حول کره (بخش‌های ۶.۲ و ۲.۴ را ببینید) و حول سایر اجسام متناهی سه‌بُعدی، تضاد آشکاری دارد.

۸. برای مرور بررسی‌های کامپیوتری انجام شده روی جریان حول استوانه طویل، نگاه کنید به

F. H. Harlow and J. E. From, *Scientific American*, **212**, 104-110 (1965), and S. J. Sherwin and G.

E. Karniada kis, *Comput. math.*, **123**, 189-229 (1995).

در آزمایش‌ها، به‌ضرورت، در بعضی موارد از تحلیل فوق فاصله گرفته می‌شود: اندازه جریان متناهی است و نوسانات سرعت در حالت اولیه و در سیال بالادستی ناگزیر است. این نوسانات در نزدیکی استوانه و در  $Re < 1$  به سرعت از بین می‌روند. وقتی  $Re$  به  $40$  می‌رسد، میرایی اختلالات آهسته‌تر می‌شود و بالاتر از این حد تقریبی، همواره جریان ناپایا مشاهده می‌شود.



۷.۳-۲ انواع رفتار جریان در اطراف یک استوانه، که رژیم‌های جریان مختلف را، که با افزایش عدد رینولدز پدید می‌آیند، نشان می‌دهد. ناحیه جریان متلاطم سایه‌خورده است.

الگوهای مشاهده‌شده جریان به‌ازای  $\xi$  بزرگ، به‌شدت با عدد رینولدز تغییر می‌کنند. شکل ۷.۳-۲ را ببینید. در  $Re \ll 1$  جریان، مطابق قسمت (الف) شکل، منظم است. در عدد رینولدز حدود  $10$ ، یک جفت گردابه پشت استوانه پیدا می‌شود که می‌توان در قسمت (ب) شکل آن‌ها را دید. این نوع جریان تا حد  $Re = 40$  ادامه دارد و در آن‌جا دو «نقطه جدایش» پدیدار می‌شود که در آن‌ها خطوط جریان از سطح جامد جدا می‌شوند. به‌علاوه، جریان به‌طور دائم ناپایا می‌شود؛ گردابه‌ها از استوانه جدا می‌شوند و به‌طرف پایین‌دست حرکت می‌کنند. با افزایش  $Re$ ، گردابه‌ها به‌طور منظم، مطابق قسمت (ج) شکل، از دو سمت استوانه جدا می‌شوند؛ چنین آرایه منظمی از گردابه‌ها را «خیابان گردابه فون کارمان» می‌نامند. وقتی عدد رینولدز باز هم بالاتر برود، در دنباله استوانه حرکت نوسانی نامنظمی (تلاطم) ایجاد می‌شود که در قسمت (د) شکل نشان داده‌شده است. سرانجام در  $Re$  نزدیک  $10^6$  تلاطم در بالادست نقطه جدایش پدیدار می‌شود و دنباله، مطابق قسمت (ه) شکل، ناگهان باریک می‌شود. بدیهی است که محاسبه جریان‌های ناپایای نشان‌داده‌شده در سه قسمت آخر شکل، با استفاده از معادله‌های تغییر، بسیار دشوار خواهد بود. راه بسیار آسان‌تر مشاهده تجربی آن‌ها و ایجاد همبستگی بین نتایج برحسب معادله‌های (۷.۳-۲۳ و ۷.۳-۲۴) است. از معادله‌های (۷.۳-۲۳ و ۷.۳-۲۴) می‌توان برای بزرگ کردن مقیاس یک آزمایش تنها نیز استفاده کرد. فرض کنید

می‌خواستیم الگوهای جریان در اطراف استوانه‌ای به قطر  $D_I = 5 \text{ ft}$  را که هوا با سرعت تقریب  $(v_\infty)_I = 30 \text{ ft/s}$  در اطراف آن جریان دارد، از طریق آزمایش روی مدلی مقیاس‌دار به قطر  $D_{II} = 1 \text{ ft}$  پیش‌بینی کنیم. برای تشابه دینامیکی باید شرایطی مانند  $Re_{II} = Re_I$  را انتخاب کنیم. در این صورت اگر از همان سیال مورد نظر در سیستم بزرگ، برای آزمایش در مقیاس کوچک استفاده کنیم، به طوری که  $\mu_{II}/\rho_{II} = \mu_I/\rho_I$ ، درمی‌یابیم که  $(v_\infty)_{II} = 150 \text{ ft/s}$  که برای سرعت هوا در مدل کوچک لازم بود. با اعداد رینولدزی که به این ترتیب متعادل شده‌اند، الگوهای جریان در مدل و در سیستم با مقیاس کامل شبیه هم خواهند شد؛ یعنی از لحاظ هندسی متشابه‌اند.

به علاوه، اگر  $Re$  در گستره تشکیل گردابه متناوب باشد، فاصله زمانی بدون بُعد  $t_v v_\infty / D$  بین گردابه‌ها در هر دو سیستم یکسان خواهد بود. بنابراین گردابه‌ها در مدل، با سرعتی ۲۵ برابر سیستم اصلی، پراکنده می‌شوند. از نظم پراکندگی گردابه‌ها در اعداد رینولدز از حدود  $10^2$  تا  $10^4$  برای اندازه‌گیری دقیق جریان در خط لوله‌های بزرگ استفاده می‌کنند.

### مثال ۲-۷-۳

جریان پایا در مخزن دارای همزن

پیش‌بینی رفتار جریان در یک مخزن بزرگ روغن که فاقد میانگیر است، مطابق شکل ۲-۷-۳، به صورت تابعی از سرعت چرخش پروانه، مطلوب است. پیشنهاد می‌کنیم این مثال را با انجام آزمایش روی مدلی کوچک‌تر و از لحاظ هندسی مشابه سیستم اصلی حل کنید. شرایط لازم برای بررسی‌های مدل و یافتن راهی مستقیم برای پیش‌بینی را تعیین کنید.

حل

مخزنی به شعاع  $R$  را در نظر می‌گیریم که پروانه‌ای به قطر کلی  $D$  در مرکز آن تعبیه شده است. در زمان  $t = 0$ ، سیستم ساکن است و تا ارتفاع  $H$  نسبت به کف، از مایع پر شده است. بلافاصله پس از زمان  $t = 0$ ، پروانه چرخش با سرعت ثابت  $N$  دور در دقیقه را شروع می‌کند. از نیروی پسای جو روی سطح مایع چشم‌پوشی می‌کنیم. شکل پروانه و وضعیت اولیه با تابع  $S_{\text{imp}}(r, \theta, z) = 0$  توصیف می‌شود.

معادله‌های (۲-۷-۳) و (۲)، همراه با شرط اولیه زیر:

$$(25-7.3) \quad t = 0, \quad \text{به‌ازای } R < r < R \text{ و } 0 \leq z < H, \quad \mathbf{v} = 0.$$

و شرایط مرزی زیر برای ناحیه مایع، بر جریان حاکم است:

$$(26-7.3) \quad \text{کف مخزن: در } z = 0 \text{ و } R < r \leq 0, \quad \mathbf{v} = 0.$$

$$(27-7.3) \quad \text{جدار مخزن: در } r = R, \quad \mathbf{v} = 0.$$

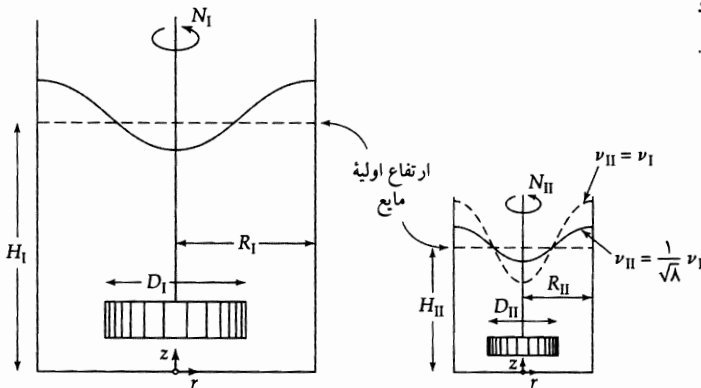
$$(28-7.3) \quad \text{سطح پروانه: در } S_{\text{imp}}(r, \theta - 2\pi Nt, z) = 0, \quad \text{داریم } \mathbf{v} = 2\pi N r \delta_\theta$$

$$(29-7.3) \quad \text{فصل مشترک گاز-مایع: در } S_{\text{int}}(r, \theta, z, t) = 0, \quad \text{داریم } (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

$$(30-7.3) \quad \mathbf{np} + [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}] = \mathbf{np}_{\text{atm}}$$

معادله‌های (۲۶-۷-۳) تا (۲۸) شرایط عدم لغزش و ناتراوایی‌اند؛ سطح  $S_{\text{imp}}(r, \theta - 2\pi Nt, z) = 0$  مکان پروانه را پس از  $Nt$  چرخش توصیف می‌کند. معادله (۲۹-۷-۳) شرط نبود جریان جرمی در فصل مشترک گاز-مایع است. که با عبارت  $S_{\text{int}}(r, \theta, z, t) = 0$  توصیف می‌شود که بردار یکه قائم محلی  $\mathbf{n}$  دارد. معادله (۳۰-۷-۳) موازنه نیرو روی جزئی از این فصل مشترک (یا عبارت پیوستگی مؤلفه قائم تانسور شار اندازه حرکت  $\pi$ ) است که در آن سهم ویسکوز ناشی از سمت گاز نادیده گرفته می‌شود. این فصل مشترک ابتدا در صفحه  $z = H$  ساکن است و پس از آن بهتر است با اندازه‌گیری حرکت آن را مشخص کرد، اگرچه اصول آن را می‌توان با استفاده از جواب عددی این دستگاه معادلات نیز پیش‌بینی کرد؛ دستگاه معادلاتی که شرایط اولیه و شتاب بعدی  $D\mathbf{v}/Dt$  هر جزء سیال را توصیف می‌کند.

شکل ۳-۷.۳ شکل‌های سطح آزاد متوسط در درازمدت، با  $Re_{II} = Re_{I}$ .



سپس با استفاده از مقادیر مشخصه  $l_o = D$ ,  $v_o = ND$ ,  $P_o = P_{atm}$ ، همراه با مختصات قطبی بدون بُعد  $\check{z} = z/D$ ،  $\check{r} = r/D$ ،  $\theta$ ، این معادلات را بدون بُعد می‌کنیم. در نتیجه معادله‌های پیوستگی و حرکت، به صورت معادله‌های (۸-۷.۳) و (۹-۷.۳)، با  $Re = D^2 N \rho / \mu$  ظاهر می‌شوند. شرط اولیه شکل زیر را پیدا می‌کند:

$$\check{t} = 0 \text{ در } \check{z} < \left[ \left[ \frac{H}{D} \right] \right] \text{ و } \check{r} < \left[ \left[ \frac{R}{D} \right] \right] \text{ داریم } \check{v} = 0 \quad (۳۱-۷.۳)$$

و شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$\check{v} = 0 \text{ در } \check{z} = 0 \text{ و } \check{r} < \left[ \left[ \frac{R}{D} \right] \right] \text{ داریم } \check{v} = 0 \quad (۳۲-۷.۳)$$

$$\check{v} = 0 \text{ در } \check{r} = \left[ \left[ \frac{R}{D} \right] \right] \text{ داریم } \check{v} = 0 \quad (۳۳-۷.۳)$$

$$\check{v} = 2\pi\check{r}\delta\theta \text{ در } \check{S}_{imp}(\check{r}, \theta - 2\pi\check{t}, \check{z}) = 0 \text{ داریم} \quad (۳۴-۷.۳)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \check{v}) = 0 \text{ در } \check{S}_{int}(\check{r}, \theta, \check{z}, \check{t}) = 0 \text{ داریم} \quad (۳۵-۷.۳)$$

$$\mathbf{n}\check{p} - \mathbf{n} \left[ \left[ \frac{g}{DN^2} \right] \right] \check{z} - \left[ \left[ \frac{\mu}{D^2 N \rho} \right] \right] [\mathbf{n} \cdot \check{\gamma}] = 0 \quad (۳۶-۷.۳)$$

در رسیدن از معادله (۳۰-۷.۳) به معادله (۳۶-۷.۳) از قانون ویسکوزیته نیوتون به صورت معادله (۷-۲.۱) (اما بدون حذف جمله آخر، که برای مایعات تراکم‌ناپذیر انجام می‌شود) استفاده کرده‌ایم. به علاوه از اختصار  $\check{\gamma} = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\dagger}$  استفاده کردیم. به علاوه از اختصار  $\check{\gamma} = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\dagger}$  استفاده کردیم. به علاوه از اختصار  $\check{\gamma} = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\dagger}$  استفاده کردیم. به علاوه از اختصار  $\check{\gamma} = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\dagger}$  استفاده کردیم. به علاوه از اختصار  $\check{\gamma} = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\dagger}$  استفاده کردیم. به علاوه از اختصار  $\check{\gamma} = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\dagger}$  استفاده کردیم.

به جای تانسور آهنگ تغییر شکل استفاده کرده‌ایم که مؤلفه‌های دکارتی بدون بُعد آن عبارت‌اند از:

$$\check{\gamma} = (\partial\check{v}_j/\partial\check{x}_i) + (\partial\check{v}_i/\partial\check{x}_j)$$

کمیت‌های داخل کروشه مضاعف را کمیت‌های بدون بُعد می‌نامند. تابع  $\check{S}_{imp}(\check{r}, \theta, -2\pi N \check{t}, \check{z})$  برای پروانه با طرح مفروض، معلوم است. تابع مجهول  $\check{S}_{int}(\check{r}, \theta, \check{z}, \check{t})$  را می‌توان با عکس برداری تعیین کرد، یا اصولاً از صورت مسئله قابل محاسبه است. با بررسی این معادلات بدون بُعد، درمی‌یابیم که توزیع‌های سرعت و فشار، برای شکل و موقعیت مفروض پروانه، باید به صورت زیر باشند:

$$\check{v} = \check{v} \left( \check{r}, \theta, \check{z}, \check{t}; \frac{R}{D}, \frac{H}{D}, Re, Fr \right) \quad \check{p} = \check{p} \left( \check{r}, \theta, \check{z}, \check{t}; \frac{R}{D}, \frac{H}{D}, Re, Fr \right) \quad (۳۸, ۳۷-۷.۳)$$

مکان هندسی متناظر سطح آزاد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\check{S}_{\text{int}} = \check{S}_{\text{int}} \left( \check{r}, \theta, \check{z}, \check{t}; \frac{R}{D}, \frac{H}{D}, \text{Re}, \text{Fr} \right) = 0 \quad (39-7.3)$$

که در آن  $\text{Re} = D^2 N \rho / \mu$  و  $\text{Fr} = DN^2 / g$ . برای مشاهدات تجربی هموار شده نسبت به زمان، در صورت بزرگ بودن  $\check{t}$ ، وابستگی به  $\check{t}$  منتفی می‌شود؛ درست همان‌طور که در این مسئله مربوط به مخزن با تقارن محوری، وابستگی به  $\theta$  از بین می‌رود.

این نتایج شرط‌های لازم برای آزمایش مدل پیشنهادی را فراهم می‌کنند: دو سیستم باید (۱) تشابه هندسی داشته باشند (مقادیر  $R/D$  و  $H/D$  یکسان، شکل هندسی، و موقعیت پروانه یکسان)، و (۲) در مقادیر یکسان اعداد رینولدز و فرود عمل کنند. شرط (۲) ایجاب می‌کند که:

$$\frac{D_I^2 N_I}{\nu_I} = \frac{D_{II}^2 N_{II}}{\nu_{II}} \quad \frac{D_I N_I^2}{g_I} = \frac{D_{II} N_{II}^2}{g_{II}} \quad (41, 40-7.3)$$

که در آن از ویسکوزیته سینماتیکی  $\nu = \mu / \rho$  استفاده می‌شود. معمولاً هردو مخزن در یک میدان گرانشی کار می‌کنند  $g_I = g_{II}$ ، بنابراین معادله (۴۱-۷.۳) ایجاب می‌کند که:

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \left( \frac{D_I}{D_{II}} \right)^{1/2} \quad (42-7.3)$$

با قرار دادن در معادله (۴۰-۷.۳) شرط زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\nu_{II}}{\nu_I} = \left( \frac{D_{II}}{D_I} \right)^{3/2} \quad (43-7.3)$$

این نتیجه مهمی است؛ مخزن کوچک‌تر (II) باید سیالی با ویسکوزیته کم‌تر داشته باشد تا تشابه دینامیکی حفظ شود. مثلاً اگر از مدل مقیاس‌داری با  $D_{II} = \frac{1}{4} D_I$  استفاده کنیم، آنگاه باید در آزمایش با مقیاس کوچک از سیالی با ویسکوزیته دینامیکی  $\nu_{II} = \nu_I / \sqrt{4}$  استفاده کنیم. آشکار است که شرایط تشابه دینامیکی در این‌جا، جدی‌تر از مثال قبل است، زیرا گروه بدون بُعد  $\text{Fr}$  اضافه شده است.

در بسیاری از موارد عملی، برای برقرار بودن معادله (۴۳-۷.۳) به مقادیر بسیار پایین و دست‌نیافتنی  $\nu_{II}$  نیاز است. در این صورت افزایش دقیق مقیاس براساس یک آزمایش مدل ممکن نیست. اما در بعضی موارد، ممکن است بدانیم که اثر یک یا چند گروه بدون بُعد کوچک است، یا براساس آزمایش روی سیستم‌های مشابه، بتوان آن‌ها را پیش‌بینی کرد؛ در چنین مواردی، افزایش مقیاس براساس یک آزمایش تنها، امکان‌پذیر است.<sup>۹</sup>

این مثال اهمیت شرایط مرزی در تحلیل ابعادی را نشان می‌دهد. در این‌جا عدد فرود فقط در شرط مرزی سطح آزاد، معادله (۳۶-۷.۳) پدیدار شد. ناتوانی در استفاده از این شرط به حذف قید معادله (۴۲-۷.۳) منتهی می‌شود و ممکن است انتخاب نامناسب  $\nu_{II} = \nu_I$  انجام شود. اگر کسی مرتکب چنین اشتباهی شود، با عدد رینولدز  $\text{Re}_{II} = \text{Re}_I$  عدد فرود در مخزن کوچک‌تر بسیار بزرگ خواهد شد و گردابه بسیار عمیق می‌شود که در شکل ۳-۷.۳ با خط چین نشان داده شده است.

۹. برای آشنایی با روش‌های افزایش مقیاس با تشابه دینامیکی ناقص، نگاه کنید به

مثال ۷.۳-۳

افت فشار برای جریان خزشی در لوله پر شده

نشان دهید که گرادیان محوری میانگین فشار اصلاح شده  $\mathcal{P}$  برای جریان خزشی با  $\rho$  و  $\mu$  ثابت، در لوله‌ای با شعاع  $R$  که طول  $D_p \gg L$  آن به‌طور یکنواخت با ذرات جامدی با اندازه مشخصه  $R \ll D_p$  پر شده، برابر است با:

$$\frac{\Delta\langle\mathcal{P}\rangle}{L} = \frac{\mu\langle v_z \rangle}{D_p^3} K \quad (\text{هندسی}) \quad (44-7.3)$$

در این‌جا علامت  $\langle \dots \rangle$  نشان‌دهنده مقدار متوسط در سطح مقطع لوله در طول پر شده  $L$  است و تابع (هندسی)  $K$  برای هندسه مفروض بستر (یعنی شکل و آرایش مفروض ذرات) ثابت است.

حل

$D_p$  را به‌عنوان طول مشخصه و  $\langle v_z \rangle$  را به‌عنوان سرعت مشخصه انتخاب می‌کنیم. سپس با استفاده از معادله‌های (۷.۳-۸) و (۷.۳-۹ب)، با  $\check{v} = \mathbf{v}/\langle v_z \rangle$  و  $\check{\mathcal{P}} = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)D_p/\mu\langle v_z \rangle$ ، همراه با شرط عدم لغزش روی سطوح جامد و اختلاف فشار اصلاح شده  $\Delta\langle\mathcal{P}\rangle = \langle\mathcal{P}_0\rangle - \langle\mathcal{P}_L\rangle$  حرکت بین‌نشینی سیال را تعیین می‌کنیم. جواب‌های  $\check{v}$  و  $\check{\mathcal{P}}$  در جریان خزشی ( $D_p\langle v_z \rangle\rho/\mu \rightarrow 0$ )، برای آرایش و شکل مفروض ذرات، فقط به  $\check{\alpha}$ ،  $\theta$ ، و  $\check{z}$  بستگی دارند. بنابراین گرادیان محوری میانگین:

$$\frac{D_p}{L} \int_0^{L/D_p} \left( -\frac{d\langle\check{\mathcal{P}}\rangle}{d\check{z}} \right) d\check{z} = \frac{D_p}{L} (\langle\check{\mathcal{P}}_0\rangle - \langle\check{\mathcal{P}}_L\rangle) \quad (45-7.3)$$

مادام که  $L$  و  $R$  نسبت به  $D_p$  خیلی بزرگ باشند، فقط به شکل هندسی بستر بستگی دارد. با قرار دادن عبارتی که پیش از این گفته شد به جای  $\check{\mathcal{P}}$ ، بلافاصله معادله (۷.۳-۴۴) را به‌دست می‌آوریم.

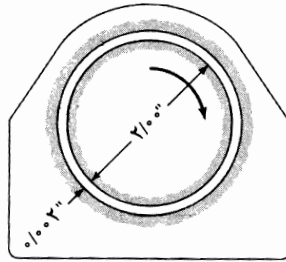
پرسش‌های تشریحی

۱. مفهوم فیزیکی جمله  $\Delta x \Delta y (\rho v_z)|_z$  در معادله (۷.۳-۲) چیست؟ مفهوم فیزیکی  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$  چیست؟ مفهوم فیزیکی  $(\nabla \cdot \rho \mathbf{v})$  چیست؟
۲. با استفاده از موازنه جرم روی جزء حجم  $(\Delta r)(r \Delta \theta)(\Delta z)$ ، معادله پیوستگی را در دستگاه مختصات استوانه‌ای به‌دست آورید.
۳. مفهوم فیزیکی جمله  $\Delta x \Delta y (\rho v_z v_z)|_z$  در معادله (۷.۳-۲) چیست؟ مفهوم فیزیکی  $[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}]$  چیست؟
۴. وقتی در معادله (۷.۳-۴)  $f$  برابر واحد قرار داده شود، چه اتفاقی می‌افتد؟
۵. کاربرد معادله (ب) در جدول ۷.۳-۱ به سیالاتی با چگالی ثابت محدود نمی‌شود، هرچند  $\rho$  درست چپ مشتق مادی است. علت را توضیح دهید.
۶. در مسئله جریان حلقوی مماسی در مثال ۷.۳-۳، آیا انتظار دارید که توزیع سرعت نسبت به استوانه داخلی در دو وضعیت زیر یکسان باشد: (۱) استوانه داخلی ثابت باشد و استوانه خارجی با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  بچرخد؛ (۲) استوانه خارجی ثابت باشد و استوانه داخلی با سرعت زاویه‌ای  $-\Omega$  بچرخد؛ هر دو جریان آرام و پایدار فرض می‌شوند.

۷. فرض کنید که در مثال ۳-۶، دو مایع امتزاج‌ناپذیر در بشر چرخان قرار دارند. فصل مشترک بین دو ناحیه مایع چه شکلی دارد؟
۸. آیا سیستم تشریح شده در مثال ۳-۵ به عنوان ویسکوزیته‌سنج قابل استفاده است؟
۹. در معادله (۳-۵)، با استفاده از نموداری دقیق، انتخاب حدود انتگرال‌گیری و مفهوم هر عامل در نخستین انتگرال ده را توضیح دهید.
۱۰. در طراحی مخزن مخلوط‌کن برای استفاده روی کره ماه، چه عواملی را باید در نظر گرفت؟ از داده‌های مربوط به مخزنی مشابه روی کره زمین استفاده کنید.

### مسئله‌ها

۱. الف ۳ گشتاور لازم برای چرخش یاتاقان اصطکاکی (شکل ۳ الف ۱). مطلوب است محاسبه گشتاور لازم بر حسب  $\text{lb}_f \cdot \text{ft}$  و توان مصرفی بر حسب اسب بخار برای چرخاندن محور در یاتاقان اصطکاکی نشان داده شده در شکل. طول سطح تکیه‌گاهی روی محور ۲ in است و محور با سرعت  $200 \text{ rpm}$  می‌چرخد. ویسکوزیته ماده روانکار  $200 \text{ cp}$  و چگالی آن  $50 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$  است. از اثر گریز از مرکز چشم‌پوشی کنید.
- جواب:  $0.012 \text{ hp} = 0.009 \text{ kW}$ ;  $0.32 \text{ lb}_f \cdot \text{ft}$



شکل ۳ الف ۱. یاتاقان اصطکاکی.

۲. الف ۳ اتلاف اصطکاکی در یاتاقان‌ها<sup>۱</sup> هر یک از دو پروانه یک کشتی بزرگ موتوری توسط موتوری با توان  $4000 \text{ hp}$  به چرخش درمی‌آید. قطر محوری که موتور و پروانه را با هم مرتبط می‌کند  $16 \text{ in}$  است و روی تعدادی یاتاقان بوشی، با لقی  $0.005 \text{ in}$ ، تکیه دارد. محور با سرعت  $50 \text{ rpm}$  می‌چرخد، ویسکوزیته روانکار  $5000 \text{ cp}$ ، تعداد یاتاقان‌ها ۲۰ عدد، و طول هر یاتاقان  $1 \text{ ft}$  است. کسری از توان موتور را که برای چرخاندن محور در این یاتاقان‌ها مصرف می‌شود، تخمین بزنید. از اثر گریز از مرکز چشم‌پوشی کنید.
- جواب:  $0.115$ .

۳. الف ۳ اثر ارتفاع بر فشار هوا. وقتی در مصب اونتوناگون در ساحل جنوبی دریاچه سوپریور (با ارتفاع  $602 \text{ ft}$  از سطح میانگین دریا) ایستاده‌اید، جوسنج سیار شما فشار  $750 \text{ mm Hg}$  را نشان می‌دهد. با استفاده از معادله حرکت، فشار نسبی جو را بفرزاق قلّه گاورمنت (به ارتفاع  $2023 \text{ ft}$  از سطح میانگین دریا) در نزدیکی رشته کوه پورکوپین، تخمین بزنید. فرض کنید دما در سطح دریاچه  $70^\circ \text{F}$  است و با افزایش ارتفاع، با آهنگ ثابت  $3^\circ \text{F}$  در هر  $1000 \text{ ft}$  کاهش می‌یابد. شتاب گرانش در ساحل جنوبی دریاچه سوپریور حدود  $32.19 \text{ ft/s}^2$  است و در این مسئله می‌توان از تغییرات شتاب گرانش با ارتفاع چشم‌پوشی کرد.
- جواب:  $9.49 \times 10^4 \text{ N/m}^2 = 713 \text{ mm Hg}$ ، هرگاه  $(\rho = \rho(p))$ .

۱. پروفیسور ای. جی. کراسبی از دانشگاه ویسکانسین در این مسئله سهم دارد.

۳الف ۴. تعیین ویسکوزیته با استفاده از ویسکوزیته‌سنج استوانه‌ای چرخان. می‌خواهیم با استفاده از ویسکوزیته‌سنج استوانه‌ای چرخان، مانند آن‌که در شکل ۳-۶ نشان داده شده‌است، ویسکوزیتهٔ محلول‌های ساکاروز با غلظت وزنی حدود ۶۰٪ را در دمایی حدود ۲۰°C تعیین کنیم. این اسباب یک استوانهٔ داخلی به قطر ۴/۰۰۰ cm دارد که توسط استوانهٔ هم‌مرکزی به قطر ۴/۵۰۰ cm احاطه شده‌است. طول  $L = ۴/۰۰۰$  cm ویسکوزیتهٔ محلول ساکاروز ۶۰٪ در دمای ۲۰°C در حدود ۵۷ cp و چگالی آن حدود  $۱/۲۹$  g/cm<sup>۳</sup> است.

براساس تجربهٔ قبلی ممکن است آثار انتهایی مهم باشند، و بنابراین تصمیم می‌گیریم ویسکوزیته‌سنج را، با اندازه‌گیری چند محلول شناخته‌شده، که ویسکوزیتهٔ آن‌ها در حدود ویسکوزیتهٔ محلول‌های مجهول است، کالیبره کنیم.

مقداری معقول برای گشتاوری که باید در هنگام کالیبره‌سازی وارد کرد تعیین کنید. هرگاه اندازه‌گیری‌های گشتاور تا حدود ۱۰۰ dyne/cm قابل‌اعتماد باشند و بتوان سرعت زاویه‌ای را با دقت ۵٪ اندازه‌گیری کرد، سرعت زاویه‌ای برابری چه قدر خواهد بود؟

۳الف ۵. ساخت آینهٔ سهموی. پیشنهاد شده‌است که با چرخاندن ظرفی از رزین پلاستیک کُندگیر، با سرعت ثابت تا هنگام سخت شدن، پشت‌بندی برای یک آینهٔ سهموی بسازیم (شکل ۳-۶ را ببینید). مطلوب است محاسبهٔ سرعت چرخشی لازم برای تولید آینه‌ای با فاصلهٔ کانونی  $f = ۱۰۰$  cm. فاصلهٔ کانونی برابر نصف شعاع انحنا در این محور است که به‌نوبهٔ خود از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$r_c = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{3/2} \left( \frac{d^2z}{dr^2} \right)^{-1} \quad (۳الف-۱)$$

جواب: ۲۱۸ rpm.

۳الف ۶. افزایش مقیاس مخزن هم‌خورده. قصد داریم از آزمایش مخزن هم‌خورده با مقیاس کوچک برای طراحی تأسیساتی مشابه ازلحاظ هندسی، با ابعاد خطی ۱۰ برابر، استفاده کنیم. سیال مخزن بزرگ روغن سنگین با  $\mu = ۱۳/۵$  cp و  $\rho = ۰/۹$  g/cm<sup>۳</sup> خواهد بود. سرعت همزن مخزن بزرگ ۱۲۰ rpm است.

(الف) مطلوب است تعیین سرعت برای مدل کوچک، براساس معیارهای افزایش مقیاس که در مثال ۳-۷ ارائه شد.

(ب) مطلوب است تعیین دمای عملیاتی مدل، هرگاه از آب به‌عنوان سیال هم‌خورده استفاده شود.

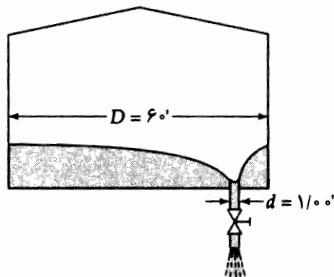
جواب: (الف) ۳۸۰ rpm؛ (ب) ۶۰°C.

۳الف ۷. حبس شدن هوا در مخزن در حال تخلیه (شکل ۳الف-۷). می‌خواهیم یک مخزن ذخیره‌سازی ملاس به قطر ۶۰ ft با لولهٔ برداشتی به قطر ۱ ft، به‌فاصلهٔ ۴ ft از دیوارهٔ مخزن، و ۱ ft در راستای عمودی بالاتر از کف مخزن بسازیم. تجربه نشان داده‌است که وقتی ملاس از مخزن برداشت می‌شود، گردابه‌ای تشکیل می‌شود و با پایین رفتن سطح مایع، این گردابه سرانجام به لولهٔ برداشت می‌رسد و در نتیجه هوا به داخل ملاس مکیده می‌شود. از این پدیده باید اجتناب کرد.

پیشنهاد می‌شود که با استفاده از مدلی به‌صورت یک مخزن کوچک‌تر و با فرض آهنگ برداشت  $۸۰$  gal/min حداقل سطح مایعی که می‌تواند از بروز این پدیده جلوگیری کند، پیش‌بینی شود. برای سهولت کار، در بررسی روی مدل، به‌جای ملاس از آب با دمای  $۶۸^\circ\text{F}$  استفاده می‌شود.



مطلوب است تعیین ابعاد مناسب برای مخزن مدل و شرایط کاری آن، هرگاه چگالی ملاس  $1/286 \text{ g/cm}^3$  و ویسکوزیته آن  $56/7 \text{ cp}$  باشد. می‌توان فرض کرد که چه در مخزن اصلی و چه در مخزن مدل، شکل گردابه فقط به مقدار مایع باقی مانده در مخزن و آهنک برداشت وابسته است؛ یعنی گردابه به سرعت شکل خود را تثبیت می‌کند.



شکل ۳ الف ۷. تخلیه مخزن ملاس.

۱.۳ جریان بین استوانه‌های هم‌محور و کره‌های هم‌مرکز.

(الف) فضای بین دو استوانه هم‌محور با سیالی تراکم‌ناپذیر در دمای ثابت پر می‌شود. شعاع‌های سطوح ترشده داخلی و خارجی، به ترتیب،  $\kappa R$  و  $R$  و سرعت‌های زاویه‌ای چرخش استوانه‌های داخلی و خارجی  $\Omega_o$  و  $\Omega_i$  هستند. مطلوب است تعیین توزیع سرعت در سیال و گشتاورهایی که سیال بر دو استوانه وارد می‌کند تا حرکت برقرار بماند.

(ب) قسمت (الف) را برای دو کره هم‌مرکز تکرار کنید.

جواب:

$$v_\theta = \frac{\kappa R}{1 - \kappa^2} \left[ (\Omega_o - \Omega_i \kappa^2) \left( \frac{r}{\kappa R} \right) + (\Omega_i - \Omega_o) \left( \frac{\kappa R}{r} \right) \right] \quad (\text{الف})$$

$$v_\phi = \frac{\kappa R}{1 - \kappa^2} \left[ (\Omega_o - \Omega_i \kappa^2) \left( \frac{r}{\kappa R} \right) + (\Omega_i - \Omega_o) \left( \frac{\kappa R}{r} \right)^2 \right] \sin \theta \quad (\text{ب})$$

۲.۳ جریان آرام در مجرای مثلی (شکل ۳ ب ۲). در شکل ۳ ب ۲ (الف) نوعی مبادله‌کن گرما نشان داده شده است. برای تحلیل عملکرد چنین دستگاهی، باید جریان در مجرای با مقطع مثلث متساوی‌الساقین را تصور کنیم. با نصب دستگاه مختصات به صورت نشان داده شده در شکل ۳ ب ۲ (ب)، این کار آسان‌تر می‌شود.

(الف) نشان دهید که توزیع سرعت برای جریان آرام سیال نیوتونی در مجرای از این نوع از رابطه زیر به دست می‌آید:

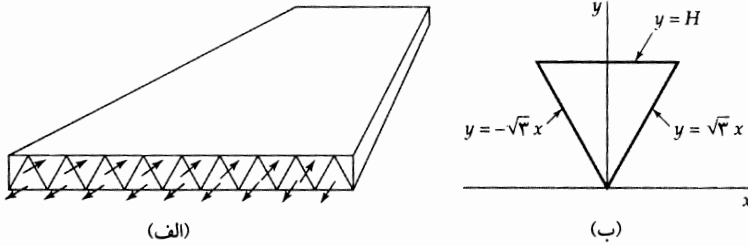
$$v_z = \frac{(P_o - P_L)}{4\mu LH} (y - H)(3x^2 - y^2) \quad (1-2.3)$$

(ب) با استفاده از معادله (۱-۲.۳) سرعت متوسط، سرعت ماکزیمم، و آهنک جریان جرمی را بیابید.

جواب‌ها: (ب)

$$\langle v_z \rangle = \frac{(P_o - P_L)H^2}{60\mu L} = \frac{4}{30} v_{z,\max}; \quad w = \frac{\sqrt{3}(P_o - P_L)H^2 \rho}{180\mu L}$$

۲. فرمول‌بندی دیگری برای توزیع سرعت در منبع زیر آمده است:



شکل ۳.۲ (الف) جزئی از مبادله‌کن گرما، که مجراهای با مقطع مثلثی را نشان می‌دهد؛ (ب) دستگاه مختصات مورد استفاده برای مجرا با مقطع مثلث متساوی‌الساقین.

۳.۳ جریان آرام در مجرای مربعی.

(الف) مجرای مستقیمی در امتداد  $z$  به طول  $L$  با مقطع مربعی مفروض است که مرزهای آن را خطوط  $x = \pm B$  و  $y = \pm B$  تشکیل می‌دهد. همکاری به شما گفته‌است که توزیع سرعت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{x}{B} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{y}{B} \right)^2 \right] \quad (۱-۳.۳)$$

چون این همکار گاهی در گذشته توصیه‌های نادرست کرده‌است، خود را موظف می‌دانید که نتیجه را بررسی کنید. آیا این نتیجه در شرایط مرزی و معادله دیفرانسیل مربوطه صدق می‌کند؟

(ب) طبق مقاله برکر<sup>۳</sup>، آهنگ جریان جرمی در مجرای مربعی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$w = \frac{0.۵۶۳(P_0 - P_L)B^2 \rho}{\mu L} \quad (۲-۳.۳)$$

ضریب این عبارت را با ضریبی که از معادله (۳.۱-۳) به دست می‌آید، مقایسه کنید.

۴.۳ جریان خزشی بین دو کره هم‌مرکز (شکل ۳.۴). یک سیال نیوتونی بسیار ویسکوز، مطابق شکل در فضای بین دو کره هم‌مرکز جریان دارد. می‌خواهیم آهنگ جریان در این سیستم را به صورت تابعی از اختلاف فشار اعمال شده به دست آوریم. از آثار انتهایی چشم‌پوشی کنید و فرض کنید  $v_\theta$  فقط به  $r$  و  $\theta$  بستگی دارد و سایر مؤلفه‌های سرعت صفرند.

(الف) با استفاده از معادله پیوستگی، نشان دهید که  $v_\theta \sin \theta = u(r)$  و در آن  $u(r)$  تابع  $r$  است که باید تعیین شود.

(ب) مؤلفه  $\theta$  معادله حرکت این سیستم را بنویسید؛ فرض کنید جریان به اندازه کافی آهسته هست که بتوان از جمله  $[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}]$  چشم‌پوشی کرد. نشان دهید که نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) \right] \quad (۱-۴.۳)$$

۳. برای آشنایی با جریان آرام در مقاطع غیردایره‌ای، نگاه کنید به

(ج) این نتیجه را به دو معادله جداسازی کنید:

$$\sin \theta \frac{dP}{d\theta} = B; \quad \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = B \quad (۳.۲-۴.۳)$$

که در آن  $B$  ثابت جداسازی است و دو معادله را حل کنید تا نتیجه زیر به دست آید:

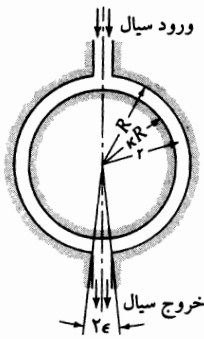
$$B = \frac{P_1 - P_2}{2 \ln \cot \frac{\theta}{2}} \epsilon \quad (۴.۴.۳)$$

$$u(r) = \frac{(P_1 - P_2)R}{4\mu \ln \cot(\epsilon/2)} \left[ \left(1 - \frac{r}{R}\right) + \kappa \left(1 - \frac{R}{r}\right) \right] \quad (۵.۴.۳)$$

که در آن  $P_1$  و  $P_2$  مقادیر فشار اصلاح شده، به ترتیب، در  $\theta = \epsilon$  و  $\theta = \pi - \epsilon$  است.

(د) از نتایج بالا برای به دست آوردن آهنگ جریان جرمی زیر استفاده کنید:

$$w = \frac{\pi(P_1 - P_2)R^2(1 - \kappa)^2 \rho}{12\mu \ln \cot(\epsilon/2)} \quad (۶.۴.۳)$$



شکل ۴.۳. جریان خزشی در ناحیه بین دو کره هم‌مرکز ساکن.

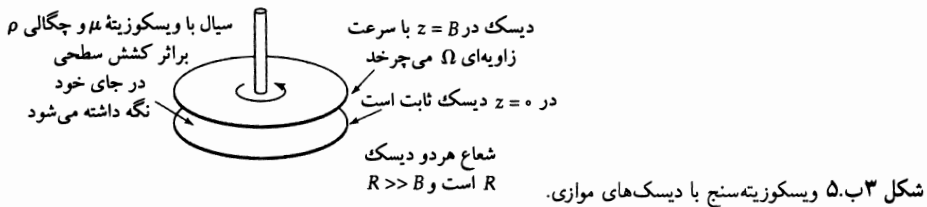
۵.۳. ویسکوزیته‌سنج با دیسک‌های موازی (شکل ۵.۳). سیالی که اندازه‌گیری ویسکوزیته آن در نظر است، در شکافی به ضخامت  $B$  بین دو دیسک به شعاع  $R$  قرار داده می‌شود. گشتاور  $T_z$  لازم برای چرخاندن دیسک بالایی با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  اندازه‌گیری می‌شود. فرمولی برای به دست آوردن ویسکوزیته از نتایج این اندازه‌گیری‌ها بیابید. جریان را خزشی فرض کنید.

(الف) فرض کنید به‌ازای مقادیر کوچک  $\Omega$  توزیع سرعت به صورت  $v_\theta = r f(z)$  و  $v_z = 0$ ،  $v_r = 0$  است، چرا این صورت برای جمله‌های مماسی معقول به نظر می‌رسد؟ فرض کنید  $P = P(r, z)$  معادله‌های ساده‌شده پیوستگی و حرکت حاصل را بنویسید.

(ب) با استفاده از مؤلفه  $\theta$  معادله حرکت، معادله دیفرانسیلی برای  $f(z)$  به دست آورید. این معادله را برحسب  $f(z)$  حل کنید و ثابت‌های انتگرال‌گیری را محاسبه کنید. سرانجام نتیجه  $v_\theta = \Omega r(z/B)$  حاصل می‌شود. آیا می‌توانستید این نتیجه را حدس بزنید؟

(ج) نشان دهید که معادله کاری مطلوب برای تعیین ویسکوزیته عبارت است از:  $\mu = 2BT_z / \pi \Omega R^2$ .

(د) مزایا و معایب این اسباب اندازه‌گیری را شرح دهید.



شکل ۳.۵. ویسکوزیته‌سنج با دیسک‌های موازی.

۶.۳. جریان محوری گردشی در حلقه (شکل ۳.۶). میله‌ای به شعاع  $\kappa R$ ، در ظرفی استوانه‌ای با شعاع داخلی  $R$ ، حاوی یک مایع نیوتونی، با سرعت ثابت  $v_0$  به طرف بالا حرکت می‌کند، مایع در استوانه گردش می‌کند و در طول میله مرکزی متحرک بالا می‌رود، و در طول جدار ثابت مخزن پایین می‌آید. مطلوب است تعیین توزیع سرعت در ناحیه حلقوی، دور از اختلالات انتهایی. جریان‌های مشابه در وسایل درزبندی بعضی از ماشین‌آلات رفت و برگشتی - مثلاً در فضای حلقوی بین رینگ‌های پیستون - مشاهده می‌شود.

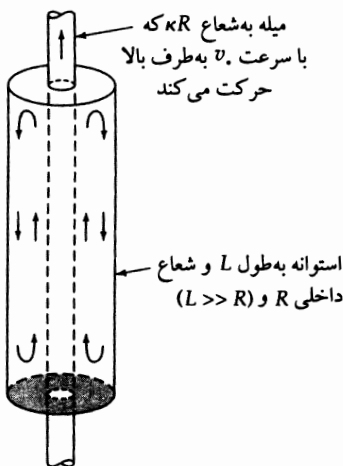
(الف) ابتدا مسئله‌ای را در نظر بگیرید که در آن ناحیه حلقوی نسبتاً باریک است؛ یعنی جایی که  $\kappa$  فقط کمی از واحد کوچک‌تر است. در این حالت حلقه را می‌توان با یک شکاف صفحه‌ای نازک تقریب زد و از انحنای آن صرف‌نظر کرد. نشان دهید که در این حد، توزیع سرعت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{v_z}{v_0} = 3 \left( \frac{\xi - \kappa}{1 - \kappa} \right)^2 - 4 \left( \frac{\xi - \kappa}{1 - \kappa} \right) + 1 \quad (۳.۶-۱)$$

که در آن  $\xi = r/R$ .

(ب) سپس این مسئله را بدون استفاده از تقریب شکاف نازک حل کنید. نشان دهید که توزیع سرعت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{v_z}{v_0} = \frac{(1 - \xi^2) \left( 1 - \frac{2\kappa^2}{1 - \kappa^2} \ln \frac{1}{\kappa} \right) - (1 - \kappa^2) \ln \frac{1}{\xi}}{(1 - \kappa^2) - (1 + \kappa^2) \ln \frac{1}{\kappa}} \quad (۳.۶-۲)$$



شکل ۳.۶. جریان گردشی ایجادشده توسط میله‌ای که در یک ناحیه بسته حلقوی، حرکت محوری دارد.

۷.۳. شارهای اندازه حرکت برای جریان خزشی در شکاف (شکل ۷.۳.۷). یک مایع نیوتونی تراکم‌ناپذیر با سرعت بسیار کم به داخل شکافی به ضخامت  $2B$  (درامتداد  $y$ ) و عرض  $W$  (درامتداد  $z$ ) جاری می‌شود. آهنگ جریان جرمی در شکاف  $w$  است. با استفاده از نتایج مسئله ۲.۳، می‌توان نشان داد که توزیع سرعت در داخل شکاف، در محل‌هایی که به ورودی خیلی نزدیک نباشند، برابر است با:

$$v_x = \frac{3w}{4BW\rho} \left[ 1 - \left( \frac{y}{B} \right)^2 \right] \quad v_y = 0, v_z = 0 \quad (1-7.3)$$

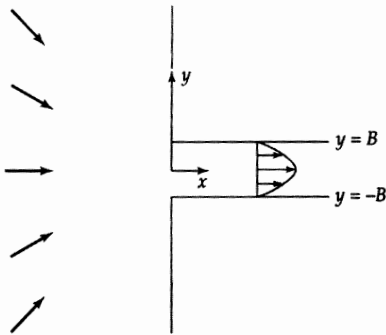
در ناحیه بیرون شکاف، مؤلفه‌های جریان خزشی عبارت‌اند از:

$$v_x = -\frac{2w}{\pi W\rho} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2-7.3)$$

$$v_y = -\frac{2w}{\pi W\rho} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (3-7.3)$$

$$v_z = 0 \quad (4-7.3)$$

معادله‌های (۱.۷.۳ تا ۴) در نزدیکی ورودی شکاف، به‌ازای  $x \geq 0$  و  $x \leq 0$ ، صرفاً تقریبی‌اند.



شکل ۷.۳. جریان مایع به داخل شکاف، از ناحیه نیمه‌نامتناهی  $x < 0$ .

(الف) مؤلفه‌های شار اندازه حرکت  $\rho v v$  را در داخل و خارج شکاف بیابید.

(ب) مؤلفه  $xx$  شار  $\rho v v$  را در  $x = -a$  و  $y = 0$  تعیین کنید.

(ج) مؤلفه  $xy$  شار  $\rho v v$  را در  $x = -a$  و  $y = +a$  تعیین کنید.

(د) آیا جریان کل انرژی جنبشی در صفحه  $x = -a$  با جریان کل انرژی جنبشی در شکاف برابر است؟

(ه) نشان دهید که توزیع سرعت داده شده در معادله‌های (۱.۷.۳ تا ۴) در رابطه  $(\nabla \cdot v) = 0$  صدق می‌کند.

(و) تنش قائم  $\tau_{xx}$  را در صفحه  $y = 0$  و هم‌چنین روی سطح جامد در  $x = 0$  به دست آورید.

(ز) تنش برشی  $\tau_{yx}$  را روی سطح جامد، در  $x = 0$  به دست آورید. آیا این نتیجه تعجب‌برانگیز است؟

آیا ترسیم توزیع سرعت  $v_y$  برحسب  $x$  در صفحه‌ای مانند  $y = a$  به درک نتیجه کمک می‌کند؟

۸.۳. توزیع سرعت برای جریان خزشی به طرف شکاف (شکل ۷.۳.۸).<sup>۴</sup> می‌خواهیم توزیع سرعت را در ناحیه بالادستی مسئله قبل به دست آوریم. فرض می‌کنیم که  $v_\theta = 0$ ،  $v_z = 0$ ،  $v_r = v_r(r, \theta)$ ، و  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(r, \theta)$ .

<sup>۴</sup>. برگرفته از

(الف) نشان دهید که از معادلهٔ پیوستگی در مختصات استوانه‌ای نتیجه می‌شود  $v_r = f(\theta)/r$ ، که در آن  $f(\theta)$  تابعی از  $\theta$  است و به‌ازای آن  $df/d\theta = 0$  در  $\theta = 0$  و  $f = 0$  در  $\theta = \pi/2$  است.

(ب) مؤلفه‌های  $r$  و  $\theta$  معادلهٔ حرکت برای جریان خزشی را بنویسید و عبارت  $f(\theta)$  را از قسمت (الف) در آن قرار دهید.

(ج) از مؤلفهٔ  $r$  معادلهٔ حرکت، نسبت به  $\theta$  و از مؤلفهٔ  $\theta$  نسبت به  $r$  مشتق بگیرید. نشان دهید که از این مشتق‌گیری معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + 4 \frac{df}{d\theta} = 0 \quad (1-8.3)$$

(د) این معادلهٔ دیفرانسیل را حل کنید و عبارتی با سه ثابت انتگرال‌گیری برای  $f(\theta)$  به‌دست آورید.

(ه) با استفاده از دو شرط مرزی قسمت (الف) و این نکته که آهنگ جریان جرمی کل در هر سطح استوانه‌ای باید برابر  $w$  باشد، ثابت‌های انتگرال‌گیری را محاسبه کنید. نتیجه می‌شود:

$$v_r = -\frac{2w}{\pi W \rho r} \cos^2 \theta \quad (2-8.3)$$

(و) سپس از معادلهٔ حرکت در قسمت (ب)،  $P(r, \theta)$  را به‌صورت زیر نتیجه‌گیری کنید:

$$P(r, \theta) = P_\infty - \frac{2\mu w}{\pi W \rho r^2} \cos^2 \theta \quad (3-8.3)$$

معنای فیزیکی  $P_\infty$  چیست؟

(ز) نشان دهید که تنش قائم کل وارد بر سطح جامد در  $\theta = \pi/2$  برابر است با:

$$(p + \tau_{\theta\theta})|_{\theta=\pi/2} = p_\infty + \frac{2\mu w}{\pi W \rho r^2} \quad (4-8.3)$$

(ح) سپس  $\tau_{\theta r}$  را روی همین سطح جامد محاسبه کنید.

(ط) نشان دهید که توزیع سرعت به‌دست‌آمده در معادلهٔ (۲-۸.۳) هم‌ارز معادله‌های (۳-۷.۲ و ۳) است.

۹.۳ جریان عرضی آهسته در اطراف استوانه (نگاه کنید به شکل ۱-۷.۳). سیال نیوتونی تراکم‌ناپذیری با سرعت یکنواخت و پایای  $v_\infty$  در امتداد مثبت  $x$  به استوانهٔ ثابتی نزدیک می‌شود. وقتی معادله‌های تغییر برای جریان خزشی حل می‌شوند، عبارت‌های<sup>۵</sup> زیر برای فشار و سرعت، بلافاصله در مجاورت استوانه به‌دست می‌آیند (این عبارت‌ها در فواصل دور معتبر نیستند):

$$p(r, \theta) = p_\infty - C\mu \frac{v_\infty \cos \theta}{r} - \rho g r \sin \theta \quad (1-9.3)$$

$$v_r = Cv_\infty \left[ \frac{1}{4} \ln \left( \frac{r}{R} \right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \cos \theta \quad (2-9.3)$$

$$v_\theta = -Cv_\infty \left[ \frac{1}{4} \ln \left( \frac{r}{R} \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \sin \theta \quad (3-9.3)$$

5. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967), pp. 244-246, 261.

که در آن فشار در نواحی دور از استوانه، به ازای  $y = 0$  است:

$$C = \frac{\gamma}{\ln(\gamma/4 / Re)} \quad (۴-۹.۳)$$

و عدد رینولدز به صورت  $Re = \gamma R v_{\infty} \rho / \mu$  تعریف می‌شود.

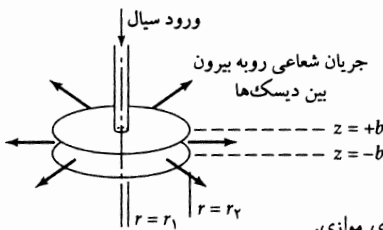
(الف) با استفاده از این نتایج، فشار  $p$ ، تنش برشی  $\tau_{r\theta}$ ، و تنش قائم  $\tau_{rr}$  را در سطح استوانه تعیین کنید.

(ب) نشان دهید که مؤلفه  $x$  نیرویی که مایع بر واحد سطح استوانه وارد می‌کند، برابر است با:

$$-p|_{r=R} \cos \theta + \tau_{r\theta}|_{r=R} \sin \theta \quad (۵-۹.۳)$$

(ج) نیروی  $F_x = \gamma C \pi L \mu v_{\infty}$  را که در امتداد  $x$  بر طول  $L$  استوانه وارد می‌شود، تعیین کنید.

۱۰.۳ جریان شعاعی بین دیسک‌های موازی (شکل ۱۰.۳.ب). بخشی از سیستم روانکاری از دو دیسک دایره‌ای تشکیل شده است که روانکار بین آن‌ها به صورت شعاعی جریان دارد. این جریان برقرار است، زیرا بین شعاع‌های داخلی و خارجی  $r_1$  و  $r_2$ ، اختلاف فشار اصلاح شده  $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2$  وجود دارد.



شکل ۱۰.۳.ب. جریان شعاعی روبه بیرون در فضای بین دو دیسک دایره‌ای موازی.

(الف) معادله‌های پیوستگی و حرکت را برای این سیستم جریان به دست آورید؛ جریان را حالت پایا، آرام، تراکم ناپذیر، و نیوتونی فرض کنید. فقط ناحیه  $r_1 \leq r \leq r_2$  و جریان در امتداد شعاعی را در نظر بگیرید.

(ب) نشان دهید که چگونه می‌توان با استفاده از معادله پیوستگی، معادله حرکت را ساده کرد و به نتیجه زیر رسید:

$$-\rho \frac{\phi^{\gamma}}{r^3} = -\frac{d\mathcal{P}}{dr} + \mu \frac{1}{r} \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (۱-۱۰.۳)$$

که در آن  $\phi = rv_r$  فقط تابع  $z$  است. چرا  $\phi$  از  $r$  مستقل است؟

(ج) می‌توان نشان داد که معادله (۱-۱۰.۳) جوابی ندارد، مگر جمله غیرخطی شامل  $\phi$  حذف شود.

حذف این جمله متناظر است با «فرض خزشی بودن جریان». نشان دهید که برای جریان خزشی،

می‌توان از معادله (۱-۱۰.۳) نسبت به  $r$  انتگرال‌گیری کرد تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$0 = (\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) + \left( \mu \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (۲-۱۰.۳)$$

(د) نشان دهید که از انتگرال‌گیری نسبت به  $z$  نتیجه می‌شود:

$$v_r(r, z) = \frac{(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) b^{\gamma}}{\gamma \mu r \ln(r_2/r_1)} \left[ 1 - \left( \frac{z}{b} \right)^{\gamma} \right] \quad (۳-۱۰.۳)$$

(ه) نشان دهید که آهنگ جریان جرمی برابر است با:

$$w = \frac{4\pi(P_1 - P_2)b^2\rho}{3\mu \ln(r^2/r_1)} \quad (۴-۱۰.ب۳)$$

(و) منحنی‌های  $\mathcal{P}(r)$  و  $v_r(r, z)$  را ترسیم کنید.

۱۱.ب۳ جریان شعاعی بین دو استوانه هم‌محور. سیالی تراکم‌ناپذیر را در دمای ثابت در نظر بگیرید که به صورت شعاعی بین دو پوسته استوانه‌ای متخلخل با شعاع‌های داخلی و خارجی  $R$  و  $\kappa R$  جریان دارد.

(الف) نشان دهید که معادله پیوستگی به  $v_r = C/r$  منتهی می‌شود که مقدار  $C$  در آن ثابت است.

(ب) مؤلفه‌های معادله حرکت را ساده کنید تا عبارت‌های زیر برای توزیع فشار اصلاح شده به دست آید:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho v_r \frac{dv_r}{dr} \quad \frac{dP}{d\theta} = 0 \quad \frac{dP}{dz} = 0 \quad (۱-۱۱.ب۳)$$

(ج) از عبارت  $dP/dr$  انتگرال بگیرید تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\mathcal{P}(r) - \mathcal{P}(R) = \frac{1}{4}\rho [v_r(R)]^2 \left[ 1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] \quad (۲-۱۱.ب۳)$$

(د) همه مؤلفه‌های غیرصفر  $\mathcal{T}$  را برای این جریان بنویسید.

(ه) مسئله کره‌های هم‌مرکز را تکرار کنید.

۱۲.ب۳ توزیع فشار در سیالات تراکم‌ناپذیر. پنه‌لویه کار خود را با بشری پر از مایع آغاز می‌کند که عملاً می‌توان آن را تراکم‌ناپذیر دانست؛ چگالی مایع را  $\rho_0$  می‌گیریم. پنه‌لویه به ما می‌گوید که سعی می‌کند بفهمد با افزایش عمق مایع، فشار در آن چگونه تغییر می‌کند. او مبدأ مختصات را در فصل مشترک مایع-هوا قرار داده به طوری که محور مثبت  $z$  به طرف دور از مایع است. او به ما می‌گوید:

«اگر معادله حرکت را برای مایع تراکم‌ناپذیر در حال سکون ساده کنم، نتیجه می‌شود  $0 = -dp/dz - \rho_0 g$  می‌توانم این معادله را حل کنم و عبارت  $p = p_{\text{atm}} - \rho_0 g z$  را به دست بیآورم. این جواب معقول به نظر می‌رسد؛ با افزایش عمق، فشار افزایش می‌یابد.

«اما، از طرف دیگر، معادله حالت برای هر سیال عبارت است از:  $p = p(\rho, T)$  و اگر سیستم در دمای ثابت باشد، این معادله به صورت  $p = p(\rho)$  ساده می‌شود چون سیال تراکم‌ناپذیر است،  $p = p(\rho_0)$  و  $p$  باید در سراسر سیال ثابت باشد! چگونه چنین چیزی ممکن است؟»  
 آشکار است که پنه‌لویه به کمک نیاز دارد. توضیح قانع‌کننده‌ای برای او پیدا کنید.

۱۳.ب۳ جریان سیال در تنگ‌شدگی ناگهانی.

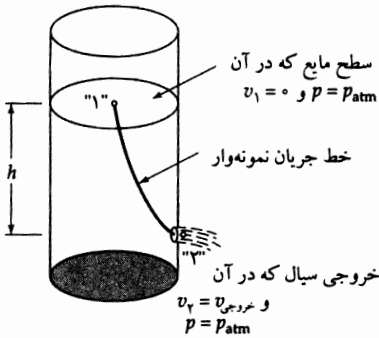
(الف) سیالی تراکم‌ناپذیر از یک تنگ‌شدگی ناگهانی عبور می‌کند و از لوله‌ای به قطر  $D_1$  به لوله‌ای به قطر کوچک‌تر  $D_2$  می‌رود. پیش‌بینی معادله برنولی برای  $P_1 - P_2$ ، اختلاف فشار بین فشارهای اصلاح شده در بالادست و پایین دست تنگ‌شدگی چیست؟ آیا این نتیجه با مشاهدات تجربی در توافق است؟

(ب) این عملیات را در مورد جریان افقی هم‌دمای گاز ایده‌آل در تنگ‌شدگی ناگهانی تکرار کنید.



۳.ب.۱۴ معادله تورپجلی برای شار خروجی از مخزن (شکل ۳.ب.۱۴). مخزن بزرگ سرگشاده‌ای تا ارتفاع  $h$  با مایعی پر می‌شود. در نزدیکی کف مخزن، سوراخی وجود دارد که به سیال امکان می‌دهد از مخزن بپریزاید. معادله برنولی را برای خط جریانی به‌کار ببندید که از سطح مایع در بالا، تا نقطه‌ای در جریان خروجی، درست بیرون از مخزن، امتداد دارد. نشان دهید که سرعت شار خروجی  $v = \sqrt{2gh}$  خروجی نتیجه می‌شود. این نتیجه را معادله تورپجلی می‌نامند.

برای به‌دست آوردن این نتیجه، باید از فرض تراکم‌ناپذیری استفاده کرد (که معمولاً برای اغلب مایعات معقول است)، و این‌که ارتفاع سطح سیال با زمان چنان آهسته تغییر می‌کند که می‌توان معادله برنولی را در هر لحظه از زمان به‌کار برد (فرض حالت شبه‌ایستا).



شکل ۳.ب.۱۴ سیالی که از مخزن تخلیه می‌شود. نقاط «۱» و «۲» روی یک خط جریان واقع‌اند.

۳.ب.۱۵ شکل سطح آزاد در جریان حلقوی مماسی.

(الف) مایعی در فضای حلقوی بین دو استوانه عمودی به شعاع‌های  $R$  و  $\kappa R$  واقع است و از بالا با جو تماس دارد. نشان دهید که وقتی استوانه داخلی با سرعت زاویه‌ای  $\Omega_i$  می‌چرخد و استوانه خارجی ثابت است، سطح آزاد مایع به شکل زیر است:

$$z_R - z = \frac{1}{2g} \left( \frac{\kappa^2 R \Omega_i}{1 - \kappa^2} \right)^2 (\xi^{-2} + 4 \ln \xi - \xi^2) \quad (۳.ب.۱۵-۱)$$

که در آن ارتفاع مایع در جدار استوانه خارجی و  $\xi = r/R$  است.

(ب) قسمت (الف) را تکرار کنید، اما این بار فرض کنید استوانه داخلی ثابت است و استوانه خارجی با سرعت زاویه‌ای  $\Omega_o$  می‌چرخد. نشان دهید که شکل سطح مایع از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$z_R - z = \frac{1}{2g} \left( \frac{\kappa^2 R \Omega_o}{1 - \kappa^2} \right)^2 [(\xi^{-2} - 1) + 4\kappa^{-2} \ln \xi - \kappa^{-2}(\xi^2 - 1)] \quad (۳.ب.۱۵-۲)$$

(ج) نموداری برای مقایسه شکل سطح مایع در این حالت ترسیم کنید.

۳.ب.۱۶ جریان در شکاف با جریان عرضی یکنواخت (شکل ۳.ب.۱۶). سیالی درامتداد مثبت  $x$  از یک مجرای تخت طویل به طول  $L$ ، عرض  $W$ ، و ضخامت  $B$  می‌گذرد و در آن  $L \gg W \gg B$  جدار مجراد در  $y = B$  و  $y = 0$  است، به طوری که جریان عرضی ثابتی برقرار می‌شود که در آن  $v_x = v$ ، در همه جا مقدار ثابتی است. جریان‌هایی از این نوع، در ارتباط با فرایندهای جداسازی با استفاده از اثر نفوذرویش، اهمیت دارند. با کنترل دقیق جریان عرضی، می‌توان غلظت اجزای درشت‌تر (مولکول‌ها، ذرات غبار، و غیره) را در نزدیکی جدار بالایی افزایش داد.

(الف) نشان دهید که توزیع سرعت برای این سیستم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v_x = \frac{(P_o - P_L)B^2}{\mu L} \frac{1}{A} \left( \frac{y}{B} - \frac{e^{Ay/B} - 1}{e^A - 1} \right) \quad (۱۶-۱۶.۳)$$

که در آن  $A = Bv_o \rho / \mu$  است.

(ب) نشان دهید که آهنگ جریان جرمی در امتداد  $x$  برابر است با:

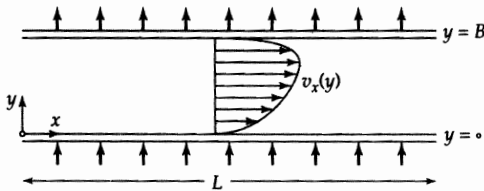
$$w = \frac{(P_o - P_L)B^2 W \rho}{\mu L} \frac{1}{A} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{A} + \frac{1}{e^A - 1} \right) \quad (۲-۱۶.۳)$$

(ج) نشان دهید که در حالت حدی، که جریان متقاطع وجود ندارد (یعنی  $A \rightarrow \infty$ )، نتایج بالا به نتایج مسئله (۲.۳) ساده می‌شوند.

(د) همکاری این مسئله را حل کرده، اما دستگاه مختصات را طوری انتخاب کرده که  $y = 0$  وسط شکاف است و جدارهای متخلخل در  $y = \pm b$  واقع است. او جواب زیر را برای قسمت (الف) پیدا کرده است:

$$\frac{v_x}{\langle v_x \rangle} = \frac{e^{\alpha \eta} - \eta \sinh \alpha - \cosh \alpha}{(\eta/\alpha) \sinh \alpha - \cosh \alpha} \quad (۳-۱۶.۳)$$

که در آن  $\alpha = bv_o \rho / \mu$  و  $\eta = y/b$ . آیا این نتیجه با معادله (۱۶-۱۶.۳) هم‌ارز است؟



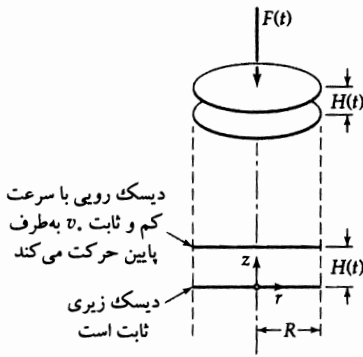
شکل ۱۶.۳ جریان در شکافی به طول  $L$ ، عرض  $W$ ، و ضخامت  $B$ . جدارهای واقع در  $y = 0$  و  $y = B$  متخلخل‌اند و جریانی از سیال در جهت  $y$ ، با سرعت یکنواخت  $v_o$  برقرار است.

۱۰.۳ ویسکوزیته‌سنج فشاری با دیسک‌های موازی.<sup>۶</sup> (شکل ۱۰.۳). سیالی ناحیه بین دو دیسک دایره‌ای به شعاع  $R$  را کاملاً پر می‌کند. دیسک زیری ثابت است و دیسک رویی با سرعت بسیار کم و ثابت  $v_o$ ، از ارتفاع  $H_o$  به آن نزدیک می‌شود و ( $H_o \ll R$ ). ارتفاع لحظه‌ای دیسک رویی  $H(t)$  است. مطلوب است تعیین نیروی لازم برای حفظ سرعت  $v_o$ .

این مسئله ذاتاً مسئله جریان حالت پایای پیچیده‌ای است. اما با انجام دو ساده‌سازی در معادله‌های تغییر، می‌توان جواب تقریبی خوبی به دست آورد: (۱) فرض می‌کنیم سرعت  $v_o$  به اندازه‌ای کم است که همه جمله‌های دارای مشتق زمانی را می‌توان حذف کرد؛ این همان فرض موسوم به «حالت شبه‌پایا» است؛ (۲) از این نکته که  $H_o \ll R$  استفاده می‌کنیم تا از چند جمله از معادله‌های تغییر، با استدلال مرتبه بزرگی، چشم‌پوشی کنیم. توجه کنید که آهنگ کاهش حجم سیال بین دیسک‌ها برابر  $\pi R^2 v_o$  است و این حجم باید با آهنگ جریان خروجی از بین دیسک‌ها یعنی  $-\pi R H \langle v_r \rangle|_{r=R}$  برابر باشد. بنابراین:

$$\langle v_r \rangle|_{r=R} = \frac{Rv_o}{2H(t)} \quad (۱-۱۰.۳)$$

6. J. R. Van Wazer, J. W. Lyons, K. Y. Kim, and R. E. Colwell, *Viscosity and Flow Measurement*, Wiley-Interscience, New York (1963), pp. 292-295.



شکل ۱۰-۳ ج ۱. جریان تراکمی در ویسکوزیته‌سنج تراکمی با دیسک‌های موازی.

اکنون استدلال می‌کنیم که  $v_r(r, z)$  از مرتبه بزرگی  $\langle v_r \rangle|_{r=R}$  و  $v_z(r, z)$  از مرتبه بزرگی  $v_0$  است، به طوری که:

$$v_r \approx (R/H)v_0; \quad v_z \approx -v_0. \quad (3-1-2)$$

و بنابراین  $|v_z| \ll v_r$ . اکنون می‌توان مرتبه بزرگی مشتق‌های مختلف را، به ترتیب زیر، تخمین زد: وقتی  $r$  از صفر به سمت  $R$  می‌رود، سرعت شعاعی  $v_r$  از صفر تقریباً به  $(R/H)v_0$  می‌رسد. با این نوع استدلال نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} \approx \frac{(R/H)v_0 - 0}{R - 0} = \frac{v_0}{H} \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} \approx \frac{(-v_0) - 0}{H - 0} = -\frac{v_0}{H}, \dots \quad (3-1-4)$$

(الف) براساس تحلیل مرتبه بزرگی که شرح داده شد، نشان دهید که معادله پیوستگی و مؤلفه  $r$  معادله حرکت چنین نوشته می‌شوند (از  $g_z$  چشم‌پوشی می‌کنیم):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3-1-6) \text{ پیوستگی}$$

$$0 = -\frac{dp}{dr} + \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (3-1-7) \text{ حرکت}$$

شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$v_r = 0 \text{ و } v_z = 0 \text{ در } z = 0 \text{ داریم} \quad (3-1-8) \text{ شرط مرزی ۱}$$

$$v_r = 0 \text{ و } v_z = -v_0 \text{ در } z = H(t) \text{ داریم} \quad (3-1-9) \text{ شرط مرزی ۲}$$

$$p = p_{\text{atm}} \text{ در } r = R \text{ داریم} \quad (3-1-10) \text{ شرط مرزی ۳}$$

(ب) از معادله‌های (۳-۱-۷ تا ۳-۱-۹) نتیجه می‌شود:

$$v_r = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dr} \right) z(z - H) \quad (3-1-11)$$

(ج) از معادله (۳-۱-۶) نسبت به  $z$  انتگرال بگیرید و نتیجه را در معادله (۳-۱-۱۱) قرار دهید تا حاصل شود:

$$v_0 = -\frac{H^2}{12\mu} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dp}{dr} \right) \quad (3-1-12)$$

(د) معادله (۳-۱-۱۲) را حل کنید و توزیع فشار را به دست بیاورید:

$$p = p_{\text{atm}} + \frac{3\mu v_0 R^2}{H^2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3-1-13)$$

(ه) از  $[(p + \tau_{zz}) - p_{atm}]$  روی سطح دیسک متحرک انتگرال بگیرید تا نیروی کل لازم برای تداوم حرکت دیسک به دست آید:

$$F(t) = \frac{3\pi\mu v \cdot R^2}{2[H(t)]^3} \quad (14-1.ج3)$$

از این نتیجه می‌توان برای تعیین ویسکوزیته، براساس اندازه‌گیری‌های نیرو و سرعت، استفاده کرد. (و) این تحلیل را برای ویسکوزیته‌سنجی که در آن کره‌ای مرکزی از مایع هرگز فضای بین دو صفحه را کاملاً پر نمی‌کند، تکرار کنید. حجم نمونه را  $V$  فرض کنید و رابطه‌ی زیر را به دست آورید:

$$F(t) = \frac{3\mu v \cdot V^2}{2\pi[H(t)]^5} \quad (15-1.ج3)$$

(ز) این تحلیل را برای ویسکوزیته‌سنجی که با نیروی ثابت  $F$  کار می‌کند، تکرار کنید. در این حالت ویسکوزیته با اندازه‌گیری  $H$  به صورت تابعی از زمان تعیین می‌شود و سرعت صفحه‌ی رویی ثابت نیست. نشان دهید که:

$$\frac{1}{[H(t)]^2} = \frac{1}{H_0^2} + \frac{4F \cdot t}{3\pi\mu R^2} \quad (16-1.ج3)$$

۲.ج۳ تنش‌های قائم در سطوح سیالات تراکم‌پذیر. مثال ۱-۱.۳ را به سیالات تراکم‌پذیر تعمیم دهید. نشان دهید که:

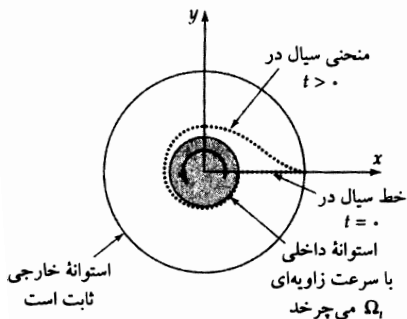
$$\tau_{zz}|_{z=0} = \left(\frac{4}{3}\mu + \kappa\right)(\partial \ln \rho / \partial t)|_{z=0} \quad (1-2.ج3)$$

در باره‌ی مفهوم فیزیکی این نتیجه بحث کنید.

۳.ج۳ تغییرشکل خط سیال (شکل ۳-ج۳). سیالی در فضای حلقوی بین دو استوانه به شعاع‌های  $R$  و  $\kappa R$  موجود است. استوانه داخلی را با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\Omega_i$  به چرخش درمی‌آوریم. خطی از ذرات سیال در صفحه‌ی  $z = 0$  در نظر بگیرید که از استوانه داخلی تا استوانه خارجی امتداد یافته و ابتدا در  $\theta = 0$  واقع و بر دو سطح عمود است. چگونه این خط تغییرشکل می‌دهد و به منحنی  $\theta(r, t)$  تبدیل می‌شود؟ طول  $l$  منحنی پس از  $N$  دور چرخش استوانه داخلی چه قدر است؟ از معادله (۳-۶.۳) استفاده کنید.

جواب:

$$\frac{l}{R} = \int_{\kappa}^1 \sqrt{1 + \frac{16\pi^2 N^2}{[(1/\kappa)^2 - 1]^2 \xi^2}} d\xi$$



شکل ۳-ج۳ تغییرشکل خط سیال در جریان کوئت.

ج.۴. روش‌های دیگر حل مسئله ویسکوزیته‌سنج کوئت با استفاده از مفهوم اندازه حرکت زاویه‌ای (شکل ۳-۶-۱).

(الف) با نوشتن موازنه لایه‌ای اندازه حرکت زاویه‌ای روی لایه نازکی به ضخامت  $\Delta r$ ، نشان دهید که

$$\frac{d}{dr}(r^2 \tau_{r\theta}) = 0 \quad (۳-۴-۱)$$

سپس به جای  $\tau_{r\theta}$ ، عبارت مناسب برحسب گرادیان مؤلفه مماسی سرعت قرار دهید. آن‌گاه معادله دیفرانسیل حاصل را با شرایط مرزی حل کنید تا معادله (۳-۶-۲) حاصل شود.

(ب) نحوه به دست آوردن معادله (۳-۴-۱) از معادله تغییر اندازه حرکت زاویه‌ای، معادله (۳-۴-۱)، را نشان دهید.

ج.۵. شرایط مرزی فصل مشترک دوفاز. در بخش ۱.۲ شرایط مرزی برای حل کردن مسئله‌های مختلف جریان گفته شد. در آن‌جا از نقش کشش فصل مشترکی چیزی گفته نشد. در فصل مشترک بین دو سیال امتزاج‌ناپذیر ۱ و ۲، می‌توان از شرط مرزی زیر استفاده کرد:<sup>۷</sup>

$$\mathbf{n}^I(p^I - p^{II}) + [\mathbf{n}^I \cdot (\boldsymbol{\tau}^I - \boldsymbol{\tau}^{II})] = \mathbf{n}^I \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sigma \quad (۳-۵-۱)$$

این شرط اساساً موازنه اندازه حرکت است که برای جزء فصل مشترکی  $dS$  که ماده‌ای از آن عبور نمی‌کند، و جرم یا ویسکوزیته فصل مشترکی ندارد، نوشته شده است. در این‌جا  $\mathbf{n}^I$  بردار یکه قائم بر  $dS$  و متوجه به سوی فاز ۱ است. کمیت‌های  $R_1$  و  $R_2$  شعاع‌های اصلی انحنا در  $dS$  است و هریک از آن‌ها مثبت خواهد بود، هرگاه مرکز آن در فاز ۱ واقع شود. مجموع  $(1/R_1) + (1/R_2)$  را نیز می‌توان به صورت  $(\nabla \cdot \mathbf{n}^I)$  بیان کرد. کمیت  $\sigma$  کشش فصل مشترکی است که ثابت فرض می‌شود.

(الف) نشان دهید که برای قطره کروی ۱ که در محیط دیگر ۲ ساکن است، معادله لاپلاس:

$$p^I - p^{II} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sigma \quad (۳-۵-۲)$$

فشارهای داخل و خارج قطره را به هم مربوط می‌کند. آیا فشار در فاز ۱ از فشار در فاز ۲ بیشتر است، یا برعکس؟ رابطه بین فشارها در فصل مشترک صفحه‌ای چیست؟

(ب) نشان دهید که معادله (۳-۵-۱) به شرط مرزی بدون بُعد زیر منتهی می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^I(\check{p}^I - \check{p}^{II}) + \mathbf{n}^I \left[ \left[ \frac{\rho^{II} - \rho^I}{\rho^I} \right] \right] \left[ \left[ \frac{gl}{v^I} \right] \right] \check{h} \\ - \left[ \left[ \frac{\mu^I}{l \cdot v \cdot \rho^I} \right] \right] [\mathbf{n}^I \cdot \check{\gamma}^I] + \left[ \left[ \frac{\mu^{II}}{l \cdot v \cdot \rho^{II}} \right] \right] [\mathbf{n}^I \cdot \check{\gamma}^{II}] \left[ \left[ \frac{\rho^{II}}{\rho^I} \right] \right] \\ = \mathbf{n}^I \left( \frac{1}{\check{R}_1} + \frac{1}{\check{R}_2} \right) \left[ \left[ \frac{\sigma}{l \cdot v \cdot \rho^I} \right] \right] \end{aligned} \quad (۳-۵-۳)$$

7. L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford, 2nd edition (1987), Eq. 61.13.

فرمول‌های کلی‌تر شامل چگالی و ویسکوزیته مازاد را

L. E. Scriven, *Chem. Eng. Sci.*, **12**, 98-108 (1960).

به دست آورده است.

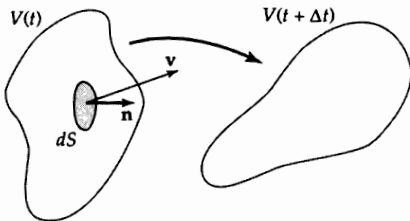
که در آن  $\dot{h} = (h - h_0)/l_0$  ارتفاع بدون بعد  $dS$  و  $\check{\gamma}^I$  و  $\check{\gamma}^{II}$  تانسورهای بدون بعد آهنگ تغییر شکل و  $\check{R}_I = R_I/l_0$  و  $\check{R}_{II} = R_{II}/l_0$  شعاع‌های انحنای بدون بعدند. به علاوه:

$$\check{p}^I = \frac{p^I - p_0 + \rho^I g(h - h_0)}{\rho^I v^I} \quad \check{p}^{II} = \frac{p^{II} - p_0 + \rho^{II} g(h - h_0)}{\rho^{II} v^{II}} \quad (۵, ۴-۵, ۳)$$

در رابطه بالا، کمیت‌های دارای اندیس صفر ضرایب مقیاس‌اند و در هردو فاز معتبرند. گروه‌های بدون بعدی را که در معادله (۳-۵) ظاهر می‌شوند، شناسایی کنید.

(ج) نشان دهید که چگونه نتیجه حاصل در قسمت (ب)، با استفاده از فرض‌های اختیارشده در مثال ۲-۷.۳، به معادله (۳۶-۷.۳) ساده می‌شود.

۱.۵۳ به دست آوردن معادله‌های تغییر با استفاده از قضیه‌های انتگرال (شکل ۱.۵۳).



شکل ۱.۵۳ «قطره» متحرک سیال که قانون دوم نیوتون درمورد آن به‌کار برده می‌شود. هر جزء از سطح سیال  $dS(t)$  با جزء حجم متحرک و تغییرشکل‌دهنده  $v(t)$  با سرعت لحظه‌ای موضعی سیال، یعنی  $v(t)$  حرکت می‌کند.

(الف) سیالی از ناحیه‌ای در فضای سه‌بعدی عبور می‌کند. «قطره‌ای» اختیاری از این سیال را انتخاب کنید - منظور ناحیه‌ای است که توسط سطحی مانند  $S(t)$  محصورشده و حجم  $V(t)$  را در برمی‌گیرد - که اجزای آن با سرعت موضعی سیال حرکت می‌کنند. قانون دوم نیوتون را درمورد این سیستم به‌کار ببندید تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v dV = - \int_{S(t)} [n \cdot \pi] dS + \int_{V(t)} \rho g dV \quad (۱-۱.۵۳)$$

که در آن جمله‌های سمت راست نیروهای سطحی و حجمی وارد بر سیال را نشان می‌دهند. از فرمول لایب‌نیس برای مشتق‌گیری از انتگرال استفاده کنید (بخش الف. ۵ را ببینید) و توجه داشته باشید که برای همه نقاط روی سطح قطره، سرعت سطحی با سرعت سیال برابر است. سپس قضیه گوس برای تانسور را به‌کار ببندید، (بخش الف. ۵ را ببینید) به طوری که هر جمله معادله یک انتگرال حجمی شود. چون انتخاب «قطره» اختیاری است، می‌توان همه علامت‌های انتگرال را برداشت و معادله حرکت (۳-۲.۹) را به دست آورد.

(ب) معادله حرکت را با نوشتن موازنه اندازه حرکت روی ناحیه‌ای اختیاری به حجم  $V$  و سطح  $S$  که در فضا ثابت شده است و سیال از آن می‌گذرد، به دست آورید. در انجام این کار، درست به موازات روش گفته شده در بخش ۲.۳ برای جزء سیال مستطیلی عمل کنید. برای کامل شدن کار به قضیه گوس برای تانسور نیاز داریم.

این مسئله نشان می‌دهد که کاربرد قانون دوم حرکت نیوتون درمورد «قطره» متحرک اختیاری سیال با نوشتن موازنه اندازه حرکت روی یک ناحیه ثابت اختیاری از فضایی که سیال در آن حرکت می‌کند، هم‌ارز است. هردو قسمت (الف) و (ب) نتیجه مشابهی را به دست می‌دهند که در بخش ۲.۳ به دست آمد.

(ج) با استفاده از جزء حجمی به شکل دلخواه، هم متحرک و هم ثابت، به کمک روش‌های گفته شده در قسمت‌های (الف) و (ب)، معادله پیوستگی را به دست آورید.

۲.۵۳ معادله تغییر برای گردشاری.

(الف) با کرل گرفتن از معادله حرکت ناویه-استوکس (خواه به صورت  $D/Dt$  یا  $\partial/\partial t$ ), معادله‌ای برای گردشاری سیال،  $\mathbf{w} = [\nabla \times \mathbf{v}]$  به دست آورید. این معادله را می‌توان به دو روش نوشت:

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{w} = \nu \nabla^2 \mathbf{w} + [\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}] \quad (۱-۲.۵۳)$$

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{w} = \nu \nabla^2 \mathbf{w} + [\varepsilon : \{(\nabla \mathbf{v}) \cdot (\nabla \mathbf{v})\}] \quad (۲-۲.۵۳)$$

که در آن  $\varepsilon$  تانسور مرتبه سومی است که مؤلفه‌های آن نماد جایگشت  $\varepsilon_{ijk}$  اند (بخش الف.۲ را ببینید) و  $\nu = \mu/\rho$  ویسکوزیته سینماتیکی است.

(ب) معادله قسمت (الف) برای جریان دو بُعدی چگونه ساده می‌شود؟

۳.۵۳ صورت دیگری از معادله حرکت<sup>۸</sup> نشان دهید برای سیال تراکم‌ناپذیر نیوتونی با ویسکوزیته ثابت، معادله حرکت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$4 \nabla^2 \mathcal{P} = \rho(\omega : \omega^\dagger - \dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \quad (۱-۳.۵۳)$$

که در آن:

$$\dot{\gamma} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger \quad \text{و} \quad \omega = \nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^\dagger \quad (۲-۳.۵۳)$$

8. P. G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press, Corrected edition (1995).

## فصل ۴

### توزیع سرعت با بیش از یک متغیر مستقل

۱.۴ جریان وابسته به زمان سیالات نیوتونی

۲.۴ حل مسئله با استفاده از تابع جریان

۳.۴ جریان سیالات غیریویسکوز با استفاده از پتانسیل سرعت

۴.۴ جریان در نزدیکی سطوح جامد طبق نظریه لایه مرزی

در فصل ۲ دیدیم که می‌توان مسئله‌های جریان ویسکوز با خطوط جریان مستقیم را با نوشتن موازنه لایه‌ای اندازه حرکت حل کرد. در فصل ۳ معادله‌های پیوستگی و حرکت را معرفی کردیم که روش بهتری برای حل مسائل هستند. این روش را در بخش ۶.۳ نشان دادیم، اما در آن بخش کار خود را به حل دسته‌ای از مسئله‌های جریان محدود کردیم که در آن‌ها فقط باید معادله‌های دیفرانسیل معمولی را حل می‌کردیم.

در این فصل چندین دسته از مسئله‌ها را شرح می‌دهیم که شامل حل معادله‌های دیفرانسیل جزئی هستند: جریان حالت ناپایا (بخش ۱.۴)، جریان ویسکوز در بیش از یک جهت (بخش ۲.۴)، جریان سیالات غیریویسکوز (بخش ۳.۴)، و جریان ویسکوز در لایه‌های مرزی (بخش ۴.۴). چون در کتاب‌های دینامیک سیالات این موضوع‌ها به تفصیل بررسی شده‌اند، در این جا صرفاً آن‌ها را معرفی می‌کنیم و چند روش پرکاربرد برای حل مسئله را نشان می‌دهیم. علاوه بر روش‌های تحلیلی ارائه شده در این فصل، روش‌های عددی نیز به سرعت روبه گسترش اند<sup>۱</sup> حوزه دینامیک سیالات محاسباتی نقش برجسته‌ای در پدیده‌های انتقال دارد. روش‌های عددی و تحلیلی مکمل یکدیگرند و در حل مسئله‌های پیچیده عملی، استفاده از روش‌های عددی اجتناب‌ناپذیر است.

۱.۴ جریان وابسته به زمان سیالات نیوتونی

در بخش ۶.۳ فقط مسئله‌های حالت ناپایا را حل کردیم. اما در بسیاری از موارد سرعت هم به مکان وابسته است و هم به زمان، و جریان با معادله‌های دیفرانسیل جزئی توصیف می‌شود. در این بخش سه روش نشان می‌دهیم که در دینامیک سیالات، رسانش گرما، و نفوذ (و هم‌چنین در بسیاری از شاخه‌های دیگر فیزیک و مهندسی) کاربرد

1. R. W. Johnson (ed.), *The Handbook of Fluid Dynamics*, CRC Press, Boca Raton, Fla. (1998); C. Pozrikidis, *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Oxford University Press (1997).



گسترده‌ای دارند. در هریک از این روش‌ها، مسئله حل معادله دیفرانسیل جزئی به مسئله حل یک یا چند معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود.

در نخستین مثال روش ترکیب متغیرها (یا روش جواب‌های تشابهی) را نشان می‌دهیم. این روش فقط برای نواحی نیمه‌نامتناهی قابل استفاده است؛ مانند وضعیتی که در آن بتوان شرط اولیه و شرط مرزی در بی‌نهایت را به صورت یک شرط مرزی جدید ترکیب کرد.

در مثال دوم روش جداسازی متغیرها نشان داده می‌شود که در آن معادله دیفرانسیل جزئی به دو یا چند معادله دیفرانسیل معمولی تفکیک می‌شود. در این صورت جواب مجموعه‌ای نامتناهی از حاصل ضرب‌های جواب‌های معادله‌های دیفرانسیل معمولی است. در کتاب‌های درسی ریاضی در سطح متوسط، این معادله‌های دیفرانسیل معمولی را تحت عنوان مسئله‌های «استورم-لیوویل» شرح می‌دهند.<sup>۱</sup>

مثال سوم روش پاسخ سینوسی را نشان می‌دهد که در توصیف پاسخ سیستم به اختلالات تناوبی خارجی به کار می‌آید. این مثال‌های روشن‌گر را به سبب سادگی فیزیکی آن‌ها انتخاب کرده‌ایم، تا بتوان بیش‌تر روی روش‌های ریاضی تمرکز کرد. چون همه مسئله‌هایی که در این جا شرح می‌دهیم از لحاظ سرعت خطی‌اند، می‌توانیم از تبدیل‌های لاپلاس نیز استفاده کنیم و از دانشجویان آشنا با این موضوع می‌خواهیم که این سه مثال را با استفاده از آن روش حل کنند.

#### مثال ۱-۱.۴

جریان در نزدیکی جداری که ناگهان به حرکت درمی‌آید پهنه‌ای نیمه‌نامتناهی از مایع، با چگالی و ویسکوزیته ثابت زیر سطحی افقی (صفحه  $xz$ ) محصور شده است. در ابتدا سیال و جامد در حالت سکون‌اند. سپس، در زمان  $t = 0$ ، مطابق شکل ۱-۱.۴، سطح جامد با سرعت  $v$  در جهت مثبت  $x$  به حرکت درمی‌آید. مطلوب است تعیین سرعت  $v_x$  به صورت تابعی از  $y$  و  $t$ . در جهت  $x$  گرادیان فشار یا نیروی گرانی وجود ندارد و جریان آرام فرض می‌شود.

حل

در این سیستم، داریم  $v_x = v_x(y, t)$ ،  $v_y = 0$ ،  $v_z = 0$ . سپس در جدول ب.۴ درمی‌یابیم که معادله پیوستگی مستقیماً صدق می‌کند و از جدول ب.۶ داریم:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (۱-۱.۴)$$

که در آن  $\nu = \mu/\rho$ . شرایط اولیه و مرزی عبارت‌اند از:

$$v_x = 0 \quad (۲-۱.۴) \quad \text{شرط اولیه: در } t \leq 0, \text{ به ازای همه مقادیر } y, \text{ داریم}$$

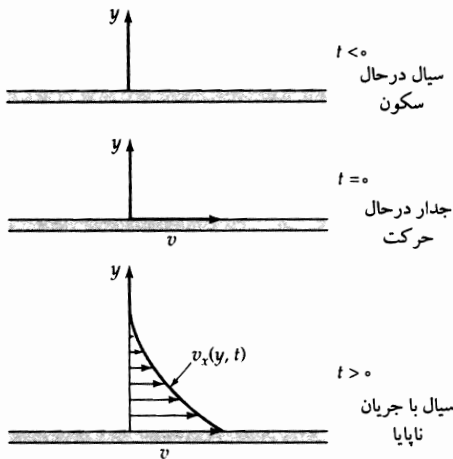
$$v_x = v \quad (۳-۱.۴) \quad \text{شرط مرزی ۱: در } y = 0, \text{ به ازای همه مقادیر } t > 0, \text{ داریم}$$

$$v_x = 0 \quad (۴-۱.۴) \quad \text{شرط مرزی ۲: در } y = \infty, \text{ به ازای همه مقادیر } t > 0, \text{ داریم}$$

حال سرعت بدون بُعد  $\phi = v_x/v$  را معرفی می‌کنیم، و در نتیجه معادله (۱-۱.۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (۵-۱.۴)$$

۱. مثلاً نگاه کنید به



شکل ۱-۱.۴ جریان ویسکوز سیال در نزدیکی جدارى که ناگهان به حرکت درمی آید.

که در آن  $\phi(y, 0) = 0$ ,  $\phi(0, t) = 1$ ,  $\phi(\infty, t) = 0$ . چون شرایط اولیه و مرزی فقط شامل اعداد محض اند، جواب معادله (۵-۱.۴) باید به صورت  $\phi = \phi(y, t; \nu)$  باشد. اما از آن جاکه  $\phi$  تابعی بدون بُعد است، کمیت های  $y$ ,  $t$  و  $\nu$  همواره باید به صورت ترکیبی بدون بُعد ظاهر شوند. تنها ترکیب های بدون بُعد این سه کمیت عبارت اند از:  $y/\sqrt{\nu t}$  یا توان ها یا مضرب های آن. بنابراین نتیجه می گیریم که:

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \quad \text{که در آن} \quad \phi = \phi(\eta) \quad (6-1.4)$$

این روش «ترکیب متغیرها (ی مستقل)» است. عدد «۴» را در این رابطه گنجانده ایم تا نتیجه نهایی در معادله (۱۴-۱.۴) منظم تر به نظر برسد؛ البته پس از حل مسئله بدون استفاده از عدد ۴ به این نتیجه رسیدیم. جوابی به صورت معادله (۶-۱.۴) اساساً امکان پذیر است، زیرا در سیستم فیزیکی زمان یا طول مشخصه ای وجود ندارد.

حال مشتق های معادله (۵-۱.۴) را به مشتق نسبت به «متغیر مرکب»  $\eta$  تبدیل می کنیم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\phi}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \frac{d\phi}{d\eta} \quad (7-1.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d\phi}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{d\phi}{d\eta} \frac{1}{\sqrt{4\nu t}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} \frac{1}{4\nu t} \quad (8-1.4)$$

با قرار دادن این عبارت ها در معادله (۵-۱.۴) نتیجه می شود:

$$\frac{d^2 \phi}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\phi}{d\eta} = 0 \quad (9-1.4)$$

این یک معادله دیفرانسیل معمولی از نوع معادله (ج. ۸-۱) است و شرایط مرزی آن عبارت اند از:

$$\phi = 1 \quad \text{در} \quad \eta = 0 \quad \text{شرط مرزی ۱:} \quad (10-1.4)$$

$$\phi = 0 \quad \text{در} \quad \eta = \infty \quad \text{شرط مرزی ۲:} \quad \text{داریم} \quad (11-1.4)$$

شرط مرزی اول همانند معادله (۳-۱.۴) است و شرط مرزی دوم شامل معادله های (۲-۱.۴) و (۴-۱.۴) است.

اگر فرض کنیم  $d\phi/d\eta = \psi$  برای یک معادله مرتبه اول تفکیک پذیر به دست می آوریم که می توانیم آن را حل کنیم و به جواب زیر برسیم:

$$\psi = \frac{d\phi}{d\eta} = C_1 \exp(-\eta^2) \quad (12-1.4)$$

اگر یک بار دیگر انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\phi = C_1 \int_0^\eta \exp(-\bar{\eta}^2) d\bar{\eta} + C_2 \quad (۱۴-۱.۴)$$

انتخاب صفر به عنوان حد پایین انتگرال، اختیاری است؛ با انتخابی دیگر، مقدار متفاوتی برای  $C_2$  حاصل می‌شود که باز هم نامعین است. توجه کنید که متغیر انتگرال‌گیری را با علامت بار مشخص کرده‌ایم ( $\bar{\eta}$ ) تا از حد بالای انتگرال متمایز باشد.

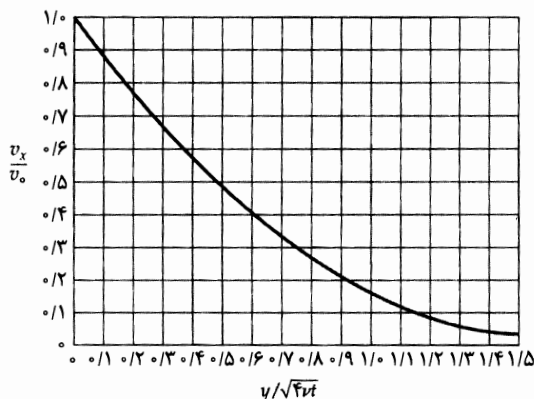
با استفاده از این دو شرط مرزی می‌توان دو ثابت انتگرال‌گیری را محاسبه کرد و سرانجام نتیجه می‌شود:

$$\phi(\eta) = 1 - \frac{\int_0^\eta \exp(-\bar{\eta}^2) d\bar{\eta}}{\int_0^\infty \exp(-\bar{\eta}^2) d\bar{\eta}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\bar{\eta}^2) d\bar{\eta} = 1 - \operatorname{erf} \eta \quad (۱۴-۱.۴)$$

نسبت انتگرال‌هایی که در این جا ظاهر می‌شود تابع خطا نام دارد و آن را با صورت اختصاری  $\operatorname{erf} \eta$  نشان می‌دهند (بخش ج. ۶ را ببینید). این تابعی معروف است و می‌توان در هندبوک‌های ریاضی و نرم‌افزارهای کامپیوتری آن را یافت. وقتی معادله (۱۴-۱.۴) را برحسب متغیرهای اولیه بنویسیم، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{v_x(y, t)}{v_0} = 1 - \operatorname{erf} \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} = \operatorname{erfc} \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \quad (۱۵-۱.۴)$$

که در آن  $\operatorname{erfc} \eta$  تابع خطای مکمل نام دارد. در شکل ۲-۱.۴ نموداری از معادله (۱۵-۱.۴) ترسیم شده‌است. توجه کنید که، با ترسیم این نتیجه برحسب کمیت‌های بدون بُعد، فقط به یک منحنی نیاز پیدا می‌کنیم.



شکل ۲-۱.۴ توزیع سرعت، به صورت بدون بُعد، برای جریان در همسایگی جدار که ناگهان به حرکت درمی‌آید.

تابع خطای مکمل،  $\operatorname{erfc} \eta$  تابعی یکنوا و نزولی است که از ۱ تا صفر تغییر می‌کند و وقتی  $\eta$  در حدود  $2.7^\circ$  است، مقدار آن به  $0.1^\circ$  نزول پیدا می‌کند. می‌توانیم با استفاده از این نکته «ضخامت لایه مرزی»  $\delta$  را به صورت فاصله‌ای مانند  $y$  تعریف کنیم که به ازای آن مقدار  $v_x$  به مقدار  $0.1v_0$  تنزل پیدا کرده‌است. در نتیجه  $\delta = 4\sqrt{\nu t}$  به صورت مقیاس طول طبیعی برای نفوذ اندازه حرکت حاصل می‌شود. این فاصله معیاری از میزان «نفوذ» اندازه حرکت در پهنه سیال است. توجه کنید که این ضخامت لایه مرزی با ریشه دوم زمان سپری‌شده متناسب است.

### مثال ۲-۱.۴

جریان آرام ناپایا بین دو صفحه موازی می‌خواهیم مثال قبل را دوباره حل کنیم، اما این بار جدار ثابتی را در فاصله  $b$  از جدار متحرک در  $y = 0$  اضافه می‌کنیم. وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، این سیستم جریان یک حد حالت پایا دارد، در صورتی که در مثال ۱-۱.۴ چنین نبود.

حل

مانند مثال ۱-۱.۴، معادله مؤلفه  $x$  سرعت عبارت است از:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (۱۶-۱.۴)$$

اکنون شرایط مرزی از این قرارند:

(۱۷-۱.۴) شرط اولیه: در  $t \leq 0$  به ازای مقادیر  $b \geq y \geq 0$ ، داریم  $v_x = 0$ .

(۱۸-۱.۴) شرط مرزی ۱: در  $y = 0$ ، به ازای همه مقادیر  $t > 0$ ، داریم  $v_x = v_0$ .

(۱۹-۱.۴) شرط مرزی ۲: در  $y = b$ ، به ازای همه مقادیر  $t > 0$ ، داریم  $v_x = 0$ .

می‌توان متغیرهای بدون بُعد زیر را معرفی کرد:

$$\phi = \frac{v_x}{v_0}, \eta = \frac{y}{b}, \tau = \frac{\nu t}{b^2} \quad (۲۰-۱.۴)$$

انتخاب‌های مکان و سرعت بدون بُعد تضمین می‌کنند که این متغیرها از صفر تا ۱ تغییر کنند. زمان بدون بُعد به این سبب انتخاب می‌شود که در معادله دیفرانسیل جزئی تبدیل یافته هیچ پارامتری دخالت نکند:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \quad (۲۱-۱.۴)$$

شرط اولیه عبارت است از  $\phi = 0$  در  $\tau = 0$ ، و شرایط مرزی عبارتند از  $\phi = 1$  در  $\eta = 0$  و  $\phi = 0$  در  $\eta = 1$ .

می‌دانیم که در زمان بی‌نهایت، سیستم توزیع سرعت حالت پایای  $\phi_\infty(\eta)$  کسب می‌کند، به طوری که در  $\tau = \infty$  معادله (۲۱-۱.۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$0 = \frac{d^2 \phi_\infty}{d\eta^2} \quad (۲۲-۱.۴)$$

که در  $\eta = 0$ ، داریم  $\phi_\infty = 1$  و به ازای  $\eta = 1$ ، داریم  $\phi_\infty = 0$ . سپس، برای توزیع حدی حالت پایا، رابطه

$$\phi_\infty = 1 - \eta \quad (۲۳-۱.۴)$$

به دست می‌آید. اکنون می‌توان نوشت:

$$\phi(\eta, \tau) = \phi_\infty(\eta) - \phi_t(\eta, \tau) \quad (۲۴-۱.۴)$$

که در آن  $\phi_t$  بخش گذرای جواب است که با میل کردن زمان به سمت بی‌نهایت، صفر می‌شود. با قرار دادن این عبارت در معادله دیفرانسیل اصلی و شرایط مرزی، برای  $\phi_t$  نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial \eta^2} \quad (۲۵-۱.۴)$$

که در آن به ازای  $\tau = 0$ ، داریم  $\phi_t = \phi_\infty$ ، و به ازای  $\eta = 0$  و  $\eta = 1$ ، داریم  $\phi_t = 0$ .

برای حل معادله (۲۵-۱.۴) از «روش جداسازی متغیرها (ی وابسته)» استفاده می‌کنیم که در آن جوابی به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\phi_t = f(\eta)g(\tau) \quad (۲۶-۱.۴)$$

با قرار دادن این جواب آزمایشی در معادله (۲۵-۱.۴) و سپس تقسیم کردن آن بر حاصل ضرب  $f, g$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad (۲۷-۱.۴)$$

سمت چپ این معادله فقط تابع  $\tau$  و سمت راست آن فقط تابع  $\eta$  است. در نتیجه هر دو سمت باید با مقدار ثابتی برابر باشند. این ثابت را  $-c^2$  می‌نامیم (می‌توانستیم از  $c$  یا  $c^2$  استفاده کنیم، اما تجربه نشان می‌دهد این انتخاب‌ها سبب پیچیده شدن عملیات ریاضی بعدی خواهند شد). معادله (۲۷-۱.۴) را می‌توان به دو معادله تفکیک کرد:

$$\frac{dg}{d\tau} = -c^2 g \quad \frac{d^2 f}{d\eta^2} + c^2 f = 0 \quad (29, 28-1.4)$$

این معادله‌ها جواب‌های زیر را دارند (معادله‌های (ج.۱-۱) و (ج.۳-۱) را ببینید):

$$g = Ae^{-c^2 \tau} \quad f = B \sin c\eta + C \cos c\eta \quad (31, 30-1.4)$$

که در آن  $A, B, C$  ثابت‌های انتگرال‌گیری‌اند.

اکنون شرایط مرزی و اولیه را به صورت زیر به کار می‌بریم:

شرط مرزی ۱: چون در  $\eta = 0$  داریم  $\phi_t = 0$ ، تابع  $f$  باید به ازای  $\eta = 0$  برابر صفر شود. بنابراین  $C$  باید صفر باشد.  
شرط مرزی ۲: چون در  $\eta = 1$  داریم  $\phi_t = 0$ ، تابع  $f$  باید به ازای  $\eta = 1$  برابر صفر شود. این وضعیت هنگامی برقرار است که  $B = 0$  یا  $\sin c$  برابر صفر باشد. با انتخاب اول، به ازای همه مقادیر  $\eta$  داریم  $f = 0$  که از لحاظ فیزیکی غیرممکن است. بنابراین انتخاب دوم را انجام می‌دهیم، که به شرط  $\dots, \pm 3\pi, \pm 2\pi, \pm \pi, 0 = c$  منتهی می‌شود. این مقادیر مجاز مختلف  $c$  (موسوم به «ویژه مقدار») را  $c_n$  می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$c_n = n\pi \quad \text{با } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (32-1.4)$$

بنابراین توابع مجاز بسیاری به صورت  $f_n$  (موسوم به «ویژه تابع») وجود دارند که در معادله (۲۹-۱.۴) و شرایط مرزی صدق می‌کنند؛ به عبارت دیگر:

$$f_n = B_n \sin n\pi\eta \quad \text{با } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (33-1.4)$$

توابع متناظری که در معادله (۲۸-۱.۴) صدق می‌کنند،  $g_n$  نام دارند و چنین تعریف می‌شوند:

$$g_n = A_n \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \quad \text{با } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (34-1.4)$$

شرط اولیه: ترکیب‌های  $f_n g_n$  در معادله دیفرانسیل جزئی  $\phi_t$ ، یعنی معادله (۲۵-۱.۴) صدق می‌کنند و همه برهم‌نهی‌های این حاصل ضرب‌ها نیز چنین خاصیتی دارند. بنابراین جواب معادله (۲۵-۱.۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\phi_t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \sin n\pi\eta \quad (35-1.4)$$

که در آن ضرایب انبساط  $D_n = A_n B_n$  را باید تعیین کرد. در این مجموع، جمله  $n = 0$  سهمی ندارد؛ به علاوه چون  $\sin(-n)\pi\eta = -\sin(+n)\pi\eta$ ، می‌توانیم همه جمله‌های دارای مقادیر منفی  $n$  را حذف کنیم. پس معادله (۳۵-۱.۴) چنین نوشته می‌شود:

$$\phi_t = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \sin n\pi\eta \quad (36-1.4)$$

طبق شرط اولیه،  $\phi_t = 1 - \eta$ ، وقتی  $\tau = 0$ ، بنابراین:

$$1 - \eta = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin n\pi\eta \quad (37-1.4)$$

اکنون باید همه  $D_n$  ها را با استفاده از این معادله تعیین کنیم! این کار را با ضرب کردن دو طرف معادله در  $\sin m\pi\eta$  و سپس انتگرال گیری روی گستره فیزیکی مناسب، از  $\eta = 0$  تا  $\eta = 1$  انجام می دهیم؛ در این عبارت  $m$  عددی صحیح است. در نتیجه:

$$\int_0^1 (1 - \eta) \sin m\pi\eta d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^1 \sin n\pi\eta \sin m\pi\eta d\eta \quad (38-1.4)$$

سمت چپ این معادله برابر است با  $1/m\pi$ ؛ انتگرال های سمت راست معادله، وقتی  $n \neq m$  صفر می شوند و هرگاه  $n = m$  برابر  $\frac{1}{2}$  خواهند بود. بنابراین شرط اولیه به معادله زیر منتهی می شود:

$$D_m = \frac{2}{m\pi} \quad (39-1.4)$$

عبارت نهایی برای توزیع سرعت بدون بعد از معادله های (۱-۲۴، ۳۶، ۳۹) به دست می آید و به صورت زیر است:

$$\phi(\eta, \tau) = (1 - \eta) - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{n\pi} \right) \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \sin n\pi\eta \quad (40-1.4)$$

بنابراین جواب مورد نظر از یک جمله حدی حالت پایا، منهای یک جمله گذاری تشکیل می شود که با افزایش زمان به سمت صفر میل خواهد کرد.

دانشجویانی که برای نخستین بار با روش جداسازی متغیرها برخورد می کنند، سلسله عملیات بالا را نسبتاً طولانی و پیچیده خواهند یافت. اما هیچ یک از مراحل کار دشواری خاصی ندارد. جواب نهایی، یعنی معادله (۱-۴۰) نسبتاً بفرنج به نظر می رسد، زیرا شامل یک مجموعه نامتناهی است. عملاً فقط چند جمله نخست این سری، مگر در مورد زمان های بسیار کوتاه، سهمی درخور اعتنا دارند.

جواب این مسئله با جواب مسئله قبل رابطه نزدیکی دارد<sup>۲</sup> اما در این جا به اثبات این گفته نمی پردازیم. در حد زمان های بسیار کوتاه به سمت صفر، معادله (۱-۴۰) با معادله (۱-۱۵) معادل می شود. این وضعیت منطقی است، زیرا در این مسئله، به ازای زمان های بسیار کوتاه، سیال فقط در نواحی بسیار نزدیک به جدار واقع در  $y = 0$  حرکت می کند و سیال نمی تواند حضور جدار واقع در  $y = b$  را «حس» کند. چون جواب و نتیجه مثال ۱-۱۴ بسیار ساده تر از این هستند، در صورتی که فقط با زمان های کوتاه سروکار داشته باشیم، غالباً برای معرفی سیستم از این ها استفاده می کنیم. البته این نوعی تقریب است، که بسیار سودمند واقع می شود و در مسئله های انتقال گرما و انتقال جرم نیز غالباً از آن استفاده می شود.

### مثال ۳-۱.۴

جریان آرام ناپایا در نزدیکی صفحه درحال نوسان پهنه ای نیمه نامتناهی از مایع از یک طرف به وسیله یک صفحه مسطح (صفحه  $xz$ ) محدود شده است. در ابتدا سیال و جامد درحال سکون اند. در زمان  $t = 0$  سطح جامد به نوسان سینوسی در جهت  $x$ ، با دامنه  $X_0$  و بسامد (دایره ای)  $\omega$  وادار می شود. یعنی جابه جایی  $X$  صفحه از وضعیت سکون با رابطه زیر نشان داده می شود:

$$X(t) = X_0 \sin \omega t \quad (41-1.4)$$

۲. برای آشنایی با جواب سری که به ویژه برای زمان های کوتاه خوب است، نگاه کنید به

و در نتیجه سرعت سیال در  $y = 0$  برابر است با:

$$v_x(0, t) = \frac{dX}{dt} = X_0 \omega \cos \omega t \quad (42-1.4)$$

دامنه نوسان سرعت را با  $v_0 = X_0 \omega$  نشان می‌دهیم و معادله (۴۲-۱.۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$v_x(0, t) = v_0 \cos \omega t = v_0 \Re\{e^{i\omega t}\} \quad (43-1.4)$$

که در آن  $\Re\{z\}$  به معنای «جزء حقیقی  $z$ » است.

در سیستم‌های نوسانی معمولاً به جواب کامل علاقه‌مند نیستیم، بلکه صرفاً «حالت پایای تناوبی» مورد نظر است که پس از ناپدید شدن «نوسان‌های گذرا»ی اولیه برقرار است. در این حالت همه ذرات سیال موجود در سیستم نوسان‌های سینوسی با بسامد  $\omega$  انجام می‌دهند، اما فاز و دامنه نوسان آن‌ها فقط تابع مکان است. این جواب «حالت پایای تناوبی» را می‌توان با استفاده از روشی ابتدایی به دست آورد که کاربرد گسترده‌ای دارد. از لحاظ ریاضی، این جواب مجانبی به ازای  $t \rightarrow \infty$  است.

حل

باز هم معادله حرکت چنین است:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (44-1.4)$$

و شرایط مرزی و اولیه عبارت‌اند از:

$$v_x = 0 \quad \text{شرط اولیه: در } t \leq 0, \text{ به ازای همه مقادیر } y, \text{ داریم } \quad (45-1.4)$$

$$v_x = v_0 \Re\{e^{i\omega t}\} \quad \text{شرط مرزی ۱: در } y = 0, \text{ به ازای همه مقادیر } t > 0, \text{ داریم } \quad (46-1.4)$$

$$v_x = 0 \quad \text{شرط مرزی ۲: در } y = \infty, \text{ به ازای همه مقادیر } t > 0, \text{ داریم } \quad (47-1.4)$$

به شرط اولیه نیاز نداریم، زیرا فقط به پاسخ سیال پس از نوسان صفحه به مدت طولانی علاقه‌مندیم. یک جواب نوسانی به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$v_x(y, t) = \Re\{v^0(y)e^{i\omega t}\} \quad (48-1.4)$$

در این جا  $v^0$  به عنوان تابع مختلط  $y$  انتخاب می‌شود، به طوری که  $v_x(y, t)$  با  $v_x(0, t)$  هم از لحاظ دامنه و هم از لحاظ فاز، تفاوت دارد. این جواب آزمایشی را در معادله (۴۴-۱.۴) قرار می‌دهیم و نتیجه می‌شود:

$$\Re\{v^0 i\omega e^{i\omega t}\} = \nu \Re\left\{\frac{d^2 v^0}{dy^2} e^{i\omega t}\right\} \quad (49-1.4)$$

سیس از این نکته استفاده می‌کنیم که اگر  $\Re\{z_1 w\} = \Re\{z_2 w\}$  که در آن  $z_1$  و  $z_2$  دو کمیت مختلط و  $w$  کمیت مختلط اختیاری است، آن‌گاه  $z_1 = z_2$ . بنابراین معادله (۴۹-۱.۴) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2 v^0}{dy^2} - \left(\frac{i\omega}{\nu}\right) v^0 = 0 \quad (50-1.4)$$

و شرایط مرزی آن عبارت‌اند از:

$$v^0 = v_0 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } y = 0, \text{ داریم } \quad (51-1.4)$$

$$v^0 = 0 \quad \text{شرط مرزی ۲: در } y = \infty, \text{ داریم } \quad (52-1.4)$$

معادله (۵۰-۱.۴) صورتی همانند معادله (ج.۱-۴) دارد و جواب آن چنین است:

$$v^{\circ} = C_1 e^{\sqrt{i\omega/\nu}y} + C_2 e^{-\sqrt{i\omega/\nu}y} \quad (53-1.4)$$

چون  $\sqrt{i} = \pm(1/\sqrt{2})(1+i)$ ، این معادله را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$v^{\circ} = C_1 e^{\sqrt{\omega/2\nu}(1+i)y} + C_2 e^{-\sqrt{\omega/2\nu}(1+i)y} \quad (54-1.4)$$

شرط مرزی دوم مستلزم آن است که  $C_1 = 0$  و از شرط مرزی اول نتیجه می‌شود  $C_2 = v_0$ . بنابراین جواب معادله (۵۰-۱.۴) عبارت است از:

$$v^{\circ} = v_0 e^{-\sqrt{\omega/2\nu}(1+i)y} \quad (55-1.4)$$

از این نتیجه و معادله (۴۸-۱.۴)، حاصل می‌شود:

$$v_x(y, t) = \Re\{v_0 e^{-\sqrt{\omega/2\nu}(1+i)y} e^{i\omega t}\} = v_0 e^{-\sqrt{\omega/2\nu}y} \Re\{e^{-i(\sqrt{\omega/2\nu}y - \omega t)}\} \quad (56-1.4)$$

یا سرانجام:

$$v_x(y, t) = v_0 e^{-\sqrt{\omega/2\nu}y} \cos(\omega t - \sqrt{\omega/2\nu}y) \quad (57-1.4)$$

در این عبارت، جمله‌نمایی توصیف‌کننده تضعیف حرکت نوسانی؛ یعنی کاهش دامنه نوسان سیال با افزایش فاصله از صفحه، است. در شناسه کسینوس، کمیت  $\sqrt{\omega/2\nu}y$  را جابه‌جایی فاز می‌نامند؛ یعنی این کمیت نشان می‌دهد که نوسانات سیال در فاصله  $y$  از جدار، تا چه میزان با نوسانات خود جدار «ناهمگام» است. در نظر داشته باشید که معادله (۵۷-۱.۴) جواب کامل مسئله به صورتی که در معادله‌های (۴۴-۱.۴) تا (۴۷-۱.۴) بیان شد نیست، بلکه صرفاً جواب «حالت پایای تناوبی» است. جواب کامل در مسئله ۱.۵۴ ارائه می‌شود.

## ۲.۴ حل مسئله با استفاده از تابع جریان

تا این‌جا مثال‌ها و مسئله‌هایی را انتخاب کردیم که فقط یک مؤلفه غیرصفر سرعت سیال داشته باشند. به دست آوردن جواب‌های کامل معادله ناویه-استوکس برای جریان در دو یا سه بُعد بسیار دشوارتر است. البته اساس کار مشابه است؛ باید دستگاه معادلات پیوستگی و حرکت را، با شرایط اولیه و مرزی مناسب حل کرد، تا توزیع‌های فشار و سرعت حاصل شود.

اما وجود توأمان سرعت و فشار به عنوان متغیرهای وابسته در معادله حرکت، به معنای دشواری بیشتر در مسئله‌های جریان چندبُعدی، نسبت به مسئله‌های ساده‌تری است که قبلاً مطرح کردیم. بنابراین راحت‌تر آن است که با گرفتن کرل از معادله حرکت، پس از استفاده از اتحاد برداری  $[\nabla \times [\nabla \times \mathbf{v}]] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$  که در معادله (الف-۲۳-۴) مفروض است، فشار را حذف کنیم. برای سیال‌هایی با ویسکوزیته و چگالی ثابت، از این عمل نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\nabla \times \mathbf{v}] - [\nabla \times [\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{v}]]] = \nu \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{v}] \quad (1-2.4)$$

این معادله تغییر برای گردشاری  $[\nabla \times \mathbf{v}]$  است؛ دو روش دیگر نوشتن این معادله را در مسئله ۲.۵۳ نشان داده‌ایم. برای مسئله‌های جریان ویسکوز می‌توان معادله گردشاری (یک معادله برداری مرتبه سوم) را، همراه با معادله پیوستگی و شرایط اولیه و مرزی مناسب حل کرد و توزیع سرعت را به دست آورد. وقتی توزیع سرعت معلوم شد، توزیع فشار را



می‌توان از معادله ناویه-استوکس، یعنی معادله (۵.۳-۶) به دست آورد. گاهی استفاده از این روش برای حل مسئله‌های جریان، حتی برای جریان‌های تک‌بعدی که قبلاً شرح داده شد (مسئله ۴.۴ ب. ۴ را ببینید)، راحت‌تر است. برای جریان‌های صفحه‌ای یا دارای تقارن محوری، می‌توان با معرفی تابع جریان  $\psi$  معادله گردشاری را دوباره فرمول‌بندی کرد. برای انجام این کار، دو مؤلفه غیرصفر سرعت را، به صورت مشتق‌های  $\psi$ ، چنان بیان می‌کنیم که به‌طور خودکار در معادله پیوستگی صدق کنند (جدول ۲.۴-۱ را ببینید). در این صورت، مؤلفه معادله گردشاری متناظر با جهتی که در آن جهت جریان وجود ندارد، به یک معادله اسکالر مرتبه چهار بر حسب  $\psi$  تبدیل می‌شود. پس از یافتن معادله اسکالر  $\psi$ ، می‌توان دو مؤلفه غیرصفر سرعت را به دست آورد. مهم‌ترین مسئله‌هایی که می‌توان به این روش حل کرد، در جدول ۲.۴-۱ آمده‌اند.<sup>۱</sup> خود تابع جریان نیز بی‌فایده نیست. سطوحی با  $\psi$  ثابت حاوی خطوط جریان‌اند،<sup>۲</sup> که در جریان حالت‌پایا مسیرهای اجزای سیال به‌شمار می‌روند. آهنگ جریان حجمی بین سطوح  $\psi_1 = \psi_2$  و  $\psi_1 = \psi_2$  با  $\psi_1 - \psi_2$  متناسب است. در این بخش برای مثال جریان خزشی حالت‌پایا از کنار کوره‌ای ساکن را، که توسط معادله استوکس یعنی معادله (۵.۳-۸) توصیف می‌شود و به‌ازای  $1 \ll Re$  صادق است، در نظر می‌گیریم. (نگاه کنید به بحثی که درست پس از معادله (۷.۳-۹) آمده‌است)، برای جریان خزشی، جمله دوم سمت چپ معادله (۲.۴-۱) برابر صفر گرفته می‌شود. بنابراین معادله خطی است و چندین روش برای حل مسئله وجود دارد.<sup>۳</sup> روش تابع جریان را انتخاب می‌کنیم که بر معادله (۲.۴-۱) مبتنی است.

۱. برای آشنایی با روشی که در مورد جریان‌های کلی‌تر کاربرد داشته‌باشد، نگاه کنید به

J. M. Robertson, *Hydrodynamics in Theory and Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1965), p.77;

برای آشنایی با مثال‌های جریان سه‌بعدی با استفاده از دو تابع جریان، نگاه کنید به مسئله ۵.۴ و هم‌چنین

J. P. Sorensen and W. E. Stewart, *Chem. Eng. Sci.*, **29**, 819-825 (1974).

در (1985) A. Lahbabi and H. C. Chang, *Chem. Eng. Sci.*, **40**, 434-447 با جریان‌هایی با عدد رینولدز بالا آشنا می‌شویم که از میان آرایه‌ای مکعبی از کوره‌ها می‌گذرد و شامل جواب‌های حالت‌پایا و گذار به جریان متلاطم است.

W. E. Stewart and M. A. McClelland, *AIChE Journal*, **29**, 947-956 (1983),

جواب‌های مجانبی مناسب برای همرفت واداشته در جریان‌های سه‌بعدی با گرمایش ویسکوز ارائه داده‌است.

2. See G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967), 2.2.

در فصل ۲ این کتاب شرح مفصلی از سینماتیک حرکت سیال آمده‌است.

۳. جوابی که در این‌جا ارائه می‌شود از جوابی پیروی می‌کند که در منبع زیر آمده‌است:

L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, Macmillan, New York, 3rd edition (1955), pp. 555-557.

برای آشنایی با رهیافت‌های دیگر، نگاه کنید به

H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover, New York (1945), §337,338.

برای آشنایی با جریان ناپایا در اطراف کره، نگاه کنید به

R. Berker, in *Handbuch der Physik*, Volume VIII-2, Springer, Berlin (1963), §69, or H. Villat and J. Kravtchenko, *Lecons sur les Fluides Visqueux*, Gauthier-Villars, Paris (1943), Chapter VII. See also F. Sy, J. W. Taunton, and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **16**, 386-391 (1970).

مسئله تعیین نیروها و گشتاورهای وارد بر اجسامی با شکل‌های اختیاری، به‌طور کامل، در منبع زیر بررسی شده‌است:

S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*, Butterworth Boston (1991), Chapter II. -Heinemann,

جدول ۱-۲.۴ معادله‌های تابع جریان. الف

عبارت‌های عملگرها	معادله‌های دیفرانسیل برای $\psi$ که هم‌ارز با معادلهٔ ناپیدا-استروکس هستند	مؤلفه‌های سرعت	دستگاه مختصات	نوع حرکت
$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ $\nabla^2 \psi \equiv \nabla^2(\nabla^2 \psi)$ $\equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi$	(A) $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) + \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} = \nu \nabla^2 \psi$	$v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ $v_y = +\frac{\partial \psi}{\partial x}$	قلم با $v_z = 0$ و بدون واسنجی به $z$	دو بُعدی (صفحه‌ای)
$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$	(B) $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) + \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(r, \theta)} = \nu \nabla^2 \psi$	$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ $v_\theta = +\frac{\partial \psi}{\partial r}$	استوانه‌ای با $v_z = 0$ و بدون واسنجی به $z$	
$E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $E^2 \psi \equiv E^2(E^2 \psi)$	(C) $\frac{\partial}{\partial t}(E^2 \psi) - \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, E^2 \psi)}{\partial(r, z)} - \frac{\gamma}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} E^2 \psi = \nu E^2 \psi$	$v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ $v_r = +\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$	استوانه‌ای با $v_\theta = 0$ و بدون واسنجی به $\theta$	با تقارن محوری
$E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$	(D) $\frac{\partial}{\partial t}(E^2 \psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(\psi, E^2 \psi)}{\partial(r, \theta)} - \frac{\gamma E^2 \psi}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \nu E^2 \psi$	$v_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ $v_\theta = +\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$	کروی با $v_\phi = 0$ و بدون واسنجی به $\phi$	

الف) روابطی مشابه در دستگاه مختصات متعامد را می‌توان در منبع زیر یافت:

S. Goldstein, *Modern Development in Fluid Dynamics*, Dover, N.Y. (1965), pp. 114-115;

در این منبع فرمول‌هایی برای جریان با تقارن محوری و دارای مولفهٔ غیرصفر سرعت حول این محور ارائه شده‌است.

ب) در اینجا زاگرایی‌ها به‌صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

## مثال ۴-۲.۴

جریان خزشی دور کره  
با استفاده از جدول ۱-۲.۴ معادله دیفرانسیلی برای تابع جریان سیالی نیوتونی در اطراف کره‌ای ساکن به شعاع  $R$  و در حالت  $Re \ll 1$  بنویسید. توزیع‌های سرعت و فشار را، وقتی سیال در جهت مثبت  $z$ ، مطابق شکل ۱-۶.۲ به کره نزدیک می‌شود، به دست آورید.

حل

برای جریان خزشی پایا، سمت چپ معادله (D) در جدول ۱-۲.۴ را می‌توان برابر صفر گرفت و معادله  $\psi$  برای جریان با تقارن محوری چنین نوشته می‌شود:

$$E^4 \psi = 0 \quad (2-2.4)$$

یا، در مختصات کروی:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi = 0 \quad (3-2.4)$$

این معادله را باید با استفاده از شرایط مرزی زیر حل کرد:

$$v_r = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\sin \theta \partial \theta} = 0 \text{ در } r = R, \text{ داریم} \quad (4-2.4)$$

$$v_\theta = +\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \text{ در } r = R, \text{ داریم} \quad (5-2.4)$$

$$\psi \rightarrow -\frac{1}{4} v_\infty r^2 \sin^2 \theta \text{ در } r \rightarrow \infty, \text{ وقتی} \quad (6-2.4)$$

دو شرط نخست وضعیت عدم لغزش روی سطح کره را توصیف می‌کنند. شرط سوم متضمن این است که در فواصل دور از کره،  $v_z \rightarrow v_\infty$  (با توجه به این که در فواصل دور از کره داریم  $v_r = v_\infty \cos \theta$  و  $v_\theta = -v_\infty \sin \theta$  درستی این گفته آشکار می‌شود).

اکنون جوابی به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta \quad (7-2.4)$$

چون این جواب دست‌کم در شرط مرزی سوم یا معادله (۶-۲.۴) صدق می‌کند. وقتی آن را در معادله (۳-۲.۴) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) f = 0 \quad (8-2.4)$$

این نکته که متغیر  $\theta$  در این معادله ظاهر نمی‌شود، نشان‌دهنده آن است که فرض جواب به صورت معادله (۷-۲.۴) فرض رضایت بخشی است. معادله (۸-۲.۴) یک معادله مرتبه چهارم «هم‌بعد» است (نگاه کنید به معادله (ج. ۱-۱۴)). وقتی جوابی آزمایشی به صورت  $f(r) = C r^n$  در این معادله قرار داده شود، درمی‌یابیم که  $n$  می‌تواند مقادیر  $-1$ ،  $1$ ،  $2$ ، و  $4$  را اختیار کند. بنابراین  $f(r)$  به صورت زیر است:

$$f(r) = C_1 r^{-1} + C_2 r + C_3 r^2 + C_4 r^4 \quad (9-2.4)$$

برای برقرار بودن شرط مرزی سوم،  $C_2$  باید صفر باشد و  $C_1$  باید مقداری برابر  $-\frac{1}{4}v_\infty$  داشته باشد. بنابراین تابع جریان عبارت است از:

$$\psi(r, \theta) = (C_1 r^{-1} + C_2 r - \frac{1}{4}v_\infty r^2) \sin^2 \theta \quad (۱۰-۲.۴)$$

سپس مؤلفه‌های سرعت با استفاده از جدول ۱-۲.۴، به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$v_r = -\frac{1}{r^2} \frac{d\psi}{d\theta} = \left( v_\infty - 2\frac{C_2}{r} - 2\frac{C_1}{r^2} \right) \cos \theta \quad (۱۱-۲.۴)$$

$$v_\theta = +\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left( -v_\infty + \frac{C_2}{r} - \frac{C_1}{r^2} \right) \sin \theta \quad (۱۲-۲.۴)$$

اکنون از دو شرط مرزی نخست نتیجه می‌شود که  $C_1 = -\frac{1}{4}v_\infty R^2$  و  $C_2 = \frac{3}{4}v_\infty R$ ، بنابراین داریم:

$$v_r = v_\infty \left( 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{R}{r} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right) \cos \theta \quad (۱۳-۲.۴)$$

$$v_\theta = -v_\infty \left( 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{R}{r} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right) \sin \theta \quad (۱۴-۲.۴)$$

این‌ها مؤلفه‌های سرعت‌اند که بدون اثبات، به صورت معادله‌های (۱-۶.۲) و (۲-۶.۲) ارائه شدند. برای به دست آوردن توزیع فشار، این مؤلفه‌های سرعت را در مؤلفه‌های  $r$  و  $\theta$  معادله ناویه-استوکس قرار می‌دهیم (در جدول ب.۶ آمده‌اند). پس از عملیات ریاضی طولانی، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 3 \left( \frac{\mu v_\infty}{R^2} \right) \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta \quad (۱۵-۲.۴)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{3}{2} \left( \frac{\mu v_\infty}{R} \right) \left( \frac{R}{r} \right)^2 \sin \theta \quad (۱۶-۲.۴)$$

از این معادله‌ها می‌توان انتگرال گرفت (مقایسه کنید با معادله‌های (۳-۶.۳) تا (۴-۶.۳)، و وقتی از این شرط مرزی استفاده کنیم که با  $r \rightarrow \infty$ ، فشار اصلاح شده  $P$  به  $p_0$  میل می‌کند (در فواصل دور از کره، فشار در صفحه  $z$  برابر صفر است)، نتیجه می‌شود:

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{3}{2} \left( \frac{\mu v_\infty}{R} \right) \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta \quad (۱۷-۲.۴)$$

این همان توزیع فشاری است که به صورت معادله (۶-۲.۴) ارائه شد.

در بخش ۶.۲ نشان دادیم که چگونه می‌توان از توزیع فشار و سرعت روی سطح کره انتگرال گرفت و نیروی پسا را به دست آورد. روش به دست آوردن نیرویی که سیال بر سطح جامد وارد می‌کند، روشی عام است. در این جا «نیروی جنبشی»  $F_k$  را با برابر گرفتن آهنگ انجام کار روی کره (نیرو  $\times$  سرعت) با آهنگ اتلاف ویسکوز در داخل سیال محاسبه می‌کنیم؛ در نتیجه:

$$F_k v_\infty = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \quad (۱۸-۲.۴)$$

با قرار دادن تابع  $(-\tau : \nabla \mathbf{v})$  در دستگاه مختصات کروی از جدول ب.۷، نتیجه می‌شود:

$$F_k v_\infty = \mu \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty \left[ 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 + \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 \right] r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \quad (19-2.4)$$

سپس توزیع‌های سرعت را از معادله‌های (۱۳-۲.۴) و (۱۴-۲.۴) در معادله (۱۹-۲.۴) قرار می‌دهیم. پس از انجام مشتق‌گیری‌ها و انتگرال‌گیری‌های طولانی، سرانجام نتیجه می‌شود:

$$F_k = \epsilon \pi \mu v_\infty R \quad (20-2.4)$$

که قانون استوکس است.

چنان‌که در بخش ۶.۲ گفته شد، قانون استوکس به  $Re < 0.1$  محدود می‌شود. می‌توان با برگشت به عقب و گنجاندن جمله  $[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}]$  عبارت نیروی پسا را اصلاح کرد. سپس با استفاده از روش بسط‌های مجانبی جورشده نتیجه زیر حاصل می‌شود:<sup>۴</sup>

$$F_k = \epsilon \pi \mu v_\infty R \left[ 1 + \frac{3}{16} Re + \frac{9}{160} Re^2 \left( \ln \frac{1}{4} Re + \gamma + \frac{5}{3} \ln 2 - \frac{323}{360} \right) + \frac{27}{640} Re^2 \ln \frac{1}{4} Re + O(Re^3) \right] \quad (21-2.4)$$

که در آن  $\gamma = 0.5772$  ثابت اویلر است. این عبارت برای اعداد رینولدز تا حدود ۱ مناسب است.

### ۳.۴ جریان سیالات غیریویسکوز با استفاده از پتانسیل سرعت<sup>۱</sup>

البته می‌دانیم که سیالات غیریویسکوز (یعنی سیالات فاقد ویسکوزیته) وجود خارجی ندارند. اما معادله اویلر برای حرکت که به صورت معادله (۹-۵.۳) نشان داده شد، برای توصیف سیالاتی با ویسکوزیته پایین با  $Re \gg 1$ ، در اطراف اجسامی با شکل هموار به دست آمده است و توزیع سرعت را، مگر در نزدیکی جسم و در ورای خط جدایش، به خوبی توصیف می‌کند. معادله گردشاری، یعنی معادله (۱-۲.۵۳) را می‌توان با حذف جمله حاوی ویسکوزیته سینماتیکی ساده کرد. به علاوه، اگر جریان پایا و دو بُعدی باشد، آن‌گاه جمله‌های  $\partial/\partial t$  و  $[\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}]$  صفر می‌شوند. یعنی گردشاری  $\mathbf{w} = [\nabla \times \mathbf{v}]$  در طول یک خط جریان ثابت است. اگر سیالی که به جسمی غوطه‌ور نزدیک می‌شود، در فواصل دور از جسم، گردشاری نداشته باشد، آن‌گاه جریان چنان خواهد بود که  $\mathbf{w} = [\nabla \times \mathbf{v}]$  در سراسر میدان جریان صفر خواهد شد؛ یعنی جریان غیرچرخشی خواهد بود.

خلاصه این‌که، اگر فرض کنیم (مقدار ثابت)  $\rho = 0$  و  $[\nabla \times \mathbf{v}] = 0$ ، آن‌گاه می‌توان انتظار داشت که توصیف خوب و معقولی از جریان سیالات با ویسکوزیته پایین، در اطراف اجسام غوطه‌ور در جریان‌های دو بُعدی به دست آید. این نوع جریان را جریان پتانسیل می‌نامند.

4. I. Proudman and J. R. A. Pearson, *J. Fluid Mech.*, **2**, 237-262 (1957); W. Chester and D. R. Breach, *J. Fluid Mech.*, **37**, 751-760 (1969).

جواب نظیر حالت ناپایای معادله (۲-۲.۴) در منبع زیر به دست آمده است:

F. Sy, J. W. Taunton, and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **16**, 386-391 (1970).

1. R. H. Kirchhoff, Chapter 7 in *Handbook of Fluid Dynamics* (R. W. Johnson, ed), CRC Press, Boca Raton, Fla. (1998).

البته می‌دانیم که این توصیف جریان در همسایگی سطوح جامد صادق نیست. در نزدیکی این سطوح از مجموعه متفاوتی از فرض‌ها استفاده می‌کنیم که منتهی به نظریه لایه مرزی می‌شوند که در بخش ۴.۴ شرح داده می‌شود. با حل کردن معادله‌های جریان پتانسیل برای «میدان دور» و معادله‌های لایه مرزی برای «میدان نزدیک»، و سپس تطبیق دادن جواب‌ها به‌طور مجانبی، به‌ازای  $Re$  بزرگ، می‌توان به درکی از کل جریان در اطراف جسمی هموار رسید.<sup>۲</sup> برای توصیف جریان پتانسیل کار را با معادله پیوستگی برای سیال تراکم‌ناپذیر و معادله اویلر برای سیال غیرویسکوز (معادله (۳-۵.۳)) شروع می‌کنیم:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{پیوستگی}): (۱-۳.۴)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{1}{2} v^2 - [\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{v}]] \right) = -\nabla P \quad (\text{حرکت}): (۲-۳.۴)$$

در معادله حرکت از اتحاد برداری  $[\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{v}]] = \nabla \cdot \frac{1}{2} v^2 - [\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}]$  استفاده کرده‌ایم (معادله (الف-۴-۲۳)) را ببینید). برای جریان دوبعدی غیرچرخشی، گزاره  $[\mathbf{v} \times \nabla \mathbf{v}] = 0$  عبارت است از:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \quad (\text{غیرچرخشی}): (۳-۳.۴)$$

و معادله پیوستگی عبارت است از:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{پیوستگی}): (۴-۳.۴)$$

می‌توان از معادله حرکت برای جریان غیرچرخشی پایا انتگرال گرفت تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\frac{1}{2} \rho (v_x^2 + v_y^2) + P = \text{مقدار ثابت} \quad (\text{حرکت}): (۵-۳.۴)$$

یعنی مجموع فشار و انرژی جنبشی و پتانسیل در واحد حجم، در سراسر میدان جریان ثابت است. این معادله برنولی برای جریان پتانسیل تراکم‌ناپذیر است و مقدار ثابت برای همه خطوط جریان یکسان است. (این نکته باید با معادله (۵-۳.۳))، یعنی معادله برنولی برای سیال تراکم‌پذیر در هر نوع جریان، در تضاد باشد؛ در آن‌جا، مجموع سه سهم روی هر خط جریان، مقدار ثابت، اما متفاوتی دارد.)

می‌خواهیم معادله‌های (۳-۳.۴) تا (۵-۳.۴) را حل کنیم تا  $v_x$  و  $v_y$  و  $P$  را به‌صورت توابعی از  $x$  و  $y$  به‌دست آوریم. در بخش گذشته دیدیم که می‌توان با نوشتن مؤلفه‌های سرعت برحسب تابع جریان  $\psi(x, y)$ ، معادله پیوستگی در جریان دوبعدی را برآورده کرد. اما هر برداری با کرل صفر را نیز می‌توان به‌صورت گرادین یک تابع اسکالر نوشت (یعنی  $[\nabla \times \mathbf{v}] = 0$  متضمن آن است که  $\mathbf{v} = -\nabla \phi$ ). در این صورت به‌راحتی می‌توان پتانسیل سرعت  $\phi(x, y)$  را معرفی کرد. به‌جای آن‌که با مؤلفه‌های  $v_x$  و  $v_y$  کار کنیم، کار کردن با  $\psi(x, y)$  و  $\phi(x, y)$  را انتخاب می‌کنیم. در این صورت روابط زیر را داریم:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{و} \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{تابع جریان}): (۷, ۶-۳.۴)$$

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{و} \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{پتانسیل سرعت}): (۹, ۸-۳.۴)$$

2. M. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Dynamics*, The Parabolic Press, Stanford, Cal. (1975).

اکنون معادله‌های (۳-۳.۴) و (۴-۳.۴) به طور خودکار برقرارند. با برابر نهادن عبارات‌های مؤلفه‌های سرعت، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۱۱-۳.۴)$$

این‌ها را معادله‌های کوشی-ریمان می‌نامند و باید با اجزای حقیقی و موهومی هر تابع تحلیلی<sup>۳</sup>  $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  برقرار باشند؛ در این تابع  $z = x + iy$  کمیت  $w(z)$  را پتانسیل مختلط می‌نامند. با مشتق‌گیری از معادله (۱۰-۳.۴) نسبت به  $x$  و از معادله (۱۱-۳.۴) نسبت به  $y$ ، و سپس انجام عمل جمع، نتیجه می‌شود  $\nabla^2 \phi = 0$ . یعنی هم  $\phi(x, y)$  و هم  $\psi(x, y)$  در معادله دو بُعدی لاپلاس صدق می‌کنند.<sup>۴</sup>

در نتیجه به دست آوردن این رابطه، آشکار می‌شود که هر تابع تحلیلی  $w(z)$  یک جفت تابع  $\phi(x, y)$  و  $\psi(x, y)$  نتیجه می‌دهد که پتانسیل سرعت و تابع جریان یکی از مسئله‌های جریان‌اند. به علاوه، منحنی‌های (مقدار ثابت)  $\phi(x, y)$  و (مقدار ثابت)  $\psi(x, y)$ ، خطوط هم‌پتانسیل و خطوط جریان این مسئله‌اند. مؤلفه‌های سرعت از معادله‌های (۶-۳.۴) و (۷-۳.۴)، یا معادله‌های (۸-۳.۴) و (۹-۳.۴)، و یا از معادله زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{dw}{dz} = -v_x + iv_y \quad (۱۲-۳.۴)$$

که در آن  $dw/dz$  سرعت مختلط نامیده می‌شود. وقتی مؤلفه سرعت معلوم شد، فشار اصلاح شده را می‌توان از معادله (۵-۳.۴) به دست آورد.

راه دیگر این است که خطوط هم‌پتانسیل و خطوط جریان را از تابع معکوس  $w = x(\phi, \psi) + iy(\phi, \psi)$  به دست آوریم که در آن  $z(w)$  هر تابع تحلیلی  $w$  است. بین توابع  $x(\phi, \psi)$  و  $y(\phi, \psi)$  می‌توان  $\psi$  را حذف کرد و نتیجه گرفت:

$$F(x, y, \phi) = 0 \quad (۱۳-۳.۴)$$

از حذف  $\phi$  به شیوه مشابه، نتیجه می‌شود:

$$G(x, y, \psi) = 0 \quad (۱۴-۳.۴)$$

با قرار دادن (مقدار ثابت)  $\phi$  در معادله (۱۳-۳.۴)، معادله‌های خطوط هم‌پتانسیل برای یکی از مسئله‌های جریان به دست می‌آید، و از قرار دادن (مقدار ثابت)  $\psi$  در معادله (۱۴-۳.۴) معادله‌های خطوط جریان حاصل می‌شود. مؤلفه‌های سرعت را می‌توان از معادله زیر به دست آورد:

$$-\frac{dz}{dw} = \frac{v_x + iv_y}{v_x^2 + v_y^2} \quad (۱۵-۳.۴)$$

<sup>۳</sup> فرض می‌شود دانشجوی تاحدودی با توابع تحلیلی با متغیر مختلط آشنا باشد. با مراجعه به منابع زیر می‌توانید اطلاعات بیشتری پیدا کنید.

V. L. Streeter, E. B. Wylie, and K. W. Bedford, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 9th ed. (1998), Chapter 8, and M. D. Greenberg, *Foundations of Applied Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1978), Chapters 11 and 12.

<sup>۴</sup> حتی برای جریان‌های سه بُعدی هم، فرض جریان غیرچرخشی، تعریف پتانسیل سرعت را امکان‌پذیر می‌کند. وقتی  $\mathbf{v} = -\nabla\phi$  در رابطه  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  قرار داده شود، معادله لاپلاس سه بُعدی  $\nabla^2 \phi = 0$  به دست می‌آید. جواب این معادله موضوع «نظریه پتانسیل» است که در مورد آن نوشته‌های زیادی موجود است. مثلاً نگاه کنید به

P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York (1953), Chapter 11; and J. M. Robertson, *Hydrodynamics in Theory and Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1965)

در منبع اخیر بر کاربردهای مهندسی معادله لاپلاس تأکید شده است. مسئله‌های بسیاری در مورد جریان در محیط متخلخل، رسانش گرما، نفوذ، و رسانش الکتریکی مطرح است که با معادله لاپلاس توصیف می‌شوند.

بنابراین با استفاده از هر تابع تحلیلی  $w(z)$  یا تابع معکوس آن  $z(w)$ ، می‌توان شبکهٔ جریانی با خطوط جریان (مقدار ثابت)  $\psi = \text{const}$  و خطوط هم‌پتانسیل (مقدار ثابت)  $\phi = \text{const}$  ترسیم کرد. اما یافتن  $w(z)$  یا  $z(w)$  برای صدق در مسئلهٔ جریان مفروض، بسیار دشوارتر است. چند روش خاص وجود دارد<sup>۵</sup> اما غالباً رجوع به جدول نگاشت‌های همدیس به مصلحت نزدیک‌تر است.<sup>۶</sup>

در دو مثال روشن‌گر بعدی نحوهٔ استفاده از پتانسیل مختلط  $w(z)$  را، برای توصیف جریان پتانسیل حول استوانه، و تابع معکوس  $z(w)$  برای حل مسئلهٔ جریان پتانسیل در داخل کانال نشان می‌دهیم. در مثال سوم مسئلهٔ جریان در همسایگی یک کنج را حل می‌کنیم که در بخش ۴.۴ و با استفاده از روش لایهٔ مرزی با عمق بیش‌تری بررسی خواهد شد. چند نکتهٔ کلی را باید به‌خاطر بسپارید:

- (الف) خطوط جریان در همه‌جا بر خطوط هم‌پتانسیل عمودند. این خاصیت، که از معادله‌های (۳.۴-۱۰) و (۳.۴-۱۱) مشهود است، برای ترسیم تقریبی شبکه‌های جریان سودمند واقع می‌شود؛
- (ب) خطوط جریان و خطوط هم‌پتانسیل را می‌توان به‌جای هم به‌کاربرد تا جواب یک مسئلهٔ جریان دیگر حاصل شود. این نتیجه از قسمت (الف) و از این واقعیت حاصل می‌شود که هم  $\phi$  و هم  $\psi$  جواب‌های معادلهٔ لاپلاس دو بُعدی‌اند؛
- (ج) هر خط جریان را می‌توان با یک سطح جامد جایگزین کرد. این نتیجه از این شرط مرزی حاصل می‌شود که مؤلفهٔ قائم سرعت سیال در سطح جامد صفر است. مؤلفهٔ مماس محدودیت ندارد، زیرا در جریان پتانسیل فرض می‌شود که سیال بتواند آزادانه در طول سطح بلغزد (فرض لغزش کامل).

#### مثال ۱۴.۴

جریان پتانسیل در اطراف استوانه

(الف) نشان دهید که پتانسیل مختلط:

$$w(z) = -v_{\infty} R \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right) \quad (۱۶-۳.۴)$$

جریان پتانسیل در اطراف استوانه‌ای به شعاع  $R$  را توصیف می‌کند، هرگاه سرعت تقرب  $v_{\infty}$  در جهت مثبت  $x$  باشد؛

(ب) مؤلفه‌های بردار سرعت را بیابید؛

(ج) توزیع فشار روی سطح استوانه را، وقتی فشار اصلاح شده در فواصل دور از استوانه برابر  $\mathcal{P}_{\infty}$  باشد، به‌دست آورید.

حل

(الف) برای یافتن تابع جریان و پتانسیل سرعت، پتانسیل مختلط را به صورت  $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  می‌نویسیم:

$$w(z) = -v_{\infty} x \left( 1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) - iv_{\infty} y \left( 1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (۱۷-۳.۴)$$

بنابراین تابع جریان عبارت است از:

$$\psi(x, y) = -v_{\infty} y \left( 1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (۱۸-۳.۴)$$

5. J. Fuka, Chapter 21 in K. Rektorys, *Survey of Applicable Mathematics*, MIT Press, Cambridge, Mass. (1969).

6. H. Kober, *Dictionary of Conformal Representations*, Dover, New York, 2nd edition (1957).



برای ترسیم خطوط جریان راحت تر این است که معادله (۱۸-۳-۴) را به صورت بدون بُعد بنویسیم:

$$\Psi(X, Y) = Y \left( 1 - \frac{1}{X^2 + Y^2} \right) \quad (۱۹-۳-۴)$$

که در آن  $Y = y/R$ ،  $X = x/R$ ،  $\Psi = \psi/v_\infty R$

در شکل ۱-۳-۴، خطوط جریان به صورت منحنی‌های (مقدار ثابت)  $\Psi$  ترسیم شده‌اند. خط جریان  $\Psi = 0$  دایره واحد را نتیجه می‌دهد که معرف سطح استوانه است. خط جریان  $\Psi = -\frac{1}{4}$  از نقطه  $X = 0$ ،  $Y = 1$  می‌گذرد و غیره.

(ب) مؤلفه‌های سرعت را می‌توان با استفاده از معادله‌های (۶-۳-۴) و (۷-۳-۴) از تابع جریان به دست آورد. این معادله‌ها را می‌توان از سرعت مختلط، طبق معادله (۱۲-۳-۴) نیز، به صورت زیر، به دست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= -v_\infty \left( 1 - \frac{R^2}{z^2} \right) = -v_\infty \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} e^{-2i\theta} \right) \\ &= -v_\infty \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \right) \end{aligned} \quad (۲۰-۳-۴)$$

بنابراین مؤلفه‌های سرعت به صورت تابع مکان عبارت‌اند از:

$$v_x = v_\infty \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \quad \text{و} \quad v_y = -v_\infty \left( \frac{R^2}{r^2} \sin 2\theta \right) \quad (۲۲, ۲۱-۳-۴)$$

(ج) روی سطح استوانه  $r = R$ ، و داریم:

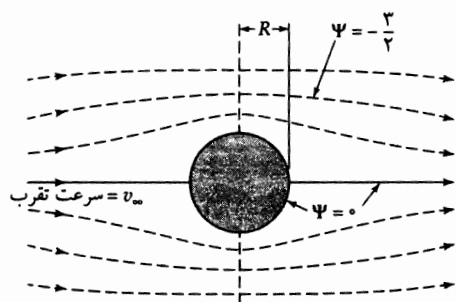
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_\infty^2 [(1 - \cos 2\theta)^2 + (\sin 2\theta)^2] = 4v_\infty^2 \sin^2 \theta \quad (۲۳-۳-۴)$$

که در آن  $\theta$  برابر صفر یا  $\pi$  و سرعت سیال صفر است؛ این نقاط را نقاط سکون می‌نامند. از معادله (۵-۳-۴)، می‌دانیم که:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 + P_\infty \quad (۲۴-۳-۴)$$

سیس از دو معادله آخر توزیع فشار روی سطح استوانه به دست می‌آید:

$$(P - P_\infty) = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad (۲۵-۳-۴)$$



شکل ۱-۳-۴ خطوط جریان برای جریان پتانسیل در اطراف استوانه، طبق معادله (۱۹-۳-۴).

توجه داشته باشید که توزیع فشار اصلاح شده حول محور  $x$  متقارن است؛ یعنی برای جریان پتانسیل پسای شکلی بر استوانه وارد نمی‌شود (پارادوکس دالامبر).<sup>۷</sup> البته اکنون می‌دانیم که پارادوکس دالامبر به راستی پارادوکس نیست، بلکه صرفاً نتیجه این واقعیت است که نمی‌توان شرط عدم لغزش در فصل مشترک را در مورد سیال غیرویسکوز، به کار برد.

### مثال ۲-۳.۴

جریان ورودی به کانال مستطیلی نشان دهید که تابع معکوس

$$z(w) = \frac{w}{v_\infty} + \frac{b}{\pi} \exp(\pi w / bv_\infty) \quad (۲۶-۳.۴)$$

معرف جریان پتانسیل ورودی به کانالی با نیم‌عرض  $b$  است. در این جا  $v_\infty$  اندازه سرعت در پایین دست ورودی کانال و دور از ورودی است.

حل

ابتدا متغیرهای بدون بُعد فاصله:

$$X = \frac{\pi x}{b} \quad Y = \frac{\pi y}{b} \quad Z = X + iY = \frac{\pi z}{b} \quad (۲۷-۳.۴)$$

و کمیت‌های بدون بُعد:

$$\Phi = \frac{\pi \phi}{bv_\infty} \quad \Psi = \frac{\pi \psi}{bv_\infty} \quad W = \Phi + i\Psi = \frac{\pi w}{bv_\infty} \quad (۲۸-۳.۴)$$

را معرفی می‌کنیم. اکنون می‌توان تابع معکوس معادله (۲۶-۳.۴) را برحسب کمیت‌های بدون بُعد بیان و آن را به دو جزء حقیقی و موهومی تفکیک کرد:

$$Z = W + e^W = (\Phi + e^\Phi \cos \Psi) + i(\Psi + e^\Phi \sin \Psi) \quad (۲۹-۳.۴)$$

بنابراین:

$$X = \Phi + e^\Phi \cos \Psi \quad Y = \Psi + e^\Phi \sin \Psi \quad (۳۱, ۳۰-۳.۴)$$

اکنون می‌توان  $\Psi$  را برابر مقداری ثابت گرفت و خط جریان  $Y = Y(X)$  را برحسب پارامتر  $\Phi$  بیان کرد. مثلاً، خط جریان  $\Psi = 0$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$X = \Phi + e^\Phi \quad Y = 0 \quad (۳۳, ۳۲-۳.۴)$$

وقتی  $\Phi$  از  $-\infty$  تا  $+\infty$  تغییر می‌کند،  $X$  هم از  $-\infty$  به  $+\infty$  می‌رود؛ بنابراین محور  $X$  خط جریان است. خط جریان  $\Psi = \pi$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$X = \Phi - e^\Phi \quad Y = \pi \quad (۳۵, ۳۴-۳.۴)$$

<sup>۷</sup> پارادوکس‌های هیدرودینامیکی در منبع زیر شرح داده شده‌اند:

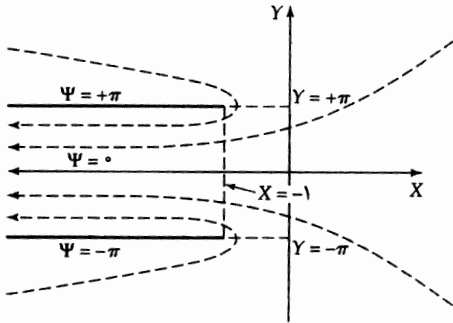
وقتی  $\Phi$  از  $-\infty$  تا  $+\infty$  تغییر می‌کند،  $X$  از  $-\infty$  به  $-1$  می‌رسد و دوباره به  $-\infty$  برمی‌گردد؛ یعنی خط جریان روی خودش بازمی‌گردد. این خط جریان را به‌عنوان یکی از جدارهای جامد کانال مستطیلی انتخاب می‌کنیم. به‌همین ترتیب  $\Psi = -\pi$  جدار دیگر است. در این صورت خطوط جریان  $\Psi = C$ ، که در آن  $-\pi < C < \pi$ ، الگوی جریان را برای جریان ورودی به کانال مستطیلی، مطابق شکل ۲-۳.۴، نشان می‌دهند. حال می‌توان با استفاده از معادله (۲۹-۳.۴) مشتق  $-dz/dw$  را به‌دست آورد:

$$-\frac{dz}{dw} = -\frac{1}{v_\infty} \frac{dZ}{dW} = -\frac{1}{v_\infty} (1 + e^W) = -\frac{1}{v_\infty} (1 + e^\Phi \cos \Psi + ie^\Phi \sin \Psi) \quad (۳۶-۳.۴)$$

از مقایسه این عبارت با معادله (۱۵-۳.۴) مؤلفه‌های سرعت به‌دست می‌آیند:

$$\frac{v_x v_\infty}{v^2} = -(1 + e^\Phi \cos \Psi) \quad \frac{v_y v_\infty}{v^2} = -(e^\Phi \sin \Psi) \quad (۳۷-۳.۴)$$

این معادله‌ها را باید در ارتباط با معادله‌های (۳۰-۳.۴) و (۳۱-۳.۴) به‌کار برد تا  $\Phi$  و  $\Psi$  حذف شوند و مؤلفه‌های سرعت به‌صورت توابعی از مکان به‌دست آیند.



شکل ۲-۳.۴ خطوط جریان برای جریان پتانسیل ورودی به کانال مستطیلی، طبق پیش‌بینی نظریه جریان پتانسیل در معادله‌های (۳۰-۳.۴) و (۳۱-۳.۴). در شکل ۵-۳.۴ الگوی جریان واقع‌گرایانه‌تری نشان داده شده‌است.

### مثال ۳-۳.۴

جریان در نزدیکی کنج<sup>۸</sup>

در شکل ۳-۳.۴ جریان پتانسیل در همسایگی دو جدار نشان داده شده‌است که با کنج  $O$  به هم می‌رسند. جریان در همسایگی این کنج را می‌توان با پتانسیل مختلط توصیف کرد:

$$w(z) = -cz^\alpha \quad (۳۸-۳.۴)$$

که در آن  $c$  مقداری ثابت است. اکنون می‌توانیم دو وضعیت را در نظر بگیریم: (۱) «جریان در کنج داخلی» با  $\alpha > 1$ ، و (۲) «جریان در کنج خارجی» با  $\alpha < 1$ .

(الف) مؤلفه‌های سرعت را به‌دست آورید؛

(ب) سرعت مماسی را در هر دو بخش جدار به‌دست آورید؛

(ج) نحوه به‌دست آوردن خطوط جریان را توصیف کنید؛

(د) چگونه می‌توان این نتیجه را در مورد جریان در اطراف یک گوه به‌کار برد؟

حل

(الف) مؤلفه‌های سرعت از سرعت مختلط به دست می‌آیند:

$$\frac{dw}{dz} = -\alpha r^{\alpha-1} = -\alpha r^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\theta} \quad (39-3.4)$$

بنابراین از معادله (۱۲-۳.۴) نتیجه می‌شود:

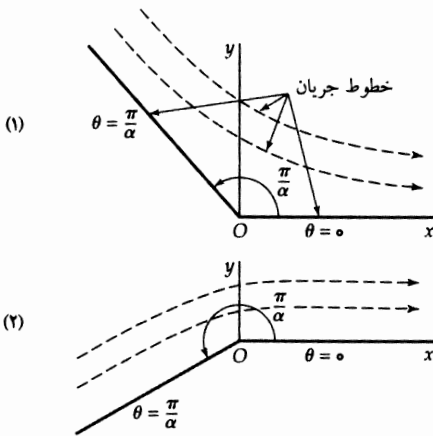
$$v_x = +\alpha r^{\alpha-1} \cos(\alpha - 1)\theta \quad v_y = -\alpha r^{\alpha-1} \sin(\alpha - 1)\theta \quad (41, 40-3.4)$$

(ب) سرعت مماسی در جدارها برابر است با:

$$v_x = v_r = \alpha r^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{در } \theta = 0 \quad (42-3.4)$$

$$v_r = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \quad \text{در } \theta = \pi/\alpha \quad (43-3.4)$$

$$\begin{aligned} &= +\alpha r^{\alpha-1} \cos(\alpha - 1)\theta \cos \theta \\ &\quad - \alpha r^{\alpha-1} \sin(\alpha - 1)\theta \sin \theta \\ &= \alpha r^{\alpha-1} \cos \alpha \theta = -\alpha r^{\alpha-1} \end{aligned}$$



شکل ۳-۳.۴ جریان پتانسیل در نزدیکی کنج. در سمت چپ جدار،  $v_r = -\alpha r^{\alpha-1}$  و در سمت راست  $v_r = +\alpha r^{\alpha-1}$  (جریان در کنج داخلی، با  $\alpha > 1$ ؛ (۲) جریان در کنج خارجی، با  $\alpha < 1$ ).

بنابراین در مورد (۱)، با نزدیک شدن به محل تقاطع، سرعت سیال ورودی در جدار کاهش می‌یابد و سیالی که از جدار دور می‌شود، با دور شدن از محل تقاطع سرعت بیش‌تری کسب می‌کند. در مورد (۲) در کنج که  $\alpha - 1$  منفی است، مؤلفه‌های سرعت نامتناهی می‌شوند.

(ج) پتانسیل مختلط را می‌توان به دو جزء حقیقی و موهومی تفکیک کرد:

$$w = \phi + i\psi = -cr^\alpha (\cos \alpha \theta + i \sin \alpha \theta) \quad (44-3.4)$$

بنابراین تابع جریان عبارت است از:

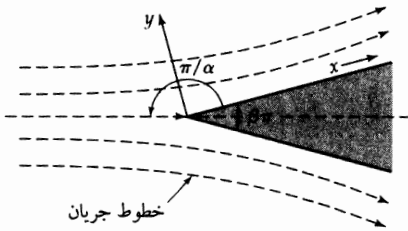
$$\psi = -cr^\alpha \sin \alpha \theta \quad (45-3.4)$$

برای به دست آوردن خطوط جریان، مقادیرهای مختلفی برای تابع جریان انتخاب می‌شود. مثلاً  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  و سپس به‌ازای هر مقدار،  $r$  به‌صورت تابعی از  $\theta$  ترسیم می‌شود.

(د) چون برای جریان ایده آل هر خط جریان را می توان با یک جدار جایگزین کرد و برعکس، نتایج به دست آمده در این جا برای  $\alpha > 1$ ، جریان غیریسکوز روی گوه را توصیف می کنند (شکل ۳-۴-۴ را ببینید). از این نکته در مثال ۳-۴-۴ استفاده خواهیم کرد.

چند تذکر ضروری در مورد قابلیت کاربرد نظریه جریان پتانسیل در مورد سیستم های واقعی در دستور کار است: (الف) برای جریان در اطراف استوانه، خطوط جریان نشان داده شده در شکل ۳-۴-۱ با هیچ یک از رژیم های جریان ترسیم شده در شکل ۳-۴-۲ تطبیق ندارند.

(ب) برای جریان ورودی به کانال، الگوی جریان پیش بینی شده در شکل ۳-۴-۲ در داخل کانال و درست در بالادست ورودی آن، غیرواقعی است. تقریبی بسیار بهتر در مورد رفتار واقعی جریان در شکل ۳-۴-۵ ارائه شده است.



شکل ۳-۴-۴ جریان پتانسیل در طول گوه. در سطح بالایی گوه،  $v_x = c\alpha x^{\alpha-1} = c'x^{\beta/(2-\beta)}$  که در آن  $c' = c[2/(2-\beta)]$  و  $\beta$  با رابطه  $\beta = (2/\alpha)(\alpha-1)$  به هم مربوط می شوند.

هر دو نقیصه نظریه مقدماتی پتانسیل از پدیده جدایش ناشی می شوند: منظور، جدا شدن خطوط جریان از سطح مرزی است.

جدایش در کنج های تیز مرزهای جامد، مانند جریان در داخل کانال و در سطوح پایین دستی اجسام دماغه دار، مانند جریان در اطراف استوانه، اتفاق می افتد. در حالت کلی، جدایش احتمالاً در ناحیه هایی رخ می دهد که در آن ها فشار در جهت جریان افزایش می یابد. تحلیل های جریان پتانسیل در ناحیه جدا شده سودمند نیستند. اما می توان در بالادست این ناحیه از آن ها استفاده کرد، به شرط آن که موقعیت خط جریان جدایش معلوم باشد. روش های انجام چنین محاسباتی بسیار تکامل یافته اند. گاهی مکان خط جریان جدایش را می توان با استفاده از نظریه جریان پتانسیل به صورت موفقیت آمیزی تخمین زد. این نکته در مورد جریان ورودی به کانال صادق است و در حقیقت، شکل ۳-۴-۵ به این ترتیب به دست آمد.<sup>۹</sup> برای سیستم های دیگر، مانند جریان در اطراف استوانه، محل نقطه جدایش و خط جریان جدایش باید با آزمایش تعیین شود. حتی وقتی مکان خط جریان معلوم نباشد، جواب های جریان پتانسیل ممکن است ارزشمند باشند. مثلاً میدان جریان مثال ۳-۴-۱ در تخمین ضرایب برخورد آئروسول روی استوانه ها به کار آمده است.<sup>۱۰</sup> این موفقیت نتیجه این واقعیت است که اغلب برخوردهای ذره در نزدیکی نقطه سکون پیشین روی می دهند؛ جایی که جریان چندان تحت تأثیر مکان خط جریان جدایش نیست. بر اساس محاسبات جریان پتانسیل و با چشم پوشی از پدیده جدایش، می توان نتیجه های شبه کمی ارزشمندی در مورد رفتار انتقال گرما و انتقال جرم گرفت. در همه فوننی که در این بخش توصیف شد فرض می شود که می توان بردار سرعت را به صورت گرادینان تابعی اسکالر نوشت که در معادله لاپلاس صدق می کند. در این جا اهمیت نقش معادله حرکت کم تر از اهمیت نقش آن

9. H. von Helmholtz, *Phil Mag.* (4), **36**, 337-345 (1868).

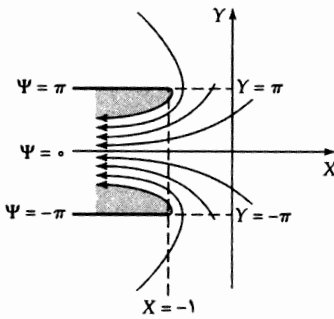
هرمان لودویگ فردیناند فون هلمهولتز (۱۸۹۴-۱۸۲۱) در رشته پزشکی تحصیل کرد و پزشک ارتش شد؛ سپس در مقام استاد رشته طب، و پس از آن فیزیک، در دانشگاه برلین به تدریس پرداخت.

10. W. E. Ranz, *Principles of Inertial Impaction*, Bulletin #66, Department of Engineering Research, Pennsylvania State University, University Park, Pa. (1956).

در جریان‌های ویسکوز است که قبلاً توصیف شدند و کاربرد اصلی آن در تعیین توزیع فشار پس از معلوم شدن توزیع‌های سرعت است.

#### ۴.۴ جریان در نزدیکی سطوح جامد طبق نظریه لایه مرزی

مثال‌های جریان پتانسیل که در بخش قبل شرح داده شدند، نحوه پیش‌بینی میدان جریان توسط تابع جریان و پتانسیل سرعت را نشان دادند. جواب‌های توزیع سرعت که از این طریق به دست آمد در شرط مرزی متداول «عدم لغزش» در جدار صدق می‌کنند. در نتیجه، جواب‌های جریان پتانسیل برای توصیف پدیده‌های انتقال در همسایگی نزدیک جدار ارزشی ندارند. مخصوصاً، نیروی پسی ویسکوز را نمی‌توان به دست آورد و توصیف قابل اعتماد انتقال گرما و جرم فاز میانی، در سطوح جامد، امکان‌پذیر نیست.



شکل ۵-۳-۴. جریان پتانسیل ورودی به کانال مستطیلی با جدایش، طبق محاسبه انجام شده توسط اچ. فون هلمهولتز در *Phil. Mag.*, 36, 337- (1868). خطوط جریان به ازای  $\Psi = \pm\pi$  از سطح داخلی کانال جدا می‌شوند. سرعت در طول این خط جریان جدا شده ثابت است. بین خطوط جریان جدا شده و جدار ناحیه‌ای خالی وجود دارد که سایه خورده است.

برای توصیف رفتار در نزدیکی جدار، از نظریه لایه مرزی استفاده می‌کنیم. برای توصیف جریان ویسکوز، جوابی تقریبی برای مؤلفه‌های سرعت در لایه مرزی بسیار نازکی در نزدیکی جدار، با احتساب ویسکوزیته، به دست می‌آوریم. سپس این جواب را با جواب جریان پتانسیلی که جریان را در بیرون لایه مرزی توصیف می‌کند «جور می‌کنیم». موفقیت این روش به نازکی لایه مرزی بستگی دارد که در صورت بالا بودن عدد رینولدز حاصل می‌شود.

جریان دو بُعدی حالت پایای سیالی را با  $\rho$  و  $\mu$  ثابت در اطراف جسمی غوطه‌ور، مانند جسم نشان داده شده در شکل ۱-۴-۴ در نظر می‌گیریم. تأکید می‌کنیم که تغییرات مهم سرعت در ناحیه‌ای بسیار نازک رخ می‌دهد که همان لایه مرزی است و آثار آنجا در آن اهمیت ندارند. حال می‌توانیم یک دستگاه مختصات دکارتی را تشکیل دهیم که در آن  $x$  به طرف پایین دست است و  $y$  بر سطح جامد عمود است. در این صورت معادله پیوستگی و معادله‌های ناویه-استوکس چنین نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (۱-۴-۴)$$

$$\left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (۲-۴-۴)$$

$$\left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (۳-۴-۴)$$

بعضی از جمله‌های این معادله‌ها را می‌توان با استدلال مرتبه بزرگی، حذف کرد. از سه کمیت به عنوان «معیار» استفاده می‌کنیم: سرعت تقرب  $v_\infty$ ، بعد خطی  $l$ ، جسم غوطه‌ور، و ضخامت متوسط  $\delta$  لایه مرزی. این فرض که  $\delta \ll l$  به ما اجازه می‌دهد چند محاسبه تقریبی برای تعیین مرتبه بزرگی انجام دهیم.

چون  $v_x$  از صفر روی سطح جامد تا  $v_\infty$  در لبه خارجی لایه مرزی تغییر می‌کند، می‌توان گفت که:

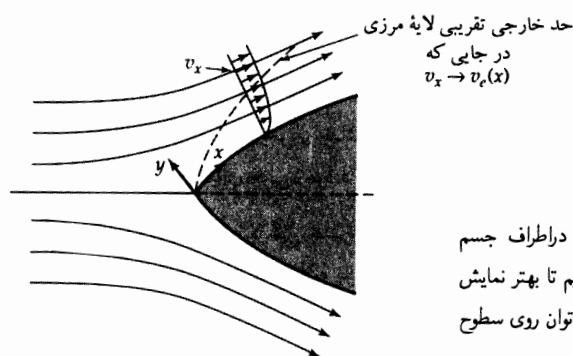
$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = O\left(\frac{v_\infty}{\delta_0}\right) \quad (۴-۴.۴)$$

که در آن  $O$  یعنی «مرتبه بزرگی». به همین ترتیب، تغییر ماکزیمم در  $v_x$  روی طول  $l_0$  سطح،  $v_\infty$  خواهد بود، به طوری که:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = O\left(\frac{v_\infty}{l_0}\right) \text{ و } \frac{\partial v_y}{\partial y} = O\left(\frac{v_\infty}{l_0}\right) \quad (۵-۴.۴)$$

در این جا از معادله پیوستگی برای به دست آوردن یک مشتق دیگر استفاده کرده‌ایم (در این جا فقط به مرتبه بزرگی فکر می‌کنیم، نه به علامت کمیت‌ها). با انتگرال‌گیری از رابطه دوم نتیجه می‌شود که  $v_y = O((\delta_0/l_0)v_\infty) \ll v_x$ . اکنون می‌توان جمله‌های مختلف معادله (۲-۴.۴) را به صورت زیر تخمین زد:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = O\left(\frac{v_\infty^2}{l_0}\right); v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = O\left(\frac{v_\infty^2}{l_0}\right); \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = O\left(\frac{v_\infty}{l_0^2}\right); \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{v_\infty}{\delta_0^2}\right) \quad (۶-۴.۴)$$



شکل ۱-۴.۴ دستگاه مختصات برای جریان دوبعدی در اطراف جسم غوطه‌ور. ضخامت لایه مرزی را با اغراق زیاد نشان داده‌ایم تا بهتر نمایش داده شود. چون لایه مرزی در حقیقت نسبتاً نازک است، می‌توان روی سطوح خمیده، به طور موضعی، از مختصات قائم استفاده کرد.

این معادله نشان می‌دهد که  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ ، به طوری که می‌توان با اطمینان از جمله اول چشم‌پوشی کرد. در لایه مرزی انتظار می‌رود که مرتبه بزرگی جمله‌های سمت چپ معادله (۲-۴.۴) با مرتبه بزرگی جمله‌های سمت راست برابر باشد و بنابراین:

$$\frac{v_\infty^2}{l_0} = O\left(\nu \frac{v_\infty}{\delta_0^2}\right) \text{ یا } \frac{\delta_0}{l_0} = O\left(\sqrt{\frac{\nu}{v_\infty l_0}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right) \quad (۷-۴.۴)$$

دومین رابطه نشان می‌دهد که ضخامت لایه مرزی، در مقایسه با ابعاد جسم غوطه‌ور در جریان‌های با عدد رینولدز بالا، کوچک است.

به همین ترتیب، به کمک معادله (۷-۴.۴)، می‌توان نشان داد که مرتبه بزرگی سه مشتق موجود در معادله (۳-۴.۴) یکسان است:

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}, v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}, \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = O\left(\frac{v_\infty^2 \delta_0}{l_0^2}\right) \gg \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \quad (۸-۴.۴)$$

مقایسه این نتیجه با معادله (۶-۴.۴) نشان می‌دهد که  $\frac{\partial P}{\partial y} \ll \frac{\partial P}{\partial x}$  یعنی به مؤلفه  $y$  معادله حرکت نیازی نیست و فشار اصلاح شده را می‌توان صرفاً تابع  $x$  دانست.

در نتیجه این استدلال‌های مرتبه بزرگی، به معادله‌های لایه مرزی پرناتل می‌رسیم<sup>۱</sup>:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (۹-۴.۴) \text{ (پیوستگی):}$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (۱۰-۴.۴) \text{ (حرکت):}$$

فرض می‌شود فشار اصلاح‌شده  $P(x)$  را از حل مسئله متناظر جریان پتانسیل، یا با اندازه‌گیری‌های تجربی، به دست آورده‌ایم.

شرایط مرزی معمول عبارت‌اند از شرط عدم لغزش (در  $y = 0$ ، داریم  $v_x = 0$ )، شرط عدم انتقال جرم از طریق جدار (در  $y = 0$ ، داریم  $v_y = 0$ )، و این نکته که در لایه خارجی لایه مرزی، سرعت در سرعت خارجی (جریان پتانسیل) ادغام می‌شود ( $v_x(x, y) \rightarrow v_e(x)$ )، تابع  $v_e(x)$ ، طبق معادله جریان پتانسیل حرکت، یعنی معادله (۵-۳.۴) به  $P(x)$  مربوط می‌شود. در نتیجه جمله  $(1/\rho)(dP/dx)$  در معادله (۱۰-۴.۴) را می‌توان با جمله  $v_e(dv_e/dx)$  برای جریان پایا جایگزین کرد. بنابراین معادله (۱۰-۴.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_e \frac{dv_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (۱۱-۴.۴)$$

می‌توان با استفاده از این شرط مرزی که در  $y = 0$ ، داریم  $v_y = 0$  (یعنی عدم انتقال جرم)، معادله پیوستگی را حل کرد و  $v_y$  را به دست آورد و سپس عبارت حاصل را در معادله (۱۱-۴.۴) قرار داد تا نتیجه شود:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \left( \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} d\bar{y} \right) \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_e \frac{dv_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (۱۲-۴.۴)$$

این یک معادله دیفرانسیل جزئی با متغیر وابسته  $v_x$  است.

اکنون می‌توان این معادله را در  $\rho$  ضرب کرد و از  $y = 0$  تا  $y = \infty$  انتگرال گرفت تا موازنه اندازه حرکت فون کارمان حاصل شود<sup>۲</sup>:

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho v_x (v_e - v_x) dy + \frac{dv_e}{dx} \int_0^{\infty} \rho (v_e - v_x) dy \quad (۱۳-۴.۴)$$

۱. لودویگ پرناتل (۱۸۷۵-۱۹۵۳)، که در هانور و گوتینگن تدریس کرد و بعدها مدیر انستیتو دینامیک سیالات قیصر ویلهلم شد؛ یکی از اشخاصی بود که در آغاز قرن بیستم، آینده حوزه کاری خود را شکل داد؛ او در تحقیق روی جریان متلاطم و انتقال گرما سهم داشت، اما برجسته‌ترین دستاورد او پی‌ریزی معادله‌های لایه مرزی بود.

L. Prandtl, *Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresses* (Heidelberg, 1904), Leipzig, pp. 484-491; L. Prandtl, *Gesammelte Abhandlungen*, 2, Springer-Verlag, Berlin (1961), pp. 575-584.

برای آشنایی با شرحی مقدماتی در مورد عبارت‌هایی که به‌طور مجانبی تطبیق یافته‌اند، نگاه کنید به

D. J. Acheson, *Elementary Fluid Mechanics*, Oxford University Press (1990), pp. 269-271.

در منبع زیر شرح مفصلی در باب این موضوع آمده است

M. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Dynamics*, The Parabolic Press, Stanford, Cal (1975).

2. Th. von Kármán, *Zeits. für angew. Math. u. Mech.*, 1, 233-252 (1921).

تئودور فون کارمان در مجارستان زاده شد و در گوتینگن، آخن و انستیتو تکنولوژی کالیفرنیا تدریس کرد؛ او سهم به‌سزایی در پی‌ریزی نظریه متلاطم و آئرو دینامیک داشت.

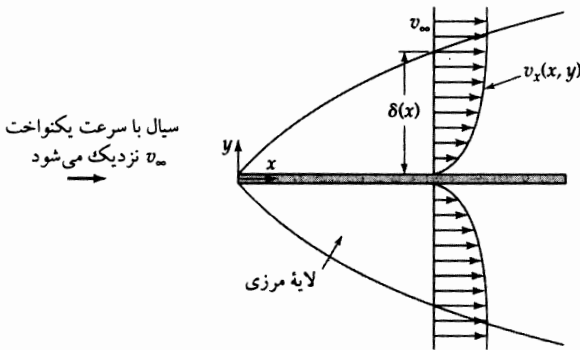


در این جا از این شرط استفاده کرده ایم که وقتی  $y \rightarrow \infty$ ، داریم  $v_x(x, y) \rightarrow v_\infty$ . کمیت واقع در سمت چپ معادله (۱۳-۴.۴) تنش برشی است که سیال بر جدار وارد می کند:  $-\tau_{yx}|_{y=0}$ .

معادله های اصلی لایه مرزی پراتل، یعنی معادله های (۹-۴.۴) و (۱۰-۴.۴) به معادله های (۱۱-۴.۴)، (۱۲-۴.۴) و (۱۳-۴.۴) تبدیل شده اند و هر یک از این ها را می توان به منزله نقطه شروع برای حل مسائل لایه مرزی دوبعدی به کار برد. معادله (۱۳-۴.۴)، با عبارات های فرضی برای توزیع سرعت، اساس بسیاری از «جواب های تقریبی لایه مرزی» است (مثال ۱-۴.۴ را ببینید). از طرف دیگر، جواب های تحلیلی یا عددی معادله های (۱۱-۴.۴) یا (۱۲-۴.۴) را «جواب های دقیق لایه مرزی» می نامند (مثال ۲-۴.۴ را ببینید).

بחי که در این جا مطرح شد به جریان های دوبعدی، آرام و پایای سیال هایی با چگالی و ویسکوزیته ثابت مربوط می شود. معادله های متناظر برای جریان ناپایا، جریان متلاطم، سیال با خواص متغیر، و لایه های مرزی سه بعدی نیز موجود است. ۶.۵، ۴.۳.

اگرچه تعداد زیادی جواب دقیق و تقریبی لایه مرزی به دست آمده است و کاربرد این نظریه در مورد اجسام هموار نسبتاً موفقیت آمیز بوده است، هنوز باید تحقیقات زیادی روی جریان هایی با گرادیان فشار معکوس (یعنی  $\partial P / \partial x$  مثبت) در معادله (۱۰-۴.۴) انجام داد؛ مانند جریان در پایین دست جسمی یخ. در چنین جریان هایی معمولاً خطوط جریان، قبل از رسیدن به پشت جسم، از سطح جدا می شوند (شکل ۲-۷.۳ را ببینید). رهیافت لایه مرزی که در این جا توصیف شد فقط در ناحیه بالادست نقطه جدایش، برای چنین جریان هایی مناسب است.



شکل ۲-۴.۴ تشکیل لایه مرزی در نزدیکی صفحه تخت با ضخامت قابل چشم پوشی.

**مثال ۲-۴.۲**

جریان آرام روی صفحه تخت (جواب تقریبی) با استفاده از موازنه اندازه حرکت فون کارمان، توزیع سرعت حالت پایا را در نزدیکی صفحه تخت نیمه نامتناهی، واقع در جریان مماسی با سرعت تقرب  $v_\infty$  تخمین بزنید (شکل ۲-۴.۴ را ببینید). جواب جریان پتانسیل برای این سیستم عبارت است از:  $v_e = v_\infty$ .

3. H. Schlichting and K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*, Springer Verlag, Berlin, 8th edition (2000).  
 4. L. Rosenhead, *Laminar Boundary Layers*, Oxford University Press, London (1963).  
 5. K. Stewartson, *The Theory of Laminar Boundary Layers in Compressible Fluids*, Oxford University Press (1964).  
 6. W. H. Dorrance, *Viscous Hypersonic Flow*, McGraw-Hill, New York (1962).

حل

به طور شهودی می‌دانیم که توزیع سرعت  $v_x(y)$  چه شکلی دارد. بنابراین می‌توانیم صورت  $v_x(y)$  را حدس بزنیم و آن را مستقیماً در موازنه فون کارمان قرار دهیم. یک انتخاب منطقی این است که فرض کنیم  $v_x(y)$  تابع  $y/\delta$  است و  $\delta(x)$  «ضخامت» لایه مرزی است. این تابع چنان انتخاب می‌شود که در  $y = 0$ ، داشته‌باشیم  $v_x = 0$  و در  $y = \delta$  داشته‌باشیم  $v_x = v_e$ . این فرض در حکم این است که توزیع‌های سرعت را به‌ازای مقادیر مختلف  $x$  از لحاظ هندسی مشابه بدانیم. وقتی این توزیع فرضی را در موازنه اندازه حرکت فون کارمان قرار دهیم، یک معادله دیفرانسیل معمولی برای ضخامت لایه مرزی  $\delta(x)$  حاصل می‌شود. با حل این معادله، می‌توان از  $\delta(x)$  که به این ترتیب به دست آمده است، برای تعیین توزیع سرعت و سایر کمیت‌های مورد نظر استفاده کرد.

در مسئله فعلی، یکی از حدس‌های قابل قبول برای توزیع سرعت، با شکلی منطقی، عبارت است از:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \quad \text{داریم: } 0 \leq y \leq \delta(x) \quad (14-4.4)$$

$$\frac{v_x}{v_\infty} = 1 \quad \text{داریم: } y \geq \delta(x) \quad (15-4.4)$$

این نتیجه «منطقی» است زیرا توزیع سرعت شرط عدم لغزش را در  $y = 0$  برآورده می‌کند و در لبه خارجی لایه مرزی داریم  $\partial v_x / \partial y = 0$ . با قرار دادن این توزیع در موازنه انتگرال فون کارمان، معادله (۱۳-۴.۴)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{3}{2} \frac{\mu v_\infty}{\delta} = \frac{d}{dx} \left( \frac{39}{280} \rho v_\infty^2 \delta \right) \quad (16-4.4)$$

اکنون می‌توان از این معادله دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک‌پذیر انتگرال گرفت تا ضخامت لایه مرزی حاصل شود:

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{280}{13} \frac{\nu x}{v_\infty}} = 4.64 \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}} \quad (17-4.4)$$

بنابراین، ضخامت لایه مرزی با ریشه دوم فاصله از سر بالادستی صفحه افزایش می‌یابد. پس جواب تقریبی حاصل برای توزیع سرعت عبارت است از:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \frac{3}{2} \left( y \sqrt{\frac{13}{280} \frac{v_\infty}{\nu x}} \right) - \frac{1}{2} \left( y \sqrt{\frac{13}{280} \frac{v_\infty}{\nu x}} \right)^2 \quad (18-4.4)$$

با استفاده از این نتیجه می‌توان نیروی پسای وارد بر صفحه‌ای با اندازه متناهی را که هردو طرف آن خیس شده‌اند، تخمین زد. برای صفحه‌ای با عرض  $W$  و طول  $L$ ، با انتگرال‌گیری از شار اندازه حرکت روی دو سطح جامد نتیجه می‌شود:

$$F_x = 2 \int_0^W \int_0^L \left( +\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx dz = 1.293 \sqrt{\rho \mu L W^2 v_\infty^3} \quad (19-4.4)$$

جواب دقیق، که در مثال بعد ارائه شده است، همین نتیجه را، اما همراه با ضریب عددی  $1.328$ ، ارائه می‌دهد. هردو جواب نیروی پسا را، در محدوده پراکندگی داده‌های تجربی، پیش‌بینی می‌کنند. اما جواب دقیق توافق نسبتاً بهتری با توزیع‌های سرعت اندازه‌گیری شده دارد. این دقت اضافی برای محاسبات پایداری ضرورت دارد.

## مثال ۲-۴.۴

جریان آرام روی صفحه تخت (جواب دقیق)<sup>۷</sup>

جواب دقیق مسئله مطرح شده در مثال قبل را به دست آورید.

حل

این مسئله را می‌توان با استفاده از تعریف تابع جریان در سطر اول جدول ۱-۲.۴ حل کرد. با قرار دادن عبارتهای مؤلفه‌های سرعت در معادله (۱۱-۴.۴)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (20-4.4)$$

شرایط مرزی برای این معادله و برای  $\psi(x, y)$  عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y = 0 \quad \text{در } y = 0, \text{ به ازای } x \geq 0, \text{ داریم} \quad (21-4.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x = 0 \quad \text{در } y = 0, \text{ به ازای } x \geq 0, \text{ داریم} \quad (22-4.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x \rightarrow -v_\infty \quad \text{در } y \rightarrow \infty, \text{ به ازای } x \geq 0, \text{ داریم} \quad (23-4.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x = -v_\infty \quad \text{در } x = 0, \text{ به ازای } y > 0, \text{ داریم} \quad (24-4.4)$$

چون در روابط بالا طول مشخصه مطرح نمی‌شود، به نظر می‌رسد استفاده از روش ترکیب متغیرهای مستقل مناسب باشد. با استدلال‌های ابعادی مشابه با استدلال‌های مورد استفاده در مثال ۱-۴.۴، می‌نویسیم:

$$\eta = y \sqrt{\frac{1}{2} \frac{v_\infty}{\nu x}} \quad \text{که در آن} \quad \frac{v_x}{v_\infty} = \Pi(\eta) \quad (25-4.4)$$

ضریب ۲ برای اجتناب از ظهور عامل‌های عددی در معادله دیفرانسیل (۲۷-۴.۴) گنجانده شده است. تابع جریانی که توزیع سرعت در معادله (۲۵-۴.۴) را نشان می‌دهد، چنین است:

$$f(\eta) = \int_0^\eta \Pi(\bar{\eta}) d\bar{\eta} \quad \text{که در آن} \quad \psi(x, y) = -\sqrt{2\nu_\infty \nu x} f(\eta) \quad (26-4.4)$$

این عبارت که برای توزیع جریان به دست آمده است با معادله (۲۵-۴.۴) در توافق است و با استفاده از رابطه  $v_x = -\partial \psi / \partial y$  (که در جدول ۱-۲.۴ آمده است) می‌توان درستی این گفته را نشان داد. با قرار دادن معادله (۲۶-۴.۴) در معادله (۲۰-۴.۴)، نتیجه می‌شود:

$$-f f'' = f''' \quad (27-4.4)$$

از قرار دادن این عبارت در شرایط مرزی نتیجه می‌شود:

$$f' = 0 \quad \text{و} \quad f = 0 \quad \text{در } \eta = 0, \text{ داریم} \quad (28-4.4)$$

$$f' \rightarrow 1 \quad \text{وقتی } \eta \rightarrow \infty, \text{ داریم} \quad (29-4.4)$$

بنابراین برای تعیین میدان جریان باید جواب یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سوم را به دست آورد.

۷. این مسئله ابتدا در منبع زیر بررسی شد:

این معادله همراه با شرایط مرزی مفروض، با انتگرال‌گیری عددی حل می‌شود و جدول‌های دقیقی از جواب‌ها در دسترس است.<sup>۴.۳</sup> این مسئله را ابتدا بلازیوس، با استفاده از تقریبی تحلیلی حل کرد که نسبتاً دقیق بود. در شکل ۴.۴-۳ جواب او، همراه با داده‌های تجربی که بعد از آن به دست آمد، ترسیم شده است. توافق بین نتایج نظری و نتایج تجربی بسیار خوب است.

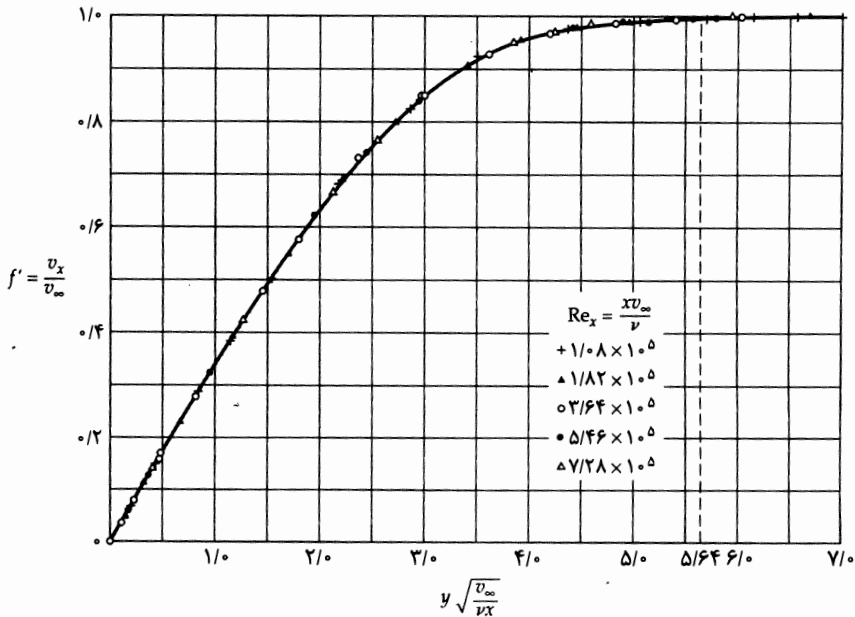
نیروی پسی وارد بر صفحه‌ای به عرض  $W$  و طول  $L$  را می‌توان از گرادینان سرعت بدون بُعد در جدار،  $f''(0) = 0.4696\dots$ ، به ترتیب زیر محاسبه کرد:

$$F_x = 2 \int_0^W \int_0^L \left( +\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx dz = 2 \int_0^W \int_0^L \left( +\mu v_\infty \frac{df'}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx dz$$

$$= 2 \int_0^W \int_0^L \mu v_\infty f''(0) \sqrt{\frac{1}{2} \frac{v_\infty}{\nu x}} dx dz = 1.328 \sqrt{\rho \mu L W^2 v_\infty^3} \quad (30-4.4)$$

این نتیجه نیز به تجربه تأیید شده است.

به سبب تقریب‌های به‌کاررفته در معادله (۴.۴-۱۰)، جواب حاصل به‌ازای عددهای رینولدز موضعی بالا دقیق‌تر است؛ یعنی باید،  $Re_x = xv_\infty/\nu \gg 1$ ، ناحیه مستثنای اعداد رینولدز پایین به‌اندازه کافی کوچک هست که بتوان در اغلب محاسبات نیروی پسا آن را نادیده گرفت. تحلیل‌های کامل‌تر نشان می‌دهد که معادله (۴.۴-۳۰) در حدود ۳٪ برای  $Lv_\infty/\nu \geq 10^4$  و در حدود ۰.۳٪ برای  $Lv_\infty/\nu \geq 10^6$  دقت دارد.



شکل ۴.۴-۳ توزیع‌های سرعت پیش‌بینی‌شده و مشاهده‌شده برای جریان آرام مماسی روی صفحه‌ای تخت. خط پر معرف جواب معادله‌های (۴.۴-۲۰) تا (۴.۴-۲۴) است که بلازیوس آن را به دست آورد.

رشد لایه مرزی با افزایش  $x$ ، سرانجام به بروز وضعیتی ناپایدار منتهی خواهد شد و جریان متلاطم می‌شود. گذار در جایی در گستره اعداد رینولدز  $Re_x = xv_\infty/\nu \geq 3 \times 10^5$  تا  $3 \times 10^6$ ، بسته به یکنواختی جریان تقرب،

آغاز می‌شود.<sup>۸</sup> در بالادست ناحیه گذار، جریان آرام می‌ماند و در پایین دست متلاطم است.

### مثال ۴-۴-۲

جریان در نزدیکی کنج  
 اکنون می‌خواهیم مسئله لایه مرزی نظیر مثال ۳-۳-۴ را حل کنیم که به جریان در نزدیکی یک کنج مربوط است (شکل ۳-۳-۴ را ببینید). اگر  $\alpha > 1$ ، آن‌گاه می‌توان مسئله را به صورت جریان در طول گوه‌ای با زاویه رأس  $\beta\pi$  تعبیر کرد که در آن  $\alpha = 2/(2 - \beta)$ . جریان خارجی  $v_e$  برای این سیستم از معادله‌های (۴۲-۳-۴) و (۴۳-۳-۴) به دست می‌آید و در آن‌جا داشتیم:

$$v_e(x) = c[2/(2 - \beta)]x^{\beta/(2-\beta)} \quad (31-4-4)$$

این همان عبارتی است که در محل جدار (یعنی در  $y = 0$ ) معتبر است. در این‌جا فرض می‌شود که لایه مرزی به اندازه‌ای نازک است که استفاده از عبارت جدار مربوط به جریان ایده‌آل، برای حد خارجی جواب لایه مرزی، دست‌کم به‌ازای مقادیر کوچک  $x$ ، کفایت می‌کند.

حل

باید معادله (۱۱-۴-۴) را، با استفاده از معادله (۳۱-۴-۴)، برای به دست آوردن  $v_e(x)$  حل کنیم. وقتی تابع جریان را از سطر اول جدول ۱-۲-۴ قرار دهیم، معادله دیفرانسیل زیر برای  $\psi$  به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \left( \frac{c^2 \beta}{2 - \beta} \right) \frac{1}{x^{(2-\beta)/(2-\beta)}} - \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (32-4-4)$$

که با معادله (۲۰-۴-۴) متناظر است که جمله  $v_e(dv_e/dx)$  به آن افزوده شده‌باشد. کشف شد<sup>۹</sup> که با معرفی تابع جریان بدون بُعد  $f(\eta)$  توسط رابطه زیر، این معادله را می‌توان به یک معادله دیفرانسیل معمولی تحویل کرد:

$$\psi(x, y) = -\sqrt{c\nu(2 - \beta)}x^{1/(2-\beta)}f(\eta) \quad (33-4-4)$$

که در آن متغیر مستقل عبارت است از:

$$\eta = \sqrt{\frac{c}{(2 - \beta)\nu}} \frac{y}{x^{(1-\beta)/(2-\beta)}} \quad (34-4-4)$$

در این صورت معادله (۳۲-۴-۴) به معادله فالکنر-اسکان<sup>۱</sup> تبدیل می‌شود:

$$f''' + ff'' + (\beta(1 - f'^2)) = 0 \quad (35-4-4)$$

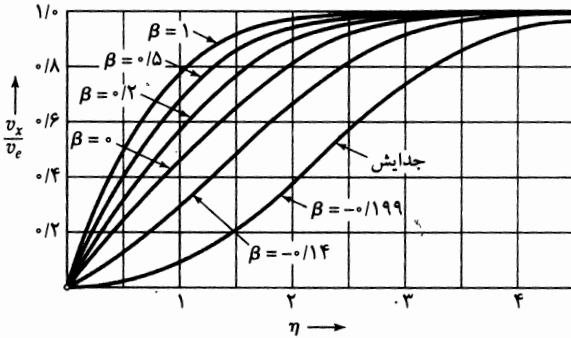
این معادله به روش عددی و با استفاده از شرایط مرزی مناسب حل شده‌است و نتایج را در شکل ۴-۴-۴ نشان داده‌ایم.

8. Y. H. Kuo, *J. Math. Phys.*, **32**, 83-101 (1953); I. Imai, *J. Aero. Sci.*, **24**, 155-156 (1957).

9. V. M. Falkner and S. W. Skan, *Phil. Mag.*, **12**, 865-896 (1931); D. R. Hartree, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **33**, Part II, 223-239 (1937); H. Rouse (ed.), *Advanced Mechanics of Fluids*, Wiley, New York (1959), Chapter VII, Sec. C; H. Schlichting and K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*, 8th edition, Springer-Verlag, Berlin (2000), pp. 169-173 (isothermal), 220-221 (nonisothermal); W. E. Stewart and R. Prober, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **5**, 1149-1163 (1962); **6**, 221-229, 872 (1963)

منبع اخیر شامل جریان گوه با انتقال گرما و جرم است.

می‌توان دید که به‌ازای مقادیر مثبت  $\beta$ ، که با سیستم نشان داده شده در شکل ۳-۳.۴ (۱) و شکل ۴-۳.۴ متناظرند، سرعت سیال اضافه می‌شود و توزیع سرعت پایدار است. به‌ازای مقادیر منفی  $\beta$ ، تا  $\beta = -0.199$  سرعت جریان‌ها کاهش می‌یابد، اما جدایش روی نمی‌دهد. اما اگر  $\beta < -0.199$ ، گرادیان سرعت در جدار صفر می‌شود و جدایش جریان رخ می‌دهد. بنابراین، در جریان درکنج‌های داخلی و جریان‌های گوه، جدایش روی نمی‌دهد، اما در جریان درکنج‌های خارجی ممکن است جدایش رخ دهد.



شکل ۴-۳.۴ توزیع سرعت برای جریان گوه با زاویه رأس  $\beta\pi$ . مقادیر منفی  $\beta$  با جریان دراطراف «کنج خارجی» (شکل ۳-۳.۴ (۲) را ببینید) همراه با لغزش در جدار بالادست کنج، متناظرند.

### پرسش‌های تشریحی

- روش ترکیب متغیرها برای کدام دسته از مسئله‌ها به‌کار می‌آید؟ روش جداسازی متغیرها در مورد کدام نوع مسئله‌ها سودمند است؟
- آیا می‌توان جریان در نزدیکی یک میله استوانه‌ای با طول نامتناهی را، که ناگهان در جهت محوری به حرکت درمی‌آید، با استفاده از روش مثال ۱-۱.۴ توصیف کرد؟
- اگر در مثال ۲-۱.۴ سعی کنیم معادله (۲۱-۱.۴) را با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کنیم، بدون آن‌که ابتدا تشخیص دهیم که می‌توان جواب را به صورت جمع جواب حالت پایا و جواب گذرا نوشت، چه اتفاقی می‌افتد؟
- اگر ثابت جداسازی پس از معادله (۲۷-۱.۴) را، به عوض  $-c^2$  برابر  $c^2$  یا  $c^2$  اختیار کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟
- سعی کنید مثال ۳-۱.۴ را با استفاده از کمیت‌های مثلثاتی، به جای کمیت‌های مختلط، حل کنید.
- معادله گردشاری چگونه به دست می‌آید و چگونه می‌توان از آن استفاده کرد؟
- تابع جریان چگونه تعریف می‌شود و به چه کار می‌آید؟
- جواب‌های جریان پتانسیل و جواب‌های جریان لایه مرزی، به چه معنا مکمل یکدیگرند؟
- همه صورت‌های تقریبی معادله‌های تغییر را که تا این جا با آن‌ها آشنا شدیم فهرست کنید و گستره کاربرد آن‌ها را نشان دهید.

### مسئله‌ها

۴الف ۱. زمان رسیدن به حالت پایا در جریان داخل لوله.

(الف) روغنی سنگین با ویسکوزیته سینماتیکی  $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  در یک لوله عمودی طویل با شعاع  $0.7 \text{ cm}$  در حال سکون است. به‌طور ناگهانی به سیال اجازه داده می‌شود که تحت اثر نیروی وزن خود، از ته لوله جاری شود. چه مدت طول می‌کشد تا سرعت در مرکز لوله به حدود  $1\%$  مقدار نهایی خود برسد؟

(ب) اگر از آب با دمای  $68^\circ\text{F}$  استفاده شود، نتیجه چه خواهد بود؟

تذکر: باید از نتیجه نشان داده شده در شکل ۲.۴ استفاده کنید.

جواب: (الف)  $10^{-2} \text{ s} \times 6.4$ ؛ (ب)  $22 \text{ s}$ .

۲. الف ۲. سرعت در نزدیکی کره متحرک. کره‌ای به شعاع  $R$  به حالت جریان خزشی، با سرعت حدی  $v_\infty$  در سیالی ساکن با ویسکوزیته  $\mu$ ، سقوط می‌کند. در چه فاصله افقی از کره، سرعت سیال به  $1\%$  سرعت حدی کره کاهش می‌یابد؟  
جواب: در حدود  $37$  برابر قطر کره.

۳. الف ۳. ترسیم خطوط جریان برای جریان پتانسیل در اطراف استوانه. خطوط جریان را برای جریان در اطراف استوانه، با استفاده از اطلاعات مثال ۳.۴-۱، به روش زیر ترسیم کنید:

(الف) مقداری برای  $\Psi = C$  انتخاب کنید (یعنی یک خط جریان انتخاب کنید)؛

(ب) نمودارهای  $Y = C + K$  (خطوط مستقیم موازی با محور  $X$ ) و  $Y = K(X^2 + Y^2)$  (خطوط دایره‌هایی به شعاع  $K/2$ ، مماس بر محور  $X$  در مبدأ مختصات) را ترسیم کنید؛

(ج) نقاط تقاطع خطوط و دایره‌های با مقدار  $K$  مساوی را ترسیم کنید؛

(د) این نقاط را به هم متصل کنید تا خط جریان مربوط به  $\Psi = C$  حاصل شود.

سپس مقادیر دیگری برای  $C$  انتخاب کنید و این فرایند را تکرار کنید تا الگوی خطوط جریان واضح شود.

۴. الف ۴. مقایسه توزیع‌های دقیق و تقریبی برای جریان روی صفحه‌ای تخت. مقادیر  $v_x/v_\infty$  حاصل از معادله (۴.۴-۱۸) را با مقادیر حاصل از شکل ۴.۴-۳، به‌ازای مقادیر زیر برای  $y\sqrt{v_\infty/\nu}$  مقایسه کنید:

(الف)  $1/5$ ؛ (ب)  $3/10$ ؛ (ج)  $4/10$ . نتایج را به‌صورت نسبت مقادیر تقریبی به مقادیر دقیق بیان کنید.

جواب: (الف)  $0.96$ ؛ (ب)  $0.99$ ؛ (ج)  $1.01$ .

۵. الف ۵. نمایش عددی موازنه اندازه حرکت فون کارمان.

(الف) انتگرال‌های معادله (۴.۴-۱۳) را به روش عددی برای توزیع سرعت بلازیوس در شکل ۴.۴-۳ محاسبه کنید.

(ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف) اندازه تنش برشی جدار  $\tau_{yx}|_{y=0}$  را تعیین کنید.

(ج) نیروی پسای کل،  $F_x$ ، را برای صفحه‌ای به عرض  $W$  و طول  $L$ ، که دو طرف آن خیس می‌شود،

محاسبه کنید. نتیجه به‌دست‌آمده را با نتیجه حاصل از معادله (۴.۴-۳) مقایسه کنید.

$$\int_0^\infty \rho v_x (v_e - v_x) dy = 0.664 \sqrt{\rho \mu v_\infty^3 x} \quad \text{جواب: (الف)}$$

$$\int_0^\infty \rho (v_e - v_x) dy = 1.73 \sqrt{\rho \mu v_\infty x}$$

۶. الف ۶. استفاده از فرمول‌های لایه مرزی. هوا با فشار ۱ اتمسفر و دمای  $20^\circ\text{C}$  به‌صورت مماس با هردو سطح

یک صفحه تخت نازک به عرض  $W = 10 \text{ ft}$  و طول  $L = 3 \text{ ft}$  در جهت جریان، جاری است. سرعت

در بیرون لایه مرزی ثابت و برابر  $20 \text{ ft/s}$  است.

(الف) عدد رینولدز موضعی  $Re_x = xv_\infty/\nu$  را در لبه عقب صفحه محاسبه کنید.

(ب) با فرض جریان آرام، ضخامت تقریبی لایه مرزی را، برحسب اینج، در لبه انتهای صفحه محاسبه

کنید. از نتایج مثال ۴.۴-۱ استفاده کنید.

(ج) با فرض جریان آرام، نیروی پسای کل را برحسب  $l b_f$  محاسبه کنید. از نتایج مثال‌های ۱-۴.۴ و ۲-۴.۴ استفاده کنید.

الف ۷. جریان ورودی به مجرا.

(الف) طول ورودی را برای جریان آرام در لولهٔ مدور تخمین بزنید. فرض کنید ضخامت لایهٔ مرزی از معادلهٔ (۱۷-۴.۴) به دست می‌آید و  $v_\infty$  مسئلهٔ صفحهٔ تخت، با  $v_{\max}$  در مسئلهٔ جریان در لوله متناظر است. هم‌چنین فرض کنید که طول ورودی  $L_e$  را می‌توان مقداری از  $x$  گرفت که در آن  $R_e = \delta$ . نتیجه‌ای را که به دست می‌آورید با عبارتی که در بخش ۳.۲ برای  $L_e$  به دست آمد، یعنی  $L_e = 0.35 D Re$ ، مقایسه کنید.

(ب) عدد رینولدز گذرا  $10^5 \times 3/5 \approx xv_\infty/\nu$  (برای صفحهٔ تخت) را با قرار دادن  $\delta$  از معادلهٔ (۱۷-۴.۴) به جای  $x$  به‌عنوان طول مشخصه، بازنویسی کنید. کمیت  $\delta v_\infty/\nu$  را که به‌این ترتیب به دست می‌آید با عدد رینولدز گذرای مینیمم متناظر برای جریان در لوله‌های صاف و طویل مقایسه کنید.

(ج) با استفاده از روش قسمت (الف) طول ورودی را در مجرای تخت نشان‌داده‌شده در شکل ۱.ج ۴ تخمین بزنید. نتیجه را با نتیجهٔ مفروض در مسئلهٔ ۱.ج ۴ (د) مقایسه کنید.

۱.ب ۴ جریان سیال با اعمال ناگهانی تنش ثابت جدار. در سیستمی که در مثال ۱-۱.۴ بررسی شد، فرض کنید سیال قبل از زمان  $t = 0$  در حال سکون باشد. در زمان  $t = 0$  نیروی ثابتی در جدار و در جهت مثبت  $x$  بر سیال وارد می‌شود، به طوری که تنش برشی  $\tau_{yx}$  مقدار ثابت جدید  $\tau_0$  را در  $y = 0$ ، به‌ازای  $t > 0$ ، پیدا می‌کند.

(الف) از معادلهٔ (۱-۱.۴) نسبت به  $y$  مشتق بگیرید و حاصل را در  $-\mu$  ضرب کنید تا یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی برای  $\tau_{yx}(y, t)$  به دست آورید.

(ب) شرایط مرزی و اولیه را برای این معادله بنویسید.

(ج) این معادله را با استفاده از روش مثال ۱-۱.۴ حل کنید تا نتیجهٔ زیر حاصل شود:

$$\frac{\tau_{yx}}{\tau_0} = 1 - \operatorname{erf} \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \quad (1-1.4)$$

(د) از نتیجهٔ قسمت (ج) برای به دست آوردن توزیع سرعت استفاده کنید. می‌توانید از رابطهٔ زیر کمک بگیرید:

$$\int_x^\infty (1 - \operatorname{erf} u) du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - x(1 - \operatorname{erf} x) \quad (2-1.4)$$

۲.ب ۴ جریان در نزدیکی جدار که ناگهان به حرکت درمی‌آید (جواب تقریبی) (شکل ۲.ب ۴). از روشی مانند روش مثال ۱-۴.۴ برای به دست آوردن جواب تقریبی مثال ۱-۱.۴ استفاده کنید.

(الف) از معادلهٔ (۱-۱.۴) نسبت به  $y$  انتگرال بگیرید تا معادلهٔ زیر حاصل شود:

$$\int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial t} dy = \nu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_0^\infty \quad (1-2.4)$$

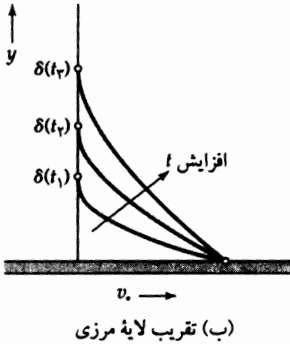
۱. خلاصه‌ای از توابع خطا و خواص آن‌ها را می‌توانید در منبع زیر پیدا کنید:



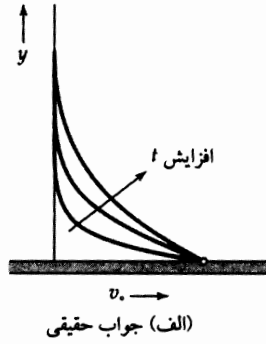
با استفاده از شرایط مرزی و قانون لایب‌نیتس برای مشتق‌گیری از انتگرال (معادله ۲-۳)، معادله (۲-۲.۴) را به صورت زیر بازنویسی کنید:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \rho v_x dy = \tau_{yx}|_{y=0} \quad (2-2.4)$$

تفسیر فیزیکی این نتیجه چیست؟



(ب) تقریب لایه مرزی



(الف) جواب حقیقی

شکل ۲.۴ مقایسه توزیع‌های سرعت حقیقی و تقریبی در نزدیکی جدار که به طور ناگهانی با سرعت  $v_0$  به حرکت در می‌آید.

(ب) شکل تقریبی توزیع سرعت را می‌دانیم. می‌توانیم فرض‌های منطقی زیر را برای توزیع سرعت اختیار کنیم:

$$\frac{v_x}{v_0} = 1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta(t)} + \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta(t)} \right)^3 \quad \text{به‌ازای } 0 \leq y \leq \delta(t) \quad (3-2.4)$$

$$\frac{v_x}{v_0} = 1 \quad \text{به‌ازای } y \geq \delta(t) \quad (4-2.4)$$

در این جا  $\delta(t)$  ضخامت لایه مرزی وابسته به زمان است. این عبارت تقریبی را در معادله (۲-۲.۴) قرار دهید تا نتیجه شود:

$$\delta \frac{d\delta}{dt} = 4\nu \quad (5-2.4)$$

(ج) از معادله (۵-۲.۴) با مقدار اولیه مناسب  $\delta(t)$  انتگرال بگیرید و نتیجه را در معادله (۳-۲.۴) قرار دهید تا توزیع سرعت تقریبی حاصل شود.

(د) مقادیر  $v_x/v_0$  حاصل از قسمت (ج) را با نتایج حاصل از معادله (۱۵-۱.۴) در  $y/\sqrt{4\nu t} = 0, 0,2, 0,5, 1,0$  مقایسه کنید. این نتایج را به صورت نسبت مقدار تقریبی به مقدار دقیق بیان کنید.

جواب: (د) ۰,۷۳۸, ۰,۲۶, ۰,۱۵

۳.۴ جریان خزشی در اطراف حباب کروی. وقتی سیالی در اطراف یک حباب گاز جریان دارد، در داخل حباب گردش روی می‌دهد. این گردش تنش برشی فصل مشترکی را کاهش می‌دهد و با تقریب اول، می‌توان فرض کرد که این تنش کاملاً حذف می‌شود. مثال ۱۲-۲.۴ را برای چنین حبابی، با فرض کروی بودن، دوباره حل کنید.

(الف) نشان دهید که شرط مرزی ۲ در مثال ۱۲-۲.۴ به وسیله شرط زیر جایگزین می‌شود:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{df}{dr} \right) + 2 \frac{f}{r^2} = 0 \quad \text{داریم } r = R, \quad (1-3.4)$$

و فرض کنید که سایر شرایط مسئله ثابت می‌ماند.

(ب) مؤلفه‌های سرعت زیر را به دست آورید:

$$v_r = v_\infty \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right) \right] \cos \theta \quad (۲-۳.ب۴)$$

$$v_\theta = -v_\infty \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right) \right] \sin \theta \quad (۳-۳.ب۴)$$

(ج) سپس با استفاده از معادله حرکت، توزیع فشار را به دست آورید:

$$p = p_\infty - \rho gh - \left( \frac{\mu v_\infty}{R} \right) \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta \quad (۴-۳.ب۴)$$

(د) نیروی کلی را که سیال بر کره وارد می‌کند محاسبه کنید تا نتیجه شود:

$$F_z = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 4 \pi \mu R v_\infty \quad (۵-۳.ب۴)$$

این نتیجه را می‌توان با استفاده از روش بخش ۶.۲ یا با انتگرال‌گیری از مؤلفه  $z$  عبارت  $[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi}]$  روی سطح کره به دست آورد ( $\mathbf{n}$  بردار یکه روبرو بیرون قائم بر سطح کره است).

#### ۴.ب۴ استفاده از معادله گردشاری.

(الف) مسئله ۲.ب۳ را با استفاده از مؤلفه  $y$  معادله گردشاری (معادله ۱-۲.د۳) و شرایط مرزی زیر حل کنید: در  $x = \pm B$  داریم  $v_z = 0$  و در  $x = 0$  داریم  $v_z = v_{z,\max}$ . نشان دهید که نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$v_z = v_{z,\max} [1 - (x/B)^2] \quad (۱-۴.ب۴)$$

سپس توزیع فشار را از مؤلفه  $z$  معادله حرکت به دست آورید.

(ب) مسئله ۳.ب۶ را با استفاده از معادله گردشاری، با شرایط مرزی زیر، حل کنید: در  $r = R$ ، داریم  $v_z = 0$  و در  $r = \kappa R$ ، داریم  $v_z = v_0$ . همچنین، یک شرط انتگرال نیز برای بیان این نکته لازم است که جریان خالصی در جهت  $z$  وجود ندارد. توزیع فشار در سیستم را پیدا کنید:

(ج) مسئله‌های زیر را با استفاده از معادله گردشاری حل کنید: ۲.ب۶، ۲.ب۷، ۳.ب۱، ۳.ب۱۰، و ۳.ب۱۶.

۵.ب۴ جریان پتانسیل پایا در اطراف کره ساکن<sup>۲</sup> در مثال ۱-۲.۴، مسئله جریان خزشی در اطراف کره را حل کردیم. اکنون می‌خواهیم جریان سیالی تراکم‌ناپذیر و غیریویسکوز را در حالت جریان غیرچرخشی در اطراف کره بررسی کنیم. برای چنین مسئله‌ای، می‌دانیم که پتانسیل سرعت باید در معادله لاپلاس صدق کند (مطلب پس از معادله (۱۱-۳.۴) را ببینید).

(الف) شرایط مرزی را برای این مسئله بیان کنید.

(ب) دلیل بیاورید که چرا می‌توان فرض کرد پتانسیل سرعت  $\phi$  به صورت  $\phi(r, \theta) = f(r) \cos \theta$  است.

(ج) به جای پتانسیل سرعت در قسمت (ب)، عبارتی آزمایشی در معادله لاپلاس برای پتانسیل سرعت قرار دهید.

۲. در منبع زیر مجموعه خوبی از مسئله‌های جریان پتانسیل یافت می‌شود:

(د) از معادلهٔ به دست آمده در قسمت (ج) انتگرال بگیرید و تابع  $f(r)$  حاوی دو ثابت انتگرال گیری را به دست بیاورید. با استفاده از شرایط مرزی این ثابت ها را تعیین کنید تا به نتیجهٔ زیر برسید:

$$\phi = -v_{\infty} R \left[ \left( \frac{r}{R} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \cos \theta \quad (۱-۵.ب۴)$$

(ه) سپس نشان دهید که:

$$v_r = v_{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \cos \theta \quad (۲-۵.ب۴)$$

$$v_{\theta} = -v_{\infty} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \sin \theta \quad (۳-۵.ب۴)$$

(و) توزیع فشار را بیابید و سپس نشان دهید که در سطح کره داریم:

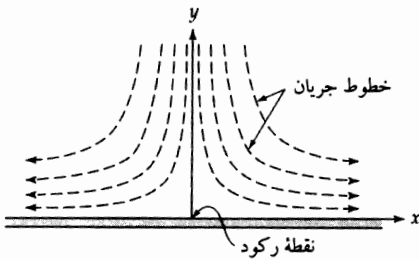
$$P - P_{\infty} = \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 \left( 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right) \quad (۴-۵.ب۴)$$

۶.۴ جریان پتانسیل در نزدیکی نقطهٔ رکود (شکل ۶.۴).

(الف) نشان دهید که پتانسیل مختلط  $w = -v_{\infty} z^2$  جریان در نزدیکی نقطهٔ رکود صفحه را توصیف می کند.

(ب) مؤلفه های سرعت  $v_x(x, y)$  و  $v_y(x, y)$  را بیابید

(ج) مفهوم فیزیکی  $v_{\infty}$  را شرح دهید.



شکل ۶.۴ جریان پتانسیل دو بعدی در نزدیکی نقطهٔ رکود.

۷.۴ جریان گردابه.

(الف) نشان دهید که پتانسیل مختلط  $w = (i\Gamma/2\pi) \ln z$  جریان در گردابه را توصیف می کند. نشان

دهید که سرعت مماسی از رابطهٔ  $v_{\theta} = \Gamma/2\pi r$  به دست می آید و  $v_r = 0$ . این نوع جریان را گاهی

گردابهٔ آزاد می نامند. آیا این جریان غیر چرخشی است؟

(ب) وابستگی تابعی  $v_{\theta}$  به  $r$  در قسمت (الف) با آنچه از مثال ۶.۳-۴ حاصل می شود، مقایسه کنید.

گاهی نوع اخیر جریان را گردابهٔ واداشته می نامند. گردابه های واقعی، مانند آن ها که در مخزن هم زده

مشاهده می شوند، رفتاری بینابین این دو حالت ایده آل سازی شده دارند.

۸.۴ میدان جریان حول یک منبع خطی. جریان شعاعی متقارن یک سیال تراکم ناپذیر غیرویسکوز را به طرف

بیرون از یک منبع یکنواخت به طول نامتناهی در نظر بگیرید که بر محور  $z$  دستگاه مختصات استوانه ای

منطبق است. سیال با آهنگ حجمی  $\Gamma$  در واحد طول منبع تولید می شود.

(الف) نشان دهید که معادلهٔ لاپلاس برای پتانسیل سرعت در این سیستم به صورت زیر است:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0 \quad (۱-۸.ب۴)$$

(ب) با استفاده از این معادله، پتانسیل سرعت و فشار را به صورت توابعی از مکان به دست آورید:

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad v_r = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad P_\infty - P = \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 r^2} \quad (2-8.4)$$

که در آن  $P_\infty$  مقدار فشار اصلاح شده در نقاط دور از منبع است.

(ج) در مورد قابلیت کاربرد نتایج قسمت (ب) برای میدان جریان حول چاه حفر شده در پهنا وسیعی از سنگ متخلخل بحث کنید.

(د) شبکه خطوط جریان و خطوط همپتانسیل را برای این جریان ترسیم کنید.

۹.ب.۴ بررسی جواب‌های مسئله‌های جریان ناپایا.

(الف) درستی جواب‌های مسئله‌های مطرح شده در مثال‌های ۱-۱.۴، ۲-۱.۴، و ۳-۱.۴ را با نشان دادن این‌که در معادله‌های دیفرانسیل جزئی، شرایط اولیه، و شرایط مرزی صدق می‌کنند، نشان دهید. برای نشان دادن این‌که معادله (۱۵-۱.۴) در این معادله دیفرانسیل صدق می‌کند، باید با مشتق‌گیری از انتگرال، با استفاده از فرمول لایب‌نیتس که در بخش ج.۳ ارائه شده است، آشنا باشید.

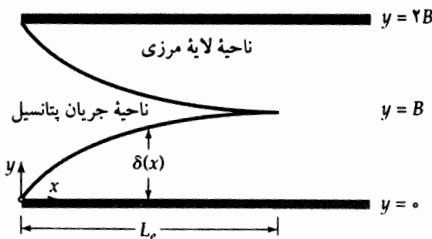
(ب) در مثال ۳-۱.۴، شرط اولیه در معادله (۵۷-۱.۴) صدق نمی‌کند. چرا؟

۱.ج.۴ جریان ورودی آرام در شکاف<sup>۳</sup> (شکل ۱.ج.۴). توزیع سرعت در ناحیه ورودی شکاف نشان داده شده در شکل را تخمین بزنید. سیال در  $x = 0$  با سرعت  $v_y = 0$  و  $v_x = \langle v_x \rangle$  وارد می‌شود؛ در عبارت اخیر،  $\langle v_x \rangle$  سرعت متوسط در داخل شکاف است. فرض کنید که توزیع سرعت در ناحیه ورودی  $0 \leq x \leq L_e$  برابر است با:

$$\frac{v_x}{v_e} = 2 \left( \frac{y}{\delta} \right) - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \quad (0 \leq y \leq \delta, \text{ ناحیه لایه مرزی}, \quad (1-1.4)$$

$$\frac{v_x}{v_e} = 1 \quad (\delta \leq y \leq B, \text{ ناحیه جریان پتانسیل}, \quad (2-1.4)$$

که در آن  $\delta$  و  $v_e$  توابعی از  $x$  اند که باید آن‌ها را تعیین کرد.



شکل ۱.ج.۴ جریان ورودی در شکاف.

(الف) با استفاده از دو معادله بالا آهنگ جریان جرمی  $w$  را در مقطعی اختیاری در ناحیه  $0 \leq x \leq L_e$  به دست آورید. سپس  $w$  را با استفاده از شرایط ورودی محاسبه کنید و نتیجه بگیرید که:

$$\frac{v_e(x)}{\langle v_x \rangle} = \frac{B}{B - \frac{1}{3}\delta(x)} \quad (3-1.4)$$

۳. راه حل عددی این مسئله با استفاده از معادله ناویر-استوکس در منبع زیر آمده است:

(ب) سپس در معادله‌های (۴.۱-۱۳)، (۴.۱-۱۴) و (۴.۱-۲) را به جای  $\infty$  قرار دهید (آیا می‌دانید چرا؟) تا معادله دیفرانسیل کمیت  $\Delta = \delta/B$  را به دست آورید:

$$\frac{6\Delta + 7\Delta^2}{(3-\Delta)^2} \frac{d\Delta}{dx} = 10 \left( \frac{\nu}{(v_x)B^2} \right) \quad (4.1-14)$$

(ج) از این معادله، با شرط اولیه مناسب، انتگرال بگیرید تا رابطه زیر بین ضخامت لایه مرزی و فاصله در طول مجرا به دست آید:

$$\frac{\nu x}{(v_x)B^2} = \frac{1}{10} \left[ 7\Delta + 48 \ln\left(1 - \frac{1}{3}\Delta\right) + \frac{27\Delta}{3-\Delta} \right] \quad (5.1-4)$$

(د) طول ورودی  $L_e$  را از معادله (۵.۱-۴) به دست آورید که در آن مقداری از  $x$  است که به ازای آن داریم  $\delta(x) = B$ .

(ه) با استفاده از نظریه جریان پتانسیل، مقدار  $P - P_0$  را در ناحیه ورودی محاسبه کنید.  $P_0$  مقدار فشار اصلاح شده در  $x = 0$  است.

جواب:

$$L_e = 0.104 (v_x)B^2/\nu \quad (د)$$

$$P - P_0 = \frac{1}{4} \rho (v_x)^2 \left[ 1 - \left( \frac{3}{3-\Delta} \right)^2 \right] \quad (ه)$$

۲.۴ ویسکوزیته‌سنج نوسانی چرخشی (شکل ۲.۴). در ویسکوزیته‌سنج نوسانی پیچشی، سیال بین یک «کاسه» و یک «وزنه»، مطابق شکل، قرار دارد. کاسه طوری ساخته شده که نوسانات سینوسی کوچک در جهت مماسی انجام دهد. این حرکت سبب می‌شود که وزنه، که از یک سیم پیچشی آویزان است، با همان بسامد، اما با دامنه و فاز متفاوت، نوسان کند. نسبت دامنه (نسبت دامنه تابع خروجی به تابع ورودی) و جابه‌جایی فاز، هر دو، به ویسکوزیته سیال بستگی دارند و در نتیجه می‌توان برای تعیین ویسکوزیته از آن‌ها استفاده کرد. به‌طور کلی فرض می‌شود دامنه نوسانات کوچک است. در این صورت مسئله خطی است و می‌توان آن را با استفاده از تبدیل لاپلاس، یا با استفاده از روش شرح داده شده در این مسئله، حل کرد.

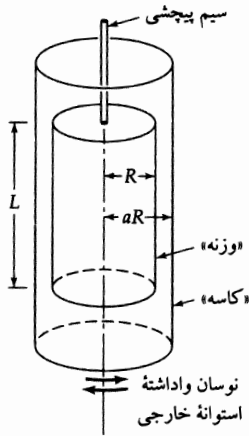
(الف) ابتدا قانون دوم حرکت نیوتون را در مورد وزنه اهتوانه‌ای و برای حالت خاصی که فضای حلقوی کاملاً تخلیه شده است، به‌کار ببرید. نشان دهید که بسامد طبیعی سیستم برابر است با:  $\omega_0 = \sqrt{k/I}$ ، که در آن  $I$  لنگر لختی وزنه، و  $k$  ثابت فنر سیم پیچشی است.

(ب) سپس، قانون دوم نیوتون را هنگامی به‌کار ببرید که سیالی با ویسکوزیته  $\mu$  در فضای حلقوی باشد. فرض کنید  $\theta_R$  جابه‌جایی حلقوی وزنه در زمان  $t$ ، و  $v_\theta$  سرعت مماسی سیال به‌صورت تابعی از  $r$  و  $t$  باشد. نشان دهید که معادله حرکت وزنه چنین است:

$$I \frac{d^2 \theta_R}{dt^2} = -k\theta_R + (2\pi RL)(R) \left( \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right) \Big|_{r=R} \quad (1.2-4) \text{ (وزنه)}$$

اگر این سیستم از حالت سکون شروع به حرکت کند، شرایط اولیه زیر را داریم:

$$\theta_R = 0 \text{ و } d\theta_R/dt = 0 \text{ در } t = 0 \quad (2.2-4) \text{ شرط اولیه:}$$



شکل ۲.۴ طرح یک ویسکوزیته‌سنج نوسانی پیچشی.

(ج) سپس، معادله حرکت سیال را همراه با شرایط اولیه و مرزی مربوط به آن بنویسید:

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) \quad (3-2.4) \text{ (سیال)}$$

(ج.۴-۲) شرط اولیه: در  $t = 0$ ، داریم  $v_\theta = 0$

(ج.۴-۲.۵) شرط مرزی ۱: در  $r = R$ ، داریم  $v_\theta = R \frac{d\theta_R}{dt}$

(ج.۴-۲.۶) شرط مرزی ۲: در  $r = aR$ ، داریم  $v_\theta = aR \frac{d\theta_{aR}}{dt}$

تابع  $\theta_{aR}(t)$  یک تابع سینوسی مشخص شده است («ورودی»). نموداری بکشید که  $\theta_R$  و  $\theta_{aR}$  را به صورت توابعی از زمان نشان دهد و نسبت دامنه و جابه‌جایی فاز را تعریف کنید.

(د) معادله‌های آغازین، معادله‌های (ج.۴-۲.۱) تا (ج.۴-۲.۶) را، با اختیار این فرض که  $a$  فقط کمی از واحد بزرگ‌تر است و می‌توان از انحنای چشم‌پوشی کرد، ساده کنید (بدون این فرض هم می‌شود این مسئله را حل کرد)<sup>۴</sup> در نتیجه می‌توان گفت که  $x = (r - R)/[(a - 1)R]$  متغیر فاصله بدون بعد مناسب است. کل مسئله را به صورت کمیت‌های بدون بعد بازنویسی کنید، به طوری که  $\sqrt{I/k} = 1/\omega_0$  به عنوان زمان مشخصه به کار رود و ویسکوزیته فقط در یک گروه بدون بعد ظاهر شود. تنها انتخاب ممکن چنین است:

$$\tau = \sqrt{\frac{k}{I}} t \quad (7-2.4) \text{ زمان:}$$

$$\phi = \frac{2\pi R^2 L \rho (a - 1)}{\sqrt{kI}} v_\theta \quad (8-2.4) \text{ سرعت:}$$

۴. در منبع زیر این مسئله بدون فرض فاصله اندک بین کاسه و وزنه حل شده‌است.

H. Markovitz, *J. Appl. Phys.*, **23**, 1070-1077 (1952).

در منبع زیر نحوه استفاده از ویسکوزیته‌سنج کاسه‌وزنه‌ای برای اندازه‌گیری ویسکوزیته آلیاژهای پلوتونیم مذاب شرح داده شده‌است.

L. J. Wittenberg, D. Ofte, and C. F. Curtiss, *J. Chem. Phys.*, **48**, 3253-3260 (1968).

$$M = \frac{\mu/\rho}{(a-1)^2 R^2} \sqrt{\frac{I}{k}} \quad \text{ویسکوزیته: (۹-۲-ج۴)}$$

$$A = \frac{2\pi R^2 L \rho (a-1)}{I} \quad \text{عکس لنگر لختی: (۱۰-۲-ج۴)}$$

نشان دهید که اکنون می‌توان مسئله را به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{d^2 \theta_R}{d\tau^2} = -\theta_R + M \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} \quad \text{در } t=0, \theta_R=0 \quad \text{(وزنه) (۱۱-۲-ج۴)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = M \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} \text{در } \tau=0, \phi=0 \\ \text{در } x=0, \phi=A(d\theta_R/dt) \\ \text{در } x=1, \phi=A(d\theta_{aR}/dt) \end{cases} \quad \text{(سیال) (۱۲-۲-ج۴)}$$

می‌خواهیم از این دو معادله،  $\theta_R$  و  $\phi$  را به صورت تابعی از  $x$  و  $\tau$  به دست آوریم و  $M$  و  $A$  پارامترهای این توابع باشند.

(ه) جواب «حالت پایای سینوسی» را با فرض آن‌که تابع ورودی  $\theta_{aR}$  (جابه‌جایی کاسه) به صورت زیر باشد، به دست آورید:

$$\theta_{aR}(\tau) = \theta_{aR}^0 \Re\{e^{i\bar{\omega}\tau}\} \quad \text{(۱۳-۲-ج۴) } (\theta_{aR}^0 \text{ حقیقی است})$$

که در آن  $\bar{\omega} = \omega/\omega_0 = \omega\sqrt{I/k}$  بسامدی بدون بُعد است. سپس فرض کنید وزنه و کاسه نیز حرکت‌های سینوسی، اما با دامنه‌ها و فازهای متفاوت، خواهند داشت:

$$\theta_R(\tau) = \Re\{\theta_R^0 e^{i\bar{\omega}\tau}\} \quad \text{(۱۴-۲-ج۴) } (\theta_R^0 \text{ مختلط است})$$

$$\phi(x, \tau) = \Re\{\phi^0(x) e^{i\bar{\omega}\tau}\} \quad \text{(۱۵-۲-ج۴) } (\phi^0(x) \text{ مختلط است})$$

نشان دهید که نسبت دامنه از رابطه  $|\theta_R^0|/\theta_{aR}^0$  به دست می‌آید که در آن  $|\dots|$  قدرمطلق کمیتی مختلط را نشان می‌دهد. به علاوه نشان دهید که زاویه فاز  $\alpha$  از رابطه  $\tan \alpha = \mathcal{I}\{\theta_R^0\}/\mathcal{R}\{\theta_R^0\}$  به دست می‌آید که در آن  $\mathcal{I}$  و  $\mathcal{R}$  به ترتیب، اجزای حقیقی و موهومی‌اند.

(و) جواب‌های فرضی قسمت (ه) را در معادله‌های قسمت (د) قرار دهید تا معادله‌هایی برای دامنه‌های مختلط  $\theta_R^0$  و  $\phi^0(x)$  به دست آورید.

(ز) معادله  $\phi^0(x)$  را حل کنید و نشان دهید که:

$$\frac{d\phi^0}{dx} \Big|_{x=0} = -\frac{A(i\bar{\omega})^{3/2}}{\sqrt{M}} \left( \frac{\theta_R^0 \cosh \sqrt{i\bar{\omega}/M} - \theta_{aR}^0}{\sinh \sqrt{i\bar{\omega}/M}} \right) \quad \text{(۱۶-۲-ج۴)}$$

(ح) حال معادله  $\theta_R^0$  را حل کنید تا نتیجه شود:

$$\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} = \frac{AMi\bar{\omega}}{(1-\bar{\omega}^2) \frac{\sinh \sqrt{i\bar{\omega}/M}}{\sqrt{i\bar{\omega}/M}} + AMi\bar{\omega} \cosh \sqrt{i\bar{\omega}/M}} \quad \text{(۱۷-۲-ج۴)}$$

که می‌توان نسبت دامنه  $|\theta_R^0|/\theta_{aR}^0$  و جابه‌جایی فاز  $\alpha$  را از آن به دست آورد.

(ط) برای سیالات با ویسکوزیته بالا، می‌توانیم با بسط دادن توابع هذلولوی معادله (۲-۱۷) یک سری توانی برحسب  $1/M$  به دست آوریم. نشان دهید که این سری به رابطه زیر منتهی می‌شود:

$$\frac{\theta_{aR}^{\circ}}{\theta_R^{\circ}} = 1 + \frac{i}{M} \left( \frac{\bar{\omega}^2 - 1}{A\bar{\omega}} + \frac{\bar{\omega}}{2} \right) - \frac{1}{M^2} \left( \frac{\bar{\omega}^2 - 1}{6A} + \frac{\bar{\omega}^2}{24} \right) + O\left(\frac{1}{M^3}\right) \quad (2-18)$$

با استفاده از این رابطه، نسبت دامنه و زاویه فاز را پیدا کنید.

(ی) نمودار  $|\theta_R^{\circ}|/\theta_{aR}^{\circ}$  برحسب  $\bar{\omega}$  را به ازای  $\mu/\rho = 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$  با  $R = 5/5 \text{ cm}$ ,  $L = 25 \text{ cm}$ ,  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ,  $k = 4 \times 10^6 \text{ dyn cm}$ ,  $I = 2500 \text{ g cm}^2$  و  $(a-1)R = 10^{-2} \text{ cm}$  ترسیم کنید.

نقطه ماکزیمم این منحنی کجاست؟

۳.۴ معادله داریسی برای جریان در محیط متخلخل. برای جریان سیال در محیطی متخلخل، می‌توان معادله‌های پیوستگی و حرکت را با معادله‌های زیر جایگزین کرد:

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}_0) \quad (3-3.4) \text{ معادله هموارشده پیوستگی:}$$

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{\kappa}{\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g}) \quad (3-3.5) \text{ معادله داریسی:}$$

که در آن  $\varepsilon$ ، تخلخل، نسبت حجم حفره‌ها به حجم کل محیط و  $\kappa$  تراوایی محیط متخلخل است. سرعت  $\mathbf{v}_0$  در این سه معادله سرعت ظاهری است که به صورت آهنگ جریان حجمی در سطح مقطع واحد ماده جامد به علاوه سیال تعریف می‌شود که در ناحیه کوچکی از فضا متوسط‌گیری شده باشد؛ این ناحیه نسبت به ابعاد ماکروسکوپی سیستم جریان کوچک، و در مقایسه با اندازه حفره، بزرگ است. چگالی و فشار در ناحیه‌ای از جریان متوسط‌گیری می‌شوند که نسبت به اندازه حفره بزرگ است. معادله (۳-۳.۴) به صورت تجربی و برای توصیف نفوذ آهسته سیال‌ها در محیط‌های دانه‌ای پیشنهاد شد. از ترکیب معادله‌های (۳-۳.۴) و (۳-۳.۴) نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{\varepsilon \mu}{\kappa}\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = (\nabla \cdot \rho (\nabla p - \rho \mathbf{g})) \quad (3-3.4)$$

برای ویسکوزیته و تراوایی ثابت. این معادله و معادله حالت، حرکت سیال در محیط متخلخل را توصیف می‌کنند. برای اغلب مقاصد عملی، می‌توان معادله حالت را چنین نوشت:

$$\rho = \rho_0 p^m e^{\beta p} \quad (4-3.4)$$

که در آن  $\rho_0$  چگالی سیال در فشار واحد است و پارامترهای زیر مفروض‌اند:

$$1. \beta = 0, m = 0$$

۵. هانری فیلیپر گاسپارد داریسی (۱۸۵۸-۱۹۰۳) در پاریس تحصیل کرد و برای طراحی شبکه آبرسانی دیژون، شهر زادگاه خود، به شهرت رسید.

H. Darcy, *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, Victor Dalmont, Paris (1865).

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد «قانون داریسی»، نگاه کنید به

J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Martinus Nijhoff, Dordrecht (1983); and H. Brenner and D. A. Edwards, *Macrotransport Processes*, Butterworth-Heinemann, Boston (1993).

6. M. Muskat, *Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*, McGraw-Hill (1937).



۲. مایعات تراکم‌پذیر  $m = 0$ ،  $\beta \neq 0$ .

۳. انبساط هم‌دمای گازها  $m = 1$ ،  $\beta = 0$ .

۴. انبساط بی‌دررویی گازها  $m = C_V/C_p = 1/\gamma$ ،  $\beta = 0$ .

نشان دهید که معادله‌های (۳-۳-۴) و (۴-۳-۴) را می‌توان برای این چهار مقوله ترکیب و ساده کرد تا نتیجه زیر حاصل شود (برای گازها متداول این است که از جمله گرانش چشم‌پوشی شود، زیرا این جمله در مقایسه با جمله‌های فشار بسیار کوچک است):

$$\nabla^2 p = 0 \quad \text{حالت ۱: (۵-۳-۴)}$$

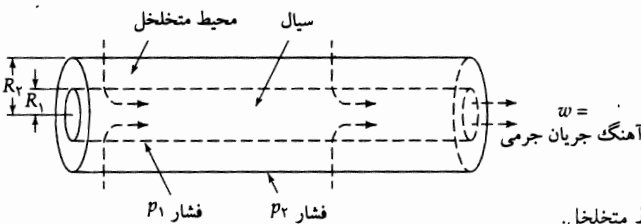
$$\left(\frac{\varepsilon\mu\beta}{\kappa}\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla^2 \rho - (\nabla \cdot \rho^2 \beta \mathbf{g}) \quad \text{حالت ۲: (۶-۳-۴)}$$

$$\left(\frac{\gamma\varepsilon\mu\rho_0}{\kappa}\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla^2 \rho^2 \quad \text{حالت ۳: (۷-۳-۴)}$$

$$\left(\frac{(m+1)\varepsilon\mu\rho_0^{1/m}}{\kappa}\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla^2 \rho^{(1+m)/m} \quad \text{حالت ۴: (۸-۳-۴)}$$

توجه کنید که حالت ۱ به معادله لاپلاس منتهی می‌شود، حالت ۲ بدون جمله گرانش به معادله رسانش گرما یا معادله نفوذ منتهی می‌شود، و حالت‌های ۳ و ۴ به معادله‌های غیرخطی منتهی می‌شوند.<sup>۷</sup>

۴-۴ ج. جریان شعاعی در محیط متخلخل (شکل ۴-۴). سیالی در یک پوسته استوانه‌ای متخلخل با شعاع‌های داخلی و خارجی  $R_1$  و  $R_2$  جریان دارد. در این سطوح، فشارها معلوم و به ترتیب برابرند با  $p_1$  و  $p_2$ . طول پوسته استوانه‌ای برابر  $h$  است.



شکل ۴-۴ ج. جریان شعاعی در محیط متخلخل.

(الف) توزیع فشار، سرعت جریان شعاعی، و آهنگ جریان جرمی سیال تراکم‌ناپذیر را بیابید.  
(ب) قسمت (الف) را برای مایعی تراکم‌پذیر و برای گازی ایده‌آل حل کنید.

جواب‌ها: (الف)

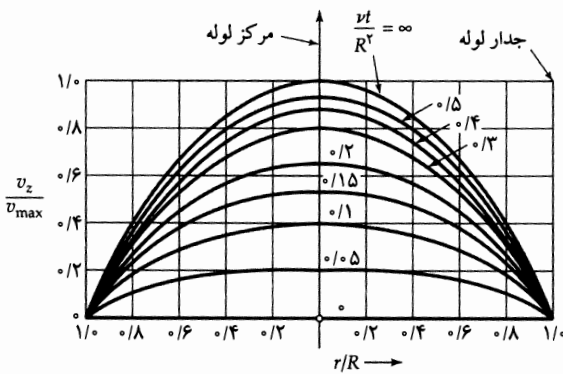
۷-۳

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)} \quad v_{or} = -\frac{\kappa}{\mu r} \frac{P_2 - P_1}{\ln(R_2/R_1)} \quad w = \frac{\gamma\pi\kappa h(P_2 - P_1)\rho}{\mu \ln(R_2/R_1)}$$

۱.۵۴ جریان در نزدیکی جدار نوسان‌کننده<sup>۸</sup> با استفاده از تبدیل‌های لاپلاس نشان دهید که جواب کامل مسئله بیان شده در معادله‌های (۱.۴-۴۴) تا (۱.۴-۴۷) چنین است:

$$\frac{v_x}{v_0} = e^{-\sqrt{\omega/2\nu}y} \cos(\omega t - \sqrt{\omega/2\nu}y) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\bar{\omega}t} (\sin \sqrt{\bar{\omega}/\nu}y) \frac{\bar{\omega}}{\omega^2 + \bar{\omega}^2} d\bar{\omega} \quad (1-1.54)$$

۲.۵۴ آغاز جریان آرام در لولهٔ مدور (شکل ۲.۵۴). سیالی با چگالی و ویسکوزیتهٔ ثابت در لوله‌ای بسیار طویل به طول  $L$  و شعاع  $R$ ، ابتدا در حالت سکون است. در زمان  $t = 0$ ، گرادیان فشار  $(P_0 - P_L)/L$  بر سیستم وارد می‌شود. مطلوب است تعیین تغییرات توزیع سرعت با زمان.



شکل ۲.۵۴ توزیع سرعت برای جریان ناپایای حاصل از گرادیان فشاری که به‌طور ناگهانی بر لولهٔ مدور وارد شده‌است.

(الف) نشان دهید که معادلهٔ حرکت را می‌توان به‌صورت بدون بُعد زیر نوشت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \zeta + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \quad (1-2.54)$$

که در آن  $\xi = r/R$ ،  $\tau = \mu t / r R^2$ ، و  $\phi = [(P_0 - P_L) R^2 / 4 \mu L]^{-1} v_z$ ،

(ب) نشان دهید که جواب مجانبی برای زمان طولانی عبارت است از  $1 - \xi^2 = \phi_\infty$ . سپس  $\phi_t$  را توسط  $\phi(\xi, \tau) = \phi_\infty(\xi) - \phi_t(\xi, \tau)$  تعریف کنید و معادلهٔ دیفرانسیل جزئی  $\phi_t$  را با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کنید؛

(ج) نشان دهید که جواب نهایی چنین است:

$$\phi(\xi, \tau) = (1 - \xi^2) - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \xi)}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n)} \exp(-\alpha_n^2 \tau) \quad (2-2.54)$$

که در آن  $J_n(\xi)$  تابع بسل مرتبهٔ  $n$ ام  $\xi$  است، و  $\alpha_n$  ریشه‌های معادلهٔ  $J_0(\alpha_n) = 0$  هستند. نتیجه در شکل ۲.۵۴ ترسیم شده‌است.

۷. برای آشنایی با شرایط مرزی در سطحی متخلخل که سیالی در حال حرکت را احاطه کرده‌است، نگاه کنید به

G. S. Beavers and D. D. Joseph, *J. Fluid Mech.*, **30**, 197-207 (1967) and G. S. Beavers, E. M. Sparrow, and B. A. Masha, *AIChE Journal*, **20**, 596-597 (1974).

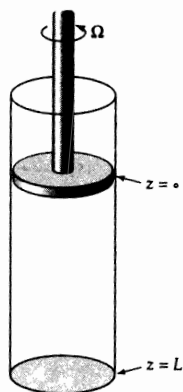
8. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, 2nd edition (1959), p. 319, Eq. (8), with  $\varepsilon = \frac{1}{\pi} \pi$  and  $\bar{\omega} = \kappa u^2$ .

۳.۵۴ جریان در سیستم دیسک و لوله (شکل ۳.۵۴).

(الف) سیالی در لوله‌ای مدور، توسط دیسک چرخانی که در سطح مایع، در  $z = 0$ ، به خوبی آب‌بندی شده است، به حرکت مماسی واداشته می‌شود؛ ته لوله در  $z = L$  قرار دارد. مطلوب است تعیین توزیع سرعت حالت پایای  $v_\theta(r, z)$ ، که در آن سرعت زاویه‌ای دیسک برابر  $\Omega$  است. فرض کنید جریان خزشی در همه جا غلبه دارد، بنابراین جریان ثانوی وجود ندارد. حد جواب را وقتی  $L \rightarrow \infty$  بیابید.

(ب) این مسئله را برای جریان ناپایا تکرار کنید. سیال قبل از  $t = 0$  ساکن است و در لحظه  $t = 0$ ، دیسک ناگهان با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  به چرخش درمی‌آید. مطلوب است تعیین توزیع سرعت  $v_q(r, z, t)$  برای ستون سیالی به ارتفاع  $L$ . سپس جواب را در حد، وقتی  $L \rightarrow \infty$  بیابید؛

(ج) فرض می‌کنیم دیسک به صورت سینوسی و با دامنه  $\Omega_0$  در جهت مماسی نوسان کند؛ مطلوب است تعیین توزیع سرعت در لوله، وقتی «حالت پایای نوسانی» برقرار شده باشد. این مسئله را برای لوله‌ای با طول نامتناهی تکرار کنید.



شکل ۳.۵۴ دیسک چرخان در لوله مدور.

۴.۵۴ جریان‌های حلقوی ناپایا.

(الف) جوابی برای معادله ناویه-استوکس برای شروع جریان حلقوی محوری در نتیجه اعمال ناگهانی گردان فشار به دست آورید. جواب خود را با جواب منتشرشده مقایسه کنید؛<sup>۹</sup>

(ب) معادله ناویه-استوکس را برای جریان مماسی ناپایا در حلقه حل کنید. سیال در لحظه  $t < 0$  ساکن است. در لحظه  $t = 0$ ، استوانه خارجی چرخش با سرعت زاویه‌ای ثابت را شروع می‌کند تا سبب ایجاد جریان آرام در  $t > 0$  شود. جواب خود را با جواب منتشرشده مقایسه کنید.<sup>۱۱</sup>

۵.۵۴ توابع جریان برای جریان سه‌بعدی.

(الف) نشان دهید که توابع سرعت  $\rho \mathbf{v} = [\nabla \times \mathbf{A}]$  و  $\rho \mathbf{v} = [(\nabla \psi_1) \times (\nabla \psi_2)]$  هر دو معادله پیوستگی را متحداً برای جریان پایا ارضا می‌کنند. تابع دوم جریان‌های تراکم‌ناپذیر ناپایا را نیز توصیف می‌کند. توابع  $\psi_1$  و  $\psi_2$  و  $\mathbf{A}$  اختیاری‌اند، به جز مواردی که مشتق‌های ظاهرشده آن‌ها در عبارت  $(\nabla \cdot \rho \mathbf{v})$  باید وجود داشته باشند.

9. W. Hort, *Z. tech. phys.*, **10**, 213 (1920); C. T. Hill, J. D. Huppler, and R. B. Bird, *Chem. Engr. Sci.*, **21**, 815-817 (1966).

10. W. Müller, *Zeits. für angew. Math. u. Mech.*, **16**, 227-238 (1936).

11. R. B. Brid and C. F. Curtiss, *Chem. Engr. Sci.*, **11**, 108-113 (1959).

(ب) نشان دهید که عبارت  $\mathbf{A}/\rho = -\delta_3\psi/h_3$  مؤلفه‌های سرعت را برای چهار جریان تراکم‌ناپذیر جدول ۱-۲.۴ ایجاد می‌کند. در این جا  $h_3$  و  $\delta_3$  عامل مقیاس و بردار یکه برای مؤلفه سرعت‌اند که در جدول نشان داده نشده‌است؛ (بردار کلی  $\mathbf{v}$  در معادله (الف.۷-۱۸) را در این جا  $\mathbf{A}$  بخوانید).

(ج) نشان دهید که خطوط جریان  $[(\nabla\psi_1) \times (\nabla\psi_2)]$  از تقاطع سطوح (مقدار ثابت)  $\psi_1 =$  و (مقدار ثابت)  $\psi_2 =$  به دست می‌آیند. یک جفت سطح را برای جریان نشان داده شده در شکل ۱-۳.۴ ترسیم کنید؛

(د) با استفاده از قضیه استوکس (معادله (الف.۴-۵))، و تعریف  $\mathbf{A}$  از قسمت (الف)، برای به دست آوردن عبارتی بر حسب  $\mathbf{A}$  برای آهنگ جریان جرمی در سطح  $S$  محصور توسط منحنی بسته  $C$  استفاده کنید. نشان دهید که حذف شدن  $\mathbf{v}$  روی  $C$  مستلزم حذف شدن  $\mathbf{A}$  روی  $C$  نیست.

## فصل ۵

### توزیع سرعت در جریان متلاطم

- ۱.۵ مقایسه جریان‌های آرام و متلاطم
- ۲.۵ معادله‌های هموارشده زمانی تغییر برای سیالات تراکم‌ناپذیر
- ۳.۵ توزیع سرعت هموارشده زمانی در نزدیکی جدار
- ۴.۵ عبارتهای تجربی برای شار اندازه حرکت تلاطمی
- ۵.۵ جریان متلاطم در مجراها
- ۶.۵ جریان متلاطم در جت‌ها

در فصل‌های گذشته فقط مسائل جریان آرام را بررسی کردیم. دیدیم که معادله‌های دیفرانسیل توصیف‌کننده جریان آرام به خوبی درک شده‌اند و توزیع سرعت و کمیت‌های فرعی مختلف، برای چند سیستم ساده را می‌توان به روش سرراستی به دست آورد. عامل محدودکننده در کاربرد معادله‌های تغییر، پیچیدگی ریاضی است که در مسئله‌هایی با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم که شامل چندین مؤلفه سرعت تابع چند متغیرند. حتی در این مورد، با پیشرفت سریع دینامیک سیالات محاسباتی، این نوع مسئله‌ها به تدریج در برابر راه‌حل عددی تسلیم شدند.

در این فصل روی جریان متلاطم تمرکز می‌کنیم. جریان آرام منظم بود، اما جریان متلاطم، آشفته و نامنظم است. همین ماهیت آشفته جریان متلاطم است که همه نوع دشواری را ایجاد می‌کند. درحقیقت، این پرسش مطرح می‌شود که آیا معادله‌های تغییر که در فصل ۳ ارائه شدند می‌توانند حرکت‌های به شدت نوسانی را که در جریان متلاطم مشاهده می‌شوند، توصیف کنند یا نه. چون اندازه‌های گرداب‌های متلاطم چندین مرتبه بزرگی از مسافت آزاد میانگین مولکول‌های سیال بزرگ‌ترند، می‌توان معادله‌های تغییر را به‌کار برد. جواب‌های عددی این معادله‌ها قابل‌حصول است و می‌توان برای بررسی جزئیات ساختار تلاطم از آن‌ها استفاده کرد. اما در بسیاری از کاربردها، به داشتن این نوع اطلاعات جزئی علاقه نداریم، زیرا مستلزم تلاش محاسباتی زیادی است. بنابراین، در این فصل بیش‌تر با روش‌هایی سروکار پیدا می‌کنیم که بتوانند توزیع سرعت و فشار هموارشده زمانی را توصیف کنند.

در بخش ۱.۵ کار را با مقایسه نتایج تجربی برای جریان‌های آرام و متلاطم در چند سیستم جریان آغاز می‌کنیم. به این ترتیب می‌توانیم ایده‌ای کیفی در مورد تفاوت‌های اساسی بین حرکت‌های آرام و تلاطمی پیدا کنیم. این آزمایش‌ها به ما کمک می‌کنند تا بعضی از چالش‌هایی را که متخصصان دینامیک سیالات با آن‌ها روبه‌رو هستند، تعریف کنیم.

در بخش ۲.۵ چندین کمیت هموارشدهٔ زمانی را تعریف می‌کنیم و نحوهٔ استفاده از این تعریف‌ها در معادله‌های متوسط‌گیری شدهٔ زمانی تغییر در یک بازهٔ زمانی کوتاه را نشان می‌دهیم. این معادله‌ها رفتار سرعت و فشار هموارشدهٔ زمانی را توصیف می‌کنند. اما معادلهٔ هموارشدهٔ زمانی حرکت، شامل شار اندازه حرکت تلاطمی است. این شار را نمی‌توان به آسانی و به‌ترتیبی که در مورد شار اندازه حرکت حاصل از قانون ویسکوزیتهٔ نیوتون در فصل ۱ دیدیم، به گرادیان سرعت مربوط کرد. در حال حاضر معمولاً شار اندازه حرکت تلاطمی را به صورت تجربی تخمین می‌زنیم یا با نوعی تجربه‌گرایی مبتنی بر اندازه‌گیری‌های تجربی آن را مدل‌سازی می‌کنیم.

خوشبختانه، برای جریان متلاطم در نزدیکی سطحی جامد، چندین نتیجهٔ نسبتاً کلی وجود دارد که در دینامیک سیالات و پدیده‌های انتقال بسیار به‌کار می‌آیند: بسط سری تیلر برای سرعت در نزدیکی جدار؛ و توزیع‌های لگاریتمی و توانی سرعت برای نواحی نسبتاً دور از جدار، که روش اخیر با استدلال بُعدی به دست آمده است. در بخش ۳.۵ عبارتهای توزیع هموارشدهٔ زمانی سرعت ارائه می‌شوند.

در بخش بعد، یعنی بخش ۴.۵، چند روش تجربی را ارائه می‌کنیم که برای شار اندازه حرکت تلاطمی پیشنهاد شده‌اند. این روش‌های تجربی اهمیت تاریخی دارند و در محاسبات مهندسی نیز کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند. این عبارتهای تجربی، وقتی همراه با قضاوت مناسب به‌کار روند، می‌توانند سودمند واقع شوند.

بقیهٔ فصل به بحث دربارهٔ دو نوع جریان متلاطم اختصاص دارد؛ جریان در مجراهای بسته (بخش ۵.۵) و جریان در حتماها (بخش ۶.۵). این جریان‌ها دو دسته جریان را نشان می‌دهند که معمولاً تحت عنوان تلاطم جداری و تلاطم آزاد شرح داده می‌شوند.

در این آشنایی مقدماتی با تلاطم، عمدتاً با توصیف جریان متلاطم کاملاً شکل‌یافته برای سیال تراکم‌ناپذیر سروکار داریم. روش‌های نظری مورد استفاده برای پیش‌بینی تلاطم، یا فنون تجربی ابداع‌شده برای کاوش در ساختار جریان متلاطم را بررسی نمی‌کنیم. به‌علاوه، در مورد نظریه‌های آماری تلاطم و روش توزیع انرژی تلاطم در موده‌های مختلف نیز بحث نمی‌کنیم. خوانندهٔ علاقه‌مند، برای آشنایی با این موضوع و موضوعات جالب دیگر، باید به بعضی از کتاب‌های استاندارد نوشته‌شده در باب تلاطم رجوع کند. <sup>۶,۵,۴,۳,۲,۱</sup> حجم مطالبی که در مورد شواهد تجربی

1. S. Corrsin, "Turbulence: Experimental Methods," in *Handbuch der Physik*, Springer, Berlin (1963), Vol. VIII/2.

استانی کورسین (۱۹۸۶-۱۹۲۰)، استاد دانشگاه جان هاپکینس، معلم و تجربه‌گری عالی بود؛ او روی برهم‌کنش بین واکنش‌های شیمیایی و تلاطم و اشاعهٔ روابط همبستگی دودمایی مطالعه کرد.

2. A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press, 2nd edition (1976). see also A. A. Townsend in *Handbook of Fluid Dynamics* (V. L. Streeter, ed.), McGraw-Hill (1961).

3. J. O. Hinze, *Turbulence*, McGraw-Hill, New York, 2nd edition (1975).

4. H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, MIT Press, Cambridge, Mass. (1972).

در فصل‌های ۱ و ۲ این کتاب با تفسیرهای فیزیکی پدیده‌های جریان متلاطم آشنا می‌شوید.

5. M. Lesieur, *La Turbulence*, Presses Universitaires de Grenoble (1994).

این کتاب حاوی عکس‌های رنگی زیبا از سیستم‌های جریان متلاطم است.

۶. چندین کتاب که این موضوع را، در ورای مطالب کتاب حاضر بررسی می‌کند، عبارت‌اند از:

W. D. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence*, Oxford University Press (1990); T. E. Faber, *Fluid Dynamics for Physicists*, Cambridge University Press (1995); U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press (1995).

و محاسباتی «ساختارهای هم‌چسب» (گردابه‌ها) در جریان‌های متلاطم نوشته می‌شود، روبه افزایش است.<sup>۷</sup> متلاطم موضوع مهمی است. درحقیقت، اغلب جریان‌هایی که در مهندسی با آن‌ها سروکار پیدا می‌کنیم، متلاطم‌اند، نه خطی! اگرچه درک ما از تلاطم اصلاً در حد مطلوب نیست، این موضوعی است که باید آن را مطالعه و درک کرد. برای حل مسائل صنعتی نمی‌توان به نتایج تحلیلی اکتفا کرد و در بیش‌تر موارد، این نوع مسائل را با تلفیقی از تحلیل بعدی و داده‌های تجربی حل می‌کنند. این روش را در فصل ۶ شرح می‌دهیم.

### ۱.۵ مقایسه جریان‌های آرام و متلاطم

قبل از شرح ایده‌های نظری در مورد تلاطم، باید بر تفاوت بین جریان‌های آرام و متلاطم در چند سیستم ساده تأکید کنیم. مخصوصاً جریان در مجراهایی با مقطع دایره‌ای و مثلثی، جریان روی صفحه تخت، و جریان در جت‌ها را بررسی می‌کنیم. سه موضوع نخست برای جریان آرام را در بخش ۳.۲، مسئله ۳.۳.ب و بخش ۴.۴ بررسی کردیم.

#### لوله‌های مدور

می‌دانیم که در جریان آرام، حالت پایا و کاملاً شکل‌یافته در لوله‌ای مدور به شعاع  $R$ ، توزیع سرعت و سرعت متوسط از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\frac{v_z}{v_{z,\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{و} \quad \frac{\langle v_z \rangle}{v_{z,\max}} = \frac{1}{2} \quad (\text{Re} < 2100) \quad (2-1.5)$$

و افت فشار و آهنگ جریان جرمی باهم رابطه خطی دارند:

$$\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L = \left(\frac{4\mu L}{\pi\rho R^3}\right) w \quad (\text{Re} < 2100) \quad (3-1.5)$$

از طرف دیگر، در جریان متلاطم، سرعت در هر نقطه لوله، به صورت نامنظم با زمان تغییر می‌کند. می‌توان در هر نقطه، مثلاً با استفاده از لوله پیتو، «سرعت هموارشده زمانی» را اندازه‌گیری کرد. لوله پیتو به نوسانات سریع سرعت حساس نیست، اما متوسط سرعت طی چند ثانیه را حس می‌کند. سرعت هموارشده زمانی (که در بخش بعد تعریف می‌شود) یک مؤلفه  $z$  دارد که آن را با  $\bar{v}_z$  نشان می‌دهند و شکل و مقدار متوسط آن، به صورت بسیار تقریبی، از روابط زیر به دست می‌آید.<sup>۱</sup>

$$\frac{\bar{v}_z}{v_{z,\max}} \approx \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} \quad \text{و} \quad \frac{\langle \bar{v}_z \rangle}{v_{z,\max}} \approx \frac{4}{5} \quad (10^4 < \text{Re} < 10^5) \quad (5, 4-1.5)$$

عبارتی با توان  $\frac{1}{7}$  بسیار تقریبی‌تر از آن است که بتواند مشتق واقعی سرعت را در جدار لوله به دست دهد. در شکل ۱-۱.۵ توزیع‌های سرعت آرام و متلاطم مقایسه شده‌اند. آهنگ جریان جرمی و افت فشار در گستره یکسانی از اعداد رینولدز، دیگر متناسب نیستند بلکه رابطه تقریبی زیر را باهم دارند:

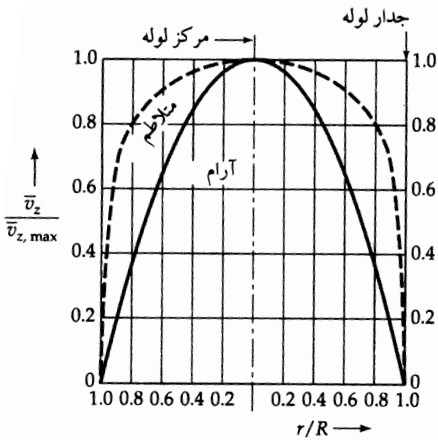
$$\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L \approx 0.10198 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{7/4} \left(\frac{\mu^{1/4} L}{\rho R^{13/4}}\right) w^{7/4} \quad (10^4 < \text{Re} < 10^5) \quad (6-1.5)$$

وابستگی بیش‌تر افت فشار به آهنگ جریان جرمی در جریان متلاطم از این واقعیت ناشی می‌شود که برای برقرار نگه داشتن حرکت گردابی شدید در سیال، باید انرژی بیش‌تری تأمین کرد.

7. P. Holmes, J. L. Lumley, and G. Berkooz, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems, and Symmetry*, Cambridge University Press (1996); F. Waleffe, *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 4140-4148 (1998).

1. H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 7th edition (1979).

در فصل ۲۰ این کتاب جریان در لوله، در فصل‌های ۷ و ۲۱ جریان روی صفحه تخت، و در فصل‌های ۹ و ۲۴ جریان جت شرح داده شده‌است.

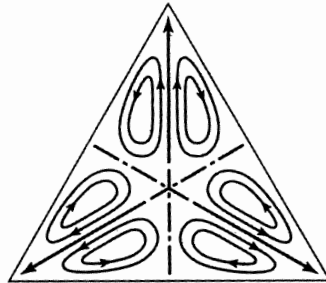


شکل ۱-۵.۱ مقایسه کیفی توزیع‌های سرعت آرام و متلاطم. برای آشنایی بیشتر با جزئیات توزیع سرعت در نزدیکی جدار، نگاه کنید به شکل ۳-۵.۵.

گذار آرام-متلاطم در لوله‌های مدور، معمولاً به‌ازای عدد رینولدز بحرانی حدود  $2100$  رخ می‌دهد، اگرچه با دقت فوق‌العاده برای حذف ارتعاشات سیستم، این عدد ممکن است بالاتر هم برود.<sup>۲</sup> گذر از جریان آرام به متلاطم را می‌توانیم با آزمایش ساده‌ای که ابتدا رینولدز انجام داد، نمایش دهیم. یک لوله شفاف طویل، مجهز به وسیله‌ای برای تزریق مقدار اندکی رنگینه به داخل جریان در طول محور لوله لازم است. وقتی جریان آرام است، رنگینه به صورت رشته‌ای مستقیم و هم‌چسب به طرف پایین‌دست حرکت می‌کند. اما در جریان متلاطم، رنگینه به‌سرعت در تمام مقطع لوله پخش می‌شود و حالتی شبیه حرکت ذرات در شکل ۱-۵.۲ پدید می‌آید، که علت آن حرکت گردابی است (نفوذ تلاطمی).

### لوله‌های غیرمدور

برای جریان آرام شکل‌یافته در مجرایی با مقطع مثلثی که در شکل ۳.۲ (ب) نشان داده شد، ذرات سیال به‌صورت خمیده‌خطی در جهت  $z$ ، به موازات جدارهای مجرا، حرکت می‌کنند. برعکس، در جریان متلاطم، روی جریان هموارشده زمانی در جهت  $z$  (جریان اولیه) یک حرکت هموارشده زمانی در صفحه  $xy$  (جریان ثانویه) سوار است. جریان ثانویه از جریان اولیه بسیار ضعیف‌تر است و به‌صورت شش گردابه آرایش‌یافته طبق الگویی متقارن حول محور مجرا آشکار می‌شود (شکل ۱-۵.۲ را ببینید). در سایر لوله‌های غیرمدور نیز جریان‌های ثانویه مشاهده می‌شوند.



شکل ۱-۵.۲ الگوهای جریان ثانویه برای جریان متلاطم در مجرایی با مقطع مثلثی.

2. O. Reynolds, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **174**, Part III, 935-982 (1883). See also A. A. Draad and F. M. T. Nieuwstadt, *J. Fluid Mech.*, **361**, 297-308 (1998).



### صفحه تخت

در بخش ۴.۴ دیدیم که برای جریان آرام در اطراف صفحه‌ای تخت که هردو طرف آن خیس می‌شود، جواب معادله‌های لایهٔ مرزی عبارت نیروی پسا را به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$F = 1,328 \sqrt{\rho \mu L W^2 v_\infty^2} \quad (\text{آرام}) \quad 0 < \text{Re}_L < 5 \times 10^5 \quad (7-1.5)$$

که در آن  $\text{Re}_L = Lv_\infty \rho / \mu$  عدد رینولدز برای صفحه‌ای به طول  $L$  است؛ عرض صفحه  $W$  و سرعت تقرب سیال  $v_\infty$  است.

از طرف دیگر، در جریان متلاطم، وابستگی به خواص هندسی و فیزیکی کاملاً متفاوت است:

$$F \approx 0,74 \sqrt{\rho^2 \mu L^2 W^5 v_\infty^3} \quad (\text{متلاطم}) \quad (5 \times 10^5 < \text{Re}_L < 10^7) \quad (8-1.5)$$

بنابراین در جریان آرام، نیرو با توان  $\frac{3}{4}$  سرعت تقرب متناسب است، اما در جریان متلاطم با توان  $\frac{9}{8}$  آن. وابستگی بیش‌تر به سرعت تقرب، نیاز به انرژی اضافی برای برقرار نگه داشتن حرکت‌های گردابی نامنظم در سیال را نشان می‌دهد.

### جت‌های مدور و صفحه‌ای

سپس رفتار جت‌هایی را بررسی می‌کنیم که از جداری تخت، که صفحه  $xy$  فرض می‌شود، بیرون می‌باشند (شکل ۱-۶.۵ را ببینید). سیال از لوله‌ای مدور یا شکافی باریک و طویل بیرون می‌آید و در پهنهٔ بزرگی از همان سیال جاری می‌شود. مشاهدات مختلفی می‌توان روی جت‌ها انجام داد: پهنای جت، سرعت خط مرکزی جت، و آهنگ جریان جرمی در مقطعی موازی با صفحه  $xy$ ، همهٔ این خواص را می‌توان به صورت توابعی از فاصلهٔ  $z$  از جدار اندازه‌گیری کرد. در جدول ۱-۱.۵ خواص جت‌های مدور و دوبعدی برای جریان آرام و متلاطم گفته شده‌است. جای شگفتی است که در جت مدور، پهنای جت، سرعت خط مرکزی، و آهنگ جریان جرمی، در هردو نوع جریان آرام و متلاطم، وابستگی دقیقاً یکسانی به  $z$  دارند. در بخش ۶.۵ دوباره به سراغ این نکته خواهیم آمد.

با مثال‌های بالا باید این نکته روشن شده‌باشد که ویژگی‌های کلی جریان‌های آرام و متلاطم کاملاً متفاوت‌اند. یکی از چالش‌های متعدد در نظریهٔ تلاطم، تلاش برای توضیح این تفاوت‌هاست.

جدول ۱-۱.۵ وابستگی پارامترهای جت به فاصلهٔ  $z$  از جدار.

جریان آرام			جریان متلاطم		
پهنای جت	سرعت خط مرکزی	آهنگ جریان جرمی	پهنای جت	سرعت خط مرکزی	آهنگ جریان جرمی
$z$	$z^{-1}$	$z$	$z$	$z^{-1}$	$z$
$z^{2/3}$	$z^{-1/3}$	$z^{1/3}$	$z$	$z^{-1/2}$	$z^{1/2}$

### ۲.۵ معادله‌های هموارشدهٔ زمانی تغییر برای سیالات تراکم‌ناپذیر

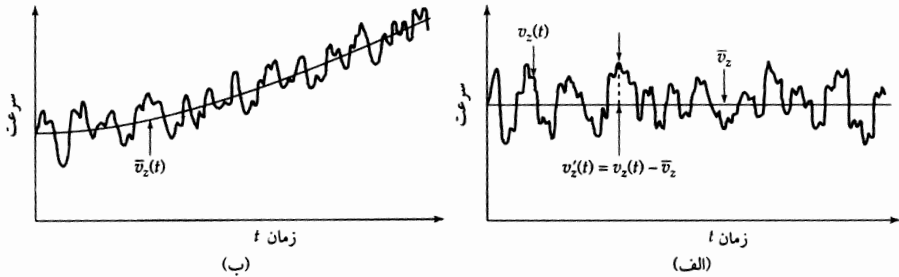
کار را با بررسی جریان متلاطم در لوله‌ای با گرادیان فشار خارجی ثابت شروع می‌کنیم. اگر در یک نقطه از سیال یکی از مؤلفه‌های سرعت را به صورت تابعی از زمان مشاهده کنیم، درمی‌یابیم که به صورتی نامنظم و آشفته، مطابق شکل ۱-۲.۵ (الف) در نوسان است. این نوسانات انحراف‌های نامنظم از مقداری میانگین است. سرعت واقعی را می‌توان به صورت جمع مقدار میانگین (که با خط بار مشخص شده‌است) و نوسان (که با علامت پریم مشخص شده‌است)، در نظر گرفت.

مثلاً، برای مؤلفه  $z$  سرعت، می‌نویسیم:

$$v_z = \bar{v}_z + v'_z \quad (۱-۲.۵)$$

که گاهی تجزیه رینولدز نامیده می‌شود. این مقدار میانگین از  $v_z(t)$  و با متوسط‌گیری زمانی روی تعداد زیادی از نوسانات به دست می‌آید:

$$\bar{v}_z = \frac{1}{t} \int_{t-\frac{1}{4}t}^{t+\frac{1}{4}t} v_z(s) ds \quad (۲-۲.۵)$$



شکل ۱-۲.۵ مؤلفه سرعت  $v_z$  به صورت تابعی از مقدار هموارشده زمانی آن،  $\bar{v}_z$  و نوسان آن،  $v'_z$ ، در جریان متلاطم (الف) برای «جریان متلاطم با تحریک پایا» که در آن  $\bar{v}_z$  به زمان وابسته نیست، و (ب) برای وضعیتی که در آن  $\bar{v}_z$  به زمان وابسته است.

دوره تناوب  $t_0$  به اندازه کافی طولانی هست که یک تابع متوسط‌گیری شده هموار را نتیجه دهد. در سیستم مورد بررسی، کمیت  $\bar{v}_z$  که آن را سرعت هموارشده زمانی می‌نامیم، از زمان مستقل است، اما بدیهی است که به مکان بستگی دارد. وقتی سرعت هموارشده زمانی به زمان وابسته نباشد، از «جریان متلاطم با تحریک پایا» سخن می‌گوییم. آن چه درباره سرعت گفتیم، در مورد فشار هم صادق است.

سپس جریان متلاطم در لوله، با گرادیان فشار وابسته به زمان، را در نظر می‌گیریم. برای چنین جریانی می‌توان کمیت‌های هموارشده زمانی را به صورت بالا تعریف کرد، اما باید دانست که دوره تناوب  $t_0$  باید نسبت به تغییرات گرادیان فشار کوچک، اما نسبت به دوره تناوب نوسانات بزرگ باشد. سرعت هموارشده زمانی و سرعت واقعی در چنین وضعیتی را در شکل ۱-۲.۵ (ب) نشان داده‌ایم.<sup>۱</sup>

طبق تعریف ارائه شده با معادله (۲-۵.۵)، به آسانی می‌توان نشان داد که روابط زیر صادق‌اند:

$$\overline{v'_z} = 0 \quad \overline{\bar{v}_z} = \bar{v}_z \quad \overline{\bar{v}_z v'_z} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} v_z = \frac{\partial}{\partial x} \bar{v}_z \quad \frac{\partial}{\partial t} v_z = \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}_z \quad (۳-۲.۵)$$

اما کمیت  $\overline{v'^2_z}$  صفر نخواهد شد و درحقیقت نسبت  $\sqrt{\overline{v'^2_z}} / \langle \bar{v}_z \rangle$  را می‌توان معیاری از اندازه نوسانات تلاطمی در نظر گرفت. این کمیت، که شدت تلاطم نامیده می‌شود، می‌تواند مقادیری از ۱ تا ۱۰٪ در بخش اصلی جریان <sup>۱</sup> می‌توان کمیت‌های دارای «خط بار» را برحسب «متوسط گروهی» نیز تعریف کرد. در اغلب کاربردها، نتایج هم‌ارزند یا هم‌ارز فرض می‌شوند. مثلاً نگاه کنید به

A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press, 2nd edition (1976).

هم‌چنین، در ارتباط با آخرین فرمول گفته شده با عنوان معادله (۳-۲.۵) نگاه کنید به

P. K. Kundu, *Fluid Mechanics*, Academic Press, New York (1990), p. 421,

تلاطمی و مقادیر ۲۵٪ یا بیشتر را در همسایگی جدار جامد اختیار کند. بنابراین باید بر این نکته تأکید کرد که لزوماً با اختلالات جزئی سروکار نداریم؛ گاهی نوسانات کاملاً شدید و بزرگ است.

کمیت‌هایی مانند  $\overline{v'_x v'_y}$  نیز غیرصفرند. علت آن است که حرکت‌های موضعی درجهت‌های  $x$  و  $y$  همبسته‌اند. به عبارت دیگر، نوسانات درجهت  $x$  از نوسانات در جهت  $y$  مستقل نیستند. خواهیم دید که این مقادیر هموارشدهٔ زمانی حاصل ضرب‌های خواص نوسانی، نقش مهمی در انتقال اندازه حرکت تلاطمی دارند. بعدها در انتقال گرما و انتقال جرم تلاطمی، با همبستگی‌های مشابهی روبه‌رو خواهیم شد.

پس از تعریف کمیت‌های هموارشدهٔ زمانی و شرح بعضی از خواص کمیت‌های نوسانی، اکنون می‌توانیم به سراغ معادله‌های هموارشدهٔ زمانی تغییر برویم. با هدف هرچه ساده‌تر کردن مراحل پی‌ریزی این معادلات، در این جا فقط معادله‌های سیالی با چگالی و ویسکوزیتهٔ ثابت را در نظر می‌گیریم. کار را با نوشتن معادله‌های پیوستگی و حرکت و جایگزین کردن  $\mathbf{v}$  با هم‌ارز آن  $\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$ ، و جایگزین کردن  $p$  با هم‌ارز آن  $\bar{p} + p'$  آغاز می‌کنیم. بنابراین معادلهٔ پیوستگی عبارت است از  $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ ، و مؤلفهٔ  $x$  معادلهٔ حرکت، یعنی معادلهٔ (۲.۳-۶) را با استفاده از معادلهٔ (۲.۳-۵) به صورت  $\partial/\partial t$  می‌نویسیم:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{v}_x + v'_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}_y + v'_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}_z + v'_z) = 0 \quad (۲.۵-۴)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\bar{v}_x + v'_x) = & -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + p') - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho(\bar{v} + v'_x)(\bar{v}_x + v'_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}_y + v'_y)(\bar{v}_x + v'_x) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \rho(\bar{v}_z + v'_z)(\bar{v}_x + v'_x) \right) + \mu \nabla^2(\bar{v}_x + v'_x) + \rho g_x \end{aligned} \quad (۲.۵-۵)$$

مؤلفه‌های  $y$  و  $z$  معادلهٔ حرکت را نیز می‌توان به شیوهٔ مشابه نوشت. سپس این معادله‌ها را، با استفاده از روابط داده‌شده توسط معادلهٔ (۲.۵-۳)، از لحاظ زمانی هموار می‌کنیم. در نتیجه:

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v}_y + \frac{\partial}{\partial z} \bar{v}_z = 0 \quad (۲.۵-۶)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{v}_x = & -\frac{\partial}{\partial x} \bar{p} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho \bar{v}_x \bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho \bar{v}_y \bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho \bar{v}_z \bar{v}_x \right) \\ & - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{v'_x v'_x} + \frac{\partial}{\partial y} \rho \overline{v'_y v'_x} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \overline{v'_z v'_x} \right) + \mu \nabla^2 \bar{v}_x + \rho g_x \end{aligned} \quad (۲.۵-۷)$$

برای مؤلفه‌های  $y$  و  $z$  معادلهٔ حرکت نیز روابط مشابهی حاصل می‌شود. این روابط، معادله‌های هموارشدهٔ زمانی برای پیوستگی و حرکت سیالی با چگالی و ویسکوزیتهٔ ثابت‌اند. با مقایسهٔ آن‌ها با معادله‌های متناظر در معادلهٔ (۲.۳-۵) و (۲.۳-۶) (رابطهٔ اخیر برحسب  $\partial/\partial t$  بازنویسی می‌شود)، نتیجه می‌گیریم که (الف) معادلهٔ پیوستگی همان است که قبلاً داشتیم، با این تفاوت که  $\bar{\mathbf{v}}$  جایگزین  $\mathbf{v}$  شده‌است.

(ب) در معادلهٔ حرکت  $\bar{\mathbf{v}}$  داریم، درحالی‌که قبلاً  $\mathbf{v}$  و  $p$  داشتیم. به علاوه جمله‌هایی که زیر آن‌ها خط‌چین کشیده شده‌است، و انتقال اندازه حرکت مربوط به نوسانات تلاطمی را توصیف می‌کنند، در معادلهٔ حاضر پدیدار شده‌اند.

می‌توان معادلهٔ (۲.۵-۷) را با معرفی تانسور شار اندازه حرکت تلاطمی  $\bar{\tau}^{(t)}$  با مؤلفه‌های زیر، بازنویسی کرد:

$$\bar{\tau}_{xx}^{(t)} = \rho \overline{v'_x v'_x} \quad \bar{\tau}_{xy}^{(t)} = \rho \overline{v'_x v'_y} \quad \bar{\tau}_{xz}^{(t)} = \rho \overline{v'_x v'_z} \quad \text{غیره و} \quad (۲.۵-۸)$$

معمولاً این کمیت‌ها را تنش‌های رینولدز می‌نامند. می‌توانیم نماد  $\bar{\tau}^{(v)}$  را هم برای شار اندازه حرکت ویسکوز هموارشدهٔ زمانی معرفی کنیم. شکل ظاهری مؤلفه‌های این تانسور همان است که در پیوست‌های ب.۱ تا ب.۳ مشاهده می‌شود، با این تفاوت که مؤلفه‌های سرعت هموارشدهٔ زمانی در آن‌ها ظاهر می‌شوند:

$$\bar{\tau}_{xx}^{(v)} = -2\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \quad \bar{\tau}_{xy}^{(v)} = -\mu \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right) \quad \text{غیره و} \quad (۹-۲.۵)$$

به این ترتیب می‌توانیم معادله‌های تغییر را به صورت تانسور برداری بنویسیم:

$$(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad \text{و} \quad (\nabla \cdot \mathbf{v}') = 0 \quad (۱۱-۲.۵، ۱۰)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{\mathbf{v}} = -\nabla \bar{p} - [\nabla \cdot \rho \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}] - [\nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(v)} + \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(t)})] + \rho \mathbf{g} \quad (۱۲-۲.۵)$$

معادله (۱۱-۲.۵) معادله‌ای اضافی است که با تفريق کردن معادله (۱۰-۲.۵) از معادله اصلی پیوستگی به دست می‌آید. نتیجه اصلی این بخش این است که معادله حرکت برحسب تانسور تنش، که در جدول پیوست ب.۵ خلاصه شده است، را می‌توان با تغییر همهٔ  $v_i$  ها به  $\bar{v}_i$  و همهٔ  $p$  ها به  $\bar{p}$  و هم چنین  $\tau_{ij}$  به  $\bar{\tau}_{ij}^{(v)} + \bar{\tau}_{ij}^{(t)}$  در هر دستگاه مختصات مفروض، برای جریان متلاطم، از لحاظ زمانی هموار کرد.

اکنون به مشکل اصلی در نظریهٔ تلاطم رسیده‌ایم. تنش‌های رینولدز  $\bar{\tau}_{ij}^{(t)}$  که در بالا معرفی شدند، با گرادیان سرعت رابطهٔ ساده‌ای مانند رابطهٔ تنش‌های ویسکوز هموارشدهٔ زمانی  $\bar{\tau}_{ij}^{(v)}$  در معادله (۹-۲.۵) ندارند. بلکه توابع پیچیده‌ای از مکان و شدت تلاطم‌اند. برای حل مسئله‌های جریان باید اطلاعاتی تجربی در مورد تنش‌های رینولدز داشته باشیم، یا در غیر این صورت به عبارت‌های تجربی متوسل شویم. در بخش ۴.۵ بعضی از تجربه‌گرایی‌های ممکن را شرح می‌دهیم.

در واقع می‌توان معادله‌های تغییر را برای تنش‌های رینولدز نیز به دست آورد (مسئلهٔ ۱.۵۵ را ببینید) اما این معادله‌ها حاوی کمیت‌هایی مانند  $\overline{v'_i v'_j v'_k}$  هستند. به همین ترتیب، معادله‌های تغییر برای  $\overline{v'_i v'_j v'_k}$  حاوی همبستگی مرتبهٔ بالاتر  $\overline{v'_i v'_j v'_k v'_l}$  هستند و غیره. یعنی با سلسله‌مراتبی تمام‌نشده از معادله‌هایی سروکار داریم که باید حل شوند. برای حل مسئله‌های جریان باید این سلسله‌مراتب را، با معرفی روابط تجربی، «قطع کرد». اگر از روابط تجربی برای تنش‌های رینولدز استفاده کنیم، نظریهٔ «مرتبهٔ اول» داریم. اگر از روابط تجربی برای  $\overline{v'_i v'_j v'_k}$  استفاده کنیم، آنگاه نظریهٔ «مرتبهٔ دوم» خواهیم داشت و غیره. مسئلهٔ معرفی روابط تجربی برای به دست آوردن مجموعهٔ بسته‌ای از معادلات توزیع سرعت و فشار که بتوان آن‌ها را حل کرد «مسئلهٔ بستار» نامیده می‌شود. در بخش ۴.۵ با بستار مرتبهٔ اول سروکار داریم. در مرتبهٔ دوم، «تجربه‌گرایی  $k-\epsilon$ » به صورت گسترده‌ای مطالعه شده و در مکانیک سیالات محاسباتی به کار رفته است.<sup>۲</sup>

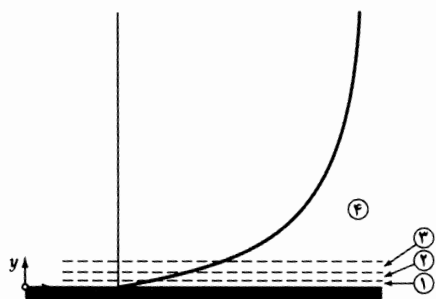
### ۳.۵ توزیع سرعت هموارشدهٔ زمانی در نزدیکی جدار

قبل از بحث دربارهٔ عبارت‌های تجربی مختلفی که برای تنش‌های رینولدز به کار می‌روند، چند رابطه را بی‌ریزی می‌کنیم که به هیچ نوع تجربه‌گرایی وابسته نیستند. ما با توزیع سرعت هموارشدهٔ زمانی و کاملاً شکل‌گرفته در همسایگی جدار سروکار داریم. چندین نتیجه را بررسی کردیم: بسط سری تیلر سرعت در نزدیکی جدار، و توزیع‌های سرعت عام که از قانون‌های لگاریتمی و توانی پیروی می‌کنند، در فاصلهٔ کمی از جدار.

2. J. L. Lumley, *Adv. Appl. Mech.*, **18**, 123-176 (1978); C. G. Speziale, *Ann. Revs. Fluid Mech.*, **23**, 107-157 (1991); H. Schlichting and K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*, Springer, Berlin, 8th edition (2000), pp. 560-563.

جریان در نزدیکی سطح تخت در شکل ۱-۳-۵ نشان داده شده است. به راحتی می‌توان چهار ناحیه را، به شرح زیر، تشخیص داد:

- زیرلایهٔ ویسکوز در فاصلهٔ بسیار کم از جدار، که در آن ویسکوزیته نقش مهمی دارد؛
- لایهٔ میانگیر که در آن گذار بین زیرلایه‌های ویسکوز و لخت رخ می‌دهد؛
- زیرلایهٔ لخت در آغاز جریان تلاطمی اصلی، که در آن ویسکوزیته نقش فرعی دارد؛
- جریان تلاطمی اصلی که در آن توزیع سرعت هموارشدهٔ زمانی تقریباً تخت است و ویسکوزیته اهمیتی ندارد. لازم به تأکید است که این دسته‌بندی تاحدودی اختیاری است.



شکل ۱-۳-۵ نواحی جریان برای توصیف جریان تلاطمی در نزدیکی جدار: (۱) زیرلایهٔ ویسکوز، (۲) لایهٔ میانگیر، (۳) زیرلایهٔ لخت، (۴) جریان تلاطمی اصلی.

#### توزیع‌های سرعت لگاریتمی و توانی در زیرلایهٔ لخت (۴.۳.۲.۱)

فرض کنید تنش برشی هموارشدهٔ زمانی که بر جدار واقع در  $y = 0$  وارد می‌شود  $\tau_0$  باشد (این همان  $-\bar{\tau}_{yx}|_{y=0}$  است). در این صورت تنش برشی در زیرلایهٔ لخت با مقدار  $\tau_0$  تفاوت زیادی نخواهد داشت. اکنون این پرسش را مطرح می‌کنیم: گرادیان سرعت هموارشدهٔ زمانی،  $d\bar{v}_x/dy$  به کدام کمیت‌ها بستگی خواهد داشت؟ این گرادیان نباید به ویسکوزیته وابسته باشد، زیرا در بیرون از لایهٔ میانگیر انتقال اندازه حرکت باید عمدتاً به نوسانات سرعت وابسته باشد (به تسامح آن را «حرکت گردابی» می‌نامند). این عامل ممکن است به چگالی  $\rho$ ، تنش برشی جدار  $\tau_0$ ، و فاصلهٔ  $y$  از جدار وابسته باشد. تنها ترکیب این سه کمیت که بعدی همانند گرادیان سرعت دارد  $\sqrt{\tau_0/\rho}/y$  است. بنابراین می‌نویسیم:

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{y} \quad (۱-۳-۵)$$

1. L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford, 2nd edition (1987), pp. 172-178.
2. H. Schlichting and K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 8th edition (2000), §17.2.3.
3. T. von Kármán, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Klasse* (1930), pp. 58-76; L. Prandtl, *Ergeb. Aerodyn. Versuch.*, Series 4, Göttingen (1932).
4. G. I. Barenblatt and A. J. Chorin, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **93**, 6749-6752 (1996) and *SIAM Rev.*, **40**, 265-291 (1981); G. I. Barenblatt, A. J. Chorin, and V. M. Prostokishin, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **94**, 773-776 (1997). See also G. I. Barenblatt, *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*, Cambridge University Press (1992), §10.2

که در آن  $\kappa$  ثابت اختیاری بدون بُعد است که باید با آزمایش آن را تعیین کرد. کمیت  $\sqrt{\tau_0/\rho}$  ابعاد سرعت را دارد؛ این کمیت را سرعت اصطکاکی می‌نامند و آن را با نماد  $v_*$  مشخص می‌کنند. با انتگرال‌گیری از معادله (۱-۳.۵) نتیجه می‌شود:

$$\bar{v}_x = \frac{v_*}{\kappa} \ln y + \lambda' \quad (2-3.5)$$

$\lambda'$  ثابت انتگرال‌گیری است. برای استفاده از گروه‌های بدون بُعد، معادله (۲-۳.۵) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{yv_*}{\nu} \right) + \lambda \quad (3-3.5)$$

که در آن  $\lambda$  ثابتی است که رابطه ساده‌ای با  $\lambda'$  دارد؛ ویسکوزیته سینماتیکی  $\nu$  را به این سبب گنجانده‌ایم که شناسه بدون بُعد لگاریتم را تشکیل دهیم. به تجربه معلوم شده‌است که مقادیر منطقی ثابت‌ها عبارت‌اند از:  $\kappa = 0.4$  و  $\lambda = 5.5$ ، در نتیجه:

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*} = 2.5 \ln \left( \frac{yv_*}{\nu} \right) + 5.5 \quad \frac{yv_*}{\nu} > 30 \quad (4-3.5)$$

این رابطه را توزیع سرعت لگاریتمی عام فون کارمان-پرانتل می‌نامند؛ قصد داریم آن را فقط در زیرلایه لخت به کار ببریم. بعداً خواهیم دید (در شکل ۳-۵.۵) که این تابع داده‌های تجربی را در ورای زیرلایه لخت، نسبتاً خوب توصیف می‌کند. اگر شکل ۱-۳.۵ درست بود، آن‌گاه ثابت‌های  $\kappa$  و  $\lambda$  به راستی «ثابت‌های عمومی» بودند و می‌توانستیم در هر عدد رینولدزی از آن‌ها استفاده کنیم. اما مقادیر  $\kappa$  در گستره  $0.40$  تا  $0.44$  و مقادیر  $\lambda$  در گستره  $5.0$  تا  $6.3$  را، بسته به گستره اعداد رینولدز، می‌توان در نوشته‌های علمی یافت. می‌توان نتیجه گرفت که سمت راست معادله (۱-۳.۵) باید در تابعی از عدد رینولدز ضرب شود و  $y$  را باید به توانی رساند که شامل عدد رینولدز باشد. استدلال‌های نظری مختلفی مطرح شده‌است که بنا به آن‌ها باید معادله (۱-۳.۵) را با معادله زیر جایگزین کرد:

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy} = \frac{v_*}{y} \left( B_0 + \frac{B_1}{\ln Re} \right) \left( \frac{yv_*}{\nu} \right)^{\beta_1 / \ln Re} \quad (5-3.5)$$

که در آن  $B_0 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ ،  $B_1 = \frac{15}{4}$  و  $\beta_1 = \frac{3}{4}$ . وقتی از معادله (۵-۳.۵) نسبت به  $y$  انتگرال بگیریم، توزیع سرعت عام بارن‌بلات-چوپرین حاصل می‌شود:

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \ln Re + \frac{5}{4} \right) \left( \frac{yv_*}{\nu} \right)^{3/(4 \ln Re)} \quad (6-3.5)$$

معادله (۶-۳.۵) نواحی ۳ و ۴ در شکل ۱-۳.۵ را بهتر از معادله (۴-۳.۵) توصیف می‌کند. ناحیه ۱ با معادله (۱۳-۳.۵) بهتر توصیف می‌شود.

### بسط سری تیلر در زیرلایه ویسکوز

کار را با نوشتن سری تیلر برای  $\bar{v}_x$  به صورت تابعی از  $y$  شروع می‌کنیم، بنابراین:

$$\bar{v}_x(y) = \bar{v}_x(0) + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \Big|_{y=0} y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \Big|_{y=0} y^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \bar{v}_x}{\partial y^3} \Big|_{y=0} y^3 + \dots \quad (7-3.5)$$

برای ارزیابی جمله‌های این سری، باید عبارت تنش برشی هموارشده زمانی در مجاورت جدار را بدانیم. درحالت خاص جریان با تحریک پایا در شکافی به ضخامت  $2B$ ، تنش برشی به صورت  $\bar{\tau}_{yx} = \bar{\tau}_{yx}^{(v)} + \bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\tau_0 [1 - (y/B)]$  خواهد بود. سپس از معادله‌های (۸-۲.۵) و (۹-۲.۵) داریم:

$$+\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} - \rho \bar{v}_x' v_y' = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{B}\right) \quad (۸-۳.۵)$$

اکنون جمله‌هایی را که در معادله (۷-۳.۵) ظاهر می‌شوند، یک‌به‌یک بررسی می‌کنیم:

۱. جمله اول، براساس شرط عدم لغزش، صفر است.
۲. ضریب جمله دوم را می‌توان از معادله (۸-۳.۵) به دست آورد، زیرا می‌دانیم که هم  $v_x'$  و هم  $v_y'$  روی جدار صفرند، به طوری که:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\tau_0}{\mu} \quad (۹-۳.۵)$$

۳. ضریب جمله سوم شامل مشتق دوم است که می‌توان با مشتق‌گیری از معادله (۸-۳.۵)، نسبت به  $y$  و سپس قرار دادن  $y = 0$ ، به ترتیب زیر، آن را به دست آورد:

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\rho}{\mu} \left( v_x' \frac{\partial v_y'}{\partial y} + v_y' \frac{\partial v_x'}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} - \frac{\tau_0}{\mu B} = -\frac{\tau_0}{\mu B} \quad (۱۰-۳.۵)$$

زیرا هم  $v_x'$  و هم  $v_y'$  روی جدار صفرند.

۴. ضریب جمله چهارم شامل مشتق سوم است، که می‌توان آن را از معادله (۸-۳.۵) به دست آورد و برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \bar{v}_x}{\partial y^3} \Big|_{y=0} &= \frac{\rho}{\mu} \left( v_x' \frac{\partial^2 v_y'}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial v_y'}{\partial y} \frac{\partial v_x'}{\partial y} + v_y' \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=0} \\ &= -\frac{\rho}{\mu} \left( +2 \left( \frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_z'}{\partial z} \right) \frac{\partial v_x'}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = 0 \end{aligned} \quad (۱۱-۳.۵)$$

در این جا از معادله (۱۱-۲.۵) استفاده شده است.

به نظر می‌رسد که دلیلی برای صفرگرفتن ضریب بعدی وجود نداشته باشد، بنابراین مشاهده می‌شود که سری تیلر، در کمیت‌های بدون بُعد، صورت زیر را دارد:

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*} = \frac{yv_*}{\nu} - \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{v_* B} \right) \left( \frac{yv_*}{\nu} \right)^2 + C \left( \frac{yv_*}{\nu} \right)^3 + \dots \quad (۱۲-۳.۵)$$

ضریب  $C$  به شیوه تجربی به دست آمده است<sup>۶</sup> و بنابراین نتیجه نهایی چنین است:

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*} = \frac{yv_*}{\nu} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{v_* B} \right) \left( \frac{yv_*}{\nu} \right) - \frac{1}{6} \left( \frac{yv_*}{14.5\nu} \right)^2 + \dots \right] \quad 0 < \frac{yv_*}{\nu} < 5 \quad (۱۳-۳.۵)$$

6. C. S. Lin, R. W. Moulton, and G. L. Putnam, *Ind. Eng. Chem.*, **45**, 636-640 (1953);

این ضریب عددی براساس آزمایش‌های انتقال جرم در لوله‌های مدور تعیین شد؛ اهمیت جمله  $y^4$  در انتقال گرما و انتقال جرم را قبلاً ای. وی. مورفری تشخیص داده بود.

E. V. Murphree, *Ind. Eng. Chem.*, **24**, 726-736 (1932).

اگر وون مورفری (۱۸۹۸-۱۹۶۲) در دهه ۱۹۲۰ کاپیتان تیم فوتبال دانشگاه کنتاکی بود و بعدها به رئیس شرکت استاندارد اوایل دولوپمنت شد.

جمله  $y^3$  داخل کروشه در رابطه با همبستگی انتقال گرما و جرم در فصل‌های ۱۳، ۱۴، ۲۱، و ۲۲ اهمیت به‌سزایی دارد.

برای ناحیه  $30 < yv_*/\nu < 5$  هیچ فشتق ساده‌ای وجود ندارد و گاهی از برازش‌های منحنی تجربی استفاده می‌شود. در شکل ۳-۵.۵ یکی از این برازش‌ها برای لوله‌های مدور نشان داده شده‌است.

#### ۴.۵ عبارات‌های تجربی برای شار اندازه‌حرکت تلاطمی

حال دوباره به‌سراغ مسئله استفاده از معادله‌های هموارشدهٔ زمانی تغییر، یعنی معادله‌های (۱۱-۲.۵) و (۱۲-۲.۵) می‌رویم تا توزیع‌های فشار و سرعت هموارشدهٔ زمانی را به‌دست آوریم. چنان‌که در بخش قبل گفته شد، بعضی اطلاعات در مورد توزیع سرعت را می‌توان بدون دراختیار داشتن عبارتی خاص برای شار اندازه‌حرکت تلاطمی  $\bar{\tau}^{(t)}$  به‌دست آورد. اما روش متداول بین مهندسان استفاده از روابط تجربی مختلف برای  $\bar{\tau}^{(t)}$  است که شامل گرادیان‌های سرعت نیز باشند. چند مورد از این روش‌ها را بیان می‌کنیم هم‌چنین روش‌های متعدد دیگری را نیز می‌توان در نوشته‌های علمی در مورد تلاطم یافت.

#### ویسکوزیتهٔ گردابی بوسینسک

بر اساس قیاس با قانون ویسکوزیتهٔ نیوتون، معادلهٔ (۱-۱.۱)، می‌توان معادله‌ای برای جریان برشی متلاطم نوشت<sup>۱</sup>

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\mu^{(t)} \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (1-4.5)$$

که در آن  $\mu^{(t)}$  ویسکوزیتهٔ تلاطمی است (غالباً آن را ویسکوزیتهٔ گردابی می‌نامند و با نماد  $\varepsilon$  نشان می‌دهند). چنان‌که باتوجه به جدول ۱-۱.۵ می‌توان مشاهده کرد، دست‌کم برای یکی از جریان‌هایی که در این جا ارائه شده‌است، یعنی برای جت مدور، می‌توان انتظار داشت که معادلهٔ (۱-۴.۵) سودمند باشد. اما معمولاً  $\mu^{(t)}$  تابع مکان و شدت تلاطم است. درحقیقت، در بعضی سیستم‌ها<sup>۲</sup> حتی ممکن است  $\mu^{(t)}$  در بعضی از نواحی منفی باشد. لازم به تأکید است که ویسکوزیتهٔ  $\mu$  خاصیت سیال است، اما ویسکوزیتهٔ گردابی  $\mu^{(t)}$  اصولاً خاصیت جریان است. برای دو نوع جریان متلاطم (یعنی جریان روی سطوح و جریان در جت‌ها و دنباله‌ها)، عبارات‌های خاصی برای  $\mu^{(t)}$  در دسترس است:

$$\mu^{(t)} = \mu \left( \frac{yv_*}{14.5\nu} \right)^3 \quad 0 < \frac{yv_*}{\nu} < 5 \quad (1) \quad (2-4.5)$$

این عبارت، که از معادلهٔ (۱۳-۳.۵) به‌دست می‌آید، فقط در نواحی بسیار نزدیک به دیوار معتبر است. این عبارت در نظریهٔ انتقال تلاطمی گرما و جرم در فصل مشترک سیال-جامد، اهمیت درخور اعتنایی دارد.<sup>۳</sup>

$$\mu^{(t)} = \rho \kappa \cdot b (\bar{v}_{z,\max} - \bar{v}_{z,\min}) \quad (2) \quad (3-4.5)$$

1. J. Boussinesq, *Mém. prés. par div. savants à l' acad. sci. de Paris*, **23**, #1, 1-680 (1877), **24**, #2 1-64 (1877).

یوزف والننن بوسینسک (۱۸۴۲-۱۹۲۹)، استاد دانشگاه در لیل، کتابی دوجلدی در مورد گرما نوشت و به‌سبب «تقریب بوسینسک» و ایدهٔ «ویسکوزیتهٔ گردابی» شهرت یافت.

2. J. O. Hinze, *Appl. Sci. Res.*, **22**, 163-175 (1970); V. Kruka and S. Eskinazi, *J. Fluid Mech.*, **20**, 555-579 (1964).

3. C. S. Lin, R. W. Moulton, and G. L. Putnam, *Ind. Eng. Chem.*, **45**, 636-640 (1953).



که در آن  $\kappa_0$  ضریب بدون بُعدی است که باید به روش تجربی تعیین شود،  $b$  عرض منطقه اختلاط در فاصله  $z$  در پایین دست، و کمیت داخل پرانتز معرف حداکثر اختلاف در مؤلفه  $z$  سرعت‌های هموارشده زمانی در فاصله  $z$  است. پرانتل<sup>۴</sup> معادله (۳-۴.۵) را رابطه تجربی سودمندی برای جت‌ها و دنباله‌ها می‌دانست.

### طول اختلاط پرانتل

پرانتل با فرض این‌که حرکت گردابی در اطراف یک سیال به حرکت مولکول‌ها در اطراف گازی با چگالی پایین بسیار شبیه است (قیاسی که خیلی خوب نیست)، عبارتی برای انتقال اندازه حرکت در سیال متلاطم یافت.<sup>۵</sup> «طول اختلاط»  $l$  تقریباً همان نقشی را دارد که مسافت آزاد میانگین در نظریه جنبشی داشت (بخش ۴.۱ را ببینید). پرانتل با این نوع استدلال به رابطه زیر رسید:

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \quad (4-4.5)$$

اگر طول اختلاط یک ثابت عمومی بود، معادله (۴-۴.۵) بسیار جذاب می‌نمود، اما درحقیقت  $l$  تابع مکان است. پرانتل عبارتهای زیر را برای  $l$  پیشنهاد کرد:

$$(1) \text{ تلاطم در جدار: } l = \kappa_1 y \quad (5-4.5) \quad (l \text{ فاصله از جدار } = y)$$

$$(2) \text{ تلاطم آزاد: } l = \kappa_2 b \quad (6-4.5) \quad (l \text{ عرض منطقه اختلاط } = b)$$

که در آن  $\kappa_1$  و  $\kappa_2$  ثابت‌اند. چند سال قبل از پیشنهاد پرانتل، نتیجه‌ای شبیه معادله (۴-۴.۵) توسط تیلر،<sup>۶</sup> از «نظریه انتقال گردشاری» حاصل شد.

### معادله اصلاح‌شده وان در ریست

تلاش‌های زیادی برای به دست آوردن رابطه‌ای تجربی که بتواند تنش برشی تلاطمی را، در تمام فاصله جدار تا جریان تلاطمی اصلی توصیف کند، به عمل آمده است. در این جا صورت اصلاح‌شده معادله وان در ریست را ارائه می‌دهیم.<sup>۷</sup> این فرمولی برای طول اختلاط معادله (۴-۴.۵) است:

$$l = \kappa_1 y \frac{1 - \exp(-y v_* / 26 \nu)}{\sqrt{1 - \exp(-\kappa_2 y v_* / \nu)}} \quad (7-4.5)$$

این رابطه برای پیش‌بینی آهنگ‌های انتقال گرما و جرم در جریان داخل لوله‌ها سودمند واقع شده است. در دو بخش آینده و در چند مسئله در پایان فصل، کاربرد روابط تجربی بالا را نشان می‌دهیم. در نظر داشته باشید که این روابط برای تنش‌های رینولدز، کمی مهم‌تر از ابزارهایی هستند که می‌توان برای نمایش داده‌های تجربی یا حل مسئله‌هایی از نوع نسبتاً خاص به‌کار برد.

4. L. Prandtl, *Zeits. f. angew. Math. u. Mech.*, **22**, 241-243 (1942).

5. L. Prandtl, *Zeits. f. angew. Math. u. Mech.*, **5**, 136-139 (1925).

6. G. I. Taylor, *Phil. Trans.* **A215**, 1-26 (1915), and *Proc. Roy. Soc. (London)* **A135**, 685-701 (1932).

7. E. R. van Driest, *J. Aero. Sci.*, **23**, 1007-1011 and 1036 (1956).

در معادله اصلی وان در ریست، مخرج کسر به صورت ریشه دوم نبود. این اصلاح توسط

O. T. Hanna, O. C. Sandall, and P. R. Mazet, *AIChE Journal*, **27**, 693-697 (1981)

انجام شد تا وقتی  $y \rightarrow 0$ ، ویسکوزیته تلاطمی با  $y^2$  متناسب باشد و توافق با معادله (۲-۴.۵) برقرار شود.

## مثال ۱۴.۵

بی‌ریزی رابطه تنش رینولدز در مجاورت جدار عبارتی برای  $\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = \overline{\rho v'_x v'_y}$ ، به صورت تابع  $y$  در همسایگی جدار به دست آورید.

حل

(الف) کار را با بسط سری تیلر سه مؤلفه  $\mathbf{v}'$  شروع می‌کنیم:

$$v'_x(y) = v'_x(\circ) + \frac{\partial v'_x}{\partial y} \Big|_{y=\circ} y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y^2} \Big|_{y=\circ} y^2 + \dots \quad (۸-۴.۵)$$

$$v'_y(y) = v'_y(\circ) + \frac{\partial v'_y}{\partial y} \Big|_{y=\circ} y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y^2} \Big|_{y=\circ} y^2 + \dots \quad (۹-۴.۵)$$

$$v'_z(y) = v'_z(\circ) + \frac{\partial v'_z}{\partial y} \Big|_{y=\circ} y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v'_z}{\partial y^2} \Big|_{y=\circ} y^2 + \dots \quad (۱۰-۴.۵)$$

جمله نخست در معادله‌های (۸-۴.۵) و (۱۰-۴.۵) باید صفر باشد، زیرا شرط عدم لغزش برقرار است؛ جمله نخست در معادله (۹-۴.۵) درغیاب انتقال جرم صفر است. سپس می‌توانیم معادله (۱۱-۲.۵) را در  $y = \circ$  بنویسیم:

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x} \Big|_{y=\circ} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} \Big|_{y=\circ} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} \Big|_{y=\circ} = \circ \quad (۱۱-۴.۵)$$

جمله‌های اول و سوم این معادله، بنا به شرط عدم لغزش، صفرند. بنابراین باید نتیجه بگیریم که جمله دوم نیز صفر است. بنابراین همه جمله‌های معادله (۸-۴.۵) که زیرشان خط چین کشیده شده‌است صفرند و می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = \overline{\rho v'_x v'_y} = Ay^3 + By^4 + \dots \quad (۱۲-۴.۵)$$

این نتیجه نشان می‌دهد، اما اثبات نمی‌کند،<sup>۸</sup> که جمله مقدم در تنش رینولدز در نزدیکی جدار باید با  $y^3$  متناسب باشد. اما مطالعات گسترده روی آهنگ‌های انتقال جرم در مجراهای بسته<sup>۹</sup> نشان داده‌است که  $A \neq \circ$ .

(ب) برای جریان بین صفحه‌های موازی، می‌توان از عبارت به دست آمده به صورت معادله (۱۲-۳.۵) برای توزیع سرعت هموار شده زمانی استفاده کرد و شار اندازه حرکت تلاطمی را به دست آورد:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{yx}^{(t)} &= \overline{\rho v'_x v'_y} = -\tau_o \left(1 - \frac{y}{B}\right) + \mu \frac{d\bar{v}_x}{dy} \\ &= -\tau_o \left(1 - \frac{y}{B}\right) + \left(\tau_o - \tau_o \frac{y}{B} + Ay^3 + \dots\right) \end{aligned} \quad (۱۳-۴.۵)$$

که در آن  $A = \mathcal{F}C(v_* / \nu)^4$  این نتیجه با معادله (۱۲-۴.۵) در توافق است.

8. H. Reichardt, *Zeits. f. angew. Math. u. Mech.*, **31**, 208-219 (1951). See also J. O. Hinze, *Turbulence*, McGraw-Hill, New York, 2nd edition (1975), pp. 620-621 and D. T. Wasan, C. L. Tien, and C. R. Wilke, *AIChE Journal*, **9**, 567-569 (1963).

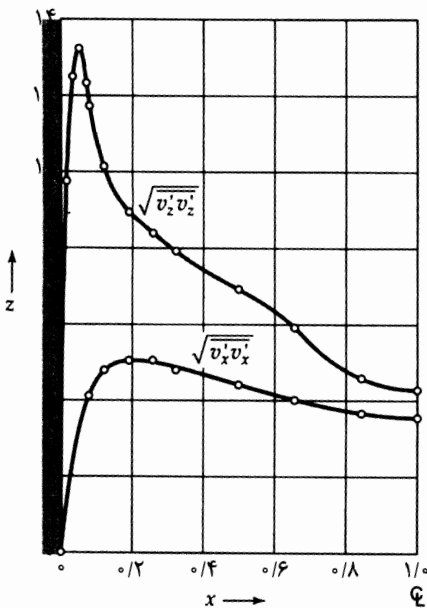
9. R. H. Notter and C. A. Sleicher, *Chem. Eng. Sci.*, **26**, 161-171 (1971); O. C. Sandall and O. T. Hanna, *AIChE Journal*, **25**, 190-192 (1979); D. W. Hubbard and E. N. Lightfoot, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **5**, 370-379 (1966).

### ۵.۵ جریان متلاطم در مجراها

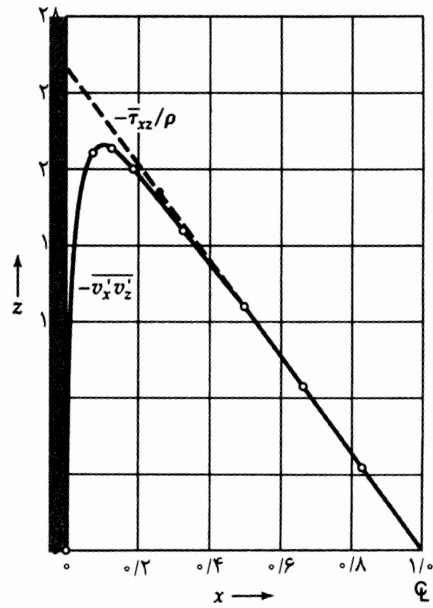
این بخش را با بحث کوتاهی در مورد اندازه‌گیری‌های تجربی جریان متلاطم در مجراهای مستطیلی آغاز می‌کنیم تا برداشتی از تنش‌های رینولدز ارائه دهیم. در شکل‌های ۱-۵.۵ و ۲-۵.۵ بعضی از اندازه‌گیری‌های تجربی کمیت‌های هموارشدهٔ زمانی  $\overline{v'_x v'_z}$ ،  $\overline{v'_x v'_x}$  و  $\overline{v'_z v'_z}$  برای جریان در جهت  $z$  در مجرای مستطیلی نشان داده شده‌است.

در شکل ۱-۵.۵، توجه شما را به این نکته جلب می‌کنیم که در نزدیکی دیوار،  $\sqrt{\overline{v'_z v'_z}}$  در حدود ۱۳٪ سرعت خط مرکزی هموارشدهٔ زمانی  $\bar{v}_{z,\max}$  است و  $\sqrt{\overline{v'_x v'_x}}$  در حدود ۵٪ است. به عبارت دیگر، در نزدیکی جدار، نوسانات سرعت در جهت جریان بسیار بزرگ‌تر از همین نوسانات در جهت عرضی است. در نزدیکی مرکز مجرا، دو دامنهٔ نوسان تقریباً برابرند و می‌توان گفت که تلاطم در این ناحیه تقریباً هم‌انرژی است.

در شکل ۲-۵.۵، تنش برشی تلاطمی  $\bar{\tau}_{xz}^{(t)} = \overline{\rho v'_x v'_z}$  با تنش برشی کل  $\bar{\tau}_{xz}^{(v)} = \bar{\tau}_{xz}^{(t)} + \bar{\tau}_{xz}^{(v)}$  در مقطع مجرا مقایسه شده‌است. آشکار است که سهم تلاطمی در بخش عمدهٔ مجرا اهمیت بیشتری دارد و سهم ویسکوز فقط در مجاورت جدار اهمیت دارد. این نکته در مثال ۳-۵.۵ بهتر نشان داده می‌شود. رفتاری مشابه در لوله‌هایی با مقطع دایره مشاهده می‌شود.



شکل ۱-۵.۵ اندازه‌گیری‌های ای. ج. ریشارت برای جریان متلاطم هوا در مجرای مستطیلی با  $\bar{v}_{z,\max} = 100 \text{ cm/s}$  در این جا کمیت‌های  $\sqrt{\overline{v'_z v'_z}}$  و  $\sqrt{\overline{v'_x v'_x}}$  نشان داده شده‌اند.



شکل ۲-۵.۵ اندازه‌گیری‌های ریشارت (شکل ۱-۵.۵) برای کمیت  $\overline{v'_x v'_z}$  در مجرای مستطیلی. توجه کنید که این کمیت، فقط در نزدیکی جدار با  $\bar{\tau}_{xz}/\rho$  تفاوت دارد.

### مثال ۱-۵.۵

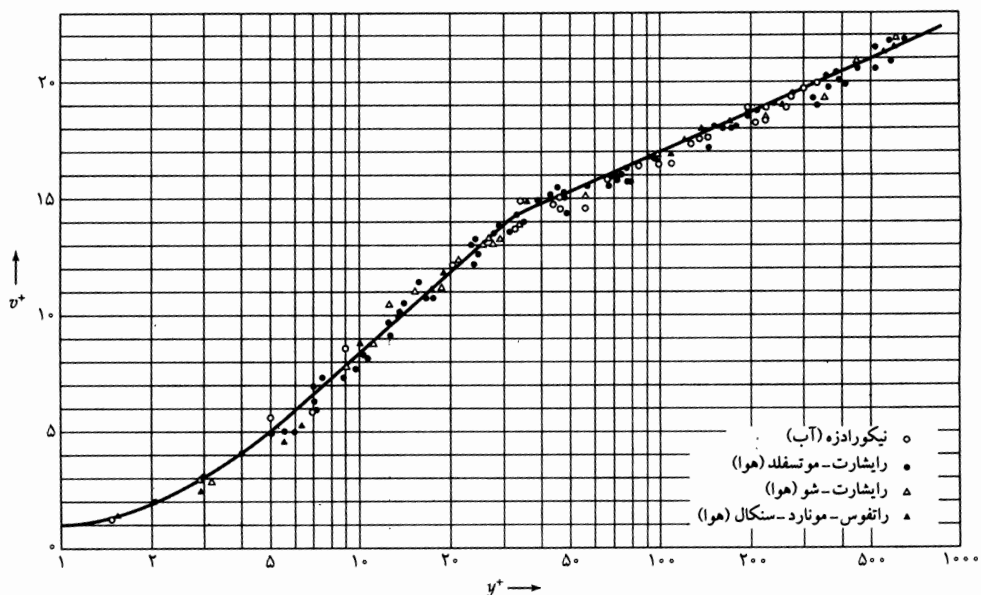
تخمین سرعت متوسط در لولهٔ دایره‌ای

با استفاده از نتایج بخش ۳.۵ سرعت متوسط را برای جریان متلاطم در لولهٔ دایره‌ای به دست آورید.

حل

می‌توانیم از توزیع سرعت نقل شده در شرح زیر شکل ۳-۵.۵ استفاده کنیم. برای به دست آوردن سرعت متوسط در لوله، باید در چهار ناحیه انتگرال گرفت: زیرلایه ویسکوز ( $y^+ < 5$ )، منطقه میانگیر  $30 < y^+ < 5$ ، زیرلایه لخت، و جریان تلاطمی اصلی که شکل تقریباً سهموی دارد. یقیناً می‌توان این کار را انجام داد، اما معلوم شده است که انتگرال‌گیری از توزیع لگاریتمی معادله (۳-۵.۴) (یا توزیع توانی معادله (۳-۵.۶) روی تمام مقطع نتایج به دست می‌دهد که تقریباً به همان صورت صحیح است. برای توزیع لگاریتمی نتیجه می‌شود:

$$\frac{\langle \bar{v}_z \rangle}{v_*} = 2,5 \ln \left( \frac{Rv_*}{v} \right) + 1,75 \quad (1-5.5)$$



شکل ۳-۵.۵ توزیع سرعت بدون بُعد جریان متلاطم در لوله‌های مدور، که به صورت  $v^+ = v^z - / v_*$  برحسب  $y^+ = y v_* \rho / \mu$  نشان داده شده است و در آن  $v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$  و  $\tau_0$  تنش جدار است. منحنی‌هایی که با خطوط پرترسیم شده‌اند، توسط لین، مولتون، و پوتنام پیشنهاد شده‌اند:

$$\begin{aligned} 0 < y^+ < 5 : & \quad v^+ = y^+ \left[ 1 - \frac{1}{4} (y^+ / 14,5)^2 \right] \\ 5 < y^+ < 30 : & \quad v^+ = 5 \ln(y^+ + 0,205) - 3,27 \\ 30 < y^+ : & \quad v^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5 \end{aligned}$$

داده‌های تجربی توسط جی. نیکورادزه برای آب (○)؛ رایشارت و موتسفلد برای هوا (●)؛ رایشارت و شو برای هوا (Δ)؛ و ار. ار. راتفوس، سی. سی. موناورد و وی. ای. سنکال برای هوا (■) به دست آمده‌اند.

اگر این رابطه با داده‌های تجربی آهنگ جریان برحسب افت شار مقایسه شود، مشاهده می‌شود که با تغییر ۲/۵ به ۲/۴۵ و ۱/۷۵ به ۲/۰، توافق خوبی بین آن‌ها حاصل می‌شود. اگر انتگرال‌گیری روی کل مقطع با استفاده از عبارت موضعی برای سرعت در لایه‌های مختلف انجام می‌شد، احتمالاً به این «دستکاری» ثابت‌ها نیازی نبود. از طرف دیگر، در اختیار داشتن رابطه لگاریتمی ساده‌ای مانند معادله (۱-۵.۵) برای توصیف افت فشار برحسب آهنگ جریان، مزایایی هم دارد.

به ترتیب مشابه، می‌توان از توزیع توانی روی کل مقطع انتگرال گرفت تا نتیجه شود (نگاه کنید به منبع ۴ در بخش ۳.۵)

$$\frac{\langle \bar{v}_z \rangle}{v_*} = \frac{2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \text{Re} + \frac{5}{2} \right) \left( \frac{Rv_*}{v} \right)^\alpha \quad (2-5.5)$$

که در آن  $\alpha = 3 / (2 \ln \text{Re})$ . این رابطه در گستره  $10^2 < \text{Re} < 3,23 \times 10^6$  سودمند است.

### مثال ۲-۵.۵

کاربرد فرمول طول اختلاط پرناتل در مورد جریان متلاطم در لولهٔ مدور

نشان دهید که چگونه می‌توان از معادله‌های (۴-۴.۵) و (۵-۴.۵) برای توصیف جریان متلاطم در لولهٔ مدور استفاده کرد.

حل

با استفاده از معادله (۱۲-۲.۵) برای جریان با تحریک پایا در لولهٔ مدور، نتیجه می‌شود:

$$0 = \frac{P_0 - P_L}{L} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \bar{\tau}_{rz}) \quad (3-5.5)$$

که در آن  $\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{rz}^{(v)} + \bar{\tau}_{rz}^{(t)}$ . در بخش عمدهٔ لوله، سهم ویسکوز نسبتاً کم است؛ در این جا به کلی آن را نادیده می‌گیریم. با انتگرال‌گیری از معادله (۳-۵.۵) نتیجه می‌شود:

$$\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = \frac{(P_0 - P_L)r}{2L} = \tau_0 \left( 1 - \frac{y}{R} \right) \quad (4-5.5)$$

که در آن  $\tau_0$  تنش برشی جداری و  $y = R - r$  فاصله از جدار لوله است.

طبق نظریهٔ طول اختلاط در معادله (۴-۴.۵)، با استفاده از رابطهٔ تجربی معادله (۵-۴.۵)، برای  $d\bar{v}_z/dr$  منفی، داریم:

$$\bar{\tau}_{rz}^{(t)} = -\rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right| \frac{d\bar{v}_z}{dr} = +\rho (\kappa_1 y)^2 \left( \frac{d\bar{v}_z}{dy} \right)^2 \quad (5-5.5)$$

با قرار دادن این عبارت در معادله (۴-۵.۵) معادلهٔ دیفرانسیلی برای سرعت هموارشدهٔ زمانی حاصل می‌شود. اگر از پرناتل پیروی، و زیرلایهٔ لخت را تا جدار برون‌یابی کنیم، آنگاه در معادله (۵-۵.۵) می‌توانیم  $\bar{\tau}_{rz}^{(t)}$  را با  $\tau_0$  جایگزین کنیم. پس از انجام این کار، می‌توانیم از معادله (۵-۵.۵) انتگرال بگیریم تا نتیجه شود:

$$\bar{v}_z = \frac{v_*}{\kappa_1} \ln y + \text{مقدار ثابت} \quad (6-5.5)$$

بنابراین توزیعی لگاریتمی به دست می‌آید و می‌توان از نتایج مثال ۱-۵.۵ استفاده کرد؛ یعنی می‌توان از معادله (۶-۵.۵) به عنوان تقریبی بسیار غیردقیق برای کل مقطع لوله استفاده کرد.

### مثال ۳-۵.۵

اندازهٔ نسبی ویسکوزیته و ویسکوزیتهٔ گردابی

مطلوب است تعیین نسبت  $\mu^{(t)}/\mu$  در  $y = R/2$  برای آب جاری با آهنگ پایا در لولهٔ مدور طویل با جدار صاف، تحت شرایط زیر:

$$R = \text{شعاع لوله} = 3 \text{ in.} = 7,62 \text{ cm}$$

$$\tau_0 = \text{تنش برشی جداری} = 2,36 \times 10^{-5} \text{ lb}_f/\text{in.}^2 = 0,163 \text{ pa}$$

$$\rho = \text{چگالی} = 62,4 \text{ lb}_m/\text{ft}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu = \text{ویسکوزیتهٔ سینماتیکی} = 1,1 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s} = 1,02 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

حل

معادله شار اندازه حرکت هموارشده زمانی چنین است:

$$\bar{\tau}_{rz} = -\mu \frac{d\bar{v}_z}{dr} - \mu^{(t)} \frac{d\bar{v}_z}{dr} \quad (7-5.5)$$

این معادله را می‌توان برحسب  $\mu^{(t)}/\mu$  حل کرد و نتیجه را برحسب متغیرهای بدون بُعد به دست آورد:

$$\frac{\mu^{(t)}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{\bar{\tau}_{rz}}{d\bar{v}_z/dy} - 1 = \frac{1}{\mu} \frac{\tau_0 [1 - (y/R)]}{d\bar{v}_z/dy} - 1 = \frac{[1 - (y/R)]}{dv^+/dy^+} - 1 \quad (8-5.5)$$

که در آن  $y^+ = yv_*\rho/\mu$  و  $v^+ = \bar{v}_z/v_*$  وقتی  $y = R/2$  مقدار  $y^+$  برابر است با:

$$y^+ = \frac{yv_*\rho}{\mu} = \frac{(R/2)\sqrt{\tau_0/\rho\mu}}{\mu} = 477 \quad (9-5.5)$$

به ازای این مقدار  $y^+$ ، از توزیع لگاریتمی در شرح زیر شکل ۳-۵.۵ نتیجه می‌شود:

$$\frac{dv^+}{dy^+} = \frac{2.5}{477} = 0.00524 \quad (10-5.5)$$

با قرار دادن این مقدار در معادله (۸-۵.۵)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\mu^{(t)}}{\mu} = \frac{1/2}{0.00524} - 1 = 94 \quad (11-5.5)$$

نتیجه حاصل تأکیدی بر این است که در نواحی دور از جدار لوله، انتقال اندازه حرکت مولکولی، در مقایسه با انتقال گردابی، قابل چشم‌پوشی است.

## ۶.۵ جریان متلاطم در جت‌ها

در بخش قبل جریان در مجراهایی از قبیل لوله‌های مدور را شرح دادیم؛ این نوع جریان‌ها نمونه‌هایی از تلاطم جداری‌اند. دسته مهم دیگری از جریان‌ها از نوع تلاطم آزادند و نمونه‌های مهم این نوع جریان عبارت‌اند از جت‌ها و دنباله‌ها. سرعت هموارشده زمانی در این نوع جریان را می‌توان با استفاده از معادله پرانتل برای ویسکوزیته گردابی، یعنی معادله (۳-۴.۵)، یا با استفاده از نظریه طول اختلاط پرانتل با رابطه تجربی ارائه شده در قالب معادله (۶-۴.۵) به خوبی توصیف کرد. روش اول ساده‌تر است و بنابراین در مثال زیر از آن استفاده می‌کنیم.

### مثال ۱-۶.۵

توزیع سرعت هموارشده زمانی در جت با جدار مدور <sup>۴.۳.۲.۱</sup>

جتی از سیال از سوراخی مدور بیرون می‌باشد و مطابق شکل ۱-۶.۵ به مخزنی نیمه‌نامتهایی از همان سیال می‌ریزد. در همین شکل به صورت تقریبی نشان داده‌ایم که مؤلفه  $z$  سرعت چه نوعی باید داشته باشد. انتظار می‌رود که به ازای

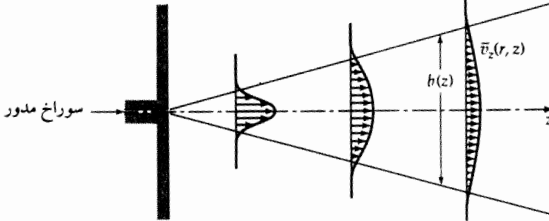
1. H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 7th edition (1979), pp. 747-750.

2. A. A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, Cambridge University Press, 2nd edition (1976), Chapter 6.

3. J. O. Hinze, *Turbulence*, McGraw-Hill, New York, 2nd edition (1975), Chapter 6.

4. S. Goldstein, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Oxford University Press (1938), and Dover reprint (1965), pp. 592-597.

مقادیر مختلف  $z$ ، شکل توزیع‌ها همانند باشد و فقط در عامل مقیاس برای فاصله و سرعت تفاوت داشته باشند. هم‌چنین می‌بنداریم که جت، هم‌چنان که به سمت بیرون حرکت می‌کند، جریان شعاعی خالصی به طرف داخل ایجاد می‌کند، به طوری که بخشی از سیال اطراف خود را به همراه خواهد کشاند. می‌خواهیم توزیع سرعت هموارشدهٔ زمانی در جت و هم‌چنین مقدار سیال عبوری از هر صفحه با  $z$  ثابت را تعیین کنیم. قبل از اقدام به حل، بد نیست اطلاعاتی را که در جدول ۱-۱.۵ در مورد جت‌ها ارائه شد، مرور کنیم.



شکل ۱-۶.۵ جت مدوری که از جدار صفحه‌ای بیرون می‌باشد.

حل

برای استفاده از معادلهٔ (۳-۴.۵) ضروری است که از نحوهٔ تغییر  $\bar{v}_{z,\max} - \bar{v}_{z,\min}$  با  $z$ ، در جت‌های مدور، آگاه باشیم. می‌دانیم که آهنگ کل جریان مؤلفهٔ  $z$  اندازه حرکت  $J$ ، به‌ازای همهٔ مقادیر  $z$  ثابت است. ابتدا فرض می‌کنیم که شار اندازه حرکت همرفتی بسیار بزرگ‌تر از شار اندازه حرکت ویسکوز است. به‌این ترتیب می‌توانیم فرض کنیم که پهنای جت  $b$  به  $J$ ، به چگالی  $\rho$ ، و به ویسکوزیتهٔ سینماتیکی  $\nu$  سیال، و به فاصلهٔ  $z$  از جدار بستگی دارد. تنها ترکیب این متغیرها که بُعد طول دارد عبارت است از:  $b \propto Jz/\rho\nu^2$ ، در نتیجه پهنای جت با  $z$  متناسب است. سپس فرض می‌کنیم که توزیع‌های سرعت «مشابه» اند، یعنی:

$$\frac{\bar{v}_z}{\bar{v}_{z,\max}} = f(\xi) \quad \text{که در آن } \xi = \frac{r}{b(z)} \quad (۱-۶.۵)$$

که قابل قبول به نظر می‌رسد؛ در این جا  $\bar{v}_{z,\max}$  سرعت در طول خط مرکزی است. وقتی این سرعت را در عبارت مربوط به آهنگ جریان اندازه حرکت در جت قرار دهیم (و از سهم مربوط به  $\bar{T}_{xx}$  چشم‌پوشی کنیم):

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho \bar{v}_z^2 r dr d\theta \quad (۲-۶.۵)$$

درمی‌یابیم که:

$$J = 2\pi \rho b^2 \bar{v}_{z,\max}^2 \int_0^\infty f^2 \xi d\xi = \text{مقدار ثابت} \times \rho b^2 \bar{v}_{z,\max}^2 \quad (۳-۶.۵)$$

چون  $J$  به  $z$  وابسته نیست و  $b$  با  $z$  متناسب است، آنگاه  $\bar{v}_{z,\max}$  باید با  $z$  تناسب معکوس داشته باشد. در معادلهٔ (۳-۴.۵) در لبهٔ خارجی جت ایجاد می‌شود و صفر است. بنابراین، چون  $b \propto z^{-1}$  و  $\bar{v}_{z,\max} \propto z^{-1}$  از معادلهٔ (۳-۴.۵) نتیجه می‌شود که  $\mu^{(t)}$  مقداری ثابت است. بنابراین می‌توانیم از معادله‌های حرکت برای جریان آرام استفاده کنیم و ویسکوزیتهٔ  $\mu$  را با ویسکوزیتهٔ گردابی  $\mu^{(t)}$ ، یا با  $\nu^{(t)}$  جایگزین کنیم. در جت، حرکت اصلی در جهت  $z$  است؛ یعنی  $|\bar{v}_z| \ll |\bar{v}_r|$ . بنابراین می‌توانیم از تقریب لایهٔ مرزی برای معادله‌های تغییر هموارشدهٔ زمانی استفاده کنیم (بخش ۴.۴ را ببینید) و بنویسیم:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v}_r) + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (۴-۶.۵) \quad \text{پیوستگی:}$$

$$\bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = \nu^{(t)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right) \quad (۵-۶.۵) \quad \text{حرکت:}$$

این معادله‌ها را باید با شرایط مرزی زیر حل کرد:

$$(۶-۶.۵) \quad \bar{v}_r = 0 \text{ در } r = 0, \text{ داریم}$$

$$(۷-۶.۵) \quad \partial \bar{v}_z / \partial r = 0 \text{ در } r = 0, \text{ داریم}$$

$$(۸-۶.۵) \quad \bar{v}_z \rightarrow 0 \text{ وقتی } z \rightarrow \infty, \text{ داریم}$$

آخرین شرط مرزی خودبه‌خود برآورده می‌شود، زیرا قبلاً دریافتیم که  $\bar{v}_z, \max$  با  $z$  تناسب معکوس دارد. اکنون در جستجوی جوابی برای معادله (۵-۶.۵) هستیم که صورتی همانند معادله (۱-۶.۵) با  $b = z$  داشته‌باشد.

برای اجتناب از کارکردن با دو متغیر وابسته، تابع جریان را به صورت توصیف شده در بخش ۲.۴ معرفی می‌کنیم. برای جریان با تقارن محوری، تابع جریان چنین تعریف می‌شود:

$$(۱۰-۶.۵) \quad \bar{v}_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \text{و} \quad \bar{v}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

این تعریف برآورده شدن معادله پیوستگی، یعنی معادله (۴-۶.۵) را تضمین می‌کند. چون می‌دانیم که  $\bar{v}_z$  برابر است با  $z^{-1}$  ضرب در تابعی از  $\xi$ ، از معادله (۹-۶.۵) نتیجه می‌گیریم که  $\psi$  باید با  $z$  متناسب باشد. به علاوه  $\psi$  باید بُعد (سرعت)  $\times$  (طول) داشته‌باشد؛ در نتیجه تابع جریان باید به صورت زیر باشد:

$$(۱۱-۶.۵) \quad \psi(r, z) = \nu^{(t)} z F(\xi)$$

که در آن  $F$  تابع بدون بُعد  $\xi = r/z$  است. بنابراین از معادله‌های (۹-۶.۵) و (۱۰-۶.۵) نتیجه می‌شود:

$$(۱۳-۶.۵) \quad \bar{v}_z = -\frac{\nu^{(t)}}{z} \frac{F'}{\xi} \quad \text{و} \quad \bar{v}_r = \frac{\nu^{(t)}}{z} \left( \frac{F}{\xi} - F' \right)$$

اکنون می‌توان دو شرط مرزی نخست را به صورت زیر نوشت:

$$(۱۴-۶.۵) \quad F/\xi - F' = 0 \text{ در } \xi = 0, \text{ داریم}$$

$$(۱۵-۶.۵) \quad F''/\xi - F'/\xi^2 = 0 \text{ در } \xi = 0, \text{ داریم}$$

اگر  $F$  را به صورت سری تیلر حول  $\xi = 0$  بسط دهیم:

$$(۱۶-۶.۵) \quad F(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 + e\xi^4 + \dots$$

آن‌گاه از شرط مرزی اول نتیجه می‌شود که  $a = 0$ ، و شرط مرزی دوم نتیجه می‌دهد  $b = d = 0$ . در همین جا از این نتیجه استفاده می‌کنیم.

با جایگزین کردن عبارت‌های سرعت از معادله‌های (۱۲-۶.۵) و (۱۳-۶.۵) در معادله حرکت، یعنی معادله (۵-۶.۵)، یک معادله دیفرانسیل مرتبه سوم برای  $F$  حاصل می‌شود:

$$(۱۷-۶.۵) \quad \frac{d}{d\xi} \left( \frac{FF'}{\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left( F'' - \frac{F'}{\xi} \right)$$

می‌توان از این معادله انتگرال گرفت:

$$(۱۸-۶.۵) \quad \frac{FF'}{\xi} = F'' - \frac{F'}{\xi} + C_1$$

که در آن ثابت انتگرال‌گیری باید صفر باشد؛ با استفاده از سری تیلر در معادله (۱۶-۶.۵)، همراه با این نکته که  $a, b, d$  همگی صفرند، صفر بودن ثابت انتگرال‌گیری مشاهده می‌شود.



معادله (۱۸-۶.۵) را نخستین بار اشلیشتینگ حل کرد. <sup>۵</sup> ابتدا باید با قرار دادن  $\xi = \ln \beta$  متغیر مستقل را تغییر داد. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم حاصل فقط حاوی متغیر وابسته و دو مشتق اول آن است. معادله‌هایی از این نوع را می‌توان با استفاده از روش‌های ابتدایی حل کرد. از نخستین انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود:

$$\xi F' = 2F + \frac{1}{4}F^2 + C_2 \quad (19-6.5)$$

یک بار دیگر، با اطلاع از رفتار  $F$  در نزدیکی  $\xi = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که دومین ثابت انتگرال‌گیری صفر است. بنابراین معادله (۱۹-۶.۵) یک معادله مرتبه اول تفکیک‌پذیر است و می‌توان با حل کردن آن نتیجه گرفت که:

$$F(\xi) = -\frac{(C_2\xi)^2}{1 + \frac{1}{4}(C_2 - 3\xi)^2} \quad (20-6.5)$$

که در آن  $C_2$  سومین ثابت انتگرال‌گیری است. با قرار دادن رابطه فوق در معادله‌های (۱۲-۶.۵) و (۱۳-۶.۵) نتیجه می‌شود:

$$\bar{v}_z = \frac{\nu^{(t)}}{z} \frac{2C_2^2}{[1 + \frac{1}{4}(C_2 r/z)^2]^2} \quad (21-6.5)$$

$$\bar{v}_r = \frac{C_2 \nu^{(t)}}{z} \frac{(C_2 r/z) - \frac{1}{4}(C_2 r/z)^2}{[1 + \frac{1}{4}(C_2 r/z)^2]^2} \quad (22-6.5)$$

وقتی عبارت بالا برای  $\bar{v}_z$  در معادله (۲-۶.۵) برای  $J$  جایگزین شود، عبارتی برحسب  $J$  برای سومین ثابت انتگرال‌گیری به دست می‌آید:

$$C_2 = \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \sqrt{\frac{J}{\rho}} \frac{1}{\nu^{(t)}} \quad (23-6.5)$$

سه معادله اخیر توزیع‌های سرعت هموارشده زمانی را برحسب  $J$ ،  $\rho$ ، و  $\nu^{(t)}$  نشان می‌دهند. یکی از کمیت‌های قابل اندازه‌گیری در جریان جت، مکان شعاعی متناظر با سرعت محوری برابر با نصف سرعت خط مرکزی است؛ این مقدار را نیم‌عرض  $b_{1/2}$  می‌نامیم. بنابراین از معادله (۲۱-۶.۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\bar{v}_z(b_{1/2}, z)}{\bar{v}_{z, \max}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{[1 + \frac{1}{4}(C_2(C_2 b_{1/2}/z))^2]^2} \quad (24-6.5)$$

آزمایش نشان می‌دهد <sup>۶</sup>  $b_{1/2} = 0.0848z$ . وقتی این مقدار را در معادله (۲۴-۶.۵) قرار دهیم، نتیجه می‌شود  $C_2 = 15/1$ . با استفاده از این مقدار، و معادله (۲۳-۶.۵)، می‌توانیم ویسکوزیته تلاطمی  $\bar{\nu}^{(t)}$  را به صورت تابعی از  $J$ ،  $\rho$  و به دست آوریم.

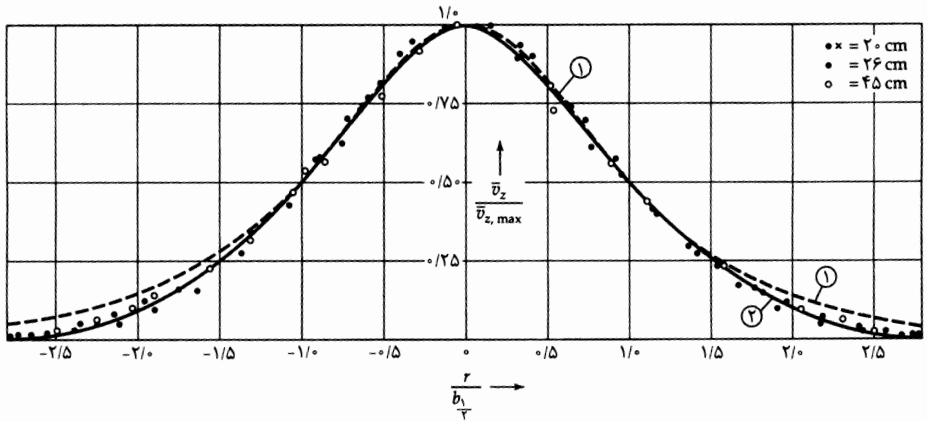
در شکل ۲-۶.۵، توزیع سرعت محوری فوق با داده‌های تجربی مقایسه شده است. منحنی محاسبه‌ای حاصل از نظریه طول اختلاط پراتل نیز نشان داده شده است.<sup>۷</sup>

روش برازش خوبی با داده‌های تجربی دارند. در همسایگی نقطه ماکزیمم، روش ویسکوزیته گردابی تا حدودی بهتر به نظر می‌رسد، اما در بخش خارجی جت، نتایج حاصل از روش طول اختلاط بهترند.

5. H. Schlichting, *Zeits. f. angew. Math. u. Mech.*, **13**, 260-263 (1933).

6. H. Reichardt, *VDI Forschungsheft*, **414** (1942).

7. W. Tollmein, *Zeits, f. angew. Math. u. Mech.*, **6**, 468-478 (1926).

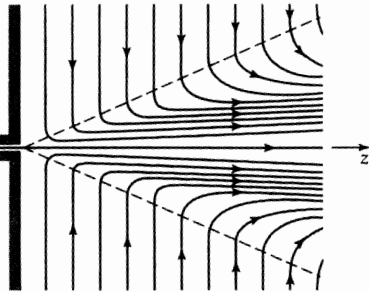


شکل ۲-۶.۵ توزیع سرعت در جت مدور در جریان متلاطم. محاسبه ویسکوزیته گردابی (منحنی ۱) و محاسبه طول اختلاط پراپتیل (منحنی ۲) با اندازه‌گیری‌های رایشارت مقایسه شده‌اند.

وقتی توزیع سرعت معلوم شد، می‌توان خطوط جریان را به دست آورد. باتوجه به خطوط جریان در شکل ۳-۶.۵، می‌توان دید که چگونه جت، سیال را از اطراف، و از داخل توده سیال، به درون می‌کشد. بنابراین با افزایش فاصله از منبع، جرم سیالی که توسط جت حمل می‌شود، افزایش می‌یابد. این آهنگ جریان جرمی برابر است با:

$$w = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \rho \bar{v}_z r dr d\theta = \Lambda \pi \rho \nu^{(t)} z \quad (۲۵-۶.۵)$$

این نتیجه با یکی از مدخل‌های جدول ۱-۱.۵ متناظر است.



شکل ۳-۶.۵ الگوی خطوط جریان در جت مدور در جریان متلاطم.

جت دوبعدی خروجی از شکافی نازک را می‌توان به روش مشابه تحلیل کرد. اما در آن مسئله، ویسکوزیته تلاطمی تابعی از مکان است.

### پرسش‌های تشریحی

۱. روش‌های حل مسئله‌های جریان آرام و متلاطم را مقایسه کنید و تفاوت‌های آن‌ها را شرح دهید.
۲. چرا نباید از معادله (۴-۱.۵) برای تعیین گرادیان سرعت در مرز جامد استفاده کرد؟
۳. از توزیع لگاریتمی معادله (۴-۳.۵) چه نتیجه‌ای برای ویسکوزیته سیال در جدار حاصل می‌شود؟ چرا در مثال ۱-۵.۵، وقتی از توزیع لگاریتمی روی مقطع لوله انتگرال‌گیری می‌شود، مشکلی پیش نمی‌آید؟

۴. تفسیر فیزیکی هر جمله از معادله (۲.۵-۱۲) را بیان کنید.
۵. چرا در معادله (۴.۵-۴) از علامت قدرمطلق استفاده شده است؟ چگونه این علامت در معادله (۵.۵-۵) حذف می‌شود؟
۶. در مثال ۱-۶.۵، از کجا می‌دانیم که جریان اندازه حرکت در هر صفحه با  $z$  ثابت مقداری ثابت است؟ آیا می‌توانید یک مسئله تعدیل یافته جت را در نظر مجسم کنید که در آن چنین وضعیتی برقرار نباشد؟
۷. بعضی از جلد‌های *Ann. Revs. Fluid Mech.* را مرور کنید و مباحثی را که در مورد جریان متلاطم در آن‌ها می‌یابید، خلاصه کنید.
۸. در معادله (۱-۳.۵)، چرا به جای خود سرعت، در پی یافتن وابستگی تابعی گرادیان آن هستیم؟
۹. چرا تلاطم مبحثی دشوار است؟

مسئله‌ها

- الف.۱. افت فشار لازم برای گذار آرام-متلاطم. سیالی با ویسکوزیته  $18.3 \text{ cp}$  و چگالی  $1.32 \text{ g/cm}^3$  در یک لوله افقی طویل به شعاع  $1.5 \text{ in}$  ( $2.67 \text{ cm}$ ) جریان دارد. به‌ازای کدام گرادیان فشار این جریان متلاطم خواهد شد؟  
جواب:  $(1.1 \times 10^5 \text{ Pa/km})$  یا  $26 \text{ psi/mi}$ .
- الف.۲. توزیع سرعت در جریان متلاطم داخل لوله. آب با دمای  $68^\circ\text{F}$  در لوله‌ای طویل، مستقیم و افقی با جدار صاف و شعاع داخلی  $6.0 \text{ in}$  جریان دارد. گرادیان فشار در طول لوله  $170 \text{ psi/mi}$  است.
- (الف) مطلوب است تعیین تنش برشی جداری  $\tau_0$  برحسب  $\text{Pa}$  و  $\text{Psi (lb}_f/\text{in}^2)$ .
- (ب) جریان را متلاطم بگیرید و تعیین کنید که در چه فاصله شعاعی از جدار لوله داریم:  
$$\bar{v}_z / \bar{v}_{z,\max} = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 0.85, 1.0$$
- (ج) توزیع سرعت کامل  $\bar{v}_z / \bar{v}_{z,\max}$  را برحسب  $y = R - r$  ترسیم کنید.
- (د) آیا فرض متلاطم بودن جریان قابل توجیه است؟
- (ه) آهنگ جریان جرمی چه قدر است؟
- ب.۱. سرعت متوسط جریان متلاطم داخل لوله.

(الف) برای جریان متلاطم در داخل لوله‌های مدور با جدار صاف، گاهی تابع

$$\frac{\bar{v}_z}{\bar{v}_{z,\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \quad (\text{ب.۱-۱})$$

برای برازش منحنی مناسب است: در نزدیکی  $\text{Re} = 4 \times 10^3$ ،  $n = 6$ ؛ در نزدیکی  $\text{Re} = 1.1 \times 10^5$ ،  $n = 7$ ؛ و در نزدیکی  $\text{Re} = 3.7 \times 10^6$ ،  $n = 10$ . نشان دهید که نسبت سرعت متوسط به ماکزیمم برابر است با:

$$\frac{\langle \bar{v}_z \rangle}{\bar{v}_{z,\max}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \quad (\text{ب.۱-۲})$$

و درستی نتیجه ارائه شده به صورت معادله (۵-۱.۵) را نشان دهید.

(ب) توزیع لگاریتمی معادله (۴-۳.۵) را به صورت تابعی از  $r$ ، وقتی در مورد لوله‌ای مدور به شعاع  $R$  به کار برده می‌شود، ترسیم کنید. سپس نشان دهید که چگونه می‌توان از این تابع روی مقطع لوله انتگرال گرفت و معادله (۱-۵.۵) را به دست آورد. همه فرض‌های اختیاریافته برای گرفتن این نتیجه را بیان کنید.

۲.ب.۵ آهنگ جریان جرمی در جت مدور متلاطم.

(الف) نشان دهید که توزیع سرعت در معادله‌های (۲۱-۶.۵) و (۲۲-۶.۵) به راستی در معادله‌های دیفرانسیل و شرایط مرزی صدق می‌کنند.

(ب) نشان دهید که معادله (۲۵-۶.۵) از معادله (۲۱-۶.۵) نتیجه می‌شود.

۳.ب.۵ ویسکوزیته گردابی در زیرلایه ویسکوز. نشان دهید که معادله (۲-۴.۵) برای ویسکوزیته گردابی مستقیماً از بسط سری تیلر در معادله (۱۳-۳.۵) به دست می‌آید.

۱.ج.۵ جت متلاطم دو بُعدی. جتی از سیال از شکافی عمود بر صفحه  $xy$  به طرف جلو می‌باشد و در جهت  $z$  در محیطی نیمه نامتناهی از همان سیال می‌ریزد. پهنای شکاف در جهت  $y$  برابر  $W$  است. با پیروی از الگوی مثال ۱-۶.۵ توزیع سرعت هموار شده زمانی در این سیستم را پیدا کنید.

(الف) فرض کنید توزیع‌ها مشابه‌اند:

$$\bar{v}_z / \bar{v}_{\max} = f(\xi) \quad \text{با} \quad \xi = x/z \quad (۱-۱.ج۵)$$

نشان دهید که بیان پایستگی اندازه حرکت به این نکته منتهی می‌شود که سرعت خط مرکزی باید با  $z^{-1/2}$  متناسب باشد.

(ب) تابع جریان  $\psi$  را طوری تعریف کنید که  $\bar{v}_z = -\partial\psi/\partial x$  و  $\bar{v}_x = +\partial\psi/\partial z$ . نشان دهید که نتیجه قسمت (الف) همراه با ملاحظات بعدی به صورت زیر برای  $\psi$  منتهی می‌شود:

$$\psi = z^{1/2} \sqrt{J/\rho W} F(\xi) \quad (۲-۱.ج۵)$$

در این جا  $F(\xi)$  تابع جریان بدون بُعد است که با استفاده از معادله حرکت سیال تعیین می‌شود و  $J$  جریان اندازه حرکت کلی است که به روشی مشابه معادله (۶-۶.۵) تعریف شده است.

(ج) نشان دهید که معادله (۳-۴.۵) و ملاحظات بعدی به صورت زیر برای ویسکوزیته سینماتیکی تلاطمی منتهی می‌شوند:

$$\nu^{(t)} = \mu^{(t)}/\rho = \lambda \sqrt{J/\rho W} z^{1/2} \quad (۳-۱.ج۵)$$

در این رابطه  $\lambda$  ثابتی بدون بُعد است که باید با آزمایش تعیین شود.

(د) معادله حرکت را برای جت، با استفاده از رابطه ویسکوزیته سینماتیکی تلاطمی از قسمت (ج) و تابع جریان از قسمت (ب)، بازنویسی کنید. نشان دهید که این معادله به معادله دیفرانسیل زیر منتهی می‌شود:

$$\frac{1}{4} F'^2 + \frac{1}{4} F F'' - \lambda F''' = 0 \quad (۴-۱.ج۵)$$

برای سهولت کار، متغیر جدید

$$\eta = \xi/4\lambda = x/4\lambda z \quad (۵-۱.ج۵)$$

را معرفی، و معادله (۴-۱.ج۵) را بازنویسی کنید.

(ه) سپس نشان دهید که شرایط مرزی برای معادله (۴-۱.ج۵) عبارت‌اند از:  $F''(\infty) = 0$  و  $F''(0) = 0$ ,  $F'(0) = 0$ .

(و) نشان دهید که می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله (۴-۱.ج۵) نتیجه گرفت:

$$2FF' - F'' = \text{مقدار ثابت} \quad (۶-۱.ج۵)$$

و شرایط مرزی ایجاب می‌کنند که این مقدار ثابت برابر صفر باشد.

(ز) نشان دهید که انتگرال‌گیری مجدد به رابطه:

$$F^2 - F' = C^2 \quad (۷-۱.ج۵)$$

منتهی می‌شود که در آن  $C$  ثابت انتگرال‌گیری است.

(ح) نشان دهید که یک‌باردیگر انتگرال‌گیری به رابطه زیر منتهی می‌شود:

$$F = -C \tanh C\eta \quad (۸-۱.ج۵)$$

و سرعت محوری را می‌توان از این رابطه به‌دست آورد و عبارت است از:

$$\bar{v}_z = \frac{\sqrt{J/\rho WC^2}}{4\lambda\sqrt{z}} \operatorname{sech}^2 C\eta \quad (۹-۱.ج۵)$$

(ط) سپس نشان دهید که قرار دادن سرعت محوری در عبارت اندازه‌حرکت کل جت به مقدار  $C = \sqrt{3\lambda}$

برای ثابت انتگرال‌گیری منتهی می‌شود. معادله (۹-۱.ج۵) را، به‌جای  $C$ ، برحسب  $\lambda$  بازنویسی کنید. مقدار  $\lambda = 0.7 \times 10^2$  توافق خوبی با داده‌های تجربی دارد.<sup>۲</sup> اعتقاد بر این است که این توافق کمی بهتر از توافق مربوط به رابطه تجربی طول اختلاط پراختل است.

(ی) نشان دهید که آهنگ جریان جرمی روی هر صفحه (مقدار ثابت)  $z$ ، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$w = 2\sqrt{3\lambda}\sqrt{JW\rho z} \quad (۱۰-۱.ج۵)$$

۲.ج۵ جریان متلاطم محوری در حلقه. حلقه‌ای توسط جدارهای استوانه‌ای در  $r = R$  و  $r = aR$  شده‌است ( $a < 1$ ). عبارت‌هایی برای توزیع سرعت تلاطمی، و آهنگ جریان جرمی به‌دست آورید. توزیع لگاریتمی معادله (۳-۳.۵) را برای جریان در همسایگی هر جدار به‌کار ببرید. فرض کنید مکان نقطهٔ ماکزیم سرعت در همان سطح استوانه‌ای  $r = bR$  واقع است که برای جریان حلقوی آرام به‌دست آمد:

$$b = \sqrt{\frac{1-a^2}{2\ln(1/a)}} \quad (۱-۲.ج۵)$$

اندازه‌گیری توزیع سرعت حاکی از منطقی بودن این فرض برای  $b$ ، دست‌کم به‌ازای اعداد رینولدز بالاست.<sup>۳</sup> هم‌چنین فرض کنید که  $\kappa$  در معادله (۳-۳.۵) برای جدارهای داخلی و خارجی یکسان است.

2. H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 4th edition (1960), p. 607 and Fig. 23.7.

3. J. G. Knudsen and D. L. Katz, *Fluid Dynamics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York (1958); R. R. Rothfus (1948), J. E. Walker (1957), and G. A. Whan (1965). Doctoral theses, Carnegie Institute of Technology (now Carnegie-Mellon University), Pittsburgh, Pa.

(الف) نشان دهید که با کاربرد معادله (۳-۳.۵) مستقیماً توزیع‌های سرعت زیر<sup>۴</sup> در ناحیه  $r \leq bR$  (که با نشانه  $<$  مشخص می‌شود) و  $r \geq bR$  (که با نشانه  $>$  مشخص می‌شود) به دست می‌آیند:

$$\frac{\bar{v}_z^<}{v_*^<} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{(r - aR)v_*^<}{\nu} \right) + \lambda^< \quad \text{که در آن } v_*^< = v_{**} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a}} \quad (۲-۲.ج۵)$$

$$\frac{\bar{v}_z^>}{v_*^>} = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{(R - r)v_*^>}{\nu} \right) + \lambda^> \quad \text{که در آن } v_*^> = v_{**} \sqrt{1 - b^2} \quad (۳-۲.ج۵)$$

$$v_{**} = \sqrt{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)R / 2L\rho}$$

(ب) با شرط پیوسته بودن سرعت در  $r = bR$ ، رابطه‌ای بین ثابت‌های  $\lambda^<$  و  $\lambda^>$  به دست آورید.

(ج) با استفاده از نتایج قسمت (ب) نشان دهید که آهنگ جریان جرمی در حلقه برابر است با:

$$w = \pi R^2 \rho v_{**}$$

$$= \left\{ \left[ \sqrt{1 - b^2} (1 - a^2) \right] \left[ \frac{1}{\kappa} \ln \frac{R(1 - b)\sqrt{1 - b^2}v_{**}}{\nu} + \lambda^> \right] - B \right\} \quad (۴-۲.ج۵)$$

که در آن  $B$  عبارت است از:

$$B = \frac{(b^2 - a^2)^{2/2}}{\kappa\sqrt{a}} \left( \frac{a}{a+b} + \frac{1}{2} \right) + \frac{(1 - b^2)^{2/2}}{\kappa} \left( \frac{1}{1+b} + \frac{1}{2} \right) \quad (۵-۲.ج۵)$$

ج۵.۳ ناپایداری در یک سیستم مکانیکی ساده (شکل ۵.ج۳).

(الف) دیسکی با سرعت زاویه‌ای ثابت  $\Omega$  می‌چرخد. در بالای مرکز دیسک، کره‌ای به جرم  $m$  از طنابی بدون جرم به طول  $L$  آویزان است. به علت چرخش دیسک، بر کره نیروی گریزازمرکز وارد می‌شود و میله با امتداد عمودی زاویه  $\theta$  تشکیل می‌دهد. با نوشتن موازنه نیروهای وارد بر کره، نشان دهید که:

$$\cos \theta = \frac{g}{\Omega^2 L} \quad (۱-۳.ج۵)$$

وقتی  $\Omega$  به سمت صفر میل کند، چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

(ب) نشان دهید که هرگاه  $\Omega$  تا حدودی از مقدار آستانه  $\Omega_{thr}$  پایین‌تر باشد، زاویه  $\theta$  صفر خواهد بود. نشان دهید که بالاتر از مقدار آستانه، دو مقدار برای  $\theta$  مجاز است. با استفاده از نمودار دقیق  $\theta$  برحسب  $\Omega$  این موضوع را توضیح دهید. بالاتر از  $\Omega_{thr}$ ، دو منحنی را پایدار و ناپایدار بنامید.

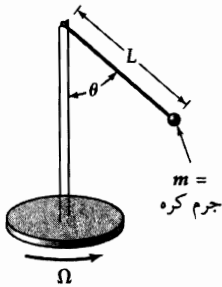
(ج) در قسمت‌های (الف) و (ب) فقط با عملیات حالت‌پایای سیستم سروکار داریم. نشان دهید که معادله حرکت برای کره‌ای به جرم  $m$  چنین است:

$$mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} = m\Omega^2 L \sin \theta \cos \theta - mg \sin \theta \quad (۲-۳.ج۵)$$

4. W. Tiedt, *Berechnung des laminaren u. turbulenten Reibungswiderstandes konzentrischer u. exzentrischer Ringspalten*, Technischer Bericht Nr. 4, Inst. f. Hydraulik u. Hydrologie, Technische Hochschule, Darmstadt (1968);

همین تحلیل با استفاده از نظریه طول اختلاط پراتل، در منبع زیر انجام شده است:

D. M. Meter and R. B. Bird, *AIChE Journal*, 7, 41-45 (1961).



شکل ۳.ج۵ یک سیستم مکانیکی ساده برای نشان دادن مفاهیمی در پایداری.

نشان دهید که برای عملیات حالت پایا، این رابطه به معادله (۵.ج۳-۱) منتهی می‌شود. اکنون می‌خواهیم از این معادله برای تحلیل پایداری با دامنه کوتاه استفاده کنیم. فرض کنید  $\theta = \theta_0 + \theta_1$ ، که در آن  $\theta_0$  جواب حالت پایا (مستقل از زمان) و  $\theta_1$  اختلالی بسیار جزئی (وابسته به زمان) است.

(د) ابتدا شاخه پایینی منحنی قسمت (ب) را در نظر بگیرید که در آن  $\theta_0 = 0$ . سپس فرض کنید  $\sin \theta = \sin \theta_1 \approx \theta_1$  و  $\cos \theta = \cos \theta_1 \approx 1$ ، به طوری که معادله (۵.ج۳-۲) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = \left( \Omega^2 - \frac{g}{L} \right) \theta_1 \quad (۵.ج۳-۳)$$

اکنون نوسان کوتاه دامنه‌ای به صورت  $\theta_1 = AR\{e^{-i\omega t}\}$  را امتحان می‌کنیم و درمی‌یابیم که:

$$\omega_{\pm} = \pm i \sqrt{\Omega^2 - \frac{g}{L}} \quad (۵.ج۳-۴)$$

اکنون دو حالت را در نظر می‌گیریم: (۱) اگر  $\Omega^2 < g/L$  باشد، هم  $\omega_+$  و هم  $\omega_-$  حقیقی‌اند و بنابراین  $\theta_1$  نوسان می‌کند؛ این موضوع نشان می‌دهد که به ازای  $\Omega^2 < g/L$  سیستم پایدار است. (۲) هرگاه  $\Omega^2 > g/L$ ، ریشه  $\omega_+$  مثبت موهومی است و  $e^{-i\omega t}$  به طور نامحدود با زمان افزایش می‌یابد؛ این وضعیت نشان می‌دهد که به ازای  $\Omega^2 > g/L$ ، سیستم نسبت به اختلالات بی‌نهایت کوچک ناپایدار است.

(ه) سپس شاخه بالایی منحنی قسمت (ب) را در نظر بگیرید. تحلیلی مشابه با تحلیل قسمت (د) انجام دهید. معادله  $\theta_1$  را بنویسید و جمله‌های با توان دوم  $\theta_1$  را حذف کنید (یعنی معادله را خطی کنید). یک بار دیگر جوابی به صورت  $\theta_1 = AR\{e^{-i\omega t}\}$  را امتحان کنید. نشان دهید که برای شاخه بالایی منحنی، سیستم نسبت به اختلالات بی‌نهایت کوچک، پایدار است.

(و) تحلیل بالا را، که با سیستم دارای یک درجه آزادی فاصله بسیار دارد، به مسئله گذار آرام-متلاطم برای جریان سیال نیوتونی بین دو استوانه که در جهت مخالف هم می‌چرخند، مربوط کنید. بحث لانداو و لیف‌شیتس<sup>۵</sup> را در این مورد مطالعه کنید.

۱.۵۵ به دست آوردن معادله تغییر برای تنش‌های رینولدز. در پایان بخش ۲.۵ خاطر نشان کردیم که معادله تغییری برای تنش‌های رینولدز وجود دارد. این معادله را می‌توان از طریق (الف) ضرب کردن مؤلفه  $\dot{\gamma}$  در صورت برداری معادله (۵.۲.۵) در  $v'_j$  و هموار کردن زمانی، (ب) ضرب کردن مؤلفه  $J$  در صورت برداری معادله (۵.۲.۵) در  $v'_i$  و هموار کردن زمانی، و (ج) جمع کردن نتایج (الف) و (ب) به دست آورد.

5. L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford, 2nd edition (1987), §26-27.

نشان دهید که سرانجام نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'} = & -\rho \{ \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'} \cdot \nabla \overline{\mathbf{v}} \} - \rho \{ \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'} \cdot \nabla \overline{\mathbf{v}} \}^\dagger - \rho \{ \nabla \cdot \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'\mathbf{v}'} \} \\ & - \{ \overline{\mathbf{v}'\nabla p'} \} - \{ \overline{\mathbf{v}'\nabla p'} \}^\dagger + \mu \{ \overline{\mathbf{v}'\nabla^2 \mathbf{v}'} + \{ \overline{\mathbf{v}'\nabla^2 \mathbf{v}'} \}^\dagger \} \end{aligned} \quad (1-1.5)$$

برای به دست آوردن این نتیجه به معادله‌های (۱۰-۲.۵) و (۱۱-۲.۵) نیاز داریم.

۲.۵۵ انرژی جنبشی تلاطم. با ردگیری معادله (۱-۱.۵)، رابطه زیر را به دست آورید:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \overline{\rho \mathbf{v}'^2} \right) = & -\rho \overline{(\mathbf{v}'\mathbf{v}') : \nabla \overline{\mathbf{v}}} - \left( \nabla \cdot \frac{1}{\rho} \overline{\rho \mathbf{v}'^2 \mathbf{v}'} \right) \\ & - \left( \nabla \cdot \overline{p' \mathbf{v}'} \right) + \mu \overline{(\mathbf{v}' \cdot \nabla^2 \mathbf{v}')} \end{aligned} \quad (1-2.5)$$

این معادله را تفسیر کنید.<sup>۶</sup>

6. H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, MIT Press, Cambridge, Mass. (1972), §3.2



## فصل ۶

### انتقال میان‌فازی در سیستم‌های هم‌دما

۱.۶ تعریف ضرایب اصطکاک

۲.۶ ضرایب اصطکاک برای جریان در لوله‌ها

۳.۶ ضرایب اصطکاک برای جریان در اطراف کره‌ها

۴.۶ ضرایب اصطکاک برای ستون‌های پرشده

در فصل‌های ۲ تا ۴ نشان دادیم که چگونه می‌توان مسئله‌های جریان آرام را فرمول‌بندی و حل کرد. در فصل ۵ چند روش برای حل مسئله‌های جریان متلاطم از طریق استدلال‌های ابعادی یا روابط نیمه‌تجربی بین شار اندازه‌حرکت و گرادین سرعت هموارشده زمانی ارائه دادیم. در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان مسئله‌های جریان را با تلفیقی از تحلیل ابعادی و داده‌های تجربی حل کرد. روشی که در این جا ارائه می‌شود در مهندسی شیمی، مکانیک، هوانوردی، و عمران کاربرد گسترده‌ای دارد و برای حل بسیاری از مسئله‌های عملی سودمند است. این موضوع ارزش آن را دارد که به خوبی فراگرفته شود.

بسیاری از مسئله‌های جریان در حوزه مهندسی به یکی از دو دسته بزرگ تعلق دارند: جریان در کانال‌ها و جریان در اطراف اجسام غوطه‌ور. نمونه‌های جریان در کانال عبارت‌اند از تلمبه‌زنی نفت خام در لوله‌ها، جریان آب در کانال‌های روباز، و روزن‌رانی پلاستیک از درون قالب یا حدیده. نمونه‌های جریان در اطراف اجسام غوطه‌ور عبارت‌اند از حرکت هوا در اطراف بال هواپیما، حرکت سیال در اطراف ذرات در حال رسوب، و جریان در اطراف دسته‌لوله‌ها در مبادله‌کن‌های گرما.

در جریان در کانال، هدف اصلی معمولاً به‌دست آوردن رابطه‌ای بین آهنگ جریان حجمی و افت فشار و یا تغییر ارتفاع است. در مسئله‌های شامل جریان در اطراف اجسام غوطه‌ور، مطلوب معمولاً رابطه بین سرعت تقرب سیال و نیروی پسی وارد بر جسم است. در فصل‌های قبل دیدیم که، هرگاه توزیع سرعت و فشار در سیستم معلوم باشد، آن‌گاه می‌توان روابط مطلوب در این دو مورد را به‌دست آورد. به‌دست آوردن معادله هیگن-پوتازوی در بخش ۳.۲ و به‌دست آوردن معادله استوکس در بخش‌های ۶.۲ و ۲.۴ دو مقوله‌ای را نشان می‌دهند که موضوع بحث این فصل‌اند. در بسیاری از سیستم‌ها نمی‌توان توزیع سرعت و فشار را به‌آسانی محاسبه کرد، به‌ویژه اگر جریان متلاطم، یا وضعیت هندسی آن پیچیده باشد. یکی از این نوع سیستم‌ها جریان در ستون پرشده است؛ نمونه دیگر جریان در

لوله‌ای به شکل مارپیچ است. برای چنین سیستم‌هایی می‌توان داده‌های تجربی را به دقت انتخاب کرد و سپس «روابط همبستگی» متغیرهای بدون بُعدی را که می‌توان برای تخمین رفتار جریان در سیستم‌های مشابه از لحاظ هندسی به کار برد، پی‌ریزی کرد. این روش بر بحث ارائه شده در بخش ۷.۳ مبتنی است.

کار خود را در بخش ۱.۶ با تعریف «ضریب اصطکاک» آغاز می‌کنیم و سپس در بخش‌های ۲.۶ و ۳.۶ نحوه ترسیم نمودارهای ضریب اصطکاک برای جریان در لوله‌های مدور و جریان در اطراف کره‌ها را نشان می‌دهیم. قبلاً این دو سیستم را بررسی کرده‌ایم و در حقیقت چندین نتیجه حاصل از فصل‌های قبل در ترسیم این نمودارها به کار گرفته شده است. سرانجام در بخش ۴.۶ جریان در ستون پر شده را بررسی می‌کنیم، تا نحوه برخورد با سیستمی پیچیده از لحاظ هندسی را نشان دهیم. مسئله پیچیده‌تر بسترهای سیال در این فصل گنجانده نشده است.<sup>۱</sup>

## ۱.۶ تعریف ضرایب اصطکاک

جریان با تحریک پایای سیالی با چگالی ثابت را در یکی از دو سیستم زیر در نظر می‌گیریم: (الف) سیال در مجرای مستقیم با مقطع یکنواخت جریان دارد؛ (ب) سیال در اطراف جسمی غوطه‌ور با یک محور تقارن (یا دو صفحه تقارن) به موازات جهت تقرب سیال، جریان دارد. نیرویی مانند  $F_{f-s}$  توسط سیال بر سطوح جامد وارد می‌شود. به راحتی می‌توان این نیرو را به دو بخش تفکیک کرد:  $F_s$ ، نیرویی که سیال ساکن وارد می‌کند و  $F_k$ ، نیروی اضافی مرتبط با حرکت سیال (برای آشنایی با  $F_s$  و  $F_k$  برای جریان در اطراف کره‌ها، بخش ۶.۲ را ببینید). در سیستم‌های نوع (الف)،  $F_k$  با سرعت متوسط ( $v$ ) در مجرا هم‌جهت است و در سیستم‌های نوع (ب)،  $F_k$  با سرعت تقرب  $v_\infty$  هم‌جهت است.

در مورد هر دو نوع سیستم، می‌گوییم که اندازه نیروی  $F_k$  با سطح مشخصه  $A$  و انرژی جنبشی مشخصه  $K$  بر واحد حجم متناسب است؛ بنابراین:

$$F_k = AKf \quad (۱-۱.۶)$$

که در آن ثابت تناسب  $f$  را ضریب اصطکاک می‌نامند. توجه کنید که معادله (۱-۱.۶) قانون دینامیک سیالات نیست، بلکه صرفاً تعریفی برای  $f$  است. این تعریف سودمند است، زیرا کمیت بدون بُعد  $f$  را به صورت تابعی نسبتاً ساده از عدد رینولدز و شکل سیستم نشان می‌دهد.

بدیهی است که، برای هر سیستم جریان مفروض، تا زمانی که  $A$  و  $K$  مشخص نشوند،  $f$  معین نیست. حال می‌خواهیم ببینیم که تعریف‌های متداول کدام‌اند:

(الف) برای جریان در مجراها،  $A$  معمولاً سطح خیس شده در نظر گرفته می‌شود و  $K$  را  $\frac{1}{\rho} \rho(v)^2$  در نظر می‌گیرند. مخصوصاً برای لوله‌های مدور با شعاع  $R$  و طول  $L$ ،  $f$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$F_k = (2\pi RL) \left( \frac{1}{\rho} \rho(v)^2 \right) f \quad (۲-۱.۶)$$

1. R. Jackson, *The Dynamics of Fluidized Beds*, Cambridge University Press (2000).

۱. در سیستم‌های فاقد تقارن، سیال بر جامد هم نیرو و هم گشتاور وارد می‌کند. برای آشنایی با این نوع سیستم‌ها، نگاه کنید به

J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Martinus Nijhoff, The Hague (1983), Chapter 5; H. Brenner, in *Adv. Chem. Engr.*, **6**, 287-438 (1966); S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*, Butterworth-Heinemann, Boston (1991), Chapter 5.

به طور کلی، کمیت اندازه‌گیری شده  $F_k$  نیست، بلکه اختلاف فشار  $p_0 - p_L$  و اختلاف ارتفاع  $h_0 - h_L$  اندازه‌گیری می‌شود. موازنه نیروهای وارد بر سیال بین صفر و  $L$  در جهت جریان، در مورد جریان کاملاً شکل‌یافته، نتیجه می‌دهد:

$$F_k = [(p_0 - p_L) + \rho g(h_0 - h_L)]\pi R^2 = (P_0 - P_L)\pi R^2 \quad (۳-۱.۶)$$

از حذف  $F_k$  بین دو معادله آخر:

$$f = \frac{1}{\frac{4}{\pi}} \left( \frac{D}{L} \right) \left( \frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{\pi} \rho v^2} \right) \quad (۴-۱.۶)$$

که در آن  $D = 2R$  قطر لوله است. معادله (۴-۱.۶) نحوه محاسبه  $f$  با استفاده از داده‌های تجربی را نشان می‌دهد. کمیت  $f$  را گاهی ضریب اصطکاک فنینگ می‌نامند.<sup>۲</sup>

(ب) برای جریان در اطراف اجسام غوطه‌ور، سطح مشخصه  $A$  معمولاً مساحت حاصل از تصویر کردن جسم جامد روی صفحه‌ای عمود بر امتداد سرعت سیال در حال تقرب است؛ کمیت  $K$  را برابر  $\frac{1}{\pi} \rho v_\infty^2$  می‌گیرند که در آن  $v_\infty$  سرعت تقرب سیال در فاصله‌ای زیاد از جسم است. مثلاً، برای جریان در اطراف کره‌ای به شعاع  $R$ ، ضریب اصطکاک  $f$  را با معادله زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_k = (\pi R^2) \left( \frac{1}{\pi} \rho v_\infty^2 \right) f \quad (۵-۱.۶)$$

اگر نتوان  $F_k$  را اندازه‌گیری کرد، می‌توان سرعت حدی کره را در حین سقوط در سیال، اندازه‌گیری کرد. (در این حالت، باید  $v_\infty$  را به صورت سرعت حدی کره تفسیر کرد). برای سقوط حالت پایای کره در سیال، نیروی  $F_k$  صرفاً با نیروی گرانشی وارد بر کره، منهای نیروی شناوری موازنه می‌شود (مقایسه کنید با معادله (۱۴-۶.۲)):

$$F_k = \frac{4}{\pi} \pi R^2 \rho_{\text{sph}} g - \frac{4}{\pi} \pi R^2 \rho g \quad (۶-۱.۶)$$

<sup>۲</sup> این تعریف ضریب اصطکاک در منبع زیر آمده است:

J. T. Fanning, *A Practical Treatise on Hydraulic and Water Supply Engineering*, Van Nostrand, New York, 1st edition (1877), 16th edition (1906).

نام «فنینگ» به این جهت به کار می‌رود که با «ضریب اصطکاک مودی» اشتباه نشود، که ۴ برابر  $f$  به کار رفته در این جاست.

[L. F. Moody, *Trans. ASME*, **66**, 671-684 (1944)].

اگر از «سرعت اصطکاک»  $\sqrt{\tau_0 / \rho} = \sqrt{(P_0 - P)R / 2L\rho}$  که در بخش ۳.۵ معرفی شد استفاده کنیم، آنگاه معادله (۴-۱.۶) صورت زیر را پیدا می‌کند:

$$f = 2(v_* / \langle v \rangle)^2$$

جان توماس فنینگ (۱۸۳۷-۱۹۱۱) در رشته‌های معماری و عمران تحصیل و در جنگ داخلی با درجه افسری خدمت کرد و پس از جنگ در مهندسی هیدرولیک پرآوازه شد. ویراست چهاردهم کتاب او با عنوان زیر در سال ۱۸۹۹ منتشر شد.

*A Practical Treatise on Hydraulic and Water-Supply Engineering*

<sup>۳</sup> برای حرکت انتقالی کره در سه بعد، می‌توان به طور تقریبی نوشت:

$$\mathbf{F}_k = (\pi R^2) \left( \frac{1}{\pi} \rho v_\infty^2 \right) f \mathbf{n}$$

که در آن  $\mathbf{n}$  بردار یکه در جهت  $v_\infty$  است. نگاه کنید به مسئله ۱.۶ ج. ۱.

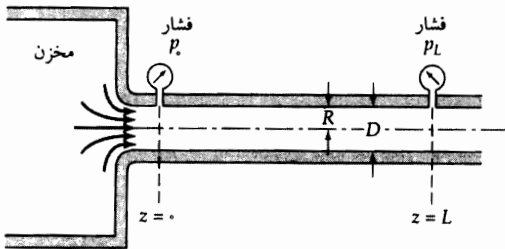
با حذف  $F_k$  بین معادله‌های (۵-۱.۶) و (۶-۱.۶) نتیجه می‌شود:

$$f = \frac{4}{3} \frac{gD}{v_{\infty}^2} \left( \frac{\rho_{\text{sph}} - \rho}{\rho} \right) \quad (۷-۱.۶)$$

می‌توان از این عبارت برای به‌دست آوردن  $f$  از روی داده‌های سرعت حدی استفاده کرد. ضریب اصطکاک به‌کاررفته در معادله (۵-۱.۶) و (۷-۱.۶) را گاهی ضریب پسا می‌نامند و با نماد  $c_D$  نشان می‌دهند. مشاهده کردیم که «ضریب پسا» برای اجسام غوطه‌ور و «ضریب اصطکاک» برای جریان در کانال به روش کلی یکسانی تعریف می‌شوند. به‌این دلیل، ترجیح می‌دهیم هردو را با یک نماد و یک نام به‌کار ببریم.

### ۲.۶ ضرایب اصطکاک برای جریان در لوله‌ها

حال تعریف  $f$  طبق معادله (۲-۱.۶) را با تحلیل ابعادی بخش ۷.۳ تلفیق می‌کنیم تا نشان دهیم که  $f$  در این نوع سیستم باید به چه عاملی وابسته باشد. یک «مقطع آزمون» را به شعاع داخلی  $R$  و طول  $L$  که در شکل ۱-۲.۶ نشان داده شده‌است، در نظر می‌گیریم که حامل سیالی با چگالی و ویسکوزیته ثابت، با آهنگ جریان جرمی پایاست. فشارهای  $P$  و  $P_L$  در دو سر مقطع معلوم‌اند.



شکل ۱-۲.۶ مقطع لوله‌ای مدور از  $z = 0$  تا  $z = L$  که در تحلیل ابعادی به‌کار می‌رود.

سیستم یا جریان آرام پایا و یا جریان متلاطم با تحریک پایا (یعنی جریان متلاطم با عملکرد کلی پایا) دارد. در هردو حالت، نیرویی که سیال در جهت  $z$  بر جدار داخلی مقطع آزمون وارد می‌کند، برابر است با:

$$F_k(t) = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} R \, d\theta \, dz \quad (۱-۲.۶)$$

در جریان متلاطم، نیرو ممکن است تابع زمان باشد، نه فقط به‌سبب نوسانات تلاطمی، بلکه به‌علت جدا شدن گاه‌وبیگاه لایه مرزی از جدار، که در بعضی فواصل با مقیاس‌های زمانی طولانی مشاهده می‌شود. در جریان آرام، نیرو از زمان مستقل خواهد بود.

با برابر گرفتن معادله‌های (۱-۲.۶) و (۲-۱.۶)، عبارت زیر برای ضریب اصطکاک به‌دست می‌آید:

$$f(t) = \frac{\int_0^L \int_0^{2\pi} \left( -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} R \, d\theta \, dz}{(2\pi RL) \left( \frac{1}{4} \rho \langle v_z \rangle^2 \right)} \quad (۲-۲.۶)$$

کمیت‌های بدون بعد از بخش ۷.۳ یادآوری می‌کنیم:  $\check{t} = \langle v_z \rangle t / D$ ،  $\check{v}_z = v_z / \langle v_z \rangle$ ،  $\check{z} = z / D$ ،  $\check{r} = r / D$ . سپس می‌توان معادله (۲-۲.۶) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f(\check{t}) = \frac{1}{\pi} \frac{D}{L} \frac{1}{\text{Re}} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\partial \check{v}_z}{\partial \check{r}} \right) \Big|_{\check{r}=1/2} d\theta \, d\check{z} \quad (۳-۲.۶)$$

این رابطه برای جریان آرام یا متلاطم در لوله‌های مدور با جدار صاف معتبر است. مشاهده می‌کنیم که در سیستم‌های جریانی که در آن‌ها نیروی پسا فقط به نیروهای ویسکوز وابسته است (یعنی «پسای شکلی» وجود ندارد)، حاصل ضرب  $fRe$  اساساً گرادیان سرعت بدون بُعد متوسط‌گیری شده روی سطح است.

حال یادآوری می‌کنیم که، اصولاً،  $\partial \check{v}_z / \partial \check{x}$  را می‌توان از معادله‌های (۸-۷.۳) و (۹-۷.۳)، همراه با شرایط مرزی زیر<sup>۱</sup>:

$$(۴-۲.۶) \quad \text{شرط مرزی ۱: در } \check{x} = \frac{1}{4}, \text{ به‌ازای } z > 0, \check{v} = 0.$$

$$(۵-۲.۶) \quad \text{شرط مرزی ۲: در } z = 0, \check{z} = 0, \check{v} = \delta_z.$$

$$(۶-۲.۶) \quad \text{شرط مرزی ۳: در } \check{x} = 0 \text{ و } z = 0, \check{v} = 0.$$

و شرایط اولیه مناسب، به‌دست آورد. در سیستم بالادستی و نازلی که خوب طراحی شده باشد، توزیع سرعت یکنواخت ورودی دقیقاً طبق معادله (۵-۲.۶) است، مگر در فاصله بسیار کم از جدار. اگر بتوان معادله‌های (۸-۷.۳) و (۹-۷.۳) را با این شرایط مرزی و اولیه حل کرد تا  $\check{v}$  و  $\check{P}$  به‌دست آید، جواب‌ها باید صورت زیر را داشته باشند:

$$\check{v} = \check{v}(\check{x}, \theta, \check{z}, \check{t}; Re), \quad \check{P} = \check{P}(\check{x}, \theta, \check{z}, \check{t}; Re) \quad (۸, ۷-۲.۶)$$

یعنی، وابستگی تابعی  $\check{v}$  و  $\check{P}$  باید، به‌طور کلی، شامل همه متغیرهای بدون بُعد و گروه بدون بُعد باشد که در معادله‌های دیفرانسیل ظاهر می‌شود. هیچ گروه بدون بُعد دیگری از طریق شرایط مرزی گفته شده وارد نمی‌شود. در نتیجه،  $\partial \check{v}_z / \partial \check{x}$  نیز باید به  $\check{x}, \theta, \check{z}, \check{t}$ ، و  $Re$  وابسته باشد. وقتی  $\partial \check{v}_z / \partial \check{x}$  را در  $\check{x} = \frac{1}{4}$  محاسبه کنیم و سپس روی  $\check{z}$  و  $\theta$  در معادله (۳-۲.۶) انتگرال بگیریم، نتیجه فقط به  $\check{t}$ ،  $Re$ ، و  $L/D$  وابسته است (عامل اخیر در حد بالایی انتگرال‌گیری روی  $\check{z}$  پدیدار می‌شود). بنابراین به این نتیجه می‌رسیم که  $f(\check{t}) = f(Re, L/D, \check{t})$ ، که وقتی نسبت به زمان متوسط‌گیری شود، به عبارت زیر تبدیل می‌شود:

$$f = f(Re, L/D) \quad (۹-۲.۶)$$

هرگاه متوسط زمانی در بازه‌ای به‌اندازه کافی طولانی برای شمول هر نوع اختلال تلاطمی درازمدت، گرفته شود، در این صورت ضریب اصطکاک اندازه‌گیری شده فقط به عدد رینولدز و نسبت طول به قطر بستگی خواهد داشت. وابستگی  $f$  به  $L/D$  از تکامل توزیع سرعت متوسط زمانی از شکل ورودی تخت خود، به‌سوی توزیع‌های گردشده‌تر به‌ازای مقادیر پایین‌دستی  $z$  ناشی می‌شود. این تکامل در ناحیه ورودی به‌طول  $Re \approx 0.3 D$  برای جریان آرام یا  $Re \approx 60 D$  برای جریان متلاطم رخ می‌دهد و پس از آن توزیع سرعت «کاملاً شکل گرفته» است. در انتقال سیالات، طول ورودی معمولاً کسر کوچکی از کل است؛ در این صورت معادله (۹-۲.۶) به‌صورت مربوط به لوله طویل تبدیل می‌شود و داریم:

$$f = f(Re) \quad (۱۰-۲.۶)$$

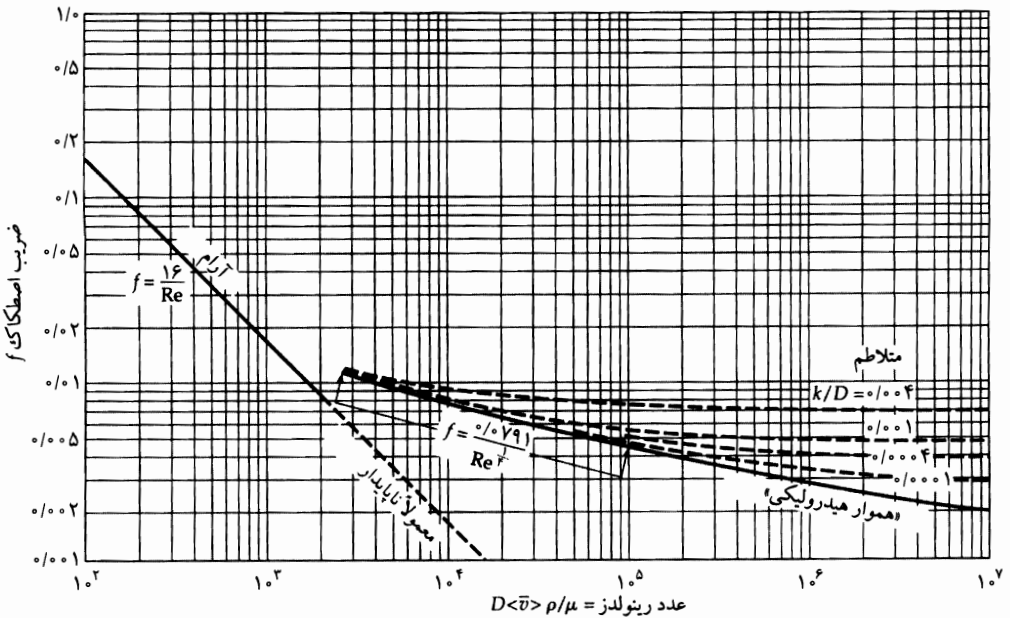
و  $f$  را می‌توان به‌روش تجربی از معادله (۴-۱.۶) به‌دست آورد که برای جریان کاملاً شکل یافته در ورودی و خروجی نوشته شده است.

معادله‌های (۹-۲.۶) و (۱۰-۲.۶) نتایجی سودمندند، زیرا راهنمایی برای ارائه روشمند داده‌های مربوط به آهنگ جریان برحسب اختلاف فشار برای جریان آرام و متلاطم در لوله‌های مدور به‌شمار می‌روند. برای لوله‌های طویل، فقط به یک منحنی برای  $f$  نیاز داریم که برحسب ترکیب  $D \langle \bar{v}_z \rangle \rho / \mu$  ترسیم شده باشد. مشاهده می‌کنید که این

۱. در این‌جا از روش متداول چشم‌پوشی از جمله  $\check{v}(\partial^2 / \partial z^2)$  در معادله (۹-۷.۳)، براساس استدلال‌های مرتبه بزرگی، مانند استدلال‌های مطرح شده در بخش ۴.۴ پیروی می‌کنیم. با کنار گذاشتن این جمله‌ها، در مورد  $\check{v}$  نیازی به شرط مرزی خروجی نداریم.

کار چه قدر ساده‌تر از ترسیم افت فشار برحسب آهنگ جریان به‌ازای مقادیر مجزای  $D, L, \rho, \mu$  است که ممکن است اشخاص ناوارد به‌سراغ آن بروند.

اطلاعات تجربی بسیاری در مورد افت فشار برحسب آهنگ جریان در لوله‌ها وجود دارد و بنابراین می‌توان  $f$  را، با استفاده از معادله (۴-۱.۶) از روی داده‌های تجربی به‌دست آورد. در این صورت می‌توان برای لوله‌های جدارصاف،  $f$  را برحسب  $Re$  ترسیم کرد و منحنی‌های خط‌پر نشان‌داده‌شده در شکل ۲-۲.۶ را به‌دست آورد. این منحنی‌ها رفتار آرام و تلاطمی سیالات جاری در لوله‌های طویل، جدارصاف، و مدور را نشان می‌دهند.



شکل ۲-۲.۶ ضریب اصطکاک برای جریان در لوله (تعریف  $f$  را در معادله‌های (۲-۱.۶) و (۳-۱.۶) ببینید).

توجه کنید که منحنی آرام روی نمودار ضریب اصطکاک صرفاً نمودار معادله هیگن-پوتازوی در معادله (۲۱-۳.۲) است. با جایگزین کردن عبارت  $(P_0 - P_L)$  از معادله (۲۱-۳.۲) در معادله (۴-۱.۶)، و استفاده از رابطه  $w = \rho(\bar{v}_z)\pi R^2$  می‌توان به این نتیجه رسید؛ بنابراین داریم:

$$f = \frac{16}{Re} \begin{cases} Re < 2100 & \text{پایدار} \\ Re > 2100 & \text{معمولاً ناپایدار} \end{cases} \quad (۱۱-۲.۶)$$

که در آن  $Re = D(\bar{v}_z)\rho/\mu$ ؛ این دقیقاً همان خط مربوط به جریان آرام در شکل ۲-۲.۶ است. منحنی‌های مشابه برای جریان متلاطم، با استفاده از داده‌های تجربی ترسیم شده‌اند. بعضی از عبارت‌های تحلیلی قابل‌برازش منحنی نیز موجود است. مثلاً معادله (۶-۱.۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f = \frac{0.0791}{Re^{1/4}} \quad 2.1 \times 10^3 < Re < 10^5 \quad (۱۲-۲.۶)$$

که فرمول بلازیوس<sup>۲</sup> نامیده می‌شود. معادله (۱-۵.۵) (که در آن ۲/۴۵ جایگزین ۲/۵ و ۲/۰۰ جایگزین ۱/۷۵ شده‌است) هم‌ارز است با:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0 \log_{10}(\text{Re}\sqrt{f}) - 0.4 \quad 2.3 \times 10^3 < \text{Re} < 4 \times 10^6 \quad (13-2.6)$$

که فرمول پرانتل<sup>۳</sup> نامیده می‌شود. سرانجام، متناظر با معادله (۲-۵.۵)، داریم:

$$f = \frac{2}{\Psi^{2/(\alpha+1)}} \quad \text{که در آن} \quad \Psi = \frac{e^{2/3}(\sqrt{3} + 5\alpha)}{2^\alpha \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} \quad (14-2.6)$$

و  $\alpha = 3/(2 \ln \text{Re})$ . این رابطه معرف خوبی برای داده‌های تجربی در گستره

$$3.07 \times 10^3 < \text{Re} < 3.23 \times 10^6$$

است. معادله (۱۴-۲.۶) را فرمول بارن‌بلات<sup>۴</sup> می‌نامند.

رابطه‌ای دیگر، که در شکل ۲-۲.۶ شامل منحنی‌های خط‌چین برای لوله‌های با جدار زبر است، معادله تجربی هالاند<sup>۵</sup> تا این جا نام دارد.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -3.6 \log_{10} \left[ \frac{6.9}{\text{Re}} + \left( \frac{k/D}{3.7} \right)^{10/9} \right] \quad \begin{cases} 4 \times 10^4 < \text{Re} < 10^8 \\ 0 < k/D < 0.05 \end{cases} \quad (15-2.6)$$

گفته می‌شود<sup>۵</sup> که این معادله حدود ۱/۵٪ خطا دارد. چنان‌که در شکل ۲-۲.۶ مشاهده می‌شود مقاومت اصطکاکی در برابر جریان، با افزایش ارتفاع برآمدگی‌ها،  $k$ ، افزایش می‌یابد. البته  $k$  را باید به شیوه‌ای بدون بعد وارد رابطه کرد و بنابراین به صورت نسبت  $k/D$  ظاهر می‌شود.

برای جریان متلاطم در لوله‌های غیرمدور معمولاً از رابطه تجربی زیر استفاده می‌کنند:

$$R_h = S/Z \quad (16-2.6)$$

که در آن  $S$  سطح مقطع مجرا و  $Z$  محیط خیس شده است. سپس می‌توانیم از معادله (۴-۱.۶) و شکل ۲-۲.۶ و جایگزینی  $D$ ، قطر لوله مدور، با جمله  $4R_h$  استفاده کنیم؛ یعنی اختلاف فشار را با جایگزین کردن معادله (۴-۱.۶) توسط معادله زیر:

$$f = \left( \frac{R_h}{L} \right) \left( \frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{4} \rho (v_z)^2} \right) \quad (17-2.6)$$

و به دست آوردن  $f$  از شکل ۲-۲.۶ با عدد رینولدز تعریف شده به صورت زیر، محاسبه می‌کنیم:

$$\text{Re}_h = \frac{4R_h(v_z)\rho}{\mu} \quad (18-2.6)$$

برای جریان‌های آرام در مجراهای غیرمدور، این روش کم‌تر رضایت‌بخش است.

2. H. Blasius, *Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing.*, no. 131 (1913).

3. L. Prandtl, *Essentials of Fluid Dynamics*, Hafner, New York (1952), p. 165.

4. G. I. Barenblatt, *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*, Cambridge University Press (1996), 10.2.

5. S. E. Haaland, *Trans. ASME, JFE*, **105**, 89-90 (1983).

برای آشنایی با رابطه‌های تجربی دیگر، به منبع زیر رجوع کنید:

D. J. Zigrang and N. D. Sylvester, *AIChE Journal*, **28**, 514-515 (1982).

مثال ۲-۲.۶

افت فشار لازم برای آهنگ جریان مفروض

مطلوب است تعیین گرادیان فشار لازم برای این‌که دی‌اتیل آنیلین،  $C_6H_5N(C_2H_5)_2$ ، با دمای  $20^\circ C$ ، در لولهٔ مدور افقی جدارصاف، با قطر داخلی  $D = 3 \text{ cm}$ ، با آهنگ جریان جرمی  $1028 \text{ g/s}$  جاری شود. در این دما چگالی دی‌اتیل آنیلین  $\rho = 0.935 \text{ g/cm}^3$  و ویسکوزیتهٔ آن  $\mu = 1.95 \text{ cp}$ .

حل

عدد رینولدز برای این جریان برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{D\langle v_z \rangle \rho}{\mu} = \frac{Dw}{(\pi D^2/4)\mu} = \frac{4w}{\pi D\mu} \\ &= \frac{4(1028 \text{ g/s})}{\pi(3 \text{ cm})(1.95 \times 10^{-2} \text{ g/cm}\cdot\text{s})} = 2.24 \times 10^4 \end{aligned} \quad (19-2.6)$$

باتوجه به شکل ۲-۲.۶، درمی‌یابیم که برای این عدد رینولدز، ضریب اصطکاک  $f$  مقداری برابر  $0.0063$  برای لوله‌های صاف دارد. بنابراین گرادیان فشار لازم برای برقراری جریان (طبق معادلهٔ (۴-۱.۶)) برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{p_0 - p_L}{L} &= \left(\frac{f}{D}\right) \left(\frac{1}{2}\rho\langle v_z \rangle^2\right) f = \frac{f}{D\rho} \left(\frac{4w}{\pi D^2}\rho\right)^2 \\ &= \frac{32w^2 f}{\pi^2 D^5 \rho} = \frac{(32)(1028)^2(0.0063)}{\pi^2(3.0)^5(0.935)} \\ &= 95(\text{dyne/cm}^2)/\text{cm} = 0.071(\text{mm Hg})/\text{cm} \end{aligned} \quad (20-2.6)$$

مثال ۲-۲.۶

آهنگ جریان به‌ازای افت فشار مفروض

مطلوب است تعیین آهنگ جریان برحسب  $\text{lb}_m/\text{hr}$  برای آب با دمای  $68^\circ F$ ، در لولهٔ فولادی  $8 \text{ in.}$  افقی نمرهٔ ۴۰ (قطر داخلی  $7.981 \text{ in.}$ )، به‌طول  $1000 \text{ ft}$ ، تحت اختلاف فشار  $3700 \text{ psi}$ . برای چنین لوله‌ای از شکل ۲-۲.۶ استفاده کنید و فرض کنید  $k/D = 2.3 \times 10^{-4}$ .

حل

وقتی  $p_0 - p_L$  معلوم است، از معادلهٔ (۴-۱.۶) و شکل ۲-۲.۶ برای یافتن  $\langle v_z \rangle$  استفاده می‌کنیم. اما کمیت  $\langle v_z \rangle$  به‌صورت صریح در سمت چپ معادله و به‌طور ضمنی در سمت راست آن، در  $f$ ، ظاهر می‌شود که به  $\text{Re} = D\langle v_z \rangle \rho / \mu$  وابسته است. بدیهی است که می‌توان جواب را به روش آزمون و خطا به‌دست آورد. اما اگر ناگزیر شویم به دفعات متعدد  $\langle v_z \rangle$  را محاسبه کنیم، بهتر است رهیافتی روشمند را پی‌ریزی کنیم؛ در این‌جا دو روش را پیشنهاد می‌کنیم. چون داده‌های تجربی غالباً به‌صورت ترسیمی ارائه می‌شوند، دانشجویان مهندسی باید بتوانند از قوهٔ ابتکار خود در یافتن روش‌های خاصی مانند آن‌چه در این‌جا توصیف می‌شود، استفاده کنند.

(روش الف) می‌توان برای ترسیم<sup>۶</sup> نمودار  $\text{Re}$  برحسب گروه  $\text{Re}\sqrt{f}$ ، که شامل  $\langle v_z \rangle$  نیست، از شکل ۲-۲.۶ استفاده کرد:

$$\text{Re} \sqrt{f} = \frac{D\langle v_z \rangle \rho}{\mu} \sqrt{\frac{(p_0 - p_L)D}{2L\rho\langle v_z \rangle^2}} = \frac{D\rho}{\mu} \sqrt{\frac{(p_0 - p_L)D}{2L\rho}} \quad (21-2.6)$$

۶. نمودار مرتبطی در منبع زیر ارائه شده‌است:



کمیت  $Re\sqrt{f}$  را می‌توان برای این مسئله محاسبه کرد و مقدار عدد رینولدز را از روی نمودار  $Re$  برحسب  $Re\sqrt{f}$  قرائت کرد. سپس می‌توان سرعت متوسط و آهنگ جریان را با استفاده از  $Re$  محاسبه کرد. (روش ب) می‌توان مستقیماً از شکل ۲-۲.۶ استفاده کرد و ترسیم مجددی انجام نداد؛ به این منظور باید از طرحی هم‌ارز با جواب ترسیمی یک دستگاه دو معادله‌ای استفاده کرد. این دستگاه دو معادله‌ای عبارت است از:

$$f = f(Re, k/D) \quad (22-2.6) \quad \text{منحنی در شکل ۲-۲.۶ ترسیم شده}$$

$$f = \frac{(Re\sqrt{f})^2}{Re^2} \quad (23-2.6) \quad \text{روی نمودار لگاریتمی، خط راست با شیب ۲-،}$$

سپس باید  $Re\sqrt{f}$  را طبق معادله (۲۱-۲.۶) محاسبه و سپس معادله (۲۳-۲.۶) را روی نمودار لگاریتمی  $f$  برحسب  $Re$  در شکل ۲-۲.۶ ترسیم کرد. نقطه تقاطع، عدد رینولدز جریان را نشان می‌دهد که می‌توان  $\langle v_z \rangle$  را از روی آن محاسبه کرد.

برای مسئله موردنظر، داریم:

$$p_o - p_L = (3,00 \text{ lb}_f/\text{in.}^2)(32,17 (\text{lb}_m\text{ft}/\text{s}^2)/\text{lb}_f)(144 \text{ in.}^2/\text{ft}^2)$$

$$= 1,39 \times 10^4 \text{ lb}_m/\text{ft} \cdot \text{s}^2$$

$$D = (7,981 \text{ in.})(\frac{1}{12} \text{ ft}/\text{in.}) = 0,665 \text{ ft}$$

$$L = 1000 \text{ ft}$$

$$\rho = 62,3 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$$

$$\mu = (1,03 \text{ cp})(6,72 \times 10^{-4} (\text{lb}_m/\text{ft} \cdot \text{s})/\text{cp})$$

$$= 6,93 \times 10^{-4} \text{ lb}_m/\text{ft} \cdot \text{s}$$

سپس، طبق معادله (۲۱-۲.۶)، داریم:

$$Re\sqrt{f} = \frac{D\rho}{\mu} \sqrt{\frac{(p_o - p_L)D}{2L\rho}} = \frac{(0,665)(62,3)}{(6,93 \times 10^{-4})} \sqrt{\frac{(1,39 \times 10^4)(0,665)}{2(1000)(62,3)}} \quad (24-2.6)$$

$$= 1,63 \times 10^4 \quad (\text{بدون بُعد})$$

خط معادله (۲۳-۲.۶) بازای این مقدار  $Re\sqrt{f}$  از  $f = 1,0$  در  $Re = 1,63 \times 10^4$  و از  $f = 0,1$  در  $Re = 1,63 \times 10^5$  می‌گذرد. با امتداد دادن خط گذرنده از این نقاط تا منحنی شکل ۲-۲.۶ بازای  $k/D = 0,00023$  جواب دستگاه دو معادله‌ای حاصل می‌شود:

$$Re = \frac{D\langle v_z \rangle \rho}{\mu} = \frac{4w}{\pi D \mu} = 2,4 \times 10^5 \quad (25-2.6)$$

با حل این معادله برحسب  $w$ ، نتیجه می‌شود:

$$w = (\pi/4)D\mu Re$$

$$= (0,7854)(0,665)(6,93 \times 10^{-4})(3600)(2,4 \times 10^5)$$

$$= 3,12 \times 10^5 \text{ lb}_m/\text{hr} = 39 \text{ kg/s} \quad (26-2.6)$$

### ۳.۶ ضرایب اصطکاک برای جریان در اطراف کره‌ها

در این بخش از تعریف ضریب اصطکاک در معادله (۵-۱.۶)، همراه با تحلیل ابعادی بخش ۷.۳ برای تعیین رفتار  $f$  برای کره ساکن در جریان نامتناهی سیالی که با سرعت یکنواخت و پایای  $v_\infty$  نزدیک می‌شود، استفاده می‌کنیم. جریان در اطراف کره را در بخش‌های ۶.۲ و ۲.۴ برای  $\text{Re} < 0.1$  ( ناحیه «جریان خزشی» ) مطالعه کردیم. در اعداد رینولدز بالاتر از حدود ۱، حرکت گردابی ناپایای درخور اعتنایی در دنباله کره وجود دارد. بنابراین باید در فاصله زمانی طولانی نسبت به این حرکت گردابی، متوسط‌گیری زمانی انجام داد.

از بخش ۶.۲ به یاد می‌آوریم که نیروی کل وارد بر کره در جهت  $z$  را می‌توان به صورت مجموع سهم تنش‌های قائم ( $F_n$ ) و سهم تنش‌های مماسی ( $F_t$ ) نوشت. بخشی از سهم تنش قائم نیروی  $F_s$  است که حتی در صورت سکون سیال نیز وجود خواهد داشت. بنابراین «نیروی جنبشی» مربوط به حرکت سیال عبارت است از:

$$F_k = (F_n - F_s) + F_t = F_{\text{شکلی}} + F_{\text{اصطکایی}} \quad (۱-۳.۶)$$

نیروهای مربوط به پسای شکلی و پسای اصطکایی از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$F_{\text{شکلی}}(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-p + \rho g z - p_0)|_{r=R} \cos \theta R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (۲-۳.۶)$$

$$F_{\text{اصطکایی}}(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \right) \Big|_{r=R} \sin \theta \, R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (۳-۳.۶)$$

چون  $v_r$  در همه نقاط روی سطح کره صفر است، جمله حاوی  $\partial v_r / \partial \theta$  صفر خواهد بود. اکنون اگر  $f$  را به دو بخش زیر تجزیه کنیم:

$$f = f_{\text{اصطکایی}} - f_{\text{شکلی}} \quad (۴-۳.۶)$$

آنگاه از تعریف‌های معادله‌های (۵-۱.۶) و (۴-۷.۳) نتیجه می‌شود:

$$f_{\text{شکلی}}(\dot{t}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-\check{P}|_{\check{r}=1} \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (۵-۳.۶)$$

$$f_{\text{اصطکایی}}(\dot{t}) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{\text{Re}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \check{r} \frac{\partial}{\partial \check{r}} \left( \frac{\check{v}_\theta}{\check{r}} \right) \right] \Big|_{\check{r}=1} \sin^2 \theta \, d\theta \, d\phi \quad (۶-۳.۶)$$

حال ضریب اصطکاک را بر حسب متغیرهای بدون بُعد:

$$\check{p} = \frac{(p + \rho g z) - (p_0 + \rho g^0)}{\rho v_\infty^2} = \frac{P - P_0}{\rho v_\infty^2} \quad \check{v}_\theta = \frac{v_\theta}{v_\infty} \quad \check{r} = \frac{r}{R} \quad \dot{t} = \frac{v_\infty t}{R} \quad (۷-۳.۶)$$

و عدد رینولدزی با تعریف:

$$\text{Re} = \frac{D v_\infty \rho}{\mu} = \frac{2 R v_\infty \rho}{\mu} \quad (۸-۳.۶)$$

بیان می‌کنیم. برای تعیین  $f(\dot{t})$  باید  $\check{P}$  و  $\check{v}_\theta$  را به صورت توابع  $\check{r}$ ،  $\theta$ ،  $\phi$ ، و  $\dot{t}$  بدانیم.

می‌دانیم که برای جریان تراکم‌ناپذیر، اصولاً می‌توان این سهم‌ها را از جواب معادله‌های (۸-۷.۳) و (۹-۷.۳)، همراه با شرایط مرزی زیر و چند شرط اولیه مناسب در مورد  $\check{v}$ ، به‌دست آورد:

$$(۹-۳.۶) \quad \text{شرط مرزی ۱: در } \check{r} = 1, \text{ داریم } \check{v}_r = 0 \text{ و } \check{v}_\theta = 0.$$

$$(۱۰-۳.۶) \quad \text{شرط مرزی ۲: وقتی } \check{r} \rightarrow \infty, \text{ داریم } \check{v}_z \rightarrow 1.$$

$$(۱۱-۳.۶) \quad \text{شرط مرزی ۳: وقتی } \check{r} \rightarrow \infty, \text{ داریم } \check{P} \rightarrow 0.$$

چون هیچ گروه بدون بُعد اضافی از طریق شرایط مرزی و اولیه وارد نمی‌شود، می‌دانیم که توزیع بدون بُعد فشار و توزیع سرعت به‌صورت زیر است:

$$\check{P} = \check{P}(\check{r}, \theta, \phi, \check{t}; \text{Re}) \quad \check{v} = \check{v}(\check{r}, \theta, \phi, \check{t}; \text{Re}) \quad (۱۲-۳.۶)$$

وقتی این عبارت‌ها را در معادله‌های (۵-۳.۶) و (۶-۳.۶) قرار دهیم، آشکار می‌شود که ضریب اصطکاک در معادله (۴-۳.۶) باید به‌صورت  $f(\check{t}) = f(\text{Re}, t)$  باشد که، وقتی روی نوسانات تلاطمی متوسط‌گیری زمانی شود، با استفاده از استدلال‌هایی مشابه استدلال‌های بخش ۲.۶، به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$f = f(\text{Re}) \quad (۱۳-۳.۶)$$

بنابراین از تعریف ضریب اصطکاک و صورت بدون بُعد معادله‌های تغییر و شرایط مرزی، می‌توان دریافت که  $f$  باید فقط تابع  $\text{Re}$  باشد.

اندازه‌گیری‌های تجربی بسیاری در مورد نیروی پسای وارد بر کره‌ها در دسترس است و وقتی این داده‌ها به‌صورت بدون بُعد ترسیم شود، شکل ۱-۳.۶ به‌دست می‌آید. تا زمانی که عدد رینولدز برای لوله‌های طویل در حدود  $2100$  باشد، در این سیستم گذار واضح از منحنی جریان آرام ناپایدار به منحنی جریان متلاطم پایدار وجود نخواهد داشت (نگاه کنید به شکل ۲-۲.۶). در عوض، با افزایش سرعت تقرب،  $f$  به‌صورت هموار و ملایم، تا رسیدن به اعداد رینولدز از مرتبه  $10^5$ ، تغییر می‌کند. چنین خوردگی که در عدد رینولدزی حدود  $\text{Re} = 2 \times 10^5$  در منحنی مشاهده می‌شود، به جابه‌جایی منطقه جدایش لایه مرزی از جلوی خط استوای کره، تا پشت این خط مربوط است.<sup>۱</sup> جریان داخل لوله و جریان در اطراف کره را کنار هم گذاشته‌ایم تا بر این نکته تأکید کنیم که سیستم‌های جریان مختلف رفتاری کاملاً متفاوت دارند. چند اختلاف بین دو سیستم به‌شرح زیر است:

جریان در لوله‌ها

- گذار نسبتاً مشخص آرام-متلاطم در حدود  $\text{Re} = 2100$ ؛
- تنها پسای اصطکاک در  $f$  سهم دارد. (هرگاه جدار لوله صاف باشد)؛
- جدایش لایه مرزی رخ نمی‌دهد.

جریان در اطراف کره‌ها

- گذار نامشخص آرام-متلاطم؛
  - هم پسای اصطکاک و هم پسای شکلی در  $f$  سهم دارند؛
  - در منحنی  $f$  برحسب  $\text{Re}$  چنین خوردگی مرتبط با جابه‌جایی منطقه جدایش وجود دارد.
- شکل کلی منحنی‌ها در شکل‌های ۲-۲.۶ و ۱-۳.۶ را باید به‌دقت به‌خاطر سپرد.

1. R. K. Adair, *The Physics of Baseball*, Harper and Row, New York (1990).

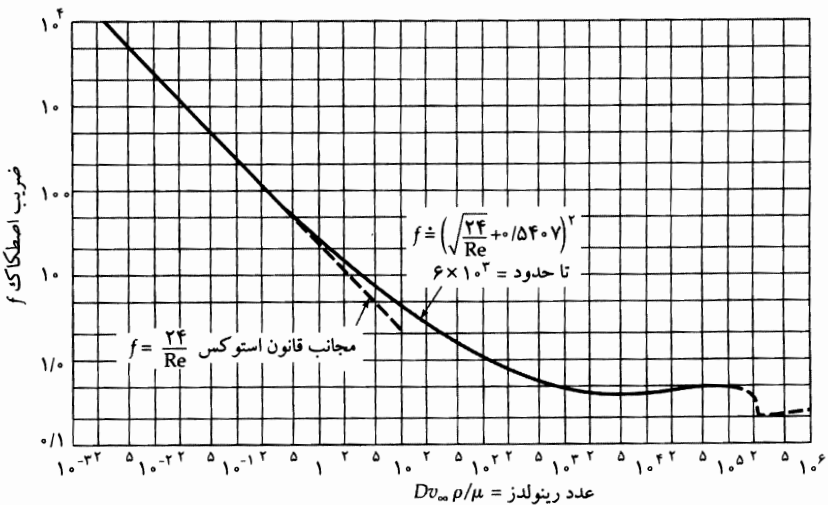
برای ناحیه جریان خرنشی، می‌دانیم که نیروی پسا از قانون استوکس به دست می‌آید که نتیجه حل کردن معادله پیوستگی و معادله ناویه-استوکس حرکت، بدون جمله  $\rho Dv/Dt$  است. قانون استوکس را می‌توان به صورت معادله (۵-۱.۶) نوشت تا نتیجه شود:

$$F_k = (\pi R^2) \left( \frac{1}{4} \rho v_\infty^2 \right) \left( \frac{24}{Dv_\infty \rho / \mu} \right) \quad (۱۴-۳.۶)$$

بنابراین، برای جریان خرنشی در اطراف کره، داریم:

$$f = \frac{24}{Re} \quad \text{به‌ازای } Re < 0.1 \quad (۱۵-۳.۶)$$

و هنگامی که  $Re \rightarrow \infty$ ، این خط مستقیم مجانب منحنی ضریب اصطکاک در شکل ۱-۳.۶ است.



شکل ۱-۳.۶ ضریب اصطکاک (یا ضریب پسا) برای کره‌ای که با سرعت  $v_\infty$  نسبت به سیال حرکت می‌کند. تعریف  $f$  در معادله (۵-۱.۶) داده شده است.

به‌ازای مقادیر بالاتر عدد رینولدز، معادله (۲.۴-۲.۱) می‌تواند تا حدود  $Re = 1$ ،  $f$  را دقیقاً توصیف کند. اما عبارت تجربی<sup>۲</sup>:

$$f = \left( \sqrt{\frac{24}{Re} + 0.5407} \right)^2 \quad \text{به‌ازای } Re < 6000 \quad (۱۶-۳.۶)$$

هم ساده و هم مفید است. این نکته مهم را باید به‌خاطر سپرد که:

$$f \approx 0.44 \quad \text{به‌ازای } 5 \times 10^2 < Re < 1 \times 10^5 \quad (۱۷-۳.۶)$$

که گستره درخور اعتنایی از اعداد رینولدز را شامل می‌شود. گاهی معادله (۱۷-۳.۶) را قانون مقاومت نیوتون می‌نامند؛ این معادله برای محاسبات ذهنی مناسب است. طبق این قانون، نیروی پسا با مجذور سرعت تقرب سیال متناسب است.

2. F. F. Abraham, *Physics of Fluids*, **13**, 2194 (1970); M. Van Dyke, *Physics of Fluids*, **14**, 1038-1039 (1971).

تعمیم‌های بسیاری براساس شکل ۱-۳.۶ انجام شده‌است، اما بررسی روشمند آن‌ها از حیطة کار این کتاب خارج است. درمیان اثرهایی که روی آن‌ها تحقیق شده، می‌توان به اثر جدار<sup>۳</sup> (نگاه کنید به مسئله ۶.ج.۲)، سقوط قطرک‌ها با گردش داخلی،<sup>۴</sup> ته‌نشینی تأخیری (یعنی سقوط دسته‌های ذراتی<sup>۵</sup> که باهم تداخل می‌کنند)، جریان ناپایا،<sup>۶</sup> و سقوط ذرات غیرکروی<sup>۷</sup> اشاره کرد.

### مثال ۱-۳.۶

تعیین قطر کره افتان

در آزمایشی برای بررسی زمان واکنش انسان در هنگام انجام مشاهدات زمانی با کرومومتر یا وسایل پیچیده‌تر، کره‌های شیشه‌ای با چگالی  $\rho_{\text{sph}} = 2,62 \text{ g/cm}^3$  را در  $\text{CCl}_4$  مایع با دمای  $20^\circ\text{C}$  رها می‌کنند تا سقوط کنند. در این دما خواص  $\text{CCl}_4$  عبارت‌اند از:  $\rho = 1,59 \text{ g/cm}^3$  و  $\mu = 9,58$  میلی پواز. قطر کره‌ها چه قدر باشد تا به سرعت حدى حدود  $65 \text{ cm/s}$  برسند؟

حل

برای یافتن قطر کره‌ها، باید معادله (۷-۱.۶) را برحسب  $D$  حل کنیم. اما در این معادله باید  $D$  معلوم باشد تا بتوان  $f$  را به دست آورد؛ و  $f$  با منحنی خطیر شکل ۱-۳.۶ نشان داده شده‌است. می‌توان از روش آزمون و خطا استفاده کرد و به عنوان نخستین حدس، فرض کرد  $f = 0,44$ .

راه دیگر، حل معادله (۷-۱.۶) برحسب  $f$  و سپس توجه به این نکته است که  $f/\text{Re}$  کمیته مستقل از  $D$  است:

$$\frac{f}{\text{Re}} = \frac{4}{3} \frac{gh}{\rho v_{\infty}^2} \left( \frac{\rho_{\text{sph}} - \rho}{\rho} \right) \quad (18-3.6)$$

کمیت سمت راست را می‌توان با اطلاعات بالا محاسبه کرد؛ این کمیت را  $C$  می‌نامیم. بنابراین یک دستگاه دو معادله‌ای داریم که باید آن را حل کنیم:

$$f = C \text{Re} \quad (19-3.6)$$

$$f = f(\text{Re}) \quad (20-3.6)$$

معادله (۱۹-۳.۶) خط مستقیمی با شیب واحد روی نمودار لگاریتمی  $f$  برحسب  $\text{Re}$  است:  
در مسئله حاضر، داریم:

$$C = \frac{4(980)(9,58 \times 10^{-3})}{3(1,59)(65)^2} \left( \frac{2,62 - 1,59}{1,59} \right) = 1,86 \times 10^{-5} \quad (21-3.6)$$

3. J. R. Strom and R. C. Kintner, *AIChE Journal*, **4**, 153-156 (1958).

4. L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford, 2nd edition (1987), pp. 65-66; S. Hu and R. C. Kintner, *AIChE Journal*, **1**, 42-48 (1955).

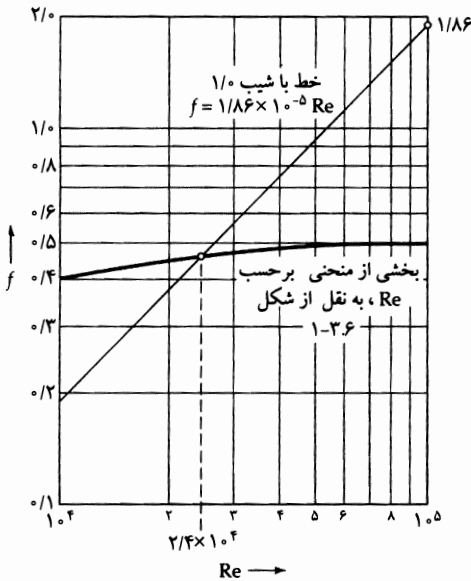
5. C. E. Lapple, *Fluid and Particle Mechanics*, University of Delaware Press, Newark, Del. (1951), Chapter 13; R. F. Probstein, *Physicochemical Hydrodynamics*, Wiley, New York, 2nd edition (1994), §5.4.

6. R. R. Hughes and E. R. Gillil and, *Chem. Eng. Prog.*, **48**, 497-504 (1952); L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford, 2nd edition, (1987), pp. 90-91.

7. E. S. Pettyjohn and E. B. Christiansen, *Chem. Eng. Prog.*, **44**, 147 (1948); H. A. Becker, *Can. J. Chem. Eng.*, **37**, 885-891 (1959); S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*, Butterworth-Heinemann, Boston (1991), Chapter 5.

بنابراین در  $Re = 10^5$ ، طبق معادله (۱۹-۳.۶)، داریم  $f = 1/86$ . خطی با شیب ۱ که در  $Re = 10^5$  از  $f = 1/86$  می‌گذرد، در شکل ۲-۳.۶ نشان داده شده‌است. این خط منحنی معادله (۲۰-۳.۶) (یعنی منحنی شکل ۱-۳.۶) را در  $Re = Dv_{\infty}\rho/\mu = 2/4 \times 10^4$  قطع می‌کند. سپس می‌توان قطر کره را به دست آورد:

$$D = \frac{Re\mu}{\rho v_{\infty}} = \frac{(2/4 \times 10^4)(9/58 \times 10^{-2})}{(1/59)(65)} = 2/2 \text{ cm} \quad (22-3.6)$$



شکل ۲-۳.۶ روش ترسیمی به‌کاررفته در مثال ۱-۳.۶.

#### ۴.۶ ضرایب اصطکاک برای ستون‌های پرشده

در دو بخش گذشته روابط همبستگی ضریب اصطکاک برای دو سیستم جریان ساده را که توجه زیادی به آن‌ها می‌شود، شرح دادیم. برای چند سیستم دیگر، مانند جریان عرضی از کنار استوانه، جریان عرضی از کنار دسته‌لوله، جریان در نزدیکی موج‌گیرها، و جریان در نزدیکی دیسک‌های چرخان، نمودارهای ضریب اصطکاک در دسترس است. این نمودارها و بسیاری دیگر، در منابع مختلف جمع‌بندی شده‌اند.<sup>۱</sup> یکی از سیستم‌های پیچیده‌ای که در مهندسی شیمی توجه شایانی به آن می‌شود، ستون پرشده است که در رآکتورهای کاتالیزی و برای فرایندهای جداسازی کاربرد گسترده‌ای دارد.

دو رهیافت اصلی برای پی‌ریزی عبارت‌های ضریب اصطکاک در ستون‌های پرشده مطرح بوده‌است. در یک روش ستون پرشده را به صورت دسته‌ای از لوله‌های درهم‌تنیده با مقطع غیرعادی تجسم می‌کنند؛ سپس با کاربرد نتایج قبلی به دست آمده برای تک‌لوله‌های مستقیم، در مورد مجموعه‌ای از لوله‌های کج و معوج، مبانی نظری را پی‌ریزی می‌کنند. در روش دوم ستون پرشده را به صورت مجموعه‌ای از اجسام غوطه‌ور در نظر می‌گیرند و افت فشار حاصل را با

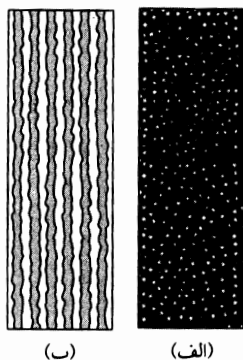
1. P. C. Carman, *Flow of Gases through Porous Media*, Butterworths, London (1956); J. G. Richardson, Section 16 in *Handbook of Fluid Dynamics* (V. L. Streeter, ed.), McGraw-Hill, New York (1961); M. Kaviany, Chapter 21 in *Handbook of Fluid Dynamics* (R. W. Johnson, ed.), CRC Press, Boca Raton, Fla. (1998).

جمع کردن مقاومت‌های ذرات غوطه‌ور به دست می‌آورند.<sup>۲</sup> نظریه‌های دسته‌لوله‌ای تا حدودی موفقیت‌آمیزتر بوده‌اند و در این جا شرح داده می‌شوند. شکل ۱-۴.۶ (الف) ستون پر شده و شکل ۱-۴.۶ (ب) مدل دسته‌لوله‌ای را نشان می‌دهد. ستون‌ها را با انواع مواد پر می‌کنند: کره، استوانه، قطعات زینی، و غیره. در بحث زیر فرض می‌شود که ستون از لحاظ آماری به‌طور یکنواخت پر شده‌است، بنابراین «کانال بازی وجود ندارد» (در عمل این پدیده مکرراً رخ می‌دهد و در این صورت روابطی که در این جا به دست می‌آوریم، کاربرد ندارند). به علاوه فرض می‌کنیم که قطر ذراتی که ستون را پر می‌کنند، در مقایسه با قطر ستون، کوچک است، و قطر ستون یکنواخت است. ضریب اصطکاک در ستون پر شده را نظیر معادله (۴-۱.۶) تعریف می‌کنیم:

$$f = \frac{1}{4} \left( \frac{D_p}{L} \right) \left( \frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{4} \rho v^2} \right) \quad (1-4.6)$$

که در آن  $L$  طول ستون پر شده،  $D_p$  قطر مؤثر ذره (که در همین جا تعریف می‌شود)، و  $v_0$  سرعت ظاهری است؛ این همان آهنگ جریان حجمی تقسیم بر سطح مقطع ستون خالی است،  $v_0 = w/\rho S$ . افت فشار در لوله معرف در مدل دسته‌لوله‌ای از معادله (۱۷-۲.۶) به دست می‌آید.

$$P_0 - P_L = \frac{1}{4} \rho \langle v \rangle^2 \left( \frac{L}{R_h} \right) f_{\text{لوله}} \quad (2-4.6)$$



شکل ۱-۴.۶ (الف) لوله استوانه‌ای پر شده با کره؛ (ب) مدل «دسته‌لوله» برای ستون پر شده (الف).

که در آن ضریب اصطکاک برای یک لوله تنها،  $f_{\text{لوله}}$ ، تابعی از عدد رینولدز  $\text{Re}_h = 4 R_h \langle v \rangle \rho / \mu$  است. وقتی این اختلاف فشار را در معادله (۱-۴.۶) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$f = \frac{1}{4} \frac{D_p \langle v \rangle^2}{R_h v^2} f_{\text{لوله}} = \frac{1}{4 \epsilon^2} \frac{D_p}{R_h} f_{\text{لوله}} \quad (3-4.6)$$

در عبارت دوم، کسر حفره،  $\epsilon$ ، را به کار برده‌ایم که کسر فضایی از ستون است که با ماده پرکننده پر نشده‌است. در نتیجه  $\langle v \rangle \epsilon = v_0$ ، که از تعریف سرعت ظاهری نتیجه می‌شود. حال به عبارتی برای  $R_h$  نیاز داریم.

2. W. E. Ranz, *Chem. Eng. Prog.*, **48**, 274-253 (1952); H. C. Brinkman, *Appl. Sci. Research.*, **A1**, 27-34, 81-86, 333-346 (1949).

هنری کنراد برینکمن (۱۹۰۸-۱۹۶۱) روی گرمایش اتلافی ویسکوز، جریان در محیط‌های متخلخل، و فیزیک پلاسما تحقیق کرد؛ او از سال ۱۹۴۹ تا سال ۱۹۵۴ در انستیتوی تکنولوژی باندونگ در اندونزی تدریس کرد و در همان جا کتاب زیر را نوشت:  
*The Application of Spinor Invariants to Atomic Physics.*

شعاع هیدرولیکی را می‌توان برحسب کسر حفره،  $\varepsilon$ ، و سطح خیس شده،  $a$ ، در واحد حجم بستر بیان کرد:

$$R_h = \frac{(\text{حجم مقطع موجود برای جریان})}{(\text{محیط خیس شده})} = \frac{(\text{حجم موجود برای جریان})}{(\text{کل سطح خیس شده})}$$

$$= \frac{(\text{حجم بستر} / \text{حجم حفره‌ها})}{(\text{حجم بستر} / \text{سطح خیس شده})} = \frac{\varepsilon}{a} \quad (4-4.6)$$

کمیت  $a$  با «سطح مخصوص»  $a_v$  (سطح کل ذره بر واحد حجم آن) رابطه زیر را دارد:

$$a_v = \frac{a}{1 - \varepsilon} \quad (5-4.6)$$

از کمیت  $a_v$  نیز به نوبه خود برای تعریف قطر میانگین ذره،  $D_p$ ، استفاده می‌شود و داریم:

$$D_p = \frac{6}{a_v} \quad (6-4.6)$$

این تعریف را از آن رو برگزیده‌ایم که برای کره‌هایی با قطر یکنواخت،  $D_p$  دقیقاً برابر با قطر کره است. از سه عبارت آخر نتیجه می‌شود که شعاع هیدرولیکی برابر است با:  $R_h = D_p \varepsilon / 6(1 - \varepsilon)$ . وقتی این عبارت را در معادله (۳-۴.۶) جایگزین کنیم، نتیجه می‌شود:

$$f = \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^2} \right) f_{\text{کره}} \quad (7-4.6)$$

اکنون با قرار دادن عبارت‌های مناسب برای  $f_{\text{کره}}$ ، این نتیجه را با جریان‌های آرام و متلاطم وفق می‌دهیم.

(الف) برای جریان آرام در لوله‌ها،  $16 / Re_h = f_{\text{کره}}$ . این نتیجه فقط برای لوله‌های مدور دقیق است. برای منظور کردن سطوح غیراستوانه‌ای و مسیرهای چنبره‌ای سیال، که در بهره‌برداری از ستون‌های پر شده با آن‌ها سروکار پیدا می‌کنیم، با قرار دادن  $100/3$  به جای ۱۶، مدل دسته‌لوله می‌تواند داده‌های ستون پر شده را توصیف کند. وقتی از این عبارت اصلاح شده برای ضریب اصطکاک استفاده کنیم، معادله (۷-۴.۶) چنین نوشته می‌شود:

$$f = \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^2} \frac{75}{(D_p G_0 / \mu)} \quad (8-4.6)$$

که در آن  $G_0 = \rho v_0$  شار جرم در سیستم است. وقتی این عبارت  $f$  را در معادله (۱-۴.۶) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{P_0 - P_L}{L} = 150 \left( \frac{\mu v_0}{D_p^2} \right) \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^2} \quad (9-4.6)$$

که معادله پلِیکدکوزنی<sup>۳</sup> است. معادله‌های (۸-۴.۶) و (۹-۴.۶) عموماً در وضعیت:

$$(D_p G_0 / \mu (1 - \varepsilon)) < 10$$

و برای کسرهای حفره کوچک‌تر از  $\varepsilon = 0.5$  به کار می‌آیند.

3. F. C. Blake, *Trans. Amer. Inst. Chem. Engrs.*, **14**, 415-421 (1922); J. Kozeny, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa*, **136**, 271-306 (1927).



(ب) برای جریان‌های به شدت متلاطم از روشی شبیه روش بالا استفاده می‌شود. دوباره کار را با عبارت ضریب اصطکاک برای جریان در لولهٔ مدور شروع می‌کنیم. اما این بار به این نکته توجه می‌کنیم که برای جریان‌های به شدت متلاطم در لوله‌هایی با زبری درخور اعتنا، ضریب اصطکاک فقط تابع زبری است و از عدد رینولدز مستقل است. اگر فرض کنیم که در همهٔ ستون‌های پر شده، مشخصه‌های زبری لوله‌ها همانند است، آنگاه مقدار لوله  $f$  را می‌توان برای همهٔ سیستم‌ها ثابت گرفت. استفاده از  $\gamma/12 = f$  لوله انتخاب قابل قبولی است. وقتی این مقدار را در معادلهٔ (۷-۴.۶) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$f = \frac{\gamma}{8} \left( \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \right) \quad (10-4.6)$$

هنگامی که این مقدار را در معادلهٔ (۱-۴.۶) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{P_0 - P_L}{L} = \frac{\gamma}{4} \left( \frac{\rho v^2}{D_p} \right) \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \quad (11-4.6)$$

که معادلهٔ برگ-پلامر<sup>۴</sup> است و در شرایط  $(D_p G_0 / \mu(1 - \varepsilon)) > 1000$  اعتبار دارد. توجه کنید که در این حالت، وابستگی به کسر حفره، با وابستگی در جریان آرام متفاوت است.

(ج) برای ناحیهٔ گذار، می‌توانیم آثار عبارت‌های افت فشار در حالت‌های (الف) و (ب) را باهم جمع کنیم تا نتیجه شود:

$$\frac{P_0 - P_L}{L} = 150 \left( \frac{\mu v_0}{D_p} \right) \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon^3} + \frac{\gamma}{4} \left( \frac{\rho v^2}{D_p} \right) \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \quad (12-4.6)$$

وقتی  $v_0$  خیلی کوچک باشد، این معادله به معادلهٔ بلیک - کوزنی، و به‌ازای مقادیر خیلی بزرگ  $v_0$  به معادلهٔ برگ - پلامر ساده می‌شود. این نوع جمع آثار تجربی مجانب‌ها غالباً به نتایج رضایت‌بخشی منتهی می‌شود. معادلهٔ (۱۲-۴.۶) را می‌توان طوری مرتب کرد که گروه‌های بدون بُعد تشکیل شود:

$$\left( \frac{(P_0 - P_L)\rho}{G_0^2} \right) \left( \frac{D_p}{L} \right) \left( \frac{\varepsilon^3}{1 - \varepsilon} \right) = 150 \left( \frac{1 - \varepsilon}{D_p G_0 / \mu} \right) + \frac{\gamma}{4} \quad (13-4.6)$$

این معادلهٔ ارگون<sup>۵</sup> است که در شکل ۲-۴.۶، همراه با معادله‌های بلیک - کوزنی و برگ - پلامر، و داده‌های تجربی نشان داده شده است. این معادله را با موفقیت در مورد جریان گاز در ستون‌های پر شده به‌کار برده‌اند؛ در این کاربرد از چگالی  $\bar{\rho}$  گاز در میانگین حسابی فشارهای نهایی استفاده کرده‌اند. توجه کنید که  $G_0$  در سرتاسر ستون ثابت است، اما برای سیال تراکم‌پذیر،  $v_0$  در نقاط مختلف ستون متفاوت است. هرگاه افت فشار زیاد باشد، به نظر می‌رسد بهتر است با بیان گرادیان فشار به صورت دیفرانسیلی، معادلهٔ (۱۲-۴.۶) را به‌طور موضعی به‌کار ببریم.

معادلهٔ ارگون صرفاً یکی از معادله‌های بسیاری<sup>۶</sup> است که برای توصیف ستون‌های پر شده پیشنهاد شده‌اند. مثلاً گزارش داده شده است که معادلهٔ تلمیچ<sup>۷</sup>:

$$\left( \frac{(P_0 - P_L)\rho}{G_0^2} \right) \left( \frac{D_p}{L} \right) \left( \frac{\varepsilon^3}{1 - \varepsilon} \right) = 150 \left( \frac{1 - \varepsilon}{D_p G_0 / \mu} \right) + 4/2 \left( \frac{1 - \varepsilon}{D_p G_0 / \mu} \right)^{1/6} \quad (14-4.6)$$

4. S. P. Burke and W. B. Plummer, *Ind. Eng. Chem.*, **20**, 1196-1200 (1928).

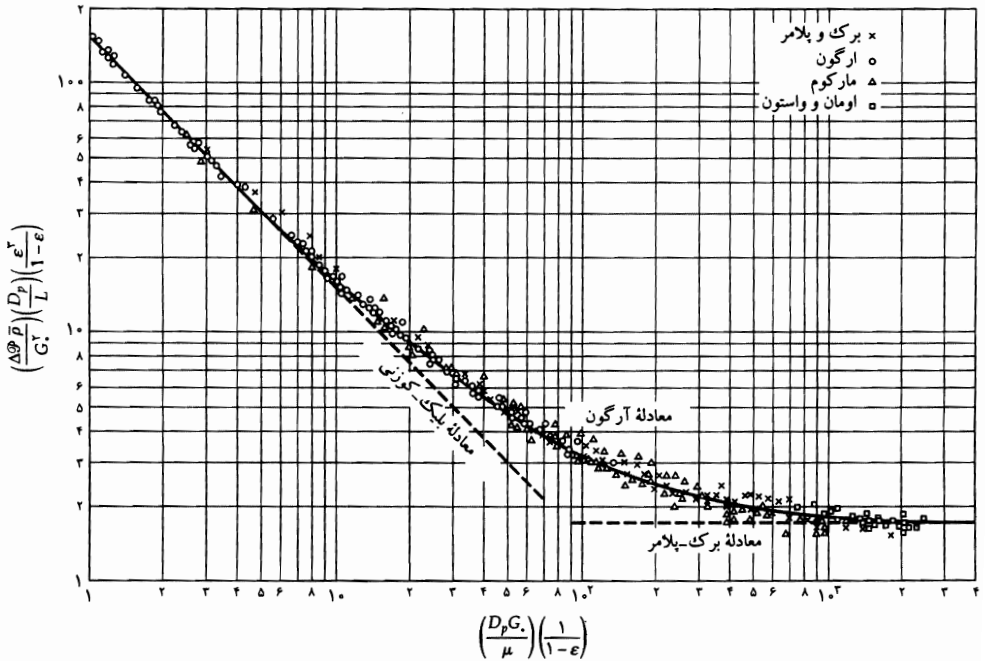
5. S. Ergun, *Chem. Engr. prog.*, **48**, 89-94 (1952).

6. I. F. Macdonald, M. S. El-sayed, K. Mow, and F. A. Dullien, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **18**, 199-208 (1979).

7. J.

A. Tallmadge, *AIChE Journal*, **16**, 1092-1093 (1970).

در گستره  $10^5 < (D_p G_0 / \mu)(1 - \epsilon) < 10^7$ ، توافق خوبی با داده‌های تجربی دارد.



شکل ۲-۴.۶ معادله آرگون برای جریان در بسترهای پر شده، و دو مجانب مربوط به آن، معادله بلیک-کوزنی و معادله برک-پلامر.

بحث فوق دربارهٔ بسترهای پر شده نشان می‌دهد که چگونه می‌توان جواب‌های مسئله‌های مقدماتی را باهم ترکیب کرد و مدل‌هایی سودمند برای سیستم‌های پیچیده به دست آورد. ثابت‌هایی که در این مدل‌ها پدیدار می‌شوند با استفاده از داده‌های تجربی تعیین خواهند شد. با در اختیار داشتن داده‌های بهتر، مدل‌سازی را نیز می‌توان بهبود بخشید.

#### پرسش‌های تشریحی

۱. چگونه می‌توان نمودارهای ضریب اصطکاک برحسب اعداد رینولدز را از داده‌های تجربی به دست آورد و چرا این نمودارها سودمندند؟
۲. منحنی‌های ضریب اصطکاک برای جریان در لوله‌ها و در اطراف کره‌ها را مقایسه کنید و تفاوت‌های آن‌ها را شرح دهید. چرا این منحنی‌ها شکل‌های متفاوتی دارند؟
۳. در شکل ۲-۴.۶، چرا منحنی  $f$  برحسب  $Re$  برای جریان متلاطم، بالاتر از منحنی مربوط به جریان آرام واقع می‌شود، نه پایین‌تر از آن؟
۴. دربارهٔ هشدار پس از معادله (۲.۶-۱۸) بحث کنید. آیا استفاده از شعاع هیدرولیکی میانگین برای جریان آرام، افت فشاری را پیش‌بینی می‌کند که در آهنگ جریان مفروض خیلی بالاست، یا خیلی پایین است؟
۵. آیا می‌توان از روابط همبستگی ضریب اصطکاک برای جریان‌های ناپایا استفاده کرد؟
۶. آیا بین معادله بلیک-کوزنی (معادله ۲.۶-۹) و قانون داریسی (معادله ۲.۳-۴) ارتباطی وجود دارد؟ اگر وجود دارد، آن را بیان کنید.

۷. درباره جریان آب در شیلنگ آبیاری ۱/۲ اینچی متصل به شیر آب خانگی با فشار ۷۰ psig بحث کنید.
۸. چرا معادله (۱۲-۴.۶) به صورت معادله (۱۳-۴.۶) بازنویسی می‌شود؟
۹. یک گزارش‌گر بیس‌بال می‌گوید: «امروز به دلیل رطوبت هوا، توپ بیس‌بال را نمی‌توان در هوای مرطوب سنگین به همان مسافتی پرتاب کرد که در هوای خشک پرتاب می‌شود.» نظر این گزارش‌گر را نقد کنید.

### مسئله‌ها

۱. الف ۱. افت فشار لازم برای لوله با اتصالات. برای تلمبه‌زنی آب با دمای  $20^{\circ}\text{C}$  در لوله‌ای به قطر ۲۵ cm و طول ۱۲۳۴ m، با آهنگ  $1.97 \text{ m}^3/\text{s}$  چه افت فشاری لازم است؟ لوله همواره در یک تراز است و چهار زانوی استاندارد  $90^{\circ}$  و دو زانوی استاندارد  $45^{\circ}$  دارد. مقاومت زانوی استاندارد  $90^{\circ}$  تقریباً هم‌ارز با مقاومت لوله‌ای است که طول آن ۳۲ برابر قطرش باشد؛ برای زانوی  $45^{\circ}$  از ۱۵ برابر قطر استفاده کنید. (روش دیگر محاسبه افت در اتصالات در بخش ۵.۷ شرح داده شده است.)

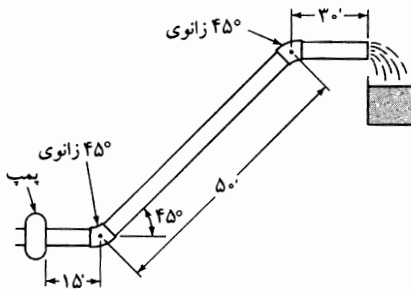
جواب:  $33 \text{ MPa} = 4.77 \times 10^3 \text{ psi}$ .

۲. الف ۲. اختلاف فشار لازم برای جریان در لوله با تراز متغیر (شکل ۲. الف). آب در دمای  $68^{\circ}\text{F}$  در لوله ۳ in. استاندارد به طول ۹۵ ft برای پر کردن منبع هوایی، تلمبه می‌شود (قطر داخلی لوله ۳.۶۸ in. است).

الف) فشار در خروجی پمپ چه قدر باشد تا آب‌رسانی به منبع هوایی با آهنگ  $18 \text{ gal}/\text{min}$  انجام شود؟ ویسکوزیته آب در دمای  $68^{\circ}\text{F}$  برابر است با  $1.002 \text{ cp}$  و چگالی آن  $9982 \text{ g}/\text{ml}$  است؛

ب) چه درصدی از افت فشار (خروجی پمپ تا منبع) برای غلبه بر اصطکاک لوله لازم است؟

جواب: الف)  $15.2 \text{ psig}$ .



شکل ۲. الف ۲. سیستم جریان در لوله.

۳. الف ۳. آهنگ جریان برای افت فشار مفروض. چند gal/hr آب با دمای  $68^{\circ}\text{F}$  را می‌توان در لوله‌ای جدارصاف، به طول ۱۳۲۰ ft و قطر داخلی ۶.۶۰ in. تحت اختلاف فشار  $25 \text{ psi}$  انتقال داد؟ فرض کنید لوله از لحاظ «هیدرولیکی هموار» است.

الف) این مسئله را با استفاده از روش (الف) مثال ۲-۲.۶ حل کنید.

ب) این مسئله را با استفاده از روش (ب) مثال ۲-۲.۶ حل کنید.

جواب:  $41 \times 10^3 \text{ gal}/\text{hr}$ .

۴الف حرکت کره در داخل مایع. کره‌ای توخالی، به قطر  $5/00 \text{ mm}$  و جرم  $0/0500 \text{ g}$  در ستونی از مایع رها می‌شود و به سرعت حدی  $0/500 \text{ cm/s}$  می‌رسد. چگالی مایع  $0/900 \text{ g/cm}^3$  است. شتاب گرانش محلی  $980/7 \text{ cm/sec}^2$  است. کره به اندازه کافی از جدارهای ظرف فاصله دارد، به طوری که می‌توان اثر آن‌ها را نادیده گرفت.

(الف) نیروی پسای وارد بر کره را برحسب  $\text{dyne}$  محاسبه کنید.

(ب) ضریب اصطکاک را محاسبه کنید.

(ج) ویسکوزیته مایع را تعیین کنید.

جواب‌ها: (الف)  $8/7 \text{ dynes}$ ; (ب)  $f = 396$ ; (ج)  $3/7 \text{ g/cm} \cdot \text{s}$ .

۵الف قطر کره برای رسیدن به سرعت حدی مفروض.

(الف) روش یافتن قطر کره،  $D$ ، متناظر با مقادیر مفروض  $v_\infty$ ،  $\rho$ ،  $\rho_s$ ،  $\mu$ ، و  $g$  را، با ترسیم مستقیم روی شکل ۱-۳.۶ شرح دهید.

(ب) مسئله ۲الف.۴ را با استفاده از شکل ۱-۳.۶ حل کنید.

(ج) بخش (ب) را درحالی حل کنید که سرعت گاز  $10 \text{ ft/s}$  باشد.

۶الف تخمین کسر حفره برای ستون پر شده. لوله‌ای با سطح مقطع  $146 \text{ in.}$  و ارتفاع  $73 \text{ in.}$  با ذرات کروی به قطر  $2 \text{ mm}$  پر می‌شود. وقتی اختلاف فشار  $158 \text{ psi}$  بین دو سر ستون برقرار باشد، محلول آبی  $60\%$  ساکاروز در دمای  $20^\circ \text{C}$ ، با آهنگ  $244 \text{ lb}_m/\text{min}$  از بستر می‌گذرد. در این دما، ویسکوزیته محلول  $56/5 \text{ cp}$  و چگالی آن  $1/2865 \text{ g/cm}^3$  است. مطلوب است تعیین کسر حفره بستر. در مورد مفید بودن این روش برای به دست آوردن کسر حفره بحث کنید.  
جواب:  $0/30$ .

۷الف تخمین افت فشار در جریان حلقوی. برای جریان در حلقه شکل گرفته توسط سطوح استوانه‌ای به قطرهای  $D$  و  $\kappa D$  ( $\kappa < 1$ )، ضرایب اصطکاک در حالت‌های آرام و متلاطم عبارت‌اند از:

$$f = \frac{16}{\text{Re}_\kappa} \quad \text{آرام} \quad (1-7 \text{ الف})$$

$$\sqrt{\frac{1}{f}} = G \log_{10}(\text{Re}_\kappa \sqrt{f}) - H \quad \text{متلاطم} \quad (2-7 \text{ الف})$$

که در آن عدد رینولدز با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Re}_\kappa = K \frac{D(1-\kappa)(\bar{v}_z)\rho}{\mu} \quad (3-7 \text{ الف})$$

معادله (۲-۷الف) بر مسئله ۲.ج.۵ مبتنی است و داده‌های تجربی را با خطای حدود  $3\%$ ، تا اعداد رینولدز  $20000$  تولید می‌کند.

(الف) نشان دهید که، برای جریان آرام شکل‌یافته، معادله‌های (۱-۷الف) و (۳-۷الف) با مقادیر جدول‌بندی شده  $K$ ، با معادله (۱۶-۴.۲) سازگارند؛

(ب) یک مجرای حلقوی از سطوح استوانه‌ای به قطرهای ۶ in. و ۱۵ in. تشکیل شده‌است. می‌خواهیم آب با دمای  $60^{\circ}\text{F}$  را با آهنگ  $1500$  فوت مکعب در ثانیه تلمبه کنیم. مطلوب است تعیین افت فشار لازم بر واحد طول مجرا، هرگاه حلقه افقی باشد. از معادله (الف-۷) استفاده کنید؛  
 (ج) بخش (ب) را با استفاده از رابطه تجربی «شعاع هیدرولیکی میانگین» دوباره حل کنید.

مقادیر  $G, H, K$  و به شرح جدول زیرند:<sup>۱</sup>

$\kappa$	$G$	$H$	$K$
۰٫۰۰	۴٫۰۰۰	۰٫۴۰۰	۱٫۰۰۰
۰٫۰۵	۳٫۷۴۷	۰٫۲۹۳	۰٫۷۴۱۹
۰٫۱۰	۳٫۷۳۶	۰٫۲۳۹	۰٫۷۱۶۱
۰٫۱۵	۳٫۷۳۸	۰٫۲۰۸	۰٫۷۰۲۱
۰٫۲۰	۳٫۷۴۶	۰٫۱۸۶	۰٫۶۹۳۰
۰٫۳۰	۳٫۷۷۱	۰٫۱۵۴	۰٫۶۸۲۰
۰٫۴۰	۳٫۸۰۱	۰٫۱۳۱	۰٫۶۷۵۷
۰٫۵۰	۳٫۸۳۳	۰٫۱۱۱	۰٫۶۷۱۹
۰٫۶۰	۳٫۸۶۶	۰٫۰۹۳	۰٫۶۶۹۵
۰٫۷۰	۳٫۹۰۰	۰٫۰۷۶	۰٫۶۶۸۱
۰٫۸۰	۳٫۹۳۳	۰٫۰۶۰	۰٫۶۶۷۲
۰٫۹۰	۳٫۹۶۷	۰٫۰۴۶	۰٫۶۶۶۸
۱٫۰۰	۴٫۰۰۰	۰٫۰۳۱	۰٫۶۶۶۷

الف-۸. نیروی وارد بر برج آب در هنگام وزش تندباد. برج آبی یک مخزن کروی به قطر  $40$  ft دارد. در هنگام وزش تندباد با سرعت  $100$  mph، نیرویی که باد در دمای  $0^{\circ}\text{C}$  بر مخزن وارد می‌کند، چه قدر است؟ چگالی هوا را، با برون‌یابی شکل ۱-۳.۶  $1.29 \text{ g/liter}$  یا  $8 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$  بگیرید، و فرض کنید ویسکوزیته  $17 \text{ cp}$  است. جواب:  $1.7 \times 10^4 \text{ lb}_f = 5.4 \times 10^5 \text{ poundals}$ .

الف-۹. جریان گاز در ستون پر شده. لوله‌ای افقی به قطر  $4$  in. و طول  $5.5$  ft با کره‌های شیشه‌ای به قطر  $1/16$  in. پر شده و کسر حفره  $41\%$  است. کربن دی‌اکسید را با دمای  $300$  K از لوله انتقال می‌دهند و می‌دانیم که ویسکوزیته آن در این دما برابر است با  $1.495 \times 10^{-4} \text{ g/cm} \cdot \text{s}$ . آهنگ جریان جرمی در این ستون چه قدر خواهد بود هرگاه فشارهای ورودی و خروجی، به ترتیب،  $25$  اتمسفر و  $3$  اتمسفر باشد؟ جواب:  $480 \text{ g/s}$ .

الف-۱۰. تعیین قطر لوله. مطلوب است تعیین اندازه لوله مناسب برای تولید آهنگ جریان  $250$  بشکه در هر دو هفته، هرگاه افت فشار  $3 \times 10^5$  اسکرول (g)  $(1.296)$  در هر بارلی کورن ( $5.8 \text{ mm}$ ) مربع باشد، لوله افقی است. (مؤلفان مرهون پروفیسور ار. اس. کرک از دانشگاه ماساچوست هستند که این واحدها را به آن‌ها معرفی کرد.)

ب-۱. اثر خطا در محاسبات ضریب اصطکاک. در محاسبه‌ای با استفاده از فرمول بلازیوس برای جریان متلاطم

1. D. M. Meter and R. B. Bird, *AIChE Journal*, 7, 41-45 (1961).

در لوله‌ها، عدد رینولدز مورد استفاده در حدود ۰.۴٪ پایین‌تر از مقدار واقعی بود. مطلوب است محاسبه خطای ایجاد شده در ضریب اصطکاک.

جواب: ۱٪ بالاتر از مقدار واقعی.

۲.۶. ضریب اصطکاک برای جریان روی صفحه تخت.<sup>۲</sup>

(الف) عبارتی برای نیروی پسای وارد بر صفحه تخت، که هر دو طرف آن خیس شده است، در معادله (۴.۴-۳) داده شده است. این معادله با استفاده از نظریه لایه مرزی آرام به دست آمده است و با داده‌های تجربی توافق خوبی دارد. ضریب اصطکاک و عدد رینولدز را تعریف کنید و رابطه  $f$  را بر حسب  $Re$  به دست آورید.

(ب) برای جریان متلاطم، براساس توزیع سرعت توانی  $\frac{1}{v}$ ، از تقریب لایه مرزی نتیجه می‌شود:

$$F_k = 0.072 \rho v_\infty^2 WL (Lv_\infty \rho / \mu)^{-1/5} \quad (1-2.6)$$

وقتی  $0.072$  را جایگزین  $0.072$  کنیم، این رابطه نیروی پسا را در محدوده خطای تجربی برای  $5 \times 10^5 < Lv_\infty \rho / \mu < 2 \times 10^7$  توصیف می‌کند. ضریب اصطکاک متناظر را به صورت تابعی از عدد رینولدز بیان کنید.

۳.۶ ضریب اصطکاک برای جریان آرام در شکاف. با استفاده از نتایج مسئله ۲.۳ نشان دهید که برای جریان آرام در شکاف نازکی به ضخامت  $2B$ ، ضریب اصطکاک  $f = 12/Re$  است، هرگاه عدد رینولدز به صورت  $Re = 2B \langle v_z \rangle \rho / \mu$  تعریف شود. این نتیجه را با نتیجه مربوط به  $f$  که می‌توان از رابطه تجربی شعاع هیدرولیکی میانگین به دست آورد، مقایسه کنید.

۴.۶ ضریب اصطکاک برای دیسک چرخان.<sup>۳</sup> دیسک استوانه‌ای چرخانی به شعاع  $R$  در مقدار زیادی سیال با چگالی  $\rho$  و ویسکوزیته  $\mu$  غوطه‌ور است. اگر گشتاور  $T_z$  برای چرخاندن دیسک با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  لازم باشد، آن‌گاه ضریب اصطکاک  $f$  را می‌توان به صورتی نظیر معادله (۱.۶-۱) تعریف کرد و داریم:

$$T_z / R = AKf \quad (1-4.6)$$

که در آن تعریف‌های منطقی  $K$  و  $A$  عبارت‌اند از  $K = \frac{1}{\rho} \rho (\Omega R)^2$  و  $A = 2(\pi R^2)$ . انتخابی مناسب برای عدد رینولدز در این سیستم عبارت است از:  $Re = R^2 \Omega \rho / \mu$ . برای جریان آرام، رابطه دقیق لایه مرزی چنین است:

$$T_z = 0.616 \pi \rho R^4 \sqrt{\mu \Omega^3 / \rho} \quad (2-4.6)$$

برای جریان متلاطم، رابطه تقریبی لایه مرزی براساس توزیع سرعت توانی  $\frac{1}{v}$  چنین است:

$$T_z = 0.073 \rho \Omega^2 R^5 \sqrt{\mu / R^2 \Omega \rho} \quad (3-4.6)$$

این نتایج را به صورت روابطی بین  $f$  و  $Re$  بیان کنید.

2. H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 7th edition (1979), Chapter XXI.

3. T. von kármán, *Zeits. für angew. math. u. Mech.*, 1, 233-252 (1921).

۵.۶ جریان متلاطم در لوله‌های افقی. سیالی با آهنگ جریان جرمی  $w$  در لوله‌ای افقی با جدار صاف، طول  $L$  و قطر  $D$ ، در نتیجه اختلاف فشار  $p_0 - p_L$  جاری است. می‌دانیم که جریان متلاطم است.

می‌خواهیم این لوله را با لوله‌ای به همان طول، اما با قطر  $D/2$  تعویض کنیم. همان سیال، با همان آهنگ جریان جرمی  $w$  از این لوله عبور خواهد کرد. چه اختلاف فشاری لازم است؟

(الف) از معادله (۱۲-۲.۶) به‌عنوان معادله‌ای مناسب برای ضریب اصطکاک استفاده کنید؛

(ب) هرگاه معادله (۱۲-۲.۶) مناسب نباشد، چگونه می‌توان این مسئله را با استفاده از شکل ۲-۶.۶ حل کرد؟

جواب: (الف) به اختلاف فشار ۲۷ برابر نیاز خواهد بود.

۶.۶ کافی نبودن شعاع هیدرولیکی میانگین برای جریان آرام.

(الف) برای جریان آرام در حلقه‌ای به شعاع‌های  $R$  و  $\kappa R$ ، با استفاده از معادله‌های (۱۷-۲.۶) و (۱۸-۲.۶)

عبارتی برای سرعت متوسط برحسب اختلاف فشار به‌دست آورید که نظیر عبارت دقیق ارائه‌شده

به‌صورت معادله (۱۶-۴.۲) باشد؛

(ب) به‌ازای  $\kappa = \frac{1}{4}$ ، درصد خطا در نتیجه قسمت (الف) چه قدر است؟

جواب: ۴۹٪.

۷.۶ سقوط کره در ناحیه قانون پسی نیوتون. کره‌ای که ابتدا در  $z = 0$  در حالت سکون است، تحت تأثیر وزن

خود سقوط می‌کند. شرایط به‌گونه‌ای است که، پس از فاصله زمانی قابل چشم‌پوشی، کره با نیروی مقاومی متناسب با مجذور سرعت سقوط می‌کند.

(الف) مطلوب است تعیین فاصله  $z$  که کره سقوط می‌کند، به‌صورت تابعی از  $t$ ؛

(ب) سرعت حدی کره چه قدر است؟ فرض کنید چگالی سیال از چگالی کره خیلی کم‌تر است.

جواب: (الف) فاصله برابر است با:  $z = (1/c^2 g) \ln \cosh cgt$ ، که در آن

$$c^2 = \frac{3}{8} (\rho / \rho_{\text{sph}}) (1/gR) \quad (\text{ب}) \quad 1/c$$

۸.۶ طراحی یک آزمایش برای نشان دادن درستی نمودار  $f$  برحسب  $\text{Re}$  برای کره. می‌خواهیم آزمایشی طراحی

کنیم و به‌کمک آن نمودار ضریب اصطکاک نشان داده‌شده در شکل ۱-۳.۶ را برای جریان دراطراف

کره بیازماییم. مخصوصاً می‌خواهیم مقدار ترسیم‌شده  $f = 1$  در  $\text{Re} = 10^5$  را امتحان کنیم. این کار

با انداختن کره‌های برنزی ( $\rho_{\text{sph}} = 8 \text{ g/cm}^3$ ) در آب ( $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ) در آب ( $\mu = 10^{-2} \text{ g/cm} \cdot \text{s}$ ) انجام

می‌شود. مطلوب است تعیین قطر لازم برای کره‌های برنزی.

(الف) فرمولی به‌دست آورید که قطر لازم را به‌صورت تابعی از  $f$ ،  $\text{Re}$ ،  $g$ ،  $\mu$ ،  $\rho$ ، و  $\rho_{\text{sph}}$  در شرایط سرعت

حدی نشان دهد؛

(ب) مقدرهای عددی در این رابطه قرار دهید و مقدار قطر کره را بیابید.

$$D = \sqrt{\frac{3f \text{Re}^2 \mu^2}{4(\rho_{\text{sph}} - \rho) \rho g}} \quad (\text{الف}) \quad \text{جواب‌ها:}$$

$$D = 0.1048 \text{ cm} \quad (\text{ب})$$

۹.۶.۹ ضریب اصطکاک برای جریان گذرنده از کنار استوانه‌ای نامتناهی<sup>۴</sup> جریان گذرنده از کنار استوانه‌ای طویل، با جریان گذرنده از کنار کره بسیار متفاوت است و نمی‌توان از روش معرفی‌شده در بخش ۲.۴ برای توصیف این سیستم استفاده کرد. می‌دانیم که وقتی سیال با سرعت  $v_\infty$  نزدیک می‌شود، نیروی جنبشی وارد بر طول  $L$  از استوانه برابر است با:

$$F_k = \frac{4\pi\mu v_\infty L}{\ln(4/Re)} \quad (۹.۶.۱)$$

در این جا عدد رینولدز به صورت  $Re = Dv_\infty\rho/\mu$  تعریف می‌شود. معادله (۹.۶.۱) فقط تا حدود  $Re = ۱$  معتبر است. مطلوب است تعیین فرمول ضریب اصطکاک به صورت تابعی از عدد رینولدز در این گستره  $Re$ .

۹.۶.۱۰ مسیره‌های ذرهٔ دو بُعدی. کره‌ای به شعاع  $R$  به صورت افقی (در امتداد  $x$ ) و با سرعت بالا، به داخل هوای ساکن در بالای سطح زمین شلیک می‌شود. وقتی کره از وسیلهٔ شلیک خارج می‌شود، کره مشابهی را از همان ارتفاع نسبت به سطح زمین (در امتداد محور  $y$ ) رها می‌کنند تا سقوط کند.

(الف) معادله‌های دیفرانسیلی به دست آورید که بتوان با استفاده از آن‌ها مسیره‌های دو کره را محاسبه، و رفتار آن‌ها را مقایسه کرد. آثار اصطکاک سیال را در نظر بگیرید و فرض کنید می‌توان از ضریب اصطکاک حالت پایا استفاده کرد (این فرض «شبه حالت پایا» است).

(ب) کدام کره زودتر به زمین می‌رسد؟

(ج) اگر اعداد رینولدز در ناحیهٔ قانون استوکس بود، جواب قسمت (ب) تغییر نمی‌کرد؟

جواب‌ها: (الف)  $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{3}{8} \frac{v_x}{R} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} f \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{sph}}}$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{3}{8} \frac{v_y}{R} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} f \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{sph}}} + \left(1 - \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{sph}}}\right) g$$

که در آن  $f = f(Re)$  از شکل ۱-۳.۶ به دست می‌آید، و

$$Re = \frac{2R\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\rho_{\text{air}}}{\mu_{\text{air}}}$$

۹.۶.۲ آثار جدار برای کرهٔ در حال سقوط در استوانه. ۷-۵

(الف) آزمایش برای تعیین ضریب اصطکاک کره‌ها معمولاً در لوله‌های استوانه‌ای انجام می‌شود. با تحلیل ابعادی نشان دهید که، در چنین آزمایشی، ضریب اصطکاک کره رابطهٔ وابستگی زیر را خواهد داشت:

$$f = f(Re, R/R_{\text{cyl}}) \quad (۹.۶.۲)$$

در این جا  $Re = 2Rv_\infty\rho/\mu$ ، که در آن  $R$  شعاع کره،  $v_\infty$  سرعت حدی کره، و  $R_{\text{cyl}}$  شعاع داخلی استوانه است. در ناحیهٔ جریان خزشی، با آزمایش معلوم شده است که وابستگی  $f$  به  $R/R_{\text{cyl}}$  با

4. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967), pp. 244-246, 257-261.

برای آشنایی با جریان گذرنده از کنار استوانه‌های متناهی، نگاه کنید به

J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Martinus Nijhoff, The Hague (1983), pp. 227-230.



تصحیح لادنبرگ-فاکسن<sup>۵</sup> توصیف می‌شود، به طوری که:

$$f = \frac{24}{Re} \left( 1 + 2.1 \frac{R}{R_{cyl}} \right) \quad (2-2.6)$$

آثار جدار در مورد قطرک‌های درحال سقوط نیز مطالعه شده است.<sup>۶</sup>

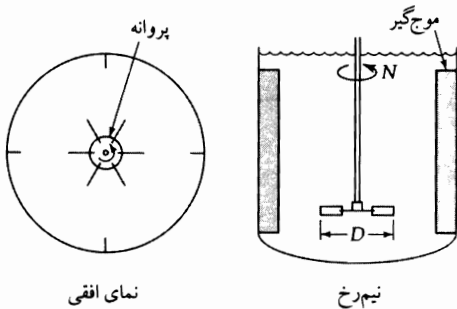
(ب) آزمایشی برای بررسی نمودار مربوط به کره در شکل ۱-۳.۶ طراحی کنید. اندازه کره، ابعاد استوانه، و مواد مناسب برای آزمایش را تعیین کنید.

۳.۶ ج توان ورودی به مخزن هم‌زده (شکل ۳.۶ ج). با تحلیل بُعدی نشان دهید که توان  $P$  که توسط پروانه چرخان به سیال تراکم‌ناپذیر داخل مخزن هم‌زده داده می‌شود، می‌تواند، برای هر نوع مخزن و پروانه، از رابطه زیر پیروی کند:

$$\frac{P}{\rho N^3 D^5} = \Phi \left( \frac{DrN\rho}{\mu}, \frac{DN^2}{g}, Nt \right) \quad (1-3.6)$$

که در آن  $N$  آهنگ چرخش پروانه،  $D$  قطر پروانه،  $t$  زمان سپری‌شده از آغاز عملیات، و  $\Phi$  تابعی است که شکل آن را باید با آزمایش تعیین کرد.

برای وضعیت هندسی متداول نشان‌داده‌شده در شکل، توان به صورت مجموع دو انتگرال نشان داده می‌شود که معرف سهم‌های پسای اصطکاکی بدنه و کف مخزن استوانه‌ای و پسای شکلی ناشی از موج‌گیرهای شعاعی‌اند.



شکل ۳.۶ ج مخزن هم‌زده با پروانه شش‌پره و چهار موج‌گیر عمودی.

$$P = NT_z = N \left( +\mu \int_S R(\partial v_\theta / \partial n)_{\text{surf}} dS + \int_A R p_{\text{surf}} dA \right) \quad (2-3.6)$$

در این جا  $T_z$  گشتاور لازم برای چرخاندن پروانه،  $S$  سطح کل مخزن،  $A$  سطح موج‌گیرها (در سمت «بالادست» مثبت و در سمت «پایین‌دست» منفی در نظر گرفته می‌شود)،  $R$  فاصله شعاعی هر جزء سطح  $dS$  یا  $dA$  تا محور چرخش پروانه، و  $n$  فاصله اندازه‌گیری شده در امتداد عمود بر سیال تا هر جزء سطح مخزن  $dS$  است. اکنون می‌توان جواب مطلوب را با تحلیل ابعادی معادله‌های حرکت و پیوستگی، از طریق بازنویسی انتگرال‌های بالا به صورت بدون بُعد، به دست آورد. در این جا بهتر است از  $DN$ ،  $D$ ، و  $\rho N^2 D^2$ ، به ترتیب، برای طول مشخصه، سرعت، و فشار استفاده کرد.

5. R. Ladenburg, *Ann. Physik* (4), **23**, 447 (1907); H. Faxén, dissertation, Uppsala (1921).

برای مطالعه شرح مفصلی در مورد آثار جدار برای کره‌های درحال سقوط، نگاه کنید به

J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Martinus Nijhoff, The Hague (1983).

6. J. R. Strom and R. C. Kintner, *AIChE Journal*, **4**, 153-156 (1958).

۱.۵۶ ضریب اصطکاک برای حبابی در مایع تمیز<sup>۸،۷</sup> وقتی حباب گازی در داخل مایع حرکت می‌کند، توده مایع طوری رفتار می‌کند که گویی درحالت جریان پتانسیل است؛ یعنی میدان جریان در فاز مایع، با دقت بسیار خوب، با معادله‌های (۲-۵.۴) و (۳-۵.۴) نشان داده می‌شود. نیروی پسا با اتلاف انرژی در فاز مایع رابطه نزدیک دارد (نگاه کنید به معادله (۱۸-۲.۴)).

$$F_k v_\infty = E_v \quad (1-1.56)$$

نشان دهید که برای جریان غیرچرخشی، عبارت کلی اتلاف انرژی را می‌توان به انتگرال روی سطح زیر تبدیل کرد:

$$E_v = \mu \int (\mathbf{n} \cdot \nabla v^2) dS \quad (2-1.56)$$

سپس نشان دهید که با قرار دادن توزیع سرعت جریان پتانسیل در معادله (۲-۱.۵۶)، و استفاده از معادله (۱-۱.۵۶)، نتیجه می‌شود:

$$f = \frac{4\lambda}{\text{Re}} \quad (3-1.56)$$

محاسبه پیشرفته‌تری که در آن اتلاف انرژی در لایه مرزی و در دنباله تلاطمی نیز منظور شده است، به نتیجه زیر منتهی می‌شود:<sup>۹</sup>

$$f = \frac{4\lambda}{\text{Re}} \left( 1 - \frac{2.2}{\sqrt{\text{Re}}} \right) \quad (4-1.56)$$

به نظر می‌رسد که این نتیجه تا عدد رینولدز حدود ۲۰۰ معتبر بماند.

7. L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford (1987), pp. 182-183.

8. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967), pp. 367-370.

9. D. W. Moore, *J. Fluid Mech.*, **16**, 161-176 (1963).

## فصل ۷

### موازنه‌های ماکروسکوپی سیستم‌های جریان هم‌دما

۱.۷ موازنه ماکروسکوپی جرم

۲.۷ موازنه ماکروسکوپی اندازه حرکت

۳.۷ موازنه ماکروسکوپی اندازه حرکت زاویه‌ای

۴.۷ موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی

۵.۷ تخمین اتلاف ویسکوز

۶.۷ استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت پایا

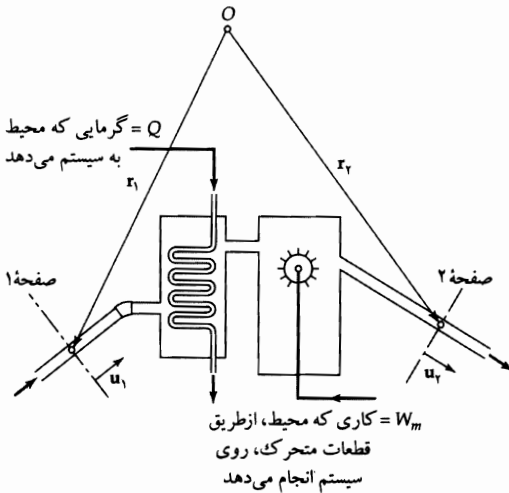
۷.۷<sup>۰</sup> استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت ناپایا

۸.۷<sup>\*</sup> استنتاج موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی

در چهار بخش نخست فصل ۳ معادله‌های تغییر برای سیستم‌های هم‌دما ارائه شد. این معادله‌ها با نوشتن قانون پایستگی روی یک «سیستم میکروسکوپی»، یعنی روی جزء حجم کوچکی که سیال در آن جریان دارد، به دست آمدند. به این ترتیب معادله‌های دیفرانسیل جزئی برای تغییرات جرم، اندازه حرکت، اندازه حرکت زاویه‌ای، و انرژی مکانیکی سیستم به دست آمد. سیستم میکروسکوپی سطوح کرانی جامد ندارد و برهم‌کنش‌های سیال با سطوح جامد در سیستم‌های جریان خاص، به کمک شرایط مرزی معادله‌های دیفرانسیل منظور می‌شود.

در این فصل قوانین پایستگی مشابهی برای «سیستم‌های ماکروسکوپی» می‌نویسیم؛ منظور از سیستم‌های ماکروسکوپی دستگاه‌های بزرگ یا بخش‌هایی از آنهاست. در شکل ۷-۱ نمونه‌ای از سیستم ماکروسکوپی نشان داده شده است. عبارت‌های موازنه مربوط به چنین سیستمی را موازنه ماکروسکوپی می‌نامند؛ برای سیستم‌های حالت ناپایا، این عبارت‌ها معادله‌های دیفرانسیل معمولی، و برای سیستم‌های حالت پایا، معادله‌های جبری‌اند.

موازنه‌های ماکروسکوپی شامل جمله‌هایی هستند که برهم‌کنش‌های سیال و سطوح جامد را به حساب می‌آورند. سیال می‌تواند نیروها و گشتاورهایی بر سطوح سیستم وارد کند و محیط اطراف سیال، از طریق سطوح متحرک، می‌تواند کار  $W_m$  روی آن انجام دهد.



شکل ۱-۵۰۷ سیستم جریان ماکروسکوپی که در آن سیال در صفحه ۱ وارد و در صفحه ۲ خارج می‌شود. شاید گرما دادن با آهنگ  $Q$  ضروری باشد تا دمای سیستم ثابت بماند. آهنگ انجام کار روی سیستم توسط محیط اطراف و به وسیله سطوح متحرک، برابر  $W_m$  است. نمادهای  $u_1$  و  $u_2$  بردارهای یکه در جهت جریان در صفحه‌های ۱ و ۲ را نشان می‌دهند. کمیت‌های  $r_1$  و  $r_2$  بردارهای مکان‌اند که محل مراکز صفحه‌های ورودی و خروجی را نسبت به مبدأ مختصات تعیین شده نشان می‌دهند.

موازنه‌های ماکروسکوپی را می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله‌های تغییر روی کل حجم سیستم جریان به‌دست آورد: ۲۰۱

$$dV = \text{جرم} \quad (معادلهٔ پیوستگی) \quad \int_V(t)$$

$$dV = \text{موازنهٔ ماکروسکوپی اندازه‌حرکت} \quad (معادلهٔ حرکت) \quad \int_V(t)$$

$$dV = \text{موازنهٔ ماکروسکوپی اندازه‌حرکت زاویه‌ای} \quad (معادلهٔ اندازه‌حرکت زاویه‌ای) \quad \int_V(t)$$

$$dV = \text{موازنهٔ ماکروسکوپی انرژی مکانیکی} \quad (معادلهٔ انرژی مکانیکی) \quad \int_V(t)$$

سه موازنهٔ ماکروسکوپی نخست را می‌توان با نوشتن مستقیم قانون‌های پایستگی برای سیستم ماکروسکوپی، یا با انتگرال‌گیری‌های بالا به‌دست آورد. اما برای به‌دست آوردن موازنهٔ ماکروسکوپی انرژی مکانیکی، باید از معادلهٔ متناظر تغییر روی سیستم ماکروسکوپی انتگرال گرفت.

در بخش‌های ۱.۷ تا ۳.۷ موازنه‌های ماکروسکوپی جرم، اندازه‌حرکت، و اندازه‌حرکت زاویه‌ای را با نوشتن قانون‌های پایستگی به‌دست می‌آوریم. در بخش ۴.۷ موازنهٔ ماکروسکوپی انرژی مکانیکی را ارائه می‌دهیم، اما جزئیات به‌دست آوردن آن را به بخش ۸.۷ موکول می‌کنیم. در موازنهٔ ماکروسکوپی انرژی مکانیکی، جمله‌ای موسوم به «اتلاف اصطکاکی» وجود دارد و بخش ۵.۷ به روش‌های تخمین زدن این کمیت اختصاص یافته‌است. سپس در بخش‌های ۶.۷ و ۷.۷، نحوهٔ استفاده از مجموعهٔ موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های جریان را نشان خواهیم داد. در بسیاری از شاخه‌های مهندسی از موازنه‌های ماکروسکوپی به‌گسترده‌گی استفاده شده‌است. این موازنه‌ها توصیف‌های کلی سیستم‌های بزرگ را، بدون توجه به جزئیات دینامیک سیالاتی درون سیستم، در اختیار ما قرار می‌دهند. این موازنه‌ها غالباً برای ارزیابی اولیهٔ مسئلهٔ مهندسی و تخمین مرتبهٔ بزرگی کمیت‌های مختلف به‌کار می‌آیند. گاهی از آن‌ها برای به‌دست آوردن روابط تقریبی استفاده می‌شود که می‌توان به‌کمک داده‌های تجربی برای جبران جمله‌های حذف‌شده یا جمله‌هایی که اطلاعات کافی دربارهٔ آن‌ها موجود نیست، به اصلاح آن‌ها همت گماشت. در کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی غالباً باید تصمیم گرفت که کدام جمله را می‌توان حذف کرد، یا کدام جمله‌ها

1. R. B. Bird, *Chem. Eng. Sci.*, **6**, 123-131 (1957); *Chem. Eng. Educ.*, **27**(2) 102-109 (Spring 1993).
2. J. C. Slattery and Gaggioli, *Chem. Eng. Sci.*, **17**, 893-895 (1962).

را باید تخمین زد. این کار مستلزم (۱) شهود مبتنی بر تجربه روی سیستم‌های مشابه؛ (۲) در اختیار داشتن داده‌های تجربی در مورد سیستم؛ (۳) بررسی‌های تجسم جریان؛ یا (۴) تخمین‌های مرتبه بزرگی است. وقتی به سراغ مثال‌های خاص برویم، این نکات روشن‌تر می‌شوند.

در موازنه‌های ماکروسکوپی تقریباً از همه موضوعاتی که تا این‌جا شرح داده شدند، استفاده می‌شود؛ بنابراین فصل ۷ فرصت خوبی برای مرور مطالب فصل‌های گذشته است.

### ۱.۷ موازنه ماکروسکوپی جرم

در سیستم نشان‌داده‌شده در شکل ۱-۰.۷، سیال در صفحه ۱ با سطح مقطع  $S_1$  وارد سیستم می‌شود و در صفحه ۲ با سطح مقطع  $S_2$  سیستم را ترک می‌کند. سرعت متوسط برابر است با  $\langle v_1 \rangle$  در صفحه ورودی و  $\langle v_2 \rangle$  در صفحه خروجی. در این بخش و در بخش‌های آینده، دو فرض را مطرح می‌کنیم که چندان محدودکننده نیستند: (۱) در صفحه‌های ۱ و ۲، سرعت هموار شده زمانی بر مقطع مربوط به خود عمود است؛ و (۲) در صفحه‌های ۱ و ۲، چگالی و سایر خواص فیزیکی روی مقطع یکنواخت‌اند. بنابراین قانون پایستگی جرم برای این سیستم چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt} m_{\text{tot}} = \rho_1 \langle v_1 \rangle S_1 - \rho_2 \langle v_2 \rangle S_2 \quad (1-1.7)$$

آهنگ افزایش جرم	آهنگ ورود جرم در صفحه ۱	آهنگ خروج جرم در صفحه ۲
-----------------------	-------------------------------	----------------------------

در رابطه بالا  $m_{\text{tot}} = \int \rho dV$  جرم کل سیال موجود در سیستم، بین صفحه‌های ۱ و ۲ است. اکنون نماد  $w = \rho \langle v \rangle S$  را برای آهنگ جریان جرمی، و مفهوم  $w_2 - w_1 = \Delta w$  (مقدار خروجی، منهای مقدار ورودی) را معرفی می‌کنیم. در این صورت موازنه ماکروسکوپی جرم حالت‌ناپایا چنین نوشته می‌شود:

$$\boxed{\frac{d}{dt} m_{\text{tot}} = -\Delta w} \quad (2-1.7)$$

اگر جرم کل سیال با زمان تغییر نکند، می‌توانیم موازنه ماکروسکوپی جرم حالت‌پایا را به دست آوریم:

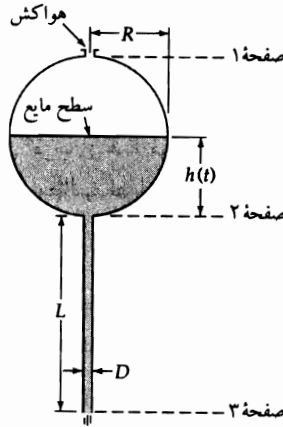
$$\Delta w = 0 \quad (3-1.7)$$

که همان عبارتی است که بنابه آن آهنگ ورود جرم با آهنگ خروج جرم برابر است. وقتی برای موازنه ماکروسکوپی جرم از اصطلاح «حالت‌پایا» استفاده می‌کنیم، منظورمان این است که مشتق زمانی سمت چپ معادله (۲-۱.۷) صفر است. در داخل سیستم، به علت احتمال وجود قطعات متحرک، ناپایداری‌های جریان، و تلاطم، ممکن است نواحی جریان ناپایا نیز وجود داشته باشند.

#### مثال ۱-۱.۷

##### تخلیه مخزن کروی

مخزنی کروی به شعاع  $R$  و لوله تخلیه آن به طول  $L$  و قطر  $D$  با روغن سنگین کاملاً پر شده است. در زمان  $t = 0$  شیر ته لوله تخلیه باز می‌شود. چه قدر طول می‌کشد تا مخزن خالی شود؟ در بالای مخزن کروی یک هواکش تعبیه شده است. از مقدار روغن چسبیده به سطح داخلی مخزن چشم‌پوشی کنید و فرض کنید جریان در لوله تخلیه، آرام است.



شکل ۱-۱.۷ مخزن کروی با لوله تخلیه.

حل

سه صفحه را در شکل ۱-۱.۷ نام‌گذاری می‌کنیم و فرض می‌کنیم سطح لحظه‌ای مایع در بالای صفحه ۲، در تراز  $h(t)$  باشد. در این صورت، در هر زمان  $t$ ، جرم کل مایع در کره برابر است با:

$$m_{\text{tot}} = \pi R h^2 \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{h}{R} \right) \rho \quad (4-1.7)$$

که می‌توان آن را با استفاده از حساب انتگرال به دست آورد. چون سیال از صفحه ۱ عبور نمی‌کند، می‌دانیم که  $w_1 = 0$ . آهنگ جریان جرمی خروجی،  $w_2$ ، که از فرمول هیگن-پوتازوی به دست می‌آید، عبارت است از:

$$w_2 = \frac{\pi(P_1 - P_2)D^2 \rho}{12\lambda\mu L} = \frac{\pi(\rho g h + \rho g L)D^2 \rho}{12\lambda\mu L} \quad (5-1.7)$$

فرمول هیگن-پوتازوی برای جریان حالت پایا به دست آمد، اما در این جا از آن استفاده می‌کنیم، زیرا حجم مایع در مخزن، به آهستگی با زمان تغییر می‌کند. این نمونه‌ای از تقریب «شبه حالت پایا» است. وقتی این عبارت‌های  $m_{\text{tot}}$  و  $w_2$  را در معادله (۲-۱.۷) قرار دهیم، پس از مرتب کردن جمله‌ها، نتیجه می‌شود:

$$-\frac{(2R-h)h}{h+L} \frac{dh}{dt} = \frac{\rho g D^2}{12\lambda\mu L} \quad (6-1.7)$$

حال ثابت سمت راست معادله را به اختصار  $A$  می‌نامیم. با تغییر متغیر  $H = h + L$  انتگرال‌گیری ساده‌تر خواهد شد، بنابراین:

$$\frac{[H - (2R + L)](H - L)}{H} \frac{dH}{dt} = A \quad (7-1.7)$$

حال از این معادله بین  $t = 0$  (وقتی  $h = 2R + L$  یا  $H = 2R + L$ )، و خروجی  $t = t$  (وقتی  $h = L$  یا  $H = L$ ) انتگرال می‌گیریم. در نتیجه زمان تخلیه به دست می‌آید:

$$t_{\text{خروجی}} = \frac{L^2}{A} \left[ 2\frac{R}{L} \left( 1 + \frac{R}{L} \right) - \left( 1 + 2\frac{R}{L} \right) \ln \left( 1 + 2\frac{R}{L} \right) \right] \quad (8-1.7)$$

که در آن  $A$  با سمت راست معادله (۶-۱.۷) نشان داده می‌شود. توجه کنید که این نتیجه را بدون تحلیل تفصیلی حرکت سیال در داخل کره به دست آوردیم.

## ۲.۷ موازنهٔ ماکروسکوپی اندازه حرکت

اکنون قانون پایستگی اندازه حرکت را در مورد سیستم شکل ۱-۷ به کار می‌بندیم و از همان دو فرض گفته شده در بخش قبل، به علاوهٔ دو فرض دیگر استفاده می‌کنیم که عبارت‌اند از: (۳) نیروهای مربوط به تانسور تنش  $\tau$  در صفحه‌های ۱ و ۲ نادیده گرفته می‌شوند، زیرا در مقایسه با نیروهای فشاری در صفحه‌های ورودی و خروجی، عموماً کوچک‌اند، و (۴) در صفحه‌های ورودی و خروجی، فشار در مقطع تغییر نمی‌کند.

چون اندازه حرکت کمیتی برداری است، هر جملهٔ این موازنه باید بردار باشد. از بردارهای یک‌گانه  $\mathbf{u}_1$  و  $\mathbf{u}_2$  برای نمایش جهت جریان در صفحه‌های ۱ و ۲ استفاده می‌کنیم. در نتیجه قانون پایستگی اندازه حرکت چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{tot}} = \rho_1 \langle v_1^2 \rangle S_1 \mathbf{u}_1 - \rho_2 \langle v_2^2 \rangle S_2 \mathbf{u}_2 + p_1 S_1 \mathbf{u}_1 - p_2 S_2 \mathbf{u}_2 + \mathbf{F}_{s \rightarrow f} + m_{\text{tot}} \mathbf{g} \quad (1-2.7)$$

نیروی گرانش	نیروی که	نیروی فشار	نیروی فشار	آهنگ خروج	آهنگ ورود	آهنگ
وارد بر سیال	سطح جامد	وارد بر سیال	وارد بر سیال	اندازه حرکت	اندازه حرکت	افزایش
بر سیال وارد	در صفحهٔ ۲	در صفحهٔ ۱	در صفحهٔ ۲	در صفحهٔ ۱	در صفحهٔ ۱	اندازه حرکت
						می‌کند

در این جا  $\mathbf{P}_{\text{tot}} = \int \rho \mathbf{v} dV$  کل اندازه حرکت در سیستم است. این معادله نشان می‌دهد که به علت همرفت اندازه حرکت به داخل و خارج سیستم، و به علت وجود نیروهای مختلف وارد بر سیستم، کل اندازه حرکت در داخل سیستم تغییر می‌کند؛ نیروهای وارد بر سیستم عبارت‌اند از: نیروهای فشاری در دو انتهای سیستم، نیرویی که سطوح جامد بر سیال وارد می‌کند، و نیروی گرانش وارد بر سیال داخل سیستم. اندیس « $s \rightarrow f$ » جهت نیرو را یادآوری می‌کند. با معرفی نمادهایی برای آهنگ جریان جرمی و نماد  $\Delta$ ، سرانجام موازنهٔ ماکروسکوپی اندازه حرکت حالت ناپایا را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{tot}} = -\Delta \left( \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} w + pS \right) \mathbf{u} + \mathbf{F}_{s \rightarrow f} + m_{\text{tot}} \mathbf{g} \quad (2-2.7)$$

اگر مقدار کل اندازه حرکت سیستم با زمان تغییر نکند، آنگاه موازنهٔ ماکروسکوپی اندازه حرکت حالت پایا به دست می‌آید:

$$\mathbf{F}_{f \rightarrow s} = -\Delta \left( \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} w + pS \right) \mathbf{u} + m_{\text{tot}} \mathbf{g} \quad (3-2.7)$$

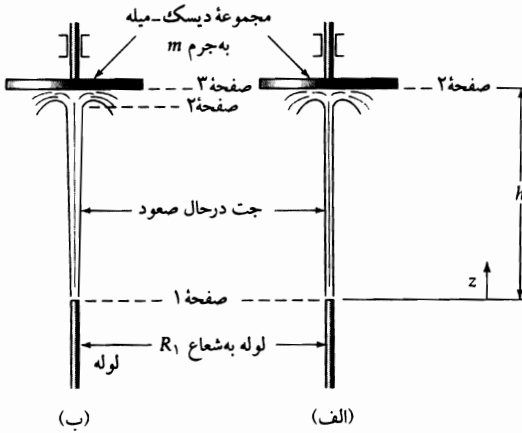
باردیگر تأکید می‌کنیم که این معادله‌ای برداری است. این معادله برای محاسبهٔ نیرویی که سیال بر سطوح جامد وارد می‌کند،  $\mathbf{F}_{f \rightarrow s}$ ، مانند نیروی وارد بر زانوی لوله یا تیغهٔ توربین، سودمند است. در واقع ما از روایت ساده شدهٔ معادلهٔ بالا، در معادلهٔ (۳-۱.۶) استفاده کردیم.

تذکراهایی در مورد جریان متلاطم: (۱) برای جریان متلاطم، متداول این است که  $\langle v \rangle$  را با  $\langle \bar{v} \rangle$  و  $\langle v^2 \rangle$  را با  $\langle \bar{v}^2 \rangle$  جایگزین کنیم؛ در عبارت اخیر از جملهٔ  $\langle \bar{v}^2 \rangle$  صرف نظر کردیم، زیرا این جمله معمولاً در مقایسه با  $\langle \bar{v}^2 \rangle$  کوچک است؛ (۲) سپس  $\langle \bar{v}^2 \rangle / \langle \bar{v} \rangle$  را با  $\langle \bar{v} \rangle$  جایگزین می‌کنیم. خطای ناشی از این جایگزینی‌ها نسبتاً کم است؛ برای توزیع سرعت تجربی قانون توان  $\frac{1}{4}$  که با معادلهٔ (۴-۱.۵) نشان داده شد،  $\langle \bar{v}^2 \rangle / \langle \bar{v} \rangle = \frac{5}{4} \langle \bar{v} \rangle$ ، بنابراین خطا در حدود ۲٪ است؛ (۳) وقتی این فرض را اختیار می‌کنیم، معمولاً کوشهٔ زاویه‌ای و خط بار را حذف می‌کنیم تا نمادگذاری ساده‌تر شود، یعنی فرض می‌کنیم  $v_1 \equiv \langle \bar{v}_1 \rangle$  و  $v_2^2 \equiv \langle \bar{v}_2^2 \rangle$ ؛ ساده‌سازی‌های مشابهی هم در مورد کمیت‌های صفحهٔ ۲ انجام می‌شود.

مثال ۱-۲.۷

نیروی وارد توسط جت (بخش الف)

جت متلاطمی از آب از لوله‌ای به شعاع  $R_1 = 2.5 \text{ cm}$  با سرعت  $v_1 = 6 \text{ m/s}$  مطابق شکل ۱-۲.۷ بیرون می‌آید. جت به مجموعه‌ای از دیسک و میله به جرم  $m = 5.5 \text{ kg}$  برخورد می‌کند که می‌تواند در امتداد عمودی آزادانه حرکت کند. از اصطکاک بین میله و بوش چشم‌پوشی می‌شود. مطلوب است تعیین ارتفاع  $h$  که در آن دیسک، در نتیجه فوران جت «شناور» می‌ماند.<sup>۱</sup> فرض کنید آب تراکم‌ناپذیر است.



شکل ۱-۲.۷ طرح‌های متناظر با دو جواب مسئله جت و دیسک. در (الف) فرض می‌شود جت آب شعاع یکنواخت  $R_1$  دارد. در (ب) پخش شدن جت نیز در نظر گرفته می‌شود.

حل

برای حل این مسئله باید رفتار جت را تجسم کرد. در شکل ۱-۲.۷ (الف) فرض می‌کنیم که شعاع جت، بین خروجی لوله و دیسک، ثابت و برابر  $R_1$  است، اما در شکل ۱-۲.۷ (ب) فرض می‌کنیم که جت کمی پخش شده است. در این مثال، فرض نخست را به کار می‌بندیم و در مثال ۱-۴.۷ پخش شدن جت را به حساب می‌آوریم.

مؤلفه  $z$  موازنه اندازه حرکت حالت پایا بین صفحه‌های ۱ و ۲ را به کار می‌بندیم. جمله فشار را می‌توان حذف کرد، زیرا فشار در هر دو صفحه با فشار جو برابر است. مؤلفه  $z$  سرعت سیال در صفحه ۲ صفر است. بنابراین موازنه اندازه حرکت چنین نوشته می‌شود:

$$mg = v_1(\rho v_1 \pi R_1^2) - (\pi R_1^2 h) \rho g \quad (4-2.7)$$

وقتی این معادله را بر حسب  $h$  حل کنیم، نتیجه می‌شود (با واحدهای SI):

$$h = \frac{v_1^2}{g} - \frac{m}{\rho \pi R_1^2} = \frac{(6)^2}{(9.807)} - \frac{5.5}{\pi(0.025)^2(1000)} = 0.87 \text{ m} \quad (5-2.7)$$

### ۳.۷ موازنه ماکروسکوپی اندازه حرکت زاویه‌ای

برای نوشتن موازنه ماکروسکوپی اندازه حرکت زاویه‌ای باید از روشی موازی با روش مورد استفاده در نوشتن موازنه اندازه حرکت (خطی) در بخش قبل استفاده کرد. فقط کافی است به جای «اندازه حرکت» از «اندازه حرکت زاویه‌ای» و به جای «نیرو» از «گشتاور» استفاده کنیم. برای توصیف اندازه حرکت زاویه‌ای و گشتاور، ناگزیر از انتخاب مبدأ

1. K. Federhofer, *Aufgaben aus der Hydromechanik*, Springer-Verlag, Vienna (1954), pp. 36 and 172.



مختصاتی هستیم که این کمیت‌ها نسبت به آن ارزیابی می‌شوند. در شکل ۱-۰.۷ مبدأ مختصات با حرف «O» مشخص شده‌است، و محل مرکز صفحه‌های ۱ و ۲ نسبت به این مبدأ با بردارهای مکان  $\mathbf{r}_1$  و  $\mathbf{r}_2$  مشخص می‌شود. باردیگر فرض‌های (۱) تا (۴) معرفی شده در بخش‌های ۱.۷ و ۲.۷ را اختیار می‌کنیم. با این فرض‌ها، آهنگ ورود اندازه‌حرکت زاویه‌ای در صفحهٔ ۱، که عبارت است از:  $\int [\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}] (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) dS$  که در آن صفحه محاسبه شود، برابر می‌شود با  $\rho_1 \langle v_1^2 \rangle S_1 [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1]$ ، همراه با عبارت مشابهی برای آهنگ خروج اندازه‌حرکت زاویه‌ای از سیستم در صفحهٔ ۲.

اکنون می‌توان موازنهٔ ماکروسکوپی اندازه‌حرکت زاویه‌ای حالت‌ناپایا را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{\text{tot}} = \rho_1 \langle v_1^2 \rangle S_1 [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1] - \rho_2 \langle v_2^2 \rangle S_2 [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2]$$

آهنگ افزایش اندازه‌حرکت زاویه‌ای	آهنگ ورود اندازه‌حرکت زاویه‌ای در صفحهٔ ۱	آهنگ خروج اندازه‌حرکت زاویه‌ای در صفحهٔ ۲
-------------------------------------	--	--

$$+ p_1 S_1 [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1] - p_2 S_2 [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2] + \mathbf{T}_{s \rightarrow f} + \mathbf{T}_{\text{ext}} \quad (۱-۳.۷)$$

گشتاور ناشی از فشار وارد بر سیال در صفحهٔ ۱	گشتاور ناشی از فشار وارد بر سیال در صفحهٔ ۲	گشتاوری که سطح جامد بر سیال وارد می‌کند
--	--	--

در این جا  $\mathbf{L}_{\text{tot}} = \int \rho [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] dV$  اندازه‌حرکت زاویه‌ای کل در داخل سیستم است  $\mathbf{T}_{\text{ext}} = \int [\mathbf{r} \times \rho \mathbf{g}] dV$  گشتاوری است که بر اثر نیروی گرانش بر سیال داخل سیستم وارد می‌شود. این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{\text{tot}} = -\Delta \left( \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} w + pS \right) [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] + \mathbf{T}_{s \rightarrow f} + \mathbf{T}_{\text{ext}} \quad (۲-۳.۷)$$

سرانجام، موازنهٔ ماکروسکوپی اندازه‌حرکت زاویه‌ای حالت‌پایا عبارت است از:

$$\mathbf{T}_{f \rightarrow s} = -\Delta \left( \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} w + pS \right) [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] + \mathbf{T}_{\text{ext}} \quad (۳-۳.۷)$$

گشتاوری که سیال بر سطوح جامد وارد می‌کند، از عبارت بالا به دست می‌آید.

### مثال ۱-۳.۷

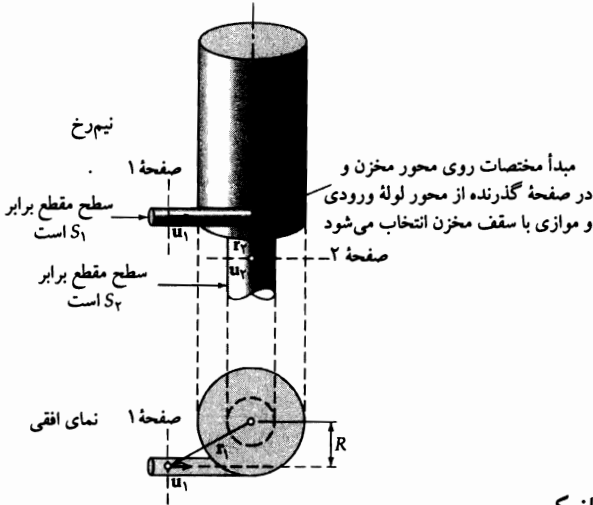
گشتاور وارد بر مخزن اختلاط از یک مخزن اختلاط، مطابق شکل ۱-۳.۷، در حالت‌پایا بهره‌برداری می‌شود. سیال درامتداد مماسی، با جریان متلاطم و سرعت  $v_1$  در صفحهٔ ۱ وارد می‌شود و با سرعت  $v_2$  از طریق لولهٔ عمودی بیرون می‌رود. چون مخزن موج‌گیر دارد، در محل لولهٔ خروجی عمودی، حرکت گردابی در سیال ایجاد نمی‌شود. مطلوب است تعیین گشتاور وارد بر مخزن اختلاط.

حل

مبدأ دستگاه مختصات را روی محور مخزن و در صفحهٔ گذرنده از محور لولهٔ ورودی، موازی با سقف مخزن، انتخاب می‌کنیم. بردار  $[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_2]$  برداری درامتداد  $z$ ، با اندازهٔ  $R$  است. به علاوه  $[\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2] = 0$ ، زیرا دو بردار هم‌خط‌اند. در این مسئله از معادلهٔ (۳-۳.۷) نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{T}_{f \rightarrow s} = (\rho v_1^2 S_1 + p_1 S_1) R \delta_z \quad (۴-۳.۷)$$

بنابراین، همان‌طور که انتظار می‌رفت، گشتاور صرفاً «نیرو × بازوی اهرم» است. اگر گشتاور خیلی بزرگ باشد، دستگاه را باید مهاربندی کرد تا در برابر گشتاور تولیدشده توسط حرکت سیال و فشار ورودی پایداری کند.



شکل ۱-۳.۷ گشتاور وارد بر مخزنی که نمای افقی و نیم‌رخ آن نشان داده شده‌است.

#### ۴.۷ موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی

معادله‌های (۲-۱.۷)، (۲-۲.۷) و (۲-۳.۷) را با کاربرد قوانین پایستگی جرم، اندازه حرکت (خطی)، و اندازه حرکت زاویه‌ای در مورد سیستم ماکروسکوپی شکل (۱-۰.۷) به دست آوردیم. سه موازنه ماکروسکوپی که به این ترتیب حاصل شد، با معادله‌های تغییر، یعنی معادله‌های (۴-۱.۳)، (۹-۲.۳)، و (۱-۴.۳) متناظرند و در حقیقت ساختاری بسیار شبیه به هم دارند. با انتگرال‌گیری از سه معادله تغییر، روی حجم سیستم جریان نیز می‌توان این سه موازنه ماکروسکوپی را به دست آورد. حال می‌خواهیم موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی را بنویسیم که با معادله انرژی مکانیکی، یعنی معادله (۲-۳.۳) متناظر است. راه مستقیمی برای انجام این کار، به صورتی که در سه بخش گذشته انجام دادیم، وجود ندارد، زیرا قانون پایستگی انرژی مکانیکی نداریم. در این صورت باید از معادله تغییر انرژی مکانیکی روی حجم سیستم سیال انتگرال بگیریم. نتیجه، که بر همان فرض‌های (۱) تا (۴) مبتنی است، موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی حالت ناپایا است (گاهی معادله مهندسی برنولی نامیده می‌شود). این معادله را در بخش ۸.۷ به دست می‌آوریم؛ در این‌جا نتیجه آن را ارائه و درباره مفهوم آن بحث می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt}(K_{tot} + \Phi_{tot}) = \left(\frac{1}{\rho} \rho_1 \langle v_1^2 \rangle + \rho_1 \hat{\Phi}_1 \langle v_1 \rangle\right) S_1 - \left(\frac{1}{\rho} \rho_2 \langle v_2^2 \rangle + \rho_2 \hat{\Phi}_2 \langle v_2 \rangle\right) S_2$$

آهنگ خروج انرژی جنبشی و پتانسیل از سیستم در صفحه ۲  
 آهنگ ورود انرژی جنبشی و پتانسیل به سیستم در صفحه ۱  
 آهنگ افزایش انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم

$$+(p_1 \langle v_1 \rangle S_1 - p_2 \langle v_2 \rangle S_2) + W_m + \int V(t) p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV + \int V(t) (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) dV \quad (1-4.7)$$

آهنگ کاهش انرژی مکانیکی به علت اتلاف ویسکوز  
 آهنگ افزایش یا کاهش انرژی مکانیکی، بر اثر انبساط یا انقباض سیال  
 آهنگ انجام کار روی سیال توسط سطوح متحرک  
 آهنگ خالص انجام کار توسط محیط و از طریق فشار روی سیال در صفحه‌های ۱ و ۲

۱. این تفسیر از جمله فوق فقط برای سیالات نیوتونی معتبر است؛ مایعات پلیمری کشسان‌اند و این تفسیر در مورد آن‌ها صادق نیست.

در این جا  $K_{tot} = \int \frac{1}{2} \rho v^2 dV$  و  $\Phi_{tot} = \int \hat{\Phi} dV$ ، به ترتیب، انرژی جنبشی و پتانسیل کل در داخل سیستم اند. طبق معادله (۱-۴.۷)، انرژی مکانیکی کل (یعنی انرژی جنبشی به علاوه پتانسیل)، به سبب اختلاف در آهنگ‌های اضافه شدن و حذف انرژی مکانیکی، به علت کار انجام شده روی سیال توسط محیط اطراف، و به سبب آثار تراکم پذیری و اتلاف ویسکوز، تغییر می‌کند. توجه کنید که، در ورودی سیستم (صفحه ۱)، نیروی  $p_1 S_1$  ضرب در سرعت  $\langle v_1 \rangle$  برابر است با آهنگ انجام کار توسط محیط روی سیال. به علاوه،  $W_m$  کاری است که توسط محیط اطراف و از طریق سطوح متحرک، روی سیال انجام می‌شود.

اکنون می‌توان موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی را به صورت فشرده‌تری نوشت:

$$\frac{d}{dt}(K_{tot} + \Phi_{tot}) = -\Delta \left( \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle + \hat{\Phi} + \frac{p}{\rho} \right) w + W_m - E_c - E_v \quad (2-4.7)$$

که در آن جمله‌های  $E_c$  و  $E_v$  چنین تعریف می‌شوند:

$$E_c = - \int_{V(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV \quad \text{و} \quad E_v = - \int_{V(t)} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) dV \quad (4, 3-4.7)$$

جمله تراکم  $E_c$  در تراکم مثبت و در انبساط منفی است؛ وقتی سیال تراکم‌ناپذیر فرض می‌شود، این جمله صفر خواهد بود. جمله  $E_v$  جمله اتلاف ویسکوز (یا اتلاف اصطکاکی) است که، چنان‌که با توجه به معادله (۳-۳.۳) می‌توان دید، برای مایعات نیوتونی همیشه مثبت است. (برای سیالات پلیمری، که ویسکوکشسان اند،  $E_v$  لزوماً مثبت نیست؛ این سیالات را در فصل بعد بررسی می‌کنیم.)

اگر کل انرژی جنبشی به علاوه انرژی پتانسیل سیستم با زمان تغییر نکند، داریم:

$$\Delta \left( \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle + gh + \frac{p}{\rho} \right) w = W_m - E_c - E_v \quad (5-4.7)$$

که موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی حالت پایاست. در این جا  $h$  ارتفاع نسبت به صفحه مبنای اختیاری است. حال اگر فرض کنیم که می‌توان خط جریان نمونه‌ای از درون سیستم کشید، می‌توانیم جمله‌های  $\Delta(p/\rho)$  و  $E_c$  را ترکیب کنیم تا رابطه تقریبی زیر حاصل شود: (بخش ۸.۷ را ببینید).

$$\Delta \left( \frac{p}{\rho} \right) w + E_c \approx w \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp \quad (6-4.7)$$

بنابراین، بعد از تقسیم معادله (۵-۴.۷) بر  $w$ ،  $w_1 = w_2 = w$ ، نتیجه می‌شود:

$$\Delta \left( \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle \right) + g\Delta h + \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp = \hat{W}_m - \hat{E}_v \quad (7-4.7)$$

در این جا  $\hat{W}_m = W_m/w$  و  $\hat{E}_v = E_v/w$  معادله (۷-۴.۷) روایت حالت پایای موازنه انرژی مکانیکی است که غالباً به کار می‌رود. در سیستم‌های هم‌دما، جمله انتگرال را می‌توان محاسبه کرد، به شرط آن‌که چگالی را به صورت تابعی از فشار داشته باشیم.

اکنون باید معادله (۷-۴.۷) را با معادله (۱۲-۵.۳) مقایسه کنیم که معادله «کلاسیک» برنولی برای سیال غیرویسکوز است. اگر در سمت راست معادله (۱۲-۵.۳)  $\bar{W}_m$ ، کار انجام‌شده توسط محیط را اضافه و جمله اتلاف ویسکوز،  $E_v$ ، را کسر کنیم و سرعت‌ها را به صورت متوسط‌های مناسب در سطح مقطع تفسیر کنیم، آنگاه معادله (۷-۴.۷) را به دست می‌آوریم. به این ترتیب «استدلال قابل قبول بودن» برای معادله (۷-۴.۷) ارائه می‌شود و ایده بنیادی به دست آوردن موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی از معادله حرکت (یعنی از قانون پایستگی اندازه حرکت) نیز محفوظ می‌ماند. کسانی که به جزئیات فرایند نوشتن موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی علاقه دارند، باید بخش ۸.۷ را مطالعه کنند.

چند تذکره در مورد جریان متلاطم: (۱) برای جریان متلاطم،  $\langle \bar{v}^3 \rangle$  را جایگزین  $\langle v^3 \rangle$  می‌کنیم و سهم ناشی از نوسانات تلاطمی را نادیده می‌گیریم؛ (۲) روش متداول جایگزین کردن نسبت  $\langle \bar{v}^3 \rangle / \langle \bar{v} \rangle$  توسط  $\langle \bar{v}^2 \rangle$  است. برای توزیع سرعت تجربی قانون توان  $\frac{1}{4}$  در معادله (۴-۱.۵)، می‌توان نشان داد که  $\langle \bar{v}^3 \rangle / \langle \bar{v} \rangle = \frac{43200}{40817} \langle \bar{v} \rangle^2$ ؛ بنابراین خطا به حدود ۰.۶٪ می‌رسد؛ (۳) هم‌چنین، در جریان متلاطم، کروه‌ها، و خط بارها را حذف می‌کنیم تا نمادگذاری ساده‌تر شود.

### مثال ۱-۴.۷

نیروی واردشده توسط جت (بخش ب)

مسئله مطرح‌شده در مثال ۱-۲.۷ را، با در نظر گرفتن پخش شدن جت در حین حرکت به طرف بالا، ادامه دهید.

حل

فرض می‌کنیم با افزایش  $z$ ، مطابق شکل ۱-۲.۷ (ب) قطر جت افزایش یابد. به آسانی می‌توان با این سه صفحه کار کرد و بین هر جفت صفحه موازنه برقرار کرد. فاصله بین صفحه‌های ۲ و ۳ را نسبتاً کوچک می‌گیریم. از موازنه جرم بین صفحه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$w_1 = w_2 \quad (۸-۴.۷)$$

سیس موازنه انرژی مکانیکی را، با استفاده از معادله (۵-۴.۷) یا (۷-۴.۷)، بین همان دو صفحه می‌نویسیم. فشار در صفحه‌های ۱ و ۲ با فشار جو برابر است و قطعات متحرک کار  $\bar{W}_m$  انجام نمی‌دهند. فرض می‌کنیم که جمله اتلاف ویسکوز،  $E_v$ ، را می‌توان نادیده گرفت. اگر  $z$  از خروجی لوله به طرف بالا اندازه‌گیری شود، آنگاه  $g\Delta h = g(h_2 - h_1) \approx g(h - 0)$  زیرا صفحه‌های ۲ و ۳ خیلی به هم نزدیک‌اند. بنابراین از موازنه انرژی مکانیکی نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{4}(v_1^2 - v_2^2) + gh = 0 \quad (۹-۴.۷)$$

اکنون از موازنه اندازه حرکت  $z$  بین صفحه‌های ۲ و ۳ استفاده می‌کنیم. چون این ناحیه بسیار کوچک است، از جمله آخر معادله (۳-۲.۷) چشم‌پوشی می‌کنیم. هردو صفحه در فشار جو قرار دارند، بنابراین جمله‌های فشار سهمی ندارند. سرعت سیال در صفحه ۳ صفر است، در نتیجه فقط دو جمله در موازنه اندازه حرکت باقی می‌ماند:

$$mg = v_2 w_2 \quad (۱۰-۴.۷)$$

از سه معادله بالا نتیجه می‌شود:

$$h = \frac{v_1^2}{2g} \left( 1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right) \quad (۹-۴.۷) \text{ از معادله}$$

$$= \frac{v_1^2}{2g} \left( 1 - \frac{(mg/w_2)^2}{v_1^2} \right) \quad (۱۰-۴.۷) \text{ از معادله}$$

$$= \frac{v_1^2}{2g} \left( 1 - \left( \frac{mg}{v_1 w_1} \right)^2 \right) \quad (\text{از معادله } ۸-۴.۷) \quad (۱۱-۴.۷)$$

که در آن  $mg = \pi R_1^2 \rho v_1^2$  و  $v_1 w_1 = \pi R_1^2 \rho v_1^2$  معلوم‌اند. وقتی مقادیر عددی در معادله (۱۱-۴.۷) قرار داده شوند، نتیجه می‌شود  $h = ۰.۷۷ \text{ m}$ . احتمالاً این نتیجه، از مقدار  $۰.۸۷ \text{ m}$  که در مثال ۱-۲.۷ به دست آمد بهتر است، زیرا پخش شدن جت در آن منظور شده است. اما چسبیدن آب به دیسک را، که سبب می‌شود جرم مؤثر مجموعه دیسک-میله افزایش یابد، در نظر نگرفتیم. به علاوه، مقاومت اصطکاکی میله در بوش نیز نادیده گرفته شده است. باید آزمایشی انجام دهیم تا اعتبار معادله (۱۱-۴.۷) ارزیابی شود.

## ۵.۷ تخمین اتلاف ویسکوز

این بخش به روش‌های تخمین اتلاف ویسکوز (یا اتلاف اصطکاکی)،  $E_v$ ، اختصاص دارد که در موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی پدیدار می‌شود. عبارت کلی  $E_v$  در معادله (۴-۴.۷) ارائه شد. برای سیال‌های نیوتونی، می‌توان از معادله (۳-۳.۳) استفاده کرد و  $E_v$  را به صورت زیر نوشت:

$$E_v = \int \mu \Phi_v dV \quad (۱۵-۵.۷)$$

که نشان می‌دهد این عبارت انتگرال آهنگ موضعی اتلاف ویسکوز روی حجم کل سیستم جریان است. اکنون می‌خواهیم  $E_v$  را از دیدگاه تحلیل ابعادی بررسی کنیم. کمیت  $\Phi_v$  مجموع مربعات گرادیان‌های سرعت است؛ بنابراین ابعاد  $(v_0/l_0)^2$  دارد، در حالی که  $v_0$  و  $l_0$ ، به ترتیب، سرعت و طول مشخصه‌اند. پس می‌توان نوشت:

$$E_v = (\rho v_0^3 l_0^3) (\mu/l_0 v_0 \rho) \int \check{\Phi}_v d\check{V} \quad (۲-۵.۷)$$

که در آن  $\check{\Phi}_v = (l_0/v_0)^2 \Phi_v$  و  $d\check{V} = l_0^{-3} dV$  کمیت‌های بدون بُعدند. اگر از استدلال‌های ابعادی بخش‌های ۷.۳ و ۲.۶ استفاده کنیم، مشاهده می‌کنیم که انتگرال معادله (۲-۵.۷) فقط به گروه‌های بدون بُعد مختلف در معادله‌های تغییر، و به ضرایب هندسی مختلفی بستگی دارد که در شرایط مرزی وارد می‌شوند. بنابراین، اگر تنها گروه بدون بُعد مهم عدد رینولدز باشد،  $Re = l_0 v_0 \rho / \mu$ ؛ پس معادله (۲-۵.۷) باید صورت کلی زیر را داشته باشد:

$$E_v = (\rho v_0^3 l_0^3) \times (\text{تابعی بدون بُعد از } Re \text{ و نسبت‌های هندسی مختلف}) \quad (۳-۵.۷)$$

در جریان حالت پایا ترجیح می‌دهیم با کمیت  $\hat{E}_v = E_v/w$  کار کنیم که در آن  $w = \rho \langle v \rangle S$  آهنگ جریان جرمی گذرنده از هر مقطع سیستم جریان است. اگر سرعت مرجع  $v_0$  را  $\langle v \rangle$  و طول مرجع  $l_0$  را  $\sqrt{S}$  انتخاب کنیم، آنگاه:

$$\hat{E}_v = \frac{1}{\check{v}} \langle v \rangle^2 e_v \quad (۴-۵.۷)$$

که در آن  $e_v$ ، ضریب اتلاف اصطکاکی، تابعی از عدد رینولدز و نسبت‌های هندسی بدون بُعد مربوطه است. ضریب  $\frac{1}{\check{v}}$  برای هماهنگی با صورت چندین معادله وابسته وارد شده است. حال می‌خواهیم آن چه را درباره ضریب اتلاف اصطکاکی برای بخش‌های مختلف سیستم لوله‌کشی می‌دانیم، جمع‌بندی کنیم.

برای مجرای مستقیم، ضریب اتلاف اصطکاکی با ضریب اصطکاک رابطه نزدیکی دارد. فقط جریان پایای سیالی با چگالی ثابت در یک مجرای مستقیم دلخواه، اما با سطح مقطع ثابت  $S$  و طول  $L$  را در نظر می‌گیریم.

اگر سیال، تحت تأثیر گرادیان فشار و گرانش، در جهت  $z$  جریان پیدا کند، آن‌گاه معادله‌های (۲-۲.۷) و (۷-۴.۷) چنین نوشته می‌شوند:

$$F_{f \rightarrow s} = (p_1 - p_2)S + (\rho SL)g_z \quad (\text{مؤلفه } z \text{ اندازه حرکت}) \quad (5-5.7)$$

$$\hat{E}_v = \frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) + Lg_z \quad (\text{انرژی مکانیکی}) \quad (6-5.7)$$

با ضرب کردن عبارت دوم در  $\rho S$  و تفریق کردن، نتیجه می‌شود:

$$\hat{E}_v = \frac{F_{f \rightarrow s}}{\rho S} \quad (7-5.7)$$

اگر، علاوه بر آن، جریان متلاطم باشد می‌توان از عبارت  $F_{f \rightarrow s}$  برحسب شعاع هیدرولیکی میانگین استفاده کرد (نگاه کنید به معادله‌های (۱۶-۲.۶) تا (۱۸-۲.۶))، در نتیجه:

$$\hat{E}_v = \frac{1}{\gamma} \langle v \rangle^2 \frac{L}{R_h} f \quad (8-5.7)$$

که در آن  $f$  ضریب اصطکاک توصیف شده در فصل ۶ است. چون این معادله از نوع معادله (۴-۵.۷) است، می‌توان رابطه ساده‌ای بین ضریب اتلاف اصطکاک و ضریب اصطکاک:

$$e_v = \frac{L}{R_h} f \quad (9-5.7)$$

برای جریان متلاطم در مقاطع لوله مستقیم با سطح مقطع یکنواخت به دست آورد. برای آشنایی با رابطه مشابه برای مجراهایی با سطح مقطع متغیر، نگاه کنید به مسئله ۷.۲.

اغلب سیستم‌های جریان شامل «موانع» مختلفی مانند اتصالات، تغییرات ناگهانی قطر، شیرها، یا وسایل اندازه‌گیری جریان‌اند. این موانع در اتلاف اصطکاک  $\hat{E}_v$  نیز سهم دارند. این مقاومت‌های اضافی را می‌توان به صورت معادله (۴-۵.۷) نوشت و  $e_v$  را به یکی از دو روش زیر تعیین کرد: (الف) حل دستگاه معادلات موازنه ماکروسکوپی؛ یا (ب) اندازه‌گیری تجربی.

در جدول ۱-۵.۷ بعضی از مقادیر تقریبی  $e_v$  براساس این قرارداد که  $\langle v \rangle$  سرعت متوسط در پایین دست اختلال است، ارائه شده‌اند. مقادیر  $e_v$  برای جریان متلاطم ارائه شده‌اند که در آن وابستگی عدد رینولدز چندان مهم نیست. اکنون در وضعیتی هستیم که معادله (۷-۴.۷) را به صورت تقریبی متداول برای محاسبات جریان متلاطم در سیستمی تشکیل شده از انواع مختلف مقاومت‌های لوله‌کشی و اضافی، بازنویسی کنیم:

$$\frac{1}{\gamma}(v_2^2 - v_1^2) + g(h_2 - h_1) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} dp = \dot{W}_m - \sum_i \left( \frac{1}{\gamma} v_i^2 \frac{L}{R_h} f \right)_i - \sum_i \left( \frac{1}{\gamma} v_i^2 e_v \right)_i \quad (10-5.7)$$

جمع روی همه اتصالات،  
جمع روی همه بخش‌های  
مجرای مستقیم  
شیرها، سنجها، و غیره

در این جا  $R_h$  شعاع هیدرولیکی میانگین است که با معادله (۱۶-۲.۶) تعریف شد،  $f$  ضریب اصطکاک است که با معادله (۴-۱.۶) تعریف شد، و  $e_v$  ضریب اتلاف اصطکاک است که در جدول ۱-۵.۷ ارائه شد.

توجه کنید که منظور از  $v_1$  و  $v_2$  در جمله اول، سرعت در صفحه‌های ۱ و ۲ است؛  $v$  در جمع اول سرعت متوسط در بخش لوله؛ و  $v$  در جمع دوم سرعت متوسط در پایین دست اتصال، شیر یا مانع لوله است.

جدول ۱-۵.۷ ضرایب اصطکاک برای کاربرد در معادله (۱-۵.۷) (مقادیر تقریبی برای جریان متلاطم). الف

اختلال	$e_v$
تغییر ناگهانی سطح مقطع	
ورودی گردشده به لوله	۰٫۰۵
انقباض ناگهانی	$۰٫۴۵(۱ - \beta)$
انبساط ناگهانی	$(\frac{1}{\beta} - ۱)^2$
روزنه (لبه تیز)	$۲٫۷۱(۱ - \beta)(۱ - \beta^2)^{\frac{1}{3}}$
شیرها و اتصالات	
زانوهای ۹۰° (مدور)	۰٫۴-۰٫۹
زانوهای ۹۰° (مربع)	۱٫۳-۱٫۹
زانوهای ۴۵°	۰٫۳-۰٫۴
شیرهای بشقابی (باز)	۶-۱۰
شیرهای کشویی (باز)	۰٫۲

الف) برگرفته از

H. Kramers, *Physische Transportverschijnselen*, Technische Hogeschool Delft, Holland (1958), pp. 53-54.

ب) در این جا

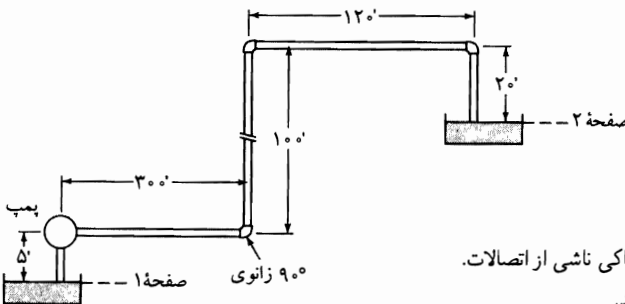
$$\beta = \frac{\text{سطح مقطع بزرگتر}}{\text{سطح مقطع کوچکتر}}$$

ج) نگاه کنید به مثال ۱-۶.۷ در مورد به دست آوردن موازنه ماکروسکوپی. اگر  $\beta = ۰$ ، آن گاه  $\frac{1}{\beta} = \infty$ ،  $\dot{E}_v = \frac{1}{\beta} (v)^2$  که در آن  $(v)$  سرعت در بالادست گشادگی است.

### مثال ۱-۵.۷

توان لازم برای جریان در خط لوله

مطلوب است تعیین توان خروجی پمپ در حالت پایا، در سیستمی مطابق شکل ۱-۵.۷. آب با دمای  $۶۸^\circ\text{F}$  (مطلوب است تعیین توان خروجی پمپ در حالت پایا، در سیستمی مطابق شکل ۱-۵.۷. آب با دمای  $۶۸^\circ\text{F}$   $\mu = ۱.۰ \text{ cp}$ ;  $\rho = ۶۲.۴ \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ ) با آهنگ  $۱۲ \text{ ft}^3/\text{min}$  به مخزن بالایی منتقل می شود. قطر داخلی همه لوله ها ۴ in.، مقطع آن ها دایره ای و جدار آن ها صاف است.



شکل ۱-۵.۷ جریان خط لوله با اتلاف های اصطکاک ناشی از اتصالات. صفحه های ۱ و ۲ درست زیر سطح مایع قرار دارند.

حل

سرعت متوسط در لوله برابر است با:

$$\langle v \rangle = \frac{w/\rho}{\pi R^2} = \frac{(12/60)}{\pi(1/6)^2} = 2,30 \text{ ft/s} \quad (11-5.7)$$

و عدد رینولدز برابر است با:

$$\text{Re} = \frac{D\langle v \rangle \rho}{\mu} = \frac{(1/3)(2,30)(62,4)}{(1,0)(6,72 \times 10^{-2})} = 7,11 \times 10^4 \quad (12-5.7)$$

بنابراین جریان متلاطم است.

سهم  $\hat{E}_v$  ناشی از طول‌های مختلف لوله برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} \sum_i \left( \frac{1}{2} v^2 \frac{L}{R_h} f \right)_i &= \frac{2v^2 f}{D} \sum_i L_i \\ &= \frac{2(2,30)^2 (0,0049)}{(1/3)} (5 + 300 + 100 + 120 + 20) \\ &= (0,156)(545) = 85 \text{ ft}^2/\text{s}^2 \end{aligned} \quad (13-5.7)$$

سهم  $\hat{E}_v$  ناشی از تنگ‌شدگی ناگهانی، سه زانوی  $90^\circ$ ، و گشادگی ناگهانی (مطابق جدول 1-5.7) برابر خواهد بود با:

$$\sum_i \left( \frac{1}{2} v^2 e_v \right)_i = \frac{1}{2} (2,30)^2 (0,45 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1) = 8 \text{ ft}^2/\text{s}^2 \quad (14-5.7)$$

سیس، از معادله (10-5.7)، داریم:

$$0 + (32,2)(105 - 20) + 0 = \hat{W}_m - 85 - 8 \quad (15-5.7)$$

با حل کردن برحسب  $\hat{W}_m$ ، نتیجه می‌شود:

$$\hat{W}_m = 2740 + 85 + 8 \approx 2830 \text{ ft}^2/\text{s}^2 \quad (16-5.7)$$

این کار انجام‌شده (در واحد جرم سیال) روی سیال داخل پمپ است. بنابراین پمپ به اندازه  $2830 \text{ ft}^2/\text{s}^2$  یا  $2830/32,2 = 88 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f/\text{lb}_m$  روی سیال گذرنده از داخل سیستم کار انجام می‌دهد. آهنگ جریان جرمی برابر است با:

$$w = (12/60)(62,4) = 12,5 \text{ lb}_m/\text{s} \quad (17-5.7)$$

در نتیجه:

$$W_m = w\hat{W}_m = (12,5)(88) = 1100 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f/\text{s} = 2 \text{ hp} = 1,5 \text{ kW} \quad (18-5.7)$$

که توان عرضه‌شده توسط پمپ است.

## ۶.۷ استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت‌پایا

در بخش ۶.۳ با نحوه بدست آوردن معادله‌های دیفرانسیل برای محاسبه توزیع‌های سرعت و فشار برای سیستم‌های جریان هم‌دما، از طریق ساده‌سازی معادله‌های تغییر آشنا شدیم. در این بخش نحوه استفاده از مجموعه موازنه‌های ماکروسکوپی حالت‌پایا را، برای بدست آوردن معادله‌های جبری به‌منظور توصیف سیستم‌های بزرگ نشان می‌دهیم.



در هر مسئله، کار را از موازنه‌های ماکروسکوپی شروع می‌کنیم. با ننگ داشتن ردّ جمله‌های حذف شده یا تقریب زده شده، به‌طور خودکار فهرست کاملی از فرض‌های نهفته در جواب نهایی در اختیار خواهیم داشت. همه مثال‌هایی که در این جا ارائه می‌شوند به جریان تراکم‌ناپذیر هم‌دما اختصاص دارند. فرض تراکم‌ناپذیری به این معناست که سرعت سیال باید از سرعت صوت در سیال کم‌تر باشد و تغییرات فشار باید به اندازه کافی کوچک باشد که بتوان از تغییرات چگالی چشم‌پوشی کرد.

موازنه‌های ماکروسکوپی حالت پایا را می‌توان به آسانی برای سیستم‌هایی با جریان‌های ورودی چندگانه (موسوم به ۱a، ۱b، ۱c، ...) و جریان‌های خروجی چندگانه (موسوم به ۲a، ۲b، ۲c، ...) تعمیم داد. این موازنه‌ها در جدول ۱-۶.۷ برای جریان متلاطم خلاصه شده‌است (در این جدول توزیع سرعت هموار فرض می‌شود).

جدول ۱-۶.۷ موازنه‌های ماکروسکوپی حالت پایا برای جریان متلاطم در سیستم‌های هم‌دما.

(الف)	$\sum w_1 - \sum w_2 = 0$	جرم:
	$\sum (v_1 w_1 + p_1 S_1) \mathbf{u}_1 -$	اندازه حرکت:
(ب)	$\sum (v_2 w_2 + p_2 S_2) \mathbf{u}_2 + m_{\text{tot}} \mathbf{g} = \mathbf{F}_{f \rightarrow s}$	
	$\sum (v_1 w_1 + p_1 S_1) [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1] -$	اندازه حرکت زاویه‌ای:
(ج)	$\sum (v_2 w_2 + p_2 S_2) [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2] + \mathbf{T}_{\text{ext}} = \mathbf{T}_{f \rightarrow s}$	
	$\sum \left( \frac{1}{\gamma} v_1^2 + gh_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) w_1 -$	انرژی مکانیکی:
(د)	$\sum \left( \frac{1}{\gamma} v_2^2 + gh_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) w_2 = -W_m + E_c + E_v$	

تذکر:

(الف) در همه فرمول‌های ارائه شده در این جا، توزیع سرعت هموار فرض شده‌است.

(ب)  $\sum w_1 = w_{1a} + w_{1b} + w_{1c} + \dots$  که در آن  $w_{1a} = \rho_{1a} v_{1a} S_{1a}$  و غیره.

(ج)  $h_1$  و  $h_2$  ارتفاع نسبت به صفحه مبنای اختیاری‌اند.

(د) همه معادله‌ها برای جریان تراکم‌پذیر نوشته شده‌اند؛ برای جریان تراکم‌ناپذیر،  $E_c = 0$ .

### مثال ۱-۶.۷

افزایش فشار و اتلاف اصطکاکی در گشادگی ناگهانی

سیالی تراکم‌ناپذیر، به حالت متلاطم، از یک لوله مدور باریک به داخل یک لوله مدور گشاد، مطابق شکل ۱-۶.۷، جریان دارد. سطح مقطع لوله‌ها  $S_1$  و  $S_2$  است. عبارتی برای تغییر فشار بین صفحه‌های ۱ و ۲، و برای اتلاف اصطکاکی مربوط به افزایش ناگهانی سطح مقطع به دست آورید. فرض کنید  $\beta = S_1/S_2$ ، که از واحد کوچک‌تر است.

حل

(الف) موازنه جرم. از موازنه جرم برای جریان پایا نتیجه می‌شود:

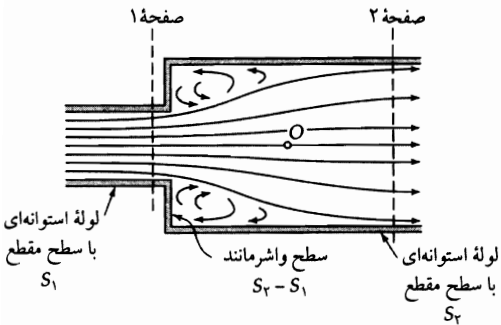
$$w_1 = w_2 \quad \text{یا} \quad \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 \quad (1-6.7)$$

در مورد سیالی با چگالی ثابت، داریم:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\beta} \quad (2-6.7)$$

(ب) موازنه اندازه حرکت. مؤلفه پایین دستی موازنه اندازه حرکت عبارت است از:

$$F_{f \rightarrow s} = (v_1 w_1 - v_2 w_2) + (p_1 S_1 - p_2 S_2) \quad (۳-۶.۷)$$



شکل ۱-۶.۷ جریان درگشادگی ناگهانی.

نیروی  $F_{f \rightarrow s}$  از دو جزء تشکیل می‌شود: نیروی ویسکوز وارد بر سطح استوانه‌ای موازی با جهت جریان، و نیروی فشار وارد بر سطح واشرمانند، درست در سمت راست صفحه ۱ و عمود بر محور جریان. نیروی نخست را می‌توان (به‌طور شهودی) نادیده گرفت و نیروی دوم را، با این فرض که فشار وارد بر سطح واشرمانند با فشار وارد بر صفحه ۱ برابر است،  $p_1(S_2 - S_1)$  می‌گیریم. سپس، با استفاده از معادله (۱-۶.۷) داریم:

$$-p_1(S_2 - S_1) = \rho v_2 S_2 (v_1 - v_2) + (p_1 S_1 - p_2 S_2) \quad (۴-۶.۷)$$

با حل این معادله برای یافتن اختلاف فشار، نتیجه می‌شود:

$$p_2 - p_1 = \rho v_2 (v_1 - v_2) \quad (۵-۶.۷)$$

یا، برحسب سرعت پایین دستی:

$$p_2 - p_1 = \rho v_2^2 \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \quad (۶-۶.۷)$$

توجه کنید که موازنه اندازه حرکت (به‌درستی) افزایش فشار را پیش‌بینی می‌کند.

(ج) موازنه اندازه حرکت زاویه‌ای. به این موازنه نیازی نیست. اگر مبدأ مختصات را روی محور سیستم در مرکز گرانی سیال واقع بین صفحه‌های ۱ و ۲ فرض کنیم، آنگاه  $[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1]$  و  $[\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2]$  هردو صفرند، و هیچ گشتاوری بر سیستم سیال وارد نمی‌شود.

(د) موازنه انرژی مکانیکی. هیچ اتلاف تراکمی وجود ندارد، کاری از طریق قطعات متحرک انجام نمی‌شود، و تغییر ارتفاع هم وجود ندارد، در نتیجه:

$$\hat{E}_v = \frac{1}{\rho} (v_1^2 - v_2^2) + \frac{1}{\rho} (p_1 - p_2) \quad (۷-۶.۷)$$

با قرار دادن معادله (۶-۶.۷) برای افزایش فشار، پس از مرتب کردن جمله‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\hat{E}_v = \frac{1}{\rho} v_2^2 \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right)^2 \quad (۸-۶.۷)$$

که یکی از مدخل‌های جدول ۱-۵.۷ است.

این مثال نحوه استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای تخمین زدن ضریب اتلاف اصطکاک برای مقاومت ساده در سیستم جریان را نشان می‌دهد. به سبب فرض‌های اختیار شده پس از معادله (۳-۶.۷)، نتایج ارائه شده به صورت معادله‌های (۶-۶.۷) و (۸-۶.۷) تقریبی‌اند. اگر به دقت بالا نیاز باشد، باید از ضریب تصحیح مبتنی بر داده‌های تجربی استفاده کرد.

### مثال ۲-۶.۷

عملکرد پمپ فواره‌ای مایع-مایع نموداری از پمپ فواره‌ای مایع-مایع در شکل ۲-۶.۷ نشان داده شده است. می‌خواهیم اختلاط دو جریان، هردو از یک نوع سیال، را با استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی تحلیل کنیم. در صفحه ۱ دو جریان سیال در هم ادغام می‌شوند. جریان ۱a سرعتی برابر  $v_0$  و سطح مقطعی برابر  $\frac{1}{3}S_1$ ، و جریان ۱b سرعتی برابر  $\frac{1}{4}v_0$  و سطح مقطعی برابر  $\frac{1}{3}S_1$  دارد. صفحه ۲ را در فاصله کافی در پایین دست دو جریان و در محلی انتخاب می‌کنیم که دو جریان مخلوط شده باشند و سرعت تقریباً یکنواخت  $v_2$  حاصل شده باشد. جریان متلاطم است و توزیع سرعت در صفحه‌های ۱ و ۲ هموار فرض می‌شود. در تحلیل زیر، از  $\mathbf{F}_{f \rightarrow s}$  چشم‌پوشی می‌شود، زیرا احساس می‌شود در موازنه اندازه حرکت از جمله دیگر کم‌اهمیت‌تر است.

حل

(الف) موازنه جرم. در حالت پایا، از معادله (الف) در جدول ۱-۶.۷ نتیجه می‌شود:

$$w_{1a} + w_{1b} = w_2 \quad (9-6.7)$$

یا

$$\rho v_0 \left( \frac{1}{3} S_1 \right) + \rho \left( \frac{1}{4} v_0 \right) \left( \frac{1}{3} S_1 \right) = \rho v_2 S_2 \quad (10-6.7)$$

بنابراین، چون  $S_1 = S_2$ ، از این معادله، سرعت جریان خروجی به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$v_2 = \frac{7}{4} v_0 \quad (11-6.7)$$

به علاوه، برای کاربرد بعدی، به این نکته توجه می‌کنیم که  $w_{1a} = w_{1b} = \frac{1}{4} w_2$ .

(ب) موازنه اندازه حرکت. از معادله (ب) جدول ۱-۶.۷، مؤلفه موازنه اندازه حرکت در جهت جریان، به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(v_{1a} w_{1a} + v_{1b} w_{1b} + p_1 S_1) - (v_2 w_2 + p_2 S_2) = 0 \quad (12-6.7)$$

یا با استفاده از رابطه آخر در قسمت (الف)، داریم:

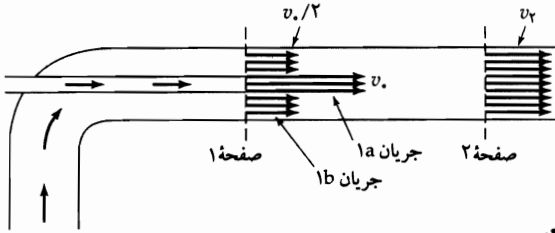
$$\begin{aligned} (p_2 - p_1) S_2 &= \left( \frac{1}{4} (v_{1a} + v_{1b}) - v_2 \right) w_2 \\ &= \left( \frac{1}{4} (v_0 + \frac{1}{4} v_0) - \frac{7}{4} v_0 \right) (\rho \left( \frac{1}{3} v_0 \right) S_2) \end{aligned} \quad (13-6.7)$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{18} \rho v_0^2 \quad (14-6.7)$$

این عبارت، افزایش فشار ناشی از اختلاط دو جریان را نشان می‌دهد.

(ج) موازنه‌اندازه حرکت زاویه‌ای. به این موازنه نیاز نداریم.



شکل ۲-۶.۷ جریان در پمپ فواره‌ای مایع-مایع.

(د) موازنه انرژی مکانیکی. از معادله (د) در جدول ۱-۶.۷ نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{1}{\rho} v_0^2 w_{1a} + \frac{1}{\rho} v_{1b}^2 w_{1b}\right) - \left(\frac{1}{\rho} v_r^2 + \frac{p_r - p_1}{\rho}\right) w_r = E_v \quad (15-6.7)$$

یا، با استفاده از رابطه آخر قسمت (الف)، داریم:

$$\left(\frac{1}{\rho} v_0^2 \left(\frac{1}{\rho} w_r\right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} v_0\right)^2 \left(\frac{1}{\rho} w_r\right)\right) - \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{2}{\rho} v_0\right)^2 + \frac{1}{18} v_0^2\right) w_r = E_v \quad (16-6.7)$$

بنابراین:

$$\hat{E}_v = \frac{E_v}{w_r} = \frac{5}{144} v_0^2 \quad (17-6.7)$$

اتلاف انرژی در واحد جرم است. این تحلیل نتایج نسبتاً خوبی برای پمپ‌های فواره‌ای مایع-مایع ارائه می‌دهد. اما در پمپ‌های فواره‌ای گازگاز، چگالی تغییرات چشمگیری دارد و باید موازنه انرژی کل را نیز به‌مزنه یک معادله حالت در تحلیل بگنجانیم. در مثال ۲-۳.۱۵ به این موضوع می‌پردازیم.

### مثال ۲-۶.۷

نیروی رانش وارد بر زانوی لوله

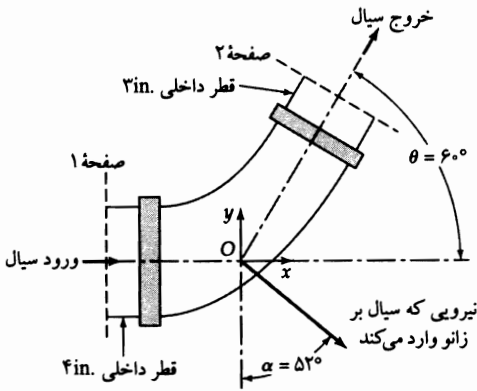
آب با دمای  $95^\circ\text{C}$  با آهنگ  $270 \text{ ft}^3/\text{s}$  از یک زانوی تبدیل  $60^\circ$  می‌گذرد که قطر داخلی لوله را از  $4 \text{ in.}$  به  $3 \text{ in.}$  کاهش می‌دهد (شکل ۲-۶.۷ را ببینید). مطلوب است محاسبه نیروی وارد بر زانو، هرگاه فشار در انتهای پایین دستی آن  $1/1$  اتمسفر باشد. چگالی و ویسکوزیته آب در شرایط این سیستم، به ترتیب، عبارت‌اند از:  $0.9997 \text{ g/cm}^3$  و  $0.0299 \text{ cp}$ .

حل

عدد رینولدز برای جریان در لوله  $4 \text{ in.}$  برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{D(v)\rho}{\mu} = \frac{4w}{\pi D\mu} \\ &= \frac{4(270 \times (12 \times 2.54^3)(0.9997))}{\pi(4 \times 2.54)(0.0299)} = 2.3 \times 10^6 \end{aligned} \quad (18-6.7)$$

در این عدد رینولدز، جریان به شدت متلاطم است و فرض هموار بودن توزیع سرعت منطقی است.



شکل ۶.۷-۳ نیروی واکنش در زانوی تبدیل لوله.

(الف) موازنهٔ جرم. برای جریان حالت پایا،  $w_1 = w_2$ . اگر چگالی در همه جا ثابت باشد، داریم:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} = \beta \quad (۱۹-۶.۷)$$

که در آن  $\beta$  نسبت مقطع کوچک‌تر به مقطع بزرگ‌تر است.

(ب) موازنهٔ انرژی مکانیکی. برای جریان پایای تراکم‌ناپذیر، معادلهٔ (د) جدول ۶.۷-۱، در شرایط این مسئله، به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{\gamma}(v_2^2 - v_1^2) + g(h_2 - h_1) + \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1) + \hat{E}_v = 0 \quad (۲۰-۶.۷)$$

طبق جدول ۶.۷-۱ و معادلهٔ (۴-۵.۷)، می‌توانیم اتلاف اصطکاکی را به صورت تقریبی  $\frac{1}{\delta}(v_2^2)$  در نظر بگیریم. با قرار دادن این مقدار در معادلهٔ (۲۰-۶.۷) و استفاده از موازنهٔ جرم، نتیجه می‌شود:

$$p_1 - p_2 = \rho v_2^2 \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \beta^2 + \frac{1}{\delta} \right) + \rho g(h_2 - h_1) \quad (۲۱-۶.۷)$$

این رابطه افت فشار در زانو را، برحسب سرعت معلوم  $v_2$  و ضریب هندسی معلوم  $\beta$  نشان می‌دهد.

(ج) موازنهٔ اندازه حرکت. اکنون باید هر دو مؤلفهٔ  $x$  و  $y$  موازنهٔ اندازه حرکت را در نظر بگیریم. مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  بردارهای یکهٔ ورودی و خروجی عبارت‌اند از:  $u_{1x} = 1$ ،  $u_{1y} = 0$ ،  $u_{2x} = \cos \theta$  و  $u_{2y} = \sin \theta$ . سپس از مؤلفهٔ  $x$  موازنهٔ اندازه حرکت نتیجه می‌شود:

$$F_x = (v_1 w_1 + p_1 S_1) - (v_2 w_2 + p_2 S_2) \cos \theta \quad (۲۲-۶.۷)$$

که در آن  $F_x$  مؤلفهٔ  $x$  عبارت  $F_{f \rightarrow s}$  است. با استفاده از عبارت‌های خاص برای  $w_1$  و  $w_2$ ، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} F_x &= v_1(\rho v_1 S_1) - v_2(\rho v_2 S_2) \cos \theta + p_1 S_1 - p_2 S_2 \cos \theta \\ &= \rho v_2^2 S_2 (\beta - \cos \theta) + (p_1 - p_2) S_1 + p_2 (S_1 - S_2 \cos \theta) \end{aligned} \quad (۲۳-۶.۷)$$

با قرار دادن این نتیجه در عبارت مربوط به  $p_1 - p_2$  از معادله (۲۱-۶.۷)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} F_x &= \rho v_1^2 S_T (\beta - \cos \theta) + \rho v_2^2 S_T \beta^{-1} \left( \frac{v_1}{v_2} - \frac{1}{\beta} \beta^2 \right) \\ &+ \rho g (h_2 - h_1) S_T \beta^{-1} + p_2 S_T (\beta^{-1} - \cos \theta) \\ &= w^2 (\rho S_T)^{-1} \left( \frac{v_1}{v_2} \beta^{-1} - \cos \theta + \frac{1}{\beta} \right) \\ &+ \rho g (h_2 - h_1) S_T \beta^{-1} + p_2 S_T (\beta^{-1} - \cos \theta) \end{aligned} \quad (24-6.7)$$

مؤلفه  $y$  موازنه اندازه حرکت عبارت است از:

$$F_y = -(v_2 w_2 + p_2 S_T) \sin \theta - m_{tot} g \quad (25-6.7)$$

یا

$$F_y = -w^2 (\rho S_T)^{-1} \sin \theta - p_2 S_T \sin \theta - \pi R^2 L \rho g \quad (26-6.7)$$

که در آن  $R$  و  $L$  شعاع و طول استوانه تقریباً هم‌ارزند.

اکنون مؤلفه‌های نیروی واکنش را برحسب کمیت‌های معلوم می‌دانیم. مقادیر عددی لازم عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \rho &= 60 \text{ lb}_m/\text{ft}^3 & S_T &= \frac{1}{64} \pi = 0.049 \text{ ft}^2 \\ w &= (210)(60) = 120 \text{ lb}_m/\text{s} & \beta &= S_2/S_1 = 3^2/4^2 = 0.562 \\ \cos \theta &= \frac{1}{4} & R &\approx \frac{1}{8} \text{ ft} \\ \sin \theta &= \frac{1}{4} \sqrt{3} & L &\approx \frac{5}{6} \text{ ft} \\ p_2 &= 16.2 \text{ lb}_f/\text{in.}^2 & h_2 - h_1 &\approx \frac{1}{4} \text{ ft} \end{aligned}$$

سپس، با استفاده از این مقادیر، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{(120)^2}{60(0.049)(32.2)} \left( \frac{v_1}{v_2} \frac{1}{0.562} - \frac{1}{4} + \frac{0.562}{4} \right) + (60) \left( \frac{1}{4} \right) (0.049) \left( \frac{1}{0.562} \right) \\ &+ (16.2)(0.049)(144) \left( \frac{1}{0.562} - \frac{1}{4} \right) \text{ lb}_f \\ &= (152)(1.24 - 0.50 + 0.28) + 2.6 + (16.2)(0.049)(144)(1.78 - 0.50) \\ &= 155 + 2.6 + 146 = 304 \text{ lb}_f = 1352 \text{ N} \end{aligned} \quad (27-6.7)$$

$$\begin{aligned} F_y &= -\frac{(120)^2}{60(0.049)(32.2)} \left( \frac{1}{4} \sqrt{3} \right) - (16.2)(0.049)(144) \left( \frac{1}{4} \sqrt{3} \right) \\ &- \pi \left( \frac{1}{8} \right)^2 \left( \frac{5}{6} \right) (60) \text{ lb}_f \\ &= -132 - 99 - 2.5 = -234 \text{ lb}_f = -1041 \text{ N} \end{aligned} \quad (28-6.7)$$

بنابراین اندازه این نیرو برابر است با:

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{304^2 + 234^2} = 384 \text{ lb}_f = 170.8 \text{ N} \quad (29-6.7)$$

زاویه این نیرو با امتداد عمودی برابر است با:

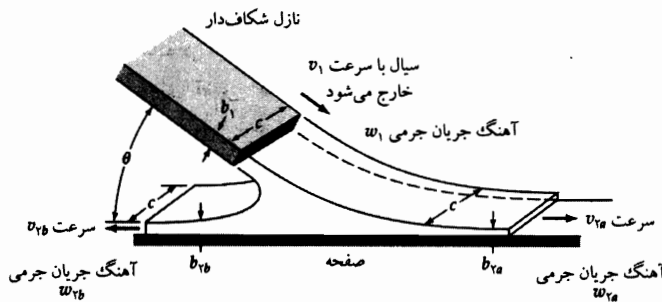
$$\alpha = \arctan(F_x/F_y) = \arctan 1/30 = 52^\circ \quad (30-6.7)$$

با نگاهی دوباره به این محاسبات، مشاهده می‌کنیم که همه آثار منظور شده در محاسبات مهم بوده‌اند، به‌استثنای جمله‌های گرانس در  $F_x$  در  $2/6 \text{ lb}_f$  و  $F_y$  در  $2/5 \text{ lb}_f$ .

### مثال ۶.۷-۴

جت برخوردی

جت سیال تراکم‌ناپذیر مستطیلی به ضخامت  $b_1$  از شکافی به پهنای  $c$  بیرون می‌آید و به صفحه‌ای تخت برخورد می‌کند و، مطابق شکل ۶.۷-۴ به دو جریان به ضخامت‌های  $b_{2a}$  و  $b_{2b}$  تفکیک می‌شود. جریان جت متلاطم خروجی سرعتی برابر  $v_1$  و آهنگ جریان جرمی برابر  $w_1$  دارد. مطلوب است تعیین سرعت‌ها و آهنگ‌های جریان جرمی در دو جریان ایجاد شده روی صفحه.<sup>۱</sup>



شکل ۶.۷-۴ جت برخوردکننده

به دیوار که به دو جریان تفکیک می‌شود. نقطه  $O$ ، که مبدأ مختصات برای موازنه اندازه حرکت زاویه‌ای است، نقطه تقاطع خط مرکزی جت و صفحه‌ای در تراز  $\frac{1}{4}b_1$  است.

حل

از اتلاف ویسکوز و گرانس چشم‌پوشی می‌کنیم و فرض می‌کنیم توزیع سرعت هر سه جریان هموار، و فشار جریان‌ها مساوی است. از موازنه‌های ماکروسکوپی نتایج زیر حاصل می‌شود:

موازنه جرم

$$w_1 = w_{2a} + w_{2b} \quad (31-6.7)$$

موازنه اندازه حرکت (در امتدادی موازی با صفحه)

$$v_1 w_1 \cos \theta = v_{2a} w_{2a} - v_{2b} w_{2b} \quad \frac{1}{4} v_1^2 w_1 = \frac{1}{4} v_{2a}^2 w_{2a} + \frac{1}{4} v_{2b}^2 w_{2b} \quad (32, 33-6.7)$$

موازنه اندازه حرکت زاویه‌ای (مبدأ مختصات را روی خط مرکزی جت و در ارتفاع  $\frac{1}{4}b_1$  بگیرید؛ با این اقدام جت ورودی اندازه حرکت زاویه‌ای نخواهد داشت.)

$$0 = (v_{2a} w_{2a}) \cdot \frac{1}{4} (b_1 - b_{2a}) - (v_{2b} w_{2b}) \cdot \frac{1}{4} (b_1 - b_{2b}) \quad (34-6.7)$$

1. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (1967), pp. 392-394, and S. Whitaker, *Introduction to Fluid Dynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1968). p. 260.

معادله آخر را می‌توان بازنویسی کرد تا  $b'$ ها به نفع  $w'$ ها حذف شوند. چون  $w_1 = \rho v_1 b_1 c$  و  $w_{2a} = \rho v_{2a} b_{2a} c$  می‌توانیم  $b_1 - b_{2a}$  را با  $(w_1/\rho v_1 c) - (w_{2a}/\rho v_{2a} c)$  جایگزین کنیم و در مورد  $b_1 - b_{2b}$  نیز رفتار متناظری انجام دهیم. در این صورت موازنه اندازه حرکت زاویه‌ای چنین نوشته می‌شود:

$$(v_{2a} w_{2a}) \left( \frac{w_1}{v_1} - \frac{w_{2a}}{v_{2a}} \right) = (v_{2b} w_{2b}) \left( \frac{w_1}{v_1} - \frac{w_{2b}}{v_{2b}} \right) \quad (۳۵-۶.۷)$$

یا

$$w_{2a}^2 - w_{2b}^2 = \frac{w_1}{v_1} (v_{2a} w_{2a} - v_{2b} w_{2b}) \quad (۳۶-۶.۷)$$

اکنون معادله‌های (۳۱-۶.۷، ۳۲، ۳۳، ۳۶) چهار معادله با چهار مجهول‌اند. با حل این معادله‌ها نتیجه می‌شود:

$$v_{2a} = v_1 \quad w_{2a} = \frac{1}{4} w_1 (1 + \cos \theta) \quad (۳۸، ۳۷-۶.۷)$$

$$v_{2b} = v_1 \quad w_{2b} = \frac{1}{4} w_1 (1 - \cos \theta) \quad (۴۰، ۳۹-۶.۷)$$

بنابراین سرعت هر سه جریان مساوی است. همین نتیجه با کاربرد معادله کلاسیک برنولی برای جریان سیال ویسکوز به دست می‌آید (مثال ۱-۵.۳ را ببینید).

### مثال ۵-۶.۷

جریان هم‌دمای مایع در عبور از روزنه

روشی متداول برای تعیین آهنگ جریان جرمی در لوله، اندازه‌گیری افت فشار در عبور از «مانع» تعبیه شده در لوله است. نمونه‌ای از این نوع مانع روزنه (آریفیس) است که صفحه‌ای نازک است که سوراخی در وسط دارد. در صفحه‌های ۱ و ۲ در بالادست و پایین دست صفحه روزنه، انشعاب‌های فشارسنج وجود دارد. در شکل ۵-۶.۷ (الف) جریان سنج روزنه‌ای، انشعاب‌های فشارسنج، و رفتار کلی توزیع سرعت، براساس مشاهدات تجربی، نشان داده شده است. توزیع سرعت در صفحه ۱ هموار فرض می‌شود. در شکل ۵-۶.۷ (ب) توزیع سرعت تقریبی را در صفحه ۲ نشان داده‌ایم که در موازنه‌های ماکروسکوپی به کار خواهد آمد. معادله جریان سنج روزنه‌ای با کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی جرم و انرژی مکانیکی به دست می‌آید.

حل

(الف) موازنه جرم. برای سیالی با چگالی ثابت و سیستمی که در آن  $S_1 = S_2 = S$ ، از موازنه جرم در معادله (۱-۱.۷) نتیجه می‌شود:

$$\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle \quad (۴۱-۶.۷)$$

با توزیع سرعت فرض شده، این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود:

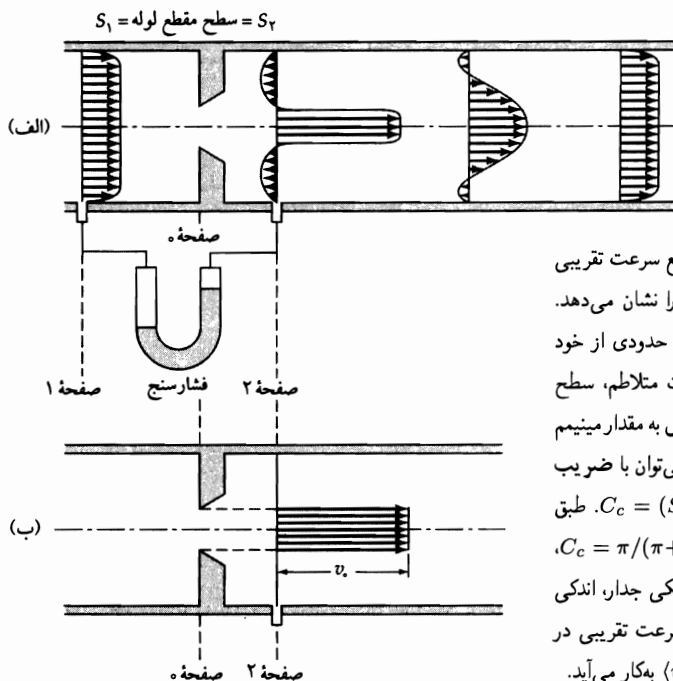
$$v_1 = \frac{S_2}{S} v_2 \quad (۴۲-۶.۷)$$

و آهنگ جریان حجمی برابر است با:  $w = \rho v_1 S$

(ب) موازنه انرژی مکانیکی. برای سیالی با چگالی ثابت در سیستم جریانی بدون تغییر ارتفاع و فاقد قطعات متحرک، از معادله (۵-۴.۷) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2} \langle v_2^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle v_1^2 \rangle + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \hat{E}_v = 0 \quad (۴۳-۶.۷)$$





شکل ۵-۶.۷ (الف) روزنهٔ لبه‌تیز، که توزیع سرعت تقریبی در چند صفحه در نزدیکی صفحهٔ روزنه را نشان می‌دهد. جت سیالی که از سوراخ بیرون می‌آید تا حدودی از خود سوراخ باریک‌تر است. در جریان به شدت متلاطم، سطح مقطع این جت در محل بیش‌ترین انقباض به مقدار مینیمم خود می‌رسد. دامنهٔ این باریک‌شدگی را می‌توان با ضریب انقباض نشان داد،  $C_c = (S_0 / \text{پیش‌ترین انقباض})$ . طبق نظریهٔ جریان غیرویسکوز،  $C_c = \pi / (\pi + 2) = 0.611$ . هرگاه  $S_0 / S_1 = 0$  توجه کنید که در نزدیکی جدار، اندکی برگشت جریان وجود دارد؛ (ب) توزیع سرعت تقریبی در صفحهٔ ۲ که برای تخمین زدن  $\langle v_1^2 \rangle / \langle v_2 \rangle$  به‌کار می‌آید.

از اتلاف ویسکوز  $\hat{E}_v$  چشم‌پوشی می‌کنیم، اگرچه یقین داریم که صفر نیست. با توزیع سرعت فرض‌شده، معادلهٔ (۴۳-۶.۷) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = 0 \quad (44-6.7)$$

وقتی معادله‌های (۴۲-۶.۷) و (۴۴-۶.۷) باهم ترکیب شوند تا  $v_0$  حذف شود، می‌توانیم این رابطه را برحسب  $v_1$  حل کنیم و نتیجه بگیریم که:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \frac{1}{(S/S_0)^2 - 1}} \quad (45-6.7)$$

اکنون می‌توان رابطهٔ به‌دست‌آمده را در  $\rho S$  ضرب کرد تا آهنگ جریان جرمی حاصل شود. سپس، برای منظور کردن خطای ناشی از چشم‌پوشی از  $\hat{E}_v$  و فرض‌های مربوط به توزیع سرعت، ضریب تخلیه،  $C_d$  را در رابطهٔ حاصل می‌گنجانیم و نتیجه می‌گیریم که:

$$w = C_d S_0 \sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{1 - (S_0/S)^2}} \quad (46-6.7)$$

ضرایب تخلیهٔ تجربی رابطه‌ای همبستگی به صورت تابعی از  $S_0/S$  و عدد رینولدز دارند.<sup>۲</sup> به‌ازای عددهای رینولدز بزرگ‌تر از  $10^4$ ،  $C_d$ ، برای همهٔ مقادیر عملی  $S_0/S$  در حدود ۰.۶۱ خواهد بود.

2. G. L. Tuve and R. E. Sprenkle, *Instruments*, 6, 202-205, 225, 232-234 (1935); see also, R. H. Perry and C. H. Chilton, *Chemical Engineers' Handbook*, McGraw-Hill, New York, 5th edition (1973), Fig. 5-18; *Fluid Meters: Their Theory and Applications*, 6th edition, American Society of Mechanical Engineers, New York (1971), pp. 58-65; Measurement of Fluid Flow Using Small Bore Precision Orifice Meters, American Society of Mechanical Engineers, MFC-14-M, New York (1995).

این مثال کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی در به‌دست آوردن صورت کلی نتیجه را نشان می‌دهد، که پس از آن با استفاده از تابع ضریبی گروه‌های بدون بُعد اصلاح می‌شود تا خطاهای ناشی از اختیار فرض‌های ناموجه را تصحیح کند. غالباً از این ترکیب موازنه‌های ماکروسکوپی و ملاحظات ابعادی استفاده می‌شود و می‌تواند نسبتاً سودمند واقع شود.

### ۷.۷ استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت‌ناپایا

در بخش قبل کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت‌ناپایا را نشان دادیم. در این بخش به سراغ مسئله حالت‌ناپایا می‌رویم و دو مثال حل می‌کنیم تا کاربرد معادله‌های موازنه ماکروسکوپی وابسته به زمان را نشان دهیم.

#### مثال ۷.۷

آثار شتاب در جریان ناپایای خروجی از مخزن استوانه‌ای

استوانه‌ای سرگشاده به ارتفاع  $H$  و شعاع  $R$  را در نظر بگیرید که ابتدا کاملاً از مایع پر شده است. به‌ازای هر زمان  $t > 0$ ، مایع می‌تواند از طریق سوراخ کوچکی به شعاع  $R_0$  در کف مخزن، از استوانه تخلیه شود (نگاه کنید به شکل ۱-۷.۷).

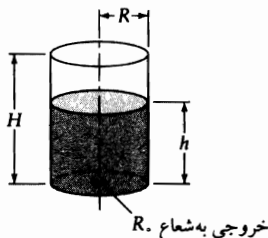
(الف) زمان تخلیه را با استفاده از موازنه جرم حالت‌ناپایا و با فرض این‌که رابطه بین سرعت تخلیه و ارتفاع لحظه‌ای مایع از معادله توریچلی به‌دست می‌آید (نگاه کنید به مسئله ۳ ب. ۱۴)، تعیین کنید؛

(ب) زمان تخلیه را با استفاده از موازنه انرژی مکانیکی حالت‌ناپایا بیابید.

حل

(الف) معادله (۲-۱.۷) را در مورد سیستم نشان‌داده‌شده در شکل ۱-۷.۷ به‌کار می‌بندیم و صفحه ۱ را در بالای مخزن در نظر می‌گیریم (بنابراین  $w_1 = 0$ ). اگر ارتفاع لحظه‌ای مایع  $h(t)$  باشد، آن‌گاه:

$$\frac{d}{dt}(\pi R^2 h \rho) = -\rho v_2 (\pi R_0^2) \quad (۱-۷.۷)$$



شکل ۱-۷.۷ جریان خروجی از مخزن استوانه‌ای.

در این‌جا فرض کرده‌ایم که توزیع سرعت در صفحه ۲ هموار است. طبق معادله توریچلی  $v_2 = \sqrt{2gh}$ ، بنابراین معادله (۱-۷.۷) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{dh}{dt} = - \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \sqrt{2gh} \quad (۲-۷.۷)$$

وقتی از این معادله، از  $t = 0$  تا  $t = t_{\text{تخلیه}}$  انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$t_{\text{تخلیه}} = \sqrt{\frac{2NH}{g}} \quad (۳-۷.۷)$$

که در آن  $1 \gg (R/R_0)^4 = N$ . این جواب عملاً جواب حالت شبه‌پایاست، زیرا از موازنه جرم حالت‌ناپایا، همراه با معادله توریجلی استفاده کرده‌ایم که آن را برای جریان حالت‌ناپایا به دست آوردیم.

(ب) اکنون از معادله (۱-۷.۷) و موازنه انرژی مکانیکی، معادله (۲-۴.۷) استفاده می‌کنیم. در معادله اخیر، جمله‌های  $W_m$  و  $E_c$  متداً صفرند و فرض می‌کنیم که  $E_v$  کوچک و قابل چشم‌پوشی است، زیرا گرادیان سرعت در سیستم کوچک خواهد بود. صفحه مینا برای انرژی پتانسیل را در کف مخزن می‌گیریم، به طوری که  $\Phi_2 = gz_2 = 0$  در صفحه ۱ اصلاً مایعی وارد نمی‌شود و بنابراین در آن‌جا به جمله انرژی پتانسیل نیازی نیست. چون سر مخزن باز است و محتویات مخزن در داخل جو تخلیه می‌شود، سهم‌های فشار یکدیگر را خنثی می‌کنند. برای به دست آوردن انرژی جنبشی کل سیستم در هر زمان  $t$ ، باید سرعت هر جزء سیال موجود در مخزن را بدانیم. فرض می‌کنیم در همه نقاط مخزن، سیال با سرعت یکسان  $v_2(R_0/R)^2$  به طرف پایین حرکت می‌کند، به طوری که انرژی جنبشی بر واحد حجم، در همه‌جا برابر  $\frac{1}{2}\rho v_2^2(R_0/R)^4$  است. برای به دست آوردن انرژی پتانسیل کل سیستم در هر زمان  $t$ ، باید از انرژی پتانسیل در واحد حجم  $\rho gz$  روی حجم سیال از  $0$  تا  $h$  انتگرال بگیریم. نتیجه  $\pi R^2 \rho g (\frac{1}{2} h^2)$  حاصل می‌شود. بنابراین موازنه انرژی مکانیکی در معادله (۲-۴.۷) چنین است:

$$\frac{d}{dt}[(\pi R^2 h)(\frac{1}{2}\rho v_2^2)(R_0/R)^4 + \pi R^2 \rho g (\frac{1}{2} h^2)] = -\frac{1}{2}v_2^2(\rho v_2 \pi R^2) \quad (4-7.7)$$

از موازنه جرم حالت‌ناپایا نتیجه می‌شود  $v_2 = -(R/R_0)^2 (dh/dt)$  و وقتی این عبارت را در معادله (۴-۷.۷) قرار دهیم، پس از تقسیم کردن بر  $dh/dt$ ، نتیجه می‌شود:

$$2h \frac{d^2 h}{dt^2} - (N - 1) \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + 2gh = 0 \quad (5-7.7)$$

این معادله را باید با دو شرط اولیه حل کرد:

$$h = H \quad \text{شرط اولیه ۱: در } t = 0, \text{ داریم} \quad (6-7.7)$$

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{2gH}(R_0/R)^2 \quad \text{شرط اولیه ۲: در } t = 0, \text{ داریم} \quad (7-7.7)$$

دومین شرط معادله توریجلی در لحظه اول است.

می‌توان با تغییر متغیر  $u = (dh/dt)^2$ ، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برحسب  $h$  را به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول برحسب تابع  $u(h)$  تبدیل کرد. داریم:

$$h \frac{du}{dh} - (N - 1)u + 2gh = 0 \quad (8-7.7)$$

می‌توان نشان داد که جواب این معادله مرتبه اول چنین است:<sup>۱</sup>

$$u = Ch^{N-1} + 2gh/(N - 2) \quad (9-7.7)$$

1. E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Chelsea Publishing Company, New York (1948), p. 311, # 1.94; G. M. Murphy, *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1960), p. 236 #157.

بنابراین از شرط دوم عبارت  $C = -\frac{2}{3}g/[N(N-2)H^{N-2}]$  به‌عنوان ثابت انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود؛ چون  $N \gg 1$ ، نیازی نیست نگران حالت خاصی باشیم که در آن  $N = 2$ . سپس می‌توانیم ریشه دوم معادله (۹-۷.۷) را به‌دست آوریم و ارتفاع بدون بُعد مایع،  $\eta = h/H$ ، را معرفی کنیم؛ نتیجه می‌شود:

$$\frac{d\eta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{(N-2)H}} \sqrt{\eta - \frac{2}{N}\eta^{N-1}} \quad (10-7.7)$$

که در آن علامت منها را باید بر مبنای شرایط فیزیکی انتخاب کرد. می‌توان از این معادله مرتبه اول تفکیک‌پذیر انتگرال گرفت تا نتیجه زیر حاصل تخلیه  $t = t$  از  $t = 0$  تا شود:

$$t_{\text{تخلیه}} = \sqrt{\frac{(N-2)H}{2g}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{\eta - (2/N)\eta^{N-1}}} \equiv \sqrt{\frac{2NH}{g}} \phi(N) \quad (11-7.7)$$

تابع  $\phi(N)$  انحراف از جواب حالت شبه‌پایا را که به‌صورت معادله (۳-۷.۷) به‌دست آمد، نشان می‌دهد. این تابع را می‌توان به‌صورت زیر ارزیابی کرد:

$$\begin{aligned} \phi(N) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N-2}{N}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{\eta - (2/N)\eta^{N-1}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N-2}{N}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left(1 - \frac{2}{N}\eta^{N-2}\right)^{-1/2} d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N-2}{N}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\eta}} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{N}\eta^{N-2}\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2}{N}\eta^{N-2}\right)^2 + \dots\right) d\eta \quad (12-7.7) \end{aligned}$$

اکنون می‌توان انتگرال‌گیری‌ها را انجام داد. وقتی نتیجه را به‌صورت توان‌های عکس  $N$  بسط دهیم، درمی‌یابیم که:

$$\phi(N) = 1 - \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (13-7.7)$$

چون  $N = (R/R_0)^2$  عددی بسیار بزرگ است، بدیهی است که ضریب  $\phi(N)$  فقط اندکی با واحد اختلاف دارد.

آموزنده است اگر اکنون به‌سراغ معادله (۴-۷.۷) برویم و جمله توصیف‌کننده تغییر انرژی جنبشی کل با زمان را حذف کنیم. در این صورت دقیقاً عبارت زمان تخلیه، معادله (۳-۷.۷) (یا معادله (۱۱-۷.۷) با  $\phi(N) = 1$ ) حاصل می‌شود. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که در این نوع مسئله، چشم‌پوشی از تغییر انرژی جنبشی با زمان، امکان‌پذیر است و مشکلی ایجاد نمی‌کند.

### مثال ۷.۷-۲

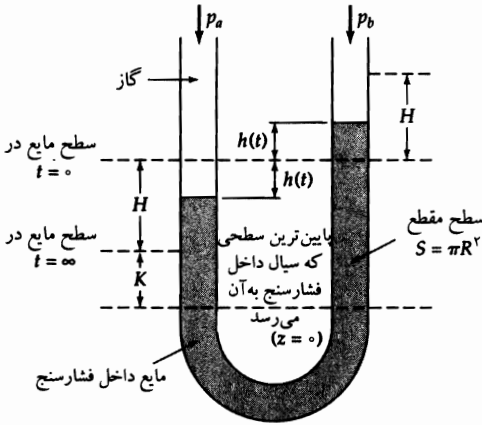
#### نوسانات فشارسنج<sup>۲</sup>

مایع داخل فشارسنج دوشاخه، که ابتدا در حالت سکون است، با ایجاد اختلاف فشار  $p_a - p_b$ ، ناگهان به‌حرکت درمی‌آید. مطلوب است تعیین معادله دیفرانسیل حرکت سیال داخل فشارسنج، با فرض تراکم‌ناپذیر بودن جریان و ۲. برای آشنایی با خلاصه کارهای نظری و تجربی انجام‌شده روی نوسانات فشارسنج، نگاه کنید به

J. C. Biery, *AICHE Journal*, **9**, 606-614 (1963); **10**, 551-557 (1964); **51**, 631-634 (1969).

داده‌های تجربی بیری نشان می‌دهند که فرض اختیارشده در معادله (۱۴-۷.۷) فرض خیلی خوبی نیست.

ثابت بودن دما. عبارتی برای شعاع لوله به دست آورید که به ازای آن میرایی بحرانی رخ می‌دهد. از حرکت گاز در بالای مایع فشارسنج، چشم‌پوشی کنید. نمادگذاری این مسئله در شکل ۷.۷-۲ نشان داده شده است.



شکل ۷.۷-۲. نوسانات میرایی سیال داخل فشارسنج.

حل

مایع فشارسنجی را به عنوان سیستمی در نظر می‌گیریم که موازنه ماکروسکوپی روی آن انجام می‌شود. در این حالت صفحه‌های ۱ و ۲ که مایع از طریق آن‌ها وارد یا خارج شود، وجود ندارند. سطوح آزاد مایع می‌توانند کار  $W_m$  را روی محیط اطراف انجام دهند و بنابراین نقش قطعات مکانیکی متحرک را بازی می‌کنند که در بخش ۴.۷ درباره آن‌ها بحث شد. موازنه انرژی مکانیکی، معادله (۴.۷-۲)، را به کار می‌بندیم و در آن  $E_c$  را برابر صفر می‌گیریم (زیرا مایع داخل فشارسنج را تراکم ناپذیر فرض می‌کنیم). به علت انتخاب سیستم، هم  $w_1$  و هم  $w_2$  صفرند، بنابراین در سمت راست معادله فقط جمله‌های  $W_m$  و  $-E_v$  باقی می‌مانند.

برای محاسبه  $dK_{tot}/dt$  و  $E_v$  باید نوعی فرض در مورد توزیع سرعت اختیار کنیم. در این جا توزیع سرعت را سهموی فرض می‌کنیم:

$$v(r, t) = v \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (۷.۷-۱۴)$$

که در آن  $\langle v \rangle = dh/dt$  تابعی از زمان است که وقتی جریان از چپ به راست باشد، مثبت فرض می‌شود. جمله انرژی جنبشی را می‌توان چنین محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \frac{dK_{tot}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) r \, dr \, d\theta \, dl \\ &= 2\pi L \left( \frac{1}{2} \rho \right) \frac{d}{dt} \int_0^R v^2 r \, dr \\ &= 2\pi L R^2 \left( \frac{1}{2} \rho \right) \frac{d}{dt} \int_0^1 (v(1 - \xi^2))^2 \xi \, d\xi \\ &= \frac{4}{3} \rho L S \langle v \rangle \frac{d}{dt} \langle v \rangle \end{aligned} \quad (۷.۷-۱۵)$$

در این رابطه  $l$  مختصی است که در طول محور لوله فشارسنج اندازه‌گیری می‌شود و  $L$  فاصله در طول این محور از یک فصل مشترک فشارسنج تا فصل مشترک دیگر آن است، یعنی طول کل سیال داخل فشارسنج است. مختص بدون بُعد  $\xi$  برابر است با  $r/R$  و  $S$  سطح مقطع لوله است.

تغییر انرژی پتانسیل با زمان از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{\text{tot}}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R (\rho g z) r \, dr \, d\theta \, dl \\ &= \frac{d}{dt} \left[ (\text{انتگرال در زیر } z = 0 \text{ ثابت است}) + \rho g S \int_0^{K+H-h} z \, dz + \rho g S \int_0^{K+H+h} z \, dz \right] \\ &= 2\rho g S h \frac{dh}{dt} \end{aligned} \quad (16-7.7)$$

جمله اتلاف ویسکوز را نیز می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} E_v &= - \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) r \, dr \, d\theta \, dl \\ &= 2\pi L \mu \int_0^R \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 r \, dr \\ &= 4\pi L \mu \langle v \rangle^2 \int_0^1 (-2\xi)^2 \xi \, d\xi \\ &= 4\pi L S \mu \langle v \rangle^2 / R^2 \end{aligned} \quad (17-7.7)$$

به علاوه، کار خالص انجام شده توسط محیط روی سیستم برابر است با:

$$W_m = (p_a - p_b) S \langle v \rangle \quad (18-7.7)$$

با قرار دادن جمله‌های فوق در موازنه انرژی مکانیکی و قرار دادن  $dh/dt = \langle v \rangle$ ، معادله دیفرانسیل زیر برای  $h(t)$  به دست می‌آید:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + \left( \frac{6\mu}{\rho R^2} \right) \frac{dh}{dt} + \left( \frac{2g}{2L} \right) h = \frac{3}{4} \left( \frac{p_a - p_b}{\rho L} \right) \quad (19-7.7)$$

که باید با استفاده از این شرط اولیه که در  $t = 0$ ، داریم  $h = 0$  و  $dh/dt = 0$ ، حل شود. می‌توان این معادله غیرهمگن خطی مرتبه دوم را، با معرفی متغیر جدید  $k$  که به صورت زیر تعریف می‌شود، همگن کرد:

$$k = 2h - \frac{p_a - p_b}{\rho g} \quad (20-7.7)$$

بنابراین معادله حرکت مایع داخل فشارسنج چنین است:

$$\frac{d^2 k}{dt^2} + \left( \frac{6\mu}{\rho R^2} \right) \frac{dk}{dt} + \left( \frac{2g}{2L} \right) k = 0 \quad (21-7.7)$$

این معادله در توصیف حرکت جرم متصل به فنر و کم‌فتر، و هم‌چنین در توصیف جریان الکتریکی در مدار RLC نیز مطرح می‌شود (نگاه کنید به معادله (ج. ۷-۱)).

اکنون جوابی به صورت  $k = e^{mt}$  را آزمایش می‌کنیم. با قرار دادن این تابع آزمایشی در معادله (۲۱-۷.۷)، دو مقدار مجاز برای  $m$  به دست می‌آید:

$$m_{\pm} = \frac{1}{\tau} \left[ -\left( \frac{6\mu}{\rho R^2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{6\mu}{\rho R^2} \right)^2 - \left( \frac{6g}{L} \right)} \right] \quad (22-7.7)$$

و جواب عبارت است از:

$$k = C_+ e^{m_+ t} + C_- e^{m_- t}, \quad m_+ \neq m_- \quad \text{وقتی} \quad (۲۳-۷.۷)$$

$$k = C_1 e^{m t} + C_2 t e^{m t}, \quad m_+ = m_- = m \quad \text{وقتی} \quad (۲۴-۷.۷)$$

ثابت‌ها با استفاده از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

نوع حرکتی که مایع داخل فشارسنج نشان می‌دهد به مقدار مبین در معادله (۲۲-۷.۷) بستگی دارد:

(الف) اگر  $(\epsilon g/L) > (\epsilon \mu / \rho R^2)^2$  سیستم تدمیرا است و مایع به آهستگی به وضعیت نهایی خود می‌رسد؛

(ب) اگر  $(\epsilon g/L) < (\epsilon \mu / \rho R^2)^2$  سیستم کندمیرا است و مایع حول وضعیت نهایی خود نوسان می‌کند و نوسانات به تدریج کوچک و کوچک‌تر می‌شوند؛

(ج) اگر  $(\epsilon g/L)^2 = (\epsilon \mu / \rho R^2)^2$  سیستم میرای بحرانی است و مایع به سرعت و به شیوه‌ای یکنوا به وضعیت نهایی خود می‌رسد.

بنابراین شعاع لوله برای میرایی بحرانی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R_{cr} = \left( \frac{\epsilon \mu^2 L}{\rho^2 g} \right)^{1/4} \quad (۲۵-۷.۷)$$

اگر شعاع لوله  $R$ ، از  $R_{cr}$  بزرگ‌تر باشد، حرکت نوسانی رخ می‌دهد.

### ۸.۷ نوشتن موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی ۱

در معادله (۲-۴.۷)، موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی، بدون اثبات، ارائه شد. در این بخش نحوه به دست آوردن این موازنه را، از طریق انتگرال‌گیری از معادله تغییر انرژی مکانیکی (معادله (۲-۳.۳)) روی حجم کل سیستم شکل ۱-۵.۰، نشان می‌دهیم. کار خود را با انتگرال‌گیری زیر شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma} \rho v^2 + \rho \hat{\Phi} \right) dV &= - \int_{V(t)} (\nabla \cdot \left( \frac{1}{\gamma} \rho v^2 + \rho \hat{\Phi} \right) \mathbf{v}) dV - \int_{V(t)} (\nabla \cdot p \mathbf{v}) dV \\ &- \int_{V(t)} (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) dV + \int_{V(t)} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV + \int_{V(t)} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) dV \end{aligned} \quad (۱-۸.۷)$$

سپس فرمول سه‌بعدی لایب‌نیتس (معادله (الف.۵-۵)) را در سمت چپ و قضیه دیورژانس گاوس (معادله (الف.۵-۲)) را در مورد جمله‌های ۱، ۲، و ۳ در سمت راست معادله (۱-۸.۷) به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \left( \frac{1}{\gamma} \rho v^2 + \rho \hat{\Phi} \right) dV &= - \int_{S(t)} (\mathbf{n} \cdot \left( \frac{1}{\gamma} \rho v^2 + \rho \hat{\Phi} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_S)) dS - \int_{S(t)} (\mathbf{n} \cdot p \mathbf{v}) dS \\ &- \int_{S(t)} (\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) dS + \int_{V(t)} p (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV + \int_{V(t)} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) dV \end{aligned} \quad (۲-۸.۷)$$

جمله‌های حاوی  $\mathbf{v}_S$ ، سرعت سطح سیستم، از کاربرد فرمول لایب‌نیتس حاصل می‌شود. سطح  $S(t)$  از چهار بخش تشکیل می‌شود:

• سطح ثابت  $S_f$  (که  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{v}_S$  روی آن صفرند)؛

• سطوح متحرک  $S_m$  (که روی آن  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_S$  و هیچ‌یک صفر نیستند)؛

• سطح مقطع درجه‌ورودی  $S_1$  (که در آن  $\mathbf{v}_S = 0$ )؛

• سطح مقطع درجه‌خروجی  $S_2$  (که در آن  $\mathbf{v}_S = 0$ ) .

هر انتگرال روی سطح را به چهار بخش متناظر با این چهار سطح تفکیک می‌کنیم.

اکنون جمله‌های معادله (۲-۸.۷) را تفسیر می‌کنیم و در جریان این تفسیر، چندین فرض را معرفی می‌کنیم؛ این فرض‌ها را قبلاً در بخش‌های ۱.۷ تا ۴.۷ بیان کردیم، اما اکنون دلایل اختیار کردن آن‌ها را روشن می‌کنیم.

جمله سمت چپ را می‌توان با آهنگ زمانی تغییر انرژی جنبشی و پتانسیل کل ( $K_{tot} + \Phi_{tot}$ ) در داخل «حجم کنترل» تفسیر کرد که شکل و حجم آن با زمان تغییر می‌کند.

سپس پنج جمله سمت راست را، یک‌به‌یک، بررسی می‌کنیم.

جمله ۱ (شامل علامت منها) فقط در درجه‌های ورودی و خروجی سهم دارد و آهنگ‌های ورود و خروج انرژی جنبشی و پتانسیل را نشان می‌دهد:

$$\text{جمله ۱} = \left(\frac{1}{\rho}\rho_1\langle v_1^2\rangle S_1 + \rho_1\hat{\Phi}_1\langle v_1\rangle S_1\right) - \left(\frac{1}{\rho}\rho_2\langle v_2^2\rangle S_2 + \rho_2\hat{\Phi}_2\langle v_2\rangle S_2\right) \quad (3-8.7)$$

کروشه‌های زاویه‌ای مقدار متوسط را روی سطح مقطع نشان می‌دهند. برای به‌دست آوردن این نتیجه باید فرض کنیم که چگالی سیال و انرژی پتانسیل در واحد جرم، در تمام سطح مقطع ثابت‌اند و در درجه‌های ورودی و خروجی، سیال به موازات جدارهای لوله جریان دارد. نخستین جمله در معادله (۳-۸.۷) مثبت است، زیرا در صفحه ۱، داریم  $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_1 v_1)) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$  و جمله دوم منفی است، زیرا در صفحه ۲، داریم  $\mathbf{v}_2 = (-\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = (-\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_2 v_2)) = -v_2$ .

جمله ۲ (شامل علامت منها) هیچ سهمی روی  $S_f$  ندارد، زیرا  $\mathbf{v}$  در آن‌جا صفر است. روی هر جزء سطح  $dS$  از سطح  $S_m$ ، نیرویی مانند  $-\mathbf{n}pdS$  بر سطحی که با سرعت  $\mathbf{v}$  حرکت می‌کند، وارد می‌شود و حاصل ضرب نقطه‌ای این کمیت‌ها آهنگ انجام کار توسط محیط اطراف روی سیال، از طریق جزء سطح متحرک  $dS$  را نشان می‌دهد. از نماد  $W_m^{(p)}$  برای نشان دادن مجموع همه این جمله‌های سطحی استفاده می‌کنیم. به‌علاوه، انتگرال روی سطوح ساکن  $S_1$  و  $S_2$  کار لازم برای راندن سیال به درون سیستم در صفحه ۱، منهای کار لازم برای بیرون راندن سیال از سیستم در صفحه ۲ را نشان می‌دهد. بنابراین از جمله ۲ نتیجه نهایی زیر حاصل می‌شود:

$$\text{جمله ۲} = p_1\langle v_1\rangle S_1 - p_2\langle v_2\rangle S_2 + W_m^{(p)} \quad (4-8.7)$$

در این‌جا فرض کرده‌ایم که در درجه‌های ورودی و خروجی، فشار روی سطح مقطع تغییر نمی‌کند.

جمله ۳ (شامل علامت منها) هیچ سهمی روی  $S_f$  ندارد، زیرا  $\mathbf{v}$  در آن‌جا صفر است. انتگرال روی  $S_m$  را می‌توان به‌صورت آهنگ انجام کار توسط محیط روی سیال، از طریق نیروهای ویسکوز، تفسیر کرد و این انتگرال به‌صورت  $W_m^{(\tau)}$  نشان داده می‌شود. در درجه‌های ورودی و خروجی، معمولاً از جمله‌های کار مربوط به نیروهای ویسکوز چشم‌پوشی می‌کنند، زیرا در مقایسه با سهم فشار نسبتاً کوچک‌اند. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\text{جمله ۳} = W_m^{(\tau)} \quad (5-8.7)$$



اکنون نماد  $W_m = W_m^{(p)} + W_m^{(\tau)}$  را، برای نمایش آهنگ کل انجام کار توسط محیط روی سیال داخل سیستم، از طریق سطوح متحرک، معرفی می‌کنیم.

جمله‌های ۴ و ۵ را نمی‌توان ساده‌تر کرد و بنابراین:

$$\text{جمله ۴} = + \int_{V(t)} p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = -E_c \quad (۶-۸.۷)$$

$$\text{جمله ۵} = + \int_{V(t)} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) dV = -E_v \quad (۷-۸.۷)$$

برای سیالات نیوتونی، اتلاف ویسکوز  $E_v$  برابر است با آهنگ افت برگشت‌ناپذیر انرژی مکانیکی به گرمایی، به سبب ویسکوزیته سیال، و همیشه کمیتی مثبت است (نگاه کنید به معادله (۳-۳.۳)). در بخش ۵.۷ روش‌های تخمین  $E_v$  را شرح دادیم. (برای سیالات ویسکوکشنسان، که در فصل ۸ شرح داده شدند،  $E_v$  را باید به صورتی متفاوت تفسیر کرد و حتی ممکن است منفی باشد.) جمله تراکم  $E_c$  آهنگ تبدیل برگشت‌پذیر انرژی مکانیکی به انرژی گرمایی، به سبب تراکم‌پذیری سیال است؛ این جمله می‌تواند مثبت یا منفی باشد. اگر سیال تراکم‌ناپذیر فرض شود، آنگاه  $E_c$  صفر است. وقتی همه سهم‌ها را در معادله (۲-۸.۷) قرار دادیم، سرانجام موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}) = & \left(\frac{1}{\rho_1} \rho_1 \langle v_1^2 \rangle S_1 + \rho_1 \hat{\Phi}_1 \langle v_1 \rangle S_1 + p_1 \langle v_1 \rangle S_1\right) - \left(\frac{1}{\rho_2} \rho_2 \langle v_2^2 \rangle S_2 \right. \\ & \left. + \rho_2 \hat{\Phi}_2 \langle v_2 \rangle S_2 + p_2 \langle v_2 \rangle S_2\right) + W_m - E_c - E_v \end{aligned} \quad (۸-۸.۷)$$

اکنون اگر نمادهای  $w_1 = \rho_1 \langle v_1 \rangle S_1$  و  $w_2 = \rho_2 \langle v_2 \rangle S_2$  را برای آهنگ‌های جریان جرمی ورودی و خروجی تعریف کنیم، آنگاه می‌توانیم معادله (۸-۸.۷) را به صورت معادله (۲-۴.۷) بازنویسی کنیم. در این کار چندین فرض اختیار کرده‌ایم، اما معمولاً این فرض‌ها جدی نیستند. اگر وضعیت اقتضا کند، می‌توان به عقب برگشت و آثار نادیده‌گرفته شده را از نو گنجانده. شایان ذکر است که نوشتن موازنه انرژی مکانیکی مستلزم هم‌دما بودن سیستم نیست. بنابراین نتایج معادله (۲-۴.۷) و (۸-۸.۷) برای سیستم‌های غیرهم‌دما معتبر است.

برای نوشتن موازنه انرژی مکانیکی به صورت معادله (۷-۴.۷)، باید عبارتی تقریبی برای  $E_c$  به دست آوریم. فرض می‌کنیم که خط جریان معرفی وجود دارد که از سیستم می‌گذرد و مختص  $s$  را در طول این خط جریان تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم که فشار، چگالی، و سرعت روی سطح مقطع تغییر نمی‌کنند. به علاوه فرض می‌کنیم که در هر نقطه در طول این خط جریان، مقطعی مانند  $S(s)$ ، عمود بر مختص  $s$  وجود دارد، به طوری که می‌توان نوشت  $dV = S(s) ds$ . اگر سیستم قطعات متحرک داشته باشد و شکل هندسی آن پیچیده باشد، نمی‌توان این کار را انجام داد. کار را با استفاده از این واقعیت شروع می‌کنیم که در حالت پایا،  $(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0$ ، بنابراین:

$$E_c = - \int_V p(\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = + \int_V \frac{p}{\rho} (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho) dV \quad (۹-۸.۷)$$

سپس از این فرض استفاده می‌کنیم که فشار و چگالی روی سطح مقطع ثابت‌اند و عبارت تقریبی زیر را می‌نویسیم:

$$E_c \approx \int_1^2 \frac{p}{\rho} \left( v \frac{d\rho}{ds} \right) S(s) ds \quad (۱۰-۸.۷)$$

حتی اگر  $\rho$ ،  $v$ ، و  $S$  توابع مختص خط جریان  $s$  باشند، حاصل ضرب آن‌ها، یعنی  $w = \rho v S$ ، برای عملیات حالت پایا مقداری ثابت است و بنابراین می‌توان آن را از زیر علامت انتگرال بیرون آورد. در نتیجه:

$$E_c \approx w \int_1^2 \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} ds = -w \int_1^2 p \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\rho} \right) ds \quad (11-8.7)$$

سپس می‌توان انتگرال‌گیری جزء به جزء انجام داد:

$$E_c \approx -w \left[ \frac{p}{\rho} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds = -w \Delta \left( \frac{p}{\rho} \right) + w \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp \quad (12-8.7)$$

وقتی این نتیجه را در معادله (۵-۴.۷) قرار دهیم، رابطه تقریبی معادله (۷-۴.۷) به دست می‌آید. به علت ماهیت سؤال برانگیز فرض‌های اختیار شده (وجود خط جریان معرف و ثابت بودن  $p$  و  $\rho$  روی سطح مقطع)، به نظر می‌رسد بهتر است به جای معادله (۷-۴.۷) از معادله (۵-۴.۷) استفاده کنیم. به علاوه، معادله (۵-۴.۷) به آسانی به سیستم‌هایی با چندین دریچه ورودی و خروجی تعمیم داده می‌شود، اما معادله (۷-۴.۷) چنین نیست؛ این تعمیم در معادله (د) جدول ۱-۶.۷ آمده است.

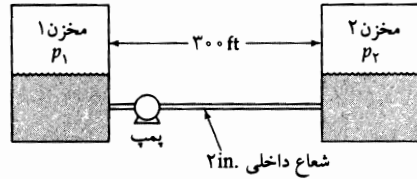
### پرسش‌های تشریحی

۱. منشأ، مفهوم، و کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی را شرح دهید و بگویید در پی‌ریزی آن‌ها از چه فرض‌هایی استفاده شده است.
۲. چگونه می‌توان دریافت که برای هر مسئله از کدام موازنه‌های ماکروسکوپی باید استفاده کرد؟ برای حل مسئله با استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی به کدام اطلاعات کمکی نیاز است؟
۳. آیا ضرایب اصطکاک و ضرایب اتلاف اصطکاک با هم رابطه دارند؟ اگر دارند، این رابطه کدام است؟
۴. درباره اتلاف ویسکوز  $E_v$  و جمله تراکم  $E_c$ ، از لحاظ تفسیر فیزیکی، علامت و روش‌های تخمین، بحث کنید.
۵. رابطه موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی با معادله برنولی، در سیالات غیریوسکوز، چیست؟
۶. در مثال ۱-۳.۷ چه اتفاقی می‌افتد، اگر مبدأ دستگاه مختصات را در نقطه دیگری اختیار کنیم؟
۷. در مثال ۱-۵.۷، هرگاه تخمین اتلاف ویسکوز با ضریبی برابر ۲ خطا داشته باشد، خطای نتیجه نهایی چه قدر خواهد بود؟ تحت چه شرایطی این خطا جدی‌تر خواهد بود؟
۸. در مثال ۱-۵.۷، چه اتفاقی می‌افتد اگر ۵ ft با ۵۰ ft جایگزین شود؟
۹. در مثال ۱-۳.۷، اگر فشار خارجی به جای ۱/۱ اتمسفر، برابر ۱۱ اتمسفر می‌بود، نتایج چه تغییری پیدا می‌کرد؟
۱۰. فهرست همه فرض‌های نهفته در معادله‌های جدول ۱-۶.۷ را بنویسید.

### مسئله‌ها

- ۱الف. افزایش فشار در گشادگی ناگهانی (شکل ۱-۶.۷). یک محلول آبی نمک با آهنگ ۴۵۰ گالن امریکایی در دقیقه، مساوی با  $0.284 \text{ m}^3/\text{s}$  از یک گشادگی ناگهانی عبور می‌کند. قطر داخلی لوله کوچک‌تر ۵ in. و قطر داخلی لوله بزرگ‌تر ۹ in. است. مطلوب است تعیین افزایش فشار برحسب پوند بر اینچ مربع، هرگاه چگالی محلول  $63 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$  باشد. آیا جریان در لوله کوچک‌تر آرام است یا متلاطم؟
- جواب:  $10^3 \text{ N/m}^2 \times 1.08 = 108 \text{ psi}$ .

۲.الف ۲. تلمبه‌زنی محلول هیدروکلریک اسید (شکل ۷ الف ۲). محلول رقیق HCl با چگالی و ویسکوزیته ثابت  $(\mu = 1 \text{ cp}, \rho = 62.4 \text{ lb}_m/\text{ft}^3)$  با پمپ از مخزن ۱ به مخزن ۲ منتقل می‌شود، بدون آن‌که ارتفاع کلی تغییر کند. فشار در فضا‌های گازی دو مخزن برابر است با  $p_1 = 1 \text{ atm}$  و  $p_2 = 4 \text{ atm}$ . شعاع لوله ۲ in. و عدد رینولدز  $10^4 \times 7.11$  است. سرعت متوسط در لوله  $2.30 \text{ ft/s}$  است. چه مقدار توان باید به پمپ داد؟



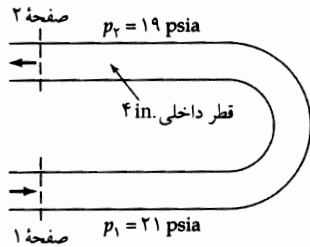
جواب:  $2.4 \text{ hp} = 1.8 \text{ kW}$

شکل ۷ الف ۲. تلمبه‌زنی محلول هیدروکلریک اسید.

۳.الف ۳. جریان گاز تراکم‌پذیر در لوله استوانه‌ای. نیتروژن گازی با دمای  $25^\circ\text{C}$  در لوله مستقیم افقی به قطر داخلی ۳ in. با آهنگ  $0.28 \text{ lb}_m/\text{s}$ ، به حالت متلاطم جریان دارد. فشار مطلق در ورودی و خروجی، به ترتیب،  $2 \text{ atm}$  و  $1 \text{ atm}$  است. مقدار  $\dot{E}_v$  را با فرض ایده‌آل بودن رفتار گاز و توزیع یکنواخت سرعت شعاعی، تخمین بزنید. جواب:  $26.3 \text{ Btu/lb}_m = 6.12 \times 10^4 \text{ J/kg}$

۴.الف ۴. جریان تراکم‌ناپذیر در حلقه. آب با دمای  $60^\circ\text{F}$  از پمپ و از طریق مجرای حلقوی هم‌محور به طول  $20.3 \text{ ft}$ ، با آهنگ ۲۴۱ گالن امریکایی در دقیقه، تحویل داده می‌شود. شعاع‌های داخلی و خارجی فضای حلقوی ۳ in. و ۷ in. است. ورودی ۵ ft پایین‌تر از خروجی است. مطلوب است تعیین توان خروجی که از پمپ انتظار می‌رود. برای حل این مسئله از رابطه تجربی شعاع هیدرولیکی میانگین استفاده کنید. فرض کنید فشار در ورودی پمپ و خروجی حلقه یکسان است.

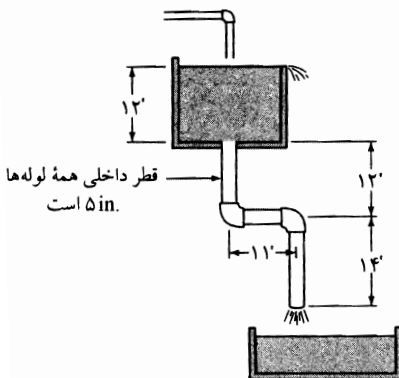
جواب:  $0.31 \text{ hp} = 0.23 \text{ kW}$



۵.الف ۵. نیروی وارد بر خم U شکل (شکل ۷ الف ۵). آب با دمای  $68^\circ\text{F}$  ( $\mu = 1 \text{ cp}, \rho = 62.4 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ ) با حالت متلاطم و آهنگ  $3 \text{ ft}^3/\text{s}$  از خم U شکل لوله می‌گذرد. نیروی افقی که آب بر این خم وارد می‌کند چه قدر است؟

جواب:  $903 \text{ lb}_f$

شکل ۷ الف ۵. جریان در خم U شکل؛ هردو شاخه خم در یک تراز قرار دارند.



۶.الف ۶. محاسبه جریان حجمی (شکل ۷ الف ۶). مطلوب است محاسبه آهنگ جریان حجمی آب در دمای  $68^\circ\text{F}$  در سیستم نشان داده شده در شکل.

شکل ۷ الف ۶. جریان خروجی از مخزن با فشار ارتفاعی ثابت.

۷.الف ۷. محاسبه سرعت‌های متوسط مختلف با استفاده از داده‌های لوله‌پیتو. در جدول زیر بعضی داده‌های تجربی<sup>۱</sup> حاصل از کاربرد لوله‌پیتو در مورد جریان آب در لوله‌ای با شعاع داخلی ۳/۰۶ in. ارائه شده‌است.

وضعیت	فاصله از مرکز لوله (in.)	سرعت موضعی (ft/s)	وضعیت	فاصله از مرکز لوله (in.)	سرعت موضعی (ft/s)
۱	۲,۸۰	۷,۸۵	۶	۰,۷۲	۱۱,۷۰
۲	۲,۱۷	۱۰,۳۹	۷	۱,۴۳	۱۱,۴۷
۳	۱,۴۳	۱۱,۳۱	۸	۲,۱۷	۱۱,۱۰
۴	۰,۷۲	۱۱,۶۶	۹	۲,۸۰	۹,۲۶
۵	۰,۰۰	۱۱,۷۹			

این داده‌ها را ترسیم کنید تا مشخص شود که آیا جریان آرام است یا متلاطم. سپس با استفاده از قاعده سیمپسون برای انتگرال‌گیری عددی،  $\langle v \rangle / v_{\max}$ ،  $\langle v^2 \rangle / v_{\max}^2$  و  $\langle v^3 \rangle / v_{\max}^3$  را محاسبه کنید. آیا این نتایج با مقادیر  $\frac{5}{49}$  (که درست قبل از مثال ۱۲.۷ ارائه شد) و  $\frac{43200}{40817}$  (که درست قبل از مثال ۱۴.۷ ارائه شد) سازگارند؟

۱.ب ۷. محاسبه متوسط سرعت با استفاده از قانون توان  $\frac{1}{7}$ . در مسئله ۷.الف ۷، نسبت‌های سرعت را طبق توزیع سرعت معادله (۴-۱.۵) محاسبه کنید.

۲.ب ۷. رابطه بین نیرو و اتلاف ویسکوز برای جریان در مجراهایی با مقطع متغیر. معادله (۷-۵.۷) رابطه  $F_{f \rightarrow s} = \rho S \hat{E}_v$  را بین نیروی پسا و اتلاف ویسکوز برای مجراهای مستقیم با مقطع اختیاری، اما ثابت، ارائه می‌دهد. در این جا مجرای افقی مستقیمی را در نظر بگیرید که مقطع آن، با حرکت به طرف پایین دست، به تدریج تغییر می‌کند. خود را به مجرا با تقارن محوری محدود می‌کنیم، بنابراین نیروی پسا در امتداد محوری است. اگر سطح مقطع و فشار در ورودی  $S_1$  و  $p_1$ ، و در خروجی  $S_2$  و  $p_2$  باشند، اثبات کنید که رابطه نظیر معادله (۷-۵.۷) عبارت است از:

$$F_{f \rightarrow s} = \rho S_m \hat{E}_v + p_m (S_1 - S_2) \quad (۱-۲.۷)$$

که در آن:

$$\frac{1}{S_m} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right), \quad p_m = \frac{p_1 S_1 + p_2 S_2}{S_1 + S_2} \quad (۳, ۲-۲.۷)$$

این نتایج را تفسیر کنید. نگاه کنید به صفحه‌های ۱۴ و ۱۵ مرجع ان. بی. بیرد، در صفحه ۷۰.

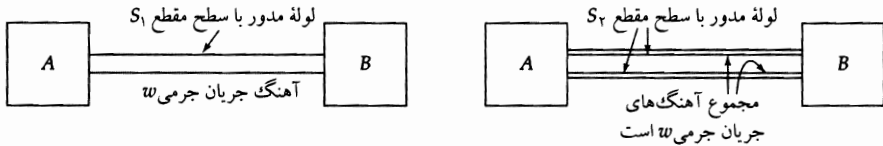
۳.ب ۷. جریان در گشادگی ناگهانی. (شکل ۱-۶.۷). سیالی از یک گشادگی ناگهانی می‌گذرد که قطرهای اولیه و نهایی آن، به ترتیب، عبارت‌اند از  $D_1$  و  $D_2$ . در کدام نسبت  $D_2/D_1$  افزایش فشار  $p_2 - p_1$ ، به ازای مقدار مفروض  $v_1$  ماکزیم خواهد بود؟

جواب:  $D_2/D_1 = \sqrt{2}$ .

۴.ب ۷. جریان بین دو مخزن (شکل ۴.۷). حالت I: سیالی بین دو مخزن A و B جریان دارد، زیرا  $p_A > p_B$ . مخزن‌ها در یک تراز قرار دارند و بین آن‌ها پمپ نصب نشده‌است. سطح مقطع لوله رابط بین پمپ‌ها  $S_1$  و آهنگ جریان جرمی، به ازای افت فشار  $(p_A - p_B)_I$  برابر  $w$  است.

1. B. Bird, C. E. thesis, University of Wisconsin (1915).

حالت II: می‌خواهیم لوله‌ی رابط بین دو مخزن را با دو لوله، هریک با سطح مقطع  $S_1$  و  $S_2$ ، تعویض کنیم. چه قدر اختلاف فشار  $(p_A - p_B)_{II}$  لازم است تا آهنگ جریان جرمی با حالت I برابر شود؟ جریان را متلاطم فرض کنید و فرمول بلازیوس (معادله ۲.۶-۱۲) برای ضریب اصطکاک را به کار ببرید. از اتلاف‌های ورودی و خروجی چشم‌پوشی کنید.  
 جواب:  $(p_A - p_B)_{II} / (p_A - p_B)_I = 2^{5/8}$ .



شکل ۴.۷. جریان بین دو مخزن.

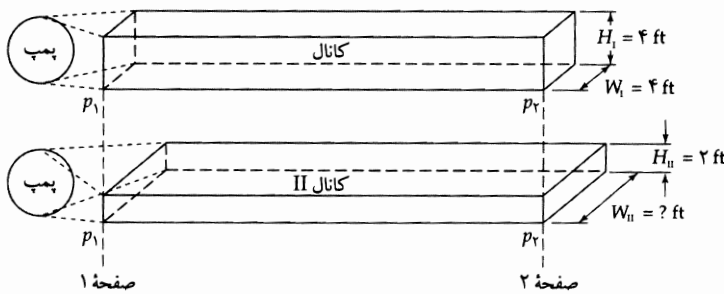
۵.۷. طرح بازنگری‌شده‌ی کانال هوا (شکل ۵.۷). می‌خواهیم یک کانال مستقیم و افقی برای عبور هوا در کارخانه‌ای نصب کنیم. مقطع این کانال باید  $4 \text{ ft} \times 4 \text{ ft}$  باشد. به علت وجود بعضی موانع، ارتفاع کانال را نمی‌توان بیش از  $2 \text{ ft}$  گرفت، اما عرض آن محدودیت ندارد. عرض کانال چه قدر باشد تا فشارهای نهایی و آهنگ جریان حجمی نهایی تغییری نکند؟ فرض کنید جریان متلاطم است و فرمول بلازیوس (معادله ۲.۶-۱۲) برای این محاسبه صادق است. در این وضعیت می‌توان هوا را تراکم‌ناپذیر فرض کرد.

(الف) روایت ساده‌شده‌ی موازنه انرژی مکانیکی را برای کانال‌های I و II بنویسید؛

(ب) افت فشار در دو کانال را برابر بگیرید و معادله‌ای به دست آورید که عرض و ارتفاع دو کانال را به هم مربوط کند؛

(ج) معادله (ب) را به روش عددی حل کنید تا عرض لازم برای کانال II را به دست آورید.

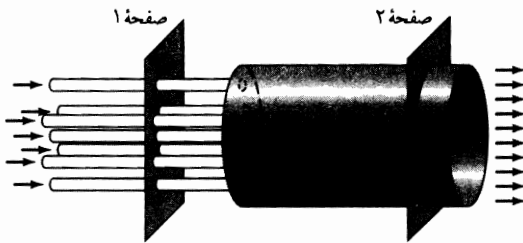
جواب: (ج)  $9.2 \text{ ft}$ .



شکل ۵.۷. نصب کانال هوا.

۶.۷. تخلیه چند جریان در مجرای مشترک<sup>۲</sup> (شکل ۶.۷). مثال ۶.۷-۱ را به سیال تراکم‌ناپذیری که از چندین لوله در یک لوله بزرگ‌تر، با افزایش خالص سطح مقطع، تخلیه می‌شود، تعمیم دهید. این نوع سیستم‌ها در بعضی انواع خاص مبادله‌کن گرما مهم‌اند که در آن‌ها اتلاف‌های انبساطی و انقباضی بخش مهمی از افت فشار کل را تشکیل می‌دهند. جریان در لوله‌های کوچک و لوله بزرگ را می‌توان آرام یا متلاطم فرض کرد. این سیستم را با استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی جرم، اندازه حرکت، و انرژی مکانیکی تحلیل کنید.

2. W. M. Kays, *Trans. ASME*, **72**, 1067-1074 (1950).



شکل ۶.۷. تخلیه چند لوله در یک مجرای مشترک. سطح مقطع کل موجود برای جریان در صفحه ۱، برابر  $S_1$  و در صفحه ۲، برابر  $S_2$  است.

۷.ب.۷ تغییرات مقدار گاز موجود در یک مخزن گاز. یک مخزن گاز طبیعی، گاز را با آهنگ جریان  $w_1 \text{ lb}_m/\text{hr}$  از خط لوله دریافت می‌کند. در طی یک دوره ۲۴ ساعته، نیاز سوخت مخزن،  $w_2$ ، تقریباً طبق رابطه زیر تغییر می‌کند:

$$w_2 = A + B \cos \omega t \quad (۱-۷.۷)$$

که در آن  $\omega t$  زمان بدون بُعد اندازه‌گیری شده از زمان نیاز اوج (تقریباً ۶ صبح) است.

(الف) مقادیر ماکزیمم، مینیمم، و متوسط  $w_2$  را برای یک دوره ۲۴ ساعته، برحسب  $A$  و  $B$  تعیین کنید؛

(ب) مقدار  $w_1$  لازم را، برحسب  $A$  و  $B$  تعیین کنید؛

(ج) فرض کنید  $m_{\text{tot}} = m_{\text{tot}}^*$  در  $t = 0$  و از موازنه جرم ناپایا، با این شرط اولیه، انتگرال بگیرید تا  $m_{\text{tot}}$  به صورت تابعی از زمان به دست آید؛

(د) فرض کنید در مخزن  $A = 5000 \text{ lb}_m/\text{hr}$ ،  $B = 2000 \text{ lb}_m/\text{hr}$ ، و  $\rho = 0.44 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ ، مطلوب است تعیین ظرفیت مطلق مینیمم مخزن برحسب فوت مکعب، برای تأمین نیاز بدون ایجاد وقفه. در چه ساعتی از روز مخزن باید کاملاً پر باشد تا این خواسته عملی شود؟

(ه) مطلوب است تعیین مینیمم ظرفیت مخزن برحسب فوت مکعب، که برای تأمین ذخیره سه‌روزه در همه اوقات لازم است.

جواب:  $3.47 \times 10^5 \text{ ft}^3$ ;  $8.53 \times 10^6 \text{ ft}^3$ .

۸.ب.۷ تغییر ارتفاع مایع با زمان (شکل ۱-۷.۷).

(الف) معادله (۴-۱.۷) را با استفاده از حساب انتگرال به دست آورید؛

(ب) در مثال ۱-۷.۷، عبارتی برای ارتفاع مایع،  $h$ ، به صورت تابعی از زمان به دست آورید؛

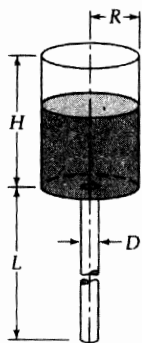
(ج) نمودار معادله (۸-۱.۷) را، با استفاده از کمیت‌های بدون بُعد ترسیم کنید. آیا این کار سودمند است؟

۹.ب.۷ تخلیه مخزن استوانه‌ای با استفاده از لوله خروجی (شکل ۹.۷).

(الف) مثال ۱-۷.۷ را دوباره حل کنید، اما به جای مخزن کروی، از مخزن استوانه‌ای استفاده کنید. از رهیافت شبه‌پایا استفاده کنید؛ یعنی موازنه جرم حالت ناپایا را همراه با معادله هیگن-پونازوی برای جریان آرام در لوله به‌کار ببرید.

(ب) مسئله را برای حالت جریان متلاطم در لوله حل کنید.

جواب: (الف)  $t_{\text{تخلیه}} = \frac{128 \mu L R^4}{\rho g D^5} \ln \left( 1 + \frac{H}{L} \right)$



شکل ۹.۷. مخزن استوانه‌ای با لولهٔ طویل متصل به آن. سطح سیال و خروجی لوله بازند و در فشار جو قرار دارند.

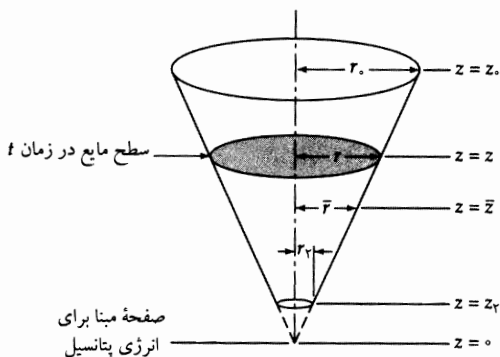
۱۰.۷. زمان تخلیهٔ مخزن مخروطی (شکل ۷.۱۰). یک مخزن مخروطی، با ابعاد مفروض در شکل، ابتدا با مایع پر شده‌است. مایع می‌تواند تحت اثر نیروی وزن خود تخلیه شود. مطلوب است تعیین زمان تخلیهٔ مایع. در قسمت‌های (الف) تا (ج) مایع داخل مخروط را «سیستم» بگیرید.

(الف) ابتدا با استفاده از موازنهٔ ماکروسکوپی جرم حالت‌ناپایا نشان دهید که سرعت خروجی برابر است با:

$$v_2 = -\frac{z^2}{z_1^2} \frac{dz}{dt} \quad (۷.۱۰-۱)$$

(ب) موازنهٔ ماکروسکوپی انرژی مکانیکی را برای سیستم بنویسید. جملهٔ اتلاف ویسکوز و جملهٔ حاوی مشتق زمانی انرژی جنبشی را حذف کنید و دلایل انجام این کار را شرح دهید. نشان دهید که در این صورت معادلهٔ (۷.۱۰-۱) به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$v_2 = \sqrt{2g(z - z_2)} \quad (۷.۱۰-۲)$$



شکل ۱۰.۷. مخزنی مخروطی که سیال از آن خارج می‌شود. کمیت  $r$  شعاع سطح مایع در ارتفاع  $z$ ، و  $\bar{r}$  شعاع مخروط در ارتفاع اختیاری  $\bar{z}$  است.

(ج) نتایج (الف) و (ب) را ترکیب کنید. معادلهٔ دیفرانسیل حاصل را با شرط اولیهٔ مناسب بنویسید تا تراز مایع  $z$  را به صورت تابعی از  $t$  به دست آورید. سپس زمان تخلیه را به دست آورید.

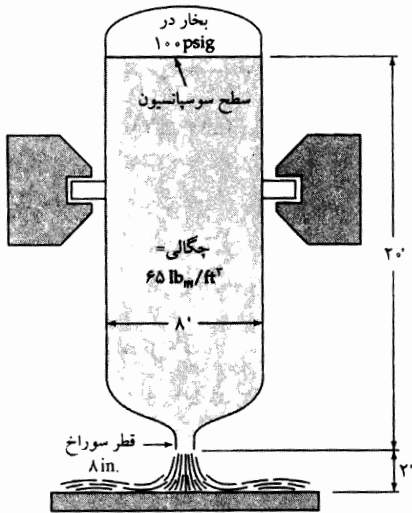
$$t_{\text{تخلیه}} = \frac{1}{5} \left( \frac{z_0}{z_2} \right)^2 \sqrt{\frac{2z_0}{g}} \quad (۷.۱۰-۳)$$

همهٔ فرض‌های اختیارشده را فهرست کنید و شرح دهید که تا چه اندازه مهم‌اند. چگونه می‌توان از این فرض‌ها اجتناب کرد؟

(د) با انتخاب صفحه ۱ به صورت صفحه‌ای ساکن و اندکی پایین‌تر از سطح مایع در زمان  $t$ ، قسمت (ب) را دوباره حل کنید. می‌دانیم که در بازه زمانی جزئی  $dt$  که موازنه انرژی مکانیکی ناپایا برای آن نوشته شده است، سطح مایع از صفحه ۱ پایین‌تر نخواهد رفت. با این انتخاب صفحه ۱، مشتق  $d\Phi_{\text{tot}}/dt$  صفر است و جمله کار  $W_m$  وجود ندارد. به علاوه، وضعیت در صفحه ۱ بسیار نزدیک به وضعیت در سطح مایع است. سپس، با تقریب حالت شبه‌پایا، مبنی بر این‌که مشتق  $dK_{\text{tot}}/dt$  تقریباً صفر است، و چشم‌پوشی از جمله اتلاف ویسکوز، موازنه انرژی مکانیکی، با  $w_1 = w_2$  به صورت زیر درمی‌آید:

$$\circ = \frac{1}{\rho}(v_1^2 - v_2^2) + g(h_1 - h_2) \quad (۷.۱۰-۴)$$

۱۱.۷ تجزیه تراشه‌های چوب (شکل ۷.۱۱). در تولید خمیر کاغذ، الیاف سلولزی تراشه‌های چوب را، با گرما دادن در محلول‌های قلیایی تحت فشار در مخازن استوانه‌ای بزرگ، موسوم به مخزن هضم، از لیگنین پاک می‌کنند. در پایان مرحله «پخت»، درجه کوچکی در یک سر مخزن هضم باز می‌شود و دوغایی از تراشه‌های نرم‌شده چوب بیرون می‌باشد و به صفحه‌ای برخورد می‌کند تا عمل خرد شدن تراشه‌ها و جدا شدن الیاف کامل شود. سرعت جریان خروجی و نیروی اضافی وارد بر صفحه برخورد را، مدت کوتاهی پس از آغاز تخلیه تخمین بزنید. آثار اصطکاکی در داخل مخزن هضم، و انرژی جنبشی اندک سیال در داخل مخزن را می‌توان نادیده گرفت. (تذکر: برای آشنایی با دو روش انتخاب صفحه‌های ورودی و خروجی، به مسئله ۷.۱۰ نگاه کنید.)  
جواب:  $۴۸۵۰۰ \text{ N}$  (یا  $۱۰۹۰۰ \text{ lbf}$ );  $۱۲۷۵ \text{ kg/s}$  (یا  $۲۸۱۰ \text{ lb}_m/\text{s}$ )



شکل ۷.۱۱ مخزن هضم خمیر.

۱۲.۷ معیارهای جریان آزاد بخار در خط لوله. برای تضمین پر شدن کامل خط لوله با مایع، لازم است که در هر نقطه،  $p > p_{\text{vap}}$ . این معیار را، با استفاده از موازنه انرژی مکانیکی روی بخش‌های مناسبی از سیستم، در مورد سیستم نشان داده شده در شکل ۷.۱۰-۵ به کار ببرید.

۱.۷ تصحیحات انتهایی در ویسکوزیته سنج لوله‌ای (شکل ۷.۱۰-۳). در تحلیل داده‌های ویسکوزیته سنج لوله‌ای؛

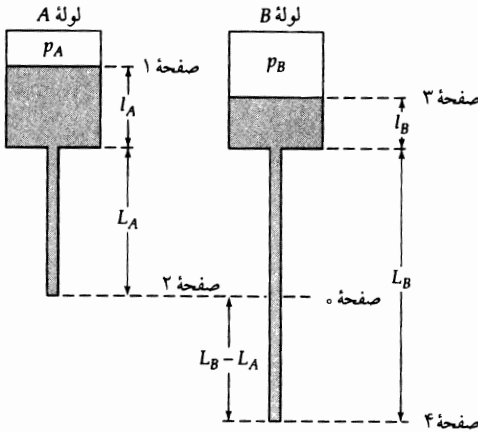
3. A. G. Fredrickson, PhD Thesis, University of Wisconsin (1959); *Principles and Applications of Rheology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.(1964), §9.2.



برای تعیین ویسکوزیته، افت فشار برحسب داده‌های آهنگ جریان را با عبارت نظری (معادله هیگن-پواتزوی یا معادله ۳.۲-۲۱) مقایسه می‌کنند. در عبارت اخیر فرض می‌شود جریان در ناحیه بین دو صفحه که فشار در آن اندازه‌گیری می‌شود، کاملاً شکل یافته‌است. در دستگامی مانند آن چه در شکل نشان داده شده، فشار در لوله خروجی (۲)، و هم‌چنین در بالای سیال داخل مخزن (۱) معلوم است. اما، در ناحیه ورودی لوله، توزیع سرعت هنوز کاملاً شکل نیافته‌است. بنابراین عبارت نظری که افت فشار را به آهنگ جریان مربوط می‌کند، معتبر نیست. اما روشی وجود دارد که در آن می‌توان با اندازه‌گیری جریان در دو لوله با طول‌های متفاوت  $L_A$  و  $L_B$ ، از معادله هیگن-پواتزوی استفاده کرد. طول لوله کوتاه‌تر باید به اندازه کافی بلند باشد که توزیع سرعت در خروجی کاملاً شکل یافته باشد. در این صورت بخش انتهایی لوله طویل، به طول  $L_B - L_A$ ، ناحیه‌ای است که جریان در آن کاملاً شکل یافته‌است. اگر مقدار  $P_0 - P_f$  را برای این ناحیه بدانیم، آن‌گاه می‌توانیم از معادله هیگن-پواتزوی استفاده کنیم. نشان دهید که ترکیب مناسبی از موازنه‌های انرژی مکانیکی، که برای سیستم‌های ۱-۲، ۳-۴، و ۴-۰ نوشته شود، به‌ازای آهنگ جریان برابر در ویسکوزیته‌سنج‌ها، عبارت زیر را برای  $P_0 - P_f$  نتیجه می‌دهد.

$$\frac{P_0 - P_f}{L_B - L_A} = \frac{p_B - p_A}{L_B - L_A} + \rho g \left( 1 + \frac{L_B - L_A}{L_B - L_A} \right) \quad (۱-۱.ج۷)$$

که در آن  $P_0 = p_0 + \rho g z_0$ . با دقت شرح دهید که چگونه می‌توان از معادله (۱-۱.ج۷) برای تحلیل نتایج اندازه‌گیری تجربی استفاده کرد. آیا معادله (۱-۱.ج۷) برای مجراهایی با مقطع غیرمردور یکنواخت معتبر است؟



شکل ۱-۱.ج۷ دو ویسکوزیته‌سنج با آهنگ جریان مساوی و فشار خروجی برابر. فشارهای  $p_B$  و  $p_A$  استفاده از گاز خنثی ثابت نگه داشته می‌شوند.

۱.۵۷ به‌دست آوردن موازنه‌های ماکروسکوپی از معادله‌های تغییر. موازنه‌های ماکروسکوپی جرم و اندازه‌حرکت را با انتگرال‌گیری از معادله‌های پیوستگی و حرکت، روی سیستم جریان شکل ۱-۰.۷ به‌دست آورید. از روش گفته‌شده در بخش ۸.۷ برای موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی پیروی کنید و قضیه دیورژانس گاوس و فرمول لایب‌نیتس را به‌کار بگیرید.

## فصل ۸

### مایعات پلیمری

۱.۸ نمونه‌هایی از رفتار مایعات پلیمری

۲.۸ سیال سنجی و توابع ماده

۳.۸ ویسکوزیته غیرنیوتونی و مدل‌های تعمیم‌یافته نیوتون

۴.۸ کشسانی و مدل‌های ویسکوکشان خطی

۵.۸ مشتق‌های هم‌چرخشی و مدل‌های ویسکوکشان غیرخطی

۶.۸ نظریه‌های مولکولی برای مایعات پلیمری

در هفت فصل اول این کتاب فقط سیالات نیوتونی را بررسی کردیم. روابط بین تنش‌ها و گرادیان‌های سرعت، برای جریان برشی ساده توسط معادله (۱.۱-۲) و برای جریان‌های اختیاری وابسته به زمان، توسط معادله (۱.۱-۶) (یا معادله (۱.۱-۷)) توصیف می‌شود. برای سیال نیوتونی، به دو پارامتر ماده نیاز است - ضرایب ویسکوزیته  $\mu$  و  $\kappa$  - که به دما، فشار، و ترکیب شیمیایی وابسته‌اند، اما به گرادیان سرعت وابسته نیستند. همه گازها و همه مایعاتی که از مولکول‌های «کوچک» (تا وزن مولکولی حدود  $5000$ ) تشکیل می‌شوند، با مدل سیال نیوتونی به دقت قابل‌توصیف‌اند. سیال‌های بسیاری وجود دارند که با معادله (۱.۱-۶) قابل‌توصیف نیستند؛ آن‌ها را سیالات غیرنیوتونی می‌نامند. این سیالات که ساختار پیچیده‌ای دارند، محلول‌های پلیمری، مذاب‌های پلیمری، محلول‌های صابون، سوسپانسیون‌ها، امولسیون‌ها، خمیرها، و بعضی از سیالات زیستی را شامل می‌شوند. در این فصل روی مایعات پلیمری تمرکز می‌کنیم. چون محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری حاوی مولکول‌هایی با وزن مولکولی بالا و درجات آزادی داخلی بسیار هستند، رفتار آن‌ها با رفتار سیالات نیوتونی تفاوت کیفی دارد. ویسکوزیته آن‌ها به شدت تابع گرادیان سرعت است و ممکن است «آثار کشسان» بارز از خود نشان دهند. به علاوه، در جریان برشی ساده پایا بین دو صفحه موازی، تنش‌های قائم غیرصفر و نامساوی ( $\tau_{zz}$ ،  $\tau_{yy}$ ،  $\tau_{xx}$ ) وجود دارند که در سیالات نیوتونی وجود ندارند. در بخش ۱.۸ چند آزمایش را شرح می‌دهیم که بر تفاوت بین سیالات نیوتونی و پلیمری تأکید می‌کنند.

در هنگام کار با سیال‌های نیوتونی، علم اندازه‌گیری ویسکوزیته را ویسکوزیته‌سنجی می‌نامند و در فصل‌های قبل نمونه‌هایی از سیستم‌های ساده‌ای را که می‌توان به عنوان ویسکوزیته‌سنج از آن‌ها استفاده کرد (لوله مدور، سیستم مخروط و صفحه، و استوانه‌های هم‌محور) دیدیم. برای تعیین مشخصه‌های سیالات غیرنیوتونی، نه تنها باید ویسکوزیته

آن‌ها را اندازه‌گیری کنیم، بلکه باید تنش‌های قائم و پاسخ‌های ویسکوکشسان آن‌ها را نیز اندازه بگیریم. علم اندازه‌گیری این خواص را سیال‌سنجی و ابزارهای اندازه‌گیری آن‌ها را سیال‌سنج می‌نامند. در بخش ۲.۸ این موضوع را به اختصار بررسی می‌کنیم. علم سیال‌شناسی یا رئولوژی شامل همه جنبه‌های مطالعه تغییر شکل و جریان جامدات غیرهوکوی مایعات غیرنیوتونی است.

پس از دو بخش نخست، که با واقعیت‌های تجربی سروکار دارند، به ارائه «مدل‌های» مختلف غیرنیوتونی (یعنی عبارات‌های تجربی برای تانسور تنش) می‌پردازیم که معمولاً برای توصیف مایعات پلیمری به‌کار می‌روند. در بخش ۳.۸ کار را با مدل‌های نیوتونی تعمیم‌یافته آغاز می‌کنیم که نسبتاً ساده‌اند، اما فقط می‌توانند ویسکوزیته غیرنیوتونی (و نه آثار ویسکوکشسان) را توصیف کنند.

سپس در بخش ۴.۸ نمونه‌هایی از مدل‌های ویسکوکشسان خطی ارائه می‌دهیم، که می‌توانند پاسخ‌های ویسکوکشسان را توصیف کنند، اما فقط در جریان‌هایی با گرادیان‌های جابه‌جایی فوق‌العاده کوچک. پس از آن در بخش ۵.۸ چندین مدل ویسکوکشسان غیرخطی ارائه می‌دهیم و هدف از ارائه آن‌ها قابل‌کاربرد بودن در همه وضعیت‌های جریان است.

هم‌چنان که از مدل‌های ابتدایی به سمت مدل‌های پیچیده‌تر پیش می‌رویم، مجموعه پدیده‌های مشاهده‌شده‌ای را که می‌توانیم توصیف کنیم، وسعت می‌بخشیم (البته ریاضیات موردنیاز نیز دشوارتر می‌شود). سرانجام در بخش ۶.۸ بحث مختصری درباره رهیافت نظریه سینتیکی به دینامیک سیالات پلیمری ارائه می‌شود.

در ساخت قطعات پلاستیکی، و به‌عنوان ماده افزودنی به روانکارها، مواد غذایی، و مرکب‌ها، با مایعات پلیمری سروکار پیدا می‌کنیم. این مایعات دسته بزرگ و مهمی از مایعات را تشکیل می‌دهند و بسیاری از دانشمندان و مهندسان باید با آن‌ها کار کنند.

دینامیک سیالات، انتقال گرما، و نفوذ مایعات پلیمری بخشی از موضوع پدیده‌های انتقال را تشکیل می‌دهند که به سرعت در حال رشد است و کتاب‌های درسی<sup>۱</sup> رساله‌ها<sup>۲</sup> و نشریات بسیاری به این موضوع اختصاص یافته‌اند. این موضوع از دیدگاه نظریه سینتیکی بررسی شده‌است و نظریه‌های مولکولی در درک ما از رفتار مکانیکی، گرمایی، و نفوذی این سیالات سهم به‌سزایی داشته‌اند.<sup>۳</sup> کسانی که به تاریخچه این موضوع علاقه‌مندند می‌توانند به کتاب تانر و والترز رجوع کنند.<sup>۴</sup>

1. A. S. Lodge, *Elastic Liquids*, Academic Press, New York (1964); R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1, Fluid Mechanics*, Wiley-Interscience, New York, 2nd edition (1987); R. I. Tanner, *Engineering Rheology*, Clarendon Press, Oxford (1985).  
2. H. A. Barnes, J. F. Hutton, and K. Walters, *An Introduction to Rheology*, Elsevier, Amsterdam (1989); H. Giesekus, *Phänomenologische Rheologie: Eine Einführung*, Springer Verlag, Berlin (1994).

کتاب‌هایی که بر جنبه‌های مهندسی این موضوع تأکید می‌کنند عبارت‌اند از:

Z. Tadmor and C. G. Gogos, *Principles of Polymer Processing*, Wiley, New York (1979), D. G. Baird and D. I. Collias, *Polymer Processing: Principles and Design*, Butterworth-Heinemann, Boston (1995), J. Dealy and K. Wissbrun, *Melt Rheology and its Role in Plastics processing*, Van Nostrand Reinhold, New York (1990).  
3. R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 2, Kinetic Theory*, Wiley-Interscience, New York, 2nd edition (1987); C. F. Curtiss and R. B. Bird, *Adv. Polymer Sci.* **125**, 1-101 (1996) and *J. Chem. Phys.* **111**, 10362-10370 (1999).  
4. R. I. Tanner and K. Walters, *Rheology: An Historical Perspective*, Elsevier, Amsterdam (1998).

### ۱.۸ نمونه‌هایی از رفتار مایعات پلیمری

در این بخش چند آزمایش را شرح می‌دهیم که در آن‌ها رفتار سیالات نیوتونی و پلیمری مقایسه می‌شود.<sup>۱</sup>

#### جریان آرام در لوله‌های مدور

حتی برای جریان آرام محوری و حالت پایا در لوله‌های مدور، تفاوت مهمی بین رفتار مایعات نیوتونی و مایعات پلیمری وجود دارد. توزیع سرعت، سرعت متوسط، و افت فشار در مایعات نیوتونی، به ترتیب، از معادله‌های (۳.۲-۱۸)، (۳.۲-۲۰) و (۳.۲-۲۱) به دست می‌آید.

برای مایعات پلیمری، داده‌های تجربی نشان می‌دهند که معادله‌های زیر روابطی منطقی‌اند:

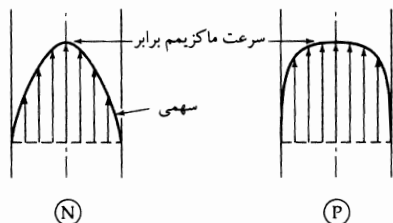
$$v_z v_{z,\max} \approx 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{(\frac{1}{n})+1} \frac{\langle v_z \rangle}{v_{z,\max}} \approx \frac{(\frac{1}{n})+1}{(\frac{1}{n})+3} \quad (۲, ۱-۱.۸)$$

که در آن  $n$  پارامتری مثبت و مشخصه سیال است و معمولاً از واحد کوچک‌تر است؛ یعنی توزیع سرعت در مایعات پلیمری کندتر از سیالات نیوتونی است که در آن‌ها داریم  $n = 1$ . به علاوه، آزمایش نشان داده‌است که:

$$P_o - P_L \sim w^n \quad (۳-۱.۸)$$

بنابراین سرعت افزایش افت فشار مایعات پلیمری با آهنگ جریان جرمی، بسیار کم‌تر از سیالات نیوتونی است که از رابطه خطی پیروی می‌کنند.

در شکل ۱-۱.۸ توزیع نمونه‌وار سرعت برای جریان آرام سیالات نیوتونی و پلیمری، با سرعت ماکزیمم یکسان، نشان داده شده‌است. این آزمایش ساده حاکی از آن است که ویسکوزیته سیالات پلیمری به گرادیان سرعت وابسته است. این نکته را در بخش ۳.۸ با تفصیل بیشتر بررسی خواهیم کرد.



شکل ۱-۱.۸ جریان آرام در لوله‌های مدور. در این بخش و در بخش آینده از نمادهای  $N$  (مایع نیوتونی) و  $P$  (مایع پلیمری) استفاده می‌شود.

برای جریان آرام در لوله‌های غیرمدور، مایعات پلیمری جریان‌های ثانوی از خود نشان می‌دهند که بر حرکت محوری سوار شده‌اند. یادآوری می‌کنیم که در جریان‌های نیوتونی متلاطم نیز جریان‌های ثانوی مشاهده می‌شوند. در شکل ۱-۱.۵ نشان دادیم که سیال به سمت گوشه‌های مجرا حرکت می‌کند و سپس به وسط آن بازمی‌گردد. برای جریان آرام سیالات پلیمری، جریان‌های ثانوی در جهت عکس حرکت می‌کنند از گوشه‌های مجرا به وسط آن، و سپس بازگشت به سمت جدارها.<sup>۲</sup> در جریان‌های متلاطم، جریان‌های ثانوی از آثار لختی ناشی می‌شوند، اما در جریان‌های پلیمری، جریان ثانویه با «تنش‌های قائم» همراه است.

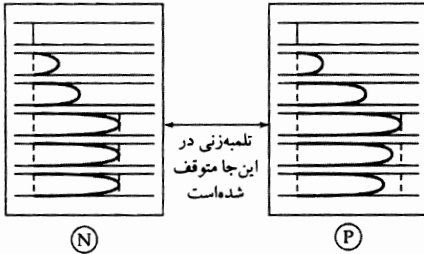
۱. اطلاعات مفصل‌تر درباره این آزمایش‌ها و آزمایش‌های دیگر را می‌توانید در منابع زیر پیدا کنید:

R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1, Fluid Dynamics*, Wiley-Interscience, New York, 2nd edition (1987), Chapter 2. See also A. S. Lodge, *Elastic Liquids*, Academic press, New York (1964), Chapter 10.

2. B. Gervang and P. S. Larsen, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **39**, 217-237 (1991).

## عقب‌نشینی پس از توقف جریان حالت پایا در لولهٔ مدور

کار را با سیال در حال سکون در لولهٔ مدور شروع می‌کنیم و با استفاده از سرنگ، یک خط رنگین شعاعی، مطابق شکل ۱-۱۸، در جریان «ترسیم می‌کنیم». سپس سیال را پمپ می‌کنیم و به تماشای تغییر شکل خط رنگی می‌نشینیم.<sup>۳</sup> در سیالات نیوتونی، خط رنگی به یک سهمی پیوسته در حال کشیده شدن، تغییر شکل می‌دهد. اگر پمپ را خاموش کنیم، سهمی رنگی از حرکت باز می‌ایستد. پس از گذشت مدتی، نفوذ رخ می‌دهد و شکل سهمی به تدریج محو می‌شود.



شکل ۱-۱۸. عقب‌نشینی محدود پس از توقف جریان در لولهٔ مدور، که در مایعات پلیمری مشاهده می‌شود، اما در مایعات نیوتونی مشاهده نمی‌شود.

برای مایع پلیمری خط رنگی به یک منحنی تغییر شکل پیدا می‌کند که از سهمی پخت‌تر است (نگاه کنید به شکل ۱-۱۸). اگر پمپ از کار باز ایستد و سیال در امتداد محوری مقید نباشد، شروع به «عقب‌نشینی» می‌کند و شکل کشیدهٔ ماکزیمم خود را ازدست می‌دهد؛ یعنی سیال تاحدودی مانند کش لاستیکی عمل می‌کند. کش لاستیکی پس از رها شدن شکل اولیهٔ خود را بازمی‌یابد، اما سیال فقط تاحدودی به سمت باز یافتن شکل اولیهٔ خود حرکت می‌کند. اگر تشبیه به انسان را مجاز بدانیم، می‌توانیم بگوییم که کش لاستیکی «حافظهٔ کامل» دارد، زیرا شکل اولیهٔ خود را بازمی‌یابد. اما سیال پلیمری «حافظهٔ پاک‌شونده» دارد، زیرا به تدریج حالت اولیهٔ خود را «فراموش می‌کند»؛ یعنی، در حین عقب‌نشینی، حافظهٔ آن ضعیف و ضعیف‌تر می‌شود.

عقب‌نشینی سیال یکی از تجلیات کشسانی است و هر توصیف کاملی از سیالات پلیمری باید بتواند ایدهٔ کشسانی را نیز در تانسور تنش بگنجانند. این نظریه باید شامل مفهوم حافظهٔ پاک‌شونده نیز باشد.

## آثار «تنش قائم»

تفاوت بارز دیگر بین رفتار مایعات نیوتونی و پلیمر، در آثار «تنش قائم» بروز می‌کند. دلیل این نام‌گذاری را در بخش بعد بیان می‌کنیم.

میله‌ای که در پشر حاوی سیال نیوتونی می‌چرخد به سیال حرکت مماسی می‌دهد. در حالت پایا، سطح سیال در نزدیکی میله پایین‌تر است. به‌طور شهودی می‌دانیم که این پدیده از آن رو اتفاق می‌افتد که نیروی گریز از مرکز سبب می‌شود سیال در امتداد شعاعی به طرف جدار پشر حرکت کند. از طرف دیگر، در مایعی پلیمری، سیال به طرف میلهٔ چرخان حرکت می‌کند و، در حالت پایا، سطح سیال مطابق شکل ۱-۱۸ است. این پدیده را اثر صعود از میلهٔ وایزنبرگ می‌نامند.<sup>۴</sup>

۳. برای اطلاع از جزئیات این آزمایش، نگاه کنید به

N. N. Kapoor, M. S. thesis, University of Minnesota, Minneapolis (1964), as well as A. G. Fredrickson, *Principles and Applications of Rheology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1964), p. 120.

۴. این پدیده نخستین بار در منبع زیر شرح داده شد.

A. H. Nissan, *Nature*, **158**, 634-635 (1946) and by R. J. Russel, Ph. D. thesis, Imperial College, University of London (1964), p. 58.

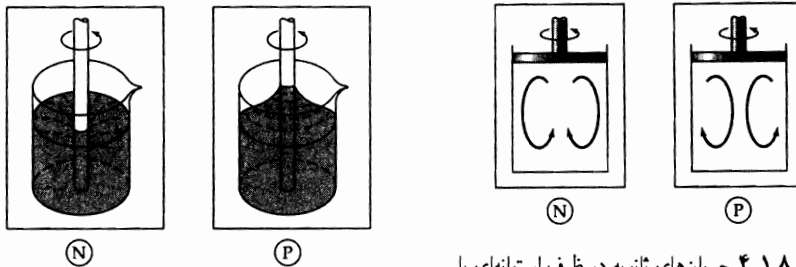
K. Weissenberg, *Nature*, **159**, 310-311 (1947).

این آزمایش در منبع زیر تحلیل شد.

بدیهی است که انواعی از نیرو وارد عمل می‌شوند که مایع پلیمری را به رفتاری وادار می‌کنند که با رفتار مایع نیوتونی تفاوت کیفی دارد.

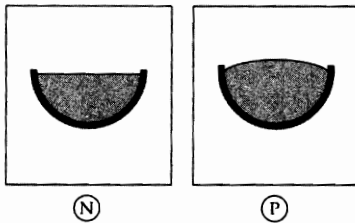
در آزمایشی که با این آزمایش رابطه نزدیک دارد، می‌توان یک دیسک چرخان را، مطابق شکل ۱.۸-۴، روی سطح سیال داخل یک ظرف استوانه‌ای قرار داد. اگر سیال نیوتونی باشد، دیسک چرخان سبب می‌شود سیال در امتداد مماسی حرکت کند (جریان اولیه)، اما، علاوه بر آن، سیال تحت اثر نیروی گریزازمرکز، به آهستگی به سمت بیرون و به طرف جدار استوانه نیز حرکت می‌کند، سپس پایین می‌آید و بعد در طول محور استوانه بالا می‌رود. این جریان شعاعی و محوری برهم‌نهاد از جریان اولیه ضعیف‌تر است و «جریان ثانویه» نامیده می‌شود. در «مایعی پلیمری»، سیال جریان اولیه مماسی، همراه با جریان ثانویه ضعیف شعاعی و محوری، نیز دارد، اما جریان اخیر در جهتی مخالف با جهت مشاهده شده در سیال نیوتونی است.<sup>۵</sup>

در آزمایشی دیگر می‌توان، مطابق شکل ۱.۸-۵، ظرف نیم‌استوانه‌ای را کج کرد تا مایع در آن روبه پایین جریان پیدا کند. اگر مایع نیوتونی باشد، سطح آن تخت می‌ماند، مگر به سبب آثار هلالی شدن در لبه‌های خارجی. اما در اغلب مایعات پلیمری، سطح مایع اندکی محدب خواهد بود. این اثر ناچیز، اما قابل تکرار است.<sup>۶</sup>



شکل ۱.۸-۴ جریان‌های ثانویه در ظرف استوانه‌ای با دیسک چرخان در سطح مایع، در سیالات نیوتونی و پلیمری، جهت‌های مخالف هم دارند.

شکل ۱.۸-۳ سطح آزاد مایع در نزدیکی میله چرخان. مایع پلیمری اثر صعود از میله و ایزنبرگ را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۸-۵ جریان روبه پایین در ظرف نیم‌استوانه‌ای کج شده. محدب سطح مایع پلیمری تا حدودی با اغراق نشان داده شده است.

5. C. T. Hill, J. D. Huppler, and R. B. Bird, *Chem Eng. Sci.* **21**, 815-817 (1966); C. T. Hill, *Trans. Soc. Rheol.*, **16**, 213-245 (1972).

تحلیل‌های نظری در منبع زیر آمده است:

J. M. Kramer and M. W. Johnson, Jr., *trans. Soc. Rheol.* **16**, 197-212 (1972), and by J. P. Nirschl and W. E. Stewart, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **16**, 233-250 (1984).

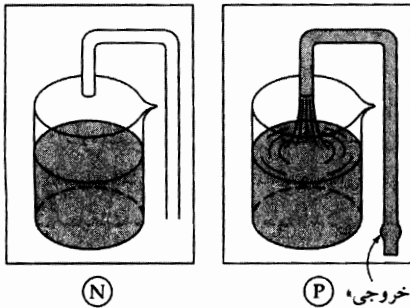
۶. این آزمایش را R. I. Tanner, *Trans. Soc. Rheol.*, **14**, 483-507 (1970)، در پی پیشنهاد مطرح شده توسط

A. C. Pipkin, *Acta Mech.* **2**, 104-115 (1966) انجام داد. هم‌چنین نگاه کنید به:

R. I. Tanner, *Engineering Rheology*, Oxford University Press (1985), 102-105.

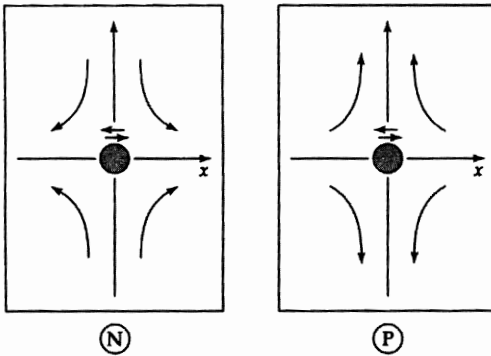
### چند آزمایش دیگر

همه با طرز کار سیفون ساده آشنایی دارند. به تجربه می‌دانیم که اگر سیال نیوتونی باشد، بیرون کشیدن لولهٔ سیفون از مایع، به معنای توقف عمل سیفون کردن است. اما، همان‌طور که در شکل ۶-۱.۸ مشاهده می‌شود، در مایعات پلیمری، با وجود دور شدن لولهٔ سیفون از سطح مایع، حتی به اندازهٔ چند سانتی‌متر، عمل سیفون کردن ادامه می‌یابد. این پدیده را اثر سیفون بی‌لوله می‌نامند. می‌توان فقط بخشی از سیال را از لولهٔ بشر بالا کشید و سپس آن را به طرف پایین جاری کرد تا بشر، به طور خودبه‌خود، تقریباً تا ته خالی شود.<sup>۷</sup>



شکل ۶-۱.۸ وقتی لوله از سطح مایع پلیمری جدا شود، سیفون کردن ادامه می‌یابد، اما در مورد مایع نیوتونی چنین نیست. به تورم مایع پلیمری در هنگام خروج از لولهٔ سیفون توجه کنید.

در آزمایشی دیگر میلهٔ استوانه‌ای طولی که محور آن در امتداد  $z$  است، به نوسان به طرف جلو و عقب در امتداد  $x$ ، به طوری که محور آن با محور  $z$  موازی باشد، وادار می‌شود (نگاه کنید به شکل ۷-۱.۸). در سیال نیوتونی، جریان ثانویه‌ای ایجاد می‌شود که بر اثر آن سیال از بالا و پایین (یعنی از جهت‌های  $+y$  و  $-y$ ) به طرف استوانه حرکت می‌کند و به سمت چپ و راست (یعنی به سمت  $-x$  و  $+x$ ) می‌رود تا از آن دور شود. اما در مایع پلیمری، حرکت ثانویه در جهت مخالف ایجاد می‌شود: سیال از چپ و راست، در امتداد محور  $x$ ، به طرف داخل، در بالا و پایین و در طول محور  $y$ ، به طرف بیرون حرکت می‌کند.<sup>۸</sup>



شکل ۷-۱.۸ «جریان آکوستیکی» در نزدیکی یک میلهٔ در حال نوسان عرضی، که نشان می‌دهد جریان ثانویه برای سیال‌های نیوتونی و پلیمری در جهت‌های مخالف ایجاد می‌شود.

مثال‌های قبل فقط چند مورد از آزمایش‌های جالبی هستند که انجام شده‌اند.<sup>۹</sup> رفتار پلیمری را می‌توان به آسانی و با هزینهٔ کم، با استفاده از محلول آبی ۰/۵٪ پلی‌اتیلن اکسید، نمایش داد.

7. D. F. James, *Nature*, **212**, 754-756 (1996).

8. C. F. Chang and W. R. Schwalter, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **6**, 47-67 (1979).

۹. کتاب زیر حاوی عکس‌های بسیار از رفتار سیال در انواع سیستم‌های جریان غیرنیوتونی است:

D. V. Boger and K. Walters, *Rheological Phenomena in Focus*, Elsevier, Amsterdam (1993).

هنگامی که با مقادیر حتی ناچیزی از پلیمرها سروکار داشته باشیم، چند اثر جالب مشاهده می‌کنیم. مهم‌ترین آن‌ها کاهش نیروی پیوستگی است. فقط با حضور چند قسمت در میلیون از بعضی پلیمرها، («عوامل پساگاه»)، اتلاف اصطکاکی در جریان متلاطم در لوله را می‌توان به میزان چشم‌گیری -۳۰ تا ۵۰٪ کاهش داد. سازمان‌های آتش‌نشانی برای افزایش جریان آب، و شرکت‌های نفتی برای کاهش هزینه تلمبه‌زنی نفت خام به مسافت‌های طولانی، از این نوع عوامل پساگاه پلیمری استفاده می‌کنند.

برای آشنایی با سایر پدیده‌هایی که در سیال‌های پلیمری مشاهده می‌شوند، باید به خلاصه مقاله‌های مندرج در نشریه‌های گزارش سالانه مکانیک سیالات<sup>۱۱</sup> رجوع کرد.

## ۲.۸ سیال‌سنجی و توابع ماده

آزمایش‌های توصیف‌شده در بخش ۱.۸ به‌وضوح نشان می‌دهند که مایعات پلیمری از قانون ویسکوزیته نیوتون پیروی نمی‌کنند. در این بخش در مورد چند جریان ساده کنترل‌پذیر بحث می‌کنیم که در آن‌ها می‌توان مؤلفه‌های تنش را اندازه‌گیری کرد. با استفاده از این آزمایش‌ها می‌توان چند تابع ماده را اندازه‌گیری، و پاسخ مکانیکی سیالات پیچیده را توصیف کرد. با توجه به این‌که سیالات نیوتونی تراکم‌ناپذیر فقط با یک ثابت ماده (ویسکوزیته) توصیف می‌شوند، در مایعات غیرنیوتونی می‌توان بسیاری از توابع مختلف ماده را اندازه‌گیری کرد. در این جا نحوه تعریف و اندازه‌گیری چند تابع متداول‌تر ماده را نشان می‌دهیم. اطلاعات مربوط به تجهیزات اندازه‌گیری عملی و سایر توابع ماده را می‌توان در منابع دیگر یافت.<sup>۲۱</sup> در سرتاسر این فصل مایعات پلیمری تراکم‌ناپذیر فرض می‌شوند.

### جریان برشی ساده پایا

اکنون جریان برشی پایا بین یک جفت صفحه موازی را در نظر می‌گیریم که در آن توزیع سرعت با رابطه  $v_x = \dot{\gamma}y$  بیان می‌شود و مؤلفه دیگر سرعت صفر است (شکل ۲.۸-۱ را ببینید). کمیت  $\dot{\gamma}$ ، که در این جا مثبت گرفته می‌شود، «آهنگ برش» نام دارد. برای سیال نیوتونی، تنش برشی  $\tau_{yx}$  از معادله (۲.۱-۱) به‌دست می‌آید و تنش‌های قائم  $(\tau_{zz}, \tau_{yy}, \tau_{xx})$  همگی صفرند.

برای سیالات غیرنیوتونی تراکم‌ناپذیر، تنش‌های قائم غیرصفر و نامساوی‌اند. برای این سیالات، بهتر است سه تابع ماده را، به شرح زیر تعریف کنیم:

$$\tau_{yx} = -\eta \frac{dv_x}{dy} \quad (۲.۸-۱)$$

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -\Psi_1 \left( \frac{dv_x}{dy} \right)^2 \quad \tau_{yy} - \tau_{zz} = -\Psi_2 \left( \frac{dv_x}{dy} \right)^2 \quad (۳, ۲.۸-۲)$$

<sup>۱۰</sup> گاهی این اثر را پدیده تامز می‌نامند، زیرا شاید برای نخستین بار گزارش آن در منبع زیر دیده شد:

B. A. Toms, *Proc. Int. Congress on Rheology*, North-Holland, Amsterdam (1949).

این پدیده در ارتباط با ماهیت پساگاهی لیزا به ماهی نیز مطالعه شده است؛ تصور می‌شود این پدیده، دست‌کم تا حدودی «پارادوکس گری» را توضیح می‌دهد؛ طبق پارادوکس گری به نظر می‌رسد که ماهی می‌تواند سریع‌تر از آن چه ملاحظات مربوط به انرژی امکان می‌دهند، شنا کند: T. L. Daniel, *Biol. Bull.*, **160**, 376-382 (1981).

11. M. M. Denn, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **22**, 13-34 (1990); E. S. G. Shaqfeh, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **28**, 129-185 (1996); G. G. Fuller, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **22**, 387-417 (1992).

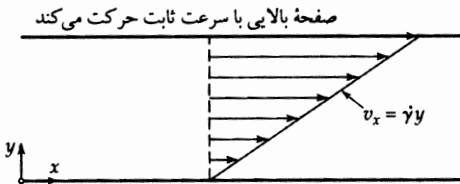
1. J. R. Van Wazer, J. W. Lyons K. Y. Kim, and R. E. Colwell, *Viscosity and Flow Measurement*, Interscience (Wiley), New York (1963).

2. K. Walters, *Rheometry*, Wiley, New York (1975).

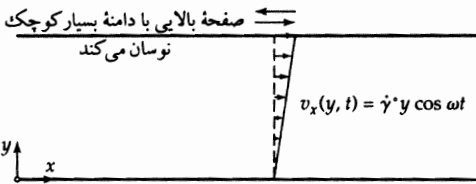


که در آن  $\eta$  ویسکوزیته غیرنیوتونی،  $\Psi_1$  نخستین تنش قائم، و  $\Psi_2$  دومین ضریب تنش قائم است. این سه کمیت  $\eta$ ،  $\Psi_1$ ، و  $\Psi_2$  توابع آهنگ برش  $\dot{\gamma}$  هستند. برای بسیاری از مایعات پلیمری، ممکن است با افزایش آهنگ برش،  $\eta$  با ضریبی  $10^4$  کاهش یابد. به همین ترتیب، درگستره متداول آهنگ‌های برش، ممکن است ضرایب تنش قائم تا  $10^7$  برابر کاهش یابند. برای سیالات پلیمری ساخته شده از درشت مولکول‌های انعطاف‌پذیر، با آزمایش مشخص شده است که توابع  $\eta(\dot{\gamma})$  و  $\Psi_1(\dot{\gamma})$  مثبت‌اند، اما تابع  $\Psi_2(\dot{\gamma})$  تقریباً همیشه منفی است. می‌توان نشان داد که وقتی  $\Psi_1(\dot{\gamma})$  مثبت باشد، سیال چنان رفتار می‌کند که گویی درجهت جریان (یا جهت  $x$ ) تحت کشش است و  $\Psi_2(\dot{\gamma})$  به این معناست که سیال درجهت عرضی (یا جهت  $z$ ) تحت کشش است. برای سیال نیوتونی  $\mu = \eta$ ،  $\Psi_1 = 0$  و  $\Psi_2 = 0$ .

ویسکوزیته سیالات غیرنیوتونی که به شدت به آهنگ برش وابسته است، با رفتار نشان داده شده توسط معادله‌های (۱-۱.۸) تا (۳-۱.۸) رابطه‌ای دارد که در بخش بعد شرح داده می‌شود.  $\Psi_1$  مثبت عمدتاً عامل اثر صعود از میله وایزبرگ است. به دلیل جریان مماسی، درجهت مماسی کشش وجود دارد و این کشش سیال را به سمت میله چرخان می‌کشد و بر نیروی گریز مرکز غلبه دارد. جریان‌های ثانویه در آزمایش دیسک و میله (شکل ۱-۱.۸) را می‌توان به طور کیفی و برحسب  $\Psi_1$  مثبت نیز توجیه کرد. به علاوه، می‌توان نشان داد که  $\Psi_2$  منفی شکل محدب سطح را، در آزمایش ظرف نیم‌استوانه‌ای (شکل ۵-۱.۸) توجیه می‌کند.



۱-۲.۸ جریان برشی ساده بین صفحه‌های موازی، با آهنگ برش  $\dot{\gamma}$ . برای سیال‌های نیوتونی با این نوع جریان،  $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$  اما برای سیال‌های پلیمری، تنش‌های قائم به طور کلی غیرصفر و نامساوی‌اند.



شکل ۲-۲.۸ حرکت نوسانی کوچک دامنه. وقتی فاصله صفحه کم، ویسکوزیته سیال بالا باشد، می‌توان توزیع سرعت را خطی فرض کرد.

وسایل ابتکاری متعددی برای اندازه‌گیری سه تابع ماده در جریان برشی پایا ساخته شده است و مبنای نظری لازم برای استفاده از این ابزارها در منابع دیگر به تفصیل آمده است.<sup>۲</sup> برای آشنایی با روش استفاده از دستگاه مخروط و صفحه برای اندازه‌گیری توابع ماده، به مسئله ۸.ج ۱ رجوع کنید.

### حرکت نوسانی کوچک دامنه

روش استاندارد برای اندازه‌گیری پاسخ کشسان سیال، آزمایش برش نوسانی کوچک دامنه است که در شکل ۲-۲.۸ نشان داده شده است. در این آزمایش صفحه بالایی به شیوه سینوسی و با دامنه‌ای بسیار کوچک، عقب و جلو می‌رود. اگر فاصله صفحه با سیال بسیار کم، ویسکوزیته سیال بسیار بالا باشد، آن‌گاه توزیع سرعت تقریباً خطی است، به طوری که  $v_x(y, t) = \dot{\gamma}y \cos \omega t$ ، که در آن  $\dot{\gamma}$ ، که کمیتی حقیقی است، دامنه انحراف آهنگ برش را نشان می‌دهد. تنش برشی لازم برای برقرار نگه داشتن حرکت نوسانی نیز، از لحاظ زمانی، تناوبی خواهد بود و صورت کلی زیر را دارد:

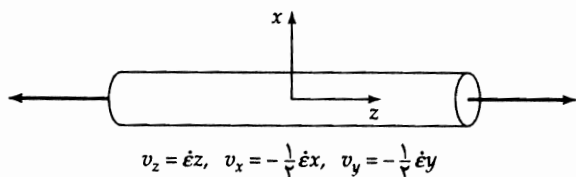
$$\tau_{yx} = -\eta' \dot{\gamma} \cos \omega t - \eta'' \dot{\gamma} \sin \omega t \quad (۴-۲.۸)$$

که در آن  $\eta'$  و  $\eta''$  مؤلفه‌های ویسکوزیتهٔ مختلط،  $\eta^* = \eta' - i\eta''$  هستند که خود تابعی از بسامد است. نخستین جمله (هم‌فاز) «پاسخ ویسکون» و دومین جمله (غیرهم‌فاز) «پاسخ کشسان» است. متخصصان شیمی پلیمر از منحنی‌های  $\eta'(\omega)$  و  $\eta''(\omega)$  (یا مدول‌های ذخیره و اتلاف،  $G' = \eta''\omega$  و  $G'' = \eta'\omega$ ) برای «مشخص کردن» پلیمرها استفاده می‌کنند، زیرا دربارهٔ رابطهٔ بین شکل‌های این منحنی‌ها و ساختار شیمیایی، اطلاعات زیادی در دست است.<sup>۳</sup> برای سیالات نیوتونی، می‌دانیم که  $\eta' = \mu$  و  $\eta'' = 0$ .

### جریان افزایش طولی حالت پایا

آزمایش سومی که می‌توان انجام داد شامل کشیدن سیال است که در آن توزیع سرعت با رابطهٔ  $v_z = \dot{\epsilon}z$ ،  $v_x = -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}x$  و  $v_y = -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}y$  تعریف می‌شود (نگاه کنید به شکل ۲.۸-۳)، که در آن کمیت مثبت  $\dot{\epsilon}$  «آهنگ افزایش طول» نام دارد. در این صورت رابطهٔ

$$\tau_{zz} - \tau_{xx} = -\bar{\eta} \frac{dv_z}{dz} \quad (5-2.8)$$



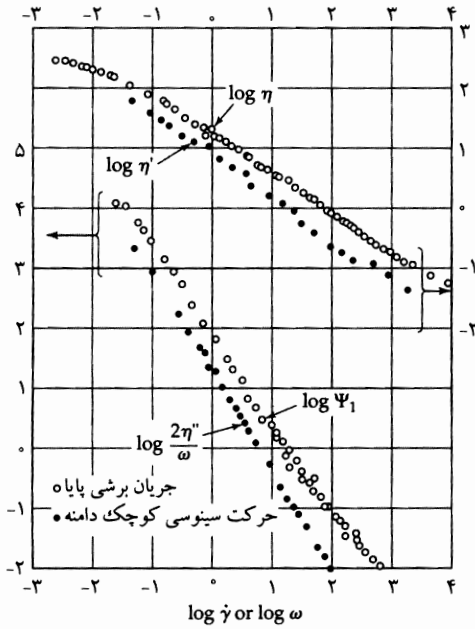
شکل ۲.۸-۳ جریان افزایش طولی پایا با آهنگ افزایش طول  $\dot{\epsilon} = dv_z/dz$

ویسکوزیتهٔ افزایش طولی  $\bar{\eta}$ ، را تعریف می‌کند که به  $\dot{\epsilon}$  بستگی دارد. وقتی  $\dot{\epsilon}$  منفی باشد، جریان را کشیدن دومحوری می‌نامند. برای سیالات نیوتونی، می‌توان نشان داد که  $\bar{\eta} = 3\mu$ ، که گاهی آن را «ویسکوزیتهٔ تروتون» می‌نامند. ویسکوزیتهٔ افزایش طولی  $\bar{\eta}$  را نمی‌توان برای همهٔ سیال‌ها اندازه‌گیری کرد، زیرا جریان افزایش طولی حالت پایا را نمی‌توان همواره ایجاد کرد.<sup>۴</sup>

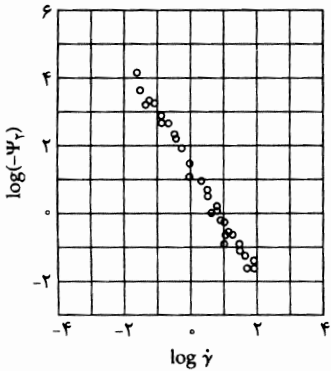
سه آزمایشی که در بالا شرح داده شد، فقط گوشه‌ای از آزمون‌های سیال‌سنجی هستند که می‌توان انجام داد. آزمون‌های دیگر عبارت‌اند از آزمون‌هایی از تنش پس از توقف جریان، رشد تنش در آغاز جریان، عقب‌نشینی، و خزش، که هر یک را می‌توان در حالت‌های جریان برشی، افزایش طولی، و انواع دیگر جریان انجام داد. هر آزمایش به تغییرشکل یک یا چند تابع ماده منتهی می‌شود. از این آزمایش‌ها می‌توانیم برای تعیین مشخصه‌های سیال و همچنین برای تعیین ثابت‌های تجربی در مدل‌های توصیف‌شده در بخش‌های ۳.۸ تا ۵.۸ استفاده کنیم.

چند نمونه از توابع ماده در شکل‌های ۲.۸-۴ تا ۲.۸-۶ نشان داده شده‌است. چون گسترهٔ وسیعی از سیالات پیچیده از لحاظ ساختار شیمیایی و اجزای تشکیل‌دهنده وجود دارد، انواع مختلف پاسخ‌های مکانیکی در این آزمایش‌های گوناگون نتیجه می‌شود. برای اطلاع بیشتر از داده‌های حاصل از آزمایش‌های سیال‌سنجی، باید به منابع دیگر رجوع کنید.<sup>۵</sup>

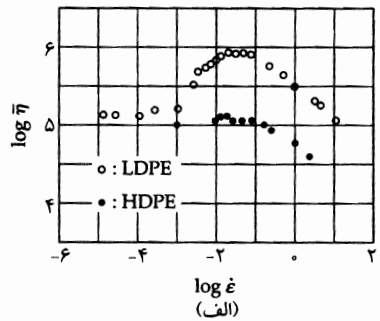
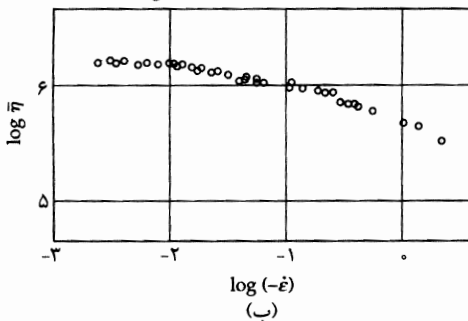
3. J. D. Ferry, *Viscoelastic Properties of Polymers*, Wiley, New York, 3rd edition (1980).  
 4. C. J. S. Petrie, *Elongational Flows*, Pitman, London (1979); J. Meissner, *Chem. Engr. Commun.*, **33**, 159-180 (1985).  
 5. R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1, Fluid Mechanics*, Wiley - Interscience, 2nd edition (1987).



شکل ۴-۲۸ توابع ماده  $\eta(\dot{\gamma})$ ،  $\eta'(\omega)$ ،  $\Psi_1(\dot{\gamma})$  و  $\eta''(\omega)$  برای محلول پلی آکریل آمید ۱٫۵٪ در مخلوط ۵۰/۵۰ آب و گلیسرین. کمیت‌های  $\eta$ ،  $\eta'$  و  $\eta''$  برحسب Pa·s و  $\Psi_1$  برحسب Pa·s<sup>۲</sup> است.  $\dot{\gamma}$  و  $\omega$  برحسب s<sup>-۱</sup> بیان می‌شوند.



شکل ۴-۲۸ ب وابستگی ضریب دوم تنش قائم به آهنگ برش، در محلول پلی آکریل آمید ۱٫۵٪ در مخلوط ۵۰/۵۰ آب و گلیسرین. کمیت  $\Psi_2$  برحسب Pa·s<sup>۲</sup> و  $\omega$  برحسب s<sup>-۱</sup> است.



شکل ۴-۲۸ الف) ویسکوزیته افزایش طولی برای کشیده شدن تک‌محوری جریان پلی اتیلن با چگالی کم و زیاد؛ ب) ویسکوزیته افزایش طولی برای کشیده شدن دو محوری پلی اتیلن با چگالی کم، که از داده‌های شکست دوگانه جریان استنتاج شده است.

## ۳.۸ وِسکوزیته غیرنیوتونی و مدل‌های تعمیم‌یافته نیوتون

این نخستین بخش از سه بخش اختصاص‌یافته به عبارت‌های تجربی تانسور تنش برای سیالات غیرنیوتونی است. به‌طور کلی می‌توان گفت که این سه بخش سه دسته مختلف از مخاطبان را راضی می‌کند:

۳.۸ مدل‌های نیوتونی تعمیم‌یافته اصولاً برای توصیف جریان‌های برشی حالت‌پایا به‌کار می‌روند و مهندسان برای طراحی سیستم‌های جریان از آن‌ها استفاده گسترده‌ای می‌کنند.

۴.۸ مدل‌های وِسکوکشسان خطی عمدتاً برای توصیف جریان‌های حالت‌ناپایا در سیستم‌هایی با گزاردیان‌های جابه‌جایی بسیار کوچک به‌کار می‌روند و شیمی‌دان‌های علاقه‌مند به درک ساختار پلیمر از آن‌ها استفاده می‌کنند.

۵.۸ مدل‌های وِسکوکشسان خطی معرف تلاش برای توصیف همه انواع جریان‌اند (شامل دو دسته بالا) و عمدتاً فیزیکدان‌ها و متخصصان ریاضی کاربردی علاقه‌مند به یافتن نظریه‌ای کاملاً فراگیر، آن‌ها را ابداع کرده‌اند.

عملاً این سه دسته مدل باهم رابطه متقابل دارند و هر یک برای درک موضوع جریان غیرنیوتونی مهم‌اند. در بحثی که در ادامه مطلب در مورد مدل‌های غیرنیوتونی مطرح می‌شود، فرض می‌کنیم سیالات در همه حال تراکم‌ناپذیرند.

مدل‌های نیوتونی تعمیم‌یافته<sup>۱</sup> که در این جا شرح داده می‌شوند، ساده‌ترین مدل‌ها در میان مدل‌های مورد بحث‌اند. اما این مدل‌ها فقط می‌توانند وِسکوزیته غیرنیوتونی را توصیف کنند و قادر به توصیف هیچ‌یک از آثار تنش قائم، آثار وابسته‌به‌زمان، یا آثار کشسان نیستند. با وجود این، در بسیاری از فرایندهای صنعت پلیمر، مانند جریان در لوله با انتقال گرما، طرح مقسم، روزن‌رانی، و قالب‌گیری تزریقی، وِسکوزیته غیرنیوتونی و تغییرات فراوان آن با آهنگ برش، در توصیف جریان‌های مورد نظر نقش مهمی دارند.

برای سیالات غیرنیوتونی، عبارت تانسور تنش از معادله (۲-۲.۱)، به شرط حذف جمله آخر آن، به‌دست می‌آید:

$$\tau = -\mu(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^\dagger) \equiv -\mu\dot{\gamma} \quad (۱-۳.۸)$$

که در آن نماد  $\dot{\gamma} = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^\dagger$ ، تانسور آهنگ کرنش (یا تانسور آهنگ تغییر شکل) را معرفی کرده‌ام. مدل تعمیم‌یافته سیال نیوتونی با جایگزینی ساده وِسکوزیته ثابت  $\mu$  با وِسکوزیته غیرنیوتونی  $\eta$ ، به‌صورت تابعی از آهنگ برش به‌دست می‌آید که به‌طور کلی می‌توان آن را به‌صورت «اندازه تانسور آهنگ کرنش»  $\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}(\dot{\gamma} : \dot{\gamma})}$  نوشت؛ متوجه می‌شویم که وقتی جذر گرفته می‌شود، علامت را باید چنان انتخاب کرد که  $\dot{\gamma}$  کمیتی مثبت شود. در این صورت مدل تعمیم‌یافته نیوتونی عبارت است از:

$$\tau = -\eta(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^\dagger) \equiv -\eta\dot{\gamma} \quad \text{با} \quad \eta = \eta(\dot{\gamma}) \quad (۲-۳.۸)$$

مؤلفه‌های تانسور آهنگ کرنش  $\dot{\gamma}$  را می‌توان در دستگاه‌های مختصات دکارتی، استوانه‌ای، و کروی، از سمت راست معادله‌های جدول ب.۱، با حذف جمله‌های  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$ ، و هم‌چنین عامل  $(-\mu)$  در جمله‌های باقی‌مانده، به‌دست آورد. اکنون باید رابطه‌ای تجربی برای تابع وِسکوزیته نیوتونی  $\eta(\dot{\gamma})$  به‌دست آوریم. ده‌ها عبارت از این نوع پیشنهاد شده‌اند، اما فقط دو مورد از آن‌ها را در این جا بیان می‌کنیم.

1. K. Hohenemser and W. Prager, *Zeits. f. Math.*, **12**, 216-226 (1932); J. G. Oldroyd, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **45**, 595-611 (1949), and **47**, 410-418 (1950).

جیمز گاردنر اولدروی (۱۹۸۲-۱۹۲۱)، استاد دانشگاه لیورپول، سهم زیادی در پی‌ریزی نظریه سیالات غیرنیوتونی داشت و به‌ویژه، ایده‌های او در مورد تدوین معادله‌های اساسی و اصول مکانیک پیوستار ارزشمند بود.

(الف) ساده‌ترین رابطه تجربی برای  $\eta(\dot{\gamma})$  عبارت توانی دوپارامتری است:<sup>۲</sup>

$$\eta = m\dot{\gamma}^{n-1} \quad (۳-۳.۸)$$

که در آن  $m$  و  $n$  ثابت‌های مشخص‌کننده سیال‌اند. این رابطه ساده، منحنی ویسکوزیته غیرنیوتونی را در بخش خطی نمودار لگاریتمی ویسکوزیته برحسب آهنگ برش برای بسیاری از مواد توصیف می‌کند (مثلاً نگاه کنید به داده‌های ویسکوزیته در شکل ۴-۲.۸). واحد پارامتر  $m$  عبارت است از  $\text{Pa} \cdot \text{s}^n$  و  $n - 1$  شیب نمودار  $\log \eta$  برحسب  $\log \dot{\gamma}$  است. بعضی از مقادیر نمونه پارامترهای قانون توانی در جدول ۱-۳.۸ آمده‌است.

اگرچه مدل قانون توانی به منزله یک عبارت تجربی پیشنهاد شد، در معادله (۱۱-۶.۸) خواهیم دید که نظریه مولکولی ساده به عبارتی توانی برای آهنگ‌های برش بالا،  $n = \frac{1}{2}$  منجر می‌شود.

جدول ۱-۳.۸ پارامترهای قانون توانی برای محلول‌های آبی الف

محلول	دما (K)	$m$ (Pa · s <sup>n</sup> )	$n$ (-)
هیدروکسی اتیل سلولز ۲٪	۲۹۳	۹۳٫۵	۰٫۱۸۹
	۳۱۳	۵۹٫۷	۰٫۲۲۳
	۳۳۳	۳۸٫۵	۰٫۲۵۴
هیدروکسی اتیل سلولز ۰٫۵٪	۲۹۳	۰٫۸۴	۰٫۵۰۹
	۳۱۳	۰٫۳۰	۰٫۵۹۵
	۳۳۳	۰٫۱۳۶	۰٫۶۴۵
پلی‌اتیلن اکسید ۱٪	۲۹۳	۰٫۹۹۴	۰٫۵۳۲
	۳۱۳	۰٫۷۰۶	۰٫۵۴۴
	۳۳۳	۰٫۴۸۶	۰٫۵۹۹

<sup>a</sup> R. M. Turian, Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, Madison (1964), pp. 142-148.

جدول ۲-۳.۸ پارامترهای مدل کاریو برای بعضی از محلول‌های پلی‌استیرن خطی در ۱-کلروفتالن

خواص محلول	پارامترهای معادله (۴-۳.۸) ( $\eta_{\infty}$ صفر فرض می‌شود)	$\lambda$	$\eta_0$	$c$	$\bar{M}_w$
$n$	$n$	(s)	(Pa · s)	(g/ml)	(g/mol)
	(-)				
	۰٫۳۰۴	۱٫۱۰۹	۸۰۸۰	۰٫۴۵	$۳٫۹ \times ۱۰^۵$
	۰٫۳۰۵	$۳٫۶۱ \times ۱۰^{-۲}$	۱۳۵	۰٫۳۰	$۳٫۹ \times ۱۰^۵$
	۰٫۴۴۱	$۹٫۲۴ \times ۱۰^{-۲}$	۱۱۸۰	۰٫۵۲	$۱٫۱ \times ۱۰^۵$
	۰٫۵۳۸	$۱٫۷۳ \times ۱۰^{-۲}$	۱۶۶	۰٫۴۵	$۱٫۱ \times ۱۰^۵$
	۰٫۲۷۱	$۱ \times ۱۰^{-۱}$	۳۹۳۰	۰٫۶۲	$۳٫۷ \times ۱۰^۴$

(الف) مقادیر این پارامترها از منبع زیر برگرفته شده‌است:

K. Yasuda, R. C. Armstrong, and R. E. Cohen, *Rheol. Acta*, **20**, 163-178 (1981).

2. W. Ostwald, *Kolloid-Zeitschrift*, **36**, 99-117 (1925); A. de Waele, *Oil Color Chem. Assoc. J.*, **6**, 33-88 (1923).

(ب) با استفاده از معادله کاربوی چهار پارامتری<sup>۳</sup> می‌توان به برازش بهتر منحنی با اغلب داده‌ها دست یافت: این معادله عبارت است از:

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2} \quad (۴-۳.۸)$$

که در آن  $\eta_0$  ویسکوزیته در آهنگ برش صفر،  $\eta_{\infty}$  ویسکوزیته آهنگ برش نامتناهی،  $\lambda$  پارامتری با واحد زمان، و  $n$  پارامتری بدون بُعد است. بعضی از پارامترهای نمونه برای مدل کاربوی در جدول ۲-۳.۸ آمده‌است. اکنون چند مثال حل می‌کنیم تا نحوه استفاده از مدل قانون توانی را نشان دهیم. این مثال‌ها تداوم مسئله‌هایی است که در فصل‌های ۲ و ۳ برای سیالات نیوتونی شرح داده شد.<sup>۴</sup>

### مثال ۱-۳.۸

جریان آرام سیال تراکم‌ناپذیر تابع قانون توانی در لولهٔ مدور<sup>۵،۴</sup>

عبارتی برای بیان آهنگ جریان یک مایع پلیمری که با مدل قانون توانی توصیف می‌شود، به دست آورید. این سیال در لولهٔ مدور طویلی به شعاع  $R$  و طول  $L$ ، بر اثر اختلاف فشار، گرانش، یا هردو، جریان دارد.

حل

معادله (۱۳-۳.۲) توزیع تنش برشی را برای سیالی نشان می‌دهد که در لولهٔ مدور، جریان پایای شکل‌گرفته داشته‌باشد. باید (به جای استفاده از معادله (۱۴-۳.۲)) تنش برشی مربوط به سیال تابع قانون توانی را در این عبارت جایگزین کرد. این عبارت را می‌توان از معادله‌های (۲-۳.۸) و (۳-۳.۸) به دست آورد.

$$\tau_{rz} = -m \dot{\gamma}^{n-1} \frac{dv_z}{dr} \quad (۵-۳.۸)$$

از آن‌جا که  $v_z$  فقط تابع  $r$  فرض می‌شود، از معادله (ب-۱۳-۱)، درمی‌یابیم که  $\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{r} \left( \frac{dv_z}{dr} \right)^2}$ . علامت جذر را باید طوری انتخاب کنیم که  $\dot{\gamma}$  مثبت باشد. چون  $dv_z/dr$  در جریان داخل لوله منفی است، باید علامت منها را انتخاب کنیم، بنابراین:

$$\tau_{rz} = -m \left( -\frac{dv_z}{dr} \right)^{n-1} \frac{dv_z}{dr} = m \left( -\frac{dv_z}{dr} \right)^n \quad (۶-۳.۸)$$

با تلفیق معادله‌های (۶-۳.۸) و (۱۳-۳.۲) معادله دیفرانسیل زیر برای سرعت نتیجه می‌شود:

$$m \left( -\frac{dv_z}{dr} \right)^n = \left( \frac{P_0 - P_L}{2L} \right) r \quad (۷-۳.۸)$$

پس از گرفتن ریشه  $n$ ام می‌توان از این معادله انتگرال گرفت و هنگامی که از شرط عدم لغزش در  $r = R$  استفاده کنیم، توزیع سرعت به صورت زیر:

$$v_z = \left( \frac{(P_0 - P_L)R}{2mL} \right)^{1/n} \frac{R}{(1/n) + 1} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{(1/n)+1} \right] \quad (۸-۳.۸)$$

3. P. J. Carreau, Ph.D. thesis, University of Wisconsin, Madison (1968). See also K. Yasuda, R. C. Armstrong, and R. E. Cohen, *Rheol. Acta*, **20**, 163-178 (1981).

۴. برای آشنایی با مثال‌های بیشتر، شامل جریان‌های غیرهم‌دما، نگاه کنید به

R. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1. *Fluid Mechanics*, Wiley-Interscience, New York, 2nd edition (1987), Chapter 4.

5. M. Reiner, *Deformation, Strain and Flow*, Interscience, New York, 2nd edition (1960), pp. 243-245.

به دست می‌آید (نگاه کنید به معادله (۱-۱.۸)). وقتی از این معادله روی سطح مقطع لولهٔ مدور انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$w = \frac{\pi R^2 \rho}{(\frac{1}{n}) + 3} \left( \frac{(P_0 - P_L)R}{2mL} \right)^{1/n} \quad (۹-۳.۸)$$

که، هرگاه  $n = 1$  و  $m = \mu$ ، به قانون هِیگن-پوئازوی برای سیالات نیوتونی (معادله (۲۱-۳.۲)) ساده می‌شود. معادله (۹-۳.۸) را می‌توان همراه با داده‌های مربوط به افت فشار برحسب آهنگ جریان برای تعیین پارامترهای  $m$  و  $n$  به‌کار برد.



جریان سیال تابع قانون توانی در شکاف باریک<sup>۴</sup> در مسئلهٔ ۲.ب.۳، جریان سیالی نیوتنی در شکافی باریک را به دست آوردیم. مطلوب است تعیین توزیع سرعت و آهنگ جریان جرمی برای سیال تابع قانون توانی، که در شکاف جریان دارد.

حل

در این جا می‌توان عبارت تنش برشی  $\tau_{xz}$  به صورت تابعی از مکان  $x$  در معادله (۲.ب.۳) را به‌کار برد، زیرا به نوع سیال بستگی ندارد. فرمول قانون توانی برای  $\tau_{xz}$  از معادله (۳-۳.۸)، چنین است:

$$\tau_{xz} = m \left( -\frac{dv_x}{dx} \right)^n \quad \text{به‌ازای } 0 \leq x \leq B \quad (۱۰-۳.۸)$$

$$\tau_{xz} = -m \left( \frac{dv_z}{dx} \right)^n \quad \text{به‌ازای } -B \leq x \leq 0 \quad (۱۱-۳.۸)$$

برای به دست آوردن توزیع سرعت به‌ازای  $0 \leq x \leq B$ ،  $\tau_{xz}$  را از معادله (۱۰-۳.۸) در معادله (۲.ب.۳) قرار می‌دهیم تا نتیجهٔ زیر حاصل شود:

$$m \left( -\frac{dv_z}{dx} \right)^n = \frac{(P_0 - P_L)x}{L} \quad 0 \leq x \leq B \quad (۱۲-۳.۸)$$

با انتگرال‌گیری و استفاده از شرط عدم لغزش در  $x = B$  نتیجه می‌شود:

$$v_z = \left( \frac{(P_0 - P_L)B}{mL} \right)^{1/n} \frac{B}{(\frac{1}{n}) + 1} \left[ 1 - \left( \frac{x}{B} \right)^{(\frac{1}{n}) + 1} \right] \quad 0 \leq x \leq B \quad (۱۳-۳.۸)$$

چون انتظار داریم توزیع سرعت حول صفحهٔ میانی  $x = 0$  متقارن باشد، می‌توانیم آهنگ جریان جرمی را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\begin{aligned} w &= \int_0^W \int_{-B}^B \rho v_z dx dy = 2 \int_0^W \int_0^B \rho v_z dx dy \\ &= 2 \left( \frac{(P_0 - P_L)B}{mL} \right)^{1/n} \frac{WB^2 \rho}{(\frac{1}{n}) + 1} \int_0^1 \left[ 1 - \left( \frac{x}{B} \right)^{(\frac{1}{n}) + 1} \right] d \left( \frac{x}{B} \right) \\ &= \frac{2WB^2 \rho}{(\frac{1}{n}) + 2} \left( \frac{(P_0 - P_L)B}{mL} \right)^{1/n} \quad (۱۴-۳.۸) \end{aligned}$$

وقتی  $n = 1$  و  $m = \mu$ ، نتیجه نیوتونی مسئله ۳.۲ باز یافته می‌شود. داده‌های تجربی در مورد افت فشار و آهنگ جریان جرمی در شکاف باریک را می‌توان همراه با معادله (۳.۸-۱۴) به دست آورد تا پارامترهای قانون توانی تعیین شود.

**مثال ۳-۳.۸**

جریان حلقوی مماسی سیال تابع قانون توانی<sup>۵۴</sup>

مثال ۳-۶.۳ را برای سیال تابع قانون توانی دوباره حل کنید.

حل

معادله‌های (۳.۳-۲۰) و (۳.۳-۲۲) برای سیال غیرنیوتونی تغییر نمی‌کنند، اما به جای معادله (۳.۳-۲۱)، با استفاده از جدول ب.۵، مؤلفه  $\theta$  معادله حرکت را بر حسب تنش برشی می‌نویسیم:

$$0 = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \tau_{r\theta}) \quad (3.8-15)$$

برای توزیع سرعت فرض شده، از مدل قانون توانی (به کمک جدول ب.۱) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\eta r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \\ &= -m \left( r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right)^{n-1} r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \\ &= -m \left( r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right)^n \end{aligned} \quad (3.8-16)$$

از ترکیب معادله‌های (۳.۸-۱۵) و (۳.۸-۱۶) نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 m \left( r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right)^n \right) = 0 \quad (3.8-17)$$

با انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود:

$$r^2 \left( r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right)^n = C_1 \quad (3.8-18)$$

با تقسیم کردن بر  $r^2$  و گرفتن ریشه  $n$ ام یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای سرعت زاویه‌ای به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) = \frac{1}{r} \left( \frac{C_1}{r^2} \right)^{1/n} \quad (3.8-19)$$

می‌توان از این معادله، با شرایط مرزی ارائه شده توسط معادله‌های (۳.۳-۲۷) و (۳.۳-۲۸) انتگرال گرفت تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\frac{v_\theta}{\Omega \cdot r} = \frac{1 - (\kappa R/r)^{2/n}}{1 - \kappa^{2/n}} \quad (3.8-20)$$

بنابراین (مؤلفه  $z$ ) گشتاور لازم روی استوانه خارجی برای برقرار نگه داشتن حرکت برابر است با:

$$T_z = (-\tau_{r\theta})|_{r=R} \cdot 2\pi RL \cdot R = m \left( r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right)^n \Big|_{r=R} \cdot 2\pi RL \cdot R \quad (3.8-21)$$

با ترکیب معادله‌های (۳.۸-۲۰) و (۳.۸-۲۱) نتیجه می‌شود:

$$T_z = 2\pi m \Omega^n (\kappa R)^2 L \left( \frac{(2/n)}{1 - \kappa^{2/n}} \right)^n \quad (3.8-22)$$



این نتیجه نیوتونی را می‌توان با قرار دادن  $n = 1$  و  $m = \mu$  بازیابی کرد. با استفاده از معادله (۲۲-۳.۸)، همراه با داده‌های گشتاور برحسب سرعت زاویه‌ای، می‌توان پارامترهای قانون توانی؛ یعنی  $m$  و  $n$  را تعیین کرد.

#### ۴.۸ کشسانی و مدل‌های ویسکوکشسان خطی

درست پس از معادله (۳-۲.۱)، در بحث دربارهٔ تعمیم «قانون ویسکوزیتهٔ» نیوتون، در پی ریزی عبارتی خطی برای تانسور تنش برحسب گرادیان سرعت، مشتق‌ها و انتگرال‌های نسبت به زمان را کنار گذاشتیم. در این بخش مشتق‌ها یا انتگرال‌های نسبت به زمان را نیز به حساب می‌آوریم، اما باز هم به رابطه‌ای خطی بین  $\tau$  و  $\dot{\gamma}$  نیاز داریم. این رابطه به پیدایش مدل‌های ویسکوکشسان خطی منتهی می‌شود.

کار را با نوشتن عبارت نیوتون برای تانسور تنش در مایع ویسکوز تراکم‌ناپذیر، همراه با عبارت مشابه هوک برای تانسور تنش جامد کشسان تراکم‌ناپذیر شروع می‌کنیم:<sup>۱</sup>

$$\tau = -\mu(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^\dagger) \equiv -\mu\dot{\gamma} \quad (۱-۴.۸) \text{ نیوتون:}$$

$$\tau = -G(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^\dagger) \equiv -G\dot{\gamma} \quad (۲-۴.۸) \text{ هوک:}$$

در دومین عبارت،  $G$  مدول کشسانی است و  $\mathbf{u}$  «بردار جابه‌جایی»، که فاصله و جهت حرکت نقطه‌ای از جامد را نشان می‌دهد که بر اثر وارد شدن تنش، از مکان اولیهٔ خود جابه‌جا شده‌است. کمیت  $\gamma$  را «تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک» می‌نامند. تانسور آهنگ کرنش و تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک با رابطهٔ  $\dot{\gamma} = \partial\gamma/\partial t$  به هم مربوط می‌شوند. جامد هوکی حافظهٔ کامل دارد؛ وقتی تنش‌ها را حذف کنیم، این نوع جامد پیکربندی اولیهٔ خود را باز می‌یابد. قانون هوک فقط برای گرادیان‌های جابه‌جایی خیلی کوچک،  $\nabla\mathbf{u}$ ، معتبر است. اکنون می‌خواهیم ایده‌های نهفته در معادله‌های (۱-۴.۸) و (۲-۴.۸) را برای توصیف سیالات ویسکوکشسان ترکیب کنیم.

#### مدل ماکسول

ساده‌ترین معادله برای توصیف سیالی که هم ویسکوز و هم کشسان است، مدل ماکسول<sup>۲</sup> زیر است:

$$\tau + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \tau = -\eta_0 \dot{\gamma} \quad (۳-۴.۸)$$

در این رابطه  $\lambda_1$  ثابت زمانی (زمان رهایی) و  $\eta_0$  ویسکوزیتهٔ آهنگ برش صفر است. وقتی تانسور تنش به‌طور نامحسوس با زمان تغییر می‌کند، معادلهٔ (۳-۴.۸) همان صورت معادلهٔ (۱-۴.۸) برای مایع نیوتونی را پیدا می‌کند. وقتی تغییرات تانسور تنش با زمان خیلی سریع باشد، آنگاه نخستین جملهٔ سمت چپ معادلهٔ (۳-۴.۸) را می‌توان حذف کرد، و هنگامی که از این معادله نسبت به زمان انتگرال گرفته شود، معادله‌ای به‌صورت معادلهٔ (۲-۴.۸) برای جامد هوکی حاصل می‌شود. به این معنا معادلهٔ (۳-۴.۸) ویسکوزیته و کشسانی را ادغام می‌کند.

در آزمایشی ساده که رفتار مایع ویسکوکشسان را نشان می‌دهد از «بتونهٔ مسخره» استفاده می‌شود. وقتی این ماده به‌آهستگی بین دو کف دست فشرده شود، به‌آسانی جریان پیدا می‌کند که حاکی از آن است که این ماده سیالی ویسکوز است. اما وقتی آن را به‌صورت گوی در بیابوریم و گوی را روی سطح سختی بیندازیم، جهش می‌کند. در حین برخورد تنش‌ها به‌سرعت تغییر می‌کنند و ماده هم‌چون جامدی کشسان عمل می‌کند.

1. R. Hooke, *Lectures de Potentia Restitutiva* (1678).

۲. این رابطه را جی. سی. ماکسول برای تحقیق در مورد امکان ویسکوکشسان بودن گازها پیشنهاد کرد:

J. C. Maxwell, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A157**, 49-88 (1867).

مدل جفریز

مدل ماکسول معادله (۳-۴.۸) رابطه‌ای خطی بین تنش‌ها و گرادیان‌های سرعت است و مشتق زمانی تنش‌ها را شامل می‌شود. می‌توان مشتق زمانی گرادیان‌های سرعت را نیز در این رابطه گنجانده و بازم رابطه‌ای خطی داشت:

$$\tau + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \tau = -\eta_0 \left( \dot{\gamma} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \dot{\gamma} \right) \quad (۴-۴.۸)$$

این مدل جفریز<sup>۳</sup> شامل سه مقدار ثابت است: ویسکوزیتهٔ آهنگ برش صفر، و دو ثابت زمانی (ثابت  $\lambda_2$  را زمان تأخیر می‌نامند).

می‌توان جمله‌های حاوی مشتق‌های دوم، سوم، و بالاتر تانسورهای تنش و آهنگ کرنش را، با ضرایب ثابت مناسب، به‌وضوح باهم جمع کرد تا رابطهٔ خطی کلی‌تری بین تانسورهای تنش و آهنگ کرنش به‌دست آید. به‌این‌ترتیب انعطاف‌پذیری بیش‌تری در برازش داده‌های تجربی حاصل می‌شود.

مدل تعمیم‌یافتهٔ ماکسول

راه دیگری برای تعمیم ایدهٔ اولیهٔ ماکسول «برهم‌نهی» معادله‌هایی به‌صورت معادله (۳-۴.۸) و نوشتن مدل تعمیم‌یافتهٔ ماکسول به‌صورت زیر است:

$$\tau(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(t) \quad (۵-۴.۸)$$

که در آن

$$\tau_k + \lambda_k \frac{\partial}{\partial t} \tau_k = -\eta_k \dot{\gamma} \quad (۶-۴.۸)$$

در رابطهٔ بالا زمان‌های  $\lambda_k$  رهایی بسیار (با  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots$ ) و ثابت‌های  $\eta_k$  بسیار با ابعاد ویسکوزیته وجود دارد. دربارهٔ ثابت‌های موجود در این مدل اطلاعات زیادی داریم که از نظریه‌های مولکولی پلیمر و آزمایش‌های دامنه‌دار انجام‌شده روی مایعات پلیمری حاصل شده‌اند.<sup>۴</sup>

۳. این مدل را اج. جفریز برای توصیف انتشار امواج در گوشت زمین، در منبع زیر مطرح کرد:

H. Jeffreys, *The Earth*, Cambridge University Press, 1st edition (1924), and 2nd edition (1929), p. 265.

پارامترهای این مدل را به ساختار سوسپانسیون‌ها و امولسیون‌ها مربوط کرده‌اند؛ نگاه کنید به

H. Fröhlich and R. Sack, *Proc. Roy. Soc.*, **A185**, 415-430 (1946) and by J. G. Oldroyd, *Proc. Roy. Soc.*, **A218**, 122-132 (1953).

تعبیر دیگری از معادله (۴-۴.۸) این است که این معادله به‌صورت جمع سهم حلال نیوتونی ( $s$ ) و سهم پلیمر ( $p$ ) در نظر گرفته شود؛ سهم اخیر توسط مدل ماکسول توصیف می‌شود:

$$\tau_s = -\eta_s \dot{\gamma}; \quad \tau_p + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \tau_p = -\eta_p \dot{\gamma} \quad (۴-۴.۸ \text{ الف و ب})$$

به‌طوری که  $\tau = \tau_s + \tau_p$ . سپس اگر معادله‌های (الف)، (ب)، (۴-۴.۸) و  $\lambda_1$  ضرب در مشتق زمانی معادله (۴-۴.۸) الف) باهم جمع شوند، مدل جفریز، معادله (۴-۴.۸)، با  $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$  و  $\lambda_2 = (\eta_s / (\eta_s + \eta_p)) \lambda_1$  به‌دست می‌آید.

4. J. D. Ferry, *Viscoelastic Properties of Polymers*, Wiley, New York, 3rd edition (1980). see also N. W. Tschoegl, *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*, Springer-Verlag, Berlin (1989); and R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1, Fluid Mechanics*, Wiley-Interscience, New York, 2nd edition (1987), Chapter 5.

با استفاده از روابط تجربی زیر می‌توان تعداد کل پارامترها را به سه کاهش داد:<sup>۵</sup>

$$\eta_k = \eta_0 \frac{\lambda_k}{\sum_j \lambda_j} \quad \text{و} \quad \lambda_k = \frac{\lambda}{k^\alpha} \quad (۸-۴.۵)$$

که در آن  $\eta_0$  ویسکوزیتهٔ آهنگ برشی صفر،  $\lambda$  ثابت زمانی، و  $\alpha$  ثابتی بدون بُعد (معمولاً بین ۱/۵ و ۴) است. چون معادلهٔ (۶-۴.۸) یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی است، می‌توان به روش تحلیلی، با این شرط که در  $t = -\infty$  سیال در حالت سکون باشد، از آن انتگرال‌گیری کرد. سپس، وقتی طبق معادلهٔ (۵-۴.۸) مقادیر مختلف  $\tau_k$  جمع می‌شوند، صورت انتگرالی مدل ماکسول به دست می‌آید:

$$\tau(t) = - \int_{-\infty}^t \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{\lambda_k} \exp[-(t-t')/\lambda_k] \right\} \dot{\gamma}(t') dt' = - \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\gamma}(t') dt' \quad (۹-۴.۸)$$

در این صورت از مدل ماکسول، ایدهٔ «حافظهٔ پاک‌شونده» به وضوح موجود است: تنش در زمان  $t$  به گرادیان سرعت در همهٔ زمان‌های سپری‌شده وابسته است، اما، به علت وجود جمله‌های نمایی در انتگرال ده، بیش‌ترین وزن به زمان‌های  $t'$  داده می‌شود که به  $t$  نزدیک‌اند؛ یعنی، «حافظهٔ کوتاه‌مدت» سیال از «حافظهٔ بلندمدت» آن بهتر است. کمیت داخل آکولاد  $\{ \}$  را مدول رهایی سیال می‌نامند و آن را با  $G(t-t')$  نشان می‌دهند. گاهی اوقات برای حل مسئله‌های ویسکوکشسان خطی، استفاده از عبارت انتگرالی در معادلهٔ (۹-۴.۸) آسان‌تر از معادله‌های دیفرانسیل (۵-۴.۸) و (۶-۴.۸) است.

مدل‌های ماکسول، جفریز، و مدل‌های تعمیم‌یافتهٔ ماکسول، همگی نمونه‌هایی از مدل‌های ویسکوکشسان خطی‌اند و کاربرد آن‌ها به حرکت‌هایی با گرادیان‌های جابه‌جایی بسیار کوچک محدود می‌شود. مایعات پلیمری درجه‌های آزادی داخلی متعددی دارند و بنابراین زمان‌های رهایی لازم برای توصیف پاسخ خطی آن‌ها نیز متعدد است. به همین سبب، مدل تعمیم‌یافتهٔ ماکسول در تفسیر داده‌های تجربی ویسکوکشسانی خطی کاربرد گسترده‌ای یافته‌است. با برازش معادلهٔ (۹-۴.۸) به داده‌های تجربی، می‌توان تابع رهایی  $G(t-t')$  را تعیین کرد. سپس می‌توان شکل توابع رهایی را به ساختار مولکولی پلیمر مربوط کرد. به این ترتیب، نوعی «طیف‌سنجی مکانیکی» ابداع می‌شود که می‌توان برای تحقیق در ساختار، از طریق اندازه‌گیری‌های ویسکوکشسان (مانند ویسکوزیتهٔ مختلط) از آن استفاده کرد. ممکن است به نظر برسد که مدل‌های توصیف‌کنندهٔ جریان با گرادیان‌های جابه‌جایی بسیار کوچک چندان مورد علاقهٔ مهندسان نیست. اما یکی از دلایل مهم مطالعهٔ چنین مدل‌هایی این است که داشتن پس‌زمینه‌ای در ویسکوکشسانی خطی، به ما کمک می‌کند که بتوانیم ویسکوکشسانی غیرخطی را، که در آن جریان‌هایی با گرادیان‌های جابه‌جایی بزرگ توصیف می‌شود، بررسی کنیم.

#### مثال ۱-۴.۸

حرکت نوسانی کوچک دامنه

با استفاده از مدل تعمیم‌یافتهٔ ماکسول، عبارتی برای مؤلفه‌های ویسکوزیتهٔ مختلط به دست آورید. این سیستم در شکل ۲-۲.۸ توصیف شده‌است.

حل

از مؤلفهٔ  $yx$  معادلهٔ (۹-۴.۸) استفاده می‌کنیم و برای این مسئله، مؤلفهٔ  $yx$  تانوسر آهنگ کرنش عبارت است از:

$$\dot{\gamma}_{yx}(t) = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \dot{\gamma} \cos \omega t \quad (۱۰-۴.۸)$$

5. T. W. Spriggs, *Chem. Eng. Sci.*, **20**, 931-940 (1965).

که در آن  $\omega$  بسامد زاویه‌ای است. وقتی این عبارت را در معادله (۹-۴.۸) قرار دهیم، و مدول رهایی (داخل آکولاد) را به صورت  $G(t-t')$  بیان کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\gamma}^0 \cos \omega t' dt' \\ &= -\dot{\gamma}^0 \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \cos \omega(t-s) ds \\ &= -\dot{\gamma}^0 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \cos \omega s ds \right] \cos \omega t - \dot{\gamma}^0 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \sin \omega s ds \right] \sin \omega t \quad (۱۱-۴.۸) \end{aligned}$$

که در آن  $s = t - t'$ . از مقایسه این معادله با معادله (۴-۲.۸)، عبارت‌های:

$$\eta'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \cos \omega s ds \quad \text{و} \quad \eta''(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \sin \omega s ds \quad (۱۳, ۱۲-۴.۸)$$

برای مؤلفه‌های ویسکوزیتهٔ مختلط  $\eta^* = \eta' - i\eta''$  نتیجه می‌شود. وقتی از عبارت تعمیم‌یافتهٔ ماکسول برای مدول رهایی استفاده کنیم و انتگرال‌ها را محاسبه کنیم، درمی‌یابیم که:

$$\eta'(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{1 + (\lambda_k \omega)^2} \quad \text{و} \quad \eta''(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k \lambda_k \omega}{1 + (\lambda_k \omega)^2} \quad (۱۵, ۱۴-۴.۸)$$

اگر از معادله‌های تجربی (۷-۴.۸) و (۸-۴.۸) استفاده کنیم، می‌توانیم نشان دهیم که در بسامدهای بسیار بالا  $\eta'$  و  $\eta''$ ، به صورت  $1/\omega^{1-(1/\alpha)}$  کاهش می‌یابند (نگاه کنید به شکل ۴-۲.۸).

### مثال ۲-۴.۸

جریان ویسکوکشسان ناپایا در نزدیکی صفحهٔ نوسان‌گر مثال ۳-۱.۴ را، با استفاده از مدل ماکسول، به سیال‌های ویسکوکشسان تعمیم دهید و میزان تضعیف و جابه‌جایی فاز در «حالت پایایی تناوبی» را به دست آورید.

حل

برای جریان برشی فرض شده، از معادلهٔ حرکت، هرگاه برحسب مؤلفهٔ تانسور تنش نوشته شود، نتیجه می‌شود:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} \quad (۱۶-۴.۸)$$

مدل ماکسول در صورت انتگرالی خود شبیه معادله (۹-۴.۸) است، اما یک جملهٔ نمایی هم دارد:

$$\tau_{yx}(y, t) = - \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta_0}{\lambda_1} \exp[-(t-t')/\lambda_1] \right\} \frac{\partial v_x(y, t')}{\partial y} dt' \quad (۱۷-۴.۸)$$

با ترکیب این دو معادله، نتیجه می‌شود:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta_0}{\lambda_1} \exp[-(t-t')/\lambda_1] \right\} \frac{\partial^2 v_x(y, t')}{\partial y^2} dt' \quad (۱۸-۴.۸)$$

مانند مثال ۱.۴-۳، جوابی به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$v_x(y, t) = \mathcal{R}\{v^*(y)e^{i\omega t}\} \quad (۱۹-۴.۸)$$

که در آن  $v^*(y)$  مختلط است. با قرار دادن این عبارت در معادله (۱۸-۴.۸)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \rho \mathcal{R}\{i\omega v^* e^{i\omega t}\} &= \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\eta_0}{\lambda_1} \exp[-(t-t')/\lambda_1] \right\} \mathcal{R}\left\{ \frac{d^r v^*}{dy^r} e^{i\omega t'} \right\} dt' \\ &= \mathcal{R}\left\{ \frac{d^r v^*}{dy^r} e^{i\omega t} \int_0^{\infty} \frac{\eta_0}{\lambda_1} e^{-s/\lambda_1} e^{-i\omega s} ds \right\} \\ &= \mathcal{R}\left\{ \frac{d^r v^*}{dy^r} e^{i\omega t} \left[ \frac{\eta_0}{1+i\lambda_1\omega} \right] \right\} \end{aligned} \quad (۲۰-۴.۸)$$

با حذف عملگر حقیقی، معادله‌هایی برای  $v^*(y)$  نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^r v^*}{dy^r} - \left[ \frac{i\rho\omega(1+i\lambda_1\omega)}{\eta_0} \right] v^* = 0 \quad (۲۱-۴.۸)$$

سپس اگر کمیت مختلط داخل کروشه [ ] را برابر  $(\alpha + i\beta)^r$  قرار دهیم، جواب معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$v^* = v_0 e^{-(\alpha+i\beta)y} \quad (۲۲-۴.۸)$$

با ضرب کردن این عبارت در  $e^{i\omega t}$  و در نظر گرفتن بخش حقیقی، نتیجه می‌شود:

$$v_x(y, t) = v_0 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \beta y) \quad (۲۳-۴.۸)$$

این نتیجه همان صورت معادله (۵۷-۱.۴) را دارد، اما کمیت‌های  $\alpha$  و  $\beta$  به بسامد بستگی دارند:

$$\alpha(\omega) = \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\eta_0}} \left[ \sqrt{1 + (\lambda_1\omega)^2} - \lambda_1\omega \right]^{1/2} \quad (۲۴-۴.۸)$$

$$\beta(\omega) = \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\eta_0}} \left[ \sqrt{1 + (\lambda_1\omega)^2} - \lambda_1\omega \right]^{-1/2} \quad (۲۵-۴.۸)$$

یعنی به علت کشسانی سیال، با افزایش بسامد،  $\alpha$  کاهش و  $\beta$  افزایش می‌یابد. این نتیجه نشان می‌دهد که کشسانی بر انتقال امواج برشی در نزدیکی سطح در حال نوسان چه اثری دارد.

توجه کنید که بین مسئله‌های مطرح شده در دو مثال اخیر تفاوت مهمی وجود دارد. در مثال ۱-۴.۸، توزیع سرعت مشخص شده است و عبارتی برای تنش برشی لازم برای تداوم حرکت را به دست آورده‌ایم؛ از معادله حرکت استفاده نشد. در مثال ۲-۴.۸ در مورد توزیع سرعت فرضی اختیار نشد و توزیع سرعت را با استفاده از معادله حرکت به دست آوردیم.

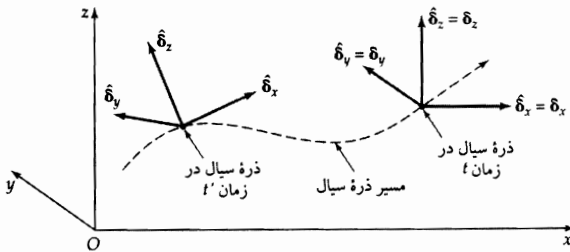
## ۵.۸ مشتق‌های هم‌چرخشی و مدل‌های ویسکوکشسان غیرخطی

در بخش گذشته نشان دادیم که با گنجاندن مشتق‌های زمانی (یا انتگرال‌های زمانی) در تانسور تنش، می‌توان آثار کشسان را توصیف کرد. مدل‌های کشسان خطی می‌توانند ویسکوزیته مختلط و انتقال امواج برشی کوچک دامنه را توصیف کنند. هم‌چنین می‌توان نشان داد که مدل‌های خطی می‌توانند عقب‌نشینی کشسان را توصیف کنند، اگرچه نتایج حاصل به جریان‌های با گرادینان جابه‌جایی قابل چشم‌پوشی (و بنابراین کم‌اهمیت از لحاظ عملی) محدود می‌شود.

در این بخش فرضیه‌ای<sup>۲۱</sup> را معرفی می‌کنیم که بنابه آن رابطه بین تانسور تنش و تانسورهای سینماتیکی در یک ذره سیال باید از جهت‌گیری لحظه‌ای آن ذره در فضا مستقل باشد. این فرضیه منطقی به نظر می‌رسد؛ اگر رابطه تنش-کرنش درکش لاستیکی را اندازه‌گیری کنیم، جهت کشیدن کش، در جهت شمال-جنوب، یا شرق-غرب، یا حتی چرخش در حین به دست آوردن داده‌ها (البته به شرطی که سرعت چرخش به اندازه‌ای بالا نباشد که نیروهای گریز مرکز با اندازه‌گیری تداخل کنند)، نباید تأثیری در نتیجه داشته باشد. یکی از راه‌های به‌کارگیری فرضیه بالا معرفی یک دستگاه مختصات هم‌چرخ روی هر ذره از سیال است. این دستگاه مختصات متعامد، ضمن حرکت با ذره سیال در فضا، با سرعت زاویه‌ای موضعی لحظه‌ای ذره سیال می‌چرخد (شکل ۱-۵.۸). در دستگاه مختصات هم‌چرخ می‌توان نوعی رابطه بین تانسور تنش و تانسور آهنگ کرنش نوشت؛ مثلاً می‌توانیم مدل جفریز را بنویسیم و سپس چند جمله غیرخطی اضافی به آن بیفزاییم:

$$\hat{\tau} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \hat{\tau} + \frac{1}{\nu} \mu_0 (\text{tr } \hat{\tau}) \hat{\gamma} - \frac{1}{\nu} \mu_1 [\hat{\gamma} \cdot \hat{\tau} + \hat{\tau} \cdot \hat{\gamma}] = -\eta_0 \left( \hat{\gamma} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \hat{\gamma} - \mu_2 \{ \hat{\gamma} \cdot \hat{\gamma} \} \right) \quad (1-5.8)$$

که در آن علامت روی تانسور نشان می‌دهد که مؤلفه‌های آن نسبت به دستگاه مختصات هم‌چرخ بیان شده‌اند. در معادله (۱-۵.۸) ثابت‌های  $\lambda_1$ ،  $\lambda_2$ ،  $\mu_0$ ،  $\mu_1$ ،  $\mu_2$  و همگی بعد زمان دارند.



شکل ۱-۵.۸ دستگاه مختصات ثابت که مبدأ آن در  $O$  است و دستگاه مختصات هم‌چرخ با بردارهای  $\delta_1$ ،  $\delta_2$ ،  $\delta_3$  که همراه ذره سیال حرکت می‌کند و با سرعت زاویه‌ای موضعی لحظه‌ای سیال،  $\frac{1}{\nu} [\nabla \times v]$  می‌چرخد.

چون معادله‌های پیوستگی و حرکت در دستگاه مختصات معمولی  $xyz$  نوشته می‌شوند که در فضا ثابت است، منطقی به نظر می‌رسد که معادله (۱-۵.۸) را از دستگاه  $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$  به دستگاه  $xyz$  منتقل کنیم. این یک مسئله صرفاً ریاضی است که مدت‌ها قبل حل شده<sup>۲</sup> و جواب آن معروف است. می‌توان نشان داد که مشتق‌های زمانی جزئی  $\partial/\partial t$ ،  $\partial^2/\partial t^2$ ، ... به مشتق‌های زمانی هم‌چرخشی (با مشتق‌های زمانی یامان<sup>۳،۲،۱</sup>  $D/Dt$ ،  $D^2/Dt^2$ ، ... تبدیل می‌شوند.

1. G. Jaumann, *Grundlagen der Bewegungslehre*, Leipzig (1905); *Sitzungsberichte Akad. Wiss. Wien*, IIa, **120**, 385-530 (1911); S. Zaremba, *Bull. Int. Acad. Sci., Cracovie*, 594-614, 614-621 (1903).  
 گوستاف آندرتاس یوهانس یامان (۱۸۶۳-۱۹۲۴) که در دانشگاه آلمانی برون (اکنون برنو نامیده می‌شود) تدریس کرد و «مشتق یامان» را به نام او نامیده‌اند، در آغاز قرن بیستم نقش مهمی در حوزه مکانیک پیوستار داشت؛ او نخستین کسی بود که معادله تغییر آنتروپی، شامل «شار آنتروپی» و «آهنگ تولید آنتروپی» را ارائه داد (نگاه کنید به بخش ۱.۲۴).
2. J. G. Oldroyd, *Proc. Roy. Soc.*, A245, 278-297 (1958).

برای بسط مدل‌های هم‌چرخشی نگاه کنید به

- L. E. Wedgwood, *Rheol. Acta*, **38**, 91-99 (1999).  
 3. J. D. Goddard and C. Miller, *Rheol. Acta*, **5**, 177-184 (1966).  
 4. R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1. Fluid Mechanics*, Wiley, New York, 1st edition (1977), Chapters 7 and 8;
- مدل‌های هم‌چرخشی در ویراست دوم این کتاب شرح داده نشده‌اند و در این ویراست تأکید بر استفاده از «مختصات جابه‌جاشده» و دستگاه مختصات «هم‌تغییرشکل» است. برای مدل‌های دیفرانسیلی، می‌توان از هردو دستگاه مختصات هم‌چرخ یا هم‌تغییرشکل استفاده کرد، اما دستگاه نخست از لحاظ مفهومی و ریاضی ساده‌تر است.

مشق‌های زمانی هم‌چرخشی یک تانسور مرتبهٔ دوم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{D}{Dt} \alpha = \frac{D}{Dt} \alpha = \frac{1}{\rho} \{ \omega \cdot \alpha - \alpha \cdot \omega \} \quad (۲-۵.۸)$$

که در آن  $\omega = \nabla v - (\nabla v)^T$  تانسور گردشاری است و  $D/Dt$  مشتق زمانی مادی است که در بخش ۵.۳ تعریف شد. ضرب‌های نقطه‌ای تانسوری که در معادله (۱-۵.۸) ظاهر شدند، با مؤلفه‌هایی در دستگاه مختصات  $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ ، به ضرب‌های نقطه‌ای متناظر، با مؤلفه‌هایی در دستگاه  $xyz$  تبدیل می‌شوند.

معادله (۱-۵.۸)، پس از تبدیل به دستگاه  $xyz$ ، چنین نوشته می‌شود:

$$\tau + \lambda_1 \frac{D}{Dt} \tau + \frac{1}{\rho} \mu_0 (tr \tau) \dot{\gamma} - \frac{1}{\rho} \mu_0 \{ \tau \cdot \dot{\gamma} + \dot{\gamma} \cdot \tau \} = -\eta_0 \left( \dot{\gamma} + \lambda_2 \frac{D}{Dt} \dot{\gamma} - \mu_2 \{ \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} \} \right) \quad (۳-۵.۸)$$

که مدل ۶ ثابت‌ه اولدریود است. این مدل به جهت‌گیری موضعی لحظه‌ای ذرهٔ سیال در فضا وابستگی ندارد. لازم به تأکید است که معادله (۳-۵.۸) مدلی تجربی است؛ استفاده از دستگاه مختصات هم‌چرخ فقط این نکته را تضمین می‌کند که چرخش موضعی لحظه‌ای سیال «کسر شده است».

با انتخاب مناسب این پارامترها، اغلب پدیده‌های مشاهده‌شده در دینامیک سیالات پلیمری را می‌توان به‌طور کیفی توصیف کرد. در نتیجه از این مدل در محاسبات آزمایشی دینامیک سیالات استفاده گسترده‌ای شده است. ساده‌سازی ۳ ثابت‌ه معادله (۳-۵.۸) با  $\mu_1 = \lambda_1$ ،  $\mu_2 = \lambda_2$  و  $\mu_0 = 0$  در مدل ب اولدریود می‌نامند. در مثال ۱-۵.۸ نشان می‌دهیم که معادله (۳-۵.۸)، برای توابع ماده که در بخش ۲.۸ تعریف شدند، چه چیزی ارائه می‌دهد. یک مدل ویسکوکشنان غیرخطی دیگر، مدل ۳ ثابت‌ه گیسکاس<sup>۵</sup> است که جمله‌ای درجهٔ دوم در مؤلفه‌های تنش دارد:

$$\tau + \lambda \left( \frac{D}{Dt} \tau - \frac{1}{\rho} \{ \tau \cdot \dot{\gamma} + \dot{\gamma} \cdot \tau \} \right) - \alpha \frac{\lambda}{\eta_0} \{ \tau \cdot \tau \} = -\eta_0 \dot{\gamma} \quad (۴-۵.۸)$$

در این جا  $\lambda$  ثابت زمانی،  $\eta_0$  ویسکوزیتهٔ آهنگ برش صفر، و  $\alpha$  پارامتری بدون بعد است. این مدل شکلهایی منطقی برای توابع ماده ارائه می‌دهد و عبارت‌های تحلیلی مربوط به آن‌ها در جدول ۱-۵.۸ خلاصه شده است. به‌علت وجود جمله  $\{ \tau \cdot \tau \}$ ، این روابط ساده نیستند. می‌توان برهم‌نهاده‌های مدل گیسکاس را برای توصیف تقریباً کتی شکل‌های توابع مادهٔ اندازه‌گیری شده ایجاد کرد.<sup>۶</sup> در محاسبات دینامیک سیالات از این مدل استفاده گسترده‌ای شده است.

### مثال ۱-۵.۸

توابع ماده برای مدل ۶ ثابت‌ه اولدریود<sup>۲،۳</sup>

توابع ماده را برای جریان برشی پایا، حرکت نوسانی کوچک دامنه، و جریان افزایش طولی تک‌محوری پایا به دست آورید. از این نکته استفاده کنید که مؤلفه‌های تانسور تنش  $\tau_{yz}$  و  $\tau_{xz}$  صفرند و در جریان افزایش طولی، عناصر غیرقطری تانسور تنش صفرند (این نتایج با استدلال‌های مبتنی بر تقارن به دست می‌آیند).<sup>۷</sup>

5. H. Giesekus, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **11**, 69-109 (1982); **12**, 367-374; *Rheol. Acta*, **21**, 366-375 (1982). see also R. B. Bird and J. M. Wiest, *J. Rheol.*, **29**, 519-532 (1985), and R. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1, Fluid Dynamics*, Wiley-Interscience, New York, 2nd edition (1987), 7.3 (c).

6. W. R. Burghardt, J. M. Li, B. khomami, and B. Yang, *J. Rheol.*, **147**, 149-165 (1999).

۷. مثلاً نگاه کنید به

R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1, Fluid Dynamics*, Wiley-Interscience, New York, 2nd edition (1987), §3.2.

جدول ۱-۵.۸ توابع ماده برای مدل گیسکاس.

جریان برشی حالت پایا:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{(1-f)^{\tau}}{1+(1-2\alpha)f} \quad \text{و} \quad \frac{\Psi_1}{2\eta_0\lambda} = \frac{f(1-\alpha f)}{\alpha(1-f)} \frac{1}{(\lambda\dot{\gamma})^{\tau}} \quad (\text{الف، ب})$$

$$\frac{\Psi_2}{\eta_0\lambda} = -f \frac{1}{(\lambda\dot{\gamma})^{\tau}} \quad (\text{ج})$$

که در آن

$$f = \frac{1-\chi}{1+(1-2\alpha)\chi} \quad \text{و} \quad \chi^{\tau} = \frac{[1+16\alpha(1-\alpha)(\lambda\dot{\gamma})^{\tau}]^{1/\tau}-1}{8\alpha(1-\alpha)(\lambda\dot{\gamma})^{\tau}} \quad (\text{د، ه})$$

جریان برشی نوسانی  
کوچک دامنه:

$$\frac{\eta'}{\eta_0} = \frac{1}{1+(\lambda\omega)^{\tau}} \quad \text{و} \quad \frac{\eta''}{\eta_0} = \frac{\lambda\omega}{1+(\lambda\omega)^{\tau}} \quad (\text{و، ز})$$

جریان افزایش طولی پایا:

$$\frac{\bar{\eta}}{2\eta_0} = \frac{1}{6\alpha} \left[ 3 + \frac{1}{\lambda\dot{\epsilon}} (\sqrt{1-4(1-2\alpha)\lambda\dot{\epsilon} + 4(\lambda\dot{\epsilon})^{\tau}} - \sqrt{1+2(1-2\alpha)\lambda\dot{\epsilon} + (\lambda\dot{\epsilon})^{\tau}}) \right] \quad (\text{ح})$$

حل

(الف) ابتدا معادله (۳-۵.۸) را برای جریان برشی ناپایا، با توزیع سرعت  $v_x(y, t) = \dot{\gamma}(t)y$  ساده می‌کنیم. با نوشتن مؤلفه‌های این معادله، نتیجه می‌شود:

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{xx} - (\lambda_1 + \mu_1) \tau_{yx} \dot{\gamma} = +\eta_0 (\lambda_2 + \mu_2) \dot{\gamma}^{\tau} \quad (5-5.8)$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{yy} + (\lambda_1 - \mu_1) \tau_{yx} \dot{\gamma} = -\eta_0 (\lambda_2 - \mu_2) \dot{\gamma}^{\tau} \quad (6-5.8)$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{zz} = 0 \quad (7-5.8)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau_{yx} + \frac{1}{\nu} (\lambda_1 - \mu_1 + \mu_0) \tau_{xx} \dot{\gamma} - \frac{1}{\nu} (\lambda_1 + \mu_1 - \mu_0) \tau_{yy} \dot{\gamma} \\ + \frac{1}{\nu} \mu_0 \tau_{zz} \dot{\gamma} = -\eta_0 + \frac{1}{\nu} \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (8-5.8)$$

(ب) برای جریان برشی حالت پایا، از معادله (۷-۵.۸) نتیجه می‌شود  $\tau_{zz} = 0$ ، و از سه معادله دیگر یک دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود که می‌توان آن را حل کرد و بقیه مؤلفه‌های تانسور تنش را به دست آورد. سپس، با استفاده از تعریف‌های توابع ماده در بخش ۲.۸، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1 + [\lambda_1 \lambda_2 + (\mu_0 - \mu_1) \mu_2] \dot{\gamma}^{\tau}}{1 + [\lambda_1^{\tau} + (\mu_0 - \mu_1) \mu_1] \dot{\gamma}^{\tau}} = \frac{1 + \sigma_2 \dot{\gamma}^{\tau}}{1 + \sigma_1 \dot{\gamma}^{\tau}} \quad (9-5.8)$$

$$\frac{\Psi_1}{2\eta_0 \lambda_1} = \frac{1 + \sigma_2 \dot{\gamma}^{\tau}}{1 + \sigma_1 \dot{\gamma}^{\tau}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (10-5.8)$$

$$\frac{\Psi_2}{\eta_0 \lambda_1} = - \left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right) \frac{1 + \sigma_2 \dot{\gamma}^{\tau}}{1 + \sigma_1 \dot{\gamma}^{\tau}} + \left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right) \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (11-5.8)$$



این مدل ویسکوزیته وابسته به آهنگ برش، و همچنین ضرایب تنش قائم وابسته به آهنگ برش را نتیجه می‌دهد. (در مدل ب اولدریود ضرایب ویسکوزیته و تنش قائم از آهنگ برش مستقل اند.) در اغلب پلیمرها، ویسکوزیته غیرنیوتونی با آهنگ برش کاهش می‌یابد و برای چنین سیالاتی نتیجه می‌گیریم که  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$  به علاوه، چون مقادیر اندازه‌گیری شده  $\tau_{ij}$  همیشه با آهنگ برش به صورت یکنوا افزایش می‌یابند، باید  $\sigma_1 > \frac{1}{4}\sigma_2$  باشد. اگرچه این مدل ویسکوزیته وابسته به آهنگ برش و تنش‌های قائم را نتیجه می‌دهد، شکل‌های منحنی‌ها در گستره وسیعی از آهنگ‌های برش با داده‌های تجربی در توافق نیستند.

اگر  $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2$ ، دومین ضریب تنش قائم علامتی مخالف با علامت نخستین ضریب تنش قائم دارد که با داده‌های مربوط به اغلب مایعات پلیمری در توافق است. چون در بسیاری از سیالات دومین ضریب تنش قائم بسیار کوچک‌تر از نخستین ضریب است و در بعضی از جریان‌ها نقشی قابل چشم‌پوشی دارد، فرض  $\lambda_1 = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_2$  فرضی منطقی است و در نتیجه تعداد پارامترها از ۶ به ۴ کاهش می‌یابد. این بحث نحوه تعیین یک مدل تجربی پیشنهادی، از طریق مقایسه پیش‌بینی‌های مدلی با داده‌های تجربی حاصل از آزمایش‌های سیال‌سنجی را نشان می‌دهد. هم‌چنین دیدیم که داده‌های تجربی ممکن است وجود قیدهایی را در مورد پارامترها الزامی کنند. بدیهی است که این کار دشواری است، اما شبیه مسئله‌ای نیست که متخصص ترمودینامیک در پی‌ریزی روابط معادله‌های تجربی حالت، مثلاً برای مخلوط‌ها، با آن روبه‌روست. متخصص سیال‌سنجی با معادله‌های تانسوری سروکار دارد، درحالی‌که متخصص ترمودینامیک فقط با معادله‌های اسکالر کار می‌کند.

(ج) برای حرکت نوسانی کوچک‌دامنه، جمله‌های معادله‌های (۵-۵.۸) تا (۸-۵.۸) را می‌توان حذف کرد، و توابع ماده همانند آن‌هایی هستند که از مدل جفریز برای ویسکوکشسانی خطی به دست آمد:

$$\frac{\eta'}{\eta_0} = \frac{1 + \lambda_1 \lambda_2 \omega^2}{1 + \lambda_1^2 \omega^2} \quad \text{و} \quad \frac{\eta''}{\eta_0} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \omega}{1 + \lambda_1^2 \omega^2} \quad (۱۳-۵.۸)$$

برای آن‌که  $\eta'$  تابع نزولی یکنوای بسامد باشد و  $\eta''$  مثبت باشد (چنان‌که در همه آزمایش‌ها مشاهده می‌شود)، باید داشته باشیم  $\lambda_1 < \lambda_2$ . در این‌جا نیز، این مدل نتایجی ارائه می‌دهد که از لحاظ کیفی صحیح‌اند، اما ممکن است شکل منحنی‌ها صحیح نباشد.

(د) برای جریان افزایش طولی حالت‌پایای تعریف‌شده در بخش ۲.۸، از مدل ۶ ثابت‌ه اولدریود نتیجه می‌شود:

$$\frac{\bar{\eta}}{3\eta_0} = \frac{1 - \mu_2 \dot{\epsilon} + \mu_2 (3\mu_0 - 2\mu_1) \dot{\epsilon}^2}{1 - \mu_1 \dot{\epsilon} + \mu_1 (3\mu_0 - 2\mu_1) \dot{\epsilon}^2} \quad (۱۴-۵.۸)$$

چون برای اغلب پلیمرها شیب منحنی ویسکوزیته افزایش طولی برحسب آهنگ افزایش طول در  $\dot{\epsilon} = 0$  مثبت است، باید داشته باشیم  $\mu_2 > \mu_1$ . معادله (۱۴-۵.۸) پیش‌بینی می‌کند که ویسکوزیته افزایش طولی می‌تواند به‌ازای مقداری متناهی از آهنگ افزایش طول، بی‌نهایت شود؛ به‌این ترتیب ممکن است در محاسبات کشیدن الیاف، مشکلی بروز کند.

توجه داشته‌باشید که ثابت‌های زمانی  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  در عبارت ویسکوزیته افزایش طولی ظاهر نمی‌شوند، حال آن‌که ثابت‌های  $\mu_0$ ،  $\mu_1$ ، و  $\mu_2$  در مؤلفه‌های ویسکوزیته مختلط، یعنی در معادله‌های (۱۲-۵.۸) و (۱۳-۵.۸) وارد نمی‌شوند. این تأکید است بر این نکته که برای تعیین پارامترهای عبارتی تجربی برای تانسور تنش، انجام گستره وسیعی از آزمایش‌های سیال‌سنجی ضرورت دارد. به‌بیان دیگر، آزمایش‌های مختلف بر بخش‌های مختلف این مدل تأکید می‌کنند.

## ۶.۸ نظریه‌های مولکولی برای مایعات پلیمری

در بخش پیش باید آشکار شده باشد که مطرح کردن و آزمودن عبارات‌های تجربی برای تانسور تنش ویسکوکشیسانی غیرخطی کار دشواری است. یادآوری می‌کنیم که در جریان متلاطم، جستجو برای یافتن عبارات‌های تجربی برای تانسور تنش رینولدز به‌همین اندازه دشوار است. اما در ویسکوکشیسانی غیرخطی، این مزیت را داریم که می‌توانیم با استفاده از نظریه مولکولی، حوزه جستجو برای عبارات‌های تانسور تنش را محدود کنیم. اگرچه نظریه سینتیکی پلیمرها بسیار پیچیده‌تر از نظریه سینتیکی گازهاست، در پیشنهاد کردن صورت‌های ممکن برای تانسور تنش، راهنمای ماست. اما ثابت‌هایی که در عبارات‌های مولکولی ظاهر می‌شوند، باید با اندازه‌گیری‌های سیال‌سنجشی تعیین شوند. نظریه‌های سینتیکی برای پلیمرها را می‌توان به دودسته تقسیم کرد: نظریه‌های شبکه‌ای و نظریه‌های تک‌مولکولی:

(الف) نظریه‌های شبکه‌ای<sup>۲</sup> دراصل برای توصیف خواص مکانیکی لاستیک ابداع شدند. در یکی از این نظریه‌ها فرض می‌شود که مولکول‌های پلیمر در لاستیک، درحین وولکانش، پیوند شیمیایی پیدا می‌کنند. با فرض کردن شبکه‌ای همواره در تغییر، که در آن نقاط اتصال موقتی‌اند و توسط رشته‌هایی تشکیل می‌شوند که مدتی باهم حرکت می‌کنند و سپس به تدریج ازهم جدا می‌شوند (نگاه کنید به شکل ۶.۸-۱). این نظریه‌ها را تعمیم داده‌اند تا پلیمرهای مذاب و محلول‌های غلیظ را نیز توصیف کنند. هر نظریه باید شامل روابطی تجربی برای بیان آهنگ‌های تشکیل و گسست این اتصال‌ها باشد.

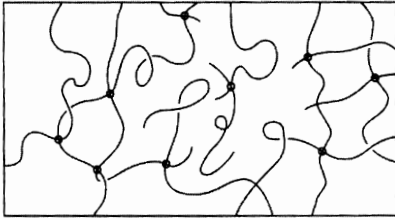
(ب) نظریه‌های تک‌مولکولی<sup>۱</sup> درابتدا برای توصیف مولکول‌های پلیمر در محلول‌های بسیار رقیق طراحی شدند؛ در این محلول‌ها برهم‌کنش‌های پلیمر-پلیمر به‌ندرت مشاهده می‌شود. هر مولکول معمولاً با نوعی مدل «مهره-فنر» نمایش داده می‌شود؛ مدلی که از تعدادی کره کوچک تشکیل می‌شود که توسط فنرهای خطی یا غیرخطی، طوری به‌هم متصل شده‌اند که معرف معماری مولکول باشند؛ سپس به مدل مهره-فنر فرصت می‌دهند که در حلال حرکت کند و نیروی پسی استوکس ازسوی حلال بر مهره‌ها وارد شود و حرکت براونی نیز به آن‌ها ضربه بزند (نگاه کنید به شکل ۶.۸-۲الف).

سپس، با استفاده از نظریه سینتیکی می‌توان «تابع توزیع» را برای جهت‌گیری مولکول‌ها (که به‌صورت ساختارهای مهره-فنر مدل‌سازی شده‌اند) به‌دست آورد؛ وقتی این تابع معلوم شد، خواص ماکروسکوپی مختلف را می‌توان محاسبه کرد. همین نوع نظریه، از طریق بررسی حرکت مدل مهره-فنر تکی در «میدان نیروی میانگین» ایجادشده توسط مولکول‌های مجاور، درمورد محلول‌های غلیظ و پلیمرهای مذاب قابل‌کاربرد است. یعنی به‌سبب مجاورت مولکول‌ها، «مهره‌ها»ی مدل در جهت اسکلت زنجیر پلیمر آسان‌تر حرکت می‌کنند تا درجهت عمود بر آن. به‌عبارت‌دیگر، پلیمر نوعی حرکت مارمانند پیدا می‌کند که به «خزندگی» موسوم است (نگاه کنید به شکل ۶.۸-۲ب).

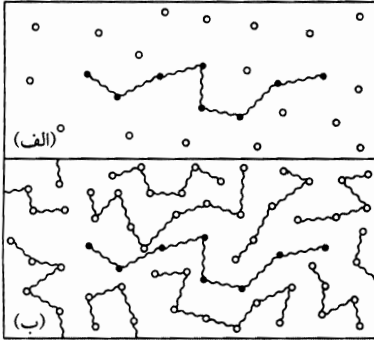
1. R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 2, *Kinetic Theory*, Wiley-Interscience, New York, 2nd edition (1987).

2. M. Doi and S. F. Edwards, *The Theory of Polymer Dynamics*, Clarendon Press, Oxford (1986); J. D. Schieber, "Polymer Dynamics," in *Encyclopedia of Applied Physics*, Vol. 14, VCH Publishers, Inc. (1996), pp. 415-443. R. B. Bird and H. C. Öttinger, *Ann. Rev. Phys. Chem.*, **43**, 371-406 (1992).

3. A. S. Lodge, *Elastic Liquids*, Academic Press, New York (1964); *Body Tensor Fields in Continuum Mechanics*, Academic Press, New York (1974); *Understanding Elastomer Molecular Network Theory*, Bannatek Press, Madison, Wis. (1999).



شکل ۱-۶.۸ بخشی از شبکه پلیمر که توسط «اتصال‌های موقتی» شکل یافته‌است که با دایره نشان داده شده‌اند.



شکل ۲-۶.۸ مدل‌های مهره-فنر تک‌مولکولی برای (الف) محلول رقیق پلیمر، و (ب) پلیمر رقیق‌نشده («مذاب») پلیمری که فاقد حلال است. در محلول رقیق، مولکول پلیمر می‌تواند در همه جهت‌ها در حلال حرکت کند. در پلیمر رقیق‌نشده، یک مولکول نمونه‌وار پلیمر (مهره سیاه) توسط مولکول‌های مجاور مقید می‌شود و گرایش به حرکت مارمانند («خزندگی») پیدا می‌کند و با لغزش به عقب و جلو در جهت اسکلت خود حرکت می‌کند.

برای نشان دادن هرچه بهتر رهیافت نظریه سینتیکی، نتایج را برای سیستمی ساده تشریح می‌کنیم: محلول رقیقی از یک پلیمر، که به صورت دمبل کشسان قالب‌گیری شده‌است، از دو مهره تشکیل می‌شود که توسط فنر به هم متصل شده‌اند. فنر غیرخطی، و کشش‌پذیری آن متناهی است؛ نیرو در فنر از رابطه زیر به دست می‌آید:<sup>۴</sup>

$$F(c) = \frac{HQ}{1 - (Q/Q_0)^2} \quad (۱-۶.۸)$$

که در آن  $H$  ثابت فنر،  $Q$  بردار سر به سر دمبل است که کشیدگی و جهت‌گیری دمبل را نشان می‌دهد، و  $Q_0$  افزایش طول ماکزیم فنر است. ضریب اصطکاک برای حرکت مهره‌ها در حلال از قانون استوکس به دست می‌آید و برابر است با  $\zeta = 6\pi\eta_s a$ ، که در آن  $a$  شعاع مهره و  $\eta_s$  ویسکوزیته حلال است. اگرچه این مدل بسیار ساده شده‌است، ایده‌های فیزیکی اصلی جهت‌گیری مولکولی، کشیدگی مولکولی، و کشش‌پذیری متناهی را نشان می‌دهد. وقتی جزئیات نظریه سینتیکی مشخص شود عبارت زیر برای تانسور تنش به دست می‌آید که به صورت جمع سهم‌های یک حلال نیوتونی و یک پلیمر نوشته می‌شود (نگاه کنید به پانوش ۳ در بخش ۴.۸):<sup>۵</sup>

$$\tau = \tau_s + \tau_p \quad (۲-۶.۸)$$

در این‌جا:

$$\tau_s = -\eta_s \dot{\gamma} \quad (۳-۶.۸)$$

$$Z\tau_p + \lambda_H \left( \frac{D}{Dt} \tau_p - \frac{1}{\dot{\gamma}} \{ \tau_p \cdot \dot{\gamma} + \dot{\gamma} \cdot \tau_p \} \right) - \lambda_H (\tau_p - nKT\delta) \frac{D \ln Z}{Dt} = -nKT\lambda_H \dot{\gamma} \quad (۴-۶.۸)$$

4. H. R. Warner, Jr., *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **11**, 379-387 (1972); R. L. Christiansen and R. B. Bird, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **3**, 161-177 (1977/1978).

5. R. I. Tanner, *Trans. Soc. Rheol.*, **19**, 37-65 (1975); R. B. Bird, P. J. Dotson, and N. L. Johnson, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **7**, 213-235 (1980).

که در آن  $n$  چگالی عددی مولکول‌های پلیمر (یعنی دبل‌ها)،  $\lambda_H = \zeta/4H$  ثابت زمانی (معمولاً بین  $10^{-1}$  و  $10^0$  ثانیه)،  $Z = 1 + (3/b)[1 - (\text{tr } \tau_p/3nKT)]$ ، و  $b = HQ^2/KT$  پارامتر کشش‌پذیری متناهی، و معمولاً بین  $10^0$  و  $10^5$  است. به این ترتیب نظریه مولکولی به مدلی با چهار ثابت قابل تنظیم منتهی می‌شود:  $n$ ،  $\lambda_H$ ،  $\eta_s$ ، و  $b$ ، که می‌توان با آزمایش‌های سیال‌سنجی آن‌ها را تعیین کرد. بنابراین نظریه مولکولی صورت عبارت تانسور تنش را نشان می‌دهد و از داده‌های سیال‌سنجی برای تعیین مقادیر پارامترها استفاده می‌شود. مدل توصیف شده توسط معادله‌های (۲-۶.۸)، (۳-۶.۸)، و (۴-۶.۸) را مدل FENE-P می‌نامند (مدل کشسان غیرخطی با کشش‌پذیری متناهی، در تقریب پترلین) که در آن  $(Q/Q_0)^2$  در معادله (۱-۶.۸) با  $\langle Q^2 \rangle/Q_0^2$  جایگزین می‌شود.

کار کردن با این مدل دشوارتر از مدل ۶ ثابت‌اولدریود است، زیرا برحسب تنش غیرخطی است. اما برای بعضی از توابع ماده شکل‌های بهتری ارائه می‌دهد. به علاوه، چون با مدل مولکولی سروکار داریم، می‌توانیم پس از حل یک مسئله، اطلاعاتی درباره کشیدگی و جهت‌گیری مولکولی نیز به دست آوریم. مثلاً می‌توان نشان داد که کشیدگی مولکولی متوسط با رابطه  $\langle Q^2 \rangle/Q_0^2 = 1 - Z^{-1}$  بیان می‌شود که در آن پراکنده‌های زاویه‌دار متوسط آماری را نشان می‌دهند.

مثال‌های زیر نحوه به دست آوردن توابع ماده برای مدل مورد نظر را نشان می‌دهند و نتایج حاصل را با داده‌های تجربی مقایسه می‌کنند. اگر مدل قابل قبول باشد، آن‌گاه باید آن را با معادله‌های پیوستگی و حرکت ترکیب کرد تا بتوان مسئله‌های جالب جریان را حل نمود. این کار مستلزم محاسبه در مقیاس بزرگ است.

### مثال ۱-۶.۸

توابع ماده برای مدل FENE - P

توابع ماده را برای جریان برشی حالت پایا و جریان افزایش طولی پلیمری که با مدل FENE - P توصیف می‌شود، به دست آورید.

حل

(الف) با استفاده از این مدل در مورد جریان برشی حالت پایا، معادلات زیر برای مؤلفه‌های غیرصفر سهم پلیمر در تانسور تنش به دست می‌آید:

$$Z\tau_{p,xx} = 2\tau_{p,yx}\lambda_H\dot{\gamma} \quad \text{و} \quad Z\tau_{p,yx} = -nKT\lambda_H\dot{\gamma} \quad (۶، ۵-۶.۸)$$

در این جا کمیت  $Z$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Z = 1 + (3/b)[1 - (\tau_{p,xx}/3nKT)] \quad (۷-۶.۸)$$

این معادله‌ها را می‌توان ترکیب کرد تا معادله‌ای درجه سه برای سهم تنش برشی بدون بُعد  $T_{yx} = \tau_{p,yx}/3nKT$  به دست آید:

$$T_{yx}^2 + 3pT_{yx} + 2q = 0 \quad (۸-۶.۸)$$

که در آن  $q = (b/10^8)\lambda_H\dot{\gamma}$  و  $p = (b/54) + (1/18)$  می‌توان این معادله درجه سه را حل کرد و نتیجه گرفت:<sup>۶</sup>

$$T_{yx} = -2p^{1/2} \sinh\left(\frac{1}{3} \text{arcsinh } qp^{-2/2}\right) \quad (۹-۶.۸)$$

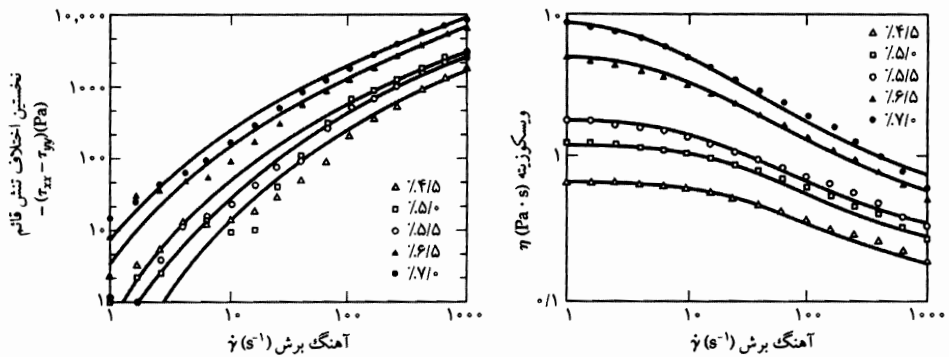
6. K. Rektorys, *Survey of Applicable Mathematics*, MIT Press, Cambridge, MA (1969), pp. 78-79.

ویسکوزیته غیرنیوتونی مثبتی بر این تابع، همراه با چند داده تجربی برای چند محلول پلی‌متیل-متاکریلات، در شکل ۳-۶.۸ نشان داده شده است. از معادله (۹-۶.۸)، برای مقادیر حدی ویسکوزیته، داریم:

$$\eta - \eta_s = nKT\lambda_H \left( \frac{b}{b+\dot{\gamma}} \right) \quad \dot{\gamma} = 0 \text{ به ازای } (10-6.8)$$

$$\eta - \eta_s \sim nKT\lambda_H \left( \frac{b}{\lambda_H^2 \dot{\gamma}^2} \right)^{1/3} \quad \dot{\gamma} \rightarrow \infty \text{ به ازای } (11-6.8)$$

بنابراین در آهنگ‌های برش بالا، رفتار قانون توانی (معادله ۳-۳.۸) با  $n = \frac{1}{3}$  نتیجه می‌شود. این نکته را می‌توان توجیه مولکولی برای استفاده از مدل قانون توانی دانست.

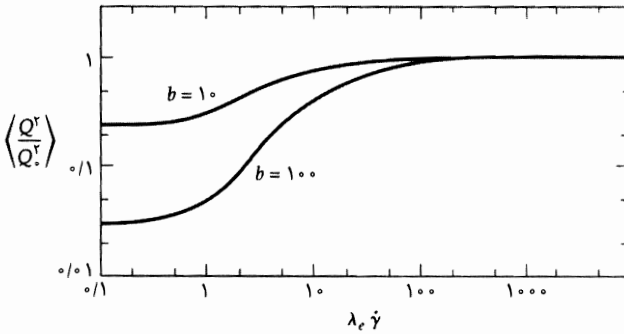


شکل ۳-۶.۸ ویسکوزیته و داده‌های نخستین تفاضل تنش قائم برای محلول‌های پلی‌متیل - متاکریلات، همراه با منحنی‌های FENE - P برای ثابت‌های زیر:

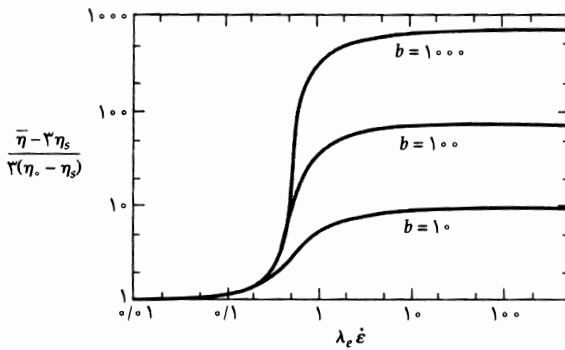
$b$	$a$	$\lambda_H$	$\eta_0$	غلظت پلیمر
[—]	[Pa]	[s]	[Pa · s]	%
۴۷٫۹	۳٫۵۸	۰٫۱۵۷	۰٫۱۳	۴٫۵
۳۸٫۳	۵٫۹۴	۰٫۱۹۲	۰٫۱۹	۵٫۰
۳۰٫۶	۵٫۹۸	۰٫۳۰۲	۰٫۲۵	۵٫۵
۲۵٫۰	۱۱٫۸	۰٫۴۴۷	۰٫۳۸	۶٫۵
۱۶٫۰	۱۹٫۱	۰٫۵۵۳	۰٫۴۵	۷٫۰

کمیت  $a = nKT$  پارامتری در نظر گرفته شده که باید از داده‌های سیال‌سنجشی به دست آید.

از معادله (۵-۶.۸) می‌توان دریافت که  $\Psi_1$  از رابطه  $\Psi_1 = 2(\eta - \eta_s)^2 / nKT$  به دست می‌آید؛ این نتیجه در شکل ۳-۶.۸ با داده‌های تجربی مقایسه شده است. دومین ضریب تنش قائم، یعنی  $\Psi_2$ ، برای این مدل صفر است. چنان‌که در بالا گفته شد، وقتی مسئله جریان را حل کردیم، می‌توانیم کشیدگی مولکولی را نیز از کمیت  $Z$  به دست آوریم. در شکل ۴-۶.۸ نحوه کشیدن مولکول‌ها را، به طور متوسط، به صورت تابعی از آهنگ برش نشان می‌دهیم.



شکل ۶-۸-۴ کشیدگی مولکولی به صورت تابعی از آهنگ برش  $\dot{\gamma}$  در جریان برشی پایا، طبق مدل ذمبلی FENE-P. ثابت زمانی قابل تعیین به روش تجربی، یعنی  $\lambda_e = [\eta_0] \eta_s M / RT$  که در آن  $[\eta_0]$  ویسکوزیته ذاتی آهنگ برش صفر است و با رابطه  $\lambda_H$  به  $\lambda_e = \lambda_H b / (b + 3)$  مربوط می‌شود.



شکل ۶-۸-۵ ویسکوزیته افزایش طولی  $\bar{\eta}$  به صورت تابعی از آهنگ افزایش طول، طبق مدل ذمبلی FENE-P. ثابت زمانی از رابطه  $\lambda_e = \lambda_H b / (b + 3)$  به دست می‌آید.

(ب) برای جریان افزایش طولی حالت پایا، داریم:

$$Z \tau_{p,xx} + \tau_{p,xx} \lambda_H \dot{\epsilon} = +nKT \lambda_H \dot{\epsilon} \quad (۱۲-۶.۸)$$

$$Z \tau_{p,yy} + \tau_{p,yy} \lambda_H \dot{\epsilon} = +nKT \lambda_H \dot{\epsilon} \quad (۱۳-۶.۸)$$

$$Z \tau_{p,zz} - \tau_{p,zz} \lambda_H \dot{\epsilon} = -2nKT \lambda_H \dot{\epsilon} \quad (۱۴-۶.۸)$$

$$Z = 1 + \frac{3}{b} \left( 1 - \frac{\tau_{p,xx} + \tau_{p,yy} + \tau_{p,zz}}{3nKT} \right) \quad (۱۵-۶.۸)$$

از این مجموعه معادلات یک معادله درجه سه برای  $\tau_{p,xx} - \tau_{p,zz}$ ، یا یک معادله درجه دو بر حسب  $\dot{\epsilon}$  حاصل می‌شود که می‌توان  $\bar{\eta}(\dot{\epsilon})$  را از آن به دست آورد (نگاه کنید به شکل ۶-۸-۵). داده‌های تجربی محدود در مورد محلول‌های پلیمری حاکی از آن است که شاید شکل منحنی‌ها تقریباً صحیح باشد.

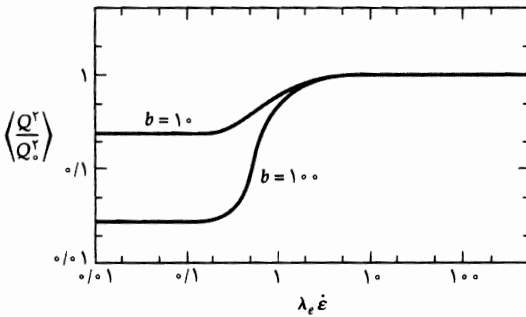
عبارت‌های حدی برای ویسکوزیته افزایش طولی عبارت‌اند از:

$$\bar{\eta} - 3\eta_s = 3nKT \lambda_H \left( \frac{b}{b+3} \right) \quad \dot{\epsilon} = 0 \quad (۱۶-۶.۸)$$

$$\bar{\eta} - 3\eta_s = 2nKT \lambda_H b \quad \dot{\epsilon} \rightarrow \infty \quad (۱۷-۶.۸)$$

پس از تعیین تنش‌ها در این سیستم، می‌توان کشیدگی متوسط مولکول‌ها را، به عنوان تابعی از آهنگ افزایش طول به دست آورد؛ این رابطه در شکل ۶-۸-۶ نشان داده شده است.

شایان ذکر است که برای مقدار نمونه‌وار  $b$  - مثلاً  $5^\circ$  - با افزایش آهنگ افزایش طول، ویسکوزیته افزایش طولی می‌تواند تا  $3^\circ$  برابر افزایش پیدا کند و در نتیجه اثر زیادی بر جریان‌هایی داشته‌باشد که در آن‌ها مؤلفه افزایش طولی نیرومند است.<sup>۷</sup>



شکل ۶-۶.۸ کشیدگی مولکولی به صورت تابعی از آهنگ افزایش طول  $\dot{\epsilon}$ ، در جریان افزایش طولی پایا، طبق مدل دمبلی FENE-P. ثابت زمانی از رابطه  $\lambda_e = \lambda_H b / (b + 3)$  به دست می‌آید.

### پرسش‌های تشریحی

۱. رفتار مایعات نیوتونی و پلیمری را در آزمایش‌های مختلف شرح داده‌شده در بخش‌های ۱.۸ و ۲.۸ مقایسه کنید.
۲. چرا ما فقط با تفاضل تنش‌های قائم در مایعات تراکم‌ناپذیر سروکار داریم (نگاه کنید به معادله‌های (۲-۲.۸) و (۳-۲.۸)).
۳. در شکل ۲-۲.۸، توزیع فرض شده برای سرعت برحسب  $y$  خطی است. به نظر شما اگر شکاف بین صفحه‌ها، کوچک نبود و سیال ویسکوزیته بسیار پایینی داشت، توزیع سرعت چه شکلی پیدا می‌کرد؟
۴. رابطه پارامتر  $n$  در معادله (۳-۳.۸) با پارامتر  $n$  در معادله (۴-۳.۸) چیست؟ رابطه آن با شیب منحنی سرعت غیرنیوتونی حاصل از مدل دمبلی نظریه سینتیکی در بخش ۶.۸ چیست؟
۵. برای استفاده از مدل‌های تعمیم‌یافته نیوتونی و مدل‌های ویسکوکشسان خطی چه محدودیت‌هایی وجود دارد؟
۶. مثال‌های ۱-۴.۸ و ۲-۴.۸ را باهم مقایسه کنید و تفاوت آن‌ها را از لحاظ هندسه سیستم جریان و فرض‌های مربوط به توزیع سرعت نشان دهید.
۷. مدل اولدریوید در معادله (۳-۵.۸) تا چه حدودی شامل مدل تعمیم‌یافته نیوتونی و مدل ویسکوکشسان خطی است؟ آیا مدل اولدریوید می‌تواند آثاری را توصیف کند که این دو مدل نمی‌توانند؟
۸. چرا باید در مورد پارامترهای مدل اولدریوید محدودیت قائل شد؟ رابطه بین این محدودیت‌ها و علم سیال‌سنجی چیست؟
۹. عبارت‌های مولکولی تانسور تنش، چه مزیتی بر عبارت‌های تجربی دارند؟
۱۰. هریک از مدل‌های مختلف توصیف شده در این فصل را در کدام نوع مسائل صنعتی به‌کار می‌برید؟
۱۱. چرا ممکن است مدل قانون توانی برای توصیف جریان محوری در حلقه‌ها، مدل مطلوبی نباشد؟

۷. از مدل‌های FENE-P و گیسکاس برای توصیف جزئیات کاهش پسی تلاطمی، با موفقیت استفاده شده‌است؛ رابطه عامل اخیر با ویسکوزیته افزایش طولی در منبع زیر آمده‌است:

R. Sureshkumar, A. N. Beris and R. A. Handler, *Phys. Fluids*, **9**, 743-755 (1997), and C. D. Dimitropoulos, R. Sureshkumar, and A. N. Beris, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **79**, 433-468 (1998).

مستله‌ها

الف ۱. جریان محلول پلی‌ایزوپرن در لوله. محلول  $13/5\%$  (وزنی) پلی‌ایزوپرن در دمای  $323\text{ K}$  پارامترهای قانون توانی زیر را دارد:  $n = 0.72$  و  $m = 5 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s}^n$ . این محلول را با پمپ (به‌صورت جریان آرام) از لوله‌ای افقی عبور می‌دهند که طول آن  $10/2\text{ m}$  و قطر داخلی آن  $1/3\text{ cm}$  است. می‌خواهیم از لوله دیگری به طول  $30/6\text{ m}$  با همان آهنگ جریان جرمی و همان افت فشار استفاده کنیم. شعاع لوله چه قدر باید باشد؟

الف ۲. تلمبه‌زنی محلول پلی‌اتیلن اکسید. محلول آبی  $1\%$  پلی‌اتیلن اکسید در دمای  $333\text{ K}$  پارامترهای قانون توانی زیر را دارد:  $n = 0.6$  و  $m = 0.5 \text{ Pa} \cdot \text{s}^n$ . این محلول به‌کمک پمپ بین دو مخزن جابه‌جا می‌شود؛ فشار در مخزن اول  $p_1$  و در مخزن دوم  $p_2$  است. طول لوله حامل محلول  $14/7\text{ m}$  و قطر داخلی آن  $0/27\text{ m}$  است. تصمیم گرفته‌ایم که به‌جای یک لوله از یک جفت لوله با همان طول، اما با قطر کم‌تر، استفاده کنیم. قطر این لوله‌ها چه قدر باشد تا آهنگ جریان جرمی کل، با حالت تک‌لوله‌ای برابر شود؟

الف ۱. جریان فیلم پلیمری. مسئله بخش ۲.۲ را برای سیال تابع قانون توانی حل کنید. نشان دهید که نتیجه را می‌توان ساده کرد تا به نتیجه نیوتونی تبدیل شود.

الف ۲. جریان تابع قانون توانی در شکاف باریک. در مثال ۲-۳.۸ نشان دهید که چگونه می‌توان توزیع سرعت را برای ناحیه  $-B \leq x \leq 0$  به‌دست آورد. آیا می‌توان این نتیجه را با نتیجه معادله (۱۳-۳.۸) ترکیب کرد و یک معادله به‌دست آورد؟

الف ۳. جریان غیرنیوتونی در حلقه. مسئله ۲.۲ برای جریان حلقه‌ای یک سیال تابع قانون توانی را که در آن جریان توسط حرکت محوری استوانه داخلی ایجاد می‌شود، دوباره حل کنید.  
(الف) نشان دهید که توزیع سرعت برای سیال عبارت است از:

$$\frac{v_z}{v_0} = \frac{(r/R)^{1-(1/n)} - 1}{\kappa^{1-(1/n)} - 1} \quad (1-3.8)$$

(ب) نشان دهید که وقتی  $n$  به سمت واحد میل می‌کند، نتیجه (الف) به نتیجه نیوتونی ساده می‌شود.  
(ج) نشان دهید که آهنگ جریان جرمی در ناحیه حلقوی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$w = \frac{2\pi R^2 v_0 \rho}{\kappa^{1-(1/n)} - 1} \left( \frac{1 - \kappa^{2-(1/n)}}{3 - (1/n)} - \frac{1 - \kappa^2}{2} \right) \quad \text{بازای } n \neq \frac{1}{3} \quad (2-3.8)$$

(د) آهنگ جریان جرمی برای سیال با  $n = \frac{1}{3}$  چه قدر است؟

(ه) معادله (۲-۳.۸) را برای سیال نیوتونی ساده کنید.

الف ۴. جریان مایع پلیمری در لوله باریک‌شونده. مسئله ۲.۲ را، با استفاده از تقریب‌های روانکاری، برای سیال تابع قانون توانی حل کنید.

الف ۵. جریان سیال بینگهم در شکاف<sup>۱</sup> معلوم شده‌است که خمیرها و سوسپانسیون‌های غلیظ جریان پیدا نمی‌کنند، مگر تنش در آن‌ها به مقدار بحرانی خاصی، موسوم به تنش تسلیم، برسد؛ پس از آن سیال طوری جریان پیدا می‌کند که بخشی از جریان آن «جریان قالبی» باشد.

1. E. C. Bingham, *Fluidity and Plasticity*, McGraw-Hill, New York (1922), pp. 215-218.

برای مرور مدل‌های دارای تنش تسلیم به منبع زیر رجوع کنید:

R. B. Bird, G. C. Dai, and B. J. Yarusso, *Reviews in Chemical Engineering*, 1, 1-70 (1982).



ساده‌ترین مدل جریان سیال دارای تنش تسلیم، مدل بینگهم است:

$$\begin{cases} \eta = \infty & \text{وقتی } T \leq T_0 \\ \eta = \mu_0 + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} & \text{وقتی } T \geq T_0 \end{cases} \quad (۱-۵.۸)$$

که در آن  $\tau_0$  تنش تسلیم، یعنی تنشی است که در پایین‌تر از آن سیال جریان پیدا نمی‌کند، و  $\mu_0$  پارامتری با واحد ویسکوزیته است. کمیت  $\tau = \sqrt{\frac{1}{2}(\tau \cdot \tau)}$  اندازه تانسور تنش است.

مطلوب است تعیین آهنگ جریان جرمی در شکاف، برای سیال بینگهم (نگاه کنید به مسئله‌های ۳.۲.۳ و مثال ۲-۳.۸). در این‌جا می‌توان از عبارت مربوط به تنش برشی  $\tau_{xz}$  به صورت تابعی از مکان  $x$  در معادله (۱-۳.۲) استفاده کرد، زیرا به نوع سیال بستگی ندارد. مشاهده می‌کنیم که در  $x = \pm x_0$  مقدار  $|\tau_{xz}|$  درست مساوی تنش تسلیم  $\tau_0$  است؛  $x_0$  چنین تعریف می‌شود:

$$\tau_0 = \frac{P_0 - P_L}{L} x_0 \quad (۲-۵.۸)$$

(الف) نشان دهید که معادله بالایی (۱-۵.۸) ایجاب می‌کند که به‌ازای  $|x| \leq x_0$  داشته‌باشیم  $dv_z/dx = 0$ ، زیرا  $\tau_{xz} = -\eta dv_z/dx$ ، پس این ناحیه «جریان قالبی» است. سپس نشان دهید که چون به‌ازای  $x$  مثبت، داریم  $\dot{\gamma} = -dv_z/dx$ ، و به‌ازای  $x$  منفی، داریم  $\dot{\gamma} = +dv_z/dx$  معادله پایینی (۱-۵.۸) ایجاب می‌کند که:

$$\tau_{xz} = \begin{cases} -\mu_0 (dv_z/dx) + \tau_0 & \text{به‌ازای } +x_0 \leq x \leq +B \\ -\mu_0 (dv_z/dx) - \tau_0 & \text{به‌ازای } -B \leq x \leq -x_0 \end{cases} \quad (۳-۵.۸)$$

(ب) برای به‌دست آوردن توزیع سرعت به‌ازای  $+x_0 \leq x \leq +B$ ، رابطه بالایی معادله (۳-۵.۸) را در معادله (۱-۳.۲) جایگزین می‌کنیم و معادله دیفرانسیلی برای  $v_z$  به‌دست می‌آوریم. نشان دهید که می‌توان از این معادله، با شرط مرزی صفر بودن سرعت در  $x = B$  انتگرال گرفت تا نتیجه شود:

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)B^2}{2\mu_0 L} \left[ 1 - \left(\frac{x}{B}\right)^2 \right] - \frac{\tau_0 B}{\mu_0} \left(1 - \frac{x}{B}\right) \quad \text{به‌ازای } +x_0 \leq x \leq +B \quad (۴-۵.۸)$$

سرعت درگستره  $|x| \leq x_0$  چه‌قدر است؟ نمودار  $v_z(x)$  را ترسیم کنید.

(ج) سپس می‌توان آهنگ جریان جرمی را از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$w = W\rho \int_{-B}^{+B} v_z dx = 2W\rho \int_{x_0}^B v_z dx = 2W\rho \int_{x_0}^B x \left(-\frac{dv_z}{dx}\right) dx \quad (۵-۵.۸)$$

با انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء می‌توان کار را ساده‌تر کرد. نشان دهید که نتیجه نهایی چنین است:

$$w = \frac{2}{3} \frac{(P_0 - P_L)WB^2 \rho}{\mu_0 L} \left[ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_0 L}{(P_0 - P_L)B}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_0 L}{(P_0 - P_L)B}\right)^2 \right] \quad (۶-۵.۸)$$

نشان دهید که وقتی تنش تسلیم به‌سمت صفر میل می‌کند، این نتیجه به نتیجه سیال نیوتونی در مسئله ۳.۲.۳ ساده می‌شود.

۶.ب.۸ به دست آوردن معادلهٔ باکینگهم-راینر<sup>۲</sup> مثال ۱-۳.۸ را برای مدل بینگهم دوباره حل کنید. ابتدا توزیع سرعت را بیابید. سپس نشان دهید که آهنگ جریان جرمی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$w = \frac{\pi(P_0 - P_L)R^2\rho}{8\mu_0 L} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{\tau_0}{\tau_R} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\tau_0}{\tau_R} \right)^4 \right] \quad (۱-۶.۸)$$

که در آن  $\tau_R = (P_0 - P_L)R/2L$  تنش برشی در جدار لوله است. این عبارت فقط هنگامی معتبر است که  $\tau_R \geq \tau_0$ .

۷.ب.۸ مؤلفه‌های ویسکوزیتهٔ مختلط برای سیال جفریز.

(الف) مثال ۱-۴.۸ را برای مدل جفریز معادلهٔ (۴-۴.۸) دوباره حل کنید و نشان دهید که نتایج آن عبارت‌اند از معادله‌های (۱۲-۵.۸) و (۱۳-۵.۸). این نتایج با معادله‌های (و) و (ز) جدول ۱-۵.۸ چه رابطه‌ای دارند؟  
(ب) با استفاده از برهم‌نهی پیشنهادشده در پانوش ۳ در بخش ۴.۸، مؤلفه‌های ویسکوزیتهٔ مختلط را برای مدل جفریز به دست آورید.

۸.ب.۸ رهایی تنش پس از توقف جریان برشی. سیالی ویسکوکشسان بین یک جفت صفحهٔ موازی، جریان حالت پایا دارد و  $v_x = \dot{\gamma}y$ . اگر جریان به‌طور ناگهانی متوقف شود (یعنی  $\dot{\gamma}$  صفر شود)، برخلاف حالت سیال‌های نیوتونی، تنش‌ها به سمت صفر میل نمی‌کنند. این پدیدهٔ رهایی تنش را با استفاده از مدل ۳ ثابتۀ اولدروید (معادلهٔ (۳-۵.۸) با  $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \lambda_2$ ) بررسی کنید.  
(الف) نشان دهید که در جریان حالت پایا:

$$\tau_{yx} = -\eta_0 \dot{\gamma} \frac{1}{1 + (\lambda_1 \dot{\gamma})^2} \quad (۱-۸.۸)$$

این عبارت تا کجا با داده‌های تجربی شکل ۴-۲.۸ در توافق است؟  
(ب) با استفاده از مثال ۱-۵.۸ (قسمت الف) نشان دهید که، اگر جریان در  $t = 0$  متوقف شود، تنش برشی به‌ازای  $t \geq 0$  برابر خواهد بود با:

$$\tau_{yx} = -\eta_0 \dot{\gamma} \frac{1}{1 + (\lambda_1 \dot{\gamma})^2} e^{-t/\lambda_1} \quad (۲-۸.۸)$$

این رابطه نشان می‌دهد که چرا  $\lambda_1$  «زمان رهایی» نامیده می‌شود. این رهایی از تنش پس از توقف حرکت سیال، مشخصهٔ مواد ویسکوکشسان است.

(ج) تنش قائم  $\tau_{xx}$  در حین جریان برشی پایا و پس از توقف جریان چه قدر است؟

۹.ب.۸ تخلیهٔ مخزن با استفاده از لوله (شکل ۹.۷). مسئلهٔ ۹.۷.۹ (الف) را، برای سیال تابع قانون توانی، دوباره حل کنید.  
۱۰.ب.۸ مدل گیسکاس.

(الف) با استفاده از نتایج جدول ۱-۵.۸، مقادیر حدی ویسکوزیتهٔ سیال غیرنیوتونی و تفاضل تنش قائم را، وقتی آهنگ برش به سمت صفر میل می‌کند، تعیین کنید.

2. E. Buckingham, *Proc. ASTM*, **21**, 1154-1161 (1921); M. Reiner, *Deformation and Flow*, Lewis, London (1949).

(ب) عبارتهای حدی برای ویسکوزیته غیرنیوتونی و دو ضریب تنش قائم در حد، وقتی آهنگ برش بی‌نهایت می‌شود، به‌دست آورید.

(ج) ویسکوزیته افزایش طولی حالت‌پایا در حد، وقتی آهنگ افزایش طول به سمت صفر میل می‌کند، چه قدر است؟ نشان دهید که وقتی آهنگ افزایش طول به سمت بی‌نهایت می‌رود، ویسکوزیته افزایش طولی حد متناهی دارد.

۱.۸ج ویسکوزیته‌سنج مخروط و صفحه‌ای (شکل ۲.۱۱.۳). تحلیل نیوتونی ویسکوزیته‌سنج مخروط و صفحه‌ای مسئله ۲.۱۱ را مرور کنید و سپس کارهای زیر را انجام دهید:

(الف) نشان دهید که آهنگ برش  $\dot{\gamma}$  در سرتاسر شکاف یکنواخت و برابر است با  $\dot{\gamma} = -\dot{\gamma}_\theta \phi = \Omega/\psi_0$ . به‌علت یکنواختی  $\dot{\gamma}$ ، مؤلفه‌های تانسور تنش نیز در سرتاسر شکاف ثابت‌اند.

(ب) نشان دهید که ویسکوزیته غیرنیوتونی با اندازه‌گیری گشتاور  $T_z$  و سرعت چرخش  $\Omega$ ، و استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{3T_z\psi_0}{2\pi R^2\Omega} \quad (۱-۱.۸ج)$$

(ج) نشان دهید که برای سیستم مخروط و صفحه‌ای، مؤلفه شعاعی معادله حرکت چنین است:

$$\circ = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \quad (۲-۱.۸ج)$$

هرگاه بتوان از جمله نیروی گریزازمرکز  $-\rho v_\phi^2/r$  چشم‌پوشی کرد. این معادله را مرتب کنید تا نتیجه شود:

$$\circ = -\partial \pi_{rr} / \partial \ln r + (\tau_{\phi\phi} - \tau_{\theta\theta}) + 2(\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}) \quad (۳-۱.۸ج)$$

سپس ضرایب تنش قائم را معرفی کنید و از نتایج قسمت (الف) برای جایگزین کردن  $\partial \pi_{rr} / \partial \ln r$  با  $\partial \pi_{\theta\theta} / \partial \ln r$  استفاده کنید تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\partial \pi_{\theta\theta} / \partial \ln r = -(\Psi_1 + 2\Psi_2)\dot{\gamma}^2 \quad (۴-۱.۸ج)$$

با انتگرال‌گیری از این عبارت، از  $r$  تا  $R$  و استفاده از شرط مرزی  $\pi_{rr}(R) = p_a$  رابطه زیر را به‌دست آورید:

$$\begin{aligned} \pi_{\theta\theta}(r) &= \pi_{\theta\theta}(R) - (\Psi_1 + 2\Psi_2)\dot{\gamma}^2 \ln(r/R) \\ &= p_a - \Psi_2\dot{\gamma}^2 - (\Psi_1 + 2\Psi_2)\dot{\gamma}^2 \ln(r/R) \end{aligned} \quad (۵-۱.۸ج)$$

که در آن  $p_a$  فشار جوی وارد بر سیال در دوره ویسکوزیته‌سنج مخروط و صفحه‌ای است. (د) نشان دهید که نیروی رانش کل وارد بر مخروط توسط سیال، درجهت  $z$  عبارت است از:

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^R [\pi_{\theta\theta}(r) - p_a] r \, dr \, d\theta = \frac{1}{4} \pi R^2 \Psi_1 \dot{\gamma}^2 \quad (۶-۱.۸ج)$$

با استفاده از این رابطه می‌توان، با اندازه‌گیری نیرویی که سیال وارد می‌کند، نخستین ضریب تنش قائم را به‌دست آورد.

(ه) روشی برای اندازه‌گیری دومین ضریب تنش قائم، با استفاده از نتایج قسمت (ج) پیشنهاد کنید، هرگاه تراگردان‌های کوچک فشار به صورت هم‌سطح با صفحه و در مکان‌های شعاعی مختلف نصب شده باشند.

۲.ج۸ جریان فشاری بین دیسک‌های موازی (شکل ۱.ج۳). مسئله ۱.ج۳ (ز) را برای سیال تابع قانون توانی حل کنید. از این وسیله می‌توانید برای تعیین پارامترهای قانون توانی در مواد بسیار ویسکوز استفاده کنید. نشان دهید که نظیر قانون توانی معادله (۱.ج۳) عبارت است از:

$$\frac{1}{H^{(n+1)/n}} = \frac{1}{H_0^{(n+1)/n}} + \frac{(n+1)}{2n+1} \left( \frac{n+3}{2\pi m R^{n+2}} \right)^{1/n} F_0^{1/n} t \quad (۱.۲.ج۸)$$

۳.ج۸ تحقیق در درستی تابع ویسکوزیته گیسکاس<sup>۵</sup>.

(الف) برای بررسی مدخل‌های جریان برشی در جدول ۱.۵.۸، مؤلفه‌های تانسور تنش بدون بُعد  $T_{ij} = (\lambda/\eta_0)\tau_{ij}$  و آهنگ برش بدون بُعد  $\dot{\Gamma} = \lambda\dot{\gamma}$  را معرفی کنید و سپس نشان دهید که برای جریان برشی حالت‌پایا، معادله (۴.۵.۸) چنین نوشته می‌شود:

$$T_{xx} - 2\dot{\Gamma}T_{yx} - \alpha(T_{xx}^2 + T_{yx}^2) = 0 \quad (۱.۳.ج۸)$$

$$T_{yy} - \alpha(T_{yx}^2 + T_{yy}^2) = 0 \quad (۲.۳.ج۸)$$

$$T_{yx} - \dot{\Gamma}T_{yy} - \alpha T_{yx}(T_{xx} + T_{yy}) = -\dot{\Gamma} \quad (۳.۳.ج۸)$$

معادله چهارمی نیز وجود دارد که به  $T_{zz} = 0$  منتهی می‌شود.

(ب) این معادله‌ها را برحسب تفاضل‌های بدون بُعد تنش قائم  $N_1 = T_{xx} - T_{yy}$  و  $N_2 = T_{yy} - T_{zz}$  و  $T_{yx}$  بازنویسی کنید.

(ج) حل کردن معادله‌های قسمت (ب) برای به دست آوردن تفاضل‌های بدون بُعد تنش برشی و تنش قائم برحسب آهنگ برش بدون بُعد، دشوار است. در عوض، این معادله‌ها را برای یافتن  $N_1$ ،  $N_2$ ،  $T_{yx}$  و  $\dot{\Gamma}$  به صورت تابعی از  $N_2$  حل کنید:

$$T_{yx}^2 = \frac{N_2(1 - \alpha N_2)}{\alpha} \quad N_1 = -\frac{2N_2(1 - \alpha N_2)}{\alpha(1 - N_2)} \quad (۵، ۴.۳.ج۸)$$

$$\dot{\Gamma}^2 = \frac{N_2(1 - \alpha N_2)[1 + (1 - 2\alpha)N_2]^2}{\alpha(1 - N_2)^2} \quad (۶.۳.ج۸)$$

(د) آخرین معادله را برای یافتن  $N_2$  به صورت تابعی از  $\dot{\Gamma}$  و به دست آوردن رابطه

$$N_2 = f(\chi) = (1 - \chi)/[1 + (1 - 2\alpha)\chi] \quad (۷.۳.ج۸)$$

که در آن:

$$\chi^2 = \frac{\sqrt{1 + 16\alpha(1 - \alpha)\dot{\Gamma}^2} - 1}{\lambda\alpha(1 - \alpha)\dot{\Gamma}^2} = 1 - 4\alpha(1 - \alpha)\dot{\Gamma}^2 + \dots \quad (۸.۳.ج۸)$$

حل کنید. سپس عبارتی برای ویسکوزیته غیرنیوتونی به دست آورید و منحنی  $\eta(\dot{\gamma})$  را ترسیم کنید.

4. P. J. Leider, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **13**, 342-346 (1974); R. J. Grimm, *AIChE Journal*, **24**, 427-439 (1978).

5. H. Giesekus, *J. Non-newtonian Fluid Mech.*, **11**, 69-109 (1982).

۴.ج.۸ جریان در لوله برای مدل ۶ ثابتة اولدروید. آهنگ جریان جرمی را برای جریان پایا در لولهٔ مدور طویل<sup>۶</sup> با استفاده از معادلهٔ (۳-۵.۸)، به دست آورید.

۵.ج.۸ مدل‌های زنجیری با رابط‌های میله‌ای صلب. نوشته‌های زیر را بخوانید و آن‌ها را تشریح کنید:

M. Gottlieb, *Computers and Chemistry*, **1**, 155-160 (1977); O. Hassager, *J. Chem. Phys.*, **60**, 2111-2124 (1974); X. J. Fan and T. W. Liu, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **19**, 303-321 (1986); T. W. Liu, *J. Chem. Phys.*, **90**, 5826-5842 (1989); H. H. Saab, R. B. Bird, and C. F. Curtiss, *J. Chem. Phys.*, **77**, 4758-4766 (1982); J. D. Schieber, *J. Chem. Phys.*, **87**, 4917-4927, 4928-4936 (1987).

چرا حل کردن مسئله‌های شامل رابط‌های میله‌مانند سخت‌تر از فنرهاست؟ کدام نوع مسئله را می‌توان با شبیه‌سازی کامپیوتری حل کرد؟

6. M. C. Williams and R. B. Bird, *AIChE Journal*, **8**, 378-382 (1962).

## فصل ۹

### رسانندگی گرمایی و مکانیسم‌های انتقال انرژی

- ۱.۹ قانون رسانش گرمای فوریه (انتقال مولکولی انرژی)
- ۲.۹ وابستگی رسانندگی گرمایی به دما و فشار
- ۳.۹ نظریه رسانندگی گرمایی گازها در چگالی پایین
- ۴.۹ نظریه رسانندگی گرمایی مایعات
- ۵.۹ رسانندگی گرمایی جامدات
- ۶.۹ رسانندگی گرمایی مؤثر جامدات مرکب
- ۷.۹ انتقال همرفتی انرژی
- ۸.۹ کار مربوط به حرکت‌های مولکولی

همه می‌دانیم که بعضی از مواد، مانند فلزات، رسانای خوب گرما هستند، اما مواد دیگری از قبیل چوب به صورت عایق گرما عمل می‌کنند. خاصیتی فیزیکی که آهنگ رسانش گرما را توصیف می‌کند رسانندگی گرمایی،  $k$ ، نام دارد. رسانش گرما در سیالات را می‌توان انتقال مولکولی انرژی دانست، زیرا مکانیسم اصلی این پدیده حرکت مولکول‌های سازنده ماده است. انتقال انرژی در نتیجه حرکت توده سیال نیز امکان‌پذیر است و این نوع انتقال را انتقال همرفتی انرژی می‌نامند؛ این نوع انتقال به چگالی  $\rho$  سیال وابسته است. مکانیسم دیگر انتقال نفوذی انرژی است که در مخلوط‌هایی رخ می‌دهد که در هم نفوذ می‌کنند. به علاوه، انرژی می‌تواند از طریق انتقال تابشی انرژی نیز منتقل شود که روشی کاملاً متمایز است، زیرا در این نوع انتقال انرژی، برخلاف رسانش و همرفت، وجود محیط مادی ضروری نیست. در این فصل با دو مکانیسم نخست، یعنی رسانش و همرفت سروکار داریم. تابش را به طور جداگانه در فصل ۱۶ شرح می‌دهیم و انتقال نفوذی گرما در بخش‌های ۳.۱۹ و ۲.۲۴ مطرح می‌شود.

بخش ۱.۹ را با تعریف رسانندگی گرمایی  $k$ ، توسط قانون فوریه برای بردار شار  $q$  آغاز می‌کنیم. در بخش ۲.۹ وابستگی  $k$  به دما و فشار سیالات را با استفاده از اصل حالت‌های متناظر شرح می‌دهیم. سپس در چهار بخش بعدی اطلاعاتی در مورد رسانندگی گرمایی گازها، مایعات، جامدات، و مواد جامد مرکب ارائه می‌کنیم و هر جا به نتایج نظری دسترسی باشد، آن‌ها را نیز بیان می‌کنیم.

چون در فصل‌های ۱۰ و ۱۱ مسائلی را با استفاده از قانون پایستگی انرژی مطرح خواهیم کرد، نه تنها باید نحوه

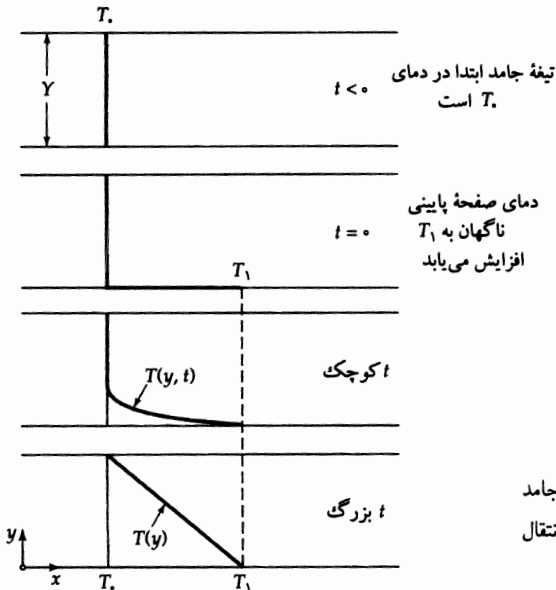
ورود گرما به سیستم و خروج آن از سیستم را بدانیم، بلکه باید نحوه انجام کار روی یک سیستم یا توسط یک سیستم، از طریق مکانیسم‌های مولکولی، را نیز بشناسیم. ماهیت جمله‌های کار مولکولی را در بخش ۸.۹ شرح می‌دهیم. سرانجام، با ترکیب کردن شار گرمای رسانشی، شار گرمای همرفتی، و شار کار می‌توان بردار مرکب شار انرژی،  $e$ ، را تعریف کرد که در تنظیم موازنه انرژی سودمند است.

### ۱.۹ قانون رسانش گرمای فوریه (انتقال مولکولی انرژی)

تیغه‌ای از ماده جامد به مساحت  $A$  را در نظر بگیرید که بین دو صفحه موازی به فاصله  $Y$  از یکدیگر قرار گرفته است. فرض می‌کنیم در ابتدا (در زمان  $t < 0$ ) دما در همه‌جای ماده جامد برابر  $T_0$  است. در زمان  $t = 0$  دمای صفحه پایینی را به‌طور ناگهانی اندکی افزایش می‌دهند و آن را به  $T_1$  می‌رسانند و در همین دما نگه می‌دارند. با گذشت زمان توزیع دما در تیغه تغییر می‌کند و سرانجام توزیع دمای حالت پایای خطی حاصل خواهد شد (که در شکل ۱-۱.۹ نشان داده شده است). وقتی این شرایط حالت پایا برقرار شد، باید گرما با آهنگ ثابت  $Q$  در تیغه جاری شود تا اختلاف دمای  $T_1 - T_0 = \Delta T$  حفظ شود. به‌ازای مقادیر کوچک  $\Delta T$  رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{Q}{A} = k \frac{\Delta T}{Y} \quad (1-1.9)$$

یعنی آهنگ جریان گرما در واحد سطح با کاهش دما در فاصله  $Y$  متناسب است. ثابت تناسب  $k$  را رسانندگی گرمایی تیغه می‌نامند. در صورتی که فاصله بین دو صفحه با مایع یا گاز پر شود، باز هم معادله (۱-۱.۹) صادق است، به شرط آن‌که اقدامات مناسب برای حذف پدیده‌های همرفت و تابش انجام شود.



شکل ۱-۱.۹ تشکیل توزیع دمای حالت پایا برای تیغه جامد بین دو صفحه موازی. برای آشنایی با وضعیت مشابه برای انتقال اندازه حرکت به شکل ۱-۱.۱ رجوع کنید.

در فصل‌های آینده از صورت دیفرانسیلی این معادله، یعنی صورت حدی معادله (۱-۱.۹) وقتی ضخامت تیغه به سمت صفر میل کند، استفاده خواهیم کرد. آهنگ موضعی جریان گرما در واحد سطح (شار گرما) در جهت مثبت  $y$  را با  $q_y$  نشان می‌دهیم. با این نمادگذاری معادله (۱-۱.۹) چنین نوشته می‌شود:

$$q_y = -k \frac{dT}{dy} \quad (2-1.9)$$

این معادله که برای تعیین  $k$  به کار می‌رود، صورت یک‌بعدی قانون رسانش گرمای فوریه<sup>۲۱</sup> است. طبق این معادله شار گرمای حاصل از رسانش با گرادیان دما متناسب است یا به بیان تصویری «روی نمودار دما بر حسب فاصله، گرما در سرازیری جریان می‌یابد.» در عمل معادله (۲-۱.۹) «قانون» واقعی طبیعت نیست، بلکه رابطه‌ای پیشنهادی است که تقریبی بسیار سودمند به‌شمار می‌رود. اما این معادله مبنایی نظری دارد که در پیوست (د) شرح داده می‌شود.

اگر دما در هر سه جهت تغییر کند، آن‌گاه می‌توان برای هر یک از جهت‌های مختصات معادله‌ای مانند معادله (۲-۱.۹) نوشت:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (۵, ۴, ۳-۱.۹)$$

اگر هر یک از این معادله‌ها را در بردار یکه مناسب ضرب، و سپس آن‌ها را باهم جمع کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (۶-۱.۹)$$

که صورت سه‌بعدی قانون فوریه است. این معادله انتقال مولکولی گرما در محیطی همسان‌گرد را توصیف می‌کند. منظور از «همسان‌گرد» این است که در ماده هیچ جهت ترجیحی وجود ندارد و رسانش گرما در همه جهات با رسانندگی گرمایی یکسان  $k$  انجام می‌شود.

بعضی جامدات، مانند تک‌بلورهای غیرمکعبی، الیاف، و مواد لایه‌ای، ناهمسان‌گردند.<sup>۳</sup> برای چنین موادی باید به‌جای معادله (۶-۱.۹) از معادله زیر استفاده کرد:

$$\mathbf{q} = -[\kappa \cdot \nabla T] \quad (۷-۱.۹)$$

1. J. B. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Oeuvres de Fourier, Gauthier-Villars et Fils, Paris (1822).

بارون ژان بابتیست ژوزف فوریه (۱۷۶۸-۱۸۳۰) نه‌تنها ریاضیدانی برجسته و مبتکر سری فوریه و تبدیل فوریه بود، بلکه به‌عنوان مصرشناس و چهره سیاسی نیز شهرت داشت (او استاندار ایزر بود).

۲. بعضی مؤلفان ترجیح می‌دهند معادله (۲-۱.۹) را به‌صورت زیر بنویسند:

$$q_y = -J_e k \frac{dT}{dy} \quad (۲الف-۱.۹)$$

که در آن  $J_e$  «هم‌ارز مکانیکی گرما» است. مثلاً در سیستم c.g.s. باید از یکاهای زیر استفاده کرد:  $J_e [=] \text{erg/cm}^2 \cdot \text{s}$ ;  $q_y [=] \text{erg/cm} \cdot \text{s}$ ;  $k [=] \text{cal/cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C}$ ;  $T [=] ^\circ\text{C}$ ;  $y [=] \text{cm}$ ; و  $J_e [=] \text{erg/cal}$ . در این کتاب از معادله (۲الف-۱.۹) استفاده نخواهیم کرد.

۳. اگر چه مایعات پلیمری درحالت سکون همسان‌گردند، طبق نظریه سینتیک وقتی این مواد جریان پیدا می‌کنند، نسبت به رسانش گرما ناهمسان‌گرد می‌شوند. [نگاه کنید به

B. H. A. A. van den Brule, *Rheol. Acta*, **28**, 257-266 (1989); C.F. Curtiss and R. B. Bird, *Advances in Polymer Science*, **25**, 1-101 (1996)].

اندازه‌گیری‌های تجربی جریان‌های برشی و جریان‌های افزایش طولی را دی. سی. ونروس، جی. دی. شیبیر، اچ. ایدیر، جی. دی. گوزمان و ای. دبلیو بوئومن، *Phys. Rev. Letters*, **82**, 366-369 (1996); دی. سی. ونروس، جی. دی. شیبیر، اچ. ایدیر، جی. دی. شیبیر، *J. Chem. Phys.*, **111**, 6965-6969 (1999); دی. سی. ونروس و جی. دی. شیبیر، *AIChE Journal*, **46**, 610-615 (2000) درمورد جامدات پلیمری جهت‌یافته، افزایش رسانندگی گرمایی در جهت نظم‌یافته توسط بی. پولار، جی. سی. چیلنز، سی. واندنهند، جی. پی. ایسی و ار. لگارس، *Polymer Comm.* **31**, 148-151 (1989) اندازه‌گیری شده است. در ارتباط با مدل‌های مهره-فنتزی رسانندگی گرمایی پلیمرها، ار. بی. برد، سی. اف. کورتیس و کی. جی. بیرز [*Rheol. Acta*, **36**, 269-276 (1997)] نشان داده‌اند که رسانندگی گرمایی پیش‌بینی شده به‌طور فزاینده‌ای نسبت به شکل انرژی پتانسیل مورد استفاده برای توصیف فترا حساس است.



که در آن  $k$  یک تانسور متقارن از مرتبهٔ دوم است که آن را تانسور رسانندگی گرمایی می‌نامند. بنابراین جهت بردار شار گرما با جهت گرادیان گرما یکی نیست. برای مایعات پلیمری تحت جریان برشی  $v_x(y, t)$ ، ممکن است رسانندگی گرمایی در جهت  $x$  تا ۲۰٪ از مقدار تعادلی بیش‌تر و در جهت  $z$  تا ۱۰٪ از این مقدار کم‌تر شود. در بخش ۶.۹ در مورد رسانش گرمای ناهمسان‌گرد در بسترهای پر شده به‌اختصار بحث کرده‌ایم. یکی دیگر از تعمیم‌های ممکن معادلهٔ (۶-۱.۹) گنجاندن جملهٔ شامل مشتق زمانی  $q$  ضرب‌در یک ثابت زمانی، براساس قیاس با مدل ماکسول برای ویسکوکشسانی خطی، در معادلهٔ (۳-۴.۸) است. شواهد تجربی اندکی این تعمیم را تأیید می‌کند.<sup>۴</sup>

حتماً به این نکته توجه کرده‌اید که معادلهٔ (۲-۱.۹) برای رسانش گرما و معادلهٔ (۲-۱.۱) برای جریان ویسکوز تقریباً مشابه یکدیگرند. در هر دو معادله شار با منفی گرادیان متغیری ماکروسکوپی متناسب است و ضریب تناسب خاصیتی فیزیکی است که مشخصهٔ هر ماده است و به دما و فشار بستگی دارد. در مواقعی که با انتقال سه‌بعدی سروکار داریم، مشاهده می‌کنیم که معادلهٔ (۶-۱.۹) برای رسانش گرما و معادلهٔ (۷-۲.۱) برای جریان ویسکوز شکل ظاهری متفاوتی دارند. این اختلاف از آن‌جا ناشی می‌شود که انرژی کمیتی اسکالر است، اما اندازه حرکت ماهیت برداری دارد و شار گرمای  $q$  برداری با سه مؤلفه است، اما شار اندازه حرکت  $\tau$  یک تانسور مرتبهٔ دوم با ۹ مؤلفه است. می‌توان انتظار داشت که انتقال انرژی و اندازه حرکت، به‌طور کلی از لحاظ ریاضی همانند نباشند، مگر در بعضی موقعیت‌های هندسی ساده.

علاوه بر رسانندگی گرمایی  $k$ ، که با معادلهٔ (۲-۱.۹) تعریف می‌شود، کمیتی به نام ضریب نفوذ گرمایی  $\alpha$  نیز کاربرد گسترده‌ای دارد. این کمیت چنین تعریف می‌شود:

$$\alpha = \frac{k}{\rho \hat{C}_p} \quad (۸-۱.۹)$$

که در آن  $\hat{C}_p$  ظرفیت گرمایی در فشار ثابت است؛ نشانهٔ  $(\hat{\quad})$  روی نماد، کمیتی «در واحد جرم» را نشان می‌دهد. گاهی نیاز داریم از نماد  $\tilde{C}_p$  استفاده کنیم که در آن نشانهٔ  $(\tilde{\quad})$  از کمیتی «بر مول» حکایت می‌کند. ضریب نفوذ گرمایی  $\alpha$  همان ابعاد ویسکوزیته سینماتیکی  $\nu$  را دارد؛ یعنی زمان  $l^2/\nu$  (طول). هرگاه خواص فیزیکی را ثابت فرض کنیم، کمیت‌های  $\nu$  و  $\alpha$  در معادله‌های تغییر انتقال اندازه حرکت و انتقال انرژی به صورت‌های مشابه ظاهر می‌شوند. نسبت  $\nu/\alpha$  سهولت نسبی انتقال اندازه حرکت و انرژی در سیستم‌های جریان را نشان می‌دهد. نسبت بدون بُعد:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\hat{C}_p \mu}{k} \quad (۹-۱.۹)$$

را عدد پرانتل<sup>۵</sup> می‌نامند. گروه بدون بُعد دیگری که در فصل‌های بعدی با آن سروکار پیدا خواهیم کرد عدد پکلت<sup>۶</sup> است و داریم  $\text{Pe}' = \text{Re Pr}$ .

واحدهایی که معمولاً برای بیان رسانندگی گرمایی و کمیت‌های وابسته به آن به‌کار می‌روند در جدول ۱-۱.۹ گفته شده‌اند. واحدهای دیگر، هم‌چنین روابط بین دستگاه‌های مختلف واحدها را می‌توان در پیوست (و) یافت.

۴. نظریه خطی گرماویسکوکشسانی آثار کاش رسانش گرما را پیش‌بینی می‌کند و اِر. اِم. کریستینسن در

*Theory of Viscoelasticity*, Academic Press, 2nd edition (1982)

به این مطلب پرداخته است. این اثر در بررسی معادلهٔ انرژی براساس نظریهٔ سینتیک نیز دیده شده است. این بررسی را اِر. دی. پرد و سی. اِف. کورتیس انجام داده‌اند؛

*J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **79**, 255-259 (1998).

۵. این گروه بدون بُعد را به افتخار لودویگ پرانتل نام‌گذاری کرده‌اند و فقط شامل خواص فیزیکی سیال است.

۶. زان کلود اوژن پکلت (۱۸۵۷-۱۷۹۳) چندین کتاب، از جمله یک کتاب در باب رسانش گرما نوشت.

رسانندگی گرمایی می‌تواند از مقدار  $1 \text{ W/m} \cdot \text{K}$  برای گازها تا حدود  $1000 \text{ W} \cdot \text{K}$  برای فلزات خالص تغییر کند. در جدول‌های ۱.۹-۲، ۳، ۴، و ۵، بعضی مقادیر تجربی رسانندگی گرمایی گازها، مایعات، فلزات مذاب، و مواد جامد آمده‌است. در انجام محاسبات، هرچاکه ممکن باشد باید از مقادیر تجربی استفاده کرد. در غیاب داده‌های تجربی، می‌توان با استفاده از روش‌هایی که در چند بخش آینده شرح داده می‌شوند، یا با رجوع به هندبوک‌های مهندسی مختلف، نتیجه را تخمین زد.<sup>۷</sup>

جدول ۱.۹-۱ واحدهای کمیت‌های به‌کاررفته در معادله‌های (۱.۹-۲) و (۱.۹-۹).

	SI	c.g.s.	انگلیسی
$q_y$	$\text{W/m}^2$	$\text{cal/cm}^2 \cdot \text{s}$	$\text{Btu/hr} \cdot \text{ft}^2$
$T$	K	$^{\circ}\text{C}$	$^{\circ}\text{F}$
$y$	m	cm	ft
$k$	$\text{W/m} \cdot \text{K}$	$\text{cal/cm} \cdot \text{s} \cdot ^{\circ}\text{C}$	$\text{Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot ^{\circ}\text{F}$
$\hat{C}_p$	$\text{J/K} \cdot \text{kg}$	$\text{cal/}^{\circ}\text{C} \cdot \text{g}$	$\text{Btu/}^{\circ}\text{F} \cdot \text{lb}_m$
$\alpha$	$\text{m}^2/\text{s}$	$\text{cm}^2/\text{s}$	$\text{ft}^2/\text{s}$
$\mu$	$\text{Pa} \cdot \text{s}$	$\text{g/cm} \cdot \text{s}$	$\text{lb}_m/\text{ft} \cdot \text{hr}$
Pr	—	—	—

تذکره: وات (W) همان J/s است، ژول (J) همان N·m است، نیوتون (N) برابر  $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$  و پاسکال (Pa)

برابر  $\text{N/m}^2$  است. برای کسب اطلاعات بیشتر به جدول‌های تبدیل واحدها در پیوست (و) رجوع کنید.

جدول ۱.۹-۲ رسانندگی گرمایی، ظرفیت گرمایی، و عدد پرانتل برای بعضی از گازهای معمولی در فشار  $1 \text{ atm}$ . الف

گاز	دما $T(\text{K})$	رسانندگی گرمایی $k(\text{W/m} \cdot \text{K})$	ظرفیت گرمایی $\hat{C}_p(\text{J/kg} \cdot \text{K})$	عدد پرانتل Pr(-)
$\text{H}_2$	۱۰۰	۰٫۰۶۷۹۹	۱۱٫۱۹۲	۰٫۶۸۲
	۲۰۰	۰٫۱۲۸۲	۱۳٫۶۶۷	۰٫۷۲۴
	۳۰۰	۰٫۱۷۷۹	۱۴٫۳۱۶	۰٫۷۲۰
$\text{O}_2$	۱۰۰	۰٫۰۰۹۰۴	۹۱۰	۰٫۷۶۴
	۲۰۰	۰٫۰۱۸۳۳	۹۱۱	۰٫۷۳۴
	۳۰۰	۰٫۲۶۵۷	۹۲۰	۰٫۷۱۶
NO	۲۰۰	۰٫۰۱۷۷۸	۱۰۱۵	۰٫۷۸۱
	۳۰۰	۰٫۰۲۵۹۰	۹۹۷	۰٫۷۴۲
$\text{CO}_2$	۲۰۰	۰٫۰۰۹۵۰	۷۳۴	۰٫۷۸۳
	۳۰۰	۰٫۰۱۶۶۵	۸۴۶	۰٫۷۵۸
$\text{CH}_4$	۱۰۰	۰٫۰۱۰۶۳	۲۰۷۳	۰٫۷۴۱
	۲۰۰	۰٫۰۲۱۸۴	۲۰۸۷	۰٫۷۲۱
	۳۰۰	۰٫۰۳۴۲۷	۲۲۲۷	۰٫۷۰۱

الف) برگرفته از J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, & R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, New York, 2nd corrected printing (1964), Table 8.4-10.

مقادیر  $k$  اندازه‌گیری می‌شوند، مقادیر  $\hat{C}_p$  با داده‌های طیف‌نمایی، و  $\mu$  با استفاده از معادله (۱۴-۴.۱) محاسبه می‌شوند.

7. W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, and Y. I. Cho, eds., *Handbook of Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York (1998); Landolt-Börnstein, *Zahlenwerte und Funktionen*, Voll. II, 5, Springer (1968-1969).

جدول ۳-۱۰۹ رسانندگی گرمایی، ظرفیت گرمایی، و عدد پرانتل برای بعضی از مایعات غیرفلزی در فشار اشیاع. الف

عدد پرانتل	ظرفیت گرمایی	ویسکوزیته	رسانندگی گرمایی	دما	مایع
Pr	$\hat{C}_p \times 10^{-3}$	$\mu \times 10^4$	$k$	$T$	
(-)	(J/kg·K)	(Pa·s)	(W/m·K)	(K)	
۸,۲۶	۱,۹۴۸	۶,۱۹۳	۰,۱۴۶۱	۲۰۰	۱-پنتان
۴,۸۷	۲,۰۷۰	۳,۰۷۴	۰,۱۳۰۷	۲۵۰	
۳,۷۲	۲,۲۵۱	۱,۹۰۷	۰,۱۱۵۳	۳۰۰	
۱۶,۰	۰,۸۶۱۷	۲۰,۳۲	۰,۱۰۹۲	۲۵۰	CCL <sub>۴</sub>
۷,۹۷	۰,۸۹۶۷	۸,۸۲۸	۰,۰۹۹۲۹	۳۰۰	
۵,۱۳	۰,۹۵۱۸	۴,۸۱۳	۰,۰۸۹۳۵	۳۵۰	
۵,۶۸	۲,۱۹۷	۳,۸۱۹	۰,۱۴۷۸	۲۵۰	(C <sub>۷</sub> H <sub>۱۵</sub> ) <sub>۲</sub> O
۴,۱۳	۲,۳۷۹	۲,۲۱۳	۰,۱۲۷۴	۳۰۰	
۳,۵۳	۲,۷۲۱	۱,۳۸۷	۰,۱۰۷۱	۳۵۰	
۳۵,۸	۲,۱۲۰	۳۰,۵۱	۰,۱۸۰۸	۲۵۰	C <sub>۷</sub> H <sub>۱۵</sub> OH
۱۵,۲	۲,۴۵۴	۱۰,۴۰	۰,۱۶۷۶	۳۰۰	
۸,۶۷	۲,۹۸۴	۴,۴۸۶	۰,۱۵۴۴	۳۵۰	
۶۵۸۰	۲,۴۱۸	۷۹۴۹	۰,۲۹۲۰	۳۰۰	گلیسرول
۳۲۹	۲,۶۷۹	۳۶۵,۷	۰,۲۹۷۷	۳۵۰	
۶۲,۲	۲,۹۴۰	۶۴,۱۳	۰,۳۰۳۴	۴۰۰	
۶,۰۲	۴,۱۸۳	۸,۷۶۸	۰,۶۰۸۹	۳۰۰	H <sub>۲</sub> O
۲,۳۵	۴,۱۹۳	۳,۷۱۲	۰,۶۶۲۲	۳۵۰	
۱,۳۵	۴,۲۶۲	۲,۱۶۵	۰,۶۸۴۸	۴۰۰	

الف) مدخل‌های پایین جدول با استفاده از توابع معرفی شده در منبع زیر تهیه شده‌اند:

T. E. Daubert, R. P. Danner, H. M. Sibul, C. C. Stebbins, J. L. Oscarson, R. L. Rowley, W. V. Wilding, M. E. Adams, T. L. Marshall, and N. A. Zundel, *DIPPR Data Compilation of Pure Compound Properties*, Design Institute for Physical Property Data, AIChE, New York, NY (2000).

مثال ۱-۱۹

اندازه‌گیری رسانندگی گرمایی

صفحه‌ای پلاستیکی به مساحت  $A = 1 \text{ ft}^2$  و ضخامت  $Y = 0,252 \text{ in.}$  در شرایط حالت پایا، و دمای  $T_1 = 26,000^\circ\text{C}$  و  $T_2 = 24,000^\circ\text{C}$  در دو سطح اصلی صفحه، گرما را با آهنگ  $3,0 \text{ W}$  از طریق رسانش انتقال می‌دهد. مطلوب است تعیین رسانندگی گرمایی پلاستیک برحسب  $\text{cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K}$  در دمای  $25^\circ\text{C}$ ؛

حل

ابتدا به کمک پیوست (و) واحدها را تبدیل می‌کنیم:

$$A = 144 \text{ in.}^2 \times (2,54)^2 = 929 \text{ cm}^2$$

$$Y = 0,252 \text{ in.} \times 2,54 = 0,640 \text{ cm}$$

$$Q = 3,0 \text{ W} \times 0,23901 = 0,717 \text{ cal/s}$$

$$\Delta T = 26,000 - 24,000 = 2,000 \text{ K}$$

این مقادیر را در معادله (۱-۱.۹) قرار می‌دهیم و نتیجه می‌شود:

$$k = \frac{QY}{A\Delta T} = \frac{0,717 \times 0,640}{929 \times 2} = 2,47 \times 10^{-4} \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K} \quad (10-1.9)$$

باتوجه به کوچک بودن  $\Delta T$ ، یعنی ۲ درجه سلسیوس، این فرض منطقی است که مقدار  $k$  در دمای متوسط کاربرد دارد که در این مورد  $25^\circ\text{C}$  است. برای آشنایی با روش‌های منظور کردن تغییرات  $k$  با دما، به مسئله‌های ۱۰.ب.۱۲ و ۱۰.ج.۱۰ رجوع کنید.

جدول ۴-۱.۹ رسانندگی گرمایی، ظرفیت گرمایی، و عدد پرانتل برای بعضی فلزات مذاب در فشار جو. الف

فلز	دما $T(\text{K})$	رسانندگی گرمایی $k(\text{W/m} \cdot \text{K})$	ظرفیت گرمایی $\hat{C}_p(\text{J/kg} \cdot \text{K})$	عدد پرانتل $Pr(---)$
Hg	۲۷۳,۲	۸,۲۰	۱۴۰,۲	۰,۰۲۸۸
	۳۷۳,۲	۱۰,۵۰	۱۳۷,۲	۰,۰۱۶۲
	۴۷۳,۲	۱۲,۳۴	۱۵۶,۹	۰,۰۱۱۶
Pb	۶۴۴,۲	۱۵,۹	۱۵,۹	۰,۰۲۴
	۷۵۵,۲	۱۵,۵	۱۵,۵	۰,۰۱۷
	۹۷۷,۲	۱۵,۱	۱۴,۶	۰,۰۱۳۶
Bi	۵۸۹,۲	۱۶,۳	۱۴,۴	۰,۰۱۴۲
	۸۱۱,۲	۱۵,۵	۱۵,۴	۰,۰۱۱۰
	۱۰۳۳,۲	۱۵,۵	۱۶,۴	۰,۰۰۸۳
Na	۳۶۶,۲	۸۶,۲	۱۳,۸	۰,۰۱۱
	۶۴۴,۲	۷۲,۸	۱۳,۰	۰,۰۰۵۱
	۹۷۷,۲	۵۹,۸	۱۲,۶	۰,۰۰۳۷
K	۴۲۲,۲	۴۵,۲	۷۹,۵	۰,۰۰۶۶
	۷۰۰,۲	۳۹,۳	۷۵,۳	۰,۰۰۳۴
	۹۷۷,۲	۳۳,۱	۷۵,۳	۰,۰۰۲۹
آلیاژ Na - K	۳۶۶,۲	۲۵,۵	۱۱۳۰	۰,۰۰۲۶
	۶۴۴,۲	۲۷,۶	۱۰۵۴	۰,۰۰۰۹۱
	۹۷۷,۲	۲۸,۹	۱۰۴۲	۰,۰۰۵۸

الف) داده‌ها از منبع زیر نقل شده است:

*Liquid Metals Handbook*, 2nd edition, U.S. Government Printing Office, Washington, D. C. (1952) and from E. R. G. Eckert and R. M. Drake, Jr., *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York, 2nd edition (1959), Appendix A.

ب) براساس ظرفیت گرمایی برون‌یابی شده.

ج) ۵۶٪ وزنی Na و ۴۴٪ وزنی K.

جدول ۵-۱.۹ مقادیر تجربی رسانندگی گرمایی چند ماده جامد.

ماده	دما $T(K)$	رسانندگی گرمایی $k(W/m \cdot K)$
آلومینیم	۳۷۳,۲	۲۰۵,۹
	۵۷۳,۲	۲۶۸
	۸۷۳,۲	۴۲۳
کادمیم	۲۷۳,۲	۹۳,۰
	۳۷۳,۲	۹۰,۴
مس	۲۹۱,۲	۳۸۴,۱
	۳۷۳,۲	۳۷۹,۹
فولاد	۲۹۱,۲	۴۶,۹
	۳۷۳,۲	۴۴,۸
قلع	۲۷۳,۲	۶۳,۹۳
	۳۷۳,۲	۵۹,۸
آجر (آجر قرمز معمولی)	—	۰,۶۳
بتن (سنگ)	—	۰,۹۲
یوسته زمین (متوسط)	—	۱,۷
شیشه (سدیم کربناتی)	۴۷۳,۲	۰,۷۱
گرافیت	—	۰,۵
ماسه (خشک)	—	۰,۳۸۹
چوب (نراد)	—	—
به موازات محور	—	۰,۱۲۶
قائم بر محور	—	۰,۰۳۸

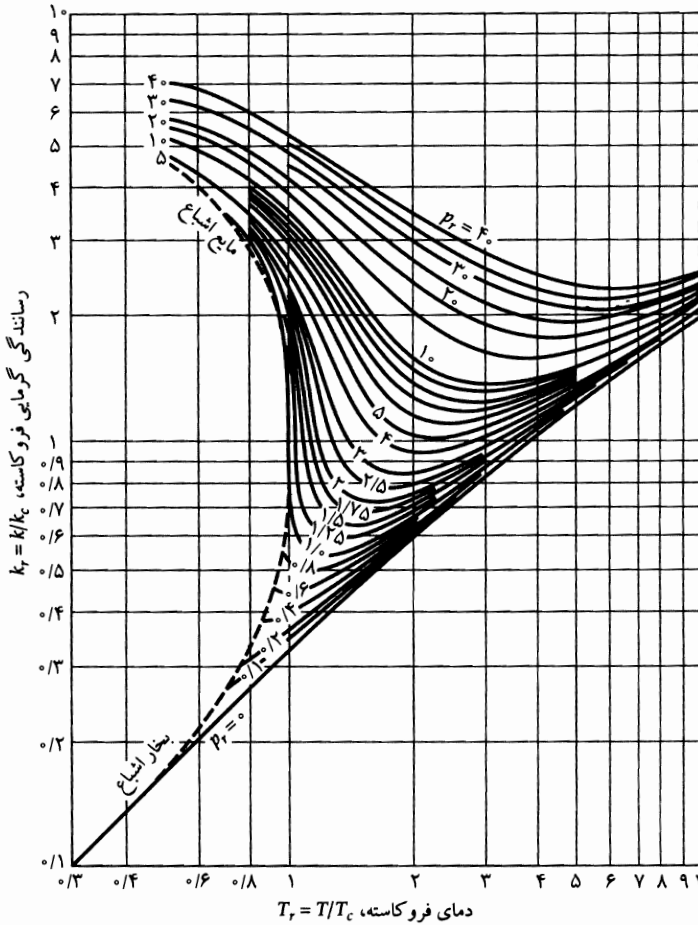
داده‌ها از منبع زیر نقل شده‌اند:

Reactor Handbook, Vol. 2, Atomic Energy Commission  
AECD-3646, U.S. Government Printing Office, Washington, D. C.  
(May 1955), pp. 1766 et seq.

## ۲.۹ وابستگی رسانندگی گرمایی به دما و فشار

وقتی داده‌های رسانندگی گرمایی ترکیبی خاص را نتوان یافت، می‌توان از نمودارهای حالت‌های متناظر نشان داده شده در شکل ۱-۲.۹، که براساس داده‌های رسانندگی گرمایی چند ماده تک‌اتمی تهیه شده‌اند، استفاده کرد. این نمودار، که شبیه نمودار مربوط به ویسکوزیته است که در شکل ۱-۳.۱ نشان داده شد، رسانندگی گرمایی کاهش‌یافته  $k_T = k/k_c$  را نشان می‌دهد که رسانندگی گرمایی در فشار  $p$  و دمای  $T$  است که بر رسانندگی گرمایی در نقطه بحرانی تقسیم شده‌است. این کمیت به صورت تابعی از دمای کاهش‌یافته  $T_T = T/T_c$  و فشار کاهش‌یافته  $p_T = p/p_c$  ترسیم می‌شود. شکل ۱-۲.۹ براساس مقدار محدودی داده تجربی برای مواد تک‌اتمی ترسیم شده‌است، اما می‌توان برای تخمین‌های ابتدایی مواد چنداتمی از آن استفاده کرد.

از این نمودار نباید در همسایگی نقطه بحرانی استفاده کرد.<sup>۱</sup>



شکل ۲.۹-۱ رسانندگی گرمایی فروکاسته برای مواد تک‌اتمی به صورت تابعی از دما و فشار فروکاسته. همین نمودار را با مقیاس بزرگ می‌توان در منبع زیر یافت:

O. A. Hougen, K. M. Watson, and R. A. Ragatz, *Chemical Process Principles Charts*, 2nd edition, Wiley, New York (1960).

۱. در مجاورت نقطه بحرانی، جایی که رسانندگی گرمایی واگرا می‌شود، معمولاً رابطه  $k = k^b + \Delta k$  نوشته می‌شود که در آن  $k^b$  سهم «زمینه» و  $\Delta k$  سهم «تقویت بحرانی» است.  $k_c$  که در روابط همبستگی حالت‌های متناظر به کار می‌رود، سهم زمینه است. برای آشنایی با رفتار خواص انتقال در نزدیکی نقطه بحرانی، نگاه کنید به

J. V. Sengers and J. Luettmer Strathmann, in *Transport Properties of Fluids* (J. H. Dymond, J. Millat, and C. A. Nieto de Castro, eds.), Cambridge University Press (1995); E. P. Sakonidou, H. R. van den Berg, C. A. ten Seldam, and J. V. Sengers, *J. Chem. Phys.*, **105**, 10535-10555 (1996) and **109**, 717-736 (1998).

می‌توان دید که رسانندگی گرمایی گاز در فشارهای پایین، به سمت تابع محدودکننده‌ای از  $T$  میل می‌کند؛ اغلب گازها، در فشاری حدود ۱ اتمسفر به این حد می‌رسند. رسانندگی گرمایی گازها در چگالی پایین، با افزایش دما افزایش می‌یابد، اما رسانندگی گرمایی اغلب مایعات با افزایش دما کاهش می‌یابد. در ناحیهٔ مایع، رابطهٔ همبستگی کم‌تر قابل اعتماد است؛ مایعات قطبی، مانند آب، ممکن است در منحنی  $k$  بر حسب  $T$  نقطهٔ ماکزیم داشته باشند. حسن اصلی نمودار حالت‌های متناظر این است که با استفاده از آن می‌توان دیدی کلی نسبت به رفتار رسانندگی گرمایی گازها و مایعات کسب کرد. کمیت  $k_c$  را می‌توان به یکی از دو روش زیر تخمین زد: (۱) در صورت معلوم بودن  $k$  در دما و فشار معلوم، به‌ویژه در نزدیکی شرایطی که  $k$  را باید در آن شرایط تخمین زد، می‌توان  $k_r$  را از روی نمودار قرائت کرد و  $k_c = k/k_r$  را محاسبه نمود؛ یا (۲) می‌توان با استفاده از روش‌های مطرح شده در بخش ۳.۹، مقداری برای  $k$  در ناحیهٔ با چگالی پایین تخمین زد و سپس کار را طبق روش اول ادامه داد. مقادیر  $k_c$  که با استفاده از روش (۱) به دست آمده‌اند، در پیوست (ه) ارائه شده‌اند. برای مخلوط‌ها، می‌توان با استفاده از روش‌هایی نظیر روش‌های توصیف شده در بخش ۳.۱، رسانندگی گرمایی را تخمین زد. در مورد دقت راهکارهای شبه‌بحرانی به‌کاررفته برای تعیین رسانندگی گرمایی اطلاعات بسیار کمی در دسترس است و علت آن اندک بودن داده‌ها در مورد مخلوط‌ها، تحت فشارهای بالاست.

### مثال ۱-۲۹

اثر فشار بر رسانندگی گرمایی

رسانندگی گرمایی اتان در دمای  $153^\circ\text{F}$  و فشار  $191/1$  اتمسفر را، با استفاده از مقدار تجربی<sup>۲</sup>  $k = 0.159 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$  در فشار ۱ اتمسفر و دمای  $153^\circ\text{F}$ ، تخمین بزنید.

حل

چون یک مقدار اندازه‌گیری شدهٔ  $k$  معلوم است، از روش (۱) استفاده می‌کنیم. ابتدا  $p_r$  و  $T_r$  را در شرایط مقدار اندازه‌گیری شده، محاسبه می‌کنیم:

$$T_r = \frac{153 + 460}{(1/8)(305/4)} = 1/115 \quad p_r = \frac{1}{48/2} = 0.021 \quad (1-2.9)$$

از شکل ۱-۲.۹ مقدار  $k_r = 0.36$  را قرائت می‌کنیم. در نتیجه  $k_c$  برابر است با:

$$k_c = \frac{k}{k_r} = \frac{0.159}{0.36} = 0.442 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F} \quad (2-2.9)$$

در دمای  $153^\circ\text{F}$  ( $T_r = 1/115$ ) و فشار  $191/9$  اتمسفر ( $p_r = 3/98$ )، از روی نمودار مقدار  $k_r = 2/07$  را قرائت می‌کنیم. بنابراین رسانندگی گرمایی پیش‌بینی شده برابر است با:

$$k = k_r k_c = (2/07)(0.442) = 0.914 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F} \quad (3-2.9)$$

مقدار مشاهده شدهٔ  $0.453 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$  گزارش داده شده است. توافق اندک نتایج نشان می‌دهد که در مواد چنداتمی نباید به این رابطهٔ همبستگی و به شرایط در نزدیکی نقطهٔ بحرانی متکی بود.

### ۳.۹ نظریهٔ رسانندگی گرمایی گازها در چگالی پایین

رسانندگی گرمایی گازهای رقیق تک‌اتمی به خوبی درک شده است و می‌توان با استفاده از نظریهٔ سینتیکی گازها در چگالی پایین آن را توصیف کرد.

2. J. M. Lenoir, W. A. Junk, and E. W. Comings, *Chem. Eng. progr.*, **49**, 539-542 (1949).

اگرچه نظریه‌های تفصیلی برای گازهای چنداتمی پی‌ریزی شده‌است،<sup>۱</sup> استفاده از چند نظریه تقریبی ساده متداول است. در این جا، همانند بخش ۵.۱، مسافت آزاد میانگین ساده شده را برای گازهای تک‌اتمی به دست می‌آوریم و سپس نتیجه را به صورت نظریه سینتیکی چاپمن-انسونگ خلاصه می‌کنیم.

از مدل کره‌های صلب و غیرجاذب به جرم  $m$  و قطر  $d$  استفاده می‌کنیم. گاز به طور کلی در حالت سکون است ( $v = 0$ )، اما حرکت‌های مولکولی را باید به حساب آورد.

چنان‌که در بخش ۵.۱ دیدیم، از نتایج زیر برای گاز با مدل کره صلب استفاده می‌کنیم:

$$\text{سرعت مولکولی میانگین} = \bar{u} = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}} \quad (۱-۳.۹)$$

$$Z = \frac{1}{4} n \bar{u} = \text{بسامد برخورد به جدار در واحد سطح} \quad (۲-۳.۹)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \text{مسافت آزاد میانگین} \quad (۳-۳.۹)$$

مولکول‌هایی که به هر صفحه‌ای در گاز می‌رسند، آخرین برخورد خود را، به طور متوسط، در فاصله  $a$  از صفحه انجام داده‌اند، و داریم:

$$a = \frac{2}{3} \lambda \quad (۴-۳.۹)$$

در این معادله‌ها،  $K$  ثابت بولتزمن،  $n$  تعداد مولکول‌ها در واحد حجم، و  $m$  جرم یک مولکول است. تنها صورتی از انرژی که در هنگام برخورد بین دو کره صلب و صاف می‌تواند مبادله شود، انرژی انتقالی است. انرژی انتقالی میانگین هر مولکول، تحت شرایط تعادلی، برابر است با:

$$\frac{1}{4} m \bar{u}^2 = \frac{3}{4} KT \quad (۵-۳.۹)$$

که در مسئله ۱ ج ۱ نشان داده شد. برای چنین گرمایی، ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت، برابر است با:

$$\bar{C}_V = \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial T} \right)_V = \tilde{N} \frac{d}{dT} \left( \frac{1}{4} m \bar{u}^2 \right) = \frac{3}{4} R \quad (۶-۳.۹)$$

که در آن  $R$  ثابت گاز است. معادله (۶-۳.۹) برای گازهای تک‌اتمی تا دمای چند هزار درجه، رضایت‌بخش است. برای تعیین رسانندگی گرمایی، رفتار گاز را تحت گرادیان دمای  $dT/dy$  بررسی می‌کنیم (شکل ۱-۳.۹ را ببینید). فرض می‌کنیم که معادله‌های (۱-۳.۹) تا (۶-۳.۹) در این وضعیت غیرتعادلی معتبر می‌مانند، با این استثنا که در معادله (۵-۳.۹) جمله  $\frac{1}{4} m \bar{u}^2$  انرژی جنبشی متوسط مولکول‌هایی در نظر گرفته می‌شود که آخرین برخورد خود را در ناحیه‌ای با دمای  $T$  انجام داده‌اند.

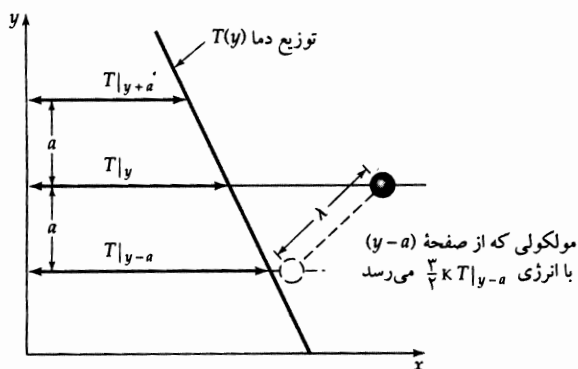
شار گرمای  $q_y$  در صفحه‌ای با  $y$  ثابت، با جمع کردن انرژی جنبشی مولکول‌هایی حاصل می‌شود که در واحد زمان و در جهت مثبت  $y$  از صفحه عبور می‌کنند، و تفریق کردن انرژی جنبشی همان تعداد مولکول که در جهت منفی  $y$  عبور می‌کنند. I. C. S. Wang Chang, G. E. Uhlenbeck, and J. de Boer, *Studies in Statistical Mechanics*, Wiley-Interscience, New York, Vol. II (1964), pp. 241-265; E. A. Mason and L. Monchick, *J. Chem. Phys.*, **35**, 1676-1697 (1961) and **36**, 1622-1639, 2746-2757 (1962); L. Monchick, A. N. G. Pereira, and E. A. Mason, *J. Chem. Phys.*, **42**, 3241-3256 (1965).

برای آشنایی با نظریه سینتیکی خواص انتقال، نگاه کنید به



از صفحه عبور می‌کنند، به دست می‌آید:

$$q_y = Z \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} m \bar{u}^2 \Big|_{y-a} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} m \bar{u}^2 \Big|_{y+a} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} K Z (T \Big|_{y-a} - T \Big|_{y+a}) \quad (۷-۳-۹)$$



شکل ۱۳-۹ انتقال مولکولی انرژی (جنبشی) از صفحه واقع در  $(y - a)$  به صفحه واقع در  $y$ .

معادله (۷-۳-۹) بر این فرض مبتنی است که همه مولکول‌ها سرعت‌هایی دارند که معرف ناحیه آخرین برخورد آن‌هاست و توزیع دمای  $T(y)$  در فاصله‌ای معادل با چند برابر مسافت آزاد میانگین، خطی است. با توجه به فرض آخر می‌توان نوشت:

$$T \Big|_{y-a} = T \Big|_y - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lambda \frac{dT}{dy} \quad , \quad T \Big|_{y+a} = T \Big|_y + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lambda \frac{dT}{dy} \quad (۹, ۸-۳-۹)$$

با ترکیب سه معادله آخر، نتیجه می‌شود:

$$q_y = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} n K \bar{u} \lambda \frac{dT}{dy} \quad (۱۰-۳-۹)$$

این نتیجه با قانون رسانش گرمایی فوریه معادله (۲-۱-۹) متناظر است که در آن رسانندگی گرمایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} n K \bar{u} \lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \rho \hat{C}_V \bar{u} \lambda \quad (\text{گاز تک‌اتمی}) \quad (۱۱-۳-۹)$$

که در آن چگالی گاز است و  $\rho = nm$  و  $\hat{C}_V = \frac{3}{2} K/m$  از معادله (۶-۳-۹).

با قرار دادن عبارت‌های  $\bar{u}$  و  $\lambda$  از معادله‌های (۱-۳-۹) و (۳-۳-۹) نتیجه می‌شود:

$$k = \frac{\sqrt{m KT/\pi} K}{\pi d^2} \frac{K}{m} = \frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{\pi m KT}}{\pi d^2} \hat{C}_V \quad (\text{گاز تک‌اتمی}) \quad (۱۲-۳-۹)$$

که رسانندگی گرمایی گاز رقیق ترکیب شده از کره‌های صلب به قطر  $d$  است. طبق این معادله پیش‌بینی می‌شود که  $k$  از فشار مستقل است. شکل ۱۲-۹ نشان می‌دهد که در اغلب گازها، تا فشاری در حدود  $10^\circ$  اتمسفر، این پیش‌بینی با داده‌های تجربی توافق خوبی دارد. وابستگی دمای پیش‌بینی شده بسیار ضعیف است و در مورد ویسکوزیته نیز همین‌طور بود. برای بررسی دقیق‌تر گاز تک‌اتمی، دوباره به سراغ روش دقیق چاپمن-انسکوگ می‌رویم که در بخش ۵.۱ شرح داده شد. فرمول چاپمن-انسکوگ<sup>۲</sup> برای رسانندگی گرمایی گاز تک‌اتمی در چگالی پایین و دمای  $T$  چنین است:

$$k = \frac{25}{32} \frac{\sqrt{\pi m KT}}{\pi \sigma^2 \Omega_k} \hat{C}_V \quad \text{یا} \quad k = 1,9891 \times 10^{-4} \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_k} \quad (\text{گاز تک‌اتمی}) \quad (۱۳-۳-۹)$$

2. J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, New York, 2nd corrected printing (1964), p. 534.

در صورت دوم این معادله،  $\sigma = \left[ \frac{1}{3} \frac{R}{M} \right] k$ ،  $T = \left[ \frac{1}{3} \frac{R}{M} \right] k$  و «انتگرال برخورد» برای رسانندگی گرمایی،  $\Omega_k$  همان است که در بخش ۴.۱ برای ویسکوزیته،  $\Omega_\mu$  دیدیم. مقادیر  $\Omega_k = \Omega_\mu$  برای پتانسیل بین مولکولی لند-جونز، در جدول ۲.۰، به صورت تابعی از دمای بدون بُعد  $KT/\varepsilon$  آمده است.

معادله (۱۳-۳.۹)، همراه با جدول ۲.۰، در پیش‌بینی رسانندگی گرمایی گازهای تک‌اتمی دقت خوبی دارند، هرگاه از پارامترهای  $\sigma$  و  $\varepsilon$  استنتاج شده از اندازه‌گیری‌های ویسکوزیته (یعنی مقادیر ارائه شده در جدول ۱.۰) استفاده شود. معادله (۱۳-۳.۹) به فرمول ویسکوزیته متناظر، یعنی به معادله (۱۴-۴.۱) بسیار شبیه است. با استفاده از این دو معادله، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$k = \frac{15}{4} \frac{R}{M} \mu = \frac{5}{4} \hat{C}_V \mu \quad (\text{گاز تک‌اتمی}) \quad (14-3.9)$$

از نظریه ساده‌شده کره صلب (نگاه کنید به معادله‌های (۸-۴.۱) و (۱۱-۳.۹)) نتیجه می‌شود که  $k = \hat{C}_V \mu$  و بنابراین به اندازه ضریب ۲/۵ خطا دارد. این نتیجه تعجب‌آور نیست، زیرا در پی‌ریزی نظریه ساده از تقریب‌های بسیاری استفاده شده است.

تا این‌جا فقط گازهای تک‌اتمی را بررسی کردیم. اکنون از بحث بخش ۳.۰ می‌دانیم که، در برخورد دوتایی بین مولکول‌های دواتمی، ممکن است بین انرژی جنبشی و انرژی داخلی (یعنی ارتعاشی و چرخشی) مبادله‌هایی صورت گیرد. در نظریه چاپمن-انسکوگ برای گازهای تک‌اتمی، این نوع مبادله‌ها به حساب نمی‌آیند. بنابراین می‌توان انتظار داشت که نظریه چاپمن-انسکوگ از عهده توصیف رسانندگی گرمایی مولکول‌های چنداتمی برنمی‌آید.

اوینک روش نیمه‌تجربی ساده‌ای برای به حساب آوردن مبادله انرژی در گازهای چنداتمی ابداع کرد.<sup>۳</sup>

معادله او برای رسانندگی گرمایی گاز چنداتمی در چگالی پایین عبارت است از:

$$k = \left( \hat{C}_p + \frac{5}{4} \frac{R}{M} \right) \mu \quad (\text{گاز چنداتمی}) \quad (15-3.9)$$

این فرمول اوینک شامل فرمول تک‌اتمی معادله (۱۴-۳.۹)، به عنوان حالتی خاص است، زیرا برای گازهای تک‌اتمی داریم  $\hat{C}_p = \frac{5}{4} \frac{R}{M}$ . هرشفلد،<sup>۴</sup> با استفاده از نظریه مخلوط چندجزئی، فرمولی شبیه فرمول اوینک به دست آورد (نگاه کنید به مثال ۴-۴.۱۹). نظریه‌ها، روابط همبستگی، و فرمول‌های تجربی دیگری نیز در دسترس است.<sup>۵،۶</sup> معادله (۱۵-۳.۹) روش ساده‌ای برای تخمین پراوتل ارائه می‌دهد که با معادله (۸-۱.۹) تعریف شد:

$$\text{Pr} = \frac{\hat{C}_p \mu}{k} = \frac{\hat{C}_p}{\hat{C}_p + \frac{5}{4} R} \quad (\text{گاز چنداتمی}) \quad (16-3.9)$$

این معادله برای گازهای چنداتمی غیرقطبی با چگالی پایین نسبتاً رضایت‌بخش است و با توجه به جدول ۱-۳.۹ می‌توان این نکته را مشاهده کرد؛ این معادله برای مولکول‌های قطبی دقت کم‌تری دارد.

رسانندگی گرمایی مخلوط‌های گازی در چگالی پایین را می‌توان با استفاده از روشی<sup>۷</sup> نظیر روشی که قبلاً برای

3. A. Eucken *Physik. Z.*, **14**, 324-333 (1913).

4. J. O. Hirschfelder, *J. Chem. Phys.*, **26**, 274-281, 282-285 (1957).

5. J. H. Ferziger and H. G. Kaper, *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*, North-Holland, Amsterdam (1972).

6. R. C. Reid, J. M. Prausnitz, and B. E. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill, New York, 4th edition (1987).

7. E. A. Mason and S. C. Saxena, *Physics of Fluids*, **1**, 361-369 (1958).

روش آن‌ها تقریبی از روش دقیق‌تری است که

J. O. Hirschfelder, *J. Chem. Phys.*, **26**, 274-281, 282-285 (1957)

ارائه داده است. با تأیید پروفیسور میسن، ما ضریب تجربی ۱۰۶۵ را از عبارت  $\Phi_{ij}$ ، به‌ازای  $i \neq j$  حذف کردیم تا برای مخلوط‌های تشکیل‌شده از گونه‌های یکسان خودسازگاری ایجاد کنیم.

ویسکوزیته ارائه شد، تخمین زد (نگاه کنید به معادله‌های (۱۵-۴.۱) و (۱۶-۴.۱)):

$$k_{\text{mix}} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha} k_{\alpha}}{\sum_{\beta} x_{\beta} \Phi_{\alpha\beta}} \quad (۱۷-۳.۹)$$

جدول ۱۷-۳.۹ مقادیر پیش‌بینی‌شده و مشاهده‌شده عدد پراوتل برای گازها در فشار جو. الف

گاز	T(K)	$\hat{C}_p \mu / k$	
		از معادله (۱۶-۳.۹)	از مقادیر مشاهده‌شده $\hat{C}_p$ ، $\mu$ و $k$
Ne	۲۷۳٫۲	۰٫۶۶۷	۰٫۶۶
Ar	۲۷۳٫۲	۰٫۶۶۷	۰٫۶۷
H <sub>۲</sub>	۹۰٫۶	۰٫۶۸	۰٫۶۸
	۲۷۳٫۲	۰٫۷۳	۰٫۷۰
N <sub>۲</sub>	۶۷۳٫۲	۰٫۷۴	۰٫۶۵
	۲۷۳٫۲	۰٫۷۴	۰٫۷۳
O <sub>۲</sub>	۲۷۳٫۲	۰٫۷۴	۰٫۷۴
هوا	۲۷۳٫۲	۰٫۷۴	۰٫۷۳
CO	۲۷۳٫۲	۰٫۷۴	۰٫۷۶
NO	۲۷۳٫۲	۰٫۷۴	۰٫۷۷
Cl <sub>۲</sub>	۲۷۳٫۲	۰٫۷۶	۰٫۷۶
H <sub>۲</sub> O	۳۷۳٫۲	۰٫۷۷	۰٫۹۴
	۶۷۳٫۲	۰٫۷۸	۰٫۹۰
CO <sub>۲</sub>	۲۷۳٫۲	۰٫۷۸	۰٫۷۸
SO <sub>۲</sub>	۲۷۳٫۲	۰٫۷۹	۰٫۸۶
NH <sub>۳</sub>	۲۷۳٫۲	۰٫۷۷	۰٫۸۵
C <sub>۲</sub> H <sub>۲</sub>	۲۷۳٫۲	۰٫۸۰	۰٫۸۰
C <sub>۲</sub> H <sub>۶</sub>	۲۷۳٫۲	۰٫۸۳	۰٫۷۷
CHCl <sub>۳</sub>	۲۷۳٫۲	۰٫۸۶	۰٫۷۸
CCl <sub>۴</sub>	۲۷۳٫۲	۰٫۸۹	۰٫۸۱

الف) محاسبه‌شده با استفاده از مقادیر ارائه‌شده توسط

M. Jakob, *Heat Transfer*, Wiley, New York (1949), PP. 75-76.

J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, New York, corrected printing (1964), p. 16.

$x_{\alpha}$  کسر مولی، و  $k_{\alpha}$  رسانندگی گرمایی گونه‌های شیمیایی خالص است. ضریب‌های  $\Phi_{\alpha\beta}$  با ضریب‌هایی که در معادله ویسکوزیته ظاهر می‌شوند، همانندند (نگاه کنید به معادله (۱۶-۴.۱)). همه مقادیر  $k_{\alpha}$  در معادله (۱۷-۳.۹)، و  $\mu_{\alpha}$  در معادله (۱۶-۴.۱) مقادیر مربوط به چگالی پایین در دمای مفروض‌اند. اگر داده‌های ویسکوزیته در دسترس نباشد، می‌توان با استفاده از معادله (۱۵-۳.۹) آن‌ها را از  $k$  و  $\hat{C}_p$  تخمین زد. مقایسه با داده‌های تجربی<sup>۷</sup> حاکی از انحراف متوسطی در حدود ۴٪ برای مخلوط‌های حاوی گازهای چنداتمی غیرقطبی، شامل  $\text{CO}$ ،  $\text{N}_2$ ،  $\text{O}_2$ ،  $\text{C}_2\text{H}_2$ ، و  $\text{CH}_4$  است.

### مثال ۱-۳.۹

محاسبه رسانندگی گرمایی گاز نکاتمی در چگالی پایین رسانندگی گرمایی Ne را در فشار ۱ اتمسفر و دمای  $373/2$  K محاسبه کنید.

حل

از جدول ۱.۰، ثابت‌های لئارد-جونز برای گاز نئون، عبارت‌اند از  $\sigma = 2,789 \text{ \AA}$  و  $\epsilon/k = 35,7$  K، و وزن مولکولی آن،  $M$ ، برابر  $20,180$  است. سپس، در دمای  $373/2$  K، داریم:

$$kT/\epsilon = 373,2/35,7 = 10,45$$

از جدول ۲.۰، درمی‌یابیم که  $\Omega_k = \Omega_m = 0,821$ . با جایگزینی در معادله (۱۳-۳.۹) نتیجه می‌شود:

$$k = (1,9891 \times 10^{-4}) \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_k} = (1,9891 \times 10^{-4}) \frac{\sqrt{(373,2)/(20,180)}}{(2,789)^2 (0,821)}$$

$$= 1,338 \times 10^{-4} \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K} \quad (18-3.9)$$

مقدار اندازه‌گیری شده  $1,35 \times 10^{-4} \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K}$  در فشار ۱ اتمسفر و دمای  $373/2$  K گزارش داده شده است.<sup>۸</sup>

### مثال ۲-۳.۹

تخمین رسانندگی گرمایی گاز چنداتمی در چگالی پایین رسانندگی گرمایی اکسیژن مولکولی در دمای  $300$  K و فشار پایین را تخمین بزنید.

حل

وزن مولکولی  $O_2$  برابر  $32,0000$  است؛ ظرفیت گرمایی مولی آن  $\bar{C}_p$ ، در دمای  $300$  K و فشار پایین  $7,019 \text{ cal/g} \cdot \text{mole} \cdot \text{K}$  است. از جدول ۱.۰ درمی‌یابیم که پارامترهای لئارد-جونز برای اکسیژن مولکولی عبارت‌اند از  $\sigma = 3,433 \text{ \AA}$  و  $\epsilon/k = 113$  K. در دمای  $300$  K، داریم:

$$kT/\epsilon = 300/113 = 2,655$$

از جدول ۲.۰، داریم  $\Omega_\mu = 1,074$ . ویسکوزیته، از معادله (۱۴-۴.۱) برابر است با:

$$\mu = (2,6693 \times 10^{-5}) \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_\mu} = (2,6693 \times 10^{-5}) \frac{\sqrt{(32,000)(300)}}{(3,433)^2 (1,074)}$$

$$= 2,065 \times 10^{-4} \text{ g/cm} \cdot \text{s} \quad (19-3.9)$$

سپس، از معادله (۱۵-۳.۹)، تقریباً برای رسانندگی گرمایی برابر است با:

$$k = (\bar{C}_p + \frac{5}{4}R)(\mu/M) = (7,019 + 2,484)(2,065 \times 10^{-4})/(32,000)$$

$$= 6,14 \times 10^{-5} \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K} = 0,257 \text{ W/m} \cdot \text{K} \quad (20-3.9)$$

این نتیجه با مقدار تجربی  $0,2657 \text{ W/m} \cdot \text{K}$  در جدول ۲.۰-۱.۹، به خوبی قابل مقایسه است.



پیش‌بینی رسانندگی گرمایی مخلوط گازی در چگالی پایین رسانندگی گرمایی مخلوط گازی زیر را در فشار ۱ اتمسفر و دمای ۲۹۳ K، از روی داده‌های مربوط به اجزای خالص در همان فشار و دما پیش‌بینی کنید:

گونه‌ها	$\alpha$	وزن مولکولی $x_\alpha$	کسر مولی $M_\alpha$	$\mu_\alpha \times 10^7$ (g/cm · s)	$k_\alpha \times 10^7$ (cal/cm · s · K)
CO <sub>2</sub>	۱	۱/۱۳۳	۴۴/۰۱۰	۱۴۶۲	۳۸۳
O <sub>2</sub>	۲	۰/۰۳۹	۳۲/۰۰۰	۲۰۳۱	۶۱۲
N <sub>2</sub>	۳	۰/۸۲۸	۲۸/۰۱۶	۱۷۵۴	۶۲۷

حل

از معادله (۱۷-۳.۹) استفاده کنید. مشاهده می‌کنیم که  $\Phi_{\alpha\beta}$  برای این مخلوط گازی در این شرایط، قبلاً درحین محاسبه ویسکوزیته در مثال ۴-۱، محاسبه شد. در آن مثال جمع‌های زیر را محاسبه کردیم، که در معادله (۱۷-۳.۹) نیز ظاهر می‌شوند:

$$\sum_{\beta=1}^3 x_\beta \Phi_{\alpha\beta} \quad \alpha \rightarrow \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,763 & 1,057 & 1,049 \end{matrix}$$

با جایگزینی در معادله (۱۷-۳.۹) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} k_{\text{mix}} &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{x_\alpha k_\alpha}{\sum_{\beta=1}^3 x_\beta \Phi_{\alpha\beta}} \\ &= \frac{(0,133)(383)(10^{-7})}{0,763} + \frac{(0,039)(612)(10^{-7})}{1,057} + \frac{(0,828)(627)(10^{-7})}{1,049} \\ &= 584 \times (10^{-7}) \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K} \end{aligned} \quad (21-3.9)$$

داده‌ای برای مقایسه در این شرایط وجود ندارد.

#### ۴.۹ نظریه رسانندگی گرمایی مایعات

در حدود نیم قرن پیش، نظریه سینتیکی بسیار مفصلی برای رسانندگی گرمایی مایعات تک‌اتمی پی‌ریزی شد،<sup>۱</sup> اما هنوز نتوانسته‌اند آن را در محاسبات عملی به‌کار ببندند. در نتیجه ناگزیر باید از نظریه‌های ابتدایی یا روش‌های تخمین تجربی استفاده کنیم.<sup>۲</sup>

1. J. H. Irving and J. G. Kirkwood, *J. Chem. Phys.*, **18**, 817-829 (1950).

در منبع زیر، این نظریه به مایعات چنداتمی تعمیم یافته‌است:

C. F. Curtiss and R. B. Bird, *J. Chem. Phys.*, **107**, 5254-5267 (1997).

2. R. C. Reid, J. M. Prausnitz, and B. E. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill, New York (1987); L. Riedel, *Chemie-Ing-Techn.*, **27**, 209-213 (1955).

در این جا تصمیم داریم نظریه ساده بریچمن<sup>۳</sup> برای انتقال انرژی در مایعات خالص را تشریح کنیم. او فرض کرد که مولکول‌ها در شبکه‌ای مکعبی آرایش یافته‌اند و فاصله مرکز تا مرکز آن‌ها برابر  $(\tilde{V}/\tilde{N})^{1/3}$  است که در آن  $\tilde{V}/\tilde{N}$  حجم بر مولکول است.

به علاوه، او فرض کرد که انرژی از یک صفحه شبکه به صفحه دیگر با سرعت صوت،  $v_s$ ، در آن سیال، انتقال می‌یابد. این نظریه براساس تفسیر دوباره معادله (۱۱-۳.۹) در نظریه کره صلب پی‌ریزی شده است:

$$k = \frac{1}{3} \rho \hat{C}_V \bar{u}_y \lambda = \rho \hat{C}_V |\bar{u}_y| a \quad (۱-۴.۹)$$

ظرفیت گرمایی در حجم ثابت در مایعی تک‌اتمی تقریباً همان مقدار است که برای ماده جامد در دمای بالا مشاهده می‌شود و از فرمول دولون و پتی<sup>۴</sup>  $\hat{C}_V = 3(k/m)$ ، به دست می‌آید.

سرعت مولکولی میانگین در جهت  $y$ ، یعنی  $|\bar{u}_y|$  با سرعت صوت،  $v_s$ ، جایگزین می‌شود. فاصله  $a$  که انرژی بین دو برخورد متوالی طی می‌کند، با فاصله شبکه‌ای  $(\tilde{V}/\tilde{N})^{1/3}$  برابر گرفته می‌شود. از جایگزینی این مقادیر در معادله (۱-۴.۹) نتیجه می‌شود:

$$k = 3(\tilde{N}/\tilde{V})^{2/3} K v_s \quad (۲-۴.۹)$$

که معادله بریچمن است. داده‌های تجربی، حتی در مورد مایعات چنداتمی، با معادله (۲-۴.۹) توافق خوبی دارند، اما ضریب عددی تا حدودی بیش از اندازه بزرگ است. اگر این ضریب به  $۲/۸۰$  تغییر کند، توافق بهتری حاصل می‌شود:

$$k = 2/80 (\tilde{N}/\tilde{V})^{2/3} K v_s \quad (۳-۴.۹)$$

به علت این فرض ضمنی که هر مولکول در «قفسی» نوسان می‌کند که توسط نزدیک‌ترین همسایگانش تشکیل شده است، کاربرد این معادله به چگالی‌هایی محدود می‌شود که از چگالی بحرانی بسیار بالاترند.

به نظر می‌رسد که موفقیت این معادله در مورد سیال‌های چنداتمی، به طور ضمنی، نشان می‌دهد که انتقال انرژی در برخوردهای مولکول‌های چنداتمی ناقص است، زیرا ظرفیت گرمایی مورد استفاده در این جا،  $\hat{C}_V = 3(k/m)$ ، از ظرفیت‌های گرمایی مایعات چنداتمی کم‌تر است.

سرعت صوت در بسامدهای پایین از رابطه زیر به دست می‌آید: (نگاه کنید به مسئله ۱۱ ج. ۱.)

$$v_s = \sqrt{\frac{C_p}{C_V} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T} \quad (۴-۴.۹)$$

کمیت  $(\partial p / \partial \rho)_T$  را می‌توان از اندازه‌گیری‌های تراکم‌پذیری هم‌دما، یا از معادله حالت، به دست آورد و  $(C_p / C_V)$  برای مایعات بسیار نزدیک واحد است، مگر در حوالی نقطه بحرانی.

3. P. W. Bridgman, *Proc. Am. Acad. Arts and Sci.*, **59**, 141-169 (1923).

معادله بریچمن غالباً به اشتباه نقل می‌شود، زیرا او این معادله را برحسب ثابت گاز ناشناخته‌ای برابر با  $\frac{2}{3} K$  ارائه داد.

۴. این معادله تجربی در منبع زیر توجیه و تعمیم داده شده است:

A. Einstein [*Ann. Phys.* [4], **22**, 180-190 (1907)] and P. Debye [*Ann. Phys.*, [4]**39**, 789-839 (1912)].

۵. معادله (۳-۴.۹) با فرمول ارائه شده در منبع زیر، توافق تقریبی دارد:

R. E. Powell, W. E. Roseveare, and H. Eyring, *Ind. Eng. Chem.*, **33**, 430-435 (1941).

## مثال ۹-۴

پیش‌بینی رسانندگی گرمایی یک مایع چگالی  $\text{CCl}_4$  مایع در  $20^\circ\text{C}$  و فشار ۱ اتمسفر برابر  $1,595 \text{ g/cm}^3$  است و تراکم‌پذیری هم‌دمای آن  $(1/\rho)(\partial\rho/\partial p)_T$  برابر  $10^{-6} \text{ atm}^{-1}$  است.  $90,7 \times 10^{-6}$  است. مطلوب است تعیین رسانندگی گرمایی این مایع. حل ابتدا محاسبه زیر را انجام می‌دهیم:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{1}{\rho(1/\rho)(\partial\rho/\partial p)_T} = \frac{1}{(1,595)(90,7 \times 10^{-6})} = 6,91 \times 10^3 \text{ atm} \cdot \text{cm}^3/\text{g}$$

$$= 7,00 \times 10^9 \text{ cm}^2/\text{s}^2 \quad (\text{با استفاده از پیوست (و)}) \quad (5-4.9)$$

با فرض این‌که  $C_p/C_V = 1,0$ ، از معادله (۴-۴.۹) نتیجه می‌شود:

$$v_s = \sqrt{(1,0)(7,00 \times 10^9)} = 8,37 \times 10^4 \text{ cm/s} \quad (6-4.9)$$

حجم مولی برابر است با  $96,5 \text{ cm}^3/\text{g-mole}$  با  $\tilde{V} = M/\rho = 153,84/1,595 = 96,5 \text{ cm}^3/\text{g-mole}$ . با قرار دادن این مقادیر در معادله (۳-۴.۹) نتیجه می‌شود:

$$k = 2,80(\tilde{N}/\tilde{V})^{2/3} k v_s$$

$$= 2,80 \left( \frac{6,023 \times 10^{23}}{0,965 \times 10^2} \right)^{2/3} (1,3805 \times 10^{-16})(8,37 \times 10^4)$$

$$= 1,10 \times 10^4 (\text{cm}^{-2})(\text{erg/K})(\text{cm/s})$$

$$= 0,110 \text{ W/m} \cdot \text{K} \quad (7-4.9)$$

مقدار تجربی با برون‌یابی از جدول ۳-۱.۹، برابر است با  $0,101 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ .

## ۵.۹ رسانندگی گرمایی جامدات

رسانندگی گرمایی جامدات را باید به شیوه تجربی اندازه‌گیری کرد، زیرا به عامل‌های بسیاری وابسته است که اندازه‌گیری یا پیش‌بینی آن‌ها دشوار است.<sup>۱</sup> در مواد بلوری، فاز و اندازه بلورها مهم است؛ در جامدات آمورف، درجه جهت‌گیری مولکولی اثر مهمی دارد. در جامدات متخلخل، رسانندگی گرمایی به شدت به کسر حفره‌ها، اندازه حفره، و سیال موجود در حفره‌ها وابسته است. جیکوب بحث مفصلی در باب رسانندگی گرمایی مواد جامد ارائه داده است.<sup>۲</sup> به طور کلی، فلزات، در مقایسه با غیرفلزات، رسانای بهتری برای گرما هستند و مواد بلوری، در مقایسه با مواد آمورف، گرما را بسیار بهتر منتقل می‌کنند. جامدات متخلخل خشک رساناهای بسیار ضعیف گرما هستند بنابراین برای عایق‌کاری گرمایی بسیار مناسب‌اند. رسانندگی اغلب فلزات خالص، با افزایش دما کاهش می‌یابد، درحالی‌که رسانندگی غیرفلزات با افزایش دما، افزایش خواهد یافت؛ آلیاژها رفتار بینابینی از خود نشان می‌دهند. شاید سودمندترین قاعده سرانگشتی این باشد که رسانندگی گرمایی و الکتریکی هم‌گام‌اند.

1. A. Goldsmith, T. E. Waterman, and H. J. Hirschhorn, eds., *Handbook of Thermophysical Properties of Solids*, Macmillan, New York (1961).

2. M. Jakob, *Heat Transfer*, Vol. 1; Wiley, New York (1949), Chapter 6. see also W. H. Rohsenow, J. P. Hartnett, and Y. I. Cho, eds., *Handbook of Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York (1998).

در اغلب فلزات خالص، برعکس آلیاژها، رسانندگی گرمایی  $k$  و رسانندگی الکتریکی  $k_e$  با رابطه تقریبی زیر به هم مربوط می‌شوند:<sup>۳</sup>

$$\frac{k}{k_e T} = L = \text{مقدار ثابت} \quad (۱-۵.۹)$$

این معادله ویدمان-فرانتس-لورنتس است؛ این معادله را می‌توان به‌طور نظری نیز توجیه کرد (نگاه کنید به مسئله ۱۹ الف). «عدد لورنتس»  $L$ ، برای فلزات خالص در دمای  $0^\circ\text{C}$ ، در حدود  $۲۲$  تا  $۱۰^{-۹} \text{ volt}^2/\text{K}^2$  است و با دمای بالاتر از  $0^\circ\text{C}$  کمی تغییر می‌کند و معمولاً به‌ازای هر  $۱۰۰۰^\circ\text{C}$  افزایش دما،  $۲۰$ – $۱۰\%$  افزایش می‌یابد. در دماهای بسیار پایین ( $4^\circ\text{C}/269-$  برای جیوه) فلزات اَبَرسَناای الکتریسته می‌شوند، اما برای گرما چنین خاصیتی ندارند و بنابراین در نواحی نزدیک به ناحیه اَبَرسَناای، تغییرات  $L$  با دما شدت می‌یابد. معادله (۱-۵.۹) برای آلیاژها کاربرد محدودی دارد، زیرا  $L$  با ترکیب شیمیایی، و در بعضی موارد با دما، به شدت تغییر می‌کند. موفقیت معادله (۱-۵.۹) در مورد فلزات خالص ناشی از این نکته است که در فلزات خالص، الکترون‌های آزاد حامل‌های اکثریت گرما هستند. این معادله برای غیرفلزات مناسب نیست، زیرا غلظت الکترون‌های آزاد در آن‌ها به اندازه‌های پایین است که انتقال انرژی از طریق حرکت مولکولی غلبه پیدا می‌کند.

### ۶.۹ رسانندگی گرمایی مؤثر جامدات مرکب

تا این‌جا در مورد مواد همگن بحث کردیم. اکنون به سراغ رسانندگی گرمایی جامدات دوفازی-یک فاز جامد پخش‌شده در یک فاز جامد دیگر، یا جامدات حاوی حفره، مانند مواد دانه‌ای، فلزات تفجوشی‌شده، و اسفنج‌های پلاستیکی می‌رویم. بدیهی است که توصیف کامل انتقال گرما در چنین موادی فوق‌العاده پیچیده است. اما برای رسانش پایا، می‌توان این مواد را به‌صورت ماده‌ای همگن با رسانندگی گرمایی مؤثر  $k_{\text{eff}}$  در نظر گرفت، و مؤلفه‌های شار گرما و دما را، به‌صورت کمیت‌های نظیر متوسط‌گیری شده روی حجمی که در مقایسه با مقیاس ناهمگنی بزرگ است، اما در مقایسه با ابعاد کلی سیستم انتقال گرما کوچک است، از نو تفسیر کرد.

نخستین تلاش مهم برای تخمین رسانندگی جامدات ناهمگن را ماکسول انجام داد.<sup>۱</sup> او ماده‌ای ساخته شده از کره‌هایی با رسانندگی گرمایی  $k_1$  را در نظر گرفت که در فاز جامد پیوسته‌ای با رسانندگی گرمایی  $k_0$  پراکنده شده‌اند. حجم کسر  $\phi$  از کره‌های پراکنده به‌اندازه کافی کوچک گرفته می‌شود تا کره‌ها از لحاظ گرمایی «برهم‌کنش» نداشته باشند؛ یعنی فقط کافی است که رسانش گرمایی در محیطی وسیع که فقط یک کره در آن قرار دارد، بررسی شود. ماکسول به‌کمک رابطه‌ای بسیار ساده نشان داد که برای کسر حجم کوچک  $\phi$ :

$$\frac{k_{\text{eff}}}{k_0} = 1 + \frac{3\phi}{\left(\frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}\right) - \phi} \quad (۱-۶.۹)$$

3. G. Wiedemann and R. Franz, *Ann Phys. u. Chemie*, **89**, 497-531 (1853); L. Lorenz, *Poggendorff's Annalen*, **147**, 429-452 (1872).

۱. رابطه‌ای که ماکسول به‌دست آورد به رسانندگی الکتریکی مربوط بود، اما همین رابطه برای رسانندگی گرمایی نیز صادق است. نگاه کنید به

J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford University Press, 3rd edition (1891, reprinted 1998), Vol. 1. §314; H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford, 2nd edition (1959), p. 428.



(نگاه کنید به مسئله‌های ۱۱.ب.۸ و ۱۱.ج.۵).

برای کسر حجم بزرگ  $\phi$ ، ریلی<sup>۲</sup> نشان داد که، هرگاه کره‌ها در رئوس یک شبکه مکعبی قرار گیرند، رسانندگی گرمایی ماده مرکب از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{k_{\text{eff}}}{k_0} = 1 + \frac{3\phi}{\left(\frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}\right) - \phi + 1,569 \left(\frac{k_1 - k_0}{3k_1 - 4k_0}\right) \phi^{1/2} + \dots} \quad (2-6.9)$$

مقایسه این رابطه با معادله (۱-۶.۹) نشان می‌دهد که برهم‌کنش بین کره‌ها ناچیز است، حتی در  $\phi = \frac{1}{6}\pi$  که مقدار ماکزیمم ممکن برای  $\phi$  در شبکه مکعبی است. بنابراین غالباً از نتیجه ساده‌تر ماکسول استفاده می‌کنند و معمولاً آثار نایک‌نواختی توزیع کره‌ها را نادیده می‌گیرند.

اما برای آخال‌های غیرکروی، باید معادله (۱-۶.۹) را تصحیح کرد. بنابراین برای آرایه‌های مربعی تشکیل شده از استوانه‌های بلند موازی با محور  $z$ ، ریلی<sup>۲</sup> نشان داد که مؤلفه  $zz$  تانسور رسانندگی گرمایی عبارت است از:

$$\frac{k_{\text{eff},zz}}{k_0} = 1 + \left(\frac{k_1 - k_0}{k_0}\right) \phi \quad (3-6.9)$$

و دو مؤلفه دیگر عبارت‌اند از:

$$\frac{k_{\text{eff},xx}}{k_0} = \frac{k_{\text{eff},yy}}{k_0} = 1 + \frac{2\phi}{\left(\frac{k_1 + k_0}{k_1 - k_0}\right) - \phi + \left(\frac{k_1 - k_0}{k_1 + k_0}\right) (0,730584\phi^2 + 0,7013363\phi^4 + \dots)} \quad (4-6.9)$$

یعنی، جامد مرکب حاوی استوانه‌های نظم‌یافته، ناهمسان‌گرد است. تانسور رسانندگی گرمایی مؤثر تا  $O(\phi^2)$  برای محیط حاوی آخال‌های کروی محاسبه شده است.<sup>۳</sup>

برای آخال‌های غیرکروی پیچیده، که غالباً در عمل با آن‌ها سروکار داریم، هیچ رابطه دقیقی به دست نیامده است، اما چند رابطه تقریبی موجود است.<sup>۶,۵,۴</sup> برای بسترهای ساده ناهمگیر دانه‌ای، استفاده از عبارت زیر موفقیت‌آمیز بوده است:

$$\frac{k_{\text{eff}}}{k_0} = \frac{(1 - \phi) + \alpha\phi(k_1/k_0)}{(1 - \phi) + \alpha\phi} \quad (5-6.9)$$

که در آن:

$$\alpha = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \left[ 1 + \left(\frac{k_1}{k_0} - 1\right) g_k \right]^{-1} \quad (6-6.9)$$

$g_k$  «ضریب شکل» برای دانه‌های محیطی است،<sup>۷</sup> و باید در رابطه  $g_1 + g_2 + g_3 = 1$  صدق کند. برای

2. J. W. Strutt (Lord Rayleigh). *Phil. Mag.* (5), **34**, 431-502 (1892).

3. S.-Y. Lu and S. kim, *AIChE Journal*, **36**, 927-938 (1990).

4. V. I. Odelevskii, *J. Tech. Phys.* (USSR), **24**, 667 and 697 (1954); F. Euler, *J. Appl. Phys.*, **28**, 1342-1346 (1957).

5. D. A. de Vreis, *Mededelingen van de Landbouwhogeschool te wageningen*, (1952); see also Ref. 6 and D. A. de Vries, Chapter 7 in *Physics of Plant Environment*, W. R. van Wijk, ed., Wiley, New York (1963).

6. W. Woodside and J. H. Messmer, *J. Appl. Phys.*, **32**, 1688-1699, 1699-1706 (1961).

7. A. L. Loeb, *J. Amer. Ceramic Soc.*, **37**, 96-99 (1954).

کره  $\frac{1}{3} = g_1 = g_2 = g_3$  و معادله (۵-۶.۹) به معادله (۱-۶.۹) تبدیل می‌شود. برای خاک‌های ناهمگیر،  $g_3 = \frac{3}{4}$  و  $g_1 = g_2 = \frac{1}{8}$ . ساختار بسترهای متخلخل همگیر-مثلاً ماسه-سنگ‌ها- بسیار پیچیده‌تر است. پیش‌بینی موفقیت‌آمیز رسانندگی مؤثر چنین موادی نیز ادعا شده است،<sup>۸</sup> اما عمومیت این روش‌ها هنوز تأیید نشده است. برای جامدات حاوی حفره‌های گازی،<sup>۹</sup> ممکن است تابش گرمایی (نگاه کنید به فصل ۱۶) اهمیت داشته باشد. حالت خاص شکاف‌های صفحه‌ای موازی باهم، و عمود بر جهت رسانش گرما، به‌ویژه برای عایق‌کاری دمایی بالا مهم است. در چنین سیستم‌هایی می‌توان نشان داد که:

$$\frac{k_{\text{eff}}}{k_s} = \frac{1}{1 - \phi + \left( \frac{k_1}{k_s \phi} + \frac{4\sigma T^3 L}{k_s} \right)^{-1}} \quad (7-6.9)$$

که در آن  $\sigma$  ثابت استفان-بولتزمن،  $k_1$  رسانندگی گرمایی گاز، و  $L$  ضخامت کل ماده در جهت رسانش گرماست. صورت اصلاح‌شده این معادله برای شکاف‌هایی با شکل‌های دیگر و جهت‌گیری‌های دیگر نیز در دسترس است.<sup>۷</sup> برای بسترهای دانه‌ای پر شده با گاز<sup>۹،۶</sup> نوع دیگری از پیچیدگی مطرح می‌شود. چون رسانندگی گرمایی گازها بسیار پایین‌تر از جامدات است، بخش عمده رسانش در فاز گازی در نزدیکی نقاط تماس ذرات جامد مجاور هم متمرکز می‌شود. در نتیجه، فاصله‌ای که گرما در گاز منتقل می‌شود، ممکن است به سمت مسافت آزاد میانگین مولکول‌های گاز میل کند. در چنین حالتی، شرایط مطرح‌شده در بخش ۳.۹ نقض می‌شود و رسانندگی گرمایی گاز کاهش می‌یابد. بنابراین با استفاده از بسترهای نیمه‌تخلیه تشکیل‌شده از پودرهای دانه‌ریز، می‌توان عایق‌های بسیار مؤثر ساخت.

مجرای استوانه‌ای پر شده با مواد دانه‌ای که سیالی درون آن‌ها جریان دارد (در جهت  $z$ ) در فرایندهای جداسازی و راکتورهای شیمیایی اهمیت به‌سزایی دارند. در چنین سیستم‌هایی، رسانندگی گرمایی مؤثر در امتدادهای شعاعی و محوری کاملاً متفاوت است و با  $\kappa_{\text{eff},zz}$  و  $\kappa_{\text{eff},rr}$  نشان داده می‌شوند.<sup>۱۰</sup> رسانش، همرفت، و تابش، همه در جریان گرما در محیط متخلخل سهم دارند.<sup>۱۱</sup> برای جریان به‌شدت متلاطم، انرژی عمدتاً از طریق جریان ماریچی سیال در شکاف‌های ماده دانه‌ای انتقال می‌یابد؛ در نتیجه رسانندگی گرمایی به‌شدت ناهمسان‌گردی پدید می‌آید. برای بستر تشکیل‌شده از کره‌های یکنواخت، مؤلفه‌های شعاعی و محوری با عبارت‌های تقریبی زیر بیان می‌شوند:

$$\kappa_{\text{eff},rr} = \frac{1}{10} \rho \hat{C}_p v_0 D_p \quad , \quad \kappa_{\text{eff},zz} = \frac{1}{7} \rho \hat{C}_p v_0 D_p \quad (9, 8-6.9)$$

که در آن  $v_0$  «سرعت ظاهری» تعریف‌شده در بخش‌های ۳.۴ و ۴.۶ است و  $D_p$  قطر ذرات کروی است. این روابط ساده‌شده برای  $\text{Re} = D_p v_0 \rho / \mu$  بزرگ‌تر از ۲۰۰ صادق‌اند. رفتار در عددهای رینولدز پایین‌تر در منابع متعدد توصیف شده است.<sup>۱۲</sup> هم‌چنین، رفتار تانسور رسانندگی گرمایی، به‌صورت تابعی از عدد پکلت با تفصیل بسیار بررسی شده است.<sup>۱۳</sup>

8. Sh. N. Plyat, *Soviet Physics JETP*, **2**, 2588-2589 (1957).

9. M. Jakob, *Heat Transfer*, Wiley, New York (1959), Vol. 1, §6.5.

۱۰. نگاه کنید به معادله (۷-۱.۹) که اصلاح‌شده قانون فوریه برای مواد ناهمسان‌گرد است. اندیس‌های  $zz$  و  $rr$  بر این نکته تأکید

می‌کنند که این کمیت‌ها مؤلفه‌های یک تانسور متقارن مرتبه دوم‌اند.

11. W. B. Argo and J. M. Smith, *Chem. Engr. Progress*, **49**, 443-451 (1953).

12. J. Beek, *Adv. Chem. Engr.*, **3**, 203-271 (1962); H. Kramers and K. R. Westerterp, *Elements of Chemical Reactor Design and Operation*, Academic Press, New York (1963), §III.9; O. Levenspiel and K. B. Bischoff, *Adv. Chem. Engr.*, **4**, 95-198 (1963).

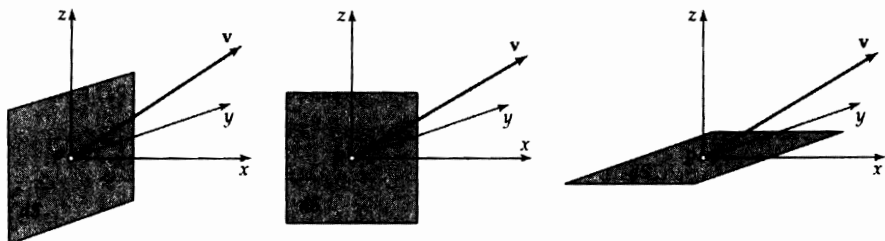
13. D. L. Koch and J. F. Brady, *J. Fluid Mech.*, **154**, 399-427 (1985).

### ۷.۹ انتقال همرفتی انرژی

در بخش ۱.۹ قانون رسانش گرمایی فوریه را بیان کردیم که در آن انرژی انتقال یافته از طریق محیط، در نتیجه حرکت‌های مولکولی، منظور شده بود. انرژی از طریق حرکت توده سیال نیز انتقال می‌یابد. در شکل ۱-۷.۹ سه جزء سطح دوبه‌دو عمود بر هم  $dS$  را در نقطه  $P$  نشان می‌دهیم که سرعت سیال در آن  $\mathbf{v}$  است. آهنگ جریان حجمی روی جزء سطح  $dS$  عمود بر محور  $x$  برابر  $v_x dS$  است. بنابراین آهنگ عبور انرژی از همان جزء سطح برابر است با:

$$\left(\frac{1}{\tau}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right)v_x dS \quad (1-7.9)$$

که در آن  $\frac{1}{\tau}\rho v^2 = \frac{1}{\tau}\rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$  انرژی جنبشی در واحد حجم، و  $\rho\hat{U}$  انرژی داخلی در واحد حجم است.



شکل ۱-۷.۹ سه جزء سطح عمود بر هم  $dS$  که انرژی، از طریق همرفت توسط سیالی که با سرعت  $\mathbf{v}$  حرکت می‌کند، از آن انتقال می‌یابد. آهنگ جریان حجمی روی سطح عمود بر محور  $x$  برابر است با  $v_x dS$ ، و در نتیجه آهنگ جریان انرژی روی سطح  $dS$  عبارت است از  $dS v_x (\frac{1}{\tau}\rho v^2 + \rho\hat{U})$ . برای جزء سطح عمود بر محورهای  $y$  و  $z$  نیز می‌توان عبارتهای مشابهی نوشت.

تعریف انرژی داخلی در وضعیتی غیرتعادلی مستلزم دقت و احتیاط است. از دیدگاه پیوستاری، فرض می‌شود انرژی داخلی در مکان  $\mathbf{r}$  و زمان  $t$  همان تابع دما و چگالی لحظه‌ای موضعی است که در وضعیت تعادل با آن سروکار داریم. از دیدگاه مولکولی، انرژی داخلی از مجموع انرژی‌های جنبشی همه اتم‌های تشکیل دهنده (نسبت به سرعت جریان  $\mathbf{v}$ )، انرژی‌های پتانسیل درون مولکولی، و انرژی‌های بین مولکولی، در ناحیه کوچکی حول مکان  $\mathbf{r}$  در زمان  $t$  تشکیل می‌شود. یادآوری می‌کنیم که در بحث برخوردهای مولکولی در بخش ۳.۰، به این نتیجه رسیدیم که بهتر است انرژی یک جفت مولکول برخوردکننده را برابر جمع انرژی‌های جنبشی نسبت به مرکز جرم مولکول، به علاوه انرژی پتانسیل درون مولکولی در نظر بگیریم. در این جا نیز انرژی سیال را (که پیوستار فرض می‌شود) به انرژی جنبشی مربوط به حرکت توده سیال و انرژی داخلی مربوط به انرژی جنبشی مولکول‌ها نسبت به سرعت جریان و انرژی‌های پتانسیل درون مولکولی و بین مولکولی تفکیک می‌کنیم.

می‌توانیم عبارتهایی شبیه معادله (۱-۷.۹) برای آهنگ عبور انرژی از جزء سطح‌های عمود بر محورهای  $y$  و  $z$  بنویسیم. اکنون اگر هریک از این عبارتهای را در بردار یک متناظر ضرب و سپس باهم جمع کنیم، آنگاه، پس از تقسیم بر  $dS$ ، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\tau}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right)\delta_x v_x + \left(\frac{1}{\tau}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right)\delta_y v_y + \left(\frac{1}{\tau}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right)\delta_z v_z \\ & = \left(\frac{1}{\tau}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right)\mathbf{v} \end{aligned} \quad (2-7.9)$$

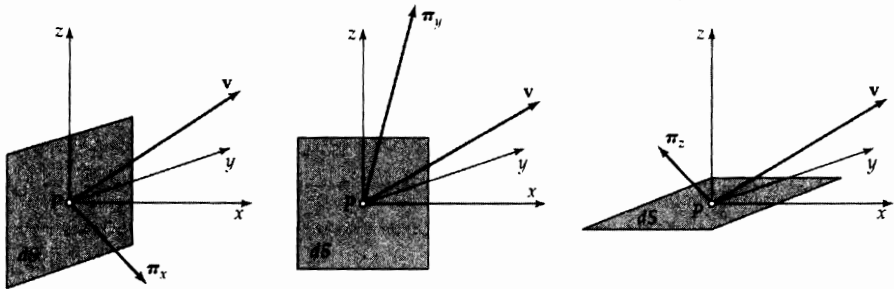
و این کمیت را بردار شار انرژی همرفتی می‌نامند. برای به دست آوردن شار انرژی همرفتی روی واحد سطحی که

بردار یکه قائم آن  $\mathbf{n}$  است، ضرب نقطه‌ای  $(\frac{1}{4}\rho v^2 + \rho U)\mathbf{v}$  را تشکیل می‌دهیم. این شار از سمت منفی سطح به سمت مثبت آن است. این عبارت را با شار اندازه حرکت همرفتی در شکل ۲-۷.۱ مقایسه کنید.

### ۸.۹ کار مربوط به حرکت‌های مولکولی

حال به کاربرد قانون پایستگی انرژی در مورد «لایه‌ها» (همانند موازنه لایه‌ای در فصل ۱۰) یا در مورد جزء حجم‌های کوچک ثابت در فضا (برای به دست آوردن معادله تغییر انرژی در بخش ۱.۱۱) می‌پردازیم. قانون پایستگی انرژی برای سیستم جریان باز، تعمیم قانون اول ترمودینامیک کلاسیک (برای سیستم بسته در حال سکون) است. در مورد اخیر می‌گوییم که تغییر انرژی داخلی برابر است با مقدار گرمای اضافه شده به سیستم، به علاوه مقدار کار انجام شده روی سیستم. برای سیستم‌های جریان باید گرمای اضافه شده به سیستم (از طریق حرکت‌های مولکولی و حرکت توده سیال)، و کاری را که حرکت‌های مولکولی روی سیستم انجام می‌دهند نیز در نظر بگیریم.

ابتدا یادآوری می‌کنیم که وقتی نیروی  $\mathbf{F}$  بر جسمی وارد می‌شود و آن را به اندازه  $d\mathbf{r}$  جابه‌جا می‌کند، کار انجام شده برابر است با  $dW = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})$ . بنابراین آهنگ انجام کار عبارت است از  $dW/dt = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})$ : یعنی ضرب نقطه‌ای نیرو و سرعت. حال این فرمول را در مورد سه صفحه متعامد در نقطه  $P$  در فضای نشان داده شده در شکل ۱-۸.۹ به کار می‌بریم.



شکل ۱-۸.۹ سه جزء سطح دوه‌د متعامد  $dS$  در نقطه  $P$ ، همراه با بردارهای تنش  $\pi_x$ ،  $\pi_y$ ، و  $\pi_z$  که بر این سطح وارد می‌شوند. در شکل اول، آهنگ انجام کار توسط سیال واقع در سمت کم‌تر  $dS$ ، روی سیال واقع در سمت بیش‌تر  $dS$  برابر است با  $(\pi_x \cdot \mathbf{v})dS = [\pi_x \cdot \mathbf{v}]_x dS$ ، برای جزء سطح‌های عمود بر دو محور دیگر مختصات نیز عبارتهای مشابهی برقرار است.

ابتدا جزء سطح عمود بر محور  $x$  را در نظر می‌گیریم. سیال واقع در سمت کم‌تر سطح نیروی  $\pi_x dS$  را بر سیال واقع در سمت بیش‌تر سطح وارد می‌کند (نگاه کنید به جدول ۱-۲.۱). چون سیال با سرعت  $\mathbf{v}$  حرکت می‌کند، آهنگ انجام کار توسط سیال کم‌تر روی سیال بیش‌تر، برابر است با  $(\pi_x \cdot \mathbf{v})dS$ . می‌توان برای کار انجام شده روی دو جزء سطح دیگر، عبارتهای مشابهی نوشت. این عبارتهای آهنگ انجام کار، وقتی به صورت مؤلفه‌ای نوشته شوند، به روابط زیر تبدیل می‌شوند:

$$(\pi_x \cdot \mathbf{v}) = \pi_{xx}v_x + \pi_{xy}v_y + \pi_{xz}v_z \equiv [\pi \cdot \mathbf{v}]_x \quad (۱-۸.۹)$$

$$(\pi_y \cdot \mathbf{v}) = \pi_{yx}v_x + \pi_{yy}v_y + \pi_{yz}v_z \equiv [\pi \cdot \mathbf{v}]_y \quad (۲-۸.۹)$$

$$(\pi_z \cdot \mathbf{v}) = \pi_{zx}v_x + \pi_{zy}v_y + \pi_{zz}v_z \equiv [\pi \cdot \mathbf{v}]_z \quad (۳-۸.۹)$$

وقتی این مؤلفه‌های اسکالر در بردارهای یکه ضرب و سپس باهم جمع شوند، «بردار آهنگ انجام کار در واحد سطح» حاصل می‌شود که می‌توان آن را، به اختصار، شار کار نامید:

$$[\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}] = \delta_x(\boldsymbol{\pi}_x \cdot \mathbf{v}) + \delta_y(\boldsymbol{\pi}_y \cdot \mathbf{v}) + \delta_z(\boldsymbol{\pi}_z \cdot \mathbf{v}) \quad (۴-۸.۹)$$

به‌علاوه، آهنگ انجام کار روی واحد سطحی که جهت‌گیری آن با بردار یکه  $\mathbf{n}$  نشان داده می‌شود، برابر است با  $(\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}])$ .

معادله‌های (۱-۸.۹) تا (۴-۸.۹) را می‌توان به‌آسانی و با جایگزین کردن  $x, y, z$  با  $r, \theta, \phi$  و  $z$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای، و با جایگزین کردن  $x, y, z$  با  $r, \theta, \phi$  در دستگاه مختصات کروی نوشت. حال، برای کاربردهای بعدی، بردار شار انرژی مرکب  $\mathbf{e}$  را، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{e} = \left(\frac{1}{\rho}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right)\mathbf{v} + [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}] + \mathbf{q} \quad (۵-۸.۹)$$

بردار  $\mathbf{e}$  مجموع (الف) شار انرژی همرفتی؛ (ب) آهنگ انجام کار (در واحد سطح) توسط مکانیسم‌های مولکولی؛ و (ج) آهنگ انتقال گرما (در واحد سطح) توسط مکانیسم‌های مولکولی است. همهٔ جمله‌های معادلهٔ (۵-۸.۹) از قرارداد علامت یکسانی پیروی می‌کنند، به‌طوری‌که  $e_x$  انتقال انرژی در جهت مثبت  $x$  در واحد سطح، در واحد زمان است. اکنون تانسور تنش مولکولی کل  $\boldsymbol{\pi}$  را می‌توان به دو جزء تفکیک کرد:  $\boldsymbol{\pi} = p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}$ ، به‌طوری‌که  $[\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}] = p\mathbf{v} + [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]$ . سپس می‌توان جملهٔ  $p\mathbf{v}$  را با جملهٔ انرژی داخلی  $\rho\hat{U}\mathbf{v}$  ترکیب کرد تا جملهٔ آنتالپی  $\rho(\hat{U} + pV)\mathbf{v} = \rho(\hat{U} + (p/\rho))\mathbf{v} = p\mathbf{v} + \rho\hat{U}\mathbf{v}$  حاصل شود، بنابراین:

$$\mathbf{e} = \left(\frac{1}{\rho}\rho v^2 + \rho\hat{H}\right)\mathbf{v} + [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}] + \mathbf{q} \quad (۶-۸.۹)$$

معمولاً بردار  $\mathbf{e}$  را به‌این‌صورت به‌کار می‌بریم. برای جزء سطح  $dS$  با جهت‌گیری  $n$ ، کمیت  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})$  شار انرژی همرفتی، شار گرما، و شار کار روی جزء سطح  $dS$ ، از سمت منفی به‌سمت مثبت  $dS$ ، را نشان می‌دهد. نمادگذاری بردارهای مختلف شار انرژی که در این بخش معرفی شدند، در جدول ۱-۸.۹ خلاصه شده‌است. همهٔ آن‌ها از قرارداد علامت یکسان پیروی می‌کنند.

برای ارزیابی آنتالپی در معادلهٔ (۶-۸.۹)، از فرمول استاندارد ترمودینامیک تعادلی استفاده می‌کنیم:

$$d\hat{H} = \left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial p}\right)_T dp = \hat{C}_p dT + \left[\hat{V} - T\left(\frac{\partial\hat{V}}{\partial T}\right)_p\right] dp \quad (۷-۸.۹)$$

جدول ۱-۸.۹ خلاصهٔ نمادگذاری شار انرژی.

مرجع	معنا	نماد
معادلهٔ (۲-۷.۹)	بردار شار انرژی همرفتی	$\left(\frac{1}{\rho}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right)\mathbf{v}$
معادلهٔ (۶-۱.۹)	بردار شار گرمای مولکولی	$\mathbf{q}$
معادلهٔ (۴-۸.۹)	بردار شار کار مولکولی	$[\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}]$
معادلهٔ (۶، ۵-۸.۹)	بردار شار انرژی مرکب	$\mathbf{e} = \mathbf{q} + [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}] + \left(\frac{1}{\rho}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right)\mathbf{v}$ $= \mathbf{q} + [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}] + \left(\frac{1}{\rho}\rho v^2 + \rho\hat{H}\right)\mathbf{v}$

وقتی از این فرمول، از حالت استاندارد  $p^\circ$ ،  $T^\circ$  تا حالت  $p$ ،  $T$  انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود:<sup>۱</sup>

1. R. J. Silbey and R. A. Alberty, *Physical Chemistry*, Wiley, 3rd edition (2001), §2.11.

$$\hat{H} - \hat{H}^{\circ} = \int_{T^{\circ}}^T \hat{C}_p d\bar{T} + \int_{p^{\circ}}^p \left[ \hat{V} - T \left( \frac{\partial \hat{V}}{\partial T} \right)_p \right] d\bar{p} \quad (۸-۸.۹)$$

که در آن  $\hat{H}^{\circ}$  آنتالپی در واحد جرم در حالت مرجع است. برای گاز ایده‌آل، انتگرال روی  $p$  صفر، و برای سیالاتی با چگالی ثابت، برابر  $(1/\rho)(p - p^{\circ})$  است. اگر ظرفیت گرمایی را بتوان در گستره دمایی مربوطه ثابت در نظر گرفت، انتگرال روی  $T$  برابر می‌شود با  $\hat{C}_p(T - T^{\circ})$ . فرض می‌شود معادله (۷-۸.۹) در سیستم‌های غیرتعادلی، که در آن‌ها  $p$  و  $T$  مقادیر موضعی فشار و دما هستند، معتبر است.

### پرسش‌های تشریحی

۱. رسانندگی گرمایی  $k$ ، ضریب نفوذ گرمایی  $\alpha$ ، ظرفیت گرمایی  $\hat{C}_p$ ، شار گرمایی  $q$  و شار انرژی مرکب  $e$  را تعریف و ابعاد آن‌ها را بیان کنید. برای نشان دادن ابعاد از  $m$  برای جرم،  $l$  برای طول،  $T$  برای دما، و  $t$  برای زمان استفاده کنید.
۲. مرتبه بزرگی رسانندگی گرمایی گازها، مایعات، و جامدات را مقایسه کنید.
۳. قانون ویسکوزیته نیوتون و قانون رسانش گرمایی فوریه از چه لحاظ به هم شبیه‌اند و از چه لحاظ باهم تفاوت دارند؟
۴. آیا ویسکوزیته و رسانندگی گرمایی گازها رابطه دارند؟
۵. وابستگی دمایی رسانندگی گرمایی گازها، مایعات، و جامدات را مقایسه کنید.
۶. مرتبه بزرگی اعداد پرانتل گازها و مایعات را مقایسه کنید.
۷. آیا رسانندگی گرمایی  $\text{Ne}^{20}$  و  $\text{Ne}^{22}$  گازی برابر است؟
۸. آیا رابطه  $\bar{C}_p - \bar{C}_v = R$  فقط برای گازهای ایده‌آل صادق است، یا برای مایعات هم صادق است؟ اگر در مورد مایعات صادق نیست، کدام رابطه در مورد آن‌ها صادق است؟
۹. شار انرژی جنبشی در جهت محوری، برای جریان آرام پوتازوی یک مایع نیوتونی در لوله مدور را تعیین کنید.
۱۰. مفهوم رابطه  $[T \cdot v] = pv + [T \cdot v]$  برای جریان پوتازوی چیست؟

### مسئله‌ها

#### ۱. الف ۱۰. پیش‌بینی رسانندگی گرمایی گازها در چگالی پایین.

(الف) رسانندگی گرمایی گاز آرگون در  $10^{\circ}\text{C}$  و فشار جو را، با استفاده از نظریه چاپمن-انسکوگ و ثابت‌های لنارد-جونز حاصل از داده‌های ویسکوزیته محاسبه کنید. نتیجه حاصل را با مقدار مشاهده‌شده<sup>۱</sup>  $5.06 \times 10^{-7} \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K}$  مقایسه کنید.

(ب) رسانندگی گرمایی  $\text{NO}$  و  $\text{CH}_4$  را در دمای  $300 \text{ K}$  و فشار جو، با استفاده از داده‌های زیر برای چنین شرایطی محاسبه کنید:

	$\mu \times 10^7 (\text{g/cm} \cdot \text{s})$	$\bar{C}_p (\text{cal/g} \cdot \text{mole} \cdot \text{K})$
NO	۱۹۲۹	۷٫۱۵
CH <sub>۴</sub>	۱۱۱۶	۸٫۵۵

نتیجه حاصل را با مقادیر تجربی گفته‌شده در جدول ۲-۱.۹ مقایسه کنید.

1. W. G. Kannuluik and E. H. Carman, *Proc. Phys. Soc. (London)*, **65B**, 701-704 (1952).

الف ۲. محاسبه اعداد پرانتل برای گازها در چگالی پایین.

(الف) با استفاده از فرمول اویکن و داده‌های تجربی ظرفیت گرمایی، عدد پرانتل هریک از گازهای گفته شده در جدول را، در فشار ۱ اتمسفر و دمای  $300\text{ K}$  تخمین بزنید.

(ب) برای همین گازها، عدد پرانتل را مستقیماً با جایگزین کردن مقادیر زیر برای خواص فیزیکی، در فرمول  $Pr = \hat{C}_p \mu / k$  محاسبه و مقادیر حاصل را با نتیجه قسمت (الف) مقایسه کنید. همه خواص در فشار پایین و دمای  $300\text{ K}$  گفته شده‌اند.

	$\hat{C}_p \times 10^{-3}$	$\mu \times 10^5$	$k$
گاز	J/kg · K	Pa · s	W/m · K
He	۵٫۱۹۳	۱٫۹۹۵	۰٫۱۵۴۶
Ar	۰٫۵۲۰۴	۲٫۲۷۸	۰٫۱۷۸۴
H <sub>۲</sub>	۱۴٫۲۸	۰٫۸۹۴۴	۰٫۱۷۸۹
هوا	۱٫۰۰۱	۱٫۸۵۴	۰٫۰۲۶۱۴
CO <sub>۲</sub>	۰٫۸۴۸۴	۱٫۵۰۶	۰٫۱۶۶۱
H <sub>۲</sub> O	۱٫۸۶۴	۱٫۰۴۱	۰٫۰۲۲۵۰

الف ۳. تخمین رسانندگی گرمایی گاز چگال. رسانندگی گرمایی گاز متان را در فشار  $110/4\text{ atm}$  و دمای  $127^\circ\text{F}$ ، با استفاده از روش‌های زیر تعیین کنید:

(الف) از شکل ۱۲-۹ استفاده کنید. خواص بحرانی لازم را از پیوست (ه) به دست آورید.

(ب) از فرمول اویکن برای به دست آوردن رسانندگی گرمایی در  $127^\circ\text{F}$  و فشار پایین استفاده کنید. سپس با استفاده از شکل ۱۲-۹، تصحیح فشار را وارد کنید. مقدار تجربی<sup>۲</sup> برابر است با  $0.282\text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$ .

جواب: (الف)  $0.294\text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$ .

الف ۴. پیش‌بینی رسانندگی گرمایی مخلوط گازی. رسانندگی گازی مخلوط حاوی  $20\%$  مولی CO<sub>۲</sub> و  $80\%$  مولی H<sub>۲</sub> را در فشار ۱ اتمسفر و دمای  $300\text{ K}$  محاسبه کنید. در محاسبات خود از داده‌های مسئله الف ۲ استفاده کنید.  
جواب:  $0.1204\text{ W/m} \cdot \text{K}$ .

الف ۵. تخمین رسانندگی گرمایی مایع خالص. رسانندگی گرمایی H<sub>۲</sub>O مایع را در دمای  $40^\circ\text{C}$  و فشار  $40$  بار پیش‌بینی کنید ( $10^6\text{ dyn/cm}^2 = 1\text{ بار}$ ). تراکم‌پذیری هم‌دما،  $(1/\rho)(\partial\rho/\partial p)_T$ ، برابر  $10^{-6}\text{ bar}^{-1}$  و چگالی  $0.9938\text{ g/cm}^3$  است. فرض کنید  $\bar{C}_p = \bar{C}_v$ .

جواب:  $0.375\text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$ .

2. J. M. Lenoir, W. A. Junk and E. W. Comings, *Chem. Engr. Prog.*, **49**, 539-542 (1953).

الف ۶. محاسبه عدد لورنتس.

(الف) با کاربرد نظریه سینتیکی در مورد «گاز الکترونی» در فلز،<sup>۳</sup> عدد لورنتس به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$L = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{K}{e} \right)^2 \quad (الف.۱-۶)$$

که در آن K ثابت بولتزمن و e بار الکترون است. L را برحسب واحدهای گفته شده پس از معادله (۱-۵.۹) محاسبه کنید.

(ب) مقاومت ویژه الکتریکی،  $1/k_e$ ، برای مس در دمای  $20^\circ\text{C}$  برابر  $1.72 \times 10^{-6} \text{ ohm} \cdot \text{cm}$  است. با استفاده از معادله (الف.۱-۶) رسانندگی گرمایی این فلز را برحسب  $\text{W/m} \cdot \text{K}$  تخمین بزنید و نتیجه را با مقدار تجربی داده شده در جدول ۱-۹ مقایسه کنید.

جواب: (الف)  $2.44 \times 10^{-8} \text{ volt}^2/\text{K}^2$ ؛

(ب)  $4.16 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ .

الف ۷. تأیید قانون ویدمان-فرنتس-لورنتس. داده‌های تجربی زیر برای فلزات خالص در  $20^\circ\text{C}$  مفروض است؛ مقادیر متناظر عدد لورنتس، L، تعریف شده توسط معادله (۱-۵.۹) را محاسبه کنید.

فلز	$(1/k_e)(\text{ohm} \cdot \text{cm})$	$k(\text{cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$
Na	$4.6 \times 10^{-6}$	۰٫۳۱۷
Ni	$6.9 \times 10^{-6}$	۰٫۱۴۰
Cu	$1.69 \times 10^{-6}$	۰٫۹۲
Al	$2.62 \times 10^{-6}$	۰٫۵۰

الف ۸. رسانندگی گرمایی و عدد پراوتل گاز چنداتمی.

(الف) رسانندگی گرمایی  $\text{CH}_4$  را در دمای  $1500 \text{ K}$  و فشار  $1.37$  اتمسفر تخمین بزنید. ظرفیت گرمایی مولی در فشار ثابت<sup>۴</sup> و دمای  $1500 \text{ K}$  برابر است با:  $20.71 \text{ cal/g} - \text{mole} \cdot \text{K}$ .

(ب) عدد پراوتل در همین دما و فشار چه قدر است؟

جواب: (الف)  $5.06 \times 10^{-2} \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K}$ ؛

(ب) ۰٫۸۹.

الف ۹. رسانندگی گرمایی گاز کلر. با استفاده از معادله (۱۵-۳.۹)، رسانندگی گرمایی گاز کلر را محاسبه کنید. برای انجام این کار باید از معادله (۱۴-۴.۱) برای تخمین ویسکوزیته استفاده کنید؛ به مقادیر زیر برای ظرفیت گرمایی نیز نیاز دارید:

T(K)	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
$\bar{C}_p(\text{cal/g-mole} \cdot \text{K})$	(۸٫۰۶)	۸٫۱۲	۸٫۴۴	۸٫۶۲	۸٫۷۴

3. J. E. Mayer and M. G. mayer, *Statistical Mechanics*, Wiley, New York (1946), p. 412; P. Drude, *Ann. Phys.*, **1**, 566-613 (1900).

4. O. A. Hougen, K. M. Watson, and R. A. Ragatz, *Chemical Process Principles*, Vol. 1, Wiley, New York (1954), p. 253.



مقادیر محاسبه‌شده تا چه میزان با داده‌های تجربی زیر درمورد رسانندگی گرمایی<sup>۵</sup> توافق دارند؟

$T(K)$	$p(mm\ Hg)$	$k \times 10^5\ cal/cm \cdot s \cdot K$
۱۹۸	۵۰	$۱,۳۱ \pm ۰,۰۳$
۲۷۵	۲۲۰	$۱,۹۰ \pm ۰,۰۲$
۲۷۶	۱۲۰	$۱,۹۳ \pm ۰,۰۱$
	۲۲۰	$۱,۹۲ \pm ۰,۰۱$
۳۶۳	۱۰۰	$۲,۶۲ \pm ۰,۰۲$
	۲۰۰	$۲,۶۱ \pm ۰,۰۲$
۳۹۵	۲۱۰	$۳,۰۴ \pm ۰,۰۲$
۴۵۳	۱۵۰	$۳,۵۳ \pm ۰,۰۳$
	۲۵۰	$۳,۴۲ \pm ۰,۰۲$
۴۹۵	۲۵۰	$۳,۷۲ \pm ۰,۰۷$
۵۵۳	۱۰۰	$۴,۱۴ \pm ۰,۰۴$
۵۸۳	۱۷۰	$۴,۴۳ \pm ۰,۰۴$
	۲۱۰	$۴,۴۵ \pm ۰,۰۸$
۶۷۶	۱۵۰	$۵,۰۷ \pm ۰,۱۰$
	۲۵۰	$۴,۹۰ \pm ۰,۰۳$

الف ۱۰. رسانندگی گرمایی مخلوط‌های کلر-هوا. با استفاده از معادله (۳.۹-۱۷)، رسانندگی گرمایی مخلوط‌های کلر-هوا در دمای  $۲۹۷\ K$  و فشار ۱ اتمسفر را، برای کسرهای مولی کلر، به شرح زیر، پیش‌بینی کنید:  $۰,۲۵$ ،  $۰,۵۰$ ،  $۰,۷۵$ . هوا را می‌توان یک ماده در نظر گرفت و داده‌های زیر را نیز می‌توان فرض کرد:

ماده	$\mu(Pa \cdot s)$	$k(W/m \cdot K)$	$\hat{C}_p(J/kg \cdot K)$
هوا	$۱,۸۵۴ \times 10^{-5}$	$۲,۶۱۴ \times 10^{-2}$	$۱,۰۰۱ \times 10^3$
کلر	$۱,۳۵۱ \times 10^{-5}$	$۸,۹۶۰ \times 10^{-3}$	$۴,۷۹۸ \times 10^2$

الف ۱۱. رسانندگی گرمایی ماسه کوارتزی. نمونه‌ای از ماسه کوارتزی در  $۲۰^\circ C$  خواص زیر را دارد:

جزء سازنده	کسر حجمی	$k\ cal/cm \cdot s \cdot K$
$i = 1$ : سیلیس	$۰,۵۱۰$	$۲,۰۴ \times 10^{-2}$
$i = 2$ : فلدسپار	$۰,۰۶۳$	$۷,۰ \times 10^{-2}$
فاز پیوسته ( $i = 0$ ) یکی از موارد زیر است:		
(i) آب	$۰,۴۲۷$	$۱,۴۲ \times 10^{-2}$
(ii) هوا	$۰,۴۲۷$	$۰,۰۶۱۵ \times 10^{-2}$

۵. درون‌یابی‌شده از داده‌های منبع زیر:

E. U. Frank, *Z. Elektrochem.*, **55**, 636 (1951), as reported in *Nouveau Traité de Chimie Minerale*, P. Pascal, ed., Masson et C<sup>ie</sup>, Paris(1960), pp. 158-159.

رسانندگی گرمایی ماسه را (i) وقتی از آب اشباع است، و (ii) وقتی کاملاً خشک است، تخمین بزنید. (الف) از تعمیم زیر برای معادله‌های (۵-۶.۹) و (۶-۶.۹) استفاده کنید:

$$\frac{k_{\text{eff}}}{k_0} = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i (k_i/k_0) \phi_i}{\sum_{i=1}^N \alpha_i \phi} \quad (\text{الف ۱۱-۱})$$

$$\alpha_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \left[ 1 + \left( \frac{k_i}{k_0} - 1 \right) g_j \right]^{-1} \quad (\text{الف ۱۱-۲})$$

در این جا  $N$  تعداد فازهای جامد است. پیش‌بینی مربوط به کره‌ها ( $\frac{1}{3}$ ) را با توصیهٔ دوریس ( $g_1 = g_2 = \frac{1}{8}$ ;  $g_3 = \frac{3}{4}$ ) مقایسه کنید. مقادیر اخیر  $g_i$  تقریب خوبی از مقادیر برازش یافته<sup>۶</sup> برای نمونهٔ حاضرند. برای ماسهٔ خشک باید عضو سمت راست معادلهٔ (الف ۱۱-۱) را در  $۱/۲۵$  ضرب کرد.<sup>۶</sup> (ب) از معادلهٔ (۱-۶.۹)، با  $k_1 = ۱۸/۹ \times ۱۰^{-۳} \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K}$  استفاده کنید که رسانندگی گرمایی متوسط حجمی دو جامد است. مقادیر مشاهده شده، با دقتی در حدود ۳٪، عبارت‌اند از  $۶/۲$  و  $۵/۸ \times ۱۰^{-۳} \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K}$ ، به ترتیب، برای ماسهٔ تر و ماسهٔ خشک.<sup>۶</sup>

جواب‌ها: ماسهٔ خشک عبارت‌اند از:

(الف) از معادلهٔ (الف ۱۱-۱) نتیجه می‌شود:  $k_{\text{eff}} = ۴/۹ \times ۱۰^{-۳}$  و  $g_1 = g_2 = g_3 = \frac{1}{3}$  با  $۰/۳۸ \times ۱۰^{-۳}$  برحسب  $۶/۲ \times ۱۰^{-۳}$  و  $۰/۶۴ \times ۱۰^{-۳}$  با  $۱/۸$  و  $g_3 = \frac{3}{4}$ .  
(ب) از معادلهٔ (۱-۶.۹) نتیجه می‌شود:  $k_{\text{eff}} = ۵/۱ \times ۱۰^{-۳}$  و  $۰/۳۰ \times ۱۰^{-۳}$ .

الف ۱۲ محاسبهٔ قطر مولکولی با استفاده از خواص انتقال.

(الف) مطلوب است تعیین قطر مولکولی  $d$  برای آرگون، با استفاده از معادلهٔ (۱-۴.۱) و ویسکوزیتهٔ تجربی مفروض در معادلهٔ (الف ۹-۲).

(ب) قسمت (الف) را تکرار کنید، اما این بار از معادلهٔ (۱۲-۳.۹) و رسانندگی گرمایی اندازه‌گیری شده در مسئلهٔ الف ۹-۲ استفاده کنید. این نتیجه را، با مقدار به دست آمده در قسمت (الف) مقایسه کنید.

(ج) مقادیر قطر برخورد لnard-جونز،  $\sigma$ ، را از داده‌های تجربی مورداستفاده در قسمت (الف) و (ب)، با استفاده از  $\epsilon/K$  گفته شده در جدول ۱.۵ محاسبه و مقایسه کنید.

(د) از محاسبات بالا چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

جواب: (الف)  $۲/۹۵ \text{ \AA}$ ؛ (ب)  $۱/۸۶ \text{ \AA}$

(ج)  $۳/۴۱۵ \text{ \AA}$  از معادلهٔ (۱۴-۴.۱)،  $۳/۴۰۹ \text{ \AA}$  از معادلهٔ (۱۳-۳.۹).

<sup>۶</sup> رفتار خاک نیمه مرطوب در منبع زیر بررسی شده است:

۱.ج۹ نظریهٔ انسکوگ برای گازهای چگال. انسکوگ<sup>۷</sup> نظریه‌ای سینتیکی برای بیان خواص انتقال گازهای چگال پی‌ریزی کرد. او نشان داد که برای مولکول‌هایی که به صورت کره‌های صلب به قطر  $\sigma$  ایده‌آل‌سازی شده‌اند، داریم:

$$\frac{\mu}{\mu^\circ} \frac{\tilde{V}}{b} = \frac{1}{y} + 0,8 + 0,761y \quad \frac{k}{k^\circ} \frac{\tilde{V}}{b} = \frac{1}{y} + 1,2 + 0,755y \quad (2, 1-1.ج۹)$$

در این جا  $\mu^\circ$  و  $k^\circ$  خواص در فشار پایین (مثلاً محاسبه شده با استفاده از معادله‌های (۱۴-۴.۱) و (۱۳-۳.۹))،  $\tilde{V}$  حجم مولی، و  $b = \frac{2}{3} \pi N \sigma^3$  است که در آن  $\tilde{N}$  عدد آووگادرو است. کمیت  $y$  با معادلهٔ حالت گاز تشکیل شده از کره‌های صلب رابطه دارد:

$$y = \frac{p\tilde{V}}{RT} - 1 = \left(\frac{b_0}{\tilde{V}}\right) + 0,6250 \left(\frac{b_0}{\tilde{V}}\right)^2 + 0,2869 \left(\frac{b_0}{\tilde{V}}\right)^3 + \dots \quad (3-1.ج۹)$$

این سه معادله تصحیح چگالی برای ویسکوزیته و رسانندگی گرمایی گاز فرضی تشکیل شده از کره‌های صلب را نشان می‌دهند.

انسکوگ این نکته را نیز مطرح کرد که برای گازهای حقیقی،  $y$  را می‌توان از رابطهٔ تجربی زیر به دست آورد:

$$y = \frac{\tilde{V}}{R} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\tilde{V}} - 1 \quad (4-1.ج۹)$$

که در آن داده‌های تجربی  $p\tilde{V}-T$  استفاده می‌شود؛ و (ii)  $b_0$  را می‌توان با برازاندن مینیمم در منحنی  $\tilde{V}(\mu/\mu^\circ)$  بر حسب  $y$  تعیین کرد.

(الف) راهی سودمند برای خلاصه کردن معادلهٔ حالت، استفاده از رابطه‌های حالت متناظر<sup>۸</sup>  $Z = Z(p_r, T_r)$  است که در آن  $Z = p\tilde{V}/RT$ ،  $p_r = p/p_c$ ،  $T_r = T/T_c$ . نشان دهید که کمیت  $y$  که با معادلهٔ (۴-۱.ج۹) تعریف می‌شود را می‌توان با استفاده از رابطهٔ زیر، به صورت تابعی از فشار و دمای کاهش یافته محاسبه کرد.

$$y = Z \frac{1 + (\partial \ln Z / \partial \ln T_r)_{p_r}}{1 - (\partial \ln Z / \partial \ln p_r)_{T_r}} - 1 \quad (5-1.ج۹)$$

(ب) نشان دهید که چگونه معادله‌های (۱-۱.ج۹)، (۲-۱.ج۹)، و (۵-۱.ج۹)، همراه با نمودار  $Z$  هوگن-واتسون و نمودار  $\mu/\mu_c$  اوی-هارلواتسون در شکل ۱-۳۰.۱ را می‌توان برای تهیهٔ نمودار  $k/k_c$  به صورت تابعی از  $p_r$  و  $T_r$  به کار برد. محدودیت‌های نمودار حاصل را نام ببرید. چنین روشی را (اما با استفاده از داده‌های مخصوص  $p\tilde{V}-T$  به جای نمودار  $Z$  هوگن-واتسون) کامینگز و ناتان به کار بردند.<sup>۹</sup>

(ج) چگونه می‌توان از معادلهٔ حالت رتلیش و کوآنگ<sup>۱۰</sup>

$$\left(p + \frac{a}{\sqrt{T}\tilde{V}(\tilde{V} + b)}\right)(\tilde{V} - b) = RT \quad (6-1.ج۹)$$

برای همین مقصود استفاده کرد؟ کمیت‌های  $a$  و  $b$  ثابت‌های مشخصهٔ هر گازند.

7. D. Enskog, *Kungliga Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar*, **62**, No. 4 (1922), in German. see also J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, 2nd printing with corrections (1964), pp. 647-652.

8. O. A. Hougen & K. M. Watson, *Chemical Process Principles*, Vol. II, Wiley, New York (1947), p. 489.

9. E. W. Coming and M. F. Nathan, *Ind. Eng. Chem.*, **39**, 964-970 (1947).

10. O. Redlich and J. N. S. Kwong, *Chem. Rev.*, **44**, 233-244 (1949).

## فصل ۱۰

### موازنه‌های لایه‌ای انرژی و توزیع دما در جامدات و جریان آرام

۱.۱۰ موازنه‌های لایه‌ای انرژی؛ شرایط مرزی

۲.۱۰ رسانش گرما با منبع گرمای الکتریکی

۳.۱۰ رسانش گرما با منبع گرمای هسته‌ای

۴.۱۰ رسانش گرما با منبع گرمای ویسکوز

۵.۱۰ رسانش گرما با منبع گرمای شیمیایی

۶.۱۰ رسانش گرما از طریق جدارهای مرکب

۷.۱۰ رسانش گرما در پره خنک‌کن

۸.۱۰ همرفت واداشته

۹.۱۰ همرفت آزاد

در فصل ۲ با نحوه حل کردن مسئله‌های ساده جریان ویسکوز از طریق روشی دومارحله‌ای آشنا شدیم: (۱) موازنه اندازه حرکت روی تیغه یا لایه نازکی از ماده، عمود بر جهت انتقال اندازه حرکت نوشته می‌شود که به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول منتهی می‌شود که توزیع شار اندازه حرکت را نشان می‌دهد؛ (۲) سپس قانون ویسکوزیته نیوتون را در عبارت مربوط به شار اندازه حرکت قرار می‌دهیم، که به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای سرعت سیال، به صورت تابعی از مکان منتهی می‌شود. ثابت‌های انتگرال‌گیری که در روابط ظاهر می‌شوند، با استفاده از شرایط مرزی تعیین می‌شوند که سرعت یا شار اندازه حرکت را در سطوح محدودکننده بیان می‌کنند.

در این فصل نحوه حل چند مسئله رسانش گرما از طریق روشی مشابه را نشان می‌دهیم: (۱) موازنه انرژی روی تیغه یا لایه عمود بر امتداد جریان گرما نوشته می‌شود و این موازنه به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول منتهی می‌شود که توزیع شار گرما از آن حاصل می‌شود؛ (۲) سپس قانون رسانش فوریه را در این عبارت شار گرما قرار می‌دهیم، و در نتیجه یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول دما به صورت تابعی از مکان حاصل می‌شود. سپس ثابت‌های انتگرال‌گیری را با استفاده از شرایط مرزی برای دما یا شار گرما در سطوح محدودکننده تعیین می‌کنیم.

از بیان مشابه دو پاراگراف قبل آشکار است که روش‌های ریاضی مورد استفاده در این فصل با روش‌های معرفی شده در فصل ۲ همانندند و فقط نمادگذاری و اصطلاحات آن‌ها متفاوت است. اما در این جا با چند پدیده

فیزیکی روبه‌رو می‌شویم که همتایی در فصل ۲ ندارند.

پس از آشنایی مختصر با موازنه انرژی لایه در بخش ۱۰.۱، تحلیلی از رسانش گرما در چند سیستم ساده ارائه می‌دهیم. اگرچه این مثال‌ها تاحدودی ایده‌آل‌سازی شده‌اند، نتایج آن‌ها در بسیاری از محاسبات استاندارد مهندسی کاربرد پیدا می‌کنند. مسئله‌هایی انتخاب شده‌اند تا خوانندگان مبتدی را با چند مفهوم فیزیکی مهم مرتبط با میدان انتقال گرما آشنا کنند. به‌علاوه، این مسئله‌ها نحوه استفاده از شرایط مرزی مختلف، و حل مسئله در دستگاه‌های مختصات دکارتی، استوانه‌ای، و کروی را نشان می‌دهند. در بخش‌های ۲.۱۰ تا ۵.۱۰ چهار نوع منبع گرما را در نظر می‌گیریم: الکتریکی، هسته‌ای، ویسکوز، و شیمیایی. در بخش‌های ۶.۱۰ و ۷.۱۰ دو موضوع را بررسی می‌کنیم که کاربرد گسترده‌ای دارند: جریان گرما در دیوارهای مرکب و اتلاف گرما در پره‌ها. سرانجام در بخش‌های ۸.۱۰ و ۹.۱۰ دو مورد حدی انتقال گرما در سیال‌های در حال حرکت را تحلیل می‌کنیم: همرفت واداشته و همرفت آزاد. بررسی این موضوع‌ها راه را برای معادله‌های عام در فصل ۱۱ هموار می‌کند.

### ۱۰.۱۰ موازنه‌های لایه‌ای انرژی؛ شرایط مرزی

مسئله‌های تشریح شده در این فصل براساس موازنه لایه‌ای انرژی تنظیم شده‌اند. یک تیغه (یا لایه) انتخاب می‌کنیم که سطوح آن بر امتداد رسانش گرما عمود است و سپس عبارت قانون پایستگی انرژی را برای این سیستم می‌نویسیم. برای سیستم‌های حالت پایا (یعنی مستقل از زمان)، می‌نویسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ خروج انرژی} \\ \text{از طریق انتقال مولکولی} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ ورود انرژی از طریق} \\ \text{انتقال مولکولی} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ خروج انرژی} \\ \text{از طریق انتقال همرفتی} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ ورود انرژی از طریق} \\ \text{انتقال همرفتی} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ تولید انرژی} \\ \text{خارجی} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ انجام کار روی} \\ \text{سیستم از طریق نیروهای} \\ \text{مولکولی} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ انجام کار توسط} \\ \text{سیستم از طریق انتقال} \\ \text{مولکولی} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ انجام کار روی} \\ \text{سیستم از طریق انتقال} \\ \text{مولکولی} \end{array} \right\} = 0 \quad (10.1-1)$$

انتقال همرفتی انرژی در بخش ۷.۹ و انتقال مولکولی (رسانش گرما) در بخش ۱.۹ شرح داده شد. جمله‌های کار مولکولی در بخش ۸.۹ توصیف شدند. این سه جمله را می‌توان باهم جمع کرد تا «شار انرژی مرکب»  $e$  حاصل شود که در معادله (۸.۹-۶) نشان داده شد. در مسئله‌های این فصل (و فصل بعد) از بردار  $e$  همراه با عبارت آنتالپی طبق معادله (۸.۹-۸) استفاده می‌کنیم. توجه کنید که در سیستم‌های غیرجاری (که در آن‌ها  $v$  صفر است)، بردار  $e$  به بردار  $q$  ساده می‌شود که از قانون فوریه به‌دست می‌آید.

جمله تولید انرژی در معادله (۱۰.۱-۱) شامل بخش‌های زیر است: (۱) تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی، (۲) گرمای تولیدشده از طریق کاهش سرعت نوترون‌ها و اجزای هسته‌ای آزادشده در فرایند شکافت، (۳) گرمای تولیدشده توسط اتلاف ویسکوز، و (۴) گرمای تولیدشده در واکنش‌های شیمیایی. منبع گرمای واکنش شیمیایی را در فصل ۱۹ شرح خواهیم داد. معادله (۱۰.۱-۱) قانون اول ترمودینامیک است که برای سیستم «باز» در شرایط حالت پایا نوشته شده‌است. در فصل ۱۱ همین عبارت که به سیستم‌های حالت ناپایا تعمیم داده شده‌است، به‌صورت معادله تغییر نوشته می‌شود.

پس از نوشتن معادله (۱۰.۱-۱) برای تیغه یا لایه نازکی از ماده، ضخامت تیغه یا لایه به‌سمت صفر میل داده می‌شود. این روش سرانجام به عبارتی برای توزیع دما، حاوی ثابت‌های انتگرال‌گیری منتهی می‌شود که آن‌ها را با استفاده از شرایط مرزی محاسبه می‌کنیم. انواع متداول شرایط مرزی عبارت‌اند از:

(الف) دما را می‌توان روی سطح مشخص کرد؛

(ب) شار گرمای قائم بر سطح می‌تواند معلوم باشد (این شرط هم‌ارز است با تعیین مؤلفه قائم گرادیان دما)؛

(ج) در فصل مشترک‌ها باید دما و شار گرمای قائم بر فصل مشترک پیوسته باشند؛

(د) در فصل مشترک جامد-سیال، مؤلفه شار گرمای قائم را می‌توان به اختلاف بین دمای سطح سیال  $T_0$  و دمای «توده» سیال  $T_b$  مربوط کرد:

$$q = h(T_0 - T_b) \quad (۲-۱.۱۰)$$

این رابطه را قانون سرمایش نیوتون می‌نامند. این رابطه واقعا «قانون» نیست، بلکه معادله معرف  $h$  است که ضریب انتقال گرما نامیده می‌شود. فصل ۱۴ به روش‌های تخمین ضرایب انتقال گرما اختصاص دارد.

در این فصل با هر چهار نوع شرط مرزی سروکار پیدا می‌کنیم. انواع دیگر شرایط مرزی نیز وجود دارد، که در زمان نیاز آن‌ها را معرفی خواهیم کرد.

### ۲.۱۰ رسانش گرما با منبع گرمای الکتریکی

نخستین سیستمی که بررسی می‌کنیم یک سیم برق با مقطع مدور به شعاع  $R$  و رسانندگی الکتریکی  $k_e \text{ ohm}^{-1} \text{ cm}^{-1}$  است. از این سیم جریانی الکتریکی با چگالی  $I \text{ amp/cm}^2$  می‌گذرد. انتقال جریان الکتریکی فرایندی برگشت‌ناپذیر است و بخشی از انرژی الکتریکی به گرما (انرژی گرمایی) تبدیل می‌شود. آهنگ تولید گرما در واحد حجم از عبارت زیر به دست می‌آید:

$$S_e = \frac{I^2}{k_e} \quad (۱-۲.۱۰)$$

کمیت  $S_e$  منبع گرمای حاصل از اتلاف الکتریکی است. در این جا فرض می‌کنیم که افزایش دما در سیم به اندازه‌ای زیاد نیست که لازم باشد وابستگی دمایی رسانندگی گرمایی یا الکتریکی را در نظر گرفت. سطح سیم در دمای  $T_0$  نگه داشته می‌شود. حال نحوه یافتن توزیع شعاعی دما در داخل سیم را نشان می‌دهیم. برای موازنه انرژی فرض می‌کنیم سیستم لایه‌ای استوانه‌ای به ضخامت  $\Delta r$  و طول  $L$  باشد (نگاه کنید به شکل ۱-۲.۱۰). چون در این سیستم  $\nu = 0$ ، تنها سهم‌هایی که در موازنه انرژی نقش دارند، عبارت‌اند از:

(۲-۲.۱۰) آهنگ ورود گرما از سطح استوانه‌ای در  $r$ :

$$(\nu \pi r L)(q_r|_r) = (\nu \pi r L q_r)|_r$$

(۳-۲.۱۰) آهنگ خروج گرما از سطح استوانه‌ای در  $r + \Delta r$ :

$$(\nu \pi (r + \Delta r) L)(q_r|_{r+\Delta r}) = (\nu \pi r L q_r)|_{r+\Delta r}$$

(۴-۲.۱۰) آهنگ تولید انرژی گرمایی از طریق اتلاف الکتریکی:

$$(\nu \pi r \Delta r L) S_e$$

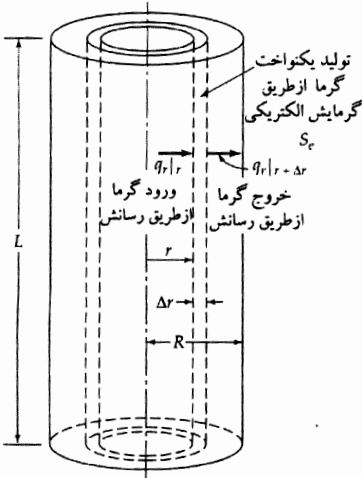
نماد  $q_r$  یعنی «شار گرما درامداد»  $(\dots)|_{r+\Delta r}$  یعنی «تعیین شده در  $r + \Delta r$ ». توجه کنید که «ورود» و «خروج» را در جهت مثبت  $r$  می‌گیریم.

اکنون این کمیت‌ها را در موازنه انرژی، معادله (۱-۱.۹)، قرار می‌دهیم. با تقسیم بر  $\nu \pi L \Delta r$  و گرفتن حد وقتی  $\Delta r$  به سمت صفر میل می‌کند، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(r q_r)|_{r+\Delta r} - (r q_r)|_r}{\Delta r} = S_e r \quad (۵-۲.۱۰)$$

عبارت واقع در سمت چپ مشتق اول  $rq_r$  نسبت به  $r$  است، به طوری که معادله (۵-۲.۱۰) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dr}(rq_r) = S_e r \quad (۶-۲.۱۰)$$



شکل ۱-۲.۱۰ سیمی که بر اثر عبور جریان الکتریکی گرم شده است و لایه استوانه‌ای که موازنه انرژی روی آن نوشته می‌شود.

این معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای شار انرژی است و با انتگرال‌گیری از آن نتیجه می‌شود:

$$q_r = \frac{S_e r}{2} + \frac{C_1}{r} \quad (۷-۲.۱۰)$$

ثابت انتگرال‌گیری  $C_1$  باید صفر باشد، زیرا شرط مرزی ایجاب می‌کند که:

شرط مرزی ۱: در  $r = 0$ ،  $q_r$  نامتناهی نیست. (۸-۲.۱۰)

بنابراین عبارت نهایی برای توزیع شار گرما عبارت است از:

$$q_r = \frac{S_e r}{2} \quad (۹-۲.۱۰)$$

این معادله نشان می‌دهد که شار گرما با  $r$  به طور خطی افزایش می‌یابد.

اکنون قانون فوریه را به صورت  $q_r = -k(dT/dr)$  (نگاه کنید به معادله (ب-۲.۴)) در معادله (۹-۲.۱۰) قرار

می‌دهیم تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$-k \frac{dT}{dr} = \frac{S_e r}{2} \quad (۱۰-۲.۱۰)$$

وقتی  $k$  ثابت فرض شود، می‌توان از این معادله دیفرانسیل مرتبه اول انتگرال گرفت تا نتیجه شود:

$$T = -\frac{S_e r^2}{4k} + C_2 \quad (۱۱-۲.۱۰)$$

ثابت انتگرال‌گیری از شرط مرزی زیر به دست می‌آید:

شرط مرزی ۲: در  $r = R$ ، داریم  $T = T_0$ . (۱۲-۲.۱۰)

بنابراین  $C_2 = (S_e R^2 / 4k) + T_0$ ، و معادله (۱۱-۲.۱۰) چنین نوشته می‌شود:

$$T - T_0 = \frac{S_e R^2}{4k} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (۱۳-۲.۱۰)$$

معادله (۱۳-۲۰۱۰) افزایش دما را به صورت تابعی سهموی از فاصله  $r$  از محور سیم نشان می‌دهد. وقتی توزیع دما و شار گرما معلوم شد، می‌توان اطلاعات مختلفی در مورد سیستم به دست آورد: (i) افزایش دمای ماکزیمم (در  $r = 0$ ):

$$T_{\max} - T_0 = \frac{S_e R^2}{4k} \quad (14-2010)$$

(ii) افزایش دمای متوسط:

$$\langle T \rangle - T_0 = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R (T(r) - T_0) r \, dr \, d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\theta} = \frac{S_e R^2}{8k} \quad (15-2010)$$

بنابراین افزایش دمای متوسط‌گیری شده روی مقطع، نصف افزایش دمای ماکزیمم است. (iii) جریان خروجی گرما از سطح (برای طول  $L$  سیم):

$$Q|_{r=R} = 2\pi RL \cdot q_r|_{r=R} = 2\pi RL \cdot \frac{S_e R}{4} = \pi R^2 L \cdot S_e \quad (16-2010)$$

این نتیجه عجیب نیست، زیرا در حالت پایا، همه گرمای تولیدشده در نتیجه اتلاف الکتریکی در حجم  $\pi R^2 L$  باید از سطح  $r = R$  عبور کند.

خواننده، ضمن دنبال کردن این مسیر، ممکن است با آن احساس آشنایی کند. به‌رحال شباهت زیادی بین مسئله سیم داغ‌شده و جریان ویسکوز در لولهٔ مدور وجود دارد. تنها نماندگاری متفاوت است:

	سیم داغ	جریان در لوله
از انتگرال‌گیری اول نتیجه می‌شود	$q_r(r)$	$\tau_{rz}(r)$
از انتگرال‌گیری دوم نتیجه می‌شود	$T(r) - T_0$	$v_z(r)$
مقدار متناهی $q_r =$		مقدار متناهی $\tau_{rz} =$
شرط مرزی در $r = 0$	$T - T_0 = 0$	$v_z = 0$
شرط مرزی در $r = R$		
خاصیت انتقال	$k$	$\mu$
جملهٔ منبع	$S_e$	$(P_0 - P_L)/L$
مقدار ثابت $k, k_e =$		مقدار ثابت $\mu =$

یعنی، وقتی کمیت‌ها به درستی انتخاب شوند، معادله‌های دیفرانسیل و شرایط مرزی برای دو مسئله همانندند و گفته می‌شود که فرایندهای فیزیکی «نظیر»ند. همهٔ مسئله‌های انتقال اندازه حرکت، نظیری در انتقال انرژی و جرم ندارند. اما وقتی چنین نظایری را بتوان یافت، ممکن است در استفاده از نتایج معلوم یک حوزه و کاربرد آن‌ها در حوزه‌ای دیگر، سودمند واقع شوند. مثلاً خواننده باید بتواند نظیر رسانش گرما را برای جریان ویسکوز در فیلمی از مایع روی صفحه‌ای شیب‌دار به‌آسانی پیدا کند.

مثال‌های بسیاری از مسئله‌های رسانش گرما در صنعت برق وجود دارد.<sup>۱</sup> حداقل‌سازی دما در ماشین‌های الکتریکی سبب افزایش طول عمر عایق‌کاری می‌شود. به‌عنوان نمونه می‌توان از کاربرد رساناهای استاتور مایع-خنک در مولدهای AC بسیار بزرگ (۵۰۰۰۰۰ kW) نام برد.

برای نشان دادن مسئله‌های بیش‌تری در گرمایش الکتریکی، دو مثال از افزایش دما در سیم‌ها ارائه می‌کنیم: مثال نخست مرتبهٔ بزرگی اثر گرمایش، و مثال دوم نحوهٔ برخورد با شرایط مرزی مختلف را نشان می‌دهد. به‌علاوه، در مسئلهٔ ۱۰-ج ۲ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان وابستگی دمایی رسانندگی‌های گرمایی و الکتریکی را به حساب آورد.

1. M. Jakob, *Heat Transfer*, Vol. 1, Wiley, New York (1949), Chapter 10, pp. 167-199.



مثال ۱۰-۲

ولتاژ لازم برای افزایش دمای مفروض در سیم گرم شده بر اثر جریان الکتریکی شعاع یک سیم مسی ۲ mm و طول آن ۵ m است. به‌ازای چه مقدار افت ولتاژ، افزایش دما در محور سیم  $10^{\circ}\text{C}$  خواهد بود، هرگاه دمای سطح سیم  $20^{\circ}\text{C}$  باشد.

حل

از ترکیب معادله‌های (۱۴-۲.۱۰) و (۱۰-۲.۱۰) نتیجه می‌شود:

$$T_{\max} - T_0 = \frac{I^2 R^{\prime}}{4 k k_e} \quad (17-2.10)$$

رابطه چگالی جریان با افت ولتاژ  $E$  در طول  $L$  عبارت است از:

$$I = k_e \frac{E}{L} \quad (18-2.10)$$

بنابراین:

$$T_{\max} - T_0 = \frac{E^2 R^{\prime}}{4 L^2} \left( \frac{k_e}{k} \right) \quad (19-2.10)$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$E = 2 \frac{L}{R} \sqrt{\frac{k}{k_e T_0} (T_{\max} - T_0)} \quad (20-2.10)$$

برای مس، عدد لورنتس در بخش ۵.۹ برابر است با  $5.9 \times 10^{-8} \text{ volt}^2 / \text{K}^2$ . بنابراین، افت ولتاژ لازم برای ایجاد  $10^{\circ}\text{C}$  افزایش دما برابر است با:

$$E = 2 \left( \frac{5000 \text{ mm}}{2 \text{ mm}} \right) \sqrt{2.723 \times 10^{-8} \frac{\text{ولت}}{\text{K}}} \sqrt{(293)(10)} \text{K} \\ = (5000)(1.749 \times 10^{-4})(54.1) = 40 \text{ ولت} \quad (21-2.10)$$

مثال ۱۰-۲

سیم داغ با ضریب انتقال گرما و دمای هوای مفروض برای محیط تحلیل بخش  $2.10$  را، با فرض مجهول بودن  $T_0$  دوباره انجام دهید، اما این بار شار گرما در جدار سیم، با «قانون سرمایه‌ش» نیوتون (معادله (۲-۱.۱۰)) داده شده است. فرض کنید ضریب انتقال گرما،  $h$ ، و دمای هوای محیط،  $T_{\infty}$ ، معلوم است.

حل:

این مثال را، مثل مثال قبل، با استفاده از معادله (۱۱-۲.۱۰) حل می‌کنیم، اما دومین ثابت انتگرال‌گیری را از معادله (۲-۱.۱۰) به‌دست می‌آوریم:

$$-k \frac{dT}{dr} = h(T - T_{\infty}) \quad \text{در } r = R \text{، داریم: } T = T_0 \\ \text{با قرار دادن معادله (۱۱-۲.۱۰) در معادله (۲۲-۲.۱۰)، نتیجه می‌شود:}$$

$$C_T = (S_e R / 2h) + (S_e R^2 / 4k) + T_{\infty}$$

و بنابراین توزیع دما چنین است:

$$T - T_{\infty} = \frac{S_e R^2}{4k} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] + \frac{S_e R}{2h} \quad (23-2.10)$$

با استفاده از این رابطه، دمای سیم برابر  $T_{وا} + S_e R / 2h$  به دست می‌آید.  
حل ۲:

در روشی دیگر برای حل این مسئله از نتیجه‌ای که قبلاً به صورت معادله (۱۳-۲.۱۰) به دست آمد استفاده می‌کنیم. اگرچه  $T_e$  در این مسئله معلوم نیست، باز هم می‌توانیم از این نتیجه استفاده کنیم. از معادله‌های (۲-۱.۱۰) و (۱۶-۲.۱۰) می‌توانیم اختلاف دما را به دست آوریم:

$$T_e - T_{وا} = \frac{\pi R^2 L S_e}{h(2\pi R L)} = \frac{S_e R}{2h} \quad (24-2.10)$$

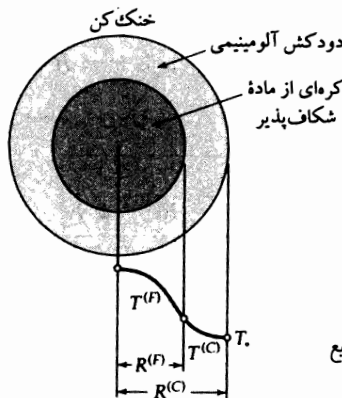
با جمع کردن معادله‌های (۲۴-۲.۱۰) و (۱۳-۲.۱۰) می‌توانیم مجهول  $T_e$  را حذف کنیم و معادله (۲۳-۲.۱۰) را به دست آوریم.

### ۳.۱۰ رسانش گرما با منبع گرمای هسته‌ای

یک جزء سوخت هسته‌ای کروی را مطابق شکل ۱-۳.۱۰ در نظر می‌گیریم. این جزء از گره‌ای از ماده شکافت‌پذیر به شعاع  $R^{(F)}$  تشکیل می‌شود که لایه‌ای کروی از آلومینیم به نام «روکش»، با شعاع خارجی  $R^{(C)}$ ، آن را احاطه کرده است. در داخل این جزء سوخت شکافت‌پاره‌هایی تولید می‌شوند که انرژی جنبشی بسیار بالایی دارند. برخورد بین این پاره‌ها و اتم‌های ماده شکافت‌پذیر منبع اصلی انرژی گرمایی در رآکتور است. این منبع حجمی انرژی گرمایی حاصل از شکافت را  $S_n$  ( $\text{cal/cm}^3 \cdot \text{s}$ ) می‌نامیم. این منبع در سراسر گره ماده شکافت‌پذیر یکنواخت نخواهد بود؛ در مرکز گره کوچک‌تر از همه جاست. در این مسئله فرض می‌کنیم که می‌توان این منبع را با تابع سهموی ساده زیر تقریب زد:

$$S_n = S_{n0} \left[ 1 + b \left( \frac{r}{R^{(F)}} \right)^2 \right] \quad (1-3.10)$$

در این جا  $S_{n0}$  آهنگ حجمی تولید گرما در مرکز گره، و  $b$  یک مقدار ثابت مثبت بدون بعد است.



۱-۳.۱۰ مجموعه سوخت هسته‌ای کروی، که توزیع دما در سیستم را نشان می‌دهد.

لایه‌ای کروی به ضخامت  $\Delta r$ ، در داخل گره ماده شکافت‌پذیر، به عنوان سیستم انتخاب می‌کنیم. چون سیستم در حرکت نیست، موازنه انرژی فقط از جمله‌های رسانش گرما و یک جمله مربوط به منبع تشکیل می‌شود. سهم‌های مختلف دخیل در موازنه انرژی برابرند با:

$$q_r^{(F)}|_r \cdot 4\pi r^2 = (4\pi r^2 q_r^{(F)})|_r \quad (2-3.10) \quad \text{آهنگ ورود گرما از طریق رسانش در } r:$$

(۳-۳.۱۰) آهنگ خروج گرما از طریق رسانش در  $r + \Delta r$ :

$$q_r^{(F)}|_{r+\Delta r} \cdot 4\pi(r + \Delta r)^2 = (4\pi r^2 q_r^{(F)})|_{r+\Delta r}$$

(۴-۳.۱۰) آهنگ تولید انرژی گرمایی از طریق شکافت هسته‌ای:

$$S_n \cdot 4\pi r^2 \Delta r$$

با قرار دادن این جمله‌ها در موازنه انرژی معادله (۱-۱.۱۰)، پس از تقسیم بر  $4\pi\Delta r$  و گرفتن حد، وقتی  $\Delta r \rightarrow 0$  نتیجه می‌شود:

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(r^2 q_r^{(F)})|_{r+\Delta r} - (r^2 q_r^{(F)})|_r}{\Delta r} = S_n r^2 \quad (5-3.10)$$

با گرفتن حد و قرار دادن این عبارت در معادله (۱-۳.۱۰)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dr}(r^2 q_r^{(F)}) = S_n \cdot \left[ 1 + b \left( \frac{r}{R^{(F)}} \right)^2 \right] r^2 \quad (6-3.10)$$

معادله دیفرانسیل شارگرما  $q_r^{(C)}$  در روکش آلومینیومی صورتی همانند معادله (۶-۳.۱۰) دارد، با این تفاوت که جمله منبع با اهمیتی وجود ندارد:

$$\frac{d}{dr}(r^2 q_r^{(C)}) = 0 \quad (7-3.10)$$

با انتگرال‌گیری از این دو معادله نتیجه می‌شود:

$$q_r^{(F)} = s_n \cdot \left( \frac{r}{3} + \frac{b}{R^{(F)^2} \delta} r^2 \right) + \frac{C_1^{(F)}}{r^2} \quad (8-3.10)$$

$$q_r^{(C)} = + \frac{C_1^{(C)}}{r^2} \quad (9-3.10)$$

که در آن  $C_1^{(F)}$  و  $C_1^{(C)}$  ثابت‌های انتگرال‌گیری‌اند. این ثابت‌ها با استفاده از شرایط مرزی محاسبه می‌شوند:

(۱۰-۳.۱۰) شرط مرزی ۱: در  $r = 0$ ،  $q_r^{(F)}$  نامتناهی نیست.

(۱۱-۳.۱۰) شرط مرزی ۲: در  $r = R^{(F)}$  داریم  $q_r^{(F)} = q_r^{(C)}$ .

محاسبه این ثابت‌ها به نتیجه زیر منتهی می‌شود:

$$q_r^{(F)} = S_n \cdot \left( \frac{r}{3} + \frac{b}{R^{(F)^2} \delta} r^2 \right) \quad (12-3.10)$$

$$q_r^{(C)} = S_n \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{b}{\delta} \right) \frac{R^{(F)^2}}{r^2} \quad (13-3.10)$$

روابط بالا توزیع شار در کره شکافت‌پذیر و روکش لایه‌ای کروی آن را نشان می‌دهند. اکنون قانون رسانش گرمای فوریه (معادله ب. ۷-۲) را در این روابط قرار می‌دهیم:

$$-k^{(F)} \frac{dT^{(F)}}{dr} = S_n \cdot \left( \frac{r}{3} + \frac{b}{R^{(F)^2} \delta} r^2 \right) \quad (14-3.10)$$

$$-k^{(C)} \frac{dT^{(C)}}{dr} = S_n \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{b}{\delta} \right) \frac{R^{(F)^2}}{r^2} \quad (15-3.10)$$

برای یافتن  $k^{(F)}$  و  $k^{(C)}$  از این معادله‌ها انتگرال می‌گیریم:

$$T^{(F)} = -\frac{S_{n \cdot}}{k^{(F)}} \left( \frac{r^2}{\delta} + \frac{b}{R^{(F)2}} \frac{r^4}{2} \right) + C_1^{(F)} \quad (۱۶-۳.۱۰)$$

$$T^{(C)} = +\frac{S_{n \cdot}}{k^{(C)}} \left( \frac{1}{3} + \frac{b}{\delta} \right) \frac{R^{(F)2}}{r} + C_1^{(C)} \quad (۱۷-۳.۱۰)$$

ثابت‌های انتگرال‌گیری با استفاده از شرایط مرزی تعیین می‌شوند:

$$T^{(F)} = T^{(C)} \quad \text{شرط مرزی ۳: در } r = R^{(F)} \quad (۱۸-۳.۱۰)$$

$$T^{(C)} = T_0 \quad \text{شرط مرزی ۴: در } r = R^{(C)} \quad (۱۹-۳.۱۰)$$

که در آن  $T_0$  دمای معلوم در بیرون روکش است. عبارت‌های نهایی برای توزیع دما عبارت‌اند از:

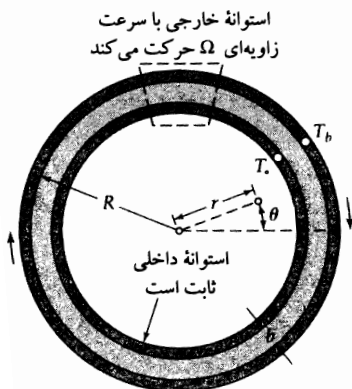
$$T^{(F)} = \frac{S_{n \cdot} R^{(F)2}}{\delta k^{(F)}} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{r}{R^{(F)}} \right)^2 \right] + \frac{3}{10} b \left[ 1 - \left( \frac{r}{R^{(F)}} \right)^4 \right] \right\} + \frac{S_{n \cdot} R^{(F)2}}{3k^{(C)}} \left( 1 + \frac{3}{\delta} b \right) \left( \frac{R^{(F)}}{R^{(C)}} \right) + T_0 \quad (۲۰-۳.۱۰)$$

$$T^{(C)} = \frac{S_{n \cdot} R^{(F)2}}{3k^{(C)}} \left( 1 + \frac{3}{\delta} b \right) \left( \frac{R^{(F)}}{r} - \frac{R^{(F)}}{R^{(C)}} \right) + T_0 \quad (۲۱-۳.۱۰)$$

برای یافتن دمای ماکزیمم در کره ماده شکافت‌پذیر، کافی است در معادله (۲۰-۳.۱۰) مقدار  $r$  را صفر بگیریم. این کمیتی است که در هنگام تخمین زدن تنزل گرمایی خواستار اطلاع از آن هستیم. این مسئله دو نکته را نشان داد: (۱) نحوه برخورد با جمله منبع وابسته به مکان، و (۲) کاربرد پیوستگی دما و شار گرمای قائم در مرز بین دو ماده جامد.

### ۴.۱۰ رسانش گرما با منبع گرمای ویسکوز

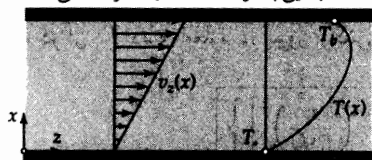
سپس جریان یک سیال نیوتونی تراکم‌ناپذیر بین دو استوانه هم‌محور را، مطابق شکل ۱-۴.۱۰، در نظر می‌گیریم. سطوح استوانه‌های داخلی و خارجی، به ترتیب، در دماهای  $T = T_0$  و  $T = T_b$  نگه داشته می‌شوند. می‌توان انتظار داشت که  $T$  فقط تابع  $r$  خواهد بود.



شکل ۱-۴.۱۰ جریان بین استوانه‌هایی با تولید گرمای ویسکوز. بخشی از سیستم که بین خطوط نقطه‌چین محصور شده، در شکل ۲-۴.۱۰ به صورت اصلاح شده نشان داده شده است.

با چرخش استوانه خارجی، هر لایه استوانه‌ای از سیال به لایه مجاور سیال «مالیده» می‌شود. اصطکاک بین لایه‌های مجاور سیال سبب تولید گرما می‌شود؛ یعنی انرژی مکانیکی به انرژی گرمایی تنزل می‌یابد. وقتی از بردار شار انرژی مرکب  $e$  که در پایان فصل ۹ تعریف شد استفاده کنیم، منبع گرمای حجمی حاصل از این «اتلاف ویسکوز»، که می‌توان آن را با  $S_v$  نشان داد، به‌طور خودکار در موازنه لایه‌ای پدیدار می‌شود؛ چگونگی آن را نشان خواهیم داد. اگر  $b$ ، پهنای شکاف، در مقایسه با شعاع  $R$  استوانه خارجی کوچک باشد، آن‌گاه مسئله را می‌توان به‌طور تقریبی و با استفاده از سیستم تاحدی ساده‌شده نشان داده‌شده در شکل ۲-۴.۱۰ حل کرد. یعنی، از آثار انحنا چشم‌پوشی، و مسئله را در دستگاه مختصات دکارتی حل می‌کنیم. بنابراین توزیع سرعت برابر است با:  $v_z = v_b(x/b)$  که در آن  $v_b = \Omega R$ .

صفحه بالایی با سرعت  $v_b = R\Omega$  حرکت می‌کند



صفحه ثابت

شکل ۲-۴.۱۰ بخشی از سیستم جریان شکل ۱-۴.۱۰، که در آن از انحنا سطوح محدودکننده چشم‌پوشی شده‌است.

اکنون موازنه انرژی روی لایه‌ای به ضخامت  $\Delta x$ ، پهنای  $W$ ، و طول  $L$  را می‌نویسیم. چون سیال در حال حرکت است، از بردار شار انرژی مرکب  $e$  به‌صورت معادله (۶-۸.۹) استفاده می‌کنیم. از موازنه انرژی نتیجه می‌شود:

$$WLe_x|_x - WLe_x|_{x+\Delta x} = 0 \quad (۱-۴.۱۰)$$

با تقسیم کردن بر  $WL\Delta x$  و میل دادن ضخامت لایه،  $\Delta x$ ، به سمت صفر، نتیجه می‌شود:

$$\frac{de_x}{dx} = 0 \quad (۲-۴.۱۰)$$

می‌توان از این معادله انتگرال گرفت تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$e_x = C_1 \quad (۳-۴.۱۰)$$

چون شرایط مرزی  $e_x$  را نمی‌دانیم، نمی‌توانیم ثابت انتگرال‌گیری را در این جا تعیین کنیم.

حال عبارت  $e_x$  را از معادله (۶-۸.۹) قرار می‌دهیم. چون مؤلفه سرعت در جهت  $x$  صفر است، جمله  $\mathbf{v}(\frac{1}{\rho} \rho v^2 + \rho \tilde{U})$  را می‌توان حذف کرد. طبق قانون فوریه، مؤلفه  $x$  بردار  $\mathbf{q}$  عبارت است از:  $-k(dT/dx)$ . مؤلفه  $x$  جمله  $[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]$ ، مطابق معادله (۱-۸.۹) عبارت است از:  $\tau_{xx}v_x + \tau_{xy}v_y + \tau_{xz}v_z$ . چون تنها مؤلفه غیرصفر سرعت  $v_z$  است و چون طبق قانون ویسکوزیته نیوتون  $\tau_{xz} = -\mu(dv_z/dx)$ ، مؤلفه  $x$  جمله  $[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]$  برابر است با:  $-\mu v_z(dv_z/dx)$ . نتیجه می‌گیریم که معادله (۳-۴.۱۰) چنین نوشته می‌شود:

$$-k \frac{dT}{dx} - \mu v_z \frac{dv_z}{dx} = C_1 \quad (۴-۴.۱۰)$$

وقتی توزیع سرعت خطی  $v_z = v_b(x/b)$  را جایگزین کنیم، نتیجه می‌شود:

$$-k \frac{dT}{dx} - \mu x \left(\frac{v_b}{b}\right)^2 = C_1 \quad (۵-۴.۱۰)$$

که در آن  $\mu(v_b/b)^2$  می‌توان آهنگ تولید گرمای ویسکوز در واحد حجم  $S_v$  دانست.

وقتی از معادله (۵-۴.۱۰) انتگرال‌گیری شود، داریم:

$$T = -\left(\frac{\mu}{k}\right) \left(\frac{v_b}{b}\right)^2 \frac{x^2}{2} - \frac{C_1}{k}x + C_2 \quad (۶-۴.۱۰)$$

دو ثابت انتگرال‌گیری با استفاده از شرایط مرزی تعیین می‌شوند:

$$T = T_0 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } x = 0 \text{، داریم} \quad (۷-۴.۱۰)$$

$$T = T_b \quad \text{شرط مرزی ۲: در } x = b \text{، داریم} \quad (۸-۴.۱۰)$$

سرانجام، به‌ازای  $T_b \neq T_0$  نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{T - T_0}{T_b - T_0}\right) = \frac{1}{2} Br \frac{x}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right) + \frac{x}{b} \quad (۹-۴.۱۰)$$

در این‌جا  $Br = \mu v_b^2 / k(T_b - T_0)$  عدد بدون بُعد برینکمن است<sup>۱</sup>، که معیاری است از اهمیت جمله اتلاف ویسکوز. اگر  $T_b = T_0$ ، آن‌گاه معادله (۹-۴.۱۰) را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{T - T_0}{T} = \frac{1}{2} \frac{\mu v_b^2}{kT} \frac{x}{b} \left(1 - \frac{x}{b}\right) \quad (۱۰-۴.۱۰)$$

و دمای ماکزیمم در  $x/b = \frac{1}{2}$  ایجاد می‌شود.

اگر افزایش دما درخور اعتنا باشد، وابستگی دمایی ویسکوزیته را باید به‌حساب آورد. این موضوع در مسئله ۱۰.ج مطرح می‌شود.

جمله گرمایش ویسکوز  $S_v = \mu(v_b/b)^2$  را می‌توان با استدلال زیر درک کرد. برای سیستم نشان‌داده‌شده در شکل ۲-۴.۱۰، آهنگ انجام کار برابر است با نیروی وارد بر صفحه بالایی ضرب در سرعت حرکت، یا  $(-\tau_{xz}WL)(v_b)$ . سپس آهنگ افزایش انرژی در واحد حجم با تقسیم کردن این کمیت بر  $WLB$  به‌دست می‌آید و نتیجه می‌شود  $(-\tau_{xz}v_b/b) = \mu(v_b/b)^2$ . همه این انرژی به‌صورت گرما ظاهر می‌شود و بنابراین  $S_v$  است.

در اغلب مسئله‌های جریان، گرمایش ویسکوز اهمیت ندارد. اما اگر گرادیان سرعت بزرگ باشد، نمی‌توان از گرمایش ویسکوز چشم‌پوشی کرد. نمونه‌هایی از وضعیت‌هایی که در آن‌ها باید گرمایش ویسکوز را به‌حساب آورد عبارت‌اند از: (۱) جریان روانکار بین قطعاتی که با سرعت حرکت می‌کنند، (۲) جریان پلیمرهای مذاب که در روزن‌رانی سریع از حذیده عبور می‌کنند، (۳) جریان سیالات بسیار ویسکوز در ویسکوزیته‌سنج‌های پرسرعت، و (۴) جریان هوا در لایه مرزی نزدیک ماهواره یا موشک در حین برگشت به جو زمین. دو وضعیت نخست پیچیدگی بیش‌تری دارند، زیرا روانکارها و پلاستیک‌های مذاب، سیالات غیرنیوتونی‌اند. گرمایش ویسکوز برای سیالات غیرنیوتونی در مسئله ۱۰.ب.۵ نشان داده شده‌است.

## ۵.۱۰ رسانش گرما با منبع گرمای شیمیایی

در یک رآکتور لوله‌ای با جریان بسترثابت به‌شعاع داخلی  $R$ ، مطابق شکل ۱۰-۵.۱۰، واکنشی شیمیایی انجام می‌شود.

I. H. C. Brinkman, *Appl. Sci. Research*, **A2**, 120-124 (1951)

او مسئله گرمایش اتلافی ویسکوز را برای جریان پویازوی در لوله مدور حل کرد. سایر گروه‌های بدون بعدی که می‌توان برای مشخص کردن گرمایش ویسکوز به‌کار برد در منبع زیرگردآوری شده‌اند:

R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1, 2nd edition, Wiley, New York (1987), pp. 207-208.

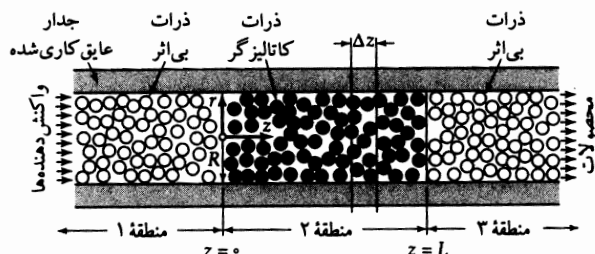
راکتور از  $z = -\infty$  تا  $z = +\infty$  امتداد دارد و به سه منطقه تقسیم می‌شود:

منطقه ۱: منطقه ورودی پر شده با کره‌های غیرکاتالیزگر

منطقه ۲: منطقه واکنش، پر شده با کره‌های کاتالیزگر، که از  $z = 0$  تا  $z = L$  امتداد دارد

منطقه ۳: منطقه خروجی پر شده با کره‌های غیرکاتالیزگر

فرض می‌شود که سیال با «جریان قالبی» در لوله راکتور حرکت می‌کند، یعنی با سرعت محوری یکنواخت با مقدار ظاهری  $v_0 = w/\pi R^2 \rho$  (برای اطلاع از تعریف «سرعت ظاهری» به متن زیر معادله (۱-۴.۶) رجوع کنید). چگالی، آهنگ جریان جرمی، و سرعت ظاهری را مستقل از  $r$  و  $z$  فرض می‌کنیم. به علاوه، فرض می‌شود جدار راکتور به خوبی عایق‌کاری شده است، به طوری که می‌توان دما را اساساً مستقل از  $r$  فرض کرد. می‌خواهیم توزیع دمای محوری حالت پایای  $T(z)$  را، وقتی سیال در  $z = -\infty$ ، با دمای یکنواخت  $T_1$  وارد می‌شود، تعیین کنیم.



شکل ۱۰-۵. راکتور جریان محوری بستر ثابت. واکنش‌دهنده‌ها در  $z = -\infty$  وارد می‌شوند. منطقه واکنش از  $z = 0$  تا  $z = L$  ادامه دارد.

وقتی واکنشی شیمیایی رخ می‌دهد، درحین تغییر آرایش مولکول‌های واکنش‌دهنده برای تشکیل محصولات، انرژی گرمایی تولید یا مصرف می‌شود. آهنگ حجمی تولید انرژی گرمایی از طریق واکنش شیمیایی،  $S_c$ ، به طور کلی تابع پیچیده‌ای از فشار، دما، ترکیب شیمیایی، و فعالیت کاتالیزگر است. برای ساده شدن کار، در این جا  $S_c$  را فقط تابع دما تلقی می‌کنیم:  $S_c = S_{c1} F(\Theta)$ ، که در آن  $\Theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ . در این رابطه  $T$  دمای موضعی در بستر کاتالیزگر است (که برای کاتالیزگر و سیال مساوی فرض می‌شود)، و  $S_{c1}$  و  $T_0$  ثابت‌های تجربی برای شرایط مفروض ورودی راکتورند.

برای موازنه لایه‌ای، دیسکی به شعاع  $R$  و ضخامت  $\Delta z$  را در منطقه کاتالیزگر انتخاب می‌کنیم (نگاه کنید به شکل ۱۰-۵.۱).  $\Delta z$  را بسیار بزرگ‌تر از ابعاد ذره کاتالیزگر در نظر می‌گیریم. در نوشتن موازنه انرژی، وقتی با سیستم جریان سروکار داشته باشیم، از بردار شار انرژی مرکب  $e$  استفاده می‌کنیم. سپس، در حالت ثابت، موازنه انرژی برابر است با:

$$\pi R^2 e_z|_z - \pi R^2 e_z|_{z+\Delta z} + (\pi R^2 \Delta z) S_c = 0 \quad (10-5.1)$$

سپس این عبارت را بر  $\pi R^2 \Delta z$  تقسیم می‌کنیم و وقتی  $\Delta z$  به سمت صفر میل می‌کند، حد می‌گیریم. به بیان دقیق، این عمل «قانونی» نیست، زیرا با پیوستار سروکار نداریم، بلکه سروکار ما با ساختاری دانای است. به هر حال با درک این نکته که معادله حاصل مقادیر متوسط  $e_z$  و  $S_c$  را برای سطح مقطع ثابت  $z$  راکتور توصیف می‌کند، نه مقادیر نقطه‌ای آن‌ها را، این فرایند حدگیری را انجام می‌دهیم. در نتیجه:

$$\frac{de_z}{dz} = S_c \quad (10-5.2)$$

حال مؤلفه  $z$  معادله (۱۰-۵.۹) را در این معادله قرار می‌دهیم تا نتیجه شود:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\gamma} \rho v^2 + \rho \hat{H} \right) v_z + \tau_{zz} v_z + q_z = S_c \quad (10-5.3)$$

اکنون از قانون فوریه برای  $q_z$ ، از معادله (۶-۲.۱) برای  $\tau_{zz}$ ، و از عبارت آنتالپی در معادله (۸-۸.۹) (با فرض این که ظرفیت گرمایی ثابت است) استفاده می‌کنیم تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\gamma} \rho v_z^2 v_z + \rho \hat{C}_p (T - T^\circ) v_z + (p - p^\circ) v_z + \rho \hat{H}^\circ v_z - 2\mu v_z - 2\mu v_z \frac{dv_z}{dz} - \kappa_{\text{eff},zz} \frac{dT}{dz} \right) = S_c \quad (۴-۵.۱۰)$$

که در آن از رسانندگی گرمایی درجهت  $z$ ، یعنی  $\kappa_{\text{eff},zz}$  استفاده شده است (نگاه کنید به معادله (۹-۶.۹)). نخستین، چهارمین، و پنجمین جمله‌های سمت چپ را می‌توان حذف کرد، زیرا سرعت با  $z$  تغییر نمی‌کند. جمله سوم را در صورتی می‌توان حذف کرد که فشار درجهت محوری تغییرات چشم‌گیر نداشته باشد. سپس در جمله دوم به جای  $v_z$ ، سرعت ظاهری  $v_0$  را قرار می‌دهیم، زیرا جمله اخیر سرعت مؤثر سیال در راکتور است. پس معادله (۴-۵.۱۰) چنین نوشته می‌شود:

$$\rho \hat{C}_p v_0 \frac{dT}{dz} = \kappa_{\text{eff},zz} \frac{dT}{dz} + S_c \quad (۵-۵.۱۰)$$

این معادله دیفرانسیل دما در منطقه ۲ است. همین معادله در مناطق ۱ و ۳ صادق است، هرگاه جمله منبع را صفر بگیریم. بنابراین معادله‌های دیفرانسیل دما عبارت‌اند از:

$$(z < 0) \quad \rho \hat{C}_p v_0 \frac{dT^I}{dz} = \kappa_{\text{eff},zz} \frac{dT^I}{dz} \quad \text{منطقه ۱:} \quad (۶-۵.۱۰)$$

$$(0 < z < L) \quad \rho \hat{C}_p v_0 \frac{dT^{II}}{dz} = \kappa_{\text{eff},zz} \frac{dT^{II}}{dz} + S_c F(\Theta) \quad \text{منطقه ۲:} \quad (۷-۵.۱۰)$$

$$(z > L) \quad \rho \hat{C}_p v_0 \frac{dT^{III}}{dz} = \kappa_{\text{eff},zz} \frac{dT^{III}}{dz} \quad \text{منطقه ۳:} \quad (۸-۵.۱۰)$$

در این جا فرض کرده‌ایم که می‌توان در هر سه منطقه مقدار واحدی را به‌عنوان رسانندگی گرمایی مؤثر به‌کار برد. این سه معادله دیفرانسیل مرتبه دوم در معرض شش شرط مرزی زیر قرار دارند:

$$T^I = T_1 \quad \text{در } z = -\infty \text{، داریم} \quad (۹-۵.۱۰)$$

$$T^I = T^{II} \quad \text{در } z = 0 \text{، داریم} \quad (۱۰-۵.۱۰)$$

$$\kappa_{\text{eff},zz} \frac{dT^I}{dz} = \kappa_{\text{eff},zz} \frac{dT^{II}}{dz} \quad \text{در } z = 0 \text{، داریم} \quad (۱۱-۵.۱۰)$$

$$T^{II} = T^{III} \quad \text{در } z = L \text{، داریم} \quad (۱۲-۵.۱۰)$$

$$\kappa_{\text{eff},zz} \frac{dT^{II}}{dz} = \kappa_{\text{eff},zz} \frac{dT^{III}}{dz} \quad \text{در } z = L \text{، داریم} \quad (۱۳-۵.۱۰)$$

$$T^{III} = T_\infty \quad \text{در } z = \infty \text{، داریم} \quad (۱۴-۵.۱۰)$$

معادله‌های (۱۰-۵.۱۰) تا (۱۳-۵.۱۰) پیوستگی دما و شارگرما در مرز بین مناطق را نشان می‌دهند. معادله‌های (۹-۵.۱۰) و (۱۴-۵.۱۰) شرایط در دو انتهای سیستم را نشان می‌دهند.

در این جا جواب معادله‌های (۶-۵.۱۰) تا (۱۴-۵.۱۰) را به‌ازای مقدار اختیاری  $F(\Theta)$  به‌دست می‌آوریم. در بسیاری از موارد عملی، انتقال گرمای همرفتی بسیار مهم‌تر از انتقال گرمای رسانشی محوری است. بنابراین در این جا جمله‌های همرفتی (جمله‌های شامل  $\kappa_{\text{eff},zz}$ ) را به‌طور کامل حذف می‌کنیم. این روش حل مسئله بازم و ویژگی‌های برجسته حل درحالت حدی  $\text{RePr} = \text{Pé} = \text{RePr}$  بزرگ را دارد (برای آشنایی با روش برخورد کامل‌تر با این مسئله، نگاه کنید به مسئله ۱۰.ب.۱۸).



اگر مختص محوری بدون بُعد  $Z = z/L$  و منبع گرمای شیمیایی  $N = S_{c1}L/\rho\hat{C}_p v_0(T_1 - T_0)$  را معرفی کنیم، آن‌گاه معادله‌های (۱۰-۵-۶) تا (۱۰-۵-۸) چنین نوشته می‌شوند:

$$(Z < 0) \quad \frac{d\Theta^I}{dZ} = 0 \quad \text{منطقه ۱ (۱۰-۵-۱۵)}$$

$$(0 < Z < 1) \quad \frac{d\Theta^{II}}{dZ} = NF(\Theta) \quad \text{منطقه ۲ (۱۰-۵-۱۶)}$$

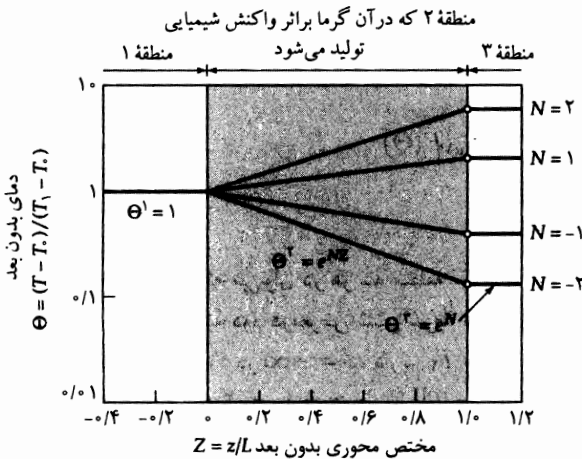
$$(Z > 1) \quad \frac{d\Theta^{III}}{dZ} = 0 \quad \text{منطقه ۳ (۱۰-۵-۱۷)}$$

که برای حل آن‌ها به سه شرط مرزی نیاز داریم:

$$\Theta^I = 1 \quad \text{در } z = -\infty \text{، داریم } (۱۰-۵-۱۸)$$

$$\Theta^I = \Theta^{II} \quad \text{در } z = 0 \text{، داریم } (۱۰-۵-۱۹)$$

$$\Theta^{II} = \Theta^{III} \quad \text{در } z = 1 \text{، داریم } (۱۰-۵-۲۰)$$



شکل ۱۰-۵-۲ توزیع دمای پیش‌بینی شده در رآکتور با جریان بستر ثابت، وقتی تولید گرما تابع خطی دماست و نفوذ محوری قابل چشم‌پوشی است.

معادله‌های دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک‌پذیر بالا، با استفاده از شرایط مرزی، به آسانی حل می‌شوند و داریم:

$$\Theta^I = 1 \quad \text{منطقه ۱ (۱۰-۵-۲۱)}$$

$$\int_{\Theta^I}^{\Theta^{II}} \frac{1}{F(\Theta)} d\Theta = NZ \quad \text{منطقه ۲ (۱۰-۵-۲۲)}$$

$$\Theta^{III} = \Theta^{II}|_{Z=1} \quad \text{منطقه ۳ (۱۰-۵-۲۳)}$$

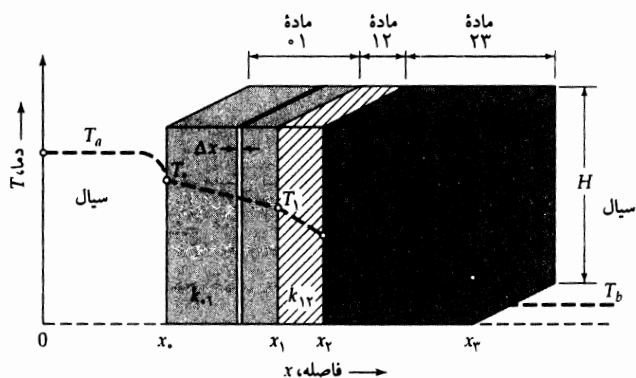
این نتایج در شکل (۱۰-۵-۲۰)، برای یک تابع ساده منبع، مانند  $F(\Theta) = \Theta$ ، که برای تغییرات اندک دما در صورت حساس نبودن آهنگ واکنش به غلظت منطقی است، نشان داده شده‌اند.

در این بخش کار را با حذف جمله‌های رسانش محوری به پایان بردیم. در مسئله ۱۰-ب، این جمله‌ها حذف نمی‌شوند و بنابراین جواب حاصل نشان می‌دهد که در منطقه ۱ پیش‌گرمایش (یا پیش‌سرمایش) وجود دارد.

### ۶.۱۰ رسانش گرما از طریق جدارهای مرکب

در مسئله‌های انتقال گرمای صنعتی غالباً با رسانش از طریق جدارهای مرکب از لایه‌هایی از مواد مختلف سروکار پیدا می‌کنیم که هریک رسانندگی گرمایی مشخصه خود را دارد. در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه مقاومت‌های مختلف در برابر انتقال گرما باهم ترکیب می‌شوند و یک مقاومت کل را تشکیل می‌دهند.

در شکل ۱-۶.۱۰، جدار مرکبی را نشان داده‌ایم که از سه ماده با ضخامت‌های مختلف  $x_1 - x_0$ ،  $x_2 - x_1$  و  $x_3 - x_2$  و رسانندگی‌های گرمایی متفاوت  $k_{01}$ ،  $k_{12}$  و  $k_{23}$  تشکیل شده‌است. در  $x = x_0$ ، ماده ۰۱ با سیالی در دمای محیط،  $T_a$ ، در تماس است و در  $x = x_3$  ماده ۲۳ با سیالی در دمای  $T_b$  تماس دارد. انتقال گرما در مرزهای  $x = x_0$  و  $x = x_3$  از «قانون سرمایش» نیوتون، با ضرایب انتقال گرمای  $h_0$  و  $h_3$  به دست می‌آید. توزیع دمای قابل انتظار در شکل ۱-۶.۱۰ نشان داده شده‌است.



شکل ۱-۶.۱۰ رسانش گرما در جدار مرکب، واقع بین دو جریان سیال با دماهای  $T_a$  و  $T_b$ .

ابتدا موازنه انرژی را برای این مسئله می‌نویسیم. چون با رسانش گرما در ماده‌ای جامد سروکار داریم، می‌توانیم جمله‌های شامل سرعت در بردار  $e$  را حذف کنیم و تنها سهم باقی‌مانده بردار  $q$  است که رسانش گرما را توصیف می‌کند. ابتدا موازنه انرژی را برای تیغه‌ای به حجم  $WH\Delta x$  می‌نویسیم:

$$q_x|_x WH - q_x|_{x+\Delta x} WH = 0 \quad \text{ناحیه ۰۱ (۱-۶.۱۰)}$$

که می‌گوید ورود گرما در  $x$  باید با خروج گرما در  $x + \Delta x$  برابر باشد، زیرا در داخل این ناحیه گرما تولید نمی‌شود. پس از تقسیم کردن بر  $WH\Delta x$  و گرفتن حد، وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{dq_x}{dx} = 0 \quad \text{ناحیه ۰۱ (۲-۶.۱۰)}$$

با انتگرال‌گیری از این معادله نتیجه می‌شود:

$$q_x = q_0 \quad \text{(مقدار ثابت) ناحیه ۰۱ (۳-۶.۱۰)}$$

ثابت انتگرال‌گیری،  $q_0$ ، شار گرما در صفحه  $x = x_0$  است. عملیات پی‌ریزی معادله‌های (۱-۶.۱۰)، (۲-۶.۱۰) و (۳-۶.۱۰) را می‌توان برای نواحی ۱۲ و ۲۳، با شرایط پیوستگی روی  $q_x$  در فصل مشترک‌ها، تکرار کرد، بنابراین شار گرما در هر سه تیغه ثابت و برابر است:

$$q_x = q_0 \quad \text{ناحیه ۰۱، ۱۲، و ۲۳ (۴-۶.۱۰)}$$

و مقدار ثابت در هر سه ناحیه یکسان است. اکنون می‌توان قانون فوریه را در هر یک از این سه ناحیه به‌کار بست و نتیجه گرفت:

$$-k_{01} \frac{dT}{dx} = q_0 \quad \text{ناحیه ۰۱ (۵-۶.۱۰)}$$

$$-k_{12} \frac{dT}{dx} = q_0 \quad \text{ناحیه ۱۲ (۶-۶.۱۰)}$$

$$-k_{23} \frac{dT}{dx} = q_0 \quad \text{ناحیه ۲۳ (۷-۶.۱۰)}$$

اکنون فرض می‌کنیم که  $k_{01}$ ،  $k_{12}$  و  $k_{23}$  مقدارهای ثابت‌اند. سپس از هر معادله روی کل ضخامت تیغه ماده انتگرال می‌گیریم تا نتیجه شود:

$$T_0 - T_1 = q_0 \left( \frac{x_1 - x_0}{k_{01}} \right) \quad \text{ناحیه ۰۱ (۸-۶.۱۰)}$$

$$T_1 - T_2 = q_0 \left( \frac{x_2 - x_1}{k_{12}} \right) \quad \text{ناحیه ۱۲ (۹-۶.۱۰)}$$

$$T_2 - T_3 = q_0 \left( \frac{x_3 - x_2}{k_{23}} \right) \quad \text{ناحیه ۲۳ (۱۰-۶.۱۰)}$$

به‌علاوه، طبق قانون سرمایش نیوتون، در هر سطح دو عبارت برای انتقال گرما داریم:

$$T_a - T_0 = \frac{q_0}{h_0} \quad \text{در سطح ۰ (۱۱-۶.۱۰)}$$

$$T_3 - T_b = \frac{q_0}{h_3} \quad \text{در سطح ۳ (۱۲-۶.۱۰)}$$

از جمع کردن پنج معادله آخر نتیجه می‌شود:

$$T_a - T_b = q_0 \left( \frac{1}{h_0} + \frac{x_1 - x_0}{k_{01}} + \frac{x_2 - x_1}{k_{12}} + \frac{x_3 - x_2}{k_{23}} + \frac{1}{h_3} \right) \quad \text{(۱۳-۶.۱۰)}$$

یا

$$q_0 = \frac{T_a - T_b}{\left( \frac{1}{h_0} + \sum_{j=1}^r \frac{x_j - x_{j-1}}{k_{j-1,j}} + \frac{1}{h_r} \right)} \quad \text{(۱۴-۶.۱۰)}$$

گاهی این نتیجه را به‌صورتی یادآورنده قانون سرمایش نیوتون، برحسب شار گرمای  $q_0$  (J/m<sup>2</sup> · s) یا جریان گرمای  $Q_0$  (J/s) بازنویسی می‌کنند:

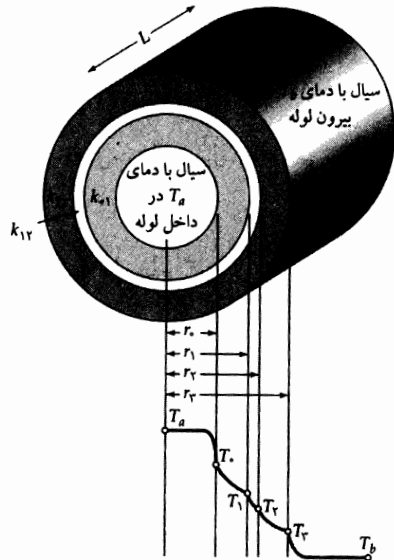
$$q_0 = U(T_a - T_b) \quad \text{یا} \quad Q_0 = U(WH)(T_a - T_b) \quad \text{(۱۵-۶.۱۰)}$$

کمیت  $U$ ، که «ضریب انتقال گرمای کلی» نام دارد، با فرمول مشهور زیر برای «جمع‌پذیری مقاومت‌ها» نشان داده می‌شود:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_0} + \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_{j-1}}{k_{j-1,j}} + \frac{1}{h_n} \quad \text{(۱۶-۶.۱۰)}$$

در این‌جا این فرمول را به سیستمی با  $n$  تیغه از ماده تعمیم داده‌ایم. وقتی ضرایب انتقال گرما و رسانندگی گرمایی معلوم باشند، معادله‌های (۱۵-۶.۱۰) و (۱۶-۶.۱۰) برای محاسبه آهنگ انتقال گرما از جداری مرکب که دو جریان سیال را از هم جدا می‌کند سودمندند. در فصل ۱۴ نحوه تخمین ضرایب انتقال گرما را شرح می‌دهیم.

در به دست آوردن معادله‌های بالا به طور ضمنی فرض می‌شود که تیغه‌های جامد مجاور یکدیگرند و «فضای پر شده با هوا» بین آن‌ها وجود ندارد. اگر سطوح جامد فقط در چند نقطه باهم تماس داشته باشند، مقاومت در برابر انتقال گرما به طور چشم‌گیری افزایش می‌یابد.



شکل ۶.۱۰

جدارهای استوانه‌ای مرکب  
فرمولی برای ضریب انتقال گرمای کلی جدار مرکب لوله استوانه‌ای نشان داده شده در شکل ۶.۱۰ به دست آورید.

شکل ۶.۱۰ رسانش گرما از طریق لوله چندلایه که سیالی با دمای  $T_a$  داخل آن، و سیالی با دمای  $T_b$  خارج آن است.

حل

موازنه انرژی روی لایه‌ای به حجم  $2\pi r L \Delta r$  در ناحیه ۱<sup>۰</sup> چنین است:

$$q_r|_r \cdot 2\pi r L - q_r|_{r+\Delta r} \cdot 2\pi(r + \Delta r)L = 0 \quad \text{ناحیه ۱}^{\circ} \quad (۱۷-۶.۱۰)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$(2\pi r L q_r)|_r - (2\pi r L q_r)|_{r+\Delta r} = 0 \quad \text{ناحیه ۱}^{\circ} \quad (۱۸-۶.۱۰)$$

با تقسیم کردن بر  $2\pi L \Delta r$  و گرفتن حد وقتی  $\Delta r$  به سمت صفر میل می‌کند، نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dr}(r q_r) = 0 \quad \text{ناحیه ۱}^{\circ} \quad (۱۹-۶.۱۰)$$

با انتگرال‌گیری از این معادله نتیجه می‌شود:

$$r q_r = r_0 q_0 \quad (۲۰-۶.۱۰)$$

که در آن  $r_0$  شعاع ناحیه ۱<sup>۰</sup>، و  $q_0$  شارگرما در این ناحیه است. در نواحی ۱۲ و ۲۳ با همان ثابت برابر است. از کاربرد قانون فوری در این سه ناحیه نتیجه می‌شود:

$$-k_{11} r \frac{dT}{dr} = r_0 q_0 \quad \text{ناحیه ۱}^{\circ} \quad (۲۱-۶.۱۰)$$

$$-k_{12} r \frac{dT}{dr} = r_0 q_0 \quad \text{ناحیه ۱۲}^{\circ} \quad (۲۲-۶.۱۰)$$

$$-k_{11} r \frac{dT}{dr} = r_0 q_0 \quad \text{ناحیه ۲۳}^{\circ} \quad (۲۳-۶.۱۰)$$

اگر فرض کنیم که رسانندگی گرمایی در سه ناحیه حلقوی ثابت است، آن‌گاه می‌توان از هر یک از سه معادله بالا در ناحیه خود انتگرال گرفت:

$$T_0 - T_1 = r_0 \cdot q_0 \frac{\ln(r_1/r_0)}{k_{0,1}} \quad \text{ناحیه ۱۰ (۲۴-۶.۱۰)}$$

$$T_1 - T_2 = r_1 \cdot q_1 \frac{\ln(r_2/r_1)}{k_{1,2}} \quad \text{ناحیه ۱۲ (۲۵-۶.۱۰)}$$

$$T_2 - T_3 = r_2 \cdot q_2 \frac{\ln(r_3/r_2)}{k_{2,3}} \quad \text{ناحیه ۲۳ (۲۶-۶.۱۰)}$$

در دو فصل مشترک سیال-جامد، می‌توان قانون سرمایش نیوتون را نوشت:

$$T_a - T_0 = \frac{q_0}{h_0} \quad \text{سطح ۰ (۲۷-۶.۱۰)}$$

$$T_3 - T_b = \frac{q_3}{h_3} = \frac{q_0 \cdot r_0}{h_3 \cdot r_3} \quad \text{سطح ۳ (۲۸-۶.۱۰)}$$

با جمع کردن پنج معادله قبل، معادله‌ای برای  $T_a - T_b$  حاصل می‌شود. این معادله را برای یافتن  $q_0$  حل می‌کنیم تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$Q_0 = 2\pi L r_0 \cdot q_0 = \frac{2\pi L (T_a - T_b)}{\left( \frac{1}{r_0 h_0} + \frac{\ln(r_1/r_0)}{k_{0,1}} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{k_{1,2}} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{k_{2,3}} + \frac{1}{r_3 h_3} \right)} \quad \text{(۲۹-۶.۱۰)}$$

اکنون «ضریب انتقال گرمای کلی مبتنی بر سطح داخلی»  $U_0$  را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q_0 = 2\pi L r_0 \cdot q_0 = U_0 (2\pi L r_0) (T_a - T_b) \quad \text{(۳۰-۶.۱۰)}$$

با ترکیب دو معادله آخر، برای تعمیم به سیستمی با  $n$  لایه حلقوی، رابطه زیر به دست می‌آید:

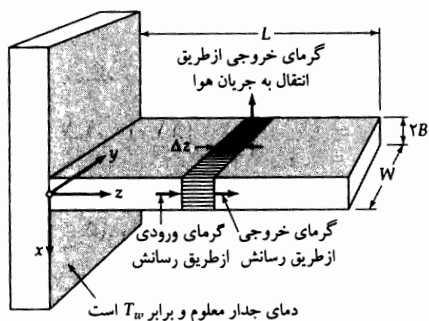
$$\frac{1}{r_0 U_0} = \left( \frac{1}{r_0 h_0} + \sum_{j=1}^n \frac{\ln(r_j/r_{j-1})}{k_{j-1,j}} + \frac{1}{r_n h_n} \right) \quad \text{(۳۱-۶.۱۰)}$$

اندیس «۰» روی  $U_0$  نشان می‌دهد که ضریب انتقال گرمای کلی نسبت به شعاع  $r_0$  محاسبه می‌شود.

### ۷.۱۰ رسانش گرما در پره خنک‌کن

کاربرد ساده، اما عملی دیگری از رسانش گرما، محاسبه پاره خنک‌کن است. از این پرها برای افزایش سطح موجود برای انتقال گرما بین جدارهای فلزی و سیالاتی با رسانایی کم، مانند گازها، استفاده می‌شود. در شکل ۱-۷.۱۰ یک پره ساده مستطیلی نشان داده شده است. دمای جدار  $T_w$  و دمای هوای محیط  $T_a$  است.

۱. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد پرها، نگاه کنید به



شکل ۷.۱۰ پره خنککن ساده با  $B \ll W$  و  $B \ll L$

با تقریب زدن وضعیت فیزیکی واقعی با مدلی ساده، می‌توان توصیف نسبتاً خوبی از سیستم به‌دست آورد:

وضعیت واقعی	مدل
۱. $T$ تابعی از $x, y$ ، و $z$ است، اما وابستگی آن به $z$ مهم‌تر است.	۱. $T$ فقط تابع $z$ است.
۲. مقدار کمی گرما از طریق پره واقع در انتها (به مساحت $2BW$ ) و در لبه‌ها (به مساحت $(2BL + 2BL)$ ) تلف می‌شود.	۲. گرما از انتها یا لبه‌ها تلف نمی‌شود.
۳. ضریب انتقال گرما تابعی از مکان است.	۳. شار گرما در سطح از رابطه $q_z = h(T - T_a)$ به‌دست می‌آید که در آن $h$ ثابت است و $T$ به $z$ وابسته است.

موازنه انرژی روی بخش  $\Delta z$  میله انجام می‌شود. چون میله ساکن است، جمله‌های حاوی  $\mathbf{v}$  در بردار شار انرژی مرکب  $\mathbf{e}$  را می‌توان حذف کرد و تنها سهم شار انرژی  $\mathbf{q}$  است. بنابراین موازنه انرژی عبارت است از:

$$2BWq_z|_z - 2BWq_z|_{z+\Delta z} - h(2W\Delta z)(T - T_a) = 0 \quad (1-7.10)$$

با تقسیم این رابطه بر  $2BW\Delta z$  و حد گرفتن، وقتی  $\Delta z$  به سمت صفر میل می‌کند، نتیجه می‌شود:

$$-\frac{dq_z}{dz} = \frac{h}{B}(T - T_a) \quad (2-7.10)$$

حال قانون فوریه  $(q_z = -kdT/dz)$  را، که در آن  $k$  رسانندگی گرمایی فلز است، در این رابطه قرار می‌دهیم. اگر  $k$  را ثابت فرض کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{h}{kB}(T - T_a) \quad (3-7.10)$$

این معادله را باید با شرایط مرزی حل کرد:

شرط مرزی ۱: در  $z = 0$ ، داریم  $T = T_w$  (4-7.10)

شرط مرزی ۲: در  $z = L$ ، داریم  $dT/dz = 0$  (5-7.10)

اکنون کمیت‌های بدون بُعد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\Theta = \frac{T - T_a}{T_w - T_a} = \text{دمای بدون بُعد} \quad (6-7.10)$$

$$\zeta = \frac{z}{L} = \text{فاصله بدون بُعد} \quad (7-7.10)$$

$$N^2 = \frac{hL^2}{kB} = \text{ضریب انتقال گرمای بدون بُعد} \quad (۸-۷.۱۰)$$

سپس مسئله صورت زیر را پیدا می‌کند:

$$\frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} = N^2\Theta \quad \text{با} \quad \Theta|_{\zeta=0} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{d\Theta}{d\zeta}|_{\zeta=1} = 0 \quad (۱۱-۷.۱۰)$$

می‌توان از معادله (۹-۷.۱۰) انتگرال‌گیری کرد و توابع هذلولوی به دست آورد (نگاه کنید به معادله‌های (ج-۱-۴) و بخش ج-۵). وقتی دو ثابت انتگرال‌گیری تعیین شوند، نتیجه می‌گیریم:

$$\Theta = \cosh N\zeta - (\tanh N) \sinh N\zeta \quad (۱۲-۷.۱۰)$$

می‌توان این معادله را به صورت زیر مرتب کرد:

$$\Theta = \frac{\cosh N(1-\zeta)}{\cosh N} \quad (۱۳-۷.۱۰)$$

این نتیجه فقط در صورتی منطقی است که اتلاف گرما در انتها و در لبه‌ها قابل چشم‌پوشی باشد. «کارایی» سطح پره چنین تعریف می‌شود:<sup>۳</sup>

$$\eta = \frac{\text{آهنگ واقعی اتلاف گرما از طریق پره}}{\text{آهنگ اتلاف گرما از پره هم‌دما در } T_w} \quad (۱۴-۷.۱۰)$$

بنابراین در مسئله مطرح شده در این جا،  $\eta$  برابر است با:

$$\eta = \frac{\int_0^W \int_0^L h(T - T_a) dz dy}{\int_0^W \int_0^L h(T_w - T_a) dz dy} = \frac{\int_0^1 \Theta d\zeta}{\int_0^1 d\zeta} \quad (۱۵-۷.۱۰)$$

یا

$$\eta = \frac{1}{\cosh N} \left( -\frac{1}{N} \sinh N(1-\zeta) \right) \Big|_0^1 = \frac{\tanh N}{N} \quad (۱۶-۷.۱۰)$$

که در آن  $N$  کمیتی بدون بُعد است که با معادله (۸-۷.۱۰) تعریف می‌شود.

### مثال ۱۰-۷.۱۰

خطای اندازه‌گیری ترموکوپل

در شکل ۷-۱۰ ترموکوپلی در یک چاه استوانه‌ای مشاهده می‌شود که در جریانی از گاز فرورده شده است. مطلوب است تخمین دمای واقعی جریان گاز، هرگاه:

$$T_1 = 500^\circ\text{F} = \text{دمایی که ترموکوپل نشان می‌دهد}$$

$$T_w = 350^\circ\text{F} = \text{دمای جدار}$$

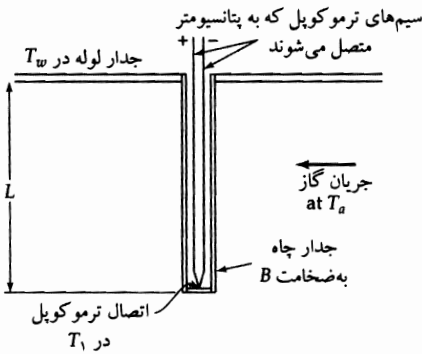
$$h = 12 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F} = \text{ضریب انتقال گرما}$$

$$k = 60 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F} = \text{رسانندگی گرمایی جدار چاه}$$

$$B = 0.8 \text{ in.} = \text{ضخامت جدار چاه}$$

$$L = 0.2 \text{ ft} = \text{طول چاه}$$

۲. کمیت  $N^2$  را می‌توان به صورت  $N^2 = (hL/k)(L/B) = \text{Bi}(L/B)$  نشان داد که در آن  $\text{Bi}$  عدد بیو نام دارد که به یاد ژان باتیست بیو (۱۸۶۲-۱۷۷۴) نام‌گذاری شد. او که استاد فیزیک در کالج دوفرانس بود، به پاس ابداع آزمونی ساده و غیرمخرب برای تعیین غلظت قند، نشان رامفورد گرفت.



شکل ۲-۷.۱۰ یک ترموکوپل در چاه استوانه‌ای.

حل  
 جدار چاه ترموکوپل به ضخامت  $B$ ، فقط از یک طرف با جریان گاز تماس دارد و ضخامت جدار لوله، در مقایسه با قطر آن، اندک است. بنابراین توزیع دما در طول این جدار باید تقریباً برابر همان مقداری باشد که در طول میله‌ای به ضخامت  $2B$  است که از دو طرف با جریان گاز تماس دارد. طبق معادله (۷.۱۰-۱۳)، دما در انتهای چاه (که توسط ترموکوپل ثبت می‌شود) در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{T_1 - T_a}{T_w - T_a} = \frac{\cosh \theta}{\cosh N} = \frac{1}{\cosh \sqrt{hL^2/kB}}$$

$$= \frac{1}{\cosh \sqrt{(120)(0.2)^2/(60)(\frac{1}{12} \cdot 0.708)}}$$

$$= \frac{1}{\cosh(2\sqrt{3})} = \frac{1}{16.7} \quad (17-7.10)$$

بنابراین دمای واقعی گاز با حل این معادله برحسب  $T_a$  به دست می‌آید:

$$\frac{500 - T_a}{350 - T_a} = \frac{1}{16.7} \quad (18-7.10)$$

و نتیجه عبارت است از:

$$T_a = 510^\circ\text{F} \quad (19-7.10)$$

بنابراین، دما به اندازه  $10^\circ\text{F}$  پایین‌تر قرائت می‌شود.

در این مثال یک نوع خطای ممکن در دماسنجی در نظر گرفته شده است. غالباً از تحلیلی ساده، مانند تحلیل پیش‌گفته، می‌توان برای تخمین خطای اندازه‌گیری استفاده کرد.<sup>۴</sup>

### ۸.۱۰ همرفت واداشته

در بخش‌های گذشته، بر رسانش گرما در جامدات تأکید شد. در این بخش و بخش آینده، دو نوع انتقال حدی گرما در سیالات را بررسی می‌کنیم: همرفت واداشته و همرفت آزاد (که آن را همرفت طبیعی نیز می‌نامند). تفاوت اصلی بین این دو شیوه همرفت در شکل ۸.۱۰-۱ نشان داده شده است. اغلب مسئله‌های انتقال گرمای صنعتی در یکی از این دو مقوله حدی می‌گنجد. اما در بعضی از مسائل، هر دو اثر را باید در نظر گرفت و در این حالت از همرفت مختلط سخن می‌گوییم (برای آشنایی با بعضی از روابط تجربی قابل استفاده در چنین وضعیتی، نگاه کنید به بخش ۶.۱۴).

۴. برای کسب اطلاعات پیش‌تر، نگاه کنید به



در این بخش همرفت واداشته در یک لولهٔ مدور را در نظر می‌گیریم که حالتی حدی است و به‌اندازهٔ کافی ساده هست که بتوان آن را به‌شیوهٔ تحلیلی حل کرد.<sup>۲۱</sup> سیال ویسکوزی با خواص فیزیکی  $(\mu, k, \rho, \hat{C}_p)$  که ثابت فرض می‌شوند، در لوله‌ای مدور به‌شعاع  $R$ ، جریان آرام دارد. به‌ازای  $z < 0$ ، دمای سیال یکنواخت و برابر دمای ورودی  $T_1$  فرض می‌شود. به‌ازای  $z > 0$ ، شار گرمای شعاعی ثابت  $q_r = -q_0$  در جدار لوله برقرار است. چنین وضعیتی، مثلاً هنگامی وجود دارد که یک کوئل گرمایی برقی، به‌طور یکنواخت، دور لوله پیچیده شده‌باشد و در این حالت  $q_0$  مثبت است. اگر لوله را سرد کنیم، آن‌گاه باید  $q_0$  را منفی گرفت.

چنان‌که در شکل ۱۰-۸.۱ مشاهده می‌شود، نخستین گام در حل مسئلهٔ انتقال گرمای واداشته محاسبهٔ توزیع سرعت در سیستم است. در بخش ۳.۲ دیده‌ایم که چگونه می‌توان با استفاده از روش موازنهٔ لایه‌ای، توزیع سرعت برای جریان در لوله را محاسبه کرد. می‌دانیم که توزیع سرعتی که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید عبارت است از:  $v_r = 0$  و  $v_\theta = 0$ :

$$v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] = v_{z,\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (10-8.1)$$

این توزیع سهموی در نواحی پایین‌دستی که به‌اندازهٔ کافی و به مقدار بیش‌تر از طول ورودی، از ورودی دور باشند، صادق است.

انتقال گرمای همرفتی واداشته	انتقال گرمای همرفتی آزاد
 <p>گرمای انتقال یافته به‌طرف بالا، توسط هوای گرمی که صعود می‌کند</p>	 <p>گرمای انتقال یافته به‌طرف بالا، توسط هوای گرمی که صعود می‌کند</p>
۱. الگوهای جریان عمدتاً توسط نیروی خارجی تعیین می‌شود	۱. الگوهای جریان توسط نیروی شناوری وارد بر سیال گرم‌شده تعیین می‌شود
۲. ابتدا، توزیع سرعت را پیدا می‌کنیم؛ سپس از توزیع سرعت برای یافتن توزیع دما استفاده می‌کنیم (روش متداول برای سیالاتی با خواص فیزیکی ثابت)	۲. توزیع‌های سرعت و دما مستقل‌اند
۳. عدد نوسلت به عددهای رینولدز و پکلت وابسته است (نگاه کنید به فصل ۱۴)	۳. عدد نوسلت به عددهای گرشوف و پرائنل وابسته است (نگاه کنید به فصل ۱۴)

شکل ۱۰-۸.۱ مقایسهٔ همرفت واداشته و همرفت آزاد در سیستم‌های غیرهم‌دما.

1. A. Eagle and R. M. Ferguson, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A127**, 540-566 (1930).

2. S. Goldstein, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Oxford University Press (1938), Dover Edition (1965), Vol. II, p. 622.

در این مسئله گرما در هر دو جهت  $r$  و  $z$  منتقل می‌شود. بنابراین، برای موازنه انرژی از سیستمی «واشرمانند» استفاده می‌کنیم که با قطع کردن ناحیه‌ای حلقوی به ضخامت  $\Delta r$ ، با تیغه‌ای به ضخامت  $\Delta z$  تشکیل می‌شود (نگاه کنید به شکل ۲-۸.۱۰). در این مسئله، با سیال جاری سزوکار داریم و بنابراین همه جمله‌های بردار  $e$  باقی می‌مانند. سهم‌های مختلف در معادله (۱-۱.۱۰) عبارت‌اند از:

$$e_r|_r \cdot 2\pi r \Delta z = (2\pi r e_r)|_r \Delta z \quad \text{انرژی کل ورودی در } r: \quad (2-8.10)$$

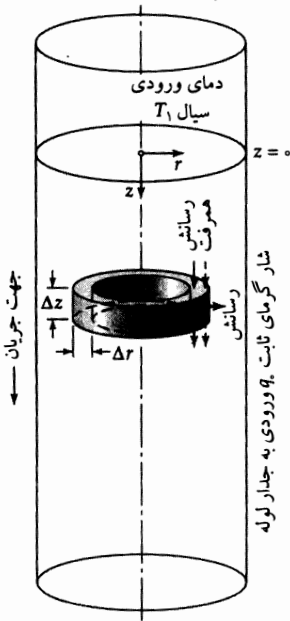
$$e_r|_{r+\Delta r} \cdot 2\pi(r+\Delta r)\Delta z = (2\pi r e_r)|_{r+\Delta r} \Delta z \quad \text{انرژی کل خروجی در } r+\Delta r: \quad (3-8.10)$$

$$e_z|_z \cdot 2\pi r \Delta r \quad \text{انرژی کل ورودی در } z: \quad (4-8.10)$$

$$e_z|_{z+\Delta z} \cdot 2\pi r \Delta r \quad \text{انرژی کل خروجی در } z+\Delta z: \quad (5-8.10)$$

$$\rho v_z g_z \cdot 2\pi r \Delta r \Delta z \quad \text{کار انجام شده روی سیال توسط گرانش:} \quad (6-8.10)$$

جمله آخر آهنگ انجام کار روی سیال داخل حلقه، توسط نیروی گرانش است - یعنی نیرو در واحد حجم  $\rho g_z$  ضرب در حجم  $2\pi r \Delta r \Delta z$ ، ضرب در سرعت روبه پایین سیال.



شکل ۲-۸.۱۰ گرمایش سیال در جریان آرام داخل لولهٔ مدور، که حلقه‌ای را نشان می‌دهد که موازنه انرژی روی آن انجام می‌شود.

موازنه انرژی با جمع کردن این جمله‌ها و برابر نهادن مجموع با صفر به دست می‌آید. سپس عبارت حاصل را بر  $2\pi r \Delta r \Delta z$  تقسیم می‌کنیم، تا نتیجه شود:

$$\frac{(re_r)|_r - (re_r)|_{r+\Delta r}}{\Delta r} + r \frac{e_z|_z - e_z|_{z+\Delta z}}{\Delta z} + \rho v_z g_z r = 0 \quad (7-8.10)$$

در حد، وقتی  $\Delta r$  و  $\Delta z$  به سمت صفر می‌روند، داریم:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(re_r) - \frac{\partial e_z}{\partial z} + \rho v_z g = 0 \quad (8-8.10)$$

اندیس  $z$  در  $g$  حذف شده‌است، زیرا بردار گرانش در جهت  $z$  عمل می‌کند.

سپس با استفاده از معادله‌های (۶-۸.۹) و (۸-۸.۹)، عبارت‌هایی برای مؤلفه‌های  $r$  و  $z$  بردار شار انرژی مرکب می‌نویسیم؛ در نوشتن این عبارت‌ها از این نکته استفاده می‌کنیم که تنها مؤلفه غیرصفر  $v$  مؤلفه محوری  $v_z$  است:

$$e_r = \tau_{rz}v_z + q_r = -\left(\mu \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)v_z - k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (۹-۸.۱۰)$$

$$e_z = \left(\frac{1}{\gamma} \rho v_z^2\right)v_z + \rho \hat{H}v_z + \tau_{zz}v_z + q_z \\ = \left(\frac{1}{\gamma} \rho v_z^2\right)v_z + \rho \hat{H}^\circ v_z + (p - p^\circ)v_z + \rho \hat{C}_p(T - T^\circ)v_z - \left(2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)v_z - k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (۱۰-۸.۱۰)$$

با قرار دادن این عبارت‌های شار در معادله (۸-۸.۱۰) و استفاده از این نکته که  $v_z$  فقط به  $r$  وابسته است، پس از مرتب کردن جمله‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\rho \hat{C}_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \\ + v_z \left[ -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \rho g \right] \quad (۱۱-۸.۱۰)$$

کروشه دوم دقیقاً صفر است، که با توجه به معادله (۴-۶.۳)، که مؤلفه  $z$  معادله حرکت است، درستی این گفته مشاهده می‌شود. جمله  $\mu(\partial v_z/\partial r)^2 + \text{گرمایش ویسکوز است}$  که در این بحث از آن چشم‌پوشی می‌کنیم. جمله آخر کروشه اول، متناظر با رسانش گرما در جهت محوری، حذف خواهد شد، زیرا به تجربه می‌دانیم که معمولاً در مقایسه با همرفت گرما در جهت محوری کوچک است. بنابراین، معادله‌ای که در این جا می‌خواهیم حل کنیم، چنین است:

$$\rho \hat{C}_p v_{z,\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \quad (۱۲-۸.۱۰)$$

این معادله دیفرانسیل جزئی، وقتی حل شود، دمای سیال را به صورت تابعی از  $r$  و  $z$  نشان می‌دهد. شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$T = T_1 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } r = 0, \text{ داریم مقدار متناهی } T. \quad (۱۳-۸.۱۰)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} = q_0 \quad \text{شرط مرزی ۲: در } r = R, \text{ داریم (مقدار ثابت).} \quad (۱۴-۸.۱۰)$$

$$T = T_1 \quad \text{شرط مرزی ۳: در } z = 0, \text{ داریم } T. \quad (۱۵-۸.۱۰)$$

اکنون عبارت مسئله را به صورت بدون بُعد تبدیل می‌کنیم. انتخاب کمیت‌های بدون بُعد اختیاری است. انتخاب‌های ما عبارت‌اند از:

$$\Theta = \frac{T - T_1}{q_0 R / k} \quad (۱۶-۸.۱۰)$$

$$\xi = \frac{r}{R} \quad (۱۷-۸.۱۰)$$

$$\xi = \frac{z}{\rho \hat{C}_p v_{z,\max} R^2 / k} \quad (۱۸-۸.۱۰)$$

معمولاً کمیت‌های بدون بُعد را طوری انتخاب می‌کنند که تعداد پارامترها در فرمول‌بندی نهایی مسئله حداقل شود. در این مسئله، انتخاب  $\xi = r/R$  انتخابی طبیعی است، زیرا جمله  $r/R$  در معادله دیفرانسیل ظاهر می‌شود. انتخاب برای دمای بدون بُعد توسط دومین و سومین شرط مرزی مشخص می‌شود. پس از انتخاب این دو متغیر بدون بُعد، انتخاب مختص محوری بدون بُعد، طبیعتاً تابع این انتخاب‌هاست.

اکنون عبارت حاصل برای مسئله، به صورت بدون بُعد، چنین است:

$$(1 - \xi^2) \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) \quad (۱۹-۸.۱۰)$$

و شرایط مرزی حاکم بر آن عبارت‌اند از:

(۲۰-۸.۱۰) شرط مرزی ۱: در  $\xi = 0$ ، مقدار منتهای  $\Theta = 0$ .

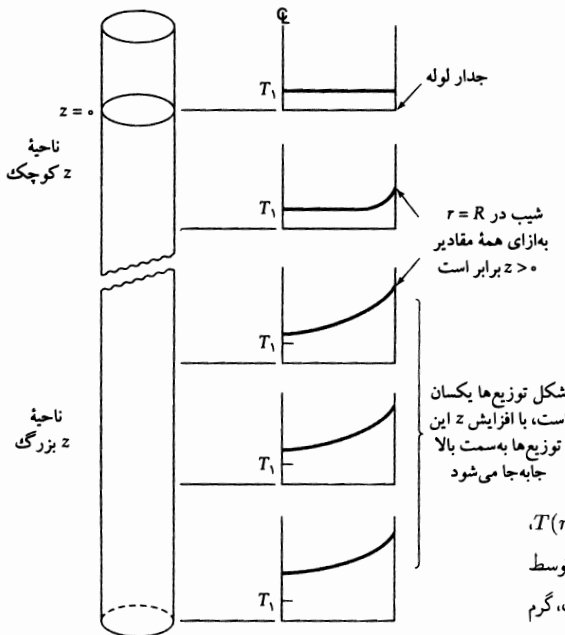
(۲۱-۸.۱۰) شرط مرزی ۲: در  $\xi = 1$ ، داریم  $\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 1$ .

(۲۲-۸.۱۰) شرط مرزی ۳: در  $\zeta = 0$ ، داریم  $\Theta = 0$ .

معادله دیفرانسیل جزئی (۱۹-۸.۱۰) با این شرایط مرزی حل شده است،<sup>۳</sup> اما در این بخش جواب کامل آن را ارائه نمی‌دهیم. اما به دست آوردن جواب مجانبی معادله (۱۹-۸.۱۰) به‌ازای مقادیر بزرگ  $\zeta$  آموزنده است. پس از آن‌که سیال به اندازه کافی از قسمت گرم‌شونده دور شد، انتظار می‌رود که شار گرمای ثابت گذشته از جدار، سبب افزایش دمای سیال، به صورت تابع خطی  $\zeta$  شود. به علاوه انتظار می‌رود که شکل توزیع دما به صورت تابعی از  $\xi$ ، سرانجام به نقطه‌ای می‌رسد که دیگر با افزایش  $\zeta$  تغییر نخواهد کرد (شکل ۳-۸.۱۰ را ببینید). بنابراین جوابی به صورت زیر، به‌ازای مقادیر بزرگ  $\zeta$ ، منطقی به نظر می‌رسد:

$$\Theta(\xi, \zeta) = C \cdot \zeta + \Psi(\xi) \quad (۲۳-۸.۱۰)$$

که در آن  $C$  ثابتی است که باید آن را تعیین کرد.



شکل ۳-۸.۱۰ شکل قابل‌انتظار برای توزیع دمای  $T(r, z)$  در سیستم نشان‌داده‌شده در شکل ۲-۸.۱۰، وقتی سیال توسط کویل گرم‌کنی که به‌طور یکنواخت دور لوله پیچیده شده است، گرم می‌شود (متناظر است با  $q$  مثبت).

3. R. Siegel, E. M. Sparrow, and T. M. Hallman, *Appl. Sci. Research*, **A7**, 386-392 (1958).

برای اطلاع از جواب کامل به مثال ۲-۱۰، و برای اطلاع از جواب درحالت مجانبی به‌ازای مقادیر کوچک  $\zeta$  به مثال ۲-۱۲ نگاه کنید.

بدیهی است که تابع معادله (۲۳-۸.۱۰) جواب کامل مسئله نیست؛ این جواب در معادله دیفرانسیل جزئی و شرایط مرزی ۱ و ۲ صدق می‌کند، اما در شرط مرزی ۳ صدق نمی‌کند. بنابراین شرط اخیر را با یک شرط انتگرالی تعویض می‌کنیم (نگاه کنید به شکل ۴-۸.۱۰):

$$2\pi R z q_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \hat{C}_p (T - T_1) v_z r dr d\theta \quad \text{شرط ۴: (۲۴-۸.۱۰)}$$

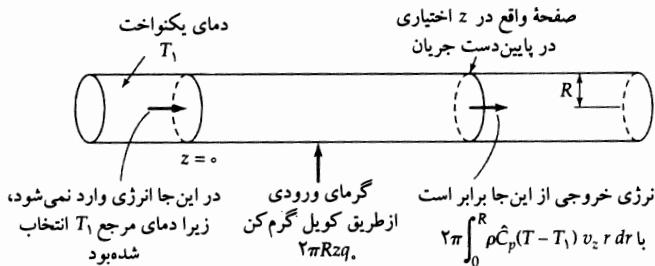
یا، به صورت بُعد:

$$\zeta = \int_0^1 \Theta(\xi, \zeta) (1 - \xi^2) \xi d\xi \quad (۲۵-۸.۱۰)$$

این شرط بیان می‌کند که انرژی ورودی از طریق جدارها، در فاصله  $\zeta$ ، با اختلاف بین انرژی خروجی از مقطع در  $\zeta$  و انرژی ورودی در  $\zeta = 0$  برابر است.

قرار دادن تابع فرضی معادله (۲۳-۸.۱۰) در معادله (۱۹-۸.۱۰) به یک معادله دیفرانسیل معمولی برای  $\Psi$  منتهی می‌شود (نگاه کنید به معادله ج. ۱-۱۱):

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d\Psi}{d\xi} \right) = C_0 (1 - \xi^2) \quad (۲۶-۸.۱۰)$$



شکل ۴-۸.۱۰ موازنه انرژی مورد استفاده برای شرط مرزی ۴ که با معادله (۲۴-۸.۱۰) تعریف شده است.

می‌توان از این معادله دوبار نسبت به  $\xi$  انتگرال گرفت و جواب را در معادله (۲۳-۸.۱۰) جایگزین کرد تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\Theta(\xi, \zeta) = C_0 \zeta + C_1 \left( \frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi^4}{16} \right) + C_2 \ln \xi + C_3 \quad (۲۷-۸.۱۰)$$

سه ثابت این رابطه با استفاده از شرط‌های ۱، ۲، و ۴ تعیین می‌شوند:

$$C_1 = 0 \quad \text{شرط مرزی ۱: (۲۸-۸.۱۰)}$$

$$C_0 = 4 \quad \text{شرط مرزی ۲: (۲۹-۸.۱۰)}$$

$$C_2 = -\frac{\gamma}{\gamma^2} \quad \text{شرط مرزی ۳: (۳۰-۸.۱۰)}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله (۲۷-۸.۱۰)، نتیجه نهایی زیر حاصل می‌شود:

$$\Theta(\xi, \zeta) = 4\zeta + \xi^2 - \frac{1}{4}\xi^4 - \frac{\gamma}{\gamma^2} \quad (۳۱-۸.۱۰)$$

این نتیجه دمای بدون بُعد را به صورت تابعی از مختصات شعاعی و محوری بدون بُعد به دست می دهد. این نتیجه در حد، وقتی  $\zeta \rightarrow \infty$ ، صادق است؛ به ازای مقادیر  $\zeta > 0.1$ ، این نتیجه مقدار موضعی  $\Theta$  را با حدود ۲٪ خطا پیش بینی می کند.

وقتی توزیع دما معلوم باشد، می توان کمیت های فرعی مختلف را به دست آورد. در ارتباط با جریان سیالات با  $\rho$  و  $\hat{C}_p$  ثابت، معمولاً از دو نوع دمای متوسط استفاده می شود:

$$\langle T \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R T(r, z) r \, dr \, d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\theta} = T_1 + (4\zeta + \frac{1}{\lambda}) \frac{q \cdot R}{k} \quad (۳۲-۸.۱۰)$$

$$T_b = \frac{\langle v_z T \rangle}{\langle v_z \rangle} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r) T(r, z) r \, dr \, d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r) r \, dr \, d\theta} = T_1 + (4\zeta) \frac{q \cdot R}{k} \quad (۳۳-۸.۱۰)$$

هر دو مقدار متوسط توابع  $z$  هستند. کمیت  $\langle T \rangle$  متوسط حسابی دما روی سطح مقطع در  $z$  است. «دمای توده ای»  $T_b$  دمایی است که هرگاه لوله در  $z$  بریده و سیال خروجی از آن در ظرفی جمع آوری و کاملاً مخلوط شود، به دست می آید. این دمای متوسط را گاهی «دمای اختلاط فنجانی» یا «دمای متوسط جریان» نیز می نامند. حال نیروی محرک انتقال گرمای موضعی،  $T_0 - T_b$  را محاسبه می کنیم که عبارت است از اختلاف بین دمای جدار و دمای توده ای در فاصله  $z$  در طول لوله:

$$T_0 - T_b = \frac{11}{24} \frac{q \cdot R}{k} = \frac{11}{48} \frac{q \cdot D}{k} \quad (۳۴-۸.۱۰)$$

که در آن  $D$  قطر لوله است. اکنون می توان این نتیجه را به صورت شار گرمای جدار بدون بُعد مرتب کرد:

$$\frac{q \cdot D}{k(T_0 - T_b)} = \frac{48}{11} \quad (۳۵-۸.۱۰)$$

که در فصل ۱۴، به عنوان عدد نوسلت معرفی خواهد شد.

قبل از به پایان رساندن این بخش، خاطرنشان می کنیم که مختص محوری بدون بُعد  $\zeta$  را که در بالا معرفی شد، می توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$\zeta = \left[ \left[ \frac{\mu}{D(v_z \rho)} \right] \right] \left[ \left[ \frac{k}{\hat{C}_p \mu} \right] \right] \left[ \left[ \frac{z}{R} \right] \right] = \frac{1}{\text{RePr}} \left[ \left[ \frac{z}{R} \right] \right] = \frac{1}{\text{Pe}} \left[ \left[ \frac{z}{R} \right] \right] \quad (۳۶-۸.۱۰)$$

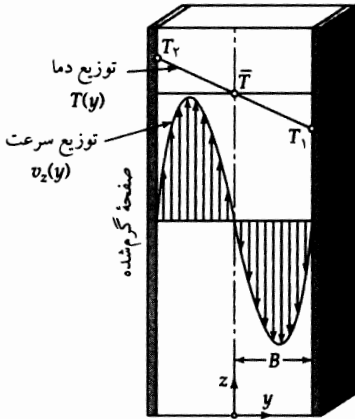
در این جا  $D$  قطر لوله،  $\text{Re}$  عدد رینولدز به کاررفته در قسمت اول کتاب، و  $\text{Pr}$  و  $\text{Pe}'$  اعداد پرانتل و پکلت اند که در فصل ۹ معرفی شدند. در فصل ۱۱ درمی یابیم که می توان انتظار داشت اعداد رینولدز و پرانتل در مسئله های همرفت واداشته ظاهر شوند. در فصل ۱۴ این نکته را در ارتباط با روابط همبستگی بین ضرایب انتقال گرما، تحکیم می بخشیم.

### ۹.۱۰ همرفت آزاد

در بخش ۸.۱۰ مثالی از همرفت واداشته را ارائه دادیم. در این بخش به سراغ یک مسئله مقدماتی در همرفت آزاد می رویم، یعنی مسئله جریان بین دو جدار موازی که در دماهای متفاوتی نگه داشته شده اند (نگاه کنید به شکل ۱-۹.۱۰).

سیالی با چگالی  $\rho$  و ویسکوزیته  $\mu$  بین دو جدار موازی، به فاصله  $2B$  از یکدیگر، واقع است. جدار گرم شده واقع در  $y = -B$ ، در دمای  $T_4$ ، و جدار سرد شده واقع در  $y = +B$ ، در دمای  $T_1$  نگه داشته می شود. فرض می شود که اختلاف دما به اندازه کافی کوچک هست که بتوان از جمله های حاوی  $(\Delta T)^2$  چشم پوشی کرد.

به‌علت وجود گرادیان دما در سیستم، سیال در نزدیکی جدار گرم افزایش، و در نزدیکی جدار سرد کاهش می‌یابد. این سیستم از بالا و پایین بسته است، به طوری که سیال به‌طور پیوسته بین صفحه‌ها گردش می‌کند. آهنگ جریان جرمی سیال در جریان در حال حرکت به طرف بالا، همان است که در جریان در حال حرکت به طرف پایین مشاهده می‌شود. فرض می‌شود صفحه‌ها بسیار بلندند، به طوری که می‌توان از آثار انتهایی در بالا و پایین سیستم چشم‌پوشی کرد. در این صورت، برای همه مقاصد عملی، دما فقط تابعی از  $y$  است.



شکل ۱۰-۹.۱۰ جریان همرفتی آزاد آرام بین دو صفحه عمودی با دو دمای متفاوت. سرعت تابعی درجه سه از مختص  $y$  است.

اکنون می‌توان با استفاده از مؤلفه  $y$  بردار شار انرژی مرکب  $e$  که با معادله (۸.۹-۶) تعریف می‌شود، موازنه انرژی را روی لایه نازکی از سیال به ضخامت  $\Delta y$  نوشت. جمله حاوی انرژی جنبشی و آنتالپی را می‌توان نادیده گرفت، زیرا مؤلفه  $y$  بردار  $v$  صفر است. مؤلفه  $y$  جمله  $[\tau \cdot v]$  عبارت است از:  $\tau_{yz}v_z = -\mu(dv_z/dy)v_z$  که به سهم گرمایش ویسکوز توصیف شده در بخش ۴.۱۰ منتهی می‌شود. اما در جریان‌های بسیار آهسته، که در همرفت آزاد با آن‌ها سروکار داریم، این جمله بسیار کوچک خواهد شد و می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. در این صورت موازنه انرژی به معادله زیر منتهی می‌شود:

$$-\frac{dq_y}{dy} = 0 \quad \text{یا} \quad k \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (۹.۱۰-۱)$$

هرگاه  $k$  ثابت باشد. معادله دما را باید با شرایط مرزی زیر حل کرد:

$$T = T_2 \quad \text{در} \quad y = -B \quad (۹.۱۰-۲)$$

$$T = T_1 \quad \text{در} \quad y = +B \quad (۹.۱۰-۳)$$

جواب این مسئله عبارت است از:

$$T = \bar{T} - \frac{1}{4} \Delta T \frac{y}{B} \quad (۹.۱۰-۴)$$

که در آن  $\Delta T = T_2 - T_1$  اختلاف دمای جدارها، و  $\bar{T} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$  میانگین حسابی آن‌هاست. با نوشتن موازنه اندازه حرکت روی همان تیغه به ضخامت  $\Delta y$ ، یک معادله دیفرانسیل برای توزیع سرعت به دست می‌آید:

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \frac{dp}{dz} + \rho g \quad (۹.۱۰-۵)$$

در این جا ویسکوزیته ثابت فرض شده است (نگاه کنید به مسئله ۱۰.ب.۱۱ برای مشاهده جوابی با ویسکوزیته وابسته به دما).

پدیده هرفرت آزاد از این واقعیت ناشی می شود که وقتی سیال گرم می شود، چگالی (معمولاً) کاهش می یابد و سیال صعود می کند. توصیف ریاضی سیستم باید این ویژگی اساسی را نیز به حساب بیاورد. چون در این مسئله اختلاف دمای  $\Delta T = T_2 - T_1$  کوچک فرض می شود، می توان انتظار داشت که تغییرات چگالی در این سیستم اندک باشد. در نتیجه باید  $\rho$  را به صورت سری تیلر، حول دمای  $\bar{T} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$  بسط دهیم؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho|_{T=\bar{T}} + \left. \frac{d\rho}{dT} \right|_{T=\bar{T}} (T - \bar{T}) + \dots \\ &= \bar{\rho} - \bar{\rho}\beta(T - \bar{T}) + \dots \end{aligned} \quad (۹.۱۰)$$

در این جا  $\bar{\rho}$  و  $\beta$  عبارت اند از چگالی و ضریب انبساط حجمی که در دمای  $\bar{T}$  محاسبه شده اند. ضریب انبساط حجمی چنین تعریف می شود:

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{(1/\rho)} \left( \frac{\partial(1/\rho)}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (۷.۹.۱۰)$$

حال معادله حالت «سفارشی» (۹.۱۰) را (با حفظ فقط دو جمله) در معادله حرکت (۵.۹.۱۰) می گنجانیم تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \frac{dp}{dz} + \bar{\rho}g - \bar{\rho}g\beta(T - \bar{T}) \quad (۸.۹.۱۰)$$

این معادله موازنه بین نیروی ویسکوز، نیروی فشار، نیروی گرانش، و نیروی شناوری  $-\bar{\rho}g\beta(T - \bar{T})$  را (همگی در واحد حجم) توصیف می کند. اکنون توزیع دمای تعریف شده با معادله (۴.۹.۱۰) را در این معادله قرار می دهیم تا معادله دیفرانسیل زیر حاصل شود:

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dy^2} = \left( \frac{dp}{dz} + \bar{\rho}g \right) + \frac{1}{2} \bar{\rho}g\beta \Delta T \frac{y}{B} \quad (۹.۹.۱۰)$$

که می توان آن را با شرایط مرزی زیر حل کرد:

$$v_z = 0 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } y = -B, \text{ داریم } v_z = 0$$

$$v_z = 0 \quad \text{شرط مرزی ۲: در } y = +B, \text{ داریم } v_z = 0$$

جواب چنین است:

$$v_z = \frac{(\bar{\rho}g\beta\Delta T)B^2}{12\mu} \left[ \left( \frac{y}{B} \right)^2 - \left( \frac{y}{B} \right) \right] + \frac{B^2}{4\mu} \left( \frac{dp}{dz} + \bar{\rho}g \right) \left[ \left( \frac{y}{B} \right)^2 - 1 \right] \quad (۱۲.۹.۱۰)$$

حال می خواهیم جریان جرم خالص در جهت  $z$  صفر باشد، یعنی:

$$\int_{-B}^{+B} \rho v_z dy = 0 \quad (۱۳.۹.۱۰)$$

با قرار دادن  $v_z$  از معادله (۱۲.۹.۱۰) و  $\rho$  از معادله های (۹.۱۰) و (۴.۹.۱۰) در این انتگرال، نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\frac{dp}{dz} = -\bar{\rho}g \quad (۱۴.۹.۱۰)$$



از جمله‌های حاوی مجذور کمیت کوچک  $\Delta T$  چشم‌پوشی کرده‌ایم. معادله (۹.۱۰-۱۴) بیان می‌کند که گرادیان فشار در سیستم صرفاً از وزن سیال ناشی می‌شود و توزیع فشار هیدروستاتیکی معمول، حاکم است. بنابراین جمله دوم در سمت راست معادله (۹.۱۰-۱۲) حذف می‌شود و نتیجه نهایی برای توزیع سرعت عبارت است از:

$$v_z = \frac{(\bar{\rho}g\bar{\beta}\Delta T)B^2}{12\mu} \left[ \left(\frac{y}{B}\right)^2 - \left(\frac{y}{B}\right) \right] \quad (9.10-15)$$

سرعت متوسط در جریان درحال حرکت به طرف بالا، برابر است با:

$$\langle v_z \rangle = \frac{(\bar{\rho}g\bar{\beta}\Delta T)B^2}{48\mu} \quad (9.10-16)$$

بنابراین حرکت سیال نتیجه مستقیم جمله نیروی شناوری در معادله (۹.۱۰-۸) است که با گرادیان دما در سیستم رابطه دارد. توزیع سرعت طبق معادله (۹.۱۰-۱۵) در شکل ۹.۱۰-۱ نشان داده شده است. همین نوع توزیع سرعت در فضای پر شده با هوای پنجره دوجداره، یا دیوارهای دویوسته ساختمانی مشاهده می‌شود. هم‌چنین همین نوع جریان در بهره‌برداری از ستون کلاوسوس-دیکل برای جداسازی ایزوتوپ‌ها یا مخلوط‌های مایع، از طریق آثار مرکب نفوذ گرمایی و همرفت آزاد مشاهده می‌شود.<sup>۱</sup>

توزیع سرعت طبق معادله (۹.۱۰-۱۵) را می‌توان با استفاده از سرعت بدون بُعد  $\check{v} = Bv_z\bar{\rho}/\mu$  و مختص بدون بُعد  $\check{y} = y/B$  بازنویسی کرد؛ بنابراین:

$$\check{v}_z = \frac{1}{12} \text{Gr}(\check{y}^2 - \check{y}) \quad (9.10-17)$$

در این جا Gr عدد گراسهوف بدون بُعد است،<sup>۲</sup> که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Gr} = \left[ \left[ \frac{(\bar{\rho}^2 g \bar{\beta} \Delta T) B^2}{\mu^2} \right] \right] = \left[ \left[ \frac{\bar{\rho} g B^2 \Delta \rho}{\mu^2} \right] \right] \quad (9.10-18)$$

که در آن  $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$ . صورت دوم عدد گراسهوف، با استفاده از معادله (۹.۱۰-۶) از صورت اول به دست می‌آید. عدد گراسهوف گروه مشخصه‌ای است که در تحلیل‌های همرفت آزاد مشاهده می‌شود و در تحلیل بُعدی فصل ۱۱ آن را نشان می‌دهیم. این عدد در روابط همبستگی ضریب انتقال گرما در فصل ۱۴ پدیدار می‌شود.

### پرسش‌های تشریحی

۱. نشان دهید که اعداد برینکمن، بیو، پرائتل، و گراسهوف، بدون بُعدند.
۲. جمع کردن مقاومت‌ها، نظیر کدام مسئله در مدارهای الکتریکی است؟
۳. ضریب انبساط حجمی گاز ایده‌آل را تعریف کنید. عبارت متناظر با عدد گراسهوف چیست؟
۴. بعضی از پیامدهای گرادیان‌های بزرگ دما را که از گرمایش ویسکوز در ویسکوزیته‌سنجی، روانکاری، و روزن‌رانی پلاستیک ناشی می‌شوند، نام ببرید.

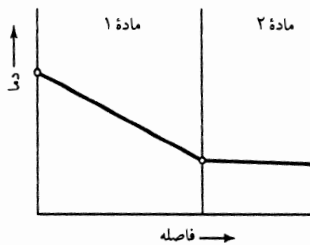
۱. نفوذ گرمایی، نفوذ ناشی از گرادیان دماست. برای مطالعه شرح روشنی از ستون کلاوسوس-دیکل، نگاه کنید به

K. E. Grew and T. L. Ibbs, *Thermal Diffusion in Gases*, Cambridge University Press (1952), pp. 94-106.

۲. نام‌گذاری شده به یاد فرانتس گراسهوف (۱۸۹۳-۱۸۲۶). او استاد مکانیک کاربردی در دانشگاه کارلسروهه و بنیان‌گذار Verein

Deutscher Ingenieure در سال ۱۸۵۶ بود.

۵. آیا در بخش  $۸.۱^{\circ}$ ، در انتخاب دمای بدون بُعد و مختص محوری بدون بُعد، به صورت  $\Theta = (T - T_1)/T_1$  و  $\zeta = z/R$  مزیتی نهفته است؟
۶. در بخش  $۹.۱^{\circ}$ ، اگر سیال آب، و دمای  $\bar{T}$  برابر  $4^{\circ}\text{C}$  بود، چه اتفاقی می‌افتاد؟
۷. آیا در حل معادله  $(۹-۷.۱^{\circ})$  برحسب توابع هذلولوی، به جای توابع نمایی، مزیتی نهفته است؟
۸. در رسیدن از معادله  $(۱۱-۸.۱^{\circ})$  به معادله  $(۱۲-۸.۱^{\circ})$  از جمله رسانش محوری، با توجه به جمله همرفت محوری، چشم‌پوشی شد. برای توجیه این عمل از چند مقدار عددی منطقی برای تخمین اندازه‌های نسبی جمله‌ها استفاده کنید.
۹. نادیده گرفتن وابستگی ویسکوزیته به دما در حل مسئله‌های همرفت واداشته تا چه اندازه جدی است؟ در حل مسئله‌های گرمایش اتلافی ویسکوز چه‌طور؟
۱۰. در حالت پایا، توزیع دما در سیستم چندلایه، مطابق شکل است؛ کدام ماده رسانندگی گرمایی بالاتری دارد؟



۱۱. نشان دهید که معادله  $(۴-۶.۱^{\circ})$  را می‌توان مستقیماً، از طریق بازنویسی معادله  $(۱-۶.۱^{\circ})$  و قرار دادن  $x$  به جای  $x + \Delta x$  به دست آورد. به همین ترتیب می‌توان با قرار دادن  $r_0$  به جای  $r + \Delta r$  معادله  $(۲-۶.۱^{\circ})$  را از معادله  $(۱۷-۶.۱^{\circ})$  به دست آورد.

### مسئله‌ها

- ۱۰ الف ۱. اتلاف گرما از لوله عایق‌کاری شده. لوله فولادی استاندارد ۲ in. نمره ۴۰ (با قطر داخلی ۲.۰۶۷ in. و ضخامت جدار ۰.۱۵۴ in.) که حامل بخار است، با ۲ in. منیزیم اکسید ۸۵٪ عایق‌کاری شده است که به نوبه خود عایقی به ضخامت ۲ in. از جنس چوب‌پنبه دارد. اتلاف گرما در ساعت در فوت لوله را تخمین بزنید، هرگاه سطح داخلی لوله در دمای  $250^{\circ}\text{F}$  و سطح خارجی چوب‌پنبه در دمای  $90^{\circ}\text{F}$  باشد، رسانندگی گرمایی مواد مورد استفاده (برحسب  $\text{Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$ ) عبارت است از: فولاد، ۲۶/۱؛ منیزیم اکسید ۸۵٪، ۰.۰۴؛ و چوب‌پنبه، ۰.۰۳.

جواب:  $24 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}$ .

- ۱۰ الف ۲. اتلاف گرما از طریق پره مستطیلی. مطلوب است محاسبه اتلاف گرما از طریق پره مستطیلی (نگاه کنید به شکل  $(۱-۷.۱^{\circ})$  در شرایط زیر:

دمای هوا:  $350^{\circ}\text{F}$

دمای جدار:  $500^{\circ}\text{F}$

رسانندگی گرمایی پره:  $60 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$

رسانندگی گرمایی هوا:  $0.022 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$

ضریب انتقال گرما:  $120 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F}$

طول پره:  $0.2 \text{ ft}$

عرض پره:  $1.0 \text{ ft}$

ضخامت پره:  $0.16 \text{ in.}$

جواب:  $2074 \text{ Btu/hr}$ .

۱۰ الف. ۳. دمای ماکزیمم روانکار. روغنی برای روانکاری یک جفت سطح استوانه‌ای، مانند سطوح نشان داده شده در شکل ۱۰-۴.۱ به کار می‌رود. سرعت زاویه‌ای استوانه خارجی  $7908 \text{ rpm}$ ، شعاع آن  $5.06 \text{ cm}$ ، و خلاصی بین دو استوانه  $0.27 \text{ cm}$  است. مطلوب است تعیین دمای ماکزیمم در روغن، هرگاه بدانیم دمای هردو جدار  $158^\circ \text{F}$  است. خواص فیزیکی روغن ثابت و برابر مقادیر زیر فرض می‌شود:

ویسکوزیته:  $92/3 \text{ cp}$

چگالی:  $1.22 \text{ g/cm}^3$

رسانندگی گرمایی:  $0.0055 \text{ cal/s} \cdot \text{cm} \cdot \text{C}$

جواب:  $174^\circ \text{F}$ .

۱۰ الف. ۴. ظرفیت حمل جریان توسط سیم. سیمی مسی به قطر  $0.40 \text{ in.}$  به طور یکنواخت با پلاستیک عایق‌کاری شده و قطر آن به  $1.12 \text{ in.}$  رسیده است و در محیطی با دمای  $100^\circ \text{F}$  قرار گرفته است. ضریب انتقال گرما از سطح خارجی پلاستیک به محیط  $1.5 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F}$  است. مطلوب است تعیین جریان ماکزیمم حالت پایا، برحسب آمپر، که این سیم می‌تواند حمل کند، بدون آن‌که دما در نقطه‌ای از پلاستیک از حد تعیین شده  $200^\circ \text{F}$  بالاتر رود. رسانندگی‌های گرمایی و الکتریکی را می‌توان ثابت و برابر مقادیر زیر گرفت:

	$k (\text{Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F})$	$k_e (\text{ohm}^{-1} \text{cm}^{-1})$
مس	۲۲۰	$5.1 \times 10^5$
پلاستیک	۰.۲۰	۰

جواب:  $13.4 \text{ amp}$ .

۱۰ الف. ۵. سرعت همرفت آزاد.

(الف) درستی عبارت سرعت متوسط در جریان روبه بالا را، که با معادله  $(9.10-16)$  تعریف می‌شود، نشان دهید.

(ب)  $\bar{\beta}$  را برای شرایط گفته شده در زیر محاسبه کنید.

(ج) سرعت متوسط در جریان روبه بالا در سیستم نشان داده شده در شکل ۱۰-۹.۱، برای جریان هوا

تحت این شرایط چه قدر است؟

فشار:  $1 \text{ atm}$

دمای جدار گرم شده:  $100^\circ \text{C}$

دمای جدار سرد شده:  $20^\circ \text{C}$

فاصله بین جدارها:  $0.6 \text{ cm}$

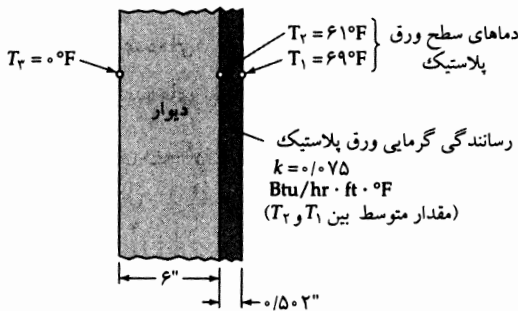
جواب:  $2.3 \text{ cm/s}$ .

۱۰ الف. ۶. توان عایق‌کاری دیوار (شکل ۱۰ الف. ۶). «توان عایق‌کاری» دیوار را می‌توان به صورت نشان داده شده در شکل اندازه‌گیری کرد. یک ورق پلاستیک را روی سطح دیوار می‌گذارند. در این ورق دو ترموکوپل، به صورت هم‌تراز با سطوح ورق، تعبیه شده‌است. رسانندگی گرمایی و ضخامت ورق پلاستیک معلوم است. با استفاده از دماهای حالت پایایی اندازه‌گیری شده که در شکل نشان داده شده‌اند، کمیت‌های زیر را محاسبه کنید:

(الف) شار گرمای حالت پایا در دیوار (و ورق پلاستیک)؛

(ب) «مقاومت گرمایی» (ضخامت دیوار تقسیم بر رسانندگی گرمایی).

جواب: (الف)  $14/3 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2$ ؛ (ب)  $47/2 \text{ ft}^2 \cdot \text{hr} \cdot \text{F/Btu}$



شکل ۱۰ الف. ۶. تعیین مقاومت گرمایی دیوار.

۱۰ الف. ۷. گرمایش ویسکوز در خودکار. از شما خواسته‌اند که تصمیم بگیرید آیا کاهش ظاهری ویسکوزیته جوهر خودکار در حین نوشتن از «رقیق‌شدگی برشی» (کاهش ویسکوزیته به علت آثار غیرنیوتونی) ناشی می‌شود، یا از «رقیق‌شدگی دمایی» (کاهش ویسکوزیته بر اثر افزایش دمای ناشی از گرمایش ویسکوز). اگر افزایش دما کم‌تر از  $1 \text{ K}$  باشد، آن‌گاه «رقیق‌شدگی دمایی» اهمیت نخواهد داشت. با استفاده از معادله (۹-۴.۱۰) و داده‌های تخمینی زیر، افزایش دما را تخمین بزنید:

خلاصی بین گوی نوک خودکار و جدار حفره‌ای که در آن قرار دارد:  $5 \times 10^{-5} \text{ in.}$

قطر گوی:  $1 \text{ mm}$

چگالی مرکب:  $10^4 \text{ cp}$

سرعت نوشتن:  $100 \text{ in./min}$

رسانندگی گرمایی مرکب (تخمین اولیه):  $5 \times 10^{-4} \text{ cal/s} \cdot \text{cm} \cdot \text{C}$

۱۰ الف. ۸. افزایش دما در سیم برق.

(الف) سیمی مسی به قطر  $5 \text{ mm}$  و طول  $15 \text{ ft}$ ، افت ولتاژی برابر  $0/6^\circ$  ولت دارد. مطلوب است تعیین دمای ماکزیم سیم، هرگاه دمای هوای محیط  $25^\circ \text{C}$  و ضریب انتقال گرما  $h$ ، برابر  $5/7 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F}$  باشد.

(ب) افت دما در مقطع سیم و در هوای محیط را مقایسه کنید.

۱۰ ب. ۱. رسانش گرما از کره به سیالی را کد. کره‌ای گرم‌شده به شعاع  $R$  در حجم بزرگی از سیال بدون حرکت آویزان شده‌است. بررسی رسانش گرما در سیال اطراف کره در غیاب رسانش، مطلوب است.

(الف) معادله دیفرانسیلی برای توصیف دمای  $T$  در سیال، به صورت تابعی از  $r$ ، فاصله از مرکز کره، بنویسید. رسانندگی گرمایی سیال،  $k$ ، ثابت فرض می‌شود.

(ب) از این معادله انتگرال بگیرید و با استفاده از شرایط مرزی زیر، ثابت‌های انتگرال‌گیری را محاسبه کنید:

$$T = T_R \text{ در } r = R \text{ و } T = T_\infty \text{ در } r = \infty, \text{ داریم}$$

(ج) با استفاده از توزیع دما، عبارتی برای شار گرما در سطح به دست آورید. این نتیجه را با شار گرمای تعریف‌شده توسط «قانون سرمایش نیوتون» برابر بگیرید و نشان دهید که یک ضریب انتقال گرمای بدون بُعد (به نام عدد نوسلت) به دست می‌آید که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$Nu = \frac{hD}{k} = 2 \quad (10-1-1)$$

و در آن  $D$  قطر کره است. این نتیجه مشهور مقدار حدی  $Nu$  را برای انتقال گرما از کره‌ها، به‌ازای عددهای رینولدز و گراشظوف کوچک نشان می‌دهد (نگاه کنید به بخش ۴.۱۴).

(د) عددهای بیو و نوسلت از چه لحاظ باهم تفاوت دارند؟

۲.۱۰ گرمایش ویسکوز در جریان داخل شکاف. مطلوب است توزیع دما برای مسئله گرمایش ویسکوز نشان داده شده در شکل ۲-۴.۱۰، با شرایط مرزی زیر: در  $x = 0$ ، داریم  $T = T_0$ ؛ در  $x = b$ ، داریم  $q_x = 0$ .

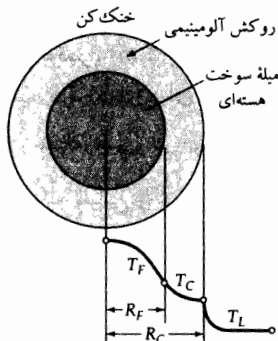
$$\text{جواب: } \frac{T-T_0}{\mu v_0^2/k} = \left(\frac{x}{b}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{b}\right)^2$$

۳.۱۰ رسانش گرما در میله سوخت هسته‌ای (شکل ۳-۱۰). یک میله سوخت استوانه‌ای طویل را در نظر بگیرید که با لایه‌ای از روکش آلومینیمی پوشانده شده است. در داخل میله سوخت، گرما از طریق شکافت هسته‌ای تولید می‌شود؛ این منبع گرما با رابطه تقریبی زیر به مکان وابسته است:

$$S_n = S_{n0} \left[ 1 + b \left( \frac{r}{R_F} \right)^2 \right] \quad (10-3-1)$$

در این جا  $S_{n0}$  و  $b$  ثابت‌های معلوم‌اند، و  $r$  مختص شعاعی اندازه‌گیری شده از محور میله سوخت استوانه‌ای است. مطلوب است محاسبه دما در میله سوخت، هرگاه سطح خارجی روکش با مایع خنک‌کن در دمای  $T_L$  در تماس باشد. ضریب انتقال گرما در فصل مشترک روکش-خنک‌کن  $h_L$ ، و رسانندگی گرمایی میله سوخت و روکش، به ترتیب،  $k_F$  و  $k_C$  است.

$$\text{جواب: } T_{F,\max} - T_L = \frac{S_{n0} R_F^2}{4k_F} \left( 1 + \frac{b}{2} \right) + \frac{S_{n0} R_F^2}{2k_C} \left( 1 + \frac{b}{2} \right) \left( \frac{k_C}{R_C h_L} + \ln \frac{R_C}{R_F} \right)$$



شکل ۳-۱۰ توزیع دما در میله سوخت استوانه‌ای.

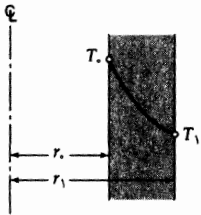
۴.ب۱۰ رسانش گرما در حلقه (شکل ۴.ب۱۰).

(الف) گرما در جداری حلقوی به شعاع داخلی  $r_0$  و شعاع خارجی  $r_1$  جریان دارد. رسانندگی گرمایی با دما تغییرات خطی دارد و از  $k_0$  در  $T_0$  به  $k_1$  در  $T_1$  می‌رسد. رابطه‌ای برای جریان گرما در جدار به دست آورید. (ب) نشان دهید که هرگاه  $(r_1 - r_0)/r_0$  خیلی کوچک باشد، چگونه می‌توان عبارت قسمت (الف) را ساده کرد. نتیجه را از لحاظ فیزیکی تفسیر کنید.

جواب: (الف)  $Q = 2\pi L(T_0 - T_1) \left( \frac{k_0 + k_1}{2} \right) \left( \ln \frac{r_1}{r_0} \right)^{-1}$

(ب)  $Q = 2\pi r_0 L \left( \frac{k_0 + k_1}{2} \right) \left( \frac{T_0 - T_1}{r_1 - r_0} \right)$

شکل ۴.ب۱۰ توزیع دما در جدار حلقوی.



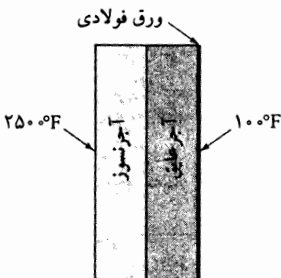
۵.ب۱۰ تولید گرمای ویسکوز در پلیمر مذاب. مسئله شرح داده شده در بخش ۴.۱۰ را برای پلیمر مذابی حل کنید که می‌توان ویسکوزیته آن را با مدل قانون توانی به خوبی توصیف کرد (نگاه کنید به فصل ۸). نشان دهید که توزیع دما همان است که در معادله (۴.۱۰) دیدیم، با این تفاوت که عبارت زیر جای عدد برینکمن را گرفته است:

$$Br_n = \left[ \left[ \frac{mv_b^{n+1}}{bn^{-1}k(T_b - T_0)} \right] \right] \quad (۱۰.۵)$$

۶.ب۱۰ ضخامت عایق برای دیوار کوره (شکل ۶.ب۱۰). دیوار یک کوره از سه لایه تشکیل شده است: (۱) یک لایه از آجر نسوز، (۲) یک لایه از آجر عایق، و (۳) یک ورق فولادی به ضخامت ۰.۲۵ in. برای حفاظت مکانیکی. مطلوب است محاسبه ضخامت هر لایه آجر به صورتی که ضخامت کل دیوار مینیمم باشد و اتلاف گرما از طریق دیوار کوره به  $5000 \text{ Btu/ft}^2 \cdot \text{hr}$  محدود شود؛ تماس گرمایی بین لایه‌ها عالی فرض می‌شود. اطلاعات زیر در دست است:

ماده	رسانندگی گرمایی (Btu/hr · ft · F)	
	در ۲۰۰۰°F	در ۱۰۰۰°F
آجر نسوز	۳٫۶	۱٫۸
آجر عایق	۱٫۸	۰٫۹
فولاد	-	۲۶٫۱

جواب: آجر نسوز، ۰٫۳۹ ft؛ آجر عایق، ۰٫۵۱ ft.



شکل ۶.ب۱۰ دیوار مرکب کوره.

۷.۱۰ انتقال گرما با همرفت و اداشته در جریان بین صفحه‌های موازی (شکل ۱۰.ب.۷). سیالی ویسکوز با خواص فیزیکی وابسته به دما بین دو سطح تخت به فاصله  $2B$  از یکدیگر، جریان آرام شکل یافته دارد. به‌ازای  $z < 0$ ، دمای سیال یکنواخت است و  $T = T_1$ . به‌ازای  $z \geq 0$  گرما با شار یکنواخت و ثابت  $q_0$  در هر دو جدار اضافه می‌شود. مطلوب است تعیین توزیع دمای  $T(x, z)$  به‌ازای مقادیر بزرگ  $z$ .

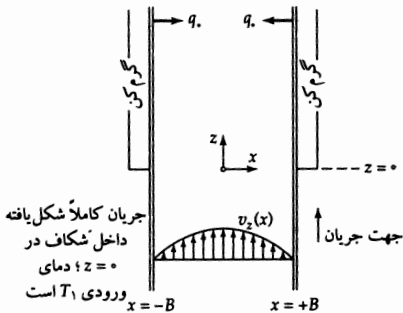
(الف) برای به‌دست آوردن معادله دیفرانسیل  $T(x, z)$  موازنه انرژی لایه‌ای بنویسید. سپس جمله اتلاف ویسکوز و جمله رسانش گرمای محوری را حذف کنید.

(ب) این مسئله را برحسب کمیت‌های بدون بُعد زیر طرح کنید:

$$\Theta = \frac{T - T_1}{q_0 B / k} \quad \sigma = \frac{x}{B} \quad \zeta = \frac{kz}{\rho \hat{C}_p v_{z, \max} B^2} \quad (3) \quad (10.7.1, 2, 3)$$

(ج) جواب مجانبی را به‌ازای مقادیر بزرگ  $z$  به‌دست آورید:

$$\Theta(\sigma, \zeta) = \frac{3}{2}\zeta + \frac{3}{4}\sigma^2 - \frac{1}{8}\sigma^4 - \frac{39}{280} \quad (10.7.4)$$



شکل ۱۰.ب.۷. جریان آرام تراکم‌ناپذیر بین صفحه‌های موازی، که هر دو آن‌ها توسط شار گرمای یکنواخت  $q_0$  گرم می‌شوند که از  $z = 0$  شروع می‌شود.

۸.۱۰ گرمایش الکتریکی لوله (شکل ۱۰.ب.۸). در ساخت لوله‌های فولادی شیشه‌پوش، ابتدا لوله را تا گستره ذوب شیشه گرم می‌کنند و سپس سطح لوله داغ را با دانه‌های شیشه در تماس قرار می‌دهند. این دانه‌ها ذوب می‌شوند و سطح لوله را خیس می‌کنند تا پوششی چسبنده و بی‌تخلخل تشکیل دهند. در یکی از روش‌های پیش‌گرم کردن لوله، جریان الکتریکی از لوله عبور می‌دهند و لوله در نتیجه عبور جریان (چنان‌که در بخش ۲.۱۰ دیدیم) گرم می‌شود. برای این مسئله فرض‌های زیر را اختیار کنید:

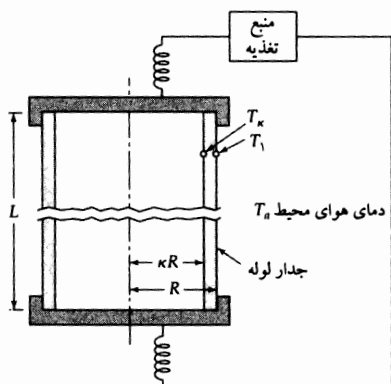
۱. رسانندگی الکتریکی لوله  $k_e$  در گستره دمای مورد نظر ثابت است. آهنگ موضعی تولید گرمای الکتریکی  $S_e$  در سرتاسر طول لوله یکنواخت است؛

۲. سر و ته لوله به ترتیبی بسته شده است که اتلاف گرما از طریق آن‌ها قابل چشم‌پوشی است؛

۳. شار گرما از سطح خارجی لوله به محیط اطراف از قانون سرمایش نیوتون به‌دست می‌آید:  $q_r = h(T_1 - T_a)$ . در این رابطه  $h$  ضریب مناسب انتقال گرماست.

برای حفظ دمای سطح داخلی لوله در مقدار مطلوب  $T_k$ ، در صورت معلوم بودن مقادیر  $k$ ،  $T_a$ ،  $h$  و ابعاد لوله، چه مقدار توان الکتریکی لازم است؟

جواب: 
$$P = \frac{\pi R^2 (1 - \kappa^2) L (T_k - T_a)}{\frac{(1 - \kappa^2) R}{2h} - \frac{(\kappa R)^2}{4k} \left[ \left(1 - \frac{1}{\kappa^2}\right) - 2 \ln \kappa \right]}$$



شکل ۸.۱۰ گرمایش الکتریکی لوله.

۹.۱۰ جریان قالبی با انتقال گرمای همرفتی واداشته. گاهی خمیرها و دوغاب‌های بسیار غلیظ در مجراها به صورت قالبی جامد حرکت می‌کنند. بنابراین می‌توان سرعت حرکت آن‌ها در کل مقطع مجرا را با مقدار ثابت  $v$  تقریب زد.

(الف) مسئله بخش ۸.۱۰ را برای جریان قالبی در لولهٔ مدوری به شعاع  $R$  حل کنید. نشان دهید که توزیع دمای نظیر معادلهٔ (۸.۱۰-۳۱) عبارت است از:

$$\Theta(\xi, \zeta) = 2\zeta + \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{4} \quad (۱۰-۹.۱)$$

که در آن  $\zeta = kz/\rho\hat{C}_p v \cdot R^2$  و  $\Theta$  و  $\xi$  همانند بخش ۸.۱۰ تعریف می‌شوند.

(ب) نشان دهید که برای جریان در شکاف مسطحی به عرض  $2B$ ، توزیع دمای نظیر معادلهٔ (۷-۴.۱۰) عبارت است از:

$$\Theta(\sigma, \zeta) = \zeta + \frac{1}{4}\sigma^2 - \frac{1}{6} \quad (۲-۹.۱۰)$$

که در آن  $\zeta = kz/\rho\hat{C}_p v \cdot B^2$  و  $\Theta$  و  $\sigma$  همانند مسئلهٔ ۷.۱۰ تعریف می‌شوند.

۱۰.۱۰ همرفت آزاد در حلقه‌ای با ارتفاع متناهی (شکل ۱۰.۱۰). حلقه‌ای عمودی با سر و ته بسته، حاوی سیالی است. جدار داخلی به شعاع  $\kappa R$  در دمای  $T_\kappa$  و جدار خارجی به شعاع  $R$  در دمای  $T_1$  نگه داشته می‌شود. با استفاده از فرض‌ها و رهیافت بخش ۹.۱۰، توزیع سرعت ایجادشده توسط همرفت آزاد را به دست آورید.

(الف) ابتدا توزیع دما را به دست آورید:

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_\kappa} = \frac{\ln \xi}{\ln \kappa} \quad (۱۰-۱۰.۱)$$

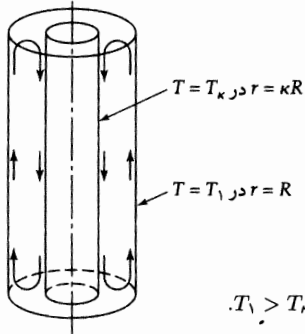
که در آن  $\xi = r/R$ .

(ب) سپس نشان دهید که معادلهٔ حرکت عبارت است از:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dv_z}{d\xi} \right) = A + B \ln \xi \quad (۲-۱۰.۱)$$

که در آن  $A = (R^2/\mu)(dp/dz + \rho_1 g)$  و  $B = ((\rho_1 g \beta_1 \Delta T)R^2/\mu \ln \kappa)$ ، و  $\Delta T = T_1 - T_\kappa$ .





شکل ۱۰.ب.۱۰ الگوی همرفت آزاد در فضای حلقوی با  $T_1 > T_\kappa$

(ج) از معادله حرکت انتگرال بگیرید (نگاه کنید به معادله (ج.۱-۱۱)) و با کاربرد شرایط مرزی ثابت‌های انتگرال‌گیری را محاسبه کنید. سپس نشان دهید که می‌توان  $A$  را با شرط عدم وجود جریان جرمی خالص در هر صفحه با  $z$  ثابت، محاسبه کرد و نتیجه نهایی چنین است:

$$v_z = \frac{\rho_1 g \beta_1 \Delta T R^2}{16\mu} \left[ \frac{(1 - \kappa^2)(1 - 3\kappa^2) - 4\kappa^2 \ln \kappa}{(1 - \kappa^2)^2 + (1 - \kappa^2) \ln \kappa} \left( (1 - \xi^2) - (1 - \kappa^2) \frac{\ln \xi}{\ln \kappa} \right) + 4(\xi^2 - \kappa^2) \frac{\ln \xi}{\ln \kappa} \right] \quad (۳-۱۰.ب.۱۰)$$

۱۱.ب.۱۰ همرفت آزاد با ویسکوزیته وابسته به دما. مسئله بخش ۹.۱۰ را، با به حساب آوردن تغییر ویسکوزیته با دما، دوباره حل کنید. فرض کنید که «سیالیت» (عکس ویسکوزیته) تابع خطی دماست و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\bar{\mu}} [1 + \bar{\beta}_\mu (T - \bar{T})] \quad (۱-۱۱.ب.۱۰)$$

از  $\check{v}_z$  و  $Gr$  تعریف شده در بخش ۹.۱۰ (اما با  $\bar{\mu}$  به جای  $\mu$ ) و روابط زیر استفاده کنید:

$$b_T = \frac{1}{4} \bar{\beta} \Delta T, b_\mu = \frac{1}{4} \bar{\beta}_\mu \Delta T, P = \frac{\bar{\rho} B^2}{\bar{\mu}^2} \left( \frac{dp}{dz} + \bar{\rho} g \right) \quad (۳, ۲-۱۱.ب.۱۰)$$

و نشان دهید که معادله دیفرانسیل توزیع سرعت عبارت است از:

$$\frac{d}{d\check{y}} \left( \frac{1}{1 - b_\mu \check{y}} \frac{d\check{v}_z}{d\check{y}} \right) = P + \frac{1}{4} Gr \check{y} \quad (۴-۱۱.ب.۱۰)$$

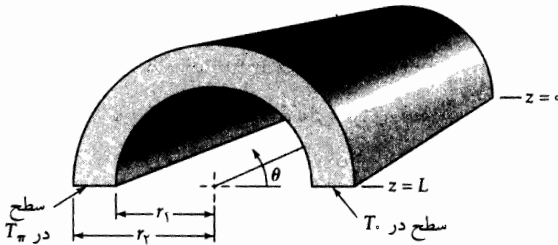
از روش بخش ۹.۱۰ پیروی و جمله‌های شامل توان‌های سوم و چهارم  $\Delta T$  را حذف کنید. نشان دهید که این رابطه به  $\frac{1}{15} Gr b_\mu + \frac{1}{5} Gr b_T = P$ ، و سرانجام به رابطه زیر منتهی می‌شود:

$$\check{v}_z = \frac{1}{14} Gr (\check{y}^2 - \check{y}) - \frac{1}{6} Gr b_T (\check{y}^2 - 1) - \frac{1}{8} Gr b_\mu (\check{y}^2 - 1) (5\check{y}^2 - 1) \quad (۵-۱۱.ب.۱۰)$$

نتیجه را ترسیم کنید تا اعوجاج توزیع سرعت در نتیجه وابستگی ویسکوزیته به دما نشان داده شود.

۱۲.ب.۱۰ رسانش گرما با رسانندگی گرمایی وابسته به دما (شکل ۱۰.ب.۱۲). سطوح خمیده و سطوح انتهایی (هر دو در شکل سایه خورده‌اند) قطعه جامدی به شکل پوسته نیم‌استوانه‌ای، عایق‌کاری شده‌اند. سطح  $\theta = 0$ ، به مساحت  $(r_2 - r_1)L$  در دمای  $T_0$  نگه داشته می‌شود و سطح  $\theta = \pi$ ، بازم به مساحت  $(r_2 - r_1)L$  در دمای  $T_\pi$  نگه داشته می‌شود.

رسانندگی گرمایی جسم جامد تابع خطی دماست و از  $k_0$  در  $T = T_0$  به  $k_1$  در  $T = T_1$  تغییر می‌کند.  
 الف) توزیع دمای حالت پایا را تعیین کنید.  
 ب) شار گرمای کل گذرنده از سطح در  $\theta = 0^\circ$  را پیدا کنید.



شکل ۱۰.۱۲. رسانش گرمای مماسی در پوستهٔ حلقوی.

۱۳.ب.۱۰ راکتور جریان با منبع وابستهٔ نمایی دما. تابع  $F(\Theta)$  معادلهٔ (۷.۵.۱۰) را برای واکنش مرتبهٔ صفر با وابستگی دمایی زیر، فرمول‌بندی کنید:

$$S_c = K e^{-E/RT} \quad (۱۰.۱۳.۱۰)$$

که در آن  $K$  و  $E$  ثابت‌اند، و  $R$  ثابت گاز است. سپس  $F(\Theta)$  را در معادله‌های (۱۵.۵.۱۰) تا (۲۰.۵.۱۰) قرار دهید و با چشم‌پوشی از  $\kappa_{eff,zz}$ ، آن‌ها را برای به‌دست آوردن توزیع دمای بدون بُعد حل کنید.

۱۴.ب.۱۰ اتلاف تبخیری از مخزن اکسیژن.

الف) گازهای مایع را گاهی در مخازن کروی عایق‌کاری شده‌ای ذخیره می‌کنند که هواکش آن‌ها با فشار جو به بیرون راه دارد. عبارتی برای آهنگ انتقال گرمای حالت پایا در جدار چنین مخزنی پی‌ریزی کنید؛ شعاع جدارهای داخلی و خارجی، به‌ترتیب،  $r_0$  و  $r_1$ ، و دمای جدارهای داخلی و خارجی  $T_0$  و  $T_1$  است. رسانندگی گرمایی عایق با دما تغییرات خطی دارد و از  $k_0$  در  $T_0$  به  $k_1$  در  $T_1$  می‌رسد.

ب) آهنگ تبخیر اکسیژن مایع از مخزن کروی به قطر داخلی ۶ ft را که با پوشش عایق حلقوی خالی شده از هوا و پر شده با عایق دانه‌ای، به ضخامت ۱ ft عایق‌کاری شده‌است، تخمین بزنید. اطلاعات زیر در دست است:

دمای سطح داخلی عایق:  $-183^\circ\text{C}$

دمای سطح خارجی عایق:  $0^\circ\text{C}$

نقطهٔ جوش  $\text{O}_2$ :  $-183^\circ\text{C}$

گرمای تبخیر  $\text{O}_2$ :  $1636 \text{ cal/g} - \text{mol}$

رسانندگی گرمایی عایق در  $0^\circ\text{C}$ :  $9.0 \times 10^{-2} \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$

رسانندگی گرمایی عایق در  $-183^\circ\text{C}$ :  $7.2 \times 10^{-2} \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$

جواب: الف)  $Q_0 = 4\pi r_0 r_1 \left( \frac{k_0 + k_1}{2} \right) \left( \frac{T_0 - T_1}{r_1 - r_0} \right)$   
 ب)  $0.198 \text{ kg/hr}$

۱۵.ب ۱۵. گرادیان شعاعی دما در رآکتور شیمیایی حلقوی. یک واکنش کاتالیزی تحت فشار ثابت در بستر پرشده، بین جدارهای استوانه‌ای هم‌محور با شعاع داخلی  $r_0$  و شعاع خارجی  $r_1$  انجام می‌شود. این نوع پیکربندی هنگامی ایجاد می‌شود که دما از طریق چاه ترموکوپل مرکزی اندازه‌گیری می‌شود و هم‌چنین، برای کنترل گرادیان دما در صورت استفاده از حلقه‌ای نازک، سودمند است. جدار داخلی به‌تمامی در دمای یکنواخت  $T_0$  است و می‌توان فرض کرد که انتقال گرما از این سطح انجام نمی‌شود. این واکنش گرما را با آهنگ حجمی یکنواخت  $S_c$  در سرتاسر رآکتور، آزاد می‌کند. رسانندگی گرمایی مؤثر محتویات رآکتور را ثابت فرض می‌کنیم.

(الف) با استفاده از موازنه‌های لایه‌ای انرژی، معادله دیفرانسیل مرتبه دومی بنویسید که توزیع دما را توصیف کند؛ فرض کنید می‌توان از گرادیان دما در جهت محوری چشم‌پوشی کرد. از کدام شرایط مرزی باید استفاده کرد؟

(ب) معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی را برحسب مختص شعاعی بدون بُعد و دمای بدون بُعد تعریف شده به‌صورت زیر، بنویسید:

$$\xi = \frac{r}{r_0}; \Theta = \frac{T - T_0}{S_c r_0^2 / 4k_{\text{eff}}} \quad (10.15-1)$$

توضیح دهید که چرا این انتخاب‌ها منطقی است.

(ج) از این معادله بدون بُعد انتگرال بگیرید تا توزیع دمای شعاعی حاصل شود. این مسئله رسانش نظیر کدام مسئله جریان ویسکوز است؟

(د) عبارت‌هایی برای دما در جدار خارجی و دمای متوسط حجمی بستر کاتالیزگر بنویسید.

(ه) دمای جدار خارجی را، وقتی  $r_0 = 0.45$  in.،  $r_1 = 0.5$  in.،  $k_{\text{eff}} = 0.3$  Btu/hr · ft · F،  $S_c = 4800$  cal/hr · cm<sup>3</sup> و  $T_0 = 900^\circ\text{F}$  محاسبه کنید.

(و) اگر شعاع‌های داخلی و خارجی دوبرابر شوند، نتایج قسمت (ه) چه تغییری پیدا خواهند کرد؟

جواب: (ه)  $888^\circ\text{F}$ .

۱۶.ب ۱۶. توزیع دما در بادسنج سیم‌داغ. بادسنج سیم‌داغ از سیم ظریفی تشکیل شده که معمولاً از جنس پلاتین است و آن را با عبور جریان الکتریکی گرم می‌کنند و در معرض جریان سیال قرار می‌دهند. دمای این سیم، که تابعی از دمای سیال، سرعت سیال، و آهنگ گرمایش است، با اندازه‌گیری مقاومت الکتریکی آن تعیین می‌شود. از این وسیله برای اندازه‌گیری سرعت و نوسانات سرعت در سیستم‌های جریان استفاده می‌کنند. در این مسئله توزیع دما در سیم بادسنج را تحلیل می‌کنیم.

سیمی به قطر  $D$  و طول  $2L$  را در نظر می‌گیریم که در سرهای خود ( $z = +L$  و  $z = -L$ ) تکیه‌گاه دارد و عمود بر جریان هوا نصب شده‌است. جریان الکتریکی با چگالی  $I$  amp/cm<sup>2</sup> از سیم عبور می‌کند و بنابراین بخشی از گرمای تولیدشده، از طریق همرفت به جریان هوا انتقال می‌یابد و تلف می‌شود (نگاه کنید به معادله ۱۰-۲)؛ بخش دیگری از آن نیز از طریق رسانش در دو سر سیم تلف می‌شود. تکیه‌گاه‌ها، به‌علت اندازه و رسانندگی الکتریکی بالای خود، بر اثر عبور جریان گرم نمی‌شوند، بلکه در دمای  $T_L$  می‌مانند که با دمای هوایی که به سیم نزدیک می‌شود، برابر است. از اتلاف گرما از طریق تابش چشم‌پوشی می‌شود.

(الف) با فرض این‌که  $T$  فقط به  $z$  وابسته است، معادله‌ای برای توزیع دمای حالت‌یابا در سیم بنویسید؛ درواقع از تغییر شعاعی دما در سیم چشم‌پوشی می‌کنید. به‌علاوه، فرض کنید رسانندگی گرمایی و الکتریکی سیم، و ضریب انتقال گرما از سیم به جریان هوا یکنواخت است.

(ب) نمودار توزیع دمای به‌دست‌آمده در قسمت (الف) را ترسیم کنید.

(ج) جریان لازم برای گرم کردن سیم پلاتینی را، به‌طوری‌که دما در مرکز آن به  $50^\circ\text{C}$  برسد، برحسب آمپر محاسبه کنید؛ شرایط زیر برقرار است:

$$T_L = 20^\circ\text{C}$$

$$h = 100 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F}$$

$$D = 0.127 \text{ mm}$$

$$k = 40.2 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$$

$$L = 0.5 \text{ cm}$$

$$k_e = 1700 \times 10^5 \text{ ohm}^{-1} \text{cm}^{-1}$$

جواب: (الف)  $T - T_L = \frac{DI^2}{4hk_e} \left( 1 - \frac{\cosh \sqrt{4h/kDz}}{\cosh \sqrt{4h/kDL}} \right)$  (ج)  $170 \text{ amp}$ .

۱۷.ب.۱۰ جریان غیرنیوتونی با انتقال گرما از طریق همرفت واداشته<sup>۱</sup> برای تخمین اثر ویسکوزیته غیرنیوتونی بر انتقال گرما در مجراها، مدل قانون توانی فصل ۸، توزیع سرعتی را به‌دست می‌دهد که میزان انحراف از شکل سهموی را نسبتاً خوب نشان می‌دهد.

(الف) مسئله بخش ۸.۱۰ (انتقال گرما در لولهٔ مدور) را با استفاده از مدل قانون توانی ارائه‌شده با معادله‌های (۲-۳.۸) و (۳-۳.۸) حل کنید. نشان دهید که توزیع دمای نهایی چنین است:

$$\Theta = \frac{2(s+3)}{(s+1)}\zeta + \frac{(s+3)}{2(s+1)}\xi^2 - \frac{2}{(s+1)(s+3)}\xi^{s+3} - \frac{(s+3)^2 - 8}{4(s+1)(s+3)(s+5)} \quad (1-17.ب.10)$$

که در آن  $s = 1/n$

(ب) مسئله ۱۰.ب.۷ (انتقال گرما در شکاف مسطح) را با استفاده از مدل قانون توانی حل کنید. توزیع بدون بُعد دما را به‌دست آورید:

$$\Theta = \frac{(s+2)}{(s+1)} \left[ \zeta + \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{(s+2)(s+3)}|\sigma|^{s+3} - \frac{(s+2)(s+3)(2s+5) - 6}{6(s+3)(s+4)(2s+5)} \right] \quad (2-17.ب.10)$$

توجه کنید که این نتایج شامل نتایج نیوتونی ( $s = 1$ ) و نتایج جریان قالبی ( $s = \infty$ ) است. برای آشنایی با تعمیم این رهیافت، مسئله ۲.د.۱۰ را ببینید.

۱۸.ب.۱۰ توزیع دمای رآکتور با شار گرمای محوری<sup>۲</sup> (شکل ۱۰.ب.۱۸).

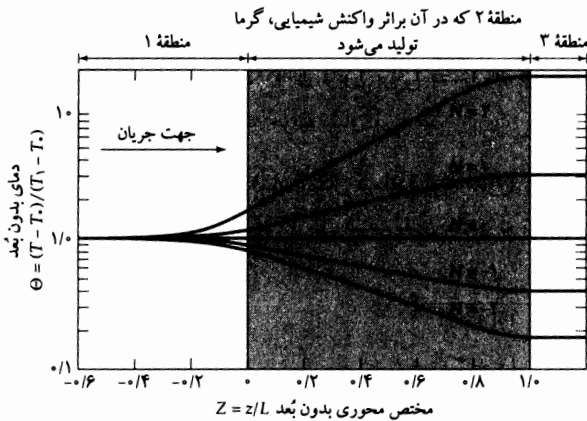
(الف) نشان دهید که برای منبع گرمایی که تابع خطی دماست، معادله‌های (۱۰.ب.۱۴) تا (۱۰.ب.۱۴) (به‌ازای  $m_+ \neq m_-$ ) جواب‌هایی به شرح زیر دارند:

$$\Theta^I = 1 + \frac{m_+ m_- (\exp m_+ - \exp m_-)}{m_+^2 \exp m_+ - m_-^2 \exp m_-} \exp [(m_+ + m_-)Z] \quad (۱۰.ب.۱۸-۱)$$

$$\Theta^{II} = \frac{m_+ (\exp m_+) (\exp m_- Z) - m_- (\exp m_-) (\exp m_+ Z)}{m_+^2 \exp m_+ - m_-^2 \exp m_-} (m_+ + m_-) \quad (۱۰.ب.۱۸-۲)$$

$$\Theta^{III} = \frac{m_+^2 - m_-^2}{m_+^2 \exp m_+ - m_-^2 \exp m_-} \exp (m_+ + m_-) \quad (۱۰.ب.۱۸-۳)$$

در این جا  $m_{\pm} = fr \sqrt{1 - (4N/B)}$  که در آن  $B = \rho v_0 \hat{C}_p L / \kappa_{eff,zz}$  بعضی از توزیع‌های محاسبه‌شده با استفاده از این معادله‌ها در شکل ۱۸.ب.۱۰ نشان داده شده‌است.



شکل ۱۸.ب.۱۰ توزیع دمای پیش‌بینی‌شده در رآکتور جریان محوری بستر ثابت، به‌ازای  $B = ۸$  و مقادیر مختلف  $N$ .

(ب) نشان دهید که در حد، وقتی  $B$  به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، جواب بالا با معادله‌های (۱۰.ب.۲۱) تا (۱۰.ب.۲۳) در توافق است.

(ج) نتایج معادله (۱۰.ب.۲۲) و شکل ۱۸.ب.۱۰ را، به‌ازای  $N = ۲$  در  $N = ۰.۷, ۰.۵, ۰.۹, ۱.۰$  از لحاظ عددی مقایسه کنید.

<sup>۲</sup> برگرفته از نتایج مشابهی که در منبع زیر، برای رآکتورهای جریان هم‌دما با نفوذ طولی و واکنش مرتبه اول به‌دست آمده‌است:

G. Damköhler, *Z. Elektrochem.*, **43**, 1-8, 9-13 (1937), and J. F. Wehner and R. H. Wilhelm, *Chem. Engr. Sci.*, **6**, 89-93 (1956); **8**, 309 (1958).

گرهارت کوهلر (۱۹۴۴-۱۹۰۸) به‌سبب کار روی واکنش‌های شیمیایی در حال جریان و سیستم‌های نفوذی شهرت یافت؛ یکی از نوشته‌های مهم او چنین است:

*Der Chemie-Ingenieur*, Leipzig (1937), pp. 359-485

ریچارد هرمان ویلهلم (۱۹۶۸-۱۹۰۹)، رئیس گروه مهندسی شیمی در دانشگاه پرینستون، به‌سبب تحقیق روی رآکتورهای کاتالیزی بستر ثابت، انتقال سیال‌شده، و فرایند جداسازی «تلمبه‌زنی پارامتری» شهرت دارد.

(د) با فرض قابل‌کاربرد بودن معادله (۹-۶-۹)، نشان دهید که نتایج ارائه‌شده در شکل ۱۰-ب، ۱۸، متناظر با وضعیتی است که در آن  $L$ ، طول بستر کاتالیزگر، ۴ برابر قطر ذره است. چون نسبت  $L/D_p$  در رآکتورهای صنعتی به‌ندرت از  $۱۰^۰$  کوچک‌تر است، نتیجه می‌شود که چشم‌پوشی از  $k_{eff,zz}$  در محاسبات طراحی جریان‌پایا، فرضی منطقی است.

۱۰-ج۱. گرمایش سیم برقی با رسانندگی گرمایی و الکتریکی وابسته به دما.<sup>۳</sup> مطلوب است تعیین توزیع دما در سیم داغ گرم‌شده با جریان برقی، وقتی رسانندگی گرمایی و الکتریکی با دما به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\frac{k}{k_0} = 1 - \alpha_1 \Theta - \alpha_2 \Theta^2 + \dots, \quad \frac{k_e}{k_{e0}} = 1 - \beta_1 \Theta - \beta_2 \Theta^2 + \dots \quad (۱۰-۱-۲)$$

در این جا  $k_0$  و  $k_{e0}$  مقادیر رسانندگی در دمای  $T_0$  و  $\Theta = (T - T_0)/T_0$  افزایش دمای بدون بُعد است. ضرایب  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  ثابت‌اند. این نوع بسط سری در گستره دمای متوسط سودمند است.

(الف) به‌علت وجود گرادیان دما در سیم، رسانندگی الکتریکی تابعی از مکان  $k_e(r)$  است. بنابراین، چگالی جریان نیز تابعی از  $r$  است:  $I(r) = k_e(r) \cdot (E/L)$  و منبع گرمای الکتریکی نیز وابسته به مکان است:  $S_e(r) = k_e(r) \cdot (E/L)^2$  پس معادله توزیع دما عبارت است از:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r k(r) \frac{dT}{dr} \right) = k_e(r) \left( \frac{E}{L} \right)^2 \quad (۱۰-۳)$$

حال کمیت‌های بدون بُعد  $\xi = r/R$  و  $B = k_{e0} R^2 E^2 / k_0 L^2 T_0$  را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که معادله (۱۰-۳) چنین نوشته می‌شود:

$$-\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{k}{k_0} \xi \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = B \frac{k_e}{k_{e0}} \quad (۱۰-۴)$$

وقتی عبارت‌های سری توانی برای رسانندگی را در این معادله قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$-\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( (1 - \alpha_1 \Theta - \alpha_2 \Theta^2 + \dots) \xi \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = B (1 - \beta_1 \Theta - \beta_2 \Theta^2 + \dots) \quad (۱۰-۵)$$

این معادله‌ای است که باید حل کرد تا توزیع دمای بدون بُعد حاصل شود.

(ب) توجه کنید که اگر همه  $\alpha_i$ ها و  $\beta_i$ ها صفر بودند (یعنی هردو رسانندگی ثابت بودند)، آنگاه معادله (۱۰-۵) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$-\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = B \quad (۱۰-۶)$$

وقتی این معادله را، با این شرط مرزی که  $\Theta$  مساوی مقدار متناهی در  $\xi = 0$  و  $\Theta = 0$  در  $\xi = 1$ ، حل کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\Theta = \frac{1}{4} B (1 - \xi^2) \quad (۱۰-۷)$$

این معادله (۱۰-۷) با نمادگذاری بدون بُعد است.

۳. جواب ارائه‌شده در این‌جا توسط ال. جی. اف. بروئر پیشنهاد شد (ارتباط شخصی، ۲۰ اوت ۱۹۵۸).

توجه کنید که معادله (۱۰-۱.۵)، جوابی به صورت معادله (۱۰-۱.۷)، به ازای مقادیر کوچک  $B$  (یعنی وقتی منبع گرما ضعیف باشد) دارد. برای منبع گرمای قوی‌تر، فرض کنید که توزیع دما را می‌توان به صورت سری توانی برحسب شدت بدون بُعد منبع گرما،  $B$ ، بیان کرد:

$$\Theta = \frac{1}{4}B(1 - \xi^2)(1 + B\Theta_1 + B^2\Theta_2 + \dots) \quad (10-1.8)$$

در این جا  $\Theta_n$  تابع  $\xi$  هست، اما تابع  $B$  نیست. معادله (۱۰-۱.۸) را در معادله (۱۰-۱.۵) قرار دهید و ضرایب توان‌های مشابه  $B$  را برابر بگیرید تا یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی برای  $\Theta_n$  حاصل شود، و  $n = 1, 2, 3, \dots$ . این دستگاه را می‌توان با استفاده از این شرایط مرزی که  $\Theta_n$  در  $\xi = 0$  مقدار صفری متناهی دارد و در  $\xi = 1$  داریم  $\Theta_n = 0$ ، حل کرد. نتیجه می‌شود:

$$\Theta = \frac{1}{4}B(1 - \xi^2) \left[ 1 + B \left( \frac{1}{8}\alpha_1(1 - \xi^2) - \frac{1}{16}\beta_1(3 - \xi^2) \right) + O(B^2) \right] \quad (10-1.9)$$

که در آن  $O(B^2)$  به معنای «جمله‌هایی از مرتبه  $B^2$  و بالاتر» است.

(ج) برای موادی که با قانون ویدمان-فرانتس-لورنتس (بخش ۵.۹ را ببینید) توصیف می‌شوند، نسبت  $k/k_e T$  ثابت است (مستقل از دماست)، بنابراین:

$$\frac{k}{k_e T} = \frac{k_0}{k_{e0} T_0} \quad (10-1.10)$$

این نتیجه را با معادله‌های (۱۰-۱.۱) و (۱۰-۱.۲) مقایسه کنید تا نتیجه شود:

$$1 - \alpha_1\Theta - \alpha_2\Theta^2 + \dots = (1 - \beta_1\Theta - \beta_2\Theta^2 + \dots)(1 + \Theta) \quad (11-1.1)$$

ضرایب توان‌های مساوی دمای بدون بُعد را برابر قرار دهید تا روابط بین  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  را پیدا کنید:  $\alpha_1 = \beta_1 - 1$ ،  $\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$  و غیره. با استفاده از این روابط، رابطه زیر را به دست آورید:

$$\Theta = \frac{1}{4}B(1 - \xi^2) \left[ 1 - \frac{1}{16}B((\beta_1 + 2) + (\beta_1 - 2)\xi^2) + O(B^2) \right] \quad (12-1.1)$$

۲.۱۰ گرمایش ویسکوز با ویسکوزیته و رسانندگی گرمایی وابسته به دما (شکل‌های ۱۰-۴.۱ و ۱۰-۴.۲). وضعیت جریان نشان داده شده در شکل ۱۰-۴.۱ را در نظر بگیرید. هردو سطح ساکن و متحرک در دمای ثابت  $T_0$  نگه داشته می‌شوند. وابستگی‌های دمایی  $k$  و  $\mu$  از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \alpha_1\Theta + \alpha_2\Theta^2 + \dots \quad (1-2.1)$$

$$\frac{\mu_0}{\mu} = \frac{\varphi}{\varphi_0} = 1 + \beta_1\Theta + \beta_2\Theta^2 + \dots \quad (2-2.1)$$

که در آن  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  ثابت‌اند،  $\varphi = 1/\mu$  سیالیت است، و اندیس «۰» به معنای «محاسبه شده در  $T = T_0$ » است. دمای بدون بُعد به صورت  $\Theta = (T - T_0)/T_0$  تعریف می‌شود.

(الف) نشان دهید که معادله‌های دیفرانسیل توصیف‌کننده جریان ویسکوز و رسانش گرما را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\mu}{\mu_0} \frac{d\phi}{d\xi} \right) = 0 \quad (۱۰-۲-۳)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{k}{k_0} \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + Br \frac{\mu}{\mu_0} \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad (۱۰-۲-۴)$$

که در آن  $Br = \mu_0 v_b^2 / k_0 T_0$  و  $\xi = x/b$ ،  $\phi = v_z/v_b$  (عدد برینکمن).

(ب) می‌توان از معادله توزیع سرعت بدون بُعد یک بار انتگرال گرفت تا نتیجه شود  $d\phi/d\xi = C_1 \cdot (\varphi/\varphi_0)$ ، که در آن  $C_1$  ثابت انتگرال‌گیری است. سپس این عبارت را در معادله انرژی قرار می‌دهیم تا نتیجه شود:

$$\frac{d}{d\xi} \left( (1 + \alpha_1 \Theta + \alpha_2 \Theta^2 + \dots) \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + Br C_1^2 (1 + \beta_1 \Theta + \beta_2 \Theta^2 + \dots) = 0 \quad (۱۰-۲-۵)$$

دو جمله اول جواب را به صورت زیر به دست آورید:

$$\Theta(\xi; Br) = Br \Theta_1(\xi) + Br^2 \Theta_2(\xi) + \dots \quad (۱۰-۲-۶)$$

$$\phi(\xi; Br) = \phi_0 + Br \phi_1(\xi) + Br^2 \phi_2(\xi) + \dots \quad (۱۰-۲-۷)$$

هم‌چنین پیشنهاد می‌شود که ثابت انتگرال‌گیری  $C_1$  نیز به صورت سری توانی عدد برینکمن بسط داده شود، بنابراین:

$$C_1(Br) = C_{10} + Br C_{11} + Br^2 C_{12} + \dots \quad (۱۰-۲-۸)$$

(ج) این مسئله را تکرار کنید و این بار شرط مرزی در  $y = b$  را به  $q_x = 0$  تغییر دهید (به جای مشخص کردن دما).<sup>۴</sup>

جواب: (ب)

$$\phi = \xi - \frac{1}{12} Br \beta_1 (\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3) + \dots$$

$$\Theta = \frac{1}{4} Br (\xi - \xi^2) - \frac{1}{8} Br^2 \alpha_1 (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) - \frac{1}{144} Br^2 \beta_1 (\xi - 2\xi^2 + 2\xi^3 - \xi^4) + \dots$$

(ج)

$$\phi = \xi - \frac{1}{6} Br \beta_1 (2\xi - 3\xi^2 + \xi^3) + \dots$$

$$\Theta = Br (\xi - \frac{1}{4} \xi^2) - \frac{1}{8} Br^2 \alpha_1 (4\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4) + \frac{1}{144} Br^2 \beta_1 (-8\xi + 8\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4) + \dots$$

۱۰-۳-۳. گرمایش ویسکوز در ویسکوزیته‌سنج مخروط و صفحه‌ای.<sup>۵</sup> در معادله (۲-۱۱-۳) عبارتی برای گشتاور  $T$  لازم برای حفظ سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  در ویسکوزیته‌سنج مخروط و صفحه‌ای با زاویه  $\psi$  (نگاه کنید

4. R. M. Turian and R. B. Bird, *Chem. Eng. Sci.*, **18**, 689-696 (1963).

5. R. M. Turian, *Chem. Eng. Sci.*, **20**, 771-781 (1965);

در این اثر تصحیح گرمایش ویسکوز برای سیالات غیرنیوتونی شرح داده شده‌است. هم‌چنین نگاه کنید به

R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1, 2nd edition, Wiley-Interscience, New York (1987), pp. 223-227.



به شکل ۲.۱۱ وجود دارد. می‌خواهیم ضریب تصحیحی برای منظور کردن تغییر گشتاور ناشی از تغییر ویسکوزیته بر اثر گرمایش ویسکوز به دست آوریم. این اثر می‌تواند عامل اختلال در اندازه‌گیری‌های ویسکوزیته‌سنج شود و خطایی تا حدود ۲٪ ایجاد کند.

(الف) نتیجه مسئله ۱۰.ج.۱ را، چنان‌که در مسئله ۱۱.۲ (الف) دیدیم، با سیستم مخروط و صفحه‌ای وفق دهید. شرط مرزی صفر بودن شارگرما در سطح مخروط واقع‌گرایانه‌تر از این فرض به نظر می‌رسد که دماهای مخروط و صفحه برابرند، زیرا صفحه به ترموستات متصل است و مخروط نیست.  
(ب) نشان دهید که تصحیح زیر از معادله (۲.۱۱-۳) حاصل کار است:

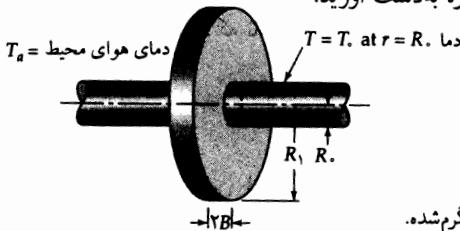
$$T_z = \frac{2\pi\mu_0\Omega R^2}{3\psi_0} \left(1 - \frac{1}{5}\overline{Br}\beta_1 + \frac{1}{45}\overline{Br}^2(3\beta_1^2 + \alpha_1\beta_1 - 2\beta_2) + \dots\right) \quad (۱۰.۳-ج)$$

که در آن  $\overline{Br} = \mu_0\Omega^2 R^2/k_0 T_0$  عدد برینکمن است. نماد  $\mu_0$  ویسکوزیته در دمای  $T_0$  را نشان می‌دهد.

۱.۵۱۰ اتلاف گرما از پره دایره‌ای (شکل ۱.۵۱۰).

(الف) توزیع دمای  $T(r)$  را برای پره دایره‌ای به ضخامت  $2B$  روی لوله‌ای با دمای جدار خارجی  $T_0$  به دست آورید. همان فرض‌های به‌کاررفته در بررسی پره مستطیلی بخش ۷.۱۰ را اختیار کنید.

(ب) عبارتی برای اتلاف گرمایی کل پره به دست آورید.



شکل ۱.۵۱۰ پره دایره‌ای روی لوله گرم‌شده.

۲.۵۱۰ جریان داخل مجرا با شارگرمای ثابت در جدار و توزیع سرعت اختیاری.

(الف) مسئله بخش ۸.۱ را برای توزیع سرعت جریان با تقارن محوری و کاملاً شکل یافته  $v_z/v_{z,max} = \phi(\xi)$  که در آن  $\xi = r/R$ ، حل کنید. نشان دهید که توزیع دما از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Theta = C_0 \xi + C_1 \int_0^\xi \frac{I(\bar{\xi})}{\bar{\xi}} d\bar{\xi} + C_2 \ln \xi + C_3 \quad (۱.۲.۵۱۰)$$

که در آن:

$$I(\bar{\xi}) = \int_0^{\bar{\xi}} \phi \bar{\xi} d\bar{\xi} \quad (۲.۲.۵۱۰)$$

نشان دهید که  $C_1 = 0$  و  $C_0 = [I(1)]^{-1}$ . سپس نشان دهید که ثابت باقی‌مانده عبارت است از:

$$C_2 = -[I(1)]^{-2} \int_0^1 \phi \xi \left[ \int_0^\xi \bar{\xi}^{-1} I(\bar{\xi}) d\bar{\xi} \right] d\xi \quad (۳.۲.۵۱۰)$$

نشان دهید که وقتی توزیع سرعت سهموی باشد، معادله‌های بالا به معادله‌های (۲۷-۸.۱۰) تا (۳۰-۸.۱۰) منتهی می‌شوند.

از این نتایج می‌توان برای محاسبه توزیع دما در جریان کاملاً شکل‌یافته داخل لوله، با هر نوع ماده، استفاده کرد، به شرط آن‌که بتوان توزیع سرعت را به‌طور منطقی تخمین زد. به‌عنوان حالت‌های خاص، می‌توان نتایج را برای جریان نیوتونی، جریان قالبی، جریان غیرنیوتونی، و حتی با کمی اصلاح، برای جریان متلاطم به‌کار برد (نگاه کنید به بخش ۴.۱۳).<sup>۶</sup>

(ب) نشان دهید که شار گرمای جداری بدون بُعد برابر است با:

$$\Theta_0 - \Theta_b = [I(1)]^{-2} \int_0^1 \xi^{-1} [I(\xi)]^2 d\xi \quad (4-2.10)$$

$$\frac{q \cdot D}{k(T_0 - T_b)} = \frac{2}{\Theta_0 - \Theta_b} \quad (5-2.10)$$

و این‌که، برای جریان آرام سیالات نیوتونی، این کمیت  $\frac{48}{11}$  است.

(د) تفسیر فیزیکی  $I(1)$  چیست؟

6. R. N. Lyon, *Chem, Engr. Prog.*, **47**, 75-59 (1951);

توجه کنید که تعریف  $\phi(\xi)$  که در این جا به‌کار رفت، با تعریف آن در جدول‌های ۱-۲.۱۴ و ۲ متفاوت است.

## فصل ۱۱

### معادله‌های تغییر برای سیستم‌های غیرهم‌دما

#### ۱.۱۱ معادله انرژی

#### ۲.۱۱ صورت‌های خاص معادله انرژی

#### ۳.۱۱ معادله بوسینسک حرکت برای همرفت واداشته و آزاد

#### ۴.۱۱ کاربرد معادله‌های تغییر برای حل مسئله‌های حالت‌پایا

#### ۵.۱۱ تحلیل بُعدی معادله‌های تغییر برای سیستم‌های غیرهم‌دما

در فصل ۱۰ روش موازنه لایه‌ای انرژی را برای حل مسئله‌های نسبتاً ساده جریان گرمای حالت‌پایا شرح دادیم. توزیع دما و چند خاصیت فرعی، مانند دمای متوسط و شار انرژی را به‌دست آوردیم. در این فصل موازنه لایه‌ای انرژی را تعمیم می‌دهیم و معادله انرژی را به‌دست می‌آوریم، که یک معادله دیفرانسیل جزئی است که انتقال انرژی در سیال یا جامد همگن را توصیف می‌کند.

این فصل با فصل ۳ نیز رابطه نزدیک دارد، که در آن معادله پیوستگی (پایستگی جرم) و معادله حرکت (پایستگی اندازه حرکت) را معرفی کردیم. با اضافه شدن معادله انرژی (پایستگی انرژی) می‌توانیم توانایی حل مسئله خود را به سیستم‌های غیرهم‌دما گسترش دهیم.

در بخش ۱.۱۱ کار خود را با به‌دست آوردن معادله تغییر برای انرژی کل شروع می‌کنیم. مانند فصل ۱۰، از بردار شار انرژی مرکب  $e$  در به‌کارگیری قانون پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. در بخش ۲.۱۱ معادله انرژی مکانیکی (بخش ۳.۳) را از معادله انرژی کل تفریق می‌کنیم تا معادله تغییر انرژی داخلی را به‌دست آوریم. با استفاده از معادله اخیر می‌توانیم معادله تغییر دما را به‌دست آوریم و همین نوع معادله انرژی است که معمولاً از آن استفاده می‌کنند. در این فصل بیش‌ترین توجه ما به معادله‌های مختلف انرژی است که از آن‌ها نام بردیم، اما در بخش ۳.۱۱ معادله‌ای تقریبی برای حرکت به‌دست می‌آوریم که در حل مسئله‌های شامل همرفت آزاد به‌کار می‌آید. در بخش ۴.۱۱ معادله‌های تغییری را که تا این بخش پی‌ریزی کرده‌ایم، جمع‌بندی می‌کنیم. سپس استفاده از این معادله‌ها را در چند مثال نشان می‌دهیم و در این مثال‌ها کار را از معادله‌های عام شروع می‌کنیم و جمله‌های غیرضروری را حذف می‌کنیم. به این ترتیب راه‌کاری استاندارد برای تنظیم و حل مسئله در اختیار داریم. سرانجام در بخش ۵.۱۱ بحث تحلیل بُعدی بخش ۷.۳ را تعمیم می‌دهیم و نشان می‌دهیم که چگونه در مسئله‌های انتقال گرما گروه‌های بدون بُعد اضافی مطرح می‌شوند.

### ۱.۱۱ معادله انرژی

معادله تغییر برای انرژی با کاربرد قانون پایستگی انرژی در مورد جزء حجم کوچک  $\Delta x \Delta y \Delta z$  (شکل ۱-۱.۳ را ببینید) و سپس میل دادن ابعاد این جزء حجم به سمت مقادیر بسیار کوچک، به دست می‌آید. قانون پایستگی انرژی تعمیمی از قانون اول ترمودینامیک کلاسیک است که با اختلاف انرژی‌های داخلی دو حالت تعادل سیستمی بسته، به سبب اضافه کردن گرما به سیستم و انجام دادن کار روی آن سروکار دارد (یعنی همان رابطه آشنای  $\Delta U = Q + W$ ). در این جا به یک جزء حجم ساکن علاقه‌مندیم که در فضا تثبیت شده‌است و سیال در آن جاری است. هر دو نوع انرژی جنبشی و انرژی داخلی می‌توانند از طریق انتقال همرفتی به سیستم وارد و از آن خارج شوند. از طریق رسانش نیز گرما می‌تواند به سیستم وارد یا از آن خارج شود. چنان‌که در فصل ۹ دیدیم، رسانش گرما اساساً فرایندی مولکولی است. کار را می‌توان با به حرکت درآوردن سیال توسط تنش انجام داد و این نیز فرایندی مولکولی است. این جمله شامل کار انجام شده توسط نیروهای فشاری و نیروهای ویسکوز است. به علاوه، با استفاده از نیروهای خارجی، مانند گرانش، نیز می‌توان روی سیستم کار انجام داد.

می‌توان با نوشتن پایستگی انرژی به صورت زیر، پاراگراف بالا را خلاصه و جمع‌بندی کرد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ افزایش انرژی} \\ \text{جنبشی و داخلی} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ خالص افزودن انرژی} \\ \text{جنبشی و داخلی از طریق انتقال} \\ \text{همرفتی} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ خالص افزودن} \\ \text{گرما توسط انتقال} \\ \text{مولکولی (رسانش)} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ انجام کار روی سیستم} \\ \text{از طریق مکانیسم‌های مولکولی} \\ \text{(یعنی از طریق تنش‌ها)} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{آهنگ انجام کار روی سیستم} \\ \text{توسط نیروهای خارجی (مثلاً} \\ \text{نیروی گرانش)} \end{array} \right\} \quad (1-1.11)$$

در پی ریزی معادله انرژی از بردار  $e$  معادله (۵-۸.۹) یا (۶-۹.۸) استفاده خواهیم کرد که شامل سه آکولاد نخست سمت راست معادله (۱-۱.۱۱) است. پیش از ادامه کار باید چند نکته را متذکر شد:

۱. منظور از انرژی جنبشی انرژی مرتبط با حرکت مشهود سیال است که عبارت است از:  $\frac{1}{2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \equiv \frac{1}{2} \rho v^2$  در واحد حجم. در این جا  $\mathbf{v}$  بردار سرعت سیال است.
۲. منظور از انرژی داخلی انرژی‌های جنبشی مولکول‌های سازنده سیال است که در دستگاه مختصاتی در حرکت با سرعت  $\mathbf{v}$  محاسبه می‌شوند، به علاوه انرژی‌های مربوط به حرکت‌های لرزشی و ارتعاشی مولکول‌ها و هم‌چنین انرژی‌های برهم‌کنش بین همه مولکول‌ها. فرض می‌شود که انرژی داخلی  $U$  برای سیال جاری همان تابع دما و چگالی است که در مورد سیال در حال تعادل هست. در نظر داشته‌باشید که فرض مشابهی برای فشار دینامیکی  $p(\rho, T)$  سیال جاری نیز اختیار می‌شود.
۳. انرژی پتانسیل در معادله (۱-۱.۱۱) ظاهر نمی‌شود، زیرا به عوض آن ترجیح می‌دهیم کار انجام شده روی سیستم توسط نیروی گرانش را در نظر بگیریم. اما در پایان این بخش، نحوه بیان این کار بر حسب انرژی پتانسیل را نشان می‌دهیم.

۴. در معادله (۱-۱.۱۰) جمله‌های مختلف منبع در موازنه انرژی لایه‌ای گنجانده شد. در بخش ۴.۱۰ منبع گرمای ویسکوز  $S_v$  به طور خودکار ظاهر شد، زیرا جمله‌های انرژی مکانیکی در بردار  $e$  به صورت مناسب منظور شده‌بودند؛ همین وضعیت در این جا نیز حاکم است و جمله گرمایش ویسکوز  $(\tau : \nabla \mathbf{v}) -$  به طور خودکار در

معادله (۱.۱۱-۲) ظاهر می‌شود. جمله‌های منبع شیمیایی، الکتریکی و هسته‌ای ( $S_n$ ،  $S_e$ ،  $S_c$ ) به‌طور خودکار ظاهر نمی‌شوند، زیرا واکنش‌های شیمیایی، آثار الکتریکی، و فروپاشی‌های هسته‌ای در موازنه انرژی گنجانده نشده‌اند. در فصل ۱۹، وقتی معادله انرژی مخلوط‌ها و واکنش‌های شیمیایی را بررسی می‌کنیم، منبع گرمای شیمیایی،  $S_c$  به‌طور طبیعی ظاهر می‌شود، چنان‌که یک «جمله منبع نفوذی»،  $\sum_{\alpha} (j_{\alpha} \cdot g_{\alpha})$  نیز ظاهر خواهد شد.

اکنون معادله (۱.۱۱-۱) را به‌زبان ریاضی ترجمه می‌کنیم. آهنگ افزایش انرژی جنبشی و داخلی در جزء حجم  $\Delta x \Delta y \Delta z$  عبارت است از:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \rho v^2 + p \hat{U} \right) \quad (2-1.11)$$

در این جا  $\hat{U}$  انرژی داخلی در واحد جرم است (گاهی «انرژی داخلی مخصوص» نامیده می‌شود). حاصل ضرب  $\rho \hat{U}$  انرژی داخلی در واحد حجم، و  $\frac{1}{\rho} \rho v^2 = \frac{1}{\rho} \rho (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$  انرژی جنبشی در واحد حجم است. سپس باید بدانیم چه مقدار انرژی از وجوه جزء حجم  $\Delta x \Delta y \Delta z$  وارد و چه مقدار انرژی از آن خارج می‌شود.

$$\Delta y \Delta z (e_x|_x - e_x|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (e_y|_y - e_y|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (e_z|_z - e_z|_{z+\Delta z}) \quad (3-1.11)$$

در نظر داشته‌باشید که بردار  $e$  شامل انتقال همرفتی انرژی جنبشی و داخلی، رسانش گرما، و کار مرتبط با فرایندهای مولکولی است.

آهنگ انجام کار روی سیال توسط نیروی خارجی برابر است با حاصل ضرب نقطه‌ای سرعت سیال  $\mathbf{v}$  و نیروی وارد بر سیال  $\mathbf{g} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z)$ ، یا:

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \quad (4-1.11)$$

اکنون این سهم‌های مختلف را در معادله (۱.۱۱-۱) قرار می‌دهیم و حاصل را بر  $\Delta x \Delta y \Delta z$  تقسیم می‌کنیم. وقتی  $\Delta x$ ،  $\Delta y$ ، و  $\Delta z$  را به‌سمت صفر میل دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) = - \left( \frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} + \frac{\partial e_z}{\partial z} \right) + \rho (v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \quad (5-1.11)$$

این معادله را می‌توان به‌صورت فشرده‌تر و با نمادگذاری برداری چنین نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) = -(\nabla \cdot \mathbf{e}) + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \quad (6-1.11)$$

سپس عبارت بردار  $\mathbf{e}$  را از معادله (۵.۸.۹) در رابطه بالا قرار می‌دهیم تا معادله انرژی به‌دست آید:

$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) =$	$-(\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) \mathbf{v})$	$-(\nabla \cdot \mathbf{q})$	(۷-۱.۱۱)
آهنگ افزایش انرژی در واحد حجم	آهنگ افزودن انرژی در واحد حجم، از طریق انتقال همرفتی	آهنگ افزودن انرژی در واحد حجم، از طریق رسانش گرما	
$-(\nabla \cdot p \mathbf{v})$	$-(\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}])$	$+\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$	
آهنگ انجام کار روی سیال در واحد حجم، توسط نیروهای فشاری	آهنگ انجام کار روی سیال در واحد حجم، توسط نیروهای ویسکوز	آهنگ انجام کار روی سیال در واحد حجم، توسط نیروهای خارجی	

این معادله شامل صورت‌های انرژی هسته‌ای، تابشی، الکترومغناطیسی، یا شیمیایی نیست. در سیالات ویسکوکشسان، جمله ماقبل آخر را باید با قرار دادن «ویسکوکشسان» به جای «ویسکوز»، از نو تفسیر کرد.

معادله (۷-۱.۱۱) نتیجه اصلی این بخش است و پایه‌ای است برای بقیه مطالب این فصل. این معادله را می‌توان به صورت دیگری نیز نوشت تا شامل انرژی پتانسیل در واحد جرم،  $\hat{\Phi}$ ، که قبلاً با رابطه  $\mathbf{g} = -\nabla\hat{\Phi}$  تعریف شد نیز بشود (نگاه کنید به بخش ۳.۳). برای تغییرات متوسط ارتفاع، نتیجه  $\hat{\Phi} = gh$  حاصل می‌شود که در آن  $h$  مختص درجهت مخالف با جهت میدان گرانشی است. در مسئله‌های زمینی، میدان گرانشی از زمان مستقل است و می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) &= -(\rho\mathbf{v} \cdot \nabla\hat{\Phi}) && (۸-۱.۱۱) \\ &= -(\nabla \cdot \rho\mathbf{v}\hat{\Phi}) + \hat{\Phi}(\nabla \cdot \rho\mathbf{v}) && \text{از اتحاد برداری معادله (الف.۴-۱۹) استفاده کنید} \\ &= -(\nabla \cdot \rho\mathbf{v}\hat{\Phi}) - \hat{\Phi}\frac{\partial\rho}{\partial t} && \text{از معادله (۳-۱.۳) استفاده کنید} \\ &= -(\nabla \cdot \rho\mathbf{v}\hat{\Phi}) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho\hat{\Phi}) && \hat{\Phi} \text{ را مستقل از } t \text{ به کار ببرید} \end{aligned}$$

وقتی این نتیجه را در معادله (۷-۱.۱۱) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\gamma}\rho v^2 + \rho\hat{U} + \rho\hat{\Phi}\right) &= -(\nabla \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\rho v^2 + \rho\hat{U} + \rho\hat{\Phi}\right)\mathbf{v}) \\ &\quad - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot p\mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) \end{aligned} \quad (۹-۱.۱۱)$$

گاهی کار کردن با این صورت از معادله انرژی راحت‌تر است.

## ۲.۱۱ صورت‌های خاص معادله انرژی

مفیدترین صورت معادله انرژی همان است که دما در آن ظاهر می‌شود. هدف ما در این بخش رسیدن به چنین معادله‌ای است که بتوان برای پیش‌بینی توزیع دما از آن استفاده کرد.

ابتدا معادله انرژی مکانیکی، یعنی معادله (۳-۱.۳) را از معادله انرژی (۷-۱.۱۱) تفریق می‌کنیم. نتیجه معادله تغییر انرژی داخلی به صورت زیر است:

$\frac{\partial}{\partial t}\rho\hat{U} =$	$-(\nabla \cdot \rho\hat{U}\mathbf{v})$	$-(\nabla \cdot \mathbf{q})$	
آهنگ افزایش انرژی داخلی در واحد حجم	آهنگ خالص افزودن انرژی داخلی در واحد حجم، از طریق رسانش گرما	آهنگ افزودن انرژی داخلی در واحد حجم، از طریق انتقال هرفتی	
$-p(\nabla \cdot \mathbf{v})$	$-(\boldsymbol{\tau} : \nabla\mathbf{v})$		(۱-۲.۱۱)
آهنگ برگشت‌پذیر افزایش انرژی داخلی در واحد حجم، از طریق تراکم	آهنگ برگشت‌ناپذیر افزایش انرژی داخلی در واحد حجم، از طریق اتلاف ویسکوز		

حال معادله انرژی مکانیکی (۱-۳.۳) و معادله انرژی داخلی (۱-۲.۱۱) را باهم مقایسه می‌کنیم. توجه داشته باشید که جمله‌های  $p(\nabla \cdot \mathbf{v})$  و  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  در هر دو معادله ظاهر می‌شوند، اما علامت‌های مخالف دارند. بنابراین، این جمله‌ها تبدیل داخلی انرژی‌های مکانیکی و گرمایی را توصیف می‌کنند. جمله  $p(\nabla \cdot \mathbf{v})$  بسته به این که سیال منبسط یا منقبض می‌شود، می‌تواند مثبت یا منفی باشد؛ بنابراین معرف حالت برگشت‌پذیر مبادله است. از طرف دیگر، برای سیالات نیوتونی، کمیت  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  - همیشه مثبت است (نگاه کنید به معادله ۳-۳.۳) و بنابراین معرف تنزل برگشت‌ناپذیر انرژی مکانیکی به انرژی داخلی است.

برای سیالات ویسکوکشنسان که در فصل ۸ توصیف شدند، کمیت  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  - ناگزیر نیست مثبت باشد، زیرا ممکن است بخشی از انرژی به صورت انرژی کشسان ذخیره شود.

در بخش ۵.۳ نشان دادیم که با استفاده از مشتق‌های مادی، می‌توان معادله‌های تغییر را به صورت فشرده‌تر نوشت (نگاه کنید به جدول ۱-۵.۳). با استفاده از معادله (۴-۵.۳) می‌توان معادله (۱-۲.۱۱) را به صورت مشتق مادی نوشت. در نتیجه، بدون نیاز به فرض‌های اضافی، داریم:

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) \quad (۲-۲.۱۱)$$

سیس بهتر است به جای انرژی داخلی از آنتالپی استفاده کنیم؛ کاری که در انتهای بخش ۸.۹ نیز انجام دادیم. یعنی در معادله (۲-۲.۱۱)، قرار می‌دهیم  $\hat{U} = \hat{H} - p\hat{V} = \hat{H} - (p/\rho)$ ، قرار می‌دهیم حاصل از ترمودینامیک تعادلی را می‌توان به‌طور موضعی برای سیستم‌های غیرتعادلی به‌کار برد. وقتی این فرمول را در معادله (۲-۲.۱۱) جایگزین کنیم و از معادله پیوستگی (معادله الف جدول ۱-۵.۳) استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\rho \frac{D\hat{H}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) + \frac{Dp}{Dt} \quad (۳-۲.۱۱)$$

حال می‌توانیم از معادله (۷-۸.۹) استفاده کنیم که فرض می‌کند آنتالپی تابعی از  $p$  و  $T$  است (با این فرض تعمیم بعدی به سیالات نیوتونی با محدودیت روبه‌رو می‌شود). سپس می‌توانیم عبارتی برای تغییر آنتالپی در جزء سیال در حرکت با سرعت سیال به‌دست آوریم که عبارت است از:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\hat{H}}{Dt} &= \rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} + \rho \left[ \hat{V} - T \left( \frac{\partial \hat{V}}{\partial T} \right)_p \right] \frac{Dp}{Dt} \\ &= \rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} + \rho \left[ \frac{1}{\rho} - T \left( \frac{\partial (1/\rho)}{\partial T} \right)_p \right] \frac{Dp}{Dt} \\ &= \rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} + \left[ 1 + \left( \frac{\partial \ln \rho}{\rho \ln T} \right)_p \right] \frac{Dp}{Dt} \end{aligned} \quad (۴-۲.۱۱)$$

با برابر نهادن جمله‌های سمت راست معادله‌های (۳-۲.۱۱) و (۴-۲.۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} \quad (۵-۲.۱۱)$$

این معادله تغییر برای دما، برحسب بردار شار گرمای  $q$  و تانسور شار اندازه حرکت ویسکوز  $\boldsymbol{\tau}$  است.

برای استفاده از این معادله به عبارت‌هایی برای این شارها نیاز داریم:

۱. وقتی از قانون فوریه طبق معادله (۴-۱.۹) استفاده می‌کنیم، جمله  $-(\nabla \cdot \mathbf{q})$  به  $(\nabla \cdot k\nabla T) +$ ، یا اگر رسانندگی گرمایی ثابت فرض شود، به  $k\nabla^2 T$  تبدیل می‌شود.

۲. وقتی از قانون نیوتن، معادله (۷-۲.۱) استفاده شود، جمله  $-(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  به  $\mu\Phi_v + \kappa\Psi_v$  تبدیل می‌شود که کمیتی است که در معادله (۳-۳.۳) به‌صراحت داده شد.

این جایگزینی‌ها را در این جا انجام نمی‌دهیم، زیرا تقریباً هیچ‌وقت از معادله تغییر به‌صورت کاملاً عام آن استفاده نمی‌شود. حال چند روایت خاص و دارای محدودیت معادله تغییر برای دما را بررسی می‌کنیم. در همه این بحث‌ها از قانون فوریه با  $k$  ثابت استفاده می‌کنیم و جمله اتلاف ویسکوز را حذف می‌کنیم، زیرا فقط در جریان‌های دارای گرادیان‌های سرعت بزرگ اهمیت پیدا می‌کند:

۱. برای گاز ایده‌آل،  $(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_p = -1$  و

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T + \frac{Dp}{Dt} \quad (۶-۲.۱۱)$$

یا، اگر از رابطه  $\tilde{C}_p - \tilde{C}_v = R$ ، معادله حالت به‌صورت  $pM = \rho RT$ ، و معادله پیوستگی به‌صورت نوشته‌شده در معادله (الف) جدول ۱-۵.۳ استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (۷-۲.۱۱)$$

۲. برای سیال جاری در سیستمی با فشار ثابت،  $Dp/Dt = 0$ ، و

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T \quad (۸-۲.۱۱)$$

۳. برای سیالی با چگالی ثابت،  $(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_p = 0$ ، و

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T \quad (۹-۲.۱۱)$$

۴. برای جامد ساکن،  $\mathbf{v}$  صفر است و داریم:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T \quad (۱۰-۲.۱۱)$$

این پنج معادله آخر آن‌هایی هستند که در کتاب‌های درسی و نشریات پژوهشی، بیش‌تر از بقیه با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم. البته همیشه می‌توانیم به‌سراغ معادله‌های (۵-۲.۱۱) برویم و در صورت نیاز، معادله‌هایی با محدودیت کم‌تری ریزی کنیم. به‌علاوه، می‌توان جمله‌های منبع شیمیایی، الکتریکی، و هسته‌ای را نیز بدون فکر قبلی اضافه کرد؛ کاری که در فصل ۱۰ انجام دادیم.

۱. در این جا فرض ثابت بودن چگالی، به‌جای فرض ساده‌گیرانه‌تر  $(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_p = 0$  اختیار می‌شود، زیرا معادله (۹-۲.۱۱) را معمولاً همراه با معادله (۵-۱.۳) (معادله پیوستگی به‌ازای چگالی ثابت) و معادله (۶-۵.۳) (معادله حرکت به‌ازای چگالی و ویسکوزیته ثابت) به‌کار می‌برند. توجه کنید که معادله فرضی حالت (مقدار ثابت)  $\rho$  را باید با این عبارت که (مقدار متناهی)  $(\partial p / \partial T)_\rho$  تکمیل کرد تا بتوان بعضی از مشتق‌های ترمودینامیکی خاص را محاسبه کرد. مثلاً، رابطه

$$\hat{C}_p - \hat{C}_v = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \quad (۹-۲.۱۱)$$

به این نتیجه منتهی می‌شود که برای «سیال تراکم‌ناپذیری» که به این صورت تعریف شد، داریم  $\hat{C}_p = \hat{C}_v$ .



معادله (۲.۱۱-۱۰) معادله رسانش گرما در جامدات است و مطالب فراوانی در مورد این معادله مشهور که نخستین بار فوریه آن را به دست آورد، نوشته شده است.<sup>۲</sup> در این جا باید به ویژه از اثر مرجع مشهوری که کارلسلا و یگر نوشته اند، نام برد. این کتاب حاوی صدها جواب برای این معادله با انواع مختلفی از شرایط مرزی و اولیه است.<sup>۳</sup>

### ۳.۱۱ معادله بوسینسک حرکت برای همرفت واداشته و آزاد

معادله حرکت ارائه شده به صورت معادله (۲.۳-۹) (یا معادله (ب) در جدول ۵.۳-۱) برای هردو نوع جریان هم دما و غیرهم دما معتبر است. در جریان غیرهم دما، چگالی و ویسکوزیته سیال، به طور کلی، به دما و فشار بستگی دارند. تغییر چگالی اهمیت خاصی دارد، زیرا سبب ایجاد نیروهای شناوری و، در نتیجه، همرفت آزاد می شود که قبلاً در بخش ۹.۱۰ مشاهده کردیم.

وقتی معادله حالت در معادله حرکت قرار داده شود، نیروی شناوری به طور خودکار ظاهر می شود. مثلاً می توان از معادله ساده شده حالت که به صورت معادله (۹.۱۰-۶) ارائه شد، استفاده کرد (این معادله را تقریب بوسینسک) می نامند:<sup>۱</sup>

$$\rho(T) = \bar{\rho} - \bar{\rho}\beta(T - \bar{T}) \quad (۱-۳.۱۱)$$

که در آن  $\beta$  عبارت است از  $-(1/\rho)(\partial\rho/\partial T)_p$  که در  $T = \bar{T}$  محاسبه می شود. این معادله با نوشتن سری تیلر برای  $\rho$  به عنوان تابعی از  $T$ ، با ثابت در نظر گرفتن فشار  $p$  و حفظ فقط دو جمله نخست سری به دست می آید. وقتی معادله (۱-۳.۱۱) را در جمله  $\rho g$ ، (اما نه در جمله  $(\rho D\mathbf{v}/Dt)$ ) معادله (ب) در جدول ۵.۳-۱، جایگزین کنیم، معادله بوسینسک نتیجه می شود:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = (-\nabla p + \bar{\rho}g) - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] - \bar{\rho}g\beta(T - \bar{T}) \quad (۲-۳.۱۱)$$

این صورت از معادله حرکت برای تحلیل های انتقال گرما بسیار مفید است. این معادله حالت های حدی همرفت واداشته و همرفت آزاد (نگاه کنید به شکل ۸.۱۰-۱) و ناحیه بین این حدود را توصیف می کند. در همرفت واداشته جمله شناوری  $-\bar{\rho}g\beta(T - \bar{T})$  نادیده گرفته می شود. در همرفت آزاد (یا همرفت طبیعی) جمله  $(-\nabla p + \bar{\rho}g)$  کوچک است و معمولاً بهتر است حذف شود، به ویژه در جریان عمودی راست خط و برای جریان در نزدیکی اجسام غوطه ور در پهنه های وسیع سیال. برابر صفر قرار دادن  $(-\nabla p + \bar{\rho}g)$  با این فرض هم ارز است که توزیع فشار همان است که در سیال ساکن مشاهده می شود.

به علاوه، معمولاً در سمت چپ معادله (۲-۳.۱۱)  $\bar{\rho}$  را جایگزین  $\rho$  می کنند. این جایگزینی برای همرفت آزاد با اختلاف دمای متوسط سودمند بوده است. در چنین شرایطی حرکت سیال آهسته، و جمله شتاب  $D\mathbf{v}/Dt$  در مقایسه با  $g$  کوچک است.

اما در سیستم هایی که جمله شتاب نسبت به  $g$  بزرگ است، باید در سمت چپ معادله حرکت، از معادله (۱-۳.۱۱) برای چگالی استفاده کرد. این کار، به ویژه در مورد توربین های گازی و در موشک هایی با سرعتی نزدیک به سرعت آبرصوتی لازم است؛ در این موارد اهمیت جمله  $(\rho - \bar{\rho})D\mathbf{v}/Dt$  دست کم به اندازه  $\bar{\rho}g$  است.

2. J. B. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, CEuvres de Fourier, Gauthier-Villars et Fils, Paris (1822).

3. H. S. Carslaw and J. C. Jeager, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, 2nd edition (1959).

1. J. Boussinesq, *Théorie Analytique de Chaleur*, Vol. 2, Gauthier-Villars, Paris (1903).

### ۴.۱۱ کاربرد معادله‌های تغییر برای حل مسئله‌های حالت پایا

در بخش‌های ۱.۳ تا ۴.۳ و ۱.۱۱ تا ۳.۱۱، معادله‌های مختلف تغییر را برای سیال یا جامد خالص به دست آوردیم. به نظر می‌رسد که جمع‌بندی و ارائه خلاصه‌ای از این معادله‌ها، برای ارجاع در آینده مناسب باشد. این جمع‌بندی در جدول ۴.۱۱-۱ ارائه شده است که در آن اغلب معادله‌ها به هر دو صورت  $\partial/\partial t$  و  $D/Dt$  آمده‌اند. محلی که این معادله‌ها برای نخستین بار ارائه شدند نیز گفته شده است.

جدول ۴.۱۱-۱ جمع‌بندی مفیدی است، اما برای حل مسئله از معادله‌هایی استفاده می‌کنیم که به طور صریح در چند دستگاه مختصات متداول نوشته شده‌اند. این کار در پیوست (ب) انجام شده است و خوانندگان باید با جدول‌های این پیوست کاملاً آشنا شوند.

به طور کلی، برای توصیف جریان غیرهم‌دما در سیال نیوتونی، به معادله‌های زیر:

- معادله پیوستگی
- معادله حرکت (حاوی  $\mu$  و  $\kappa$ )
- معادله انرژی (حاوی  $\mu$ ،  $\kappa$ ، و  $k$ )
- معادله حالت گرمایی ( $p = p(\rho, T)$ )
- معادله حالت کالریک ( $\hat{C}_p = \hat{C}_p(\rho, T)$ )

به علاوه عبارت‌هایی برای وابستگی ویسکوزیته، ویسکوزیته اتساعی و رسانندگی گرمایی به چگالی و دما نیاز داریم. علاوه بر آن، شرایط مرزی و اولیه نیز لازم‌اند. سپس، از لحاظ اصولی، می‌توان مجموعه کل این معادله‌ها را حل کرد و فشار، چگالی، سرعت، و دما را به صورت توابعی از مکان و زمان به دست آورد. اگر بخواهیم چنین مسئله مفصلی را حل کنیم، معمولاً باید به سراغ روش‌های عددی برویم.

غالباً ممکن است جوابی محدود برای ما قانع‌کننده باشد و بتوانیم تحلیل مرتبه بزرگی برای مسئله مورد بحث انجام دهیم یا قبل از حل عددی کامل، درباره موارد حدی تحقیق کنیم. این کار با اختیار چند فرض استاندارد انجام می‌شود:

۱. فرض ثابت بودن خواص فیزیکی. اگر بتوان فرض کرد که همه خواص فیزیکی ثابت‌اند، آنگاه معادله‌ها بسیار ساده‌تر می‌شوند و در بعضی موارد می‌توان به جواب‌های تحلیلی رسید.
۲. فرض صفر بودن شارها. برابر صفر قرار دادن  $\mathbf{T}$  و  $\mathbf{q}$  ممکن است برای (الف) فرایندهای جریان آدیاباتیک در سیستم‌های طراحی شده برای کاهش آثار اصطکاک (مانند جریان‌سنج‌های ونتوری دار و توربین‌ها)، و (ب) جریان‌های پرسرعت در اطراف اجسامی با خطوط جریان هموار، مفید باشد. جواب‌های به دست آمده برای توصیف وضعیت در نزدیکی مرزهای سیال-جامد به کار نمی‌آیند، اما ممکن است برای تحلیل پدیده‌های دور از مرزهای جامد مفید باشند.

برای نشان دادن جواب مسئله‌هایی که در آن معادله انرژی نقش مهمی دارد، یک رشته مسئله ایده‌آل‌سازی شده را حل می‌کنیم. در این جا خود را به مسئله‌های جریان حالت پایا محدود می‌کنیم و مسئله‌های حالت ناپایا را در فصل ۱۲ بررسی خواهیم کرد. در هر مسئله، کار را با تهیه فهرستی از فرض‌هایی که به ساده شدن معادله‌های حرکت منتهی می‌شوند، آغاز می‌کنیم.

جدول ۴.۱۱ معادلات تغییر برای سیال‌های خالص برحسب شارها.

معادله		صورت خاص		ملاحظات	
پیوستگی	-	$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$	جدول ۱-۵.۲ (الف)	$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ به صورت ساده می‌شود	
حرکت	کلی	$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}$	جدول ۱-۵.۲ (ب)	به معادله اویلر تبدیل می‌شود	
	تقریبی	$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \bar{\rho} \mathbf{g} - \bar{\rho} \mathbf{g} \beta (T - \bar{T})$	جدول ۲-۳.۱۱ (ج)	جمله شناری را نمایش می‌دهد	
انرژی	برحسب $\dot{K} + \dot{U} + \dot{\Phi}$	$\rho \frac{D(\dot{K} + \dot{U} + \dot{\Phi})}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot p\mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}])$	(د) -	فقط به انرژی $\Phi$ مستقل از زمان دقیق است	
	برحسب $\dot{K} + \dot{U}$	$\rho \frac{D(\dot{K} + \dot{U})}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot p\mathbf{v}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$	(ه) -		
	برحسب $\dot{K} = \frac{1}{2} v^2$	$\rho \frac{D\dot{K}}{Dt} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla p) - (\mathbf{v} \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$	جدول ۱-۵.۲ (و)	از معادله حرکت	
	برحسب $\dot{U}$	$\rho \frac{D\dot{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$	جدول ۲-۲.۱۱ (ز)	جمله حاوی $(\nabla \cdot \mathbf{v})$ به انرژی $\rho$ ثابت برابر صفر است	
	برحسب $\dot{H}$	$\rho \frac{D\dot{H}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) + \frac{Dp}{Dt}$	جدول ۳-۲.۱۱ (ح)	$\dot{H} = \dot{U} + (p/\rho)$	
	برحسب $T, \dot{C}_v$	$\rho \dot{C}_v \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$	(ط) -	برای گاز ایده‌آل $p = p(T)$	
	برحسب $T, \dot{C}_p$	$\rho \dot{C}_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$	جدول ۵-۲.۱۱ (ی)	برای گاز ایده‌آل $p = -1 (\partial \ln \rho / \partial \ln T)_p$	

پیوستگی	-	$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v})$	(ک) ۴-۱.۳	به‌ازای مقدار ثابت $\rho$ ، به‌صورت $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ ساده می‌شود
حرکت	کلی	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} = -[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] - \nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}$	(ل) ۹-۲.۳	به‌ازای $\boldsymbol{\tau} = 0$ به معادله اویلر تبدیل می‌شود
	تقریبی	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} = -[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] - \nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \bar{\rho} \mathbf{g} - \bar{\rho} \mathbf{g} \beta (T - \bar{T})$	(م) -	جمله شناوری را نمایش می‌دهد
انرژی	برحسب $\hat{K} + \hat{U} + \hat{\phi}$	$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\hat{K} + \hat{U} + \hat{\phi}) = -(\nabla \cdot \rho(\hat{K} + \hat{U} + \hat{\phi}) \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}])$	(ن) ۹-۱.۱۱	فقط به‌ازای $\Phi$ مستقل از زمان دقیق است
	برحسب $\hat{K} + \hat{\phi}$	$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\hat{K} + \hat{\phi}) = -(\nabla \cdot \rho(\hat{K} + \hat{\phi}) \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla p) - (\mathbf{v} \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}])$	(س) ۲-۳.۳	فقط به‌ازای $\Phi$ مستقل از زمان دقیق است
	برحسب $\hat{K} + \hat{U}$	$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\hat{K} + \hat{U}) = -(\nabla \cdot \rho(\hat{K} + \hat{U}) \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$	(ع) ۷-۱.۱۱	
	برحسب $\hat{K} = \frac{1}{2} v^2$	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{K} = -(\nabla \cdot \rho \hat{K} \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla p) - (\mathbf{v} \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$	(ف) ۱-۳.۳	از معادله حرکت
انرژی	برحسب $\hat{U}$	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{U} = -(\nabla \cdot \rho \hat{U} \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$	(ص) ۱-۲.۱۱	جمله حاری $(\nabla \cdot \mathbf{v})$ به‌ازای $\rho$ ثابت برابر صفر است
	برحسب $\hat{H}$	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{H} = -(\nabla \cdot \rho \hat{H} \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) + \frac{Dp}{Dt}$	(ق) -	$\hat{H} = \hat{U} + (p/\rho)$
	-	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{S} = -(\nabla \cdot \rho \hat{S} \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T}) - \frac{1}{T}(\mathbf{q} \cdot \nabla T) - \frac{1}{T}(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$	(ا) ۱-۱.۱۱	دو جمله آخر تولید انترپی را توصیف می‌کنند.

### مثال ۴.۱۱-۱

انتقال گرمای همرفتی واداشته حالت پایا در جریان آرام داخل لولهٔ مدور

نحوهٔ تشکیل معادله‌های مسئله موردبحث در بخش ۸.۱۰ را نشان دهید؛ منظور نحوهٔ به‌دست آوردن توزیع دمای سیال برای جریان آرام کاملاً شکل‌یافتهٔ داخل لولهٔ مدور است.

حل

خواص فیزیکی را ثابت می‌گیریم و جوابی به‌صورت زیر فرض می‌کنیم:  $v = \delta_z v_z(r)$ ,  $P = P(z)$ , و  $T = T(r, z)$ . سپس می‌توان معادله‌های تغییر را، به‌صورت ارائه شده در پیوست (ب)، ساده کرد و به روابط زیر رسید:

$$\circ = \circ$$

(۱-۴.۱۱) پیوستگی:

$$\circ = -\frac{dP}{dz} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) \right] \quad (۲-۴.۱۱) \text{ حرکت:}$$

$$\rho \hat{C}_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \mu \left( \frac{dv_z}{dr} \right)^2 \quad (۳-۴.۱۱) \text{ انرژی:}$$

در نتیجهٔ فرض‌های اختیارشده، معادلهٔ پیوستگی به‌صورت خودکار برقرار است. معادلهٔ حرکت، وقتی به‌صورت نشان‌داده‌شده در مثال ۱-۶.۳ حل شود، توزیع سرعت را نتیجه می‌دهد (توزیع سرعت سهموی). سپس می‌توان این عبارت را در جملهٔ انتقال گرمای همرفتی در سمت چپ معادلهٔ (۳-۴.۱۱) و در جملهٔ گرمایش اتلافی ویسکوز در سمت راست قرار داد.

سپس، مانند بخش ۸.۱۰، دو فرض اختیار می‌کنیم: (۱) درجهت  $z$ ، رسانش گرما بسیار کم‌تر از همرفت گرماست، به‌طوری‌که می‌توان از جملهٔ  $\partial^2 T / \partial z^2$  چشم پوشید، و (۲) جریان به‌اندازهٔ کافی سریع نیست که گرمایش ویسکوز درخور اعتنا باشد، و بنابراین جملهٔ  $\mu (\partial v_z / \partial r)^2$  را می‌توان حذف کرد. وقتی این فرض‌ها اختیار شوند، معادلهٔ (۳-۴.۱۱) همانند معادلهٔ (۱۲-۸.۱۰) می‌شود. از این دیدگاه، جواب مجانبی، که فقط به‌ازای  $z$  بزرگ صادق است، مانند بخش ۸.۱۰ به‌دست می‌آید. توجه کنید که سه نوع فرایند محدودکننده را پشت سر گذاشته‌ایم: (۱) حدسیات که در آن صورت جواب به‌طور آزمایشی حدس زده می‌شود؛ (۲) فرض‌ها، که در آن بعضی از پدیده‌ها یا آثار فیزیکی را با کنار گذاشتن جمله‌ها، یا ثابت گرفتن خواص فیزیکی، حذف می‌کنیم؛ و (۳) حل مجانبی، که در آن فقط بخشی از جواب ریاضی کامل را به‌دست می‌آوریم. تمایز قائل شدن بین این سه نوع محدودیت مختلف اهمیت دارد.

### مثال ۴.۱۱-۲

جریان مماسی در حلقه با تولید گرمای ویسکوز

مطلوب است تعیین توزیع دما در مایع تراکم‌ناپذیر محصور بین دو استوانهٔ هم‌محور، که استوانهٔ خارجی با سرعت زاویه‌ای پایا  $\Omega_0$  می‌چرخد (نگاه کنید به بخش ۴.۱۰ و مثال ۳-۶.۳). از نام‌گذاری مثال ۳-۶.۳ استفاده کنید و نسبت شعاع  $\kappa$  را کوچک در نظر بگیرید تا بتوان انحناهای خطوط جریان سیال را به‌حساب آورد.

دمای سطوح داخلی و خارجی ناحیهٔ حلقوی را، به‌ترتیب، در  $T_\kappa$  و  $T_1$  ثابت نگه می‌داریم و می‌دانیم که  $T_\kappa \neq T_1$ . جریان را آرام و پایا فرض کنید و از وابستگی خواص فیزیکی به دما چشم‌پوشی کنید.

این نمونه‌ای از مسئلهٔ همرفت واداشته است: معادله‌های پیوستگی و حرکت را حل می‌کنیم تا توزیع سرعت حاصل شود، و سپس معادلهٔ انرژی را حل می‌کنیم تا توزیع دما به‌دست آید. این مسئله در ارتباط با آثار گرما در ویسکوزیته‌سنج

استوانه‌ای هم‌محور<sup>۱</sup> و در ارتباط با سیستم‌های روانکاری مورد توجه است.  
حل

کار را با این فرض آغاز می‌کنیم که  $\mathbf{v} = \delta_{\theta} v_{\theta}(r)$ ،  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(r, z)$ ، و  $T = T(r)$ . ساده‌سازی معادله‌های تغییر به معادله‌های (۲۰-۶.۳)، (۲۱-۶.۳)، و (۲۲-۶.۳)، (مؤلفه‌های  $r$ ،  $\theta$ ، و  $z$  معادله حرکت)، و معادله انرژی منتهی می‌شود:

$$\circ = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \mu \left[ r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_{\theta}}{r} \right) \right]^2 \quad (۴-۴.۱۱)$$

وقتی جواب مؤلفه  $\theta$  معادله حرکت، که به صورت معادله (۲۹-۶.۳) ارائه می‌شود، در معادله انرژی جایگزین شود، داریم:

$$\circ = k \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{4\mu\Omega_o^2 R^2}{(1-\kappa^2)^2} \frac{1}{r^2} \quad (۵-۴.۱۱)$$

این معادله دیفرانسیل توزیع دماست. می‌توان با انجام جایگزینی‌های زیر، این معادله را برحسب کمیت‌های بدون بُعد نوشت:

$$\xi = \frac{r}{R} \quad \Theta = \frac{T - T_{\kappa}}{T_1 - T_{\kappa}} \quad N = \frac{\mu\Omega_o^2 R^2}{k(T_1 - T_{\kappa})} \cdot \frac{\kappa^2}{(1-\kappa^2)^2} \quad (۸، ۷، ۶-۴.۱۱)$$

پارامتر  $N$  با عدد برینکمن در بخش ۴.۱<sup>۰</sup>، رابطه نزدیک دارد. اکنون معادله (۵-۴.۱۱) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -4N \frac{1}{\xi^2} \quad (۹-۴.۱۱)$$

این معادله به صورت معادله (ج. ۱۱-۱) است و جوابی به صورت زیر دارد:

$$\Theta = -N \frac{1}{\xi^2} + C_1 \ln \xi + C_2 \quad (۱۰-۴.۱۱)$$

ثابت‌های انتگرال‌گیری از شرایط مرزی به دست می‌آیند:

$$\Theta = 0 \quad \text{در } \xi = \kappa \quad \text{۱: شرط مرزی ۱} \quad (۱۱-۴.۱۱)$$

$$\Theta = 1 \quad \text{در } \xi = 1 \quad \text{۲: شرط مرزی ۲} \quad (۱۲-۴.۱۱)$$

تعیین ثابت‌های انتگرال‌گیری به نتیجه زیر منتهی می‌شود:

$$\Theta = \left( 1 - \frac{\ln \xi}{\ln \kappa} \right) + N \left[ \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right) - \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \frac{\ln \xi}{\ln \kappa} \right] \quad (۱۳-۴.۱۱)$$

وقتی  $N = 0$ ، توزیع دما برای پوسته استوانه‌ای بی‌حرکتی به ضخامت  $R(1-\kappa)$  با دماهای داخلی و خارجی  $T_{\kappa}$  و  $T_1$  به دست می‌آید. اگر  $N$  به اندازه کافی بزرگ باشد، در توزیع دما نقطه ماکزیمی وجود خواهد داشت که در:

$$\xi = \sqrt{\frac{2 \ln(1/\kappa)}{(1/\kappa^2) - 1 - (1/N)}} \quad (۱۴-۴.۱۱)$$

واقع است و دما در این نقطه از  $T_{\kappa}$  یا  $T_1$  بزرگ‌تر است.

1. J. R. Van Wazer, J. W. Lyons, K. Y. Kim, and R. E. Colwell, *Viscosity and Flow Measurement*, Wiley, New York (1963), pp. 82-85.

این مثال تصویری از کاربرد معادله‌های جدول‌بندی‌شده تغییر در مختصات استوانه‌ای را نشان می‌دهد، اما در اغلب کاربردهای ویسکوزیته‌سنجی و روانکاری، فاصله بین استوانه‌ها به اندازه‌ای کم است که مقادیر عددی محاسبه‌شده با استفاده از معادله (۴.۱۱-۱۳) با مقادیر حاصل از معادله (۴.۱۰-۹) تفاوت درخور اعتنائی ندارند.

### مثال ۴.۱۱-۳

جریان پایا در فیلم غیرهم‌دما

مایعی با جریان آرام پایا، در طول سطح مسطح شیب‌دار، مطابق شکل‌های ۱-۲.۲ تا ۳-۲.۲ به سمت پایین حرکت می‌کند. سطح آزاد مایع در دمای  $T_0$ ، و سطح جامد در  $x = \delta$  در دمای  $T_\delta$  نگه داشته می‌شود. در این دماها ویسکوزیته مایع، به ترتیب، مقادیر  $\mu_0$  و  $\mu_\delta$  را دارد و چگالی و رسانندگی گرمایی آن را می‌توان ثابت فرض کرد. مطلوب است تعیین توزیع سرعت در این سیستم جریان غیرهم‌دما، با چشم‌پوشی از آثار انتهایی و باتوجه به این نکته که در این جریان، گرمایش ویسکوز اهمیتی ندارد. فرض کنید وابستگی ویسکوزیته به دما را می‌توان با معادله‌ای به صورت  $\mu = Ae^{B/T}$  بیان کرد که در آن  $A$  و  $B$  ثابت‌های تجربی‌اند؛ نظریه آیرینگ در بخش ۵.۱ نیز همین نتیجه را مطرح می‌کند.

ابتدا معادله انرژی را حل می‌کنیم تا توزیع دما به دست آید و سپس با استفاده از آن وابستگی ویسکوزیته به مکان را به دست می‌آوریم.

حل

فرض می‌کنیم  $T = T(x)$  و  $v = \delta_z v_z(x)$ . بنابراین معادله انرژی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (۴.۱۱-۱۵)$$

می‌توان از این معادله بین دماهای پایانی معلوم انتگرال گرفت تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} = \frac{x}{\delta} \quad (۴.۱۱-۱۶)$$

وابستگی ویسکوزیته به دما را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\mu(T)}{\mu_0} = \exp \left[ B \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \quad (۴.۱۱-۱۷)$$

که در آن  $B$  ثابتی است که باید با استفاده از داده‌های تجربی ویسکوزیته برحسب دما، آن را به دست آورد. برای به دست آوردن وابستگی ویسکوزیته به مکان، دو معادله اخیر را ترکیب می‌کنیم تا نتیجه شود:

$$\frac{\mu(x)}{\mu_0} = \exp \left[ B \frac{T_0 - T_\delta}{T_0 T_\delta} \left( \frac{x}{\delta} \right) \right] \cong \exp \left[ B \frac{T_0 - T_\delta}{T_0 T_\delta} \left( \frac{x}{\delta} \right) \right] \quad (۴.۱۱-۱۸)$$

عبارت دوم تقریب خوبی است، هرگاه دما در فیلم تغییرات شدید نداشته باشد. وقتی این معادله با معادله (۴.۱۱-۱۷)، که برحسب  $T = T_\delta$  نوشته شده، ترکیب شود، داریم:

$$\frac{\mu(x)}{\mu_0} = \exp \left[ \left( \ln \frac{\mu_\delta}{\mu_0} \right) \left( \frac{x}{\delta} \right) \right] = \left( \frac{\mu_\delta}{\mu_0} \right)^{x/\delta} \quad (۴.۱۱-۱۹)$$

این همان عبارتی است که در مثال ۲-۲.۲ از آن استفاده کردیم، به شرط آن‌که  $\alpha$  را برابر  $-\ln(\mu_\delta/\mu_0)$  قرار دهیم. بنابراین می‌توانیم از نتیجهٔ مثال ۲-۲.۲ استفاده کنیم و توزیع سرعت را به صورت زیر بنویسیم:

$$v_z = \left( \frac{\rho g \cos \beta}{\mu_0} \right) \left( \frac{\delta}{\ln(\mu_\delta/\mu_0)} \right)^2 \left[ \frac{1 + (x/\delta) \ln(\mu_\delta/\mu_0)}{(\mu_\delta/\mu_0)^{x/\delta}} - \frac{1 + \ln(\mu_\delta/\mu_0)}{(\mu_\delta/\mu_0)} \right] \quad (۲۰-۴.۱۱)$$

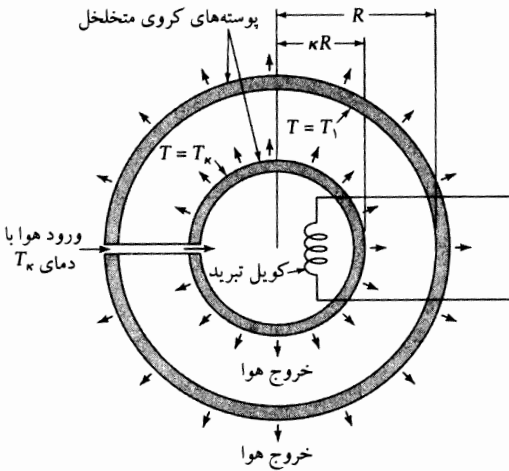
به این ترتیب تحلیل مسئله‌ای که در مثال ۲-۲.۲ آغاز شد، با یافتن مقدار مناسب برای  $\alpha$  ثابت، کامل می‌شود.

### مثال ۴-۱۱

سرمایش تعریقی<sup>۲</sup>

سیستمی با دو پوستهٔ کروی هم‌مرکز متخلخل به شعاع‌های  $R$  و  $\kappa R$  در شکل ۱-۴.۱۱ نشان داده شده‌است. سطح داخلی پوستهٔ خارجی در دمای  $T_1$  و سطح خارجی پوستهٔ داخلی در دمای پایین‌تر  $T_\kappa$  است. هوای خشک با دمای  $T_\kappa$  از پوستهٔ داخلی، درامتداد شعاعی به طرف خارج، به داخل فضای میانی و سپس پوستهٔ خارجی، دمیده می‌شود. عبارتی برای بیان آهنگ حذف گرما از کرهٔ داخلی، به صورت تابعی از آهنگ جریان جرمی گاز به دست آورید. جریان را آرام پایا و سرعت گاز را پایین فرض کنید.

در این مثال، معادله‌های پیوستگی و انرژی را حل می‌کنیم تا توزیع دما حاصل شود. معادلهٔ حرکت، دربارهٔ توزیع فشار در سیستم، اطلاعاتی در اختیار ما می‌گذارد.



شکل ۱-۴.۱۱ سرمایش تعریقی. کرهٔ داخلی توسط کویل تبرید خنک می‌شود تا دمای آن در  $T_\kappa$  ثابت بماند. وقتی مطابق شکل هوا به طرف بیرون دمیده شود، تبرید کم‌تری لازم است.

حل

فرض می‌کنیم که در این سیستم  $\mathbf{v} = \delta_r v_r(r)$ ،  $T = T(r)$ ، و  $P = P(r)$ . در نتیجه معادلهٔ پیوستگی در مختصات کروی عبارت است از:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v_r) = 0 \quad (۲۱-۴.۱۱)$$

از این معادله می‌توان انتگرال گرفت تا نتیجه شود:

$$r^2 \rho v_r = (\text{مقدار ثابت}) = \frac{w_r}{4\pi} \quad (۲۲-۴.۱۱)$$



در این جا  $w_r$  آهنگ جریان جرمی شعاعی گاز است.

مؤلفه  $r$  معادله حرکت در مختصات کروی، از معادله (ب.۶-۷) عبارت است از:

$$\rho v_r \frac{dv_r}{dr} = -\frac{dP}{dr} + \mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} (r^2 v_r) \right) \quad (۲۳-۴.۱۱)$$

باتوجه به معادله (۲۱-۴.۱۱) جمله ویسکوزیته حذف می‌شود. در نتیجه، با انتگرال‌گیری از معادله (۲۳-۴.۱۱) نتیجه می‌شود:

$$P(r) - P(R) = \frac{w_r^2}{32\pi^2 \rho R^2} \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^4 \right] \quad (۲۴-۴.۱۱)$$

بنابراین فشار اصلاح شده  $P$  با  $r$  افزایش می‌یابد، اما باتوجه به فرض سرعت پایین برای گاز، این افزایش ناچیز خواهد بود.

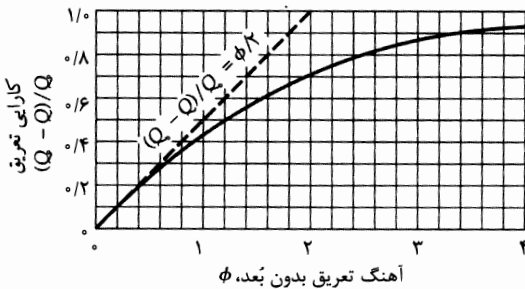
معادله انرژی برحسب دما، در مختصات کروی، طبق معادله (ب.۹-۳) عبارت است از:

$$\rho \hat{C}_p v_r \frac{dT}{dr} = k \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) \quad (۲۵-۴.۱۱)$$

در این جا از معادله (۸-۲.۱۱) استفاده کرده‌ایم که برای آن فرض می‌شود رسانندگی گرمایی ثابت است، فشار ثابت است، و اتلاف ویسکوز وجود ندارد، همه این فرض‌ها، برای این مسئله، منطقی است.

وقتی از معادله (۲۲-۴.۱۱) برای توزیع سرعت، به منظور یافتن  $v_r$  در معادله (۲۵-۴.۱۱) استفاده کنیم، معادله دیفرانسیل زیر را برای توزیع دمای  $T(r)$  در گاز بین دو پوسته به دست می‌آوریم:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{4\pi k}{w_r \hat{C}_p} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) \quad (۲۶-۴.۱۱)$$



شکل ۴.۱۱ اثر سرمایش تعریقی.

تغییر متغیر  $u = r^2 (dT/dr)$  را انجام می‌دهیم و یک معادله دیفرانسیل تفکیک‌پذیر برای  $u(r)$  به دست می‌آوریم. می‌توانیم از این معادله انتگرال‌گیری کنیم و پس از استفاده از شرایط مرزی، نتیجه می‌شود:

$$\frac{T - T_1}{T_\kappa - T_1} = \frac{e^{-R_0/r} - e^{-R_0/R}}{e^{-R_0/\kappa R} - e^{-R_0/R}} \quad (۲۷-۴.۱۱)$$

که در آن  $R_0 = w_r \hat{C}_p / 4\pi k$  ثابتی با واحد طول است.

آهنگ جریان گرما به طرف کره داخلی برابر است با:

$$Q = -4\pi \kappa^2 R^2 q_r|_{r=\kappa R} \quad (۲۸-۴.۱۱)$$

و این همان آهنگ گرفتن گرمای لازم توسط مبرد است. با استفاده از قانون فوریه برای مؤلفه  $r$  شارگرم، نتیجه می‌شود:

$$Q = +4\pi\kappa^2 R^2 k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=\kappa R} \quad (29-4.11)$$

سپس، به کمک معادله (۲۷-۴.۱۱) گرادیان دما در سطح را محاسبه می‌کنیم تا عبارتی برای آهنگ حذف گرما به دست آوریم.

$$Q = \frac{4\pi R_0 k (T_1 - T_\kappa)}{\exp[(R_0/\kappa R)(1 - \kappa)] - 1} \quad (30-4.11)$$

در حد که آهنگ جریان جرمی گاز صفر است، به طوری که  $R_0 = 0$ ، آهنگ گرفتن گرما چنین نوشته می‌شود:

$$Q_0 = \frac{4\pi\kappa R k (T_1 - T_\kappa)}{1 - \kappa} \quad (31-4.11)$$

بنابراین کاهش کسری گرفتن گرما در نتیجه تعریق گاز عبارت است از:

$$\frac{Q_0 - Q}{Q_0} = 1 - \frac{\phi}{e^\phi - 1} \quad (32-4.11)$$

در اینجا  $\phi = R_0(1 - \kappa)/\kappa R = w_r \hat{C}_p (1 - \kappa)/4\pi\kappa R k$  «آهنگ تعریق بدون بُعد» است. در شکل ۲-۴.۱۱ معادله (۳۲-۴.۱۱) را به شیوه ترسیمی نشان داده‌ایم. به ازای مقادیر کوچک  $\phi$ ، کمیت  $(Q_0 - Q)/Q_0$  به سمت مقدار مجانبی  $\frac{1}{2}\phi$  میل می‌کند.

### مثال ۵-۴.۱۱

انتقال گرمای همرفتی واداشته از صفحه عمودی

صفحه‌ای تخت به ارتفاع  $H$  و عرض  $W$  ( $W \gg H$ ) را تا دمای  $T_0$  گرما می‌دهند و در پهنه بزرگی از سیال آویزان می‌کنند. دمای سیال  $T_1$  و برابر دمای محیط است. در همسایگی صفحه داغ، سیال بر اثر نیروی شناوری بالا می‌رود (شکل ۳-۴.۱۱ را ببینید). از معادله‌های تغییر، وابستگی اتلاف گرما به متغیرهای سیستم را استخراج کنید. خواص فیزیکی سیال ثابت فرض می‌شوند، و فقط با استفاده از تقریب بوسینسک، تغییر چگالی با دما به حساب آورده می‌شود.

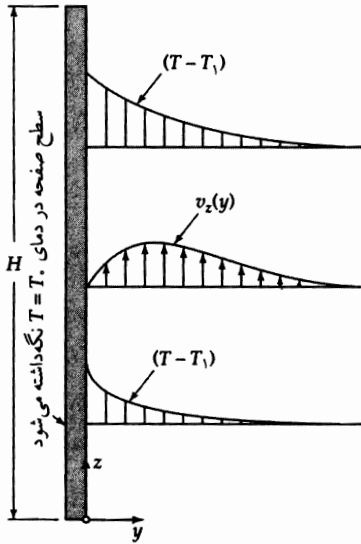
حل

فرض می‌کنیم  $T = T(y, z)$  و  $\mathbf{v} = \delta_y v_y(y, z) + \delta_z v_z(y, z)$  به طوری که  $v_y \ll v_z$ ، سپس از مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  معادله (۲-۳.۱۱) نتیجه می‌شود  $p = p(z)$  به طوری که فشار با تقریب بسیار خوب از رابطه  $-dp/dz - \bar{\rho}g = 0$  به دست می‌آید که توزیع فشار هیدروستاتیکی است. معادله‌های باقی‌مانده تغییر عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (33-4.11) \text{ پیوستگی:}$$

$$\bar{\rho} \left( v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z = \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z + \bar{\rho}g\beta(T - T_1) \quad (34-4.11) \text{ حرکت:}$$

$$\bar{\rho}\hat{C}_p \left( v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (T - T_1) = k \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (T - T_1) \quad (35-4.11) \text{ انرژی:}$$



شکل ۴.۱۱-۳ توزیع دما و سرعت در یک طرف صفحه نازک داغ آویزان در پهنه بزرگی از سیال در دمای  $T_1$ .

که در آن  $\bar{\rho}$  و  $\bar{\beta}$  در دمای محیط  $T_1$  محاسبه می‌شوند. جمله‌هایی که زیر آن‌ها نقطه چین شده‌است، حذف می‌شوند، زیرا انتقال اندازه حرکت و انرژی توسط فرایندهای مولکولی در جهت  $z$ ، در مقایسه با جمله‌های همرفتی متناظر در سمت چپ معادله‌ها، کوچک است. این حذف‌ها باید توصیف رضایت بخشی از سیستم ارائه دهند، مگر در ناحیه کوچکی در پایین صفحه. با این ساده‌سازی، شرایط مرزی زیر برای تحلیل سیستم تا  $z = H$  کافی هستند:

$$(۴.۱۱-۳۶) \quad \text{شرط مرزی ۱: در } y = 0, \text{ داریم } v_y = v_z = 0 \text{ و } T = T_0.$$

$$(۴.۱۱-۳۷) \quad \text{شرط مرزی ۲: وقتی } y \rightarrow \pm\infty, \text{ داریم } v_z \rightarrow 0 \text{ و } T \rightarrow T_1.$$

$$(۴.۱۱-۳۸) \quad \text{شرط مرزی ۳: در } z = 0, \text{ داریم } v_z = 0.$$

توجه کنید که افزایش دما در معادله حرکت، و توزیع سرعت در معادله انرژی ظاهر می‌شود. بنابراین این معادله‌ها «جفت‌اند.» حل تحلیلی این قبیل معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی جفت بسیار دشوار است و در این جا به رهیافت تحلیل بعدی بسنده می‌کنیم.

برای انجام این کار متغیرهای بدون بُعد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$(۴.۱۱-۳۹) \quad \Theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \text{دمای بدون بُعد}$$

$$(۴.۱۱-۴۰) \quad \zeta = \frac{z}{H} = \text{مختص عمودی بدون بُعد}$$

$$(۴.۱۱-۴۱) \quad \eta = \left( \frac{B}{\mu \alpha H} \right)^{1/4} y = \text{مختص افقی بدون بُعد}$$

$$(۴.۱۱-۴۲) \quad \phi_z = \left( \frac{\mu}{\alpha B H} \right)^{1/2} v_z = \text{سرعت عمودی بدون بُعد}$$

$$(۴.۱۱-۴۳) \quad \phi_y = \left( \frac{\mu H}{\alpha^2 B} \right)^{1/4} v_y = \text{سرعت افقی بدون بُعد}$$

که در آن  $\alpha = k/\bar{\rho}\hat{C}_p$  و  $B = \bar{\rho}g\bar{\beta}(T_0 - T_1)$ .

وقتی معادله‌های تغییر، بدون جمله‌های نقطه‌چین دار، برحسب این متغیرهای بدون بُعد نوشته شوند، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta} + \frac{\partial\phi_z}{\partial\zeta} = 0 \quad (۴۴-۴.۱۱) \quad \text{پیوستگی:}$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \phi_y \frac{\partial}{\partial\eta} + \phi_z \frac{\partial}{\partial\zeta} \right) \phi_z = \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial\eta^2} + \Theta \quad (۴۵-۴.۱۱) \quad \text{حرکت:}$$

$$\left( \phi_y \frac{\partial}{\partial\eta} + \phi_z \frac{\partial}{\partial\zeta} \right) \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial\eta^2} \quad (۴۶-۴.۱۱) \quad \text{انرژی:}$$

در این صورت شرایط مرزی چنین نوشته می‌شوند:

$$\Theta = 1, \phi_y = \phi_z = 0 \quad \text{در } \eta = 0, \text{ داریم} \quad (۴۷-۴.۱۱)$$

$$\Theta \rightarrow 0, \phi_z \rightarrow 0 \quad \text{در } \eta \rightarrow \pm\infty, \text{ داریم} \quad (۴۸-۴.۱۱)$$

$$\phi_z = 0 \quad \text{در } \zeta = 0, \text{ داریم} \quad (۴۹-۴.۱۱)$$

باتوجه به این معادله‌ها و شرایط مرزی، بلافاصله می‌توان دید که مؤلفه‌های سرعت بدون بُعد  $\phi_y$  و  $\phi_z$  و دمای بدون بُعد  $\Theta$  به  $\eta$  و  $\zeta$ ، و هم‌چنین به عدد پرانتل،  $Pr$ ، بستگی دارند. چون در هرمرت آزاد، جریان معمولاً بسیار آهسته است، جمله‌هایی که  $Pr$  در آن‌ها ظاهر می‌شود، نسبتاً کوچک خواهند بود؛ برابر صفر قرار دادن این جمله‌ها با «فرض خزشی بودن جریان» متناظر است. بنابراین انتظار داریم که وابستگی جواب به عدد پرانتل ضعیف باشد. شار گرمای متوسط از یک طرف صفحه را می‌توان چنین نوشت:

$$q_{avg} = \frac{1}{H} \int_0^H \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dz \quad (۵۰-۴.۱۱)$$

اکنون می‌توان انتگرال را برحسب کمیت‌های بدون بُعد نوشت:

$$\begin{aligned} q_{avg} &= k(T_0 - T_1) \left( \frac{B}{\mu\alpha H} \right)^{1/4} \cdot \int_0^1 \left( -\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} \right) \Big|_{\eta=0} d\zeta \\ &= k(T_0 - T_1) \left( \frac{B}{\mu\alpha H} \right)^{1/4} \cdot C \\ &= C \cdot \frac{k}{H} (T_0 - T_1) \left( \left( \frac{\hat{C}_p \mu}{k} \right) \left( \frac{\bar{\rho}^2 g \bar{\beta} (T_0 - T_1) H^3}{\mu^3} \right) \right)^{1/4} \\ &= C \cdot \frac{k}{H} (T_0 - T_1) (GrPr)^{1/4} \quad (۵۱-۴.۱۱) \end{aligned}$$

که در آن گروه  $Ra = GrPr$  را عدد ریلی می‌نامند. چون  $\Theta$  تابعی از  $\eta$ ،  $\zeta$ ، و  $Pr$  است، مشتق  $\partial\Theta/\partial\eta$  نیز تابعی از  $\eta$ ،  $\zeta$ ، و  $Pr$  است. بنابراین وقتی  $\partial\Theta/\partial\eta$  در  $\eta = 0$  محاسبه شود، فقط به  $\zeta$  و  $Pr$  بستگی خواهد داشت. بنابراین انتگرال معین روی  $\zeta$  تابعی از  $Pr$  است. از اشاره‌هایی که قبلاً شد، می‌توان استنباط کرد که این تابع، موسوم به  $C$ ، فقط تابع ضعیفی از عدد پرانتل است؛ یعنی تقریباً ثابت است.

تحلیل بالا نشان می‌دهد که، حتی بدون حل کردن معادله‌های دیفرانسیل جزئی، می‌توان پیش‌بینی کرد که شار گرمای متوسط با توان  $\frac{5}{4}$  اختلاف دمای  $(T_0 - T_1)$  متناسب است و با توان  $\frac{1}{4}$  کمیت  $H$  متناسب معکوس دارد. هردو پیش‌بینی با آزمایش تأیید شده‌است. تنها کاری که نمی‌توانستیم انجام دهیم، یافتن  $C$  به صورت تابعی از  $Pr$  بود.

برای تعیین آن تابع، باید اندازه‌گیری‌های تجربی انجام دهیم یا معادله‌های (۴.۱۱-۴۴) تا (۴.۱۱-۴۹) را حل کنیم. در سال ۱۸۸۱، لورنتس<sup>۳</sup> جوابی تقریبی برای این معادله‌ها به دست آورد و دریافت که  $C = ۰,۵۴۸$ . بعدها، با انجام محاسبات دقیق‌تر<sup>۴</sup> نتایج زیر برای وابستگی  $C$  به  $Pr$  به دست آمد:

Pr	۰,۷۳ (هوا)	۱	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	∞
C	۰,۵۱۸	۰,۵۳۵	۰,۶۲۰	۰,۶۵۳	۰,۶۶۵	۰,۶۷۰

این مقادیر  $C$  با بهترین اندازه‌گیری‌های تجربی در گستره جریان آرام (یعنی به ازای  $10^9 < GrPr$ ) توافق تقریباً دقیق دارند.<sup>۵</sup>

### مثال ۴.۱۱-۶

فرایندهای بدون اصطکاک آدیاباتیک در گاز ایده‌آل معادله‌هایی برای رابطه فشار موضعی با چگالی یا دما در جریانی از گاز ایده‌آل به دست آورید که در آن می‌توان از شار اندازه حرکت  $\tau$  و شار گرمای  $q$  چشم‌پوشی کرد.

حل

با چشم‌پوشی از  $\tau$  و  $q$ ، معادله انرژی [معادله (J) در جدول ۴.۱۱-۱] را می‌توان چنین نوشت:

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = \left( \frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} \quad (۴.۱۱-۵۲)$$

برای گاز ایده‌آل،  $p\hat{V} = RT/M$  که در آن  $M$  وزن مولکولی گاز است و معادله (۴.۱۱-۵۲) چنین نوشته می‌شود:

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} \quad (۴.۱۱-۵۳)$$

با تقسیم این معادله بر  $p$  و با فرض ثابت بودن ظرفیت گرمایی مولی  $\hat{C}_p = M\tilde{C}_p$  می‌توانیم از قانون گاز ایده‌آل استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\tilde{C}_p}{R} \ln T - \ln p \right) = 0 \quad (۴.۱۱-۵۴)$$

3. L. Lorenz, *Wiedemann's Ann. der Physik u. Chemie*, **13**, 422-447, 582-606 (1881). See also U. Grigull, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition (1955), pp. 263-269.

4. S. Whitaker, *Fundamental Principles of Heat Transfer*, Krieger, Malabar Fla. (1977), §5.11.

حالت حدی  $Pr \rightarrow \infty$  در منبع زیر به روش عددی حل شده است:

E. J. LeFevre [Heat Div. Paper 113, Dept. Sci. & Ind. Res., Mech. Engr. Lab. (Great Britain), Aug. 1956]

مشخص شد که

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{۰,۵۰۲۸}{\zeta^{1/2}} \quad \left. \frac{\partial \phi_z}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{۱,۱۶}{\zeta^{1/2}} \quad (۴.۱۱-۵۱, الف, ب)$$

معادله (۴.۱۱-۵۱ الف) با مقدار  $C = ۰,۶۷۰$  بالا متناظر است. این نتیجه برای مسئله نظیر انتقال جرم به تجربه تأیید شده و در منبع زیر آمده است:

C. R. Wilke, C. W. Tobias, and M. Eisenberg, *J. Electrochem. Soc.*, **100**, 513-523 (1953),

۵. برای آشنایی با تحلیل هرفت آزاد در جریان خزشی سه بعدی، نگاه کنید به

W. E. Stewart, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **14**, 1013-1031 (1971).

کمیت داخل پرانتز در طول مسیر جزء سیال ثابت است، هم‌چنین پادلگاریتم آن ثابت است، به طوری که داریم:

$$T^{\bar{C}_p/R} p^{-1} = \text{مقدار ثابت} \quad (۵۵-۴.۱۱)$$

این رابطه در مورد همه حالت‌های ترمودینامیکی  $p$ ،  $T$  که جزء سیال در حین حرکت در سیال با آن مواجه می‌شود، صادق است.

با معرفی تعریف  $\gamma = \bar{C}_p/\bar{C}_v$  و روابط گاز ایده‌آل  $R = \bar{C}_p - \bar{C}_v$  و  $p = \rho RT/M$  عبارت‌های مرتبط زیر به دست می‌آیند:

$$p\rho^{-\gamma} = \text{مقدار ثابت} \quad \text{و} \quad p^{(\gamma-1)/\gamma} T^{-1} = \text{مقدار ثابت} \quad (۵۷, ۵۶-۴.۱۱)$$

سه معادله آخر کاربرد گسترده‌ای در مطالعه فرایندهای بدون اصطکاک آدیباتیک در دینامیک گاز ایده‌آل دارند. معادله (۵۷-۴.۱۱) رابطه معروفی است و ارزش به خاطر سپردن را دارد.

وقتی شار اندازه حرکت  $\tau$  و شار گرمای  $q$  صفر باشند، تغییری در آنتروپی جزء سیال ایجاد نمی‌شود (نگاه کنید به معادله ۱۱-۱-۳). بنابراین مشتق  $d \ln p / d \ln T = \gamma / (\gamma - 1)$  باید به معنای  $(\partial \ln p / \partial \ln T)_s = \gamma / (\gamma - 1)$  فهمیده شود. این معادله یکی از فرمول‌های استاندارد ترمودینامیک تعادل است.

### مسئله ۷-۴.۱۱

جریان تراکم‌پذیر تک‌بعدی: توزیع سرعت، دما، و فشار در موج شوکی ساکن

در این مثال انبساط آدیباتیک  $۱۰۰۹۰۸۰۷۰۶$  گازی ایده‌آل را در شیپوره‌ای همگرا-واگرا، را تحت شرایطی که موج شوکی ساکن تشکیل می‌شود، در نظر می‌گیریم. گاز از یک مخزن، که فشار آن  $p_0$  است، وارد شیپوره می‌شود و از آن جا در جو تخلیه می‌شود که فشاری برابر  $p_a$  دارد. در غیاب موج شوکی، جریان در شیپوره‌ای که خوب طراحی شده باشد، عملاً بدون اصطکاک است (بنابراین برای وضعیت آدیباتیک مورد نظر، هم‌آنتروپی است). به علاوه، اگر  $p_a/p_0$  به اندازه کافی کوچک باشد، می‌دانیم که جریان در گلوگاه (ناحیه‌ای با کوچک‌ترین مقطع) اساساً صوتی است و در بخش واگرای شیپوره فوق صوتی است. تحت این شرایط فشار به طور پیوسته کاهش می‌یابد، و سرعت در جهت جریان افزایش خواهد یافت، که توسط منحنی‌های شکل ۴-۴.۱۱ نشان داده شده‌اند.

اما، برای شیپوره‌ای با هر طرح، گستره‌ای از  $p_a/p_0$  وجود دارد که به ازای آن جریان هم‌آنتروپی در خروجی فشاری پایین‌تر از  $p_a$  ایجاد می‌کند. سپس جریان هم‌آنتروپی ناپایدار می‌شود. ساده‌ترین امکان در میان امکان‌های مختلف، موج شوکی ساکن قائم است که در شکل ۴-۴.۱۱، به صورت یک جفت خط موازی نزدیک به هم نشان داده شده است. در این جا سرعت سریعاً کاهش می‌یابد و به مقدار زیر صوتی می‌رسد، در حالی که فشار و چگالی افزایش می‌یابند. این تغییرات در ناحیه‌ای فوق‌العاده باریک رخ می‌دهند که می‌توان به طور موضعی آن را تک‌بعدی و آرام دانست و با اتلاف شدید انرژی مکانیکی همراه است. بنابراین آثار اتلاف ویسکوز و رسانش گرما در ناحیه فوق‌العاده

6. H. W. Liepmann and A. Roshko, *Elements of Gas Dynamics*, Wiley, New York (1957), §§5.4 and 13.13.

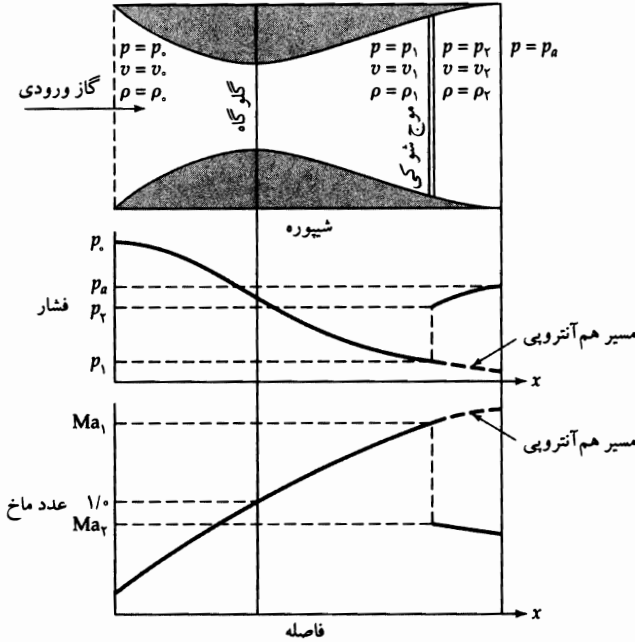
7. J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, New York, 2nd corrected printing (1964), pp. 791-797.

8. M. Morduchow and P. A. Libby, *J. Aeronautical Sci.*, **16**, 674-684 (1948).

9. R. von Mises, *J. Aeronautical Sci.*, **17**, 551-554 (1950).

10. G. S. S. Ludford, *J. Aeronautical Sci.*, **18**, 830-834 (1951).

کوچکی از شیپوره متمرکز می‌شوند و هدف ما در این مثال، بررسی رفتار سیال در این ناحیه است. برای ساده شدن کار، موج شوکی را قائم بر خطوط جریان سیال فرض می‌کنیم؛ در عمل غالباً شکل‌های بسیار پیچیده‌تر مشاهده می‌شود. سرعت، فشار، و دما در بالادست موج شوکی را می‌توان محاسبه کرد و در این جا آن را معلوم فرض می‌کنیم.



شکل ۴-۴.۱۱ تشکیل موج شوکی در شیپوره.

از سه معادله تغییر برای تعیین شرایط ایجاد موج شوکی و یافتن توزیع سرعت، دما، و فشار در این موج شوکی استفاده می‌کنیم. جریان تک‌بعدی حالت پایای گازی ایده‌آل را در نظر بگیرید و از ویسکوزیته اتساعی  $k$  چشم‌پوشی کنید و تغییرات  $\mu$ ،  $k$ ، و  $\hat{C}_p$  با دما و فشار را نادیده بگیرید.

حل

معادله‌های تغییر در همسایگی موج شوکی ساکن را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\frac{d}{dx} \rho v_x = 0 \quad (۵۸-۴.۱۱) \text{ پیوستگی}$$

$$\rho v_x \frac{dv_x}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left( \mu \frac{dv_x}{dx} \right) \quad (۵۹-۴.۱۱) \text{ حرکت}$$

$$\rho \hat{C}_p v_x \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + v_x \frac{dp}{dx} + \frac{4}{3} \mu \left( \frac{dv_x}{dx} \right)^2 \quad (۶۰-۴.۱۱) \text{ انرژی}$$

معادله انرژی به صورت معادله (ی) در جدول ۴-۱۱ است که برای گاز ایده‌آل در وضعیت حالت پایا نوشته می‌شود. از معادله پیوستگی می‌توان انتگرال گرفت و داریم:

$$\rho v_x = \rho_1 v_1 \quad (۶۱-۴.۱۱)$$

که در آن  $\rho_1$  و  $v_1$  کمیت‌هایی هستند که در فاصله کوتاهی در بالادست موج شوکی محاسبه می‌شوند.

در معادله انرژی،  $\rho v_x$  را با استفاده از معادله (۴.۱۱-۶۱) و  $dp/dx$  را با استفاده از معادله حرکت حذف می‌کنیم تا (پس از مرتب کردن جمله‌ها) نتیجه شود:

$$\rho_1 \hat{C}_p v_1 \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) - \rho_1 v_1 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\gamma} v_x^2 \right) + \frac{4}{3} \mu \frac{d}{dx} \left( v_x \frac{dv_x}{dx} \right) \quad (۴.۱۱-۶۲)$$

سپس جمله دوم سمت راست را به سمت چپ منتقل می‌کنیم و کل معادله را بر  $\rho_1 v_1$  تقسیم می‌کنیم. سپس از هر جمله نسبت به  $x$  انتگرال می‌گیریم و داریم:

$$\hat{C}_p T + \frac{1}{\gamma} v_x^2 = \frac{k}{\rho_1 \hat{C}_p v_1} \frac{d}{dx} (\hat{C}_p T + \left( \frac{4}{3} Pr \right) \frac{1}{\gamma} v_x^2) + C_1 \quad (۴.۱۱-۶۳)$$

که در آن  $C_1$  ثابت انتگرال‌گیری است و  $Pr = \hat{C}_p \mu / k$ . در اغلب گازها  $Pr$  بین  $0.65$  و  $0.85$  است و مقدار متوسط به  $0.75$  نزدیک است. بنابراین برای ساده کردن مسئله،  $Pr$  را برابر  $\frac{3}{4}$  می‌گیریم. در این صورت معادله (۴.۱۱-۶۳) به یک معادله دیفرانسیل خطی معمولی مرتبه اول منتهی می‌شود که جواب آن چنین است:

$$\hat{C}_p T + \frac{1}{\gamma} v_x^2 = C_{II} + C_{III} \exp[(\rho_1 \hat{C}_p v_1 / k)x] \quad (۴.۱۱-۶۴)$$

چون  $\hat{C}_p T + \frac{1}{\gamma} v_x^2$  نمی‌تواند در جهت مثبت  $x$  بدون محدودیت افزایش یابد، ثابت دوم انتگرال‌گیری،  $C_{II}$ ، باید صفر باشد. ثابت اول انتگرال‌گیری با استفاده از شرایط بالادستی تعیین می‌شود، در نتیجه:

$$\hat{C}_p T + \frac{1}{\gamma} v_x^2 = \hat{C}_p T_1 + \frac{1}{\gamma} v_1^2 \quad (۴.۱۱-۶۵)$$

البته اگر  $Pr$  را برابر  $\frac{3}{4}$  انتخاب نکرده بودیم، به انتگرال‌گیری عددی از معادله (۴.۱۱-۶۳) نیاز پیدا می‌کردیم. سپس معادله پیوستگی انتگرال‌گیری شده را در معادله حرکت قرار می‌دهیم و یک بار انتگرال می‌گیریم تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\rho_1 v_1 v_x = -p + \frac{4}{3} \mu \frac{dv_x}{dx} + C_{III} \quad (۴.۱۱-۶۶)$$

تعیین ثابت  $C_{III}$  با استفاده از شرایط بالادستی، که در آن  $dv_x/dx = 0$  نتیجه می‌دهد:

$$C_{III} = \rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_1 [v_1^2 + (RT_1/M)]$$

حال هردو طرف را در  $v_x$  ضرب و بر  $\rho_1 v_1$  تقسیم می‌کنیم. سپس، به کمک قانون گاز ایده‌آل،  $p = \rho RT/M$ ، و معادله‌های (۴.۱۱-۶۱) و (۴.۱۱-۶۵)، می‌توانیم  $p$  را از معادله (۴.۱۱-۶۰) حذف کنیم تا رابطه‌ای فقط شامل متغیرهای  $v_x$  و  $x$  به دست آید:

$$\frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_1 v_1} v_x \frac{dv_x}{dx} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} v_x^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma} C_1 - \frac{C_{III}}{\rho_1 v_1} v_x \quad (۴.۱۱-۶۷)$$

پس از مرتب کردن جمله‌ها، می‌توان این معادله را برحسب متغیرهای بدون بُعد نوشت:

$$\phi \frac{d\phi}{d\xi} = \beta Ma_1 (\phi - 1)(\phi - \alpha) \quad (۴.۱۱-۶۸)$$



کمیت‌های بدون بُعد مربوطه عبارت‌اند از:

$$\phi = \frac{v_x}{v_1} = \text{سرعت بدون بعد} \quad (۶۹-۴.۱۱)$$

$$[\pm 3pt]\xi = \frac{x}{\lambda} = \text{مختص بدون بعد} \quad (۷۰-۴.۱۱)$$

$$Ma_1 = \frac{v_1}{\sqrt{\gamma RT_1/M}} = \text{عدد ماخ در شرایط بالادستی} \quad (۷۱-۴.۱۱)$$

$$\alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{Ma_1^2} \quad (۷۲-۴.۱۱)$$

$$\beta = \frac{9}{8}(\gamma + 1)\sqrt{\pi/8\gamma} \quad (۷۳-۴.۱۱)$$

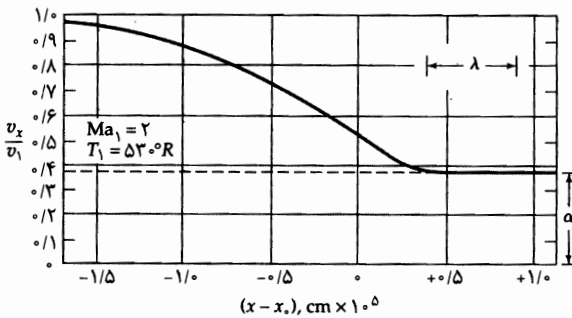
طول مرجع  $\lambda$  مسافت آزاد میانگین است که با معادله (۳-۴.۱) تعریف شد (با حذف  $d^2$  با استفاده از معادله (۹-۴.۱)):

$$\lambda = \frac{3\mu}{\rho_1} \sqrt{\frac{\pi M}{8RT_1}} \quad (۷۴-۴.۱۱)$$

می‌توان از معادله (۶۸-۴.۱۱) انتگرال گرفت تا نتیجه شود:

$$\frac{1 - \phi}{(\phi - \alpha)^\alpha} = \exp[\beta Ma_1 (1 - \alpha)(\xi - \xi_0)] \quad (\alpha < \phi < 1) \quad (۷۵-۴.۱۱)$$

این معادله توزیع سرعت بدون بُعد  $\phi(\xi)$  را توصیف می‌کند و شامل ثابت انتگرال‌گیری  $\xi_0 = x_0/\lambda$  است، که مکان موج شوکی را در شیپوره مشخص می‌کند؛ در این جا  $\xi_0$  را معلوم فرض می‌کنیم. باتوجه به نمودار معادله (۷۵-۴.۱۱) در شکل ۵-۴.۱۱ می‌توان دید که امواج شوکی واقعاً بسیار نازک‌اند. توزیع دما و فشار را می‌توان با استفاده از معادله (۷۵-۴.۱۱) و معادله‌های (۶۵-۴.۱۱) و (۶۶-۴.۱۱) تعیین کرد. چون وقتی  $\xi \rightarrow -\infty$ ،  $\phi$  باید به سمت واحد میل کند، ثابت  $\alpha$  از ۱ کوچک‌تر است. این نتیجه فقط هنگامی می‌تواند صادق باشد که  $Ma_1 > 1$ ؛ یعنی وقتی جریان بالادستی فوق‌صوتی باشد. به علاوه می‌توان دید که به ازای مقدار بسیار بزرگ و مثبت  $\xi$ ، سرعت بدون بُعد  $\phi$  به سمت  $\alpha$  میل می‌کند. عدد ماخ  $Ma$  به صورت نسبت  $v_1$  به سرعت صوت در  $T_1$  تعریف می‌شود (نگاه کنید به مسئله ۱۱ ج. ۱).



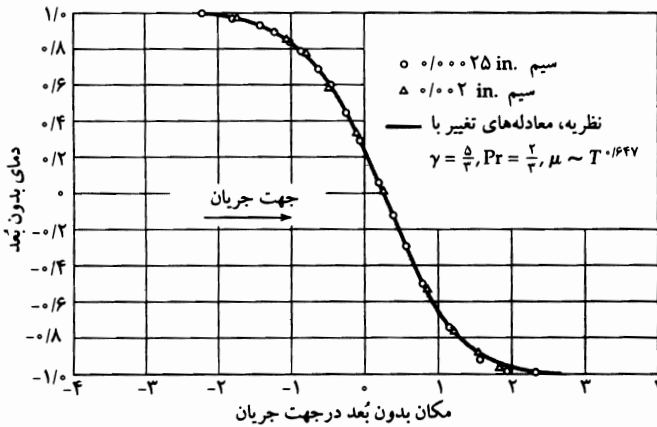
شکل ۵-۴.۱۱ توزیع سرعت در موج شوکی ساکن.

در عملیات فوق عدد پرانتل را  $\frac{3}{4}$  انتخاب کردیم، اما جواب را تعمیم دادیم<sup>۸</sup> تا سایر مقادیر Pr، هم چنین تغییر ویسکوزیته با دما را شامل شود.

گرایش گازی که با جریان فوق صوتی حرکت می‌کند، به تغییر خودبه خود به جریان زیرصوتی در تونل‌های باد و در طراحی سیستم‌های سرعت بالا - مثلاً، در توربین‌ها و موتورهای موشک - اهمیت دارد. توجه کنید که

تغییرات رخ داده در امواج شوکی برگشت‌ناپذیرند و، از آن‌جا که گرادیان سرعت بسیار تند است، مقدار درخور اعتنایی انرژی مکانیکی تلف می‌شود.

با توجه به نازکی پیش‌بینی‌شده موج شوکی، می‌توان درباره قابلیت کاربرد تحلیل ارائه‌شده در این‌جا، براساس معادله‌های پیوستاری تغییر، تردید کرد. بنابراین مقایسه نظریه و تجربه سودمند است. در شکل ۴-۱۱ ۶-۴ ماهای اندازه‌گیری‌شده تجربی برای موج شوکی در هلیوم، به ازای  $\gamma = \frac{5}{3}$ ،  $Pr = \frac{2}{3}$  و  $\mu \sim T^{0.647}$ ، مقایسه شده‌است. مشاهده می‌کنیم که توافق عالی برقرار است. با وجود این باید این نکته را تشخیص دهیم که این سیستمی ساده است، زیرا هلیوم تک‌اتمی است، و بنابراین درجات آزادی داخلی مطرح نیستند. تحلیل متناظر برای گاز دواتمی یا چنداتمی مستلزم در نظر گرفتن مبادله انرژی بین درجات آزادی انتقالی و داخلی است، که معمولاً مستلزم صدها برخورد است و موج شوکی را بسیار پهن می‌کند. بحث بیش‌تر در این‌باره در فصل ۱۱ منع ۷ یافت می‌شود.



شکل ۴-۱۱ نمودار نیمه‌لگاریتمی توزیع دما در موج شوکی، برای هلیوم با  $Ma_1 = 1.82$ . مقادیر تجربی با دماسنج سیمی مقاومتی اندازه‌گیری شدند.

### ۵.۱۱ تحلیل بُعدی معادله‌های تغییر برای سیستم‌های غیرهم‌دما

حال که نحوه استفاده از معادله‌های تغییر برای سیستم‌های غیرهم‌دما را، به‌منظور حل مسئله‌های نمونه در انتقال گرما نشان دادیم، تحلیل بُعدی این معادله‌ها را ارائه می‌دهیم.

درست همان‌طور که بحث تحلیل بُعدی در بخش ۷.۳ باب بحث درباره ضرایب اصطکاک در فصل ۶ را گشود، مطالب این بخش زمینه لازم برای بحث درباره روابط همبستگی ضرایب انتقال گرما در فصل ۱۴ را فراهم می‌کند. مانند فصل ۳، معادله‌های تغییر و شرایط مرزی را به‌صورت بدون بُعد می‌نویسیم. به این ترتیب چند پارامتر بدون بُعد به‌دست می‌آوریم که می‌توانیم از آن‌ها برای مشخص کردن سیستم‌های جریان غیرهم‌دما استفاده کنیم.

اما خواهیم دید که تحلیل سیستم‌های غیرهم‌دما به تعداد بیش‌تری گروه بدون بُعد، در مقایسه با فصل ۳، منتهی می‌شود. در نتیجه باید به ساده‌سازی خردمندانه معادله‌های تغییر و انتخاب دقیق مدل‌های فیزیکی، بیش‌تر تکیه کرد. مثال‌هایی از حالت اخیر عبارت‌اند از: معادله حرکت بوسینسک برای همرفت آزاد (بخش ۳.۱۱) و معادله‌های لایه مرزی آرام (بخش ۴.۱۲).

مانند بخش ۷.۳، برای ساده‌تر شدن کار، خود را به سیالی با  $k$ ،  $\mu$ ، و  $C_p$  ثابت محدود می‌کنیم. چگالی را در جمله  $\rho g$  در معادله حرکت برابر  $\rho = \bar{\rho} - \bar{\rho}\beta(T - \bar{T})$ ، و در جاهای دیگر  $\rho = \bar{\rho}$  می‌گیریم («تقریب بوسینسک»).

حال، اگر  $p + \bar{\rho}gh$  را با  $\mathcal{P}$  نشان دهیم، معادله‌های تغییر چنین نوشته می‌شوند:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (۱-۵.۱۱) \text{ پیوستگی:}$$

$$\bar{\rho} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \mathcal{P} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \bar{\rho} \mathbf{g} \bar{\beta}(T - \bar{T}) \quad (۲-۵.۱۱) \text{ حرکت:}$$

$$\hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \mu \Phi_v \quad (۳-۵.۱۱) \text{ انرژی:}$$

حال کمیت‌هایی را معرفی می‌کنیم که به ترتیب زیر، با کمیت‌های مشخصه، بدون بُعد شده‌اند (اندیس ۰ یا ۱):

$$\check{x} = \frac{x}{l}, \quad \check{y} = \frac{y}{l}, \quad \check{z} = \frac{z}{l}, \quad \check{t} = \frac{v \cdot t}{l} \quad (۴-۵.۱۱)$$

$$\check{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad \check{p} = \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_0}{\bar{\rho} v^2}, \quad \check{T} = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad (۵-۵.۱۱)$$

$$\check{\Phi}_v = \left(\frac{l}{v}\right)^2 \Phi_v, \quad \check{\nabla} = l \cdot \nabla, \quad \frac{D}{D\check{t}} = \left(\frac{l}{v}\right) \frac{D}{Dt} \quad (۶-۵.۱۱)$$

در این جا  $l$ ،  $v$ ، و  $\mathcal{P}_0$  کمیت‌های مرجع معرفی شده در بخش ۷.۳، و  $T_0$  و  $T_1$  دماهایی هستند که در شرایط مرزی ظاهر می‌شوند. در معادله (۲-۵.۱۱)، مقدار  $\bar{T}$  دمایی است که چگالی  $\rho$  حول آن بسط داده شد.

معادله‌های تغییر (۱-۵.۱۱) تا (۳-۵.۱۱)، برحسب این متغیرهای بدون بُعد، صورت زیر را پیدا می‌کنند:

$$(\check{\nabla} \cdot \check{\mathbf{v}}) = 0 \quad (۷-۵.۱۱) \text{ پیوستگی:}$$

$$\frac{D\check{\mathbf{v}}}{D\check{t}} = -\check{\nabla} \check{p} + \left[ \left[ \frac{\mu}{l \cdot v \cdot \bar{\rho}} \right] \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{v}} - \left[ \left[ \frac{gl \cdot \bar{\beta}(T_1 - T_0)}{v^2} \right] \right] \left( \frac{\mathbf{g}}{g} \right) (\check{T} - \check{T}_0) \right] \quad (۸-۵.۱۱) \text{ حرکت:}$$

$$\frac{D\check{T}}{D\check{t}} = \left[ \left[ \frac{k}{l \cdot v \cdot \bar{\rho} \hat{C}_p} \right] \check{\nabla}^2 \check{T} + \left[ \left[ \frac{\mu v}{l \cdot \bar{\rho} \hat{C}_p (T_1 - T_0)} \right] \right] \check{\Phi}_v \right] \quad (۹-۵.۱۱) \text{ انرژی:}$$

سرعت مشخصه را به چندین طریق می‌توان انتخاب کرد، و پیامدهای این انتخاب‌ها در جدول ۱-۵.۱۱ خلاصه شده‌است. گروه‌های بدون بُعدی که در معادله‌های (۸-۵.۱۱) و (۹-۵.۱۱) ظاهر می‌شوند، همراه با چند ترکیب از این گروه‌ها، در جدول ۲-۵.۱۱ خلاصه شده‌اند. ممکن است در شرایط مرزی یا در معادله حالت، گروه‌های بدون بُعد بیشتری ظاهر شوند. در بخش ۷.۳ عددهای فرود و ویر، و در مثال ۷-۴.۱۱، عدد ماخ را معرفی کردیم.

در فصل ۱۰ دیدیم که چگونه در جواب مسئله‌های غیرهم‌دما چندین گروه بدون بُعد ظاهر می‌شوند. وقتی معادله‌های تغییر بدون بُعد شوند نیز همین گروه‌ها پدیدار می‌شوند. این گروه‌های بدون بُعد در روابط همبستگی ضرایب انتقال گرما کاربرد گسترده‌ای دارند.

گاهی تصور گروه‌های بدون بُعد به صورت نسبت نیروها یا آثار مختلف در سیستم، مطابق جدول ۳-۵.۱۱، سودمند است. مثلاً جمله لختی در معادله حرکت عبارت است از:  $\rho[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}]$  و جمله ویسکوز  $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$  است. برای به دست آوردن مقادیر «نمونه‌وار» این جمله‌ها، باید متغیرها را با «معیارهای» مشخصه مورد استفاده در پی‌ریزی متغیرهای بدون بُعد جایگزین کرد. بنابراین  $\rho[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}]$  را با  $\rho v^2 / l$ ، و  $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$  را با  $\mu v / l^2$  جایگزین می‌کنیم تا مرتبه بزرگی تقریبی را به دست آوریم. سپس از نسبت این دو جمله، مطابق جدول، عدد رینولدز نتیجه می‌شود. سایر گروه‌های بدون بُعد نیز به روش مشابه به دست می‌آیند.

جدول ۱۱-۱۵ گروه‌های بدون بُعد در معادله‌های (۱۱-۵-۷، ۸، ۹).

حالت‌های خاص	همرفت واداشته	بینابینی	همرفت آزاد (الف)	همرفت آزاد (ب)
انتخاب به‌ازای $v_0 \rightarrow$	$v_0$	$v_0$	$\nu/l_0$	$\alpha/l_0$
$\left[ \left[ \frac{\mu}{l_0 v_0 \rho} \right] \right]$	$\frac{1}{Re}$	$\frac{1}{Re}$	۱	Pr
$\left[ \left[ \frac{gl_0 \beta (T_1 - T_0)}{v_0^2} \right] \right]$	چشم‌پوشی کنید	$\frac{Gr}{Re^2}$	Gr	GrPr <sup>۲</sup>
$\left[ \left[ \frac{k}{l_0 v_0 \rho \hat{C}_p} \right] \right]$	$\frac{1}{RePr}$	$\frac{1}{RePr}$	$\frac{1}{Pr}$	۱
$\left[ \left[ \frac{\mu v_0}{l_0 \rho \hat{C}_p (T_1 - T_0)} \right] \right]$	$\frac{Br}{RePr}$	$\frac{Br}{RePr}$	چشم‌پوشی کنید	چشم‌پوشی کنید

تذکرات:

(الف) برای همرفت واداشته و همرفت واداشته به‌علاوه آزاد «بینابینی»،  $v_0$  را معمولاً سرعت تقرب (برای جریان در اطراف اجسام غوطه‌ور) یا سرعت متوسط (برای جریان در مجراها) در نظر می‌گیرند.  
 (ب) برای همرفت آزاد دو انتخاب برای  $v_0$  داریم که آن‌ها را A و B می‌نامیم. در بخش ۹-۱۰، حالت A به‌طور طبیعی پدید می‌آید. در صورتی که فرض جریان خزشی فرضی مناسب باشد، حالت B حالت مفیدی است، به‌طوری که می‌توان از  $D\check{v}/D\check{x}$  چشم‌پوشی کرد. (نگاه کنید به مثال ۱۱-۵-۲). سپس اختلاف فشار بدون بُعد جدید  $\check{P} = Pr\check{P}$  را می‌توان معرفی کرد که با  $\check{P}$  به‌کار رفته در معادله (۱۱-۷-۴) متفاوت است، به‌طوری که وقتی معادله حرکت بر Pr تقسیم شود، تنها گروه بدون بُعدی که در معادله ظاهر می‌شود، GrPr است. توجه کنید که در حالت B، هیچ گروه بدون بُعدی در معادله انرژی ظاهر نمی‌شود.

جدول ۱۱-۵-۲ گروه‌های بدون بُعد به‌کاررفته در سیستم‌های غیرهم‌دما.

Re	=	$\left[ \left[ \frac{l_0 v_0 \rho}{\mu} \right] \right] = \left[ \left[ \frac{l_0 v_0}{\nu} \right] \right]$	=	عدد رینولدز
Pr	=	$\left[ \left[ \frac{\hat{C}_p \mu}{k} \right] \right] = \left[ \left[ \frac{\nu}{\alpha} \right] \right]$	=	عدد پرانتل
Gr	=	$\left[ \left[ \frac{g \beta (T_1 - T_0) l_0^3}{\nu^2} \right] \right]$	=	عدد گراسهوف
Br	=	$\left[ \left[ \frac{\mu v_0^2}{k (T_1 - T_0)} \right] \right]$	=	عدد برینکمن
Pe'	=	RePr	=	عدد پکلث
Ra	=	GrPr	=	عدد ریلی
Ec	=	Br/Pr	=	عدد اکرت

پایین بودن مقدار عدد رینولدز به‌این‌معناست که نیروهای ویسکوز در مقایسه با نیروهای لخت بزرگ‌اند. کوچک بودن عدد برینکمن به‌این‌معناست که گرمای تولیدشده بر اثر اتلاف ویسکوز را می‌توان از طریق رسانش گرما به‌سرعت دفع کرد. وقتی نسبت  $Gr/Re^2$  بزرگ باشد، نیروی شناوری در تعیین الگوی جریان اهمیت پیدا می‌کند.

چون تحلیل بُعدی مستلزم استفاده از قوه داوری و تجربه است، سه مثال روشن‌گر ارائه می‌دهیم. در دو مثال نخست همرفت واداشته و آزاد را در وضعیت‌های هندسی ساده تحلیل می‌کنیم. در مثال سوم با مسائلی در مقیاس بزرگ و تجهیزات نسبتاً پیچیده سروکار داریم.

جدول ۳-۵.۱۱ تفسیر فیزیکی گروه‌های بدون بعد.

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{\rho v_\infty^2 / l_0}{\mu v_\infty / l_0^2} = \frac{\text{نیروی لخت}}{\text{نیروی ویسکوز}} \\ \text{Fr} &= \frac{\rho v_\infty^2 / l_0}{\rho g} = \frac{\text{نیروی لخت}}{\text{نیروی گرانش}} \\ \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} &= \frac{\rho g \beta (T_1 - T_\infty)}{\rho v_\infty^2 / l_0} = \frac{\text{نیروی شناوری}}{\text{نیروی لخت}} \\ \text{Pe}' = \text{RePr} &= \frac{\rho \hat{C}_p v_\infty (T_1 - T_\infty) / l_0}{k (T_1 - T_\infty) / l_0^2} = \frac{\text{گرمای انتقالی از طریق همرفت}}{\text{گرمای انتقالی از طریق رسانش}} \\ \text{Br} &= \frac{\mu (v_\infty / l_0)^2}{k (T_1 - T_\infty) / l_0^2} = \frac{\text{گرمای تولیدی از طریق اتلاف ویسکوز}}{\text{گرمای انتقالی از طریق رسانش}} \end{aligned}$$

### مثال ۱-۵.۱۱

توزیع دما در اطراف استوانهٔ طویل

می‌خواهیم توزیع دما در جریان گاز در اطراف استوانه‌ای طویل را که از داخل خنک می‌شود (سیستم I)، براساس اندازه‌گیری‌های تجربی روی مدلی با مقیاس  $\frac{1}{4}$  (سیستم II) پیش‌بینی کنیم. این سیستم، که در شکل ۱-۵.۱۱ نشان داده شده‌است، همان است که در مثال ۱-۷.۳ دیدیم، با این تفاوت که اکنون غیرهم‌دماست. سیال با سرعت  $v_\infty$  و دمای  $T_\infty$  به استوانه نزدیک می‌شود و سطح استوانه را، مثلاً از طریق جوشش میرد موجود در داخل آن، در دمای  $T_0$  نگه می‌دارند.

با استفاده از تحلیل بعدی نحوهٔ انتخاب شرایط تجربی مناسب برای بررسی‌های مدل را نشان دهید. تحلیل بعدی را برای «حالت بینابینی» جدول ۱-۵.۱۱ انجام دهید.

حل

دو سیستم ۱ و ۲ از لحاظ هندسی مشابه‌اند. برای اطمینان یافتن از تشابه دینامیکی، چنان‌که در بخش ۷.۳ گفته شد، باید معادله‌های دیفرانسیل بدون بعد و شرایط مرزی همانند باشند و گروه‌های بدون بعدی که در آن‌ها ظاهر می‌شوند، مقادیر عددی یکسان داشته‌باشند.

در این جا طول مشخصه را برابر قطر  $D$  استوانه در نظر می‌گیریم، سرعت مشخصه همان سرعت تقرب  $v_\infty$  سیال است، فشار مشخصه، فشار درحالتی است که  $x \rightarrow -\infty$  و  $y = 0$ ، و دماهای مشخصه عبارت‌اند از: دمای  $T_\infty$  سیالی که به استوانه نزدیک می‌شود، و دمای  $T_0$  جدار استوانه. این کمیت‌های مشخصه، اندیس‌های I و II، متناظر با سیستمی که آن را توصیف می‌کنند، دارند.

هر دو سیستم توسط معادله‌های دیفرانسیل بدون بعد (۷-۵.۱۱) تا (۹-۵.۱۱)، و شرایط مرزی زیر توصیف می‌شوند:

$$(۱۰-۵.۱۱) \quad \text{شرط مرزی ۱: وقتی } \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \rightarrow \infty, \text{ داریم } \delta_x \rightarrow 0 \text{ و } \tilde{v} \rightarrow 1$$

$$(۱۱-۵.۱۱) \quad \text{شرط مرزی ۲: در } \frac{1}{4} = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2, \text{ داریم } \tilde{v} = 0 \text{ و } \tilde{T} = 0$$

$$(۱۲-۵.۱۱) \quad \text{شرط مرزی ۳: وقتی } \tilde{x} \rightarrow -\infty \text{ و } \tilde{y} = 0, \text{ داریم } \tilde{p} \rightarrow 0$$

که در آن  $\dot{T} = (T - T_0)/(T_\infty - T_0)$ . برای این وضعیت هندسی ساده، شرایط مرزی فاقد گروه‌های بدون بُعدند. پس این شرط که معادله‌های دیفرانسیل و شرایط مرزی به صورت بدون بُعد همانند باشند، به این معناست که گروه‌های بدون بُعد زیر در دو سیستم برابر باشند:  $Re = Dv_\infty\rho/\mu$ ،  $Pr = \hat{C}_p\mu/k$ ،  $Br = \mu v_\infty^2/k(T_\infty - T_0)$  و  $Gr = \rho^2 g\beta(T_\infty - T_0)D^3/\mu^2$ . در گروه اخیر از عبارت  $\beta = 1/T$  برای گاز ایده‌آل استفاده می‌کنیم.

به منظور ایجاد برابری ضروری در چهار گروه بدون بُعد حاکم، می‌توانیم از مقادیر متفاوت چهار پارامترکنارگذاشتی در دو سیستم استفاده کنیم: سرعت تقرب  $v_\infty$ ، دمای سیال  $T_\infty$ ، فشار تقرب  $P_\infty$ ، و دمای استوانه  $T_0$ . بنابراین شرایط تشابه (برای  $D_I = 4D_{II}$ ) عبارت‌اند از:

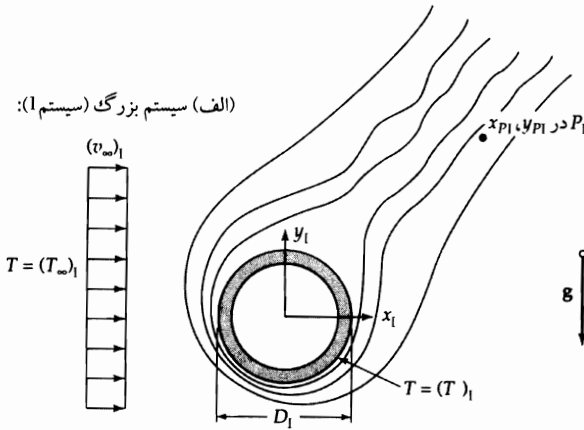
$$\frac{\nu_I}{\nu_{II}} = \frac{\alpha_I}{\alpha_{II}} \quad \text{:Pr تساوی (۱۳-۵.۱۱)}$$

$$\frac{\nu_I}{\nu_{II}} = 4 \frac{v_{\infty I}}{v_{\infty II}} \quad \text{:Re تساوی (۱۴-۵.۱۱)}$$

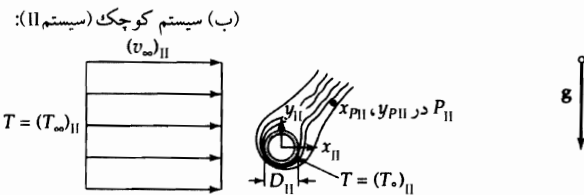
$$\left(\frac{\nu_I}{\nu_{II}}\right)^2 = 64 \frac{T_{\infty II} (T_\infty - T_0)_I}{T_{\infty I} (T_\infty - T_0)_{II}} \quad \text{:Gr تساوی (۱۵-۵.۱۱)}$$

$$\left(\frac{P_{II}}{P_{II}}\right) \left(\frac{v_{\infty I}}{v_{\infty II}}\right)^2 = \frac{\hat{C}_{pI} (T_\infty - T_0)_I}{\hat{C}_{pII} (T_\infty - T_0)_{II}} \quad \text{:Br تساوی (۱۶-۵.۱۱)}$$

در این جا  $\nu = \mu/\rho$  و ویسکوزیته سینماتیکی و  $\alpha = k/\rho\hat{C}_p$  ضریب نفوذ گرمایی است.



(الف) سیستم بزرگ (سیستم I):



(ب) سیستم کوچک (سیستم II):

شکل ۱۱-۵.۱۱ توزیع دما در اطراف استوانه‌های طولی گرم شده. خطوط تراز در دو شکل معرف سطوح با دمای ثابت‌اند.

ساده‌ترین راه برای برقراری معادله (۱۳-۵.۱۱) استفاده از سیال یکسان با فشار تقرب،  $P_\infty$ ، و دمای تقرب،  $T_\infty$ ، یکسان در دو سیستم است. اگر این کار انجام شود، معادله (۱۴-۵.۱۱) ایجاب می‌کند که سرعت تقرب در مدل کوچک (II) چهار برابر سرعت تقرب مورد استفاده در سیستم با مقیاس کامل (I) باشد. اگر سرعت سیال نسبتاً

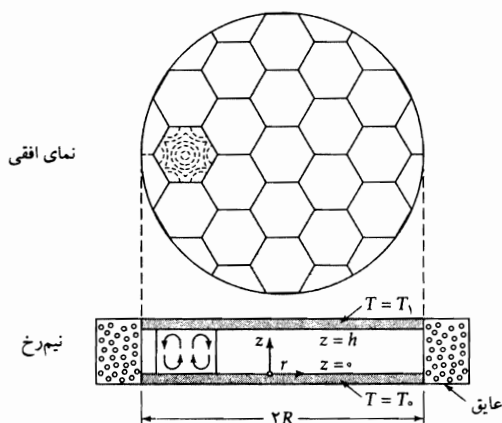
بالا، و اختلاف دما کم باشد، تساوی Pr و Re در دو سیستم، تقریب خوبی از تشابه دینامیکی را ایجاد می‌کند. این حالت حدی همرفت واداشته با اتلاف ویسکوز قابل چشم‌پوشی است.

اما اگر اختلاف دمای  $T_\infty - T_0$  بزرگ باشد، آثار همرفت آزاد می‌تواند درخور اعتنا شود. در چنین شرایطی، طبق معادله (۵.۱۱-۱۵)، اختلاف دما در مدل باید ۶۴ برابر اختلاف دما در سیستم بزرگ باشد، تا تشابه تضمین شود. باتوجه به معادله (۵.۱۱-۱۶) مشاهده می‌شود که چنین نسبتی بین اختلاف دماها، تساوی عدد برینکمن را غیرممکن می‌کند. برای برقراری تساوی اخیر به نسبت ۱۶ نیاز است. اما این تناقض معمولاً مطرح نیست، زیرا آثار همرفت آزاد و گرمایش ویسکوز به‌ندرت به‌طور هم‌زمان اهمیت پیدا می‌کنند. آثار همرفت آزاد در سیستم‌های با سرعت پایین مطرح می‌شوند، اما گرمایش ویسکوز فقط هنگامی درخور اعتناست که گرادیان سرعت بسیار بزرگ باشد.

### مثال ۵.۱۱-۲

همرفت آزاد در لایه سیال افقی؛ تشکیل سلول‌های پنار

می‌خواهیم در مورد حرکت همرفت آزاد در سیستم نشان داده شده در شکل ۵.۱۱-۲ تحقیق کنیم. این سیستم از لایه نازکی از سیال تشکیل می‌شود که بین دو صفحه موازی افقی قرار دارد؛ دمای صفحه پایینی  $T_0$  و دمای صفحه بالایی  $T_1$  است و  $T_1 < T_0$ . در غیاب حرکت سیال، شار گرمای رسانشی برای همه  $z$ ها یکسان خواهد بود و در حالت پایا گرادیان دمای تقریباً یکنواختی تثبیت می‌شود. این گرادیان دما، به‌نوبه خود، سبب ایجاد گرادیان چگالی می‌شود، اگر با افزایش  $z$ ، چگالی کاهش یابد، سیستم پایدار خواهد بود، اما اگر چگالی افزایش یابد، وضعیتی بالقوه ناپایدار ایجاد خواهد شد. در حالت اخیر ممکن است هرگونه اختلال تصادفی سبب شود که سیال سنگین‌تر به سمت پایین حرکت کند و جای سیال سبک‌تر زیری را بگیرد. اگر دماهای سطوح بالایی و پایینی ثابت نگه داشته شوند، نتیجه ممکن است همرفت آزاد پیوسته باشد. اما نیروهای ویسکوز با این حرکت مقابله می‌کنند و بنابراین ممکن است این حرکت فقط در صورتی ایجاد شود که اختلاف دمایی که مسبب آن است از یک مقدار حداقل بحرانی بیش‌تر شود. با استفاده از تحلیل بُعدی، وابستگی تابعی این حرکت سیال، و شرایطی را که تحت آن‌ها می‌توان انتظار وقوع چنین حرکتی را داشت، تعیین کنید.



شکل ۵.۱۱-۲ سلول‌های پنار که در ناحیه بین دو صفحه موازی افقی تشکیل می‌شوند؛ دمای صفحه پایینی از دمای صفحه بالایی بیش‌تر است. اگر عدد ریلی از یک مقدار بحرانی معین بزرگ‌تر شود، سیستم ناپایدار می‌شود و سلول‌های شش‌ضلعی پنار تشکیل می‌شوند.

حل

این سیستم با معادله‌های (۵.۱۱-۱) تا (۵.۱۱-۳)، همراه با شرایط مرزی زیر، توصیف می‌شود:

$$(۵.۱۱-۱۷) \text{ شرط مرزی ۱: در } z = 0, \quad v = 0, \quad T = T_0$$

$$(۱۸-۵.۱۱) \quad T = T_1, \mathbf{v} = 0 \text{ در } z = h \text{ شرط مرزی ۲: داریم}$$

$$(۱۹-۵.۱۱) \quad \partial T / \partial r = 0, \mathbf{v} = 0 \text{ در } r = R \text{ شرط مرزی ۳: داریم}$$

اکنون با استفاده از  $l_0 = h$  این مسئله را به صورت بدون بُعد بیان می‌کنیم. از کمیت‌های بدون بُعد فهرست شده زیر عنوان حالت (ب) در جدول ۱۱-۵ استفاده می‌کنیم، دمای مرجع  $\bar{T}$  را برابر  $\frac{1}{2}(T_0 + T_1)$  انتخاب می‌کنیم، به طوری که:

$$(۲۰-۵.۱۱) \quad (\nabla \cdot \check{\mathbf{v}}) = 0 \text{ پیوستگی:}$$

$$(۲۱-۵.۱۱) \quad \frac{D\check{\mathbf{v}}}{Dt} = -\nabla \check{P} + \text{Pr} \nabla^2 \check{\mathbf{v}} - \text{GrPr}^2 \left( \frac{\mathbf{g}}{g} \right) (\check{T} - \frac{1}{2}) \text{ حرکت:}$$

$$(۲۲-۵.۱۱) \quad \frac{D\check{T}}{Dt} = \nabla^2 \check{T} \text{ انرژی:}$$

با شرایط مرزی بدون بُعد زیر:

$$(۲۳-۵.۱۱) \quad \check{T} = 0, \check{\mathbf{v}} = 0, \check{z} = 0 \text{ در } ۱: \text{ شرط مرزی ۱: داریم}$$

$$(۲۴-۵.۱۱) \quad \check{T} = 0, \check{\mathbf{v}} = 0, \check{z} = 1 \text{ در } ۲: \text{ شرط مرزی ۲: داریم}$$

$$(۲۵-۵.۱۱) \quad \partial \check{T} / \partial \check{r} = 0, \check{\mathbf{v}} = 0 \text{ در } \check{r} = R/h \text{ شرط مرزی ۳: داریم}$$

اگر می‌توانستیم معادله‌های بدون بُعد را همراه با شرایط مرزی بدون بُعد حل کنیم، درمی‌یافتیم که توزیع سرعت و دما فقط به  $\text{Pr}$ ،  $\text{Gr}$  و  $R/h$  وابسته است. به علاوه، هرچه نسبت  $R/h$  بزرگ‌تر باشد، اثر آن کم‌اهمیت‌تر خواهد بود و درحد صفحه‌های افقی فوق‌العاده بزرگ، رفتار سیستم صرفاً به  $\text{Pr}$  و  $\text{Gr}$  بستگی خواهد داشت.

اگر فقط جریان‌های خزشی پایا را در نظر بگیریم، آن‌گاه جمله  $D\check{\mathbf{v}}/Dt$  را می‌توان مساوی صفر قرار داد. حال اختلاف فشار بدون بُعد جدیدی  $\mathcal{P} = \text{Pr}\check{P}$  را تعریف می‌کنیم. وقتی سمت چپ معادله (۲۱-۵.۱۱) را برابر صفر قرار دهیم، می‌توانیم آن را بر  $\text{Pr}$  تقسیم کنیم و معادله حاصل فقط شامل یک گروه بدون بُعد، موسوم به عدد ریلی<sup>۱</sup> نشان می‌دهد که چگونه می‌توان تعداد گروه‌های بدون بُعد لازم برای توصیف سیستم جریان غیرهم‌دما را کاهش داد. تحلیل قبل این نظر را مطرح می‌کند که ممکن است یک مقدار بحرانی برای عدد ریلی وجود داشته باشد و هرگاه از این مقدار بحرانی تجاوز شود، سیال به حرکت درخواهد آمد. این نظر به طور تجربی تأیید شده است<sup>۲،۳</sup> و عدد ریلی بحرانی  $51 \pm 170^\circ$  به دست آمده است. برای اعداد ریلی کوچک‌تر از مقدار بحرانی، سیال ساکن است؛ این مشاهده که شارگرم در لایه مایع همان است که برای رسانش در سیال ساکن پیش‌بینی می‌شود، یعنی  $q_z = k(T_0 - T_1)/h$ ، گواه این نظر است. اما به محض این‌که عدد ریلی از مقدار بحرانی بزرگ‌تر شود، شارگرم به سبب انتقال همرفتی انرژی، به سرعت افزایش می‌یابد. افزایش رسانندگی گرمایی سبب کاهش عدد ریلی می‌شود و در نتیجه  $\text{Ra}$  را به سمت گستره پایدار حرکت می‌دهد.

فرض جریان خزشی برای این سیستم فرضی منطقی است و وقتی  $\text{Pr} \rightarrow \infty$  به طور مجانبی صحیح است. این

۱. عدد ریلی به یاد لرد ریلی نامگذاری شده است:

(J. W. Strutt), *Phil. Mag.*, (6) **32**, 529-546 (1916).

2. P. L. Silveston, *Forsch. Ingenieur-Wesen*, **24**, 29-32, 59-69 (1958).

3. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Instability*, Oxford University Press (1961);

T. E. Faber, *Fluid Dynamics for Physicists*, Cambridge University Press (1995), §8.7.



فرض کار را هم بسیار راحت می‌کند، زیرا حل تحلیلی معادله‌های تغییر را امکان‌پذیر می‌سازد.<sup>۴</sup> در شکل ۲-۵.۱۱، یک جواب تحلیلی که با آزمایش هم توافق خوبی دارد، به صورت کیفی ترسیم شده است. این الگوی جریان سلولی و شش ضلعی است؛ در مرکز هر شش ضلعی جریان روبه بالا و در محیط آن جریان روبه پایین وجود دارد. واحدهای این الگوی جالب را سلول‌های پِنار می‌نامند.<sup>۵</sup> جواب تحلیلی وجود عدد ریلی بحرانی را نیز تأیید می‌کند. با شرایط مرزی این مسئله و بسیار بزرگ بودن نسبت  $R/h$ ، مقدار بحرانی عدد ریلی برابر  $1708$  محاسبه شده است<sup>۶</sup> که با نتایج تجربی گفته شده در بالا توافق عالی دارد.

رفتار مشابهی برای سایر شرایط مرزی مشاهده می‌شود. اگر صفحه بالایی شکل ۲-۵.۱۱ را با فصل مشترک گاز-مایع عوض کنیم، به طوری که تنش برشی سطحی در مایع قابل چشم‌پوشی باشد، برای اعداد ریلی بالاتر از حدود  $1101$ ، به طور نظری همرفت سلولی پیش‌بینی می‌شود.<sup>۳</sup> نمونه‌ای جالب از این نوع ناپایداری در «جابه‌جایی» بهاره آب دریاچه‌های مناطق شمالی مشاهده می‌شود. اگر آب دریاچه تا نزدیک نقطه انجماد سرد شود، گرادیان چگالی معکوس ایجاد می‌شود، زیرا دمای آب سطح دریاچه به  $4^{\circ}\text{C}$  می‌رسد که دمایی است که در آن آب چگالی ماکزیم خود را دارد. در لایه‌های کم عمق مایع با سطح آزاد، ناپایداری بر اثر گرادیان کشش سطحی نیز ایجاد می‌شود. تنش‌های سطحی سبب ایجاد همرفت سلولی می‌شوند که شباهت ظاهری با همرفت ناشی از گرادیان دما دارد و این دو اثر به آسانی باهم اشتباه می‌شوند. درحقیقت، به نظر می‌رسد که جریان‌های پایایی که برای نخستین بار پِنار آن‌ها را مشاهده کرد و به آثار شناوری نسبت داد، عملاً بر اثر گرادیان کشش سطحی ایجاد شده باشند.<sup>۶</sup>

### مثال ۲-۵.۱۱

دمای سطح کویل گرم‌کن برقی

یک کویل گرم‌کن برقی به قطر  $D$  برای نگه داشتن مخزن بزرگی از مایع در بالای نقطه انجماد طراحی شده است. می‌خواهیم دمای سطح کویل را به صورت تابعی از آهنگ گرمایش  $Q$  و دمای توده مایع،  $T_0$ ، پیش‌بینی کنیم. این پیش‌بینی بر اساس آزمایش‌های انجام شده روی دستگاهی کوچک‌تر، اما مشابه از لحاظ هندسی و پر شده با همان مایع، انجام می‌شود.

یک راهکار آزمایشی مناسب برای انجام این پیش‌بینی تدوین کنید. از وابستگی دمایی خواص فیزیکی، غیر از چگالی، می‌توان چشم‌پوشی کرد. دمای سطح کل کویل گرم‌کن را می‌توان یکنواخت و برابر  $T_1$  فرض کرد.

حل

با مسئله همرفت آزاد سروکار داریم و برای گروه‌های بدون بُعد از ستون (الف) در جدول ۱-۵.۱۱ استفاده می‌کنیم. با استفاده از معادله‌های تغییر و شرایط مرزی، می‌دانیم که دمای بدون بُعد  $\tilde{T} = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$  باید تابعی از مختصات بدون بُعد بوده، به گروه‌های بدون بُعد  $Gr$  و  $Pr$  وابسته باشد.

آهنگ ورود انرژی از طریق سطح کویل عبارت است از:

$$Q = -k \int_S \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_S dS \quad (26-5.11)$$

4. A. Pellew and R. V. Southwell, *Proc. Roy. Soc.*, **A176**, 312-343 (1940).

5. H. Bénard, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, **11**, 1261-1271, 1309-1328 (1900); *Annales de Chimie et de Physique*, **23**, 62-144 (1901).

6. C. V. Sternling and L. E. Scriven, *AIChE Journal*, **5**, 514-523 (1959); L. E. Scriven and C. V. Sternling, *J. Fluid Mech.*, **19**, 321-340 (1964).

در این جا  $r$  مختص اندازه‌گیری شده به طرف خارج، نسبت به سطح کوئل و قائم بر آن، و  $S$  مساحت سطح کوئل است و گرادیان دما همان گرادیان دمای سیال در مجاورت سطح کوئل است. این رابطه، به صورت بدون بُعد، چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{Q}{k(T_1 - T_0)D} = - \int_{\xi} \frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{r}} \Big|_{\xi} d\ddot{S} = \psi(\text{Pr}, \text{Gr}) \quad (27-5.11)$$

که در آن  $\psi$  تابع  $\text{Pr} = \dot{C}_p \mu / k$  و  $\text{Gr} = \rho^\nu g \beta (T_1 - T_0) D^2 / \mu^\nu$  است. چون سیستم‌های بزرگ و کوچک از لحاظ هندسی مشابه‌اند، تابع بدون بُعد  $\ddot{S}$  که سطح انتگرال‌گیری را توصیف می‌کند، برای دو سیستم یکسان است و بنابراین نیازی نیست در تابع  $\psi$  گنجانده شود. به همین ترتیب، اگر شرایط مرزی را برای دما، سرعت، و فشار در سطوح کوئل و مخزن بنویسیم، تنها نسبت‌های اندازه را به دست می‌آوریم که در هر دو سیستم یکسان است.

اکنون به این نکته توجه می‌کنیم که کمیت مطلوب  $(T_1 - T_0)$  در دو طرف معادله (27-5.11) ظاهر می‌شود. اگر دو طرف این معادله را در عدد گراسهوف ضرب کنیم، آن‌گاه  $(T_1 - T_0)$  فقط در سمت راست ظاهر می‌شود:

$$\frac{Q \rho^\nu g \beta D^2}{k \mu^\nu} = \text{Gr} \cdot \psi(\text{Pr}, \text{Gr}) \quad (28-5.11)$$

در اصل، می‌توانیم معادله (28-5.11) را برای یافتن  $\text{Gr}$  حل کنیم و عبارتی برای  $(T_1 - T_0)$  به دست آوریم. چون از وابستگی خواص فیزیکی به دما چشم‌پوشی می‌کنیم، می‌توانیم عدد پرانتل را برای سیال مفروض ثابت بگیریم و بنویسیم:

$$T_1 - T_0 = \frac{\mu^\nu}{\rho^\nu g \beta D^2} \cdot \phi \left( \frac{Q \rho^\nu g \beta D^2}{k \mu^\nu} \right) \quad (29-5.11)$$

در این جا  $\phi$  تابع گروه  $Q \rho^\nu g \beta D^2 / k \mu^\nu$  است که به طور تجربی تعیین می‌شود. سپس می‌توانیم نمودار معادله (29-5.11) را، با استفاده از اندازه‌گیری‌های تجربی  $T_1$ ،  $T_0$ ، و  $D$  برای سیستم کوچک و خواص فیزیکی معلوم سیال ترسیم کنیم. با استفاده از این نمودار می‌توانیم رفتار سیستم بزرگ را پیش‌بینی کنیم.

چون از وابستگی خواص سیال به دما چشم‌پوشی کرده‌ایم، می‌توانیم از این هم جلوتر برویم. اگر نسبت مقادیر  $Q$  در دو سیستم را با عکس مجذور نسبت قطرهای برابر بگیریم، آن‌گاه نسبت متناظر مقادیر  $(T_1 - T_0)$  با عکس مکعب نسبت قطرهای برابر خواهد بود.

### پرسش‌های تشریحی

۱. انرژی، انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی، و انرژی داخلی را تعریف کنید. از کدام واحدهای مشترک برای آن‌ها استفاده می‌شود؟
۲. مفهوم فیزیکی هریک از جمله‌های معادله‌های (7-1.11) و (11-2.11) را چگونه می‌توان مشخص کرد؟
۳. در به دست آوردن معادله (7-2.11) از رابطه  $\dot{C}_p - \dot{C}_v = R$  که برای گازهای ایده‌آل صادق است، استفاده کردیم. معادله متناظر برای مایعات و گازهای غیرایده‌آل چیست؟
۴. همه مراحل لازم جهت دستیابی به معادله تغییر برای دما را خلاصه کنید.
۵. همرفت واداشته و همرفت آزاد را مقایسه کنید و وجوه تمایز آن‌ها را، از لحاظ حل مسئله، تحلیل بُعدی، و ظهور در مسائل صنعتی و هواشناسی شرح دهید.
۶. اگر مخروط دماغه موشک از ماده‌ای متخلخل ساخته شود و در حین بازگشت به جو زمین مایعی فرار را با فشار از منافذ آن عبور دهند، دمای سطح مخروط چگونه تغییر می‌کند و چرا؟

۷. اصل ارشمیدس چیست، و چگونه می‌توان آن را به جمله  $\rho g \beta (T - \bar{T})$  در معادله (۲-۳.۱۱) مربوط کرد؟
۸. آیا درحین گرم کردن تشت کم عمقی از آب روی اجاق، انتظار دارید سلول‌های بنار را ببینید؟
۹. آیا می‌توان بدون داشتن اطلاعات تفصیلی درمورد توزیع سرعت سیستم، معادله انرژی را، کاملاً و به‌طور دقیق، حل کرد؟ اگر می‌توان، چه‌وقت این کار امکان‌پذیر است؟
۱۰. آیا می‌توان بدون داشتن اطلاعات تفصیلی درمورد توزیع دمای سیستم، معادله حرکت را برای یک سیستم غیرهم‌دما حل کرد؟ اگر می‌توان، چه‌وقت این کار امکان‌پذیر است؟

### مسئله‌ها

۱۱الف. دما در یاتاقان. مطلوب است محاسبه دمای ماکزیمم در یاتاقان مسئله ۱۳الف.۱، با فرض این‌که رسانندگی گرمایی ماده روانکار  $4 \times 10^{-4} \text{ cal/s} \cdot \text{cm} \cdot \text{C}$ ، دمای فلز  $200^\circ\text{C}$  و سرعت چرخش یاتاقان  $4000 \text{ rpm}$  باشد. جواب: در حدود  $217^\circ\text{C}$  (از هردو معادله (۱۳-۴.۱۱) و (۹-۴.۱۰)).

۱۱الف.۲. تغییر ویسکوزیته و گرادیان سرعت در فیلم غیرهم‌دما. آب از روی جداری عمودی به‌صورت فیلمی به ضخامت  $1/8 \text{ mm}$  فرومی‌ریزد. دمای آب در سطح آزاد مایع  $100^\circ\text{C}$  و روی سطح جدار  $80^\circ\text{C}$  است.

(الف) نشان دهید که انحراف کسری ماکزیمم بین ویسکوزیته‌های پیش‌بینی‌شده توسط معادله‌های

$$T = \sqrt{T_0 T_\delta} \quad (11-4.17) \quad \text{و} \quad (11-4.18) \quad \text{وقتی ایجاد می‌شود که}$$

(ب) مطلوب است محاسبه انحراف کسری ماکزیمم در شرایط مفروض.

جواب: (ب)  $0.05$ .

۱۱الف.۳. سرمایش تعریقی.

(الف) مطلوب است محاسبه توزیع دما بین دو پوسته مسئله ۴-۴.۱۱، به‌ازای آهنگ‌های جریان جرمی شعاعی صفر و  $10^{-5} \text{ g/s}$  برای شرایط زیر:

$$R = 500 \text{ میکرون} \quad T_R = 300^\circ\text{C}$$

$$\kappa R = 100 \text{ میکرون} \quad T_\kappa = 100^\circ\text{C}$$

$$k = 6.13 \times 10^{-5} \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{C}$$

$$\hat{C}_p = 0.25 \text{ cal/g} \cdot \text{C}$$

(ب) آهنگ‌های رسانش گرما به سطح در  $\kappa R$  را، در حضور و در غیاب همرفت، مقایسه کنید.

۱۱الف.۴. اتلاف گرمای همرفتی آزاد از سطح عمودی. صفحه گرم‌کن کوچکی اساساً از یک سطح تخت، عمودی و مستطیلی، به ارتفاع  $3 \text{ cm}$  و عرض  $5 \text{ cm}$  تشکیل می‌شود. آهنگ کل اتلاف گرما از یک طرف این صفحه از طریق همرفت آزاد را تخمین بزنید، هرگاه دمای سطح صفحه  $150^\circ\text{F}$  و دمای هوای محیط  $70^\circ\text{F}$  و فشار هوا ۱ اتمسفر باشد. در معادله (۱۱-۴.۵۱) از مقدار  $C = 0.548$ ، که لورنتس پیشنهاد کرده، و مقدار  $C$  که ویتاکر پیشنهاد کرده‌است، استفاده و نتایج دو محاسبه را مقایسه کنید.

جواب:  $8.1 \text{ cal/s}$  با استفاده از عبارت لورنتس.

۱۱ الف ۵. تغییرات سرعت، دما، و فشار در موج شوکی. هوا با فشار ۱ اتمسفر و دمای  $70^\circ\text{F}$  با عدد ماخ بالادستی ۲ در موج شوکی ساکن، جریان دارد. مطلوب است محاسبه کمیت‌های زیر، با این فرض که  $\gamma$  در ۱٫۴ ثابت است و  $\hat{C}_p = 0,24 \text{ Btu/lb}_m \cdot \text{F}$ :

(الف) سرعت بالادستی هوا؛

(ب) سرعت، دما، و فشار در پایین‌دست موج شوکی؛

(ج) تغییرات انرژی داخلی و جنبشی در موج شوکی.

جواب: (الف)  $2250 \text{ ft/s}$ ; (ب)  $4,48 \text{ atm}$ ;  $888^\circ\text{R}$ ;  $844 \text{ ft/s}$ .

(ج)  $\Delta\hat{U} = +61,4 \text{ Btu/lb}_m$ ;  $\Delta\hat{K} = -86,9 \text{ Btu/lb}_m$ .

۱۱ الف ۶. تراکم بدون اصطکاک آدیاباتیک گاز ایده‌آل. مطلوب است محاسبه دمای ایجادشده بر اثر متراکم کردن هوا، از دمای اولیه  $100^\circ\text{F}$  و فشار اولیه ۱ اتمسفر، تا  $0,1$  حجم اولیه آن. فرض می‌شود  $1,4 = \gamma$  و تراکم بدون اصطکاک و آدیاباتیک است. نتیجه را در ارتباط با کار موتور احتراق داخلی توصیف کنید. جواب:  $950^\circ\text{F}$ .

۱۱ الف ۷. اثر همرفت آزاد بر ارزش عایقی فضای افقی پر شده با هوا. دو صفحه فلزی افقی و موازی به اندازه  $2,5 \text{ cm}$  از هم فاصله دارند و بین آن‌ها هوا با دمای متوسط  $100^\circ\text{C}$  وجود دارد. صفحه پایینی تا چه اندازه می‌تواند از صفحه بالایی داغ‌تر باشد، بدون این‌که سبب شروع همرفت آزاد سلولی شود که در مثال ۵.۱۱-۲ شرح داده شد؟ هرگاه ورق بسیار نازکی از فلز بین این دو صفحه (درست در وسط فاصله بین آن‌ها) قرار داده شود، این اختلاف دما را چه قدر می‌توان افزایش داد؟ جواب: تقریباً  $3$  و  $48^\circ\text{C}$ ، به ترتیب.

۱۱ ب ۱. فرایندهای بدون اصطکاک آدیاباتیک در گاز ایده‌آل.

(الف) گازی که از قانون گاز ایده‌آل پیروی می‌کند، ممکن است انحراف چشم‌گیری از رابطه (مقدار ثابت  $\hat{C}_p$ ) نشان دهد. بنابراین مثال ۴.۱۱-۶ را با استفاده از عبارت ظرفیت گرمایی مولی به صورت زیر دوباره حل کنید.

$$\hat{C}_p = a + bT + cT^2 \quad (11-1)$$

(ب) مطلوب است تعیین فشار نهایی  $p_2$  لازم، هرگاه متان ( $\text{CH}_4$ ) را، از طریق تراکم بدون اصطکاک آدیاباتیک، از دمای  $30^\circ\text{K}$  و فشار ۱ اتمسفر، تا دمای  $80^\circ\text{K}$  گرم کنیم. ثابت‌های تجربی توصیه‌شده<sup>۱</sup> برای گاز متان عبارت‌اند از:  $a = 2,322 \text{ cal/g-mole} \cdot \text{K}$ ،  $b = 38,04 \times 10^{-2} \text{ cal/g-mole} \cdot \text{K}^2$  و  $c = -10,97 \times 10^{-6} \text{ cal/g-mole} \cdot \text{K}^3$ .

جواب: (الف) مقدار ثابت  $\ln p_2 = \ln p_1 - (b/R)T + (c/2R)T^2$

(ب)  $9889$  اتمسفر.

1. O. A. Hougen, K. M. Watson, and R. A. Ragatz, *Chemical Process Principles*, Part I, 2nd edition, Wiley, New York (1958), p. 255.

برای مطالعه شرح کامل‌تری در مورد محاسبات فرایند هم‌آنتروپی به فصل ۲ این کتاب، صفحه‌های ۶۴۶-۶۵۳ رجوع کنید.

۲.۱۱ گرمایش ویسکوز در جریان آرام در لوله (جواب‌های مجانبی).

(الف) نشان دهید که برای جریان نیوتونی آرام کاملاً شکل‌یافته در لولهٔ مدور به شعاع  $R$ ، هرگاه از جمله‌های اتلاف ویسکوز چشم‌پوشی نشود، معادلهٔ انرژی چنین نوشته می‌شود:

$$\rho \hat{C}_p v_{z,\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{4 \mu v_{z,\max}^2}{R^2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (۱۱-۲.۱)$$

در این رابطه  $v_{z,\max}$  سرعت ماکزیم در لوله است. در مورد هریک از جواب‌های معادلهٔ (۱۱-۲.۱) چه محدودیت‌هایی باید قائل شد؟

(ب) در مسئلهٔ جدار هم‌دم ( $T = T_0$  در  $r = R$ )، به‌ازای  $z > 0$  و در  $z = 0$  به‌ازای همهٔ مقادیر  $r$ )، مطلوب است یافتن عبارت مجانبی برای  $T(r)$  به‌ازای مقادیر بزرگ  $z$ . این کار را با توجه به این نکته انجام دهید که  $\partial T / \partial z$ ، به‌ازای مقادیر بزرگ  $z$  برابر صفر خواهد بود. معادلهٔ (۱۱-۲.۱) را حل کنید و نتیجه بگیرید که:

$$T - T_0 = \frac{\mu v_{z,\max}^2}{4k} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right] \quad (۱۱-۲.۲)$$

(ج) در مسئلهٔ جدار آدیاباتیک ( $q_r = 0$  در  $r = R$ ) به‌ازای همهٔ مقادیر  $z > 0$  برای یافتن عبارتی مجانبی به‌ازای مقادیر بزرگ  $z$  می‌توان چنین عمل کرد: معادلهٔ (۱۱-۲.۱) را در  $r dr$  ضرب کنید و از  $r = R$  تا  $r = 0$  انتگرال بگیرید. از معادلهٔ حاصل روی  $z$  انتگرال بگیرید تا نتیجه شود:

$$T_b - T_1 = (4 \mu v_{z,\max} / \rho \hat{C}_p R^2) z \quad (۱۱-۲.۳)$$

که در آن  $T_1$  دمای ورودی در  $z = 0$  است. حال فرض کنید که توزیع دمای مجانبی به‌ازای مقادیر بزرگ  $z$  به‌صورت زیر است:

$$T - T_1 = (4 \mu v_{z,\max} / \rho \hat{C}_p R^2) z + f(r) \quad (۱۱-۲.۴)$$

این رابطه را در معادلهٔ (۱۱-۲.۱) قرار دهید و از معادلهٔ حاصل برحسب  $f(r)$  انتگرال بگیرید تا عبارت:

$$T - T_1 = \frac{4 \mu v_{z,\max}}{\rho \hat{C}_p R^2} z + \frac{\mu v_{z,\max}^2}{k} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^4 - \frac{1}{4} \right] \quad (۱۱-۲.۵)$$

پس از تعیین ثابت انتگرال‌گیری از طریق نوشتن موازنهٔ انرژی روی لوله، از صفر تا  $z$  نتیجه شود. در نظر داشته‌باشید که معادله‌های (۱۱-۲.۳) و (۱۱-۲.۵)، صرفاً به‌ازای مقادیر بزرگ  $z$ ، جواب‌های معتبرند. جواب‌های کامل به‌ازای مقادیر کوچک  $z$  در مسئلهٔ ۲.۵۱۱ نشان داده می‌شوند.

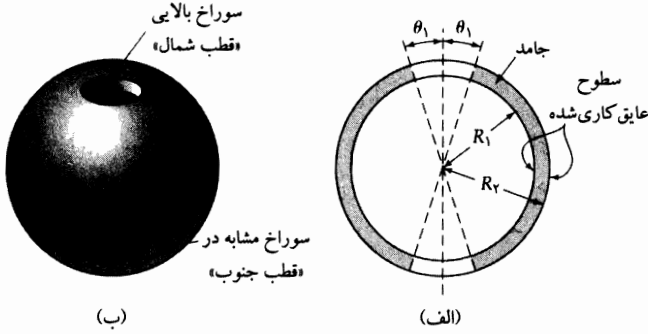
۳.۱۱ توزیع سرعت در فیلم غیرهم‌دم. نشان دهید که معادلهٔ (۱۱-۲.۴) شرایط زیر را برآورده می‌کند:

(الف) در  $x = \delta$ ،  $v_z = 0$ .

(ب) در  $x = 0$ ،  $\partial v_z / \partial x = 0$ .

(ج)  $\lim_{\mu \rightarrow 0} v_z(x) = (\rho g \delta^2 \cos \beta / 2 \mu_0) [1 - (x/\delta)^2]$

۴.ب۱۱ رسانش گرما در پوسته‌ی کروی (شکل ۱۱.ب۴). پوسته‌ای کروی به شعاع داخلی  $R_1$  و شعاع خارجی  $R_2$  مفروض است. با بریدن یک قطعه‌ی مخروطی در ناحیه‌ی  $\theta_1 \leq \theta \leq \pi$ ، در قطب شمال پوسته سوراخی ایجاد می‌کنند. سوراخ مشابهی هم با برداشتن بخش  $\pi - \theta_1 \leq \theta \leq \pi$  در قطب جنوب آن ایجاد می‌شود. سطح  $\theta = \theta_1$  در دمای  $T = T_1$  و سطح واقع در  $\theta = \pi - \theta_1$  در دمای  $T = T_2$  نگه داشته می‌شود. مطلوب است تعیین توزیع دمای حالت پایا با استفاده از معادله‌ی رسانش گرما.



شکل ۴.ب۱۱ رسانش گرما در پوسته‌ی کروی: (الف) مقطع حاوی محور  $z$ ; (ب) نمای کره از بالا.

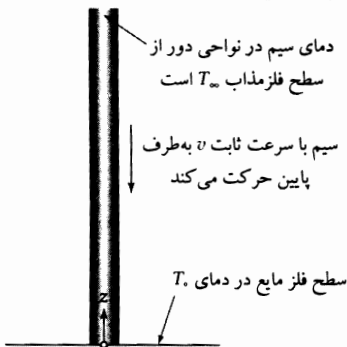
۵.ب۱۱ رسانش گرمای محوری در سیم<sup>۲</sup> (شکل ۱۱.ب۵). سیمی با چگالی ثابت  $\rho$  با سرعت یکنواخت  $v$  در حمام فلز مذاب با دمای  $T_0$  به سمت پایین حرکت می‌کند. می‌خواهیم توزیع دمای  $T(z)$  را به دست آوریم. فرض کنید  $T = T_\infty$  در  $z = \infty$  و مقاومت در برابر رسانش گرمای شعاعی قابل چشم‌پوشی است. هم‌چنین فرض کنید که دمای سیم عبارت است از  $T = T_0$  در  $z = 0$ .

(الف) ابتدا این مسئله را با فرض ثابت بودن خواص فیزیکی  $\hat{C}_p$  و  $k$  حل کنید. نتیجه بگیرید که:

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp\left(-\frac{\rho \hat{C}_p v z}{k}\right) \quad (11.5-1)$$

(ب) سپس این مسئله را درحالی‌که حل کنید که  $\hat{C}_p$  و  $k$  توابع معلوم دمای بدون بُعد  $K(\Theta)$  و  $k = k_\infty K(\Theta)$  باشند.  $\hat{C}_p = \hat{C}_{p\infty} L(\Theta)$  و توزیع دما را، به صورت زیر، به دست آورید:

$$-\left(\frac{\rho \hat{C}_{p\infty} v z}{k_\infty}\right) = \int_1^\Theta \frac{K(\bar{\Theta}) d\bar{\Theta}}{\int_0^{\bar{\Theta}} L(\bar{\Theta}) d\bar{\Theta}} \quad (11.5-2)$$



(ج) نشان دهید که جواب (ب) در معادله‌ی دیفرانسیلی که از آن به دست آمد، صدق می‌کند.

شکل ۵.ب۱۱ سیم در حال حرکت داخل حمام فلز مذاب.

۶.۱۱. سرمایش تعریقی در سیستم صفحه‌ای. دو صفحه افقی متخلخل تخت با فاصله کوچک  $L$  از هم قرار دارند. صفحه بالایی واقع در  $y = L$  در دمای  $T_L$  و صفحه پایینی واقع در  $y = 0$  در دمای پایین‌تر  $T_0$  نگه داشته می‌شود. برای کاهش مقدار گرمایی که باید از صفحه پایینی دفع شود، گاز ایده‌آلی با دمای  $T_0$  با آهنگی پایا به سمت بالا دمیده می‌شود تا از هر دو صفحه بگذرد. عبارتی برای توزیع دما و مقدار گرمای  $q$  که باید از واحد سطح صفحه سرد دفع کرد، به صورت تابعی از خواص سیال و آهنگ جریان گاز بیاید. از صورت اختصاری  $k/\rho \hat{C}_p v_y L$  استفاده کنید.

$$q_0 = \frac{k(T_L - T_0)}{L} \left( \frac{\phi}{e^\phi - 1} \right); \frac{T - T_L}{T_0 - T_L} = \frac{e^{\phi y/L} - e^\phi}{1 - e^\phi}$$

۷.۱۱. کاهش اتلاف تبخیری از طریق تعریق (شکل ۷.۱۱ ب.۷). پیشنهاد شده است که برای کاهش آهنگ تبخیر اکسیژن مایع در مخزن‌های کوچک، از تعریق استفاده شود. برای این کار، اکسیژن مایع را در مخزنی کروی نگه می‌دارند که مطابق شکل، با پوسته‌ای کروی از ماده عایق متخلخل احاطه شده است و پوسته عایق روزنی دارد که با توبی بسته می‌شود. بین مخزن و پوسته عایق فضای نازکی باقی می‌ماند و اکسیژن تبخیر شده که قصد خروج از مخزن را دارد، از این فضای گازی عبور می‌کند و سپس به طور یکنواخت جریان پیدا می‌کند تا از عایق متخلخل خارج شود. مطلوب است محاسبه آهنگ جذب گرما و اتلاف تبخیری از مخزنی به قطر ۱ ft که با پوسته عایقی به ضخامت ۶ in پوشانده شده است، تحت شرایط زیر، با وجود تعریق و بدون آن:

دمای اکسیژن مایع:  $-297^\circ\text{F}$

دمای سطح خارجی عایق:  $30^\circ\text{F}$

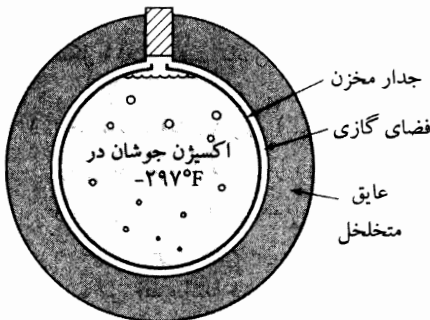
رسانندگی گرمایی مؤثر عایق:  $0.02 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}$

گرمای تبخیر اکسیژن:  $91.7 \text{ Btu/lb}_m$

مقدار متوسط  $\hat{C}_p$  برای اکسیژنی که از عایق می‌گذرد:  $0.22 \text{ Btu/lb}_m \cdot ^\circ\text{F}$

از مقاومت گرمایی اکسیژن مایع، جدار مخزن، و فضای گازی چشم‌پوشی کنید و اتلاف گرما از طریق توبی را نادیده بگیرید. فرض کنید ذرات عایق با گاز تعادل گرمایی دارند.

جواب:  $82 \text{ Btu/hr}$  بدون تعریق؛  $61 \text{ Btu/hr}$  با تعریق.



شکل ۷.۱۱ ب.۷. استفاده از تعریق برای کاهش آهنگ تبخیر.

۸.۱۱. توزیع دما در کره جاسازی شده. کره‌ای به شعاع  $R$  و رسانندگی گرمایی  $k_1$  در جامدی نامتناهی با رسانندگی گرمایی  $k_0$  جاسازی شده است. مرکز کره در مبدأ مختصات واقع است و گرادیان دمای ثابت  $A$  در جهت مثبت  $z$ ، دور از کره، وجود دارد. دما در مرکز کره  $T_0$  است.

توزیع دمای حالت پایا در کره  $T_1$  و در محیط اطراف آن  $T_0$  به صورت زیر نشان داده شده است:

$$T_1(r, \theta) - T_0 = \left[ \frac{3k_0}{k_1 + 2k_0} \right] Ar \cos \theta \quad r \leq R \quad (۱۱.۸.۱)$$

$$T_0(r, \theta) - T_0 = \left[ 1 - \frac{k_1 - k_0}{k_1 + 2k_0} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] Ar \cos \theta \quad r \geq R \quad (۱۱.۸.۲)$$

(الف) کدام معادله‌های دیفرانسیل جزئی باید در معادله‌های (۱۱.۸.۱) و (۱۱.۸.۲) صدق کنند؟

(ب) شرایط مرزی قابل کاربرد در  $r = R$  را بنویسید.

(ج) نشان دهید که  $T_1$  و  $T_0$  در معادله‌های دیفرانسیل جزئی مربوط به خود در قسمت (الف)، صدق می‌کنند.

(د) نشان دهید که معادله‌های (۱۱.۸.۱) و (۱۱.۸.۲) شرایط مرزی قسمت (ب) را برآورده می‌کنند.

۹.۱۱. جریان گرما در جامد احاطه شده توسط دو سطح مخروطی (شکل ۱۱.۹). جسمی جامد، مطابق شکل، مفروض

است. سطح مخروطی (مقدار ثابت)  $\theta_1$  و (مقدار ثابت)  $\theta_2$ ، به ترتیب، در دماهای  $T_1$  و  $T_2$  نگه داشته

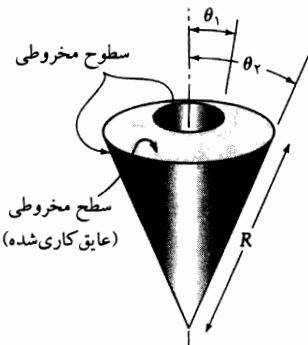
می‌شوند. سطح کروی واقع در  $r = R$  عایق کاری شده است. برای رسانش گرمای حالت پایا، مطلوب است یافتن:

(الف) معادله دیفرانسیل جزئی که  $T(\theta)$  باید در آن صدق کند.

(ب) جواب معادله دیفرانسیل قسمت (الف)، شامل دو ثابت انتگرال‌گیری.

(ج) عبارت‌هایی برای ثابت‌های انتگرال‌گیری.

(د) جریان انرژی کل (cal/s) روی سطح مخروطی در  $\theta = \theta_1$ .



جواب: (ه)  $Q = \frac{2\pi Rk(T_1 - T_2)}{\ln \left( \frac{\tan \frac{1}{4}\theta_2}{\tan \frac{1}{4}\theta_1} \right)}$

شکل ۹.۱۱. جسم حاصل از برخورد دو مخروط و یک کره.

۱۰.۱۱. انجماد یک قطره کروی (شکل ۱۱.۱۰). برای تعیین عملکرد شیپوره پودرساز، پیشنهاد شده است که

نوعی موم مذاب غیرفرار را در جریان هوای سرد، پودر کنیم. انتظار می‌رود ذرات موم در هوا منجمد شوند

و سپس بتوان آن‌ها را جمع‌آوری و بررسی کرد. قطره‌های موم مذاب، با دمایی اندکی بالاتر از نقطه ذوب

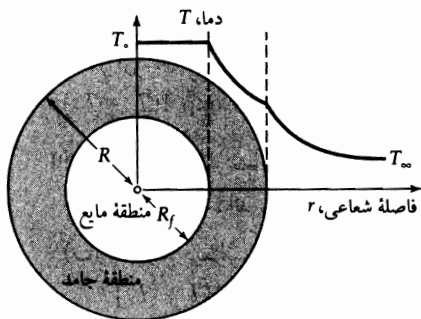
خود، از شیپوره خارج می‌شوند. زمان لازم برای انجماد کامل قطره‌ای به شعاع  $R$  را تخمین بزنید؛ فرض

کنید این قطره ابتدا در دمای ذوب  $T_0$ ، و هوای اطراف آن در دمای  $T_\infty$  است. گرما طبق قانون سرمایش

نیوتون و با ضریب انتقال گرمای ثابت  $h$ ، از این قطره به هوا منتقل می‌شود. فرض کنید در فرایند انجماد

تغییر حجم رخ نمی‌دهد. این مسئله را با استفاده از روش شبه‌حالت پایا حل کنید.





شکل ۱۱.ب.۱۰ توزیع دما در قطره‌کروی در حال انجماد.

(الف) ابتدا مسئله رسانش گرمای حالت‌پایا در فاز جامد را، در ناحیه بین  $r = R_f$  (فصل مشترک مذاب-جامد) و  $r = R$  (فصل مشترک جامد-هوا) حل کنید. فرض کنید رسانندگی گرمایی فاز جامد  $k$  است. سپس جریان گرمای شعاعی  $Q$  روی سطح کروی را در  $r = R$  به دست آورید.

(ب) سپس، با برابر قرار دادن گرمای آزادشده در  $r = R_f(t)$ ، حاصل از انجماد مایع با جریان گرمای  $Q$  روی سطح کروی در  $r = R$ ، موازنه انرژی حالت‌پایا را بنویسید. با انتگرال‌گیری از معادله دیفرانسیل تفکیک‌پذیر مرتبه اول، بین حدهای صفر و  $R$ ، زمان لازم برای انجماد قطره را به دست آورید. فرض کنید  $\Delta \hat{H}_f$  گرمای نهان انجماد (بر واحد جرم) است.

جواب: (الف)  $Q = \frac{h \cdot 4\pi R^2 (T_0 - T_\infty)}{[1 - (hR/k)] + (hR^2/kR_f)}$  (ب)  $t_f = \frac{\rho \Delta \hat{H}_f R}{h(T_0 - T_\infty)} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \frac{hR}{k} \right]$

۱۱.ب.۱۱ افزایش دما در دانه کاتالیزگر کروی (شکل ۱۱.ب.۱۱). یک دانه کاتالیزگر به شعاع  $R$  و رسانندگی گرمایی  $k$  (که می‌توان آن را ثابت فرض کرد) مفروض است. به علت انجام واکنش شیمیایی در داخل دانه متخلخل، گرما با آهنگ  $S_c \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{s}$  تولید می‌شود. در سطح خارجی دانه گرما، از طریق انتقال همرفتی با ضریب انتقال گرمای  $h$ ، در جریان گازی با دمای ثابت  $T_g$  دفع می‌شود. مطلوب است توزیع دمای حالت‌پایا، با فرض ثابت ماندن  $S_c$ .

(الف) با نوشتن موازنه لایه‌ای انرژی، معادله دیفرانسیل را تشکیل دهید.

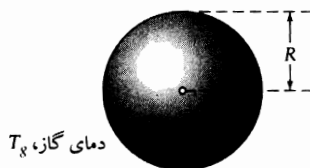
(ب) با ساده کردن صورت مناسب معادله انرژی، معادله دیفرانسیل را تشکیل دهید.

(ج) با انتگرال‌گیری از معادله دیفرانسیل، توزیع دما را به دست آورید. تابع  $T(r)$  را ترسیم کنید.

(د) صورت حدی  $T(r)$  وقتی  $h \rightarrow \infty$  چیست؟

(ه) دمای ماکزیمم سیستم چه قدر است؟

(و) در کدام بخش از این عملیات می‌توان تصحیحی انجام داد تا  $k$  متغیر و  $S_c$  متغیر به حساب آورده شوند؟



شکل ۱۱.ب.۱۱ کره با توزیع گرمای داخلی.

۱۱.ب ۱۲ پایداری سیستم واکنش گرمازا.<sup>۲</sup> تیغه‌ای متخلخل به ضخامت  $2B$ ، پهنای  $W$ ، و طول  $L$  را در نظر بگیرید که در آن  $B \ll L$  و  $B \ll W$ . در داخل این تیغه واکنشی گرمازا، با آهنگ تولید گرمای وابسته به دمای  $S_c \exp A(T - T_0)$  رخ می‌دهد.

(الف) با استفاده از معادله انرژی، معادله دیفرانسیلی برای دما در تیغه به دست آورید. فرض کنید خواص فیزیکی ثابت‌اند و جواب حالت پایا به صورت  $T(x)$  است.

(ب) معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی را برحسب این کمیت‌های بدون بُعد بنویسید:  $\xi = x/B$ ،  $\Theta = A(T - T_0)$ ، و  $\lambda = S_c \cdot AB^2/k$ ؛ در این جا  $A$  مقداری ثابت است.

(ج) از این معادله دیفرانسیل، انتگرال‌گیری کنید (راهنمایی: ابتدا آن را در  $d\Theta/d\xi$  ضرب کنید) تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)^2 = 2\lambda(\exp\Theta_0 - \exp\Theta) \quad (11.12.1)$$

که در آن  $\Theta_0$  ثابتی کمکی و معرف مقدار  $\Theta$  در  $\xi = 0$  است.

(د) از نتیجه قسمت (ج) انتگرال بگیرید و با استفاده از شرایط مرزی، رابطه بین ضخامت تیغه و دمای صفحه میانی آن را به دست آورید.

$$\exp\left(-\frac{1}{4}\Theta_0\right) \operatorname{arccosh}\left(\exp\frac{1}{4}\Theta_0\right) = \sqrt{\frac{1}{4}\lambda} \quad (2-12.11)$$

(ه)  $\lambda$  را به ازای  $0.5^\circ$ ،  $1^\circ$ ،  $2^\circ$ ،  $4^\circ$ ، و  $7^\circ$   $\Theta$  محاسبه کنید؛ این نتایج را ترسیم کنید تا مقدار ماکزیمم  $\lambda$  برای شرایط حالت پایا به دست آید. اگر مقدار  $\lambda$  از این بیش‌تر شود، سیستم منفجر خواهد شد.

۱۱.ب ۱۳ جریان حلقوی آرام با شار گرمای جداری ثابت. عملیات بخش  $8.1^\circ$  را برای یافتن جریان در حلقه‌ای به شعاع داخلی  $R$  و شعاع خارجی  $R$  تکرار کنید؛ کار را با معادله تغییر شروع کنید. گرما از طریق جدار استوانه داخلی با آهنگ  $q$  (گرما در واحد سطح در واحد زمان)، اضافه می‌شود و جدار استوانه خارجی از لحاظ گرمایی عایق‌کاری شده است.

۱۱.ب ۱۴ گرمایش حالت ناپایای کره. کره‌ای به شعاع  $R$  و ضریب نفوذ گرمایی  $\alpha$  ابتدا در دمای یکنواخت  $T_0$  است. به مدت  $t > 0$ ، کره در مخزن آب همزن‌داری با دمای ثابت  $T_1 > T_0$  فرو برده می‌شود. در این حالت دمای داخل کره تابعی از مختص شعاعی  $r$  و زمان  $t$  است. جواب معادله رسانش گرما چنین است:<sup>۴</sup>

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{R}{n\pi r}\right) \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \exp(-\alpha n^2 \pi^2 t/R^2) \quad (1-14.11)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که این معادله در معادله دیفرانسیل، شرایط مرزی، و شرایط اولیه صدق می‌کند.

(الف) معادله دیفرانسیل توصیف‌کننده این مسئله را بنویسید.

(ب) نشان دهید که معادله (۱۱.۱۴-۱) به ازای  $T(r, t)$  در معادله دیفرانسیل قسمت (الف) صدق می‌کند.

(ج) نشان دهید که شرط مرزی  $r = R$  برقرار است.

4. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959), p. 233, Eq. (4).

(د) نشان دهید که  $T$  در  $r = 0$  متناهی است.

(ه) برای نشان دادن این که معادله (۱۱-۱۴) شرط اولیه را برآورده می‌کند، فرض کنید  $t = 0$  و  $T = T_0$  و رابطه زیر را به دست آورید:

$$-1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{R}{n\pi r} \right) \sin \left( \frac{n\pi r}{R} \right) \quad (11-14)$$

برای نشان دادن درستی این نتیجه، دو طرف را در  $(r/R) \sin(m\pi r/R)$  ضرب کنید؛ در عبارت اخیر  $m$  هر عدد صحیح از ۱ تا  $\infty$  است. سپس از  $r = 0$  تا  $r = R$  انتگرال بگیرید. در انتگرال‌گیری، همه جمله‌ها با  $n \neq m$  در سمت راست معادله حذف می‌شوند. جمله‌ای که در آن  $m = n$ ، پس از انتگرال‌گیری، برابر انتگرال سمت چپ است.

۱۵.۱۱ متغیرهای بدون بُعد برای همرفت آزاد<sup>۵</sup> متغیرهای بدون بُعد معادله‌های (۱۱-۴۳) تا (۱۱-۴۳) را می‌توان با استدلال‌های ساده به دست آورد. صورت  $\Theta$  توسط شرایط مرزی تحمیل می‌شود و  $\zeta$  و وضعیت هندسی تعیین می‌کند. بقیه متغیرهای بدون بُعد را می‌توان به صورت زیر یافت:

(الف) قرار دهید  $\eta = y/y_0$ ،  $\phi_z = v_z/v_{z0}$  و  $\phi_y = v_y/v_{y0}$ ؛ کمیت‌هایی که اندیس صفر دارند، ثابت‌اند. سپس معادله‌های دیفرانسیل (۱۱-۳۳) تا (۱۱-۳۵) چنین نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} + \left[ \frac{v_{z0} y_0}{v_{y0} H} \right] \frac{\partial \phi_z}{\partial \zeta} = 0 \quad (11-15)$$

$$\phi_y \frac{\partial \phi_z}{\partial \eta} + \left[ \frac{v_{z0} y_0}{v_{y0} H} \right] \phi_z \frac{\partial \phi_z}{\partial \zeta} = \left[ \frac{\mu}{\rho y_0 v_{y0}} \right] \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial \eta^2} + \left[ \frac{y_0 g \beta (T_0 - T_1)}{v_{y0} v_{z0}} \right] \Theta \quad (11-15)$$

$$\phi_y \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \left[ \frac{v_{z0} y_0}{v_{y0} H} \right] \phi_z \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \left[ \frac{k}{\rho \hat{C}_p y_0 v_{y0}} \right] \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} \quad (11-15)$$

که شرایط مرزی آن‌ها با معادله‌های (۱۱-۴۷) تا (۱۱-۴۹) تعریف می‌شوند.

(ب) مقادیر مناسب برای  $v_{z0}$ ،  $v_{y0}$  و  $y_0$  انتخاب کنید تا معادله‌های قسمت (الف) به معادله‌های (۱۱-۴۴) تا (۱۱-۴۶) تبدیل شوند و نشان دهید که تعریف‌های معادله‌های (۱۱-۴۱) تا (۱۱-۴۳) مستقیماً نتیجه می‌شوند.

(ج) چرا انتخاب متغیرهای به دست آمده در قسمت (ب) به متغیرهای حاصل از قرار دادن گروه‌های بدون بُعد در معادله‌های (۱۱-۱۵) و (۱۱-۱۵) که برابر واحد به دست آمد، ترجیح دارد؟

۱.۱ ج سرعت انتشار امواج صوتی. امواج صوتی، امواج تراکمی همساز با دامنه بسیار کوچک‌اند که در سیالی تراکم‌پذیر حرکت می‌کنند. سرعت انتشار چنین امواجی را می‌توان با این فرض که تانسور شار اندازه حرکت<sup>۶</sup> و بردار شار گرمای  $q$  صفرند و سرعت  $v$  سیال کوچک است، تخمین زد چشم‌پوشی از  $T$  و  $q$  با این فرض هم‌ارز است که آنتروپی پیرو حرکت جزء سیالی مفروض ثابت است (نگاه کنید به مسئله ۱۱-۱۰).

۵. روش به‌کاررفته در این جا شبیه روشی است که در منبع زیر آمده است:

J. D. Hellums and S. W. Churchill, *AIChE Journal*, **10**, 110-114 (1964).

6. L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon, Oxford (1987), Chapter VIII; R. J. Silbey and R. A. Alberty, *Physical Chemistry*, 3rd edition, Wiley, New York (2001), §17.4.

(الف) با استفاده از ترمودینامیک تعادل نشان دهید که:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \quad (۱۱.۱.۱)$$

که در آن  $\gamma = Cp/Cv$

(ب) وقتی صوت در سیالی انتشار می‌یابد، اختلالات جزئی نسبت به حالت سکون، در فشار، چگالی، و سرعت پدید می‌آید:  $p = p_0 + p'$ ،  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ، و  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$ ؛ کمیت‌هایی که اندیس صفر دارند، ثابت‌های مرتبط با حالت سکون‌اند (یعنی وقتی  $v_0$  برابر صفر است)، و کمیت‌های پریم‌دار بسیار کوچک‌اند. نشان دهید که وقتی این کمیت‌ها در معادله پیوستگی و معادله حرکت جایگزین شوند (با حذف جمله‌های  $\mathbf{g}$  و  $\boldsymbol{\tau}$ ) و حاصل ضرب‌های کمیت‌های پریم‌دار کوچک حذف شوند، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (۱۱.۱.۲) \quad \text{معادله پیوستگی:}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \quad (۱۱.۱.۳) \quad \text{معادله حرکت:}$$

(ج) سپس با استفاده از نتیجه قسمت (الف) معادله حرکت را به صورت زیر بازنویسی کنید:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -v_S^2 \nabla \rho \quad (۱۱.۱.۴)$$

که در آن  $v_S^2 = \gamma(\partial p/\partial \rho)_T$

(د) نشان دهید که می‌توان معادله‌های (۱۱.۱.۲) و (۱۱.۱.۴) را ترکیب کرد و نتیجه گرفت:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = v_S^2 \nabla^2 \rho \quad (۱۱.۱.۵)$$

(ه) نشان دهید که یک جواب معادله (۱۱.۱.۵) چنین است:

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 + A \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} (z - v_S t) \right) \right] \quad (۱۱.۱.۶)$$

این جواب معرف موج همسازی به طول موج  $\lambda$  و دامنه  $\rho_0 A$  است که با سرعت  $v_S$  در جهت  $z$  حرکت می‌کند. جواب‌های عمومی‌تر را می‌توان با برهم‌نهی امواجی با طول‌موج‌ها و امتدادهای مختلف به دست آورد.

۱۱.۲ همرفت آزاد در شکاف. سیالی با ویسکوزیته ثابت، و چگالی طبق معادله (۱۱.۳.۱) در شکافی مستطیلی محبوس است. این شکاف جدارهای عمودی در  $x = \pm B$ ،  $y = \pm W$  و سقف و کفی در  $z = \pm H$  دارد و در آن  $H \gg W \gg B$ . جدارهای شکاف غیرهم‌دما هستند و توزیع دما عبارت است از  $T_w = \bar{T} + Ay$ ، به طوری که سیال براثر همرفت آزاد گردش می‌کند. می‌خواهیم توزیع سرعت را، برای شرایط جریان آرام پایا و انحراف‌های جزئی از چگالی میانگین  $\bar{\rho}$  پیش‌بینی کنیم.

(الف) معادله‌های پیوستگی، حرکت، و انرژی را، طبق فرض‌های زیر ساده کنید:  $\mathbf{v} = \delta_z v_z(x, y)$

و  $\partial^2 v_z / \partial y^2 \ll \partial^2 v_z / \partial x^2$ ، و  $T = T(y)$ . این فرض‌ها برای جریان آهسته منطقی‌اند، مگر

در نزدیکی لبه‌های  $y = \pm W$  و  $z = \pm H$

(ب) شرایط مرزی را که باید همراه مسئله ساده‌شده در قسمت (الف) به‌کار برد، نام ببرید.

(ج) توزیع دما، فشار و سرعت را به دست آورید.

(د) در هنگام اندازه‌گیری نفوذ در محفظه‌های بسته، همرفت آزاد می‌تواند یکی از منابع مهم خطا باشد و باید از گرادیان دما اجتناب کرد. از طریق ترسیم، گرادیان دمای ماکزیمم قابل تحمل،  $A$ ، را برای آزمایشی که با آب در دمای  $20^\circ\text{C}$ ، در محفظه‌ای با  $B = 0.1\text{ mm}$ ،  $W = 2.0\text{ mm}$  و  $H = 2\text{ cm}$  انجام می‌شود، به دست آورید؛ فرض کنید در آزمایشی که یک ساعت به طول می‌انجامد، حرکت همرفتی مجاز ماکزیمم برابر  $H/100\%$  است.

جواب: (ج)  $v_z(x, y) = \frac{\rho g \beta A}{\gamma \mu} (B^2 - x^2)y$  (د)  $2.7 \times 10^{-3}\text{ K/cm}$ .

۳.ج ۱۱ جریان حلقوی مماسی برای مایعی بسیار ویسکوز. نشان دهید که معادله (۱۳-۴.۱۱) برای جریان در ناحیه‌ای حلقوی، وقتی  $\kappa$  به سمت واحد میل می‌کند، در حد به معادله (۹-۴.۱۰) برای جریان در شکاف مسطح تبدیل می‌شود. این نوع مقایسه‌ها غالباً برای واری نتایج سودمند است.

سمت راست معادله (۱۳-۴.۱۱) در  $\kappa = 1$ ، نامعین است، اما می‌توان حد آن را، وقتی  $\kappa \rightarrow 1$ ، با بسط توانی  $\kappa = 1 - \varepsilon$  به دست آورد. برای انجام این کار، قرار دهید  $\kappa = 1 - \varepsilon$  و  $\xi = 1 - \varepsilon[(x/b)]$ ؛ در این حالت گستره  $0 \leq \xi \leq 1$  در مسئله ۲-۴.۱۱ با گستره  $0 \leq x \leq b$  در بخش ۴.۱۰ متناظر است. پس از انجام جایگزینی‌ها، سمت راست معادله (۱۳-۴.۱۱) را به صورت توان‌های  $\varepsilon$  بسط دهید (از جمله‌های پس از  $\varepsilon^2$  چشم‌پوشی کنید) و نشان دهید که معادله (۹-۴.۱۰) به دست می‌آید.

۴.ج ۱۱ رسانش گرما با رسانندگی گرمایی متغیر.

(الف) برای رسانش حالت‌پایا در جامدات، معادله (۵-۲.۱۱) به  $(\nabla \cdot \mathbf{q}) = 0$  تبدیل می‌شود و از قرار دادن قانون فوریه نتیجه می‌شود  $(\nabla \cdot k \nabla T) = 0$ . نشان دهید که تابع (مقدار ثابت)  $F = \int k dT$  در معادله لاپلاس  $\nabla^2 F = 0$  صدق می‌کند، هرگاه  $k$  فقط به  $T$  بستگی داشته باشد.

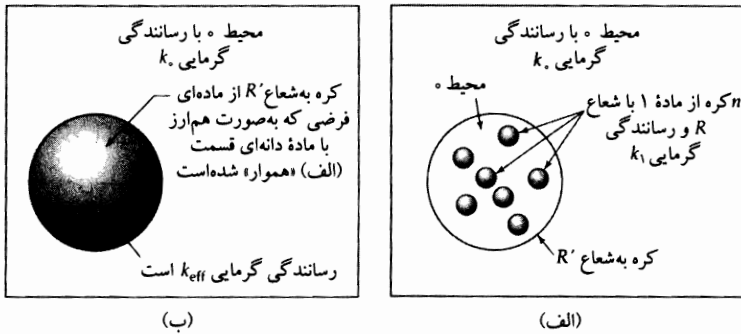
(ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف) و تابع دلخواه  $k(T)$  مسئله ۱۰ ب. ۱۲ (قسمت الف) را حل کنید.

۵.ج ۱۱ رسانندگی گرمایی مؤثر جامد با عایق کروی (شکل ۱۱ ج ۵) معادله (۱-۶.۹) را برای رسانندگی گرمایی مؤثر یک سیستم دوفاز به دست بیاورید؛ کار را از معادله‌های (۱-۸.۱۱) و (۱۱ ب. ۸-۲) شروع کنید. دو سیستم برپا می‌کنیم که هردو در یک ناحیه کروی به شعاع  $R'$  واقع‌اند: (الف) سیستم «واقعی»، که محیطی با رسانندگی گرمایی  $k_0$  است؛ و در آن  $n$  کره کوچک با رسانندگی گرمایی  $k_1$  و شعاع  $R$  وجود دارند، و (ب) سیستمی «هم‌ارز»، که پیوستاری با رسانندگی گرمایی مؤثر  $k_{\text{eff}}$  است. در هردو سیستم گرادیان دمای  $A$  برقرار است و هردو سیستم را محیطی با رسانندگی گرمایی  $k_0$  احاطه کرده است.

(الف) در مورد سیستم «واقعی» می‌دانیم که در فواصل بزرگ  $L$  از سیستم (یعنی  $L \gg R'$ )، میدان دما با اصلاح مختصر معادله (۱۱ ب. ۸-۲) به دست می‌آید، به شرط آن‌که غلظت کره‌های کوچک در سیستم واقعی بسیار پایین باشد:

$$T_0(r, \theta) - T^\circ = \left[ 1 - n \frac{k_1 - k_0}{k_1 + 2k_0} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] Ar \cos \theta \quad (11-5)$$

نحوه به دست آمدن این رابطه را به دقت شرح دهید.



شکل ۱۱.۵. آزمایشی که ماکسول برای به دست آوردن رسانندگی گرمایی یک جامد مرکب انجام داد: (الف) سیستم گسسته «واقعی»، و سیستم پیوستاری «هم‌ارز».

(ب) سپس، برای «سیستم هم‌ارز»، از معادله (۱۱.۸.۲)، می‌توان نوشت:

$$T_0(r, \theta) - T^0 = \left[ 1 - n \frac{k_{\text{eff}} - k_0}{k_{\text{eff}} + 2k_0} \left( \frac{R'}{r} \right)^3 \right] Ar \cos \theta \quad (11.5.2)$$

(ج) سپس رابطه  $nR'^3 = \phi R'^3$  را به دست آورید که در آن  $\phi$  کسر حجمی کره‌های کوچک داخل «سیستم واقعی» است.

(د) سمت راست معادله‌های (۱۱.۵.۱) و (۱۱.۵.۲) را با معادله ماکسول<sup>۷</sup>، یعنی معادله (۱۱.۶.۹) برابر قرار دهید.

۱۱.۶. شرایط مرزی فصل مشترکی. سطح فصل مشترکی غیرهم‌دمای  $S(t)$ ، بین فازهای خالص I و II در یک سیستم غیرهم‌دما را در نظر بگیرید. این فازها می‌توانند از دو سیال امتزاج‌ناپذیر تشکیل شوند (به طوری که هیچ ماده‌ای از  $S(t)$  عبور نکند)، یا از دو فاز خالص مختلف از یک ماده تشکیل شوند (که بین آن‌ها ممکن است جرم، از طریق چگالش، تبخیر، انجماد، یا ذوب، مبادله شود). فرض کنید  $n^I$  بردار یکه موضعی قائم بر  $S(t)$  باشد که جهت آن به طرف فاز I است. اندیس بالایی I یا II، برای نشان دادن مقادیر روی  $S$  در هر فاز است، و اندیس بالایی S مقادیر در فصل مشترک را نشان می‌دهد. شرایط مرزی فصل مشترکی معمول در مورد سرعت مماسی  $v_t$  و دمای  $T$  روی  $S$  عبارت‌اند از:

$$v_t^I = v_t^{II} \quad (11.6.1) \quad (\text{عدم لغزش})$$

$$T^I = T^{II} \quad (11.6.2) \quad (\text{پیوستگی دما})$$

به علاوه، استفاده از معادله‌های پایستگی ساده‌شده<sup>۸</sup> برای فصل مشترک‌های عاری از مواد فعال در سطح پیشنهاد شده است:

$$(n^I \cdot \{\rho^I(v^I - v^S) - \rho^{II}(v^{II} - v^S)\}) = 0 \quad (11.6.3) \quad \text{موازنه جرم فصل مشترکی}$$

7. J. C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol. 1, Oxford University Press (1891, reprinted 1998), §314. 8. J.

C. Slattery, *Advanced Transport Phenomena*, Cambridge University Press (1999), pp. 58, 435.

(۱۱.ج.۶-۴) موازنه اندازه حرکت فصل مشترکی

$$\mathbf{n}^I \left[ (p^I - p^{II}) - \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] + (\mathbf{n}^I \cdot \rho^I (\mathbf{v}^I - \mathbf{v}^S)) (\mathbf{v}^I - \mathbf{v}^{II}) + [\mathbf{n}^I \cdot \{\boldsymbol{\tau}^I - \boldsymbol{\tau}^{II}\}] = \nabla^S \sigma$$

(۱۱.ج.۶-۵) موازنه انرژی داخلی فصل مشترکی

$$(\mathbf{n}^I \cdot \rho^I (\mathbf{v}^I - \mathbf{v}^S)) [(\hat{U}^I - \hat{U}^{II}) + \frac{1}{\gamma} (v^{I2} - v^{II2})] + (\mathbf{n}^I \cdot (\mathbf{q}^I - \mathbf{q}^{II})) + (\mathbf{n}^I \cdot [(\boldsymbol{\pi}^I \cdot \mathbf{v}^I - \boldsymbol{\pi}^{II} \cdot \mathbf{v}^{II})]) = 0$$

موازنه اندازه حرکت معادله (۱۱.ج.۳-۵) را تعمیم داده‌ایم تا گرادیان سطحی  $\nabla^S \sigma$  کشش فصل مشترک را نیز شامل شود؛ نیروی مماسی حاصل سبب بروز چند نوع پدیده جریان فصل مشترکی می‌شود که به آثار مارانگونی موسوم‌اند.<sup>۱۰،۹</sup>

(الف) سازگاری بعدی هر معادله موازنه فصل مشترکی را نشان دهید.

(ب) در چه شرایطی  $v^I$  و  $v^{II}$  مساوی‌اند؟

(ج) نشان دهید که وقتی فازهای I و II دو مایع امتزاج‌ناپذیر خالص‌اند، معادله‌های موازنه چگونه ساده می‌شوند؟

(د) نشان دهید که وقتی یکی از فازها جامد است، معادله‌های موازنه چگونه ساده می‌شوند.

۱۱.ج.۷ اثر گرادیان کشش سطحی بر فیلم ریزان.

(الف) تعیین توزیع تنش برشی و سرعت را که در مثال ۱۱.۲-۱ انجام دادیم، در حضور گرادیان دمای کوچک  $dT/dz$  درجهت جریان تکرار کنید. فرض کنید این گرادیان دما گرادیان کشش سطحی ثابت  $d\sigma/dz = A$  تولید می‌کند، اما اثر دیگری بر خواص فیزیکی ندارد. توجه کنید که این گرادیان کشش سطحی در سطح آزاد فیلم تنش برشی ایجاد خواهد کرد (نگاه کنید به مسئله ۱۱.ج.۶)، و، بنابراین، باید در آن جا گرادیان سرعت غیرصفر وجود داشته‌باشد. یک بار دیگر، فیلم را آرام پایدار و غیرمواج فرض کنید. (ب) ضخامت فیلم را به صورت تابعی از آهنگ جریان خالص روبه پایین محاسبه کنید و مفهوم فیزیکی نتیجه حاصل را شرح دهید.

جواب: (الف)  $\tau_{xz} = \rho g x \cos \beta + A$ ؛  $v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] + \frac{A\delta}{\mu} \left( 1 - \frac{x}{\delta} \right)$

۱۱.د.۱۱ معادله تغییر آنتروپی. این مسئله برای آشنایی با ترمودینامیک فرایندهای برگشت‌پذیر مطرح می‌شود. در بخش‌های ۱۱.۲۴ و ۱۱.۲۴، نحوه برخورد با مخلوط‌های چندجزئی نشان داده شده‌است.

(الف) موازنه آنتروپی را برای جزء حجم ثابت  $\Delta x \Delta y \Delta z$  بنویسید. فرض کنید  $s$  بردار شار آنتروپی است که نسبت به بردار سرعت سیال  $\mathbf{v}$  اندازه‌گیری می‌شود. به علاوه، فرض کنید آهنگ تولید آنتروپی در واحد حجم را می‌توان با  $g_s$  نشان داد. نشان دهید که وقتی جزء حجم  $\Delta x \Delta y \Delta z$  بتواند بی‌نهایت

9. C. G. M. marangoni, *Ann. Phys. (Poggendorf)*, **3**, 337-354 (1871); C. V. Sternlng and L. E. Scriven, *AICHE Journal*, **5**, 514-523 (1959).

10. D. A. Edwards, H. Brenner, and D. T. Wasan, *Interfacial Transport Processes and Rheology*, Butterworth-Heinemann, Stoneham, Mass (1991).

کوچک شود، سرانجام معادله تغییر آنتروپی، به یکی از دو صورت زیر حاصل می‌شود:<sup>۱۱</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{S} = -(\nabla \cdot \rho \hat{S} \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{s}) + g_s \quad (۱-۱.۱۱)$$

$$\rho \frac{D\hat{S}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{s}) + g_s \quad (۲-۱.۱۱)$$

که در آن  $\hat{S}$  آنتروپی بر واحد حجم است.

(ب) اگر فرض کنیم که کمیت‌های ترمودینامیکی را می‌توان به‌طور موضعی در وضعیت غیرتعادلی تعریف کرد، آنگاه، طبق رابطه ترمودینامیکی  $d\hat{U} = Td\hat{S} - pdV$  می‌توان  $\hat{U}$  را به  $\hat{S}$  و  $\hat{V}$  مربوط کرد. این رابطه را با معادله (۲-۲.۱۱) ترکیب کنید تا نتیجه شود:

$$\rho \frac{D\hat{S}}{Dt} = -\frac{1}{T}(\nabla \cdot \mathbf{q}) - \frac{1}{T}(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) \quad (۳-۱.۱۱)$$

(ج) شار آنتروپی موضعی برابر است با شار انرژی موضعی تقسیم بر دمای موضعی،<sup>۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵</sup> یعنی وقتی این رابطه بین  $\mathbf{s}$  و  $\mathbf{q}$  تشخیص داده شود، می‌توان معادله‌های (۲-۱.۱۱) و (۳-۱.۱۱) را مقایسه کرد و عبارت زیر را برای آهنگ تولید آنتروپی بر واحد حجم به‌دست آورد:

$$g_s = -\frac{1}{T}\mathbf{q} \cdot \nabla T - \frac{1}{T}(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) \quad (۴-۱.۱۱)$$

نخستین جمله سمت راست عبارت است از: آهنگ تولید آنتروپی همراه با انتقال گرما، و جمله دوم عبارت است از: آهنگ تولید آنتروپی ناشی از انتقال اندازه حرکت. معادله (۴-۱.۱۱) نقطه شروع مطالعه ترمودینامیک فرایندهای برگشت‌ناپذیر در سیالی خالص است.

(د) وقتی قانون ویسکوزیته نیوتون و قانون رسانش گرمای فوریه در معادله (۴-۱.۱۱) قرار داده شوند، چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟

۲.۱۱ گرمایش ویسکوز در جریان آرام داخل لوله.

(الف) تحلیلی را که در مسئله ۱۱.ب.۲ شروع کردید، یعنی یافتن توزیع دما در سیال نیوتونی جاری در لوله مدور با سرعتی به‌اندازه کافی بالا به‌صورتی که آثار گرمایش ویسکوز اهمیت پیدا کنند، ادامه دهید. فرض کنید توزیع سرعت در ورودی ( $z = 0$ ) کاملاً شکل‌یافته است و دمای ورودی در تمام مقطع یکنواخت است. همه خواص فیزیکی را ثابت فرض کنید.

11. G. A. J. Jaumann, *Sitzungsber. der Math-Naturwiss. Klasse der Kaiserlichen Akad. der Wissenschaften (Wien)*, **102**, Abt. IIA, 385-530 (1911).

۱۲. کارل هنری اکرت (۱۹۰۲-۱۹۷۳)، معاون رئیس دانشگاه کالیفرنیا در سان دیه‌گو (۱۹۶۹-۱۹۶۵)، سهم اساسی در پایه‌ریزی مکانیک کوانتومی، هیدروپدینامیک ژئوفیزیکی، و ترمودینامیک فرایندهای برگشت‌ناپذیر داشت؛ سهم اصلی او در پدیده‌های انتقال را در منبع زیر می‌توان دید:

C. H. Eckart, *Phys. Rev.*, **58**, 267-268, 269-275 (1940).

13. C. F. Curtiss and J. O. Hirschfelder, *J. Chem. Phys.*, **18**, 171-173 (1950).

14. J. G. Kirkwood and B. L. Crawford, Jr., *J. Phys. Chem.*, **56**, 1048-1051 (1952).

15. S. R. de Groot and P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam (1962).



(ب) این تحلیل را برای ویسکوزیته غیرنیوتونی تابع قانون توانی تکرار کنید.<sup>۱۶</sup>

۳.۵۱۱ پی‌ریزی معادله انرژی با استفاده از قضیه‌های انتگرال. در بخش ۱.۱۱ معادله انرژی با منظور کردن تغییرات انرژی در جزء حجم کوچک مستطیلی  $\Delta x \Delta y \Delta z$  به دست آمد.

(الف) این عمل را با استفاده از جزء حجم اختیاری  $V$  با مرز ثابت  $S$ ، با دنبال کردن روش ارائه شده در مسئله ۱.۵۳ تکرار کنید. کار را با نوشتن قانون پایستگی انرژی، به صورت زیر، شروع کنید:

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \hat{U} + \frac{1}{2} \rho v^2) dV = - \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) dS + \int_V \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) dV \quad (۱-۳.۵۱۱)$$

سپس با استفاده از قضیه واگرایی گاوس، انتگرال روی سطح را به انتگرال روی حجم تبدیل کنید و معادله (۱-۳.۵۱۱) را به دست آورید.

(ب) عملیات نظیر را برای یک «قطره» متحرک مایع انجام دهید.

## فصل ۱۲

### توزیع دما با بیش از یک متغیر مستقل

۱.۱۲ رسانش ناپایا در جامدات

۲.۱۲ رسانش پایا در جریان تراکم‌ناپذیر آرام

۳.۱۲ جریان پتانسیل پایای گرما در جامدات

۴.۱۲ نظریه لایه مرزی برای جریان غیرهم‌دما

در فصل ۱۰ با نحوه حل کردن مسئله‌های ساده جریان گرما با استفاده از موازنه لایه‌ای انرژی آشنا شدیم. در فصل ۱۱ معادله انرژی را برای سیستم‌های جریان بی‌ریزی کردیم، که فرایندهای انتقال گرما در وضعیت‌های پیچیده‌تر را توصیف می‌کند. برای نشان دادن سودمندی معادله انرژی، در بخش ۴.۱۱ چند مثال ارائه دادیم که برای حل اغلب آن‌ها به اطلاع از روش حل کردن معادله‌های دیفرانسیل جزئی نیاز نبود.

در این فصل به سراغ چند دسته از مسئله‌های انتقال گرما می‌رویم که بیش از یک متغیر مستقل دارند؛ یا دو متغیر مکانی دارند و یا یک متغیر مکانی و یک متغیر زمانی. این نوع مسائل و روش‌های ریاضی موازی در فصل ۴ ارائه شد.

۱.۱۲ رسانش ناپایا در جامدات

برای جامدات، معادله انرژی (۲.۱۱-۵)، وقتی با قانون فوریه برای رسانش گرما ترکیب شود، چنین نوشته می‌شود:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = (\nabla \cdot k \nabla T) \quad (1-1.12)$$

اگر بتوان رسانندگی گرمایی را مستقل از دما و مکان فرض کرد، آنگاه معادله (۱-۱.۱۲) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (2-1.12)$$

که در آن  $\alpha = k / \rho \hat{C}_p$  ضریب نفوذ گرمایی ماده جامد است. بسیاری از جواب‌های این معادله به دست آمده‌اند. رساله کارلسلاو و یِگِر<sup>۱</sup> حاوی بحث مفصلی در مورد روش‌های حل و هم‌چنین جدول کاملی از جواب‌های انواع

1. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959).

مختلفی از شرایط مرزی و اولیه است. بسیاری از مسئله‌های رسانش گرما که غالباً با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم، با جستجوی جواب در این اثر مرجع مهم حل می‌شوند. در این بخش چهار روش مهم حل مسئله‌های رسانش گرمای ناپایا را نشان می‌دهیم: روش ترکیب متغیرها، روش جداسازی متغیرها، روش پاسخ سینوسی، و روش تبدیل لاپلاس. در بخش ۱۰.۴ نیز از سه روش اول استفاده شد.

### مثال ۱۰.۱۲

گرمایش یک تیغه نیمه‌نامتناهی ماده‌ای جامد که فضایی را از  $y = 0$  تا  $y = \infty$  اشغال می‌کند، ابتدا در دمای  $T_0$  است. در زمان  $t = 0$  دمای سطح واقع در  $y = 0$  به‌طور ناگهانی به  $T_1$  افزایش می‌یابد و به مدت  $t > 0$  در این دما نگه داشته می‌شود. مطلوب است تعیین توزیع دمای وابسته به زمان  $T(y, t)$ .

حل

در این مسئله معادله (۲-۱۰.۱۲) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \quad (3-10.12)$$

در این جا اختلاف دمای بدون بُعد  $\Theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$  معرفی شده است. بنابراین شرایط اولیه و مرزی عبارت‌اند از:

$$(4-10.12) \text{ شرط اولیه: در } t \leq 0, \Theta = 0, \text{ به ازای همه مقادیر } y.$$

$$(5-10.12) \text{ شرط مرزی ۱: در } y = 0, \Theta = 1, \text{ به ازای همه مقادیر } t > 0.$$

$$(6-10.12) \text{ شرط مرزی ۲: در } y = \infty, \Theta = 0, \text{ به ازای همه مقادیر } t > 0.$$

این مسئله از لحاظ ریاضی نظیر مسئله‌ای است که با معادله‌های (۱-۱۰.۴) تا (۴-۱۰.۴) فرمول‌بندی شد. بنابراین جواب معادله (۱۵-۱۰.۴) را می‌توان مستقیماً برداشت و با ایجاد تغییرات مقتضی در نمادگذاری از آن استفاده کرد:

$$\Theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\sqrt{4\alpha t}} \exp(-\eta^2) d\eta \quad (7-10.12)$$

یا

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - \operatorname{erf} \frac{y}{\sqrt{4\alpha t}} \quad (8-10.12)$$

جوابی که در شکل ۲-۱۰.۴ نشان داده شده، توزیع دما را در حالتی توصیف می‌کند که مختص عرض  $(T - T_0)/(T_1 - T_0)$  و مختص طول  $y/\sqrt{4\alpha t}$  باشد.

چون هنگامی که شناسه حدود ۲ باشد، تابع خطا به مقدار ۰.۹۹ می‌رسد، ضخامت نفوذ گرمایی  $\delta_T$  عبارت است از:

$$\delta_T = 4\sqrt{\alpha t} \quad (9-10.12)$$

یعنی به ازای فواصل  $\delta_T > y$ ، دما کم‌تر از ۱٪ اختلاف  $T_1 - T_0$  تغییر کرده است. اگر محاسبه دما در تیغه‌ای با ضخامت متناهی ضرورت داشته باشد، جواب معادله (۸-۱۰.۱۲) تقریب خوبی خواهد بود، هرگاه  $\delta_T$  نسبت به ضخامت تیغه کوچک باشد. اما وقتی  $\delta_T$  از مرتبه بزرگی ضخامت تیغه یا بیش‌تر از آن باشد، آن‌گاه باید از جواب سری مثال ۲-۱۰.۱۲ استفاده کرد.

شار گرمای دیوار را می‌توان با استفاده از معادله (۸-۱.۱۲)، به صورت زیر محاسبه کرد:

$$q_y|_{y=0} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{k}{\sqrt{\pi \alpha t}} (T_1 - T_0) \quad (10-1.12)$$

بنابراین شار گرمای دیوار به صورت  $t^{-1/2}$  تغییر می‌کند، درحالی‌که تغییرات ضخامت نفوذ به صورت  $t^{1/2}$  است.

### مثال ۲-۱.۱۲

گرمایش تیغه متناهی

تیغه جامدی که فضای بین  $y = -b$  و  $y = +b$  را اشغال می‌کند، ابتدا در دمای  $T_0$  است. در زمان  $t = 0$ ، دمای سطح واقع در  $y = \pm b$  به‌طور ناگهانی به  $T_1$  افزایش می‌یابد و در این دما نگه داشته می‌شود. مطلوب است تعیین  $T(y, t)$ .

حل

برای این مسئله متغیرهای بدون بُعد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\Theta = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \quad (11-1.12) \quad \text{دمای بدون بُعد:}$$

$$\eta = \frac{y}{b} \quad (12-1.12) \quad \text{مختص بدون بُعد:}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{b^2} \quad (13-1.12) \quad \text{زمان بدون بُعد:}$$

با این متغیرهای بدون بُعد، معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} \quad (14-1.12)$$

$$\Theta = 1 \quad \text{در } \tau = 0, \quad (15-1.12) \quad \text{شرط اولیه:}$$

$$\Theta = 0, \quad \text{در } \eta = \pm 1, \quad (16-1.12) \quad \text{شرط‌های مرزی ۱ و ۲:}$$

توجه کنید که وقتی مسئله به این صورت بیان می‌شود، هیچ پارامتری ظاهر نخواهد شد.

می‌توانیم این مسئله را با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کنیم. ابتدا حدس می‌زنیم که جوابی به صورت حاصل ضرب زیر می‌توان به دست آورد:

$$\Theta(\eta, \tau) = f(\eta)g(\tau) \quad (17-1.12)$$

با قرار دادن این تابع آزمایشی در معادله (۱۴-۱.۱۲) و تقسیم کردن آن بر حاصل ضرب  $f(\eta)g(\tau)$  نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad (18-1.12)$$

سمت چپ فقط تابع  $\tau$ ، و سمت راست فقط تابع  $\eta$  است. این نکته فقط هنگامی صادق است که هر دو طرف معادله با مقدار ثابتی برابر باشند که آن را  $-c^2$  می‌نامیم. اگر این ثابت را  $+c^2$ ،  $+c$ ، یا  $-c$  بنامیم، همین نتیجه نهایی حاصل می‌شود، اما جواب کمی نامرتب‌تر است. می‌توان معادله (۱۸-۱.۱۲) را به دو معادله دیفرانسیل معمولی تفکیک کرد:

$$\frac{dg}{d\tau} = -c^2 g \quad \frac{d^2 f}{d\eta^2} = -c^2 f \quad (20-1.12)$$

این معادله‌ها صورتی همانند معادله‌های (ج.۱-۱) و (ج.۱-۳) دارند و می‌توان از آن‌ها انتگرال گرفت تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$g = A \exp(-c^2 \tau) \quad f = B \sin c\eta + C \cos c\eta \quad (22-1.12)$$

که در آن  $A, B, C$  و ثابت‌های انتگرال‌گیری‌اند.

به علت تقارن حول صفحه  $xz$ ، باید داشته باشیم  $\Theta(\eta, \tau) = \Theta(-\eta, \tau)$  و بنابراین  $f(\eta) = f(-\eta)$ . چون تابع سینوسی چنین رفتاری ندارد، باید  $B$  مساوی صفر شود. با استفاده از هریک از دو شرط مرزی، نتیجه می‌شود:

$$C \cos c = 0 \quad (23-1.12)$$

بدیهی است که  $C$  نمی‌تواند صفر شود، زیرا این انتخاب به جوابی منتهی می‌شود که از لحاظ فیزیکی پذیرفتنی نیست. اما این تساوی با انتخاب‌های متعدد و مختلفی برای  $c$ ، که آن‌ها را  $c_n$  می‌نامیم، برقرار است:

$$c_n = (n + \frac{1}{4})\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty \quad (24-1.12)$$

بنابراین معادله (۱۴-۱.۱۲)، به ازای مقدار زیر برقرار است:

$$\Theta_n = A_n C_n \exp[-(n + \frac{1}{4})^2 \pi^2 \tau] \cos(n + \frac{1}{4})\pi\eta \quad (25-1.12)$$

اندیس  $n$  به ما یادآوری می‌کند که ممکن است  $A$  و  $C$  به ازای هر مقدار  $n$  متفاوت باشند. به علت خطی بودن این معادله دیفرانسیل، اکنون می‌توان همه جواب‌هایی را که صورتی همانند معادله (۲۵-۱.۱۲) دارند، برهم نهاد. در هنگام انجام این کار، به این نکته توجه می‌کنیم که جمله‌های نمایی و کسینوس‌های  $n$  همان مقادیری را دارند که به ازای  $-(n+1)$  داشتند؛ بنابراین جمله‌های با اندیس منفی را با جمله‌های دارای اندیس مثبت ترکیب می‌کنیم. از این برهم‌نهی نتیجه می‌شود:

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \exp[-(n + \frac{1}{4})^2 \pi^2 \tau] \cos(n + \frac{1}{4})\pi\eta \quad (26-1.12)$$

که در آن  $D_n = A_n C_n + A_{-(n+1)} C_{-(n+1)}$ .

اکنون  $D_n$  با استفاده از شرط اولیه تعیین می‌شود و داریم:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(n + \frac{1}{4})\pi\eta \quad (27-1.12)$$

با ضرب کردن در  $\cos(m + \frac{1}{4})\pi\eta$  و انتگرال‌گیری از  $\eta = -1$  تا  $\eta = +1$  نتیجه می‌شود:

$$\int_{-1}^{+1} \cos(m + \frac{1}{4})\pi\eta d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \int_{-1}^{+1} \cos(m + \frac{1}{4})\pi\eta \cos(n + \frac{1}{4})\pi\eta d\eta \quad (28-1.12)$$

وقتی انتگرال‌گیری انجام شود، همه انتگرال‌های سمت راست متحداً صفرند، مگر جمله‌ای که در آن  $n = m$ . بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin(m + \frac{1}{4})\pi\eta}{(m + \frac{1}{4})\pi} \Big|_{\eta=-1}^{\eta=+1} = D_m \frac{\frac{1}{4}(m + \frac{1}{4})\pi\eta + \frac{1}{4} \sin 2(m + \frac{1}{4})\pi\eta}{(m + \frac{1}{4})\pi} \Big|_{\eta=-1}^{\eta=+1} \quad (29-1.12)$$

پس از قرار دادن حدها، می‌توانیم معادله را برحسب  $D_m$  حل کنید و نتیجه بگیریم که:

$$D_m = \frac{2(-1)^m}{(m + \frac{1}{4})\pi} \quad (30-1.12)$$

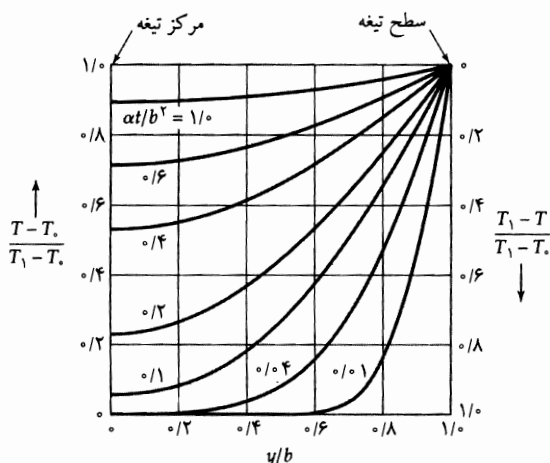
با قرار دادن این عبارت در معادله (۱.۱۲-۲۶)، توزیع دما نتیجه می‌شود که اکنون آن را برحسب متغیرهای اصلی می‌نویسیم:<sup>۲</sup>

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{4})\pi} \exp[-(n + \frac{1}{4})^2 \pi^2 \alpha t / b^2] \cos(n + \frac{1}{4}) \frac{\pi y}{b} \quad (31-1.12)$$

جواب بسیاری از مسئله‌های رسانش گرمای حالت ناپایا به صورت سری نامتناهی به دست می‌آید که جواب حاضر یکی از آن‌هاست. این سری، به ازای مقادیر بزرگ<sup>۲</sup> زمان بدون بُعد  $\alpha t / b^2$ ، به سرعت همگرا می‌شود. به ازای زمان‌های بسیار کوتاه، همگرایی بسیار آهسته رخ می‌دهد و در حد، وقتی  $\alpha t / b^2$  به سمت صفر میل می‌کند، می‌توان نشان داد که جواب معادله (۳۱-۱.۱۲) به سمت جواب معادله (۸-۱.۱۲) میل می‌کند (نگاه کنید به مسئله ۱.۱۲-د).

اگرچه استفاده از معادله (۳۱-۱.۱۲) برای بعضی از محاسبات عملی راحت نیست، کاربرد نمایشی ترسیمی، مانند آن‌چه در شکل ۱-۱.۱۲ مشاهده می‌شود، آسان است (نگاه کنید به مسئله ۱۲ الف-۳). با توجه به شکل روشن است که وقتی زمان بدون بُعد  $\alpha t / b^2 = \tau$  برابر  $0.1$  باشد، گرما به صورت قابل اندازه‌گیری، در صفحه مرکزی تیغه (نفوذ) کرده‌است و در  $\tau = 1$  گرمایش به اندازه  $90\%$  در صفحه مرکزی کامل می‌شود.

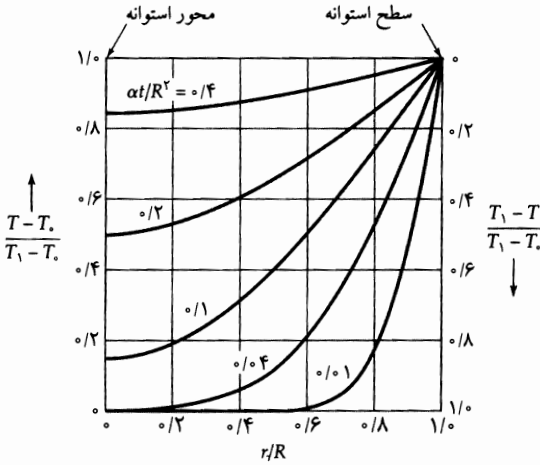
نتایج نظیر شکل ۱-۱.۱۲ برای استوانه‌های نامتناهی و کره‌ها، در شکل‌های ۱-۱.۱۲ و ۱-۱.۱۳، ارائه شده‌است. با استفاده از این نمودارها می‌توان جواب‌های مسئله‌های رسانش گرمای نظیر در متوازی‌السطوح‌های قائم و استوانه‌های با طول متناهی را به دست آورد (نگاه کنید به مسئله ۱.۱۲ ج-۱).



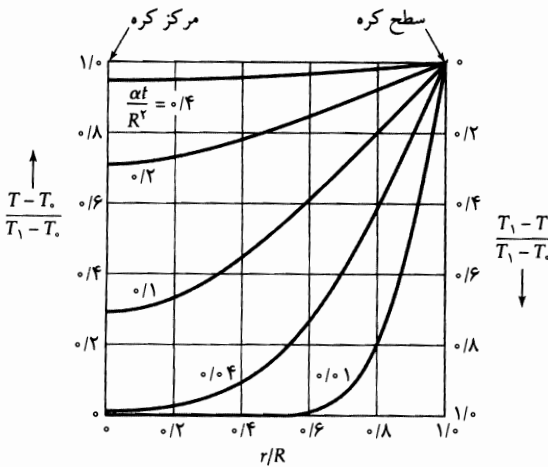
شکل ۱-۱.۱۲ توزیع دمای رسانش گرمای حالت ناپایا در تیغه‌ای به ضخامت متناهی  $2b$ . دمای اولیه تیغه  $T_0$  است و  $T_1$  دمایی است که به مدت  $t > 0$  در سطح تیغه برقرار است.

2. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959), p. 97, Eq. (8);

جواب دیگری که به صورت معادله (۹) است، به ازای زمان‌های کوتاه، به سرعت همگرا می‌شود.



شکل ۱۲-۲ توزیع دما برای رسانش گرمای حالت ناپایا در استوانه‌ای به شعاع  $R$ . دمای اولیه استوانه  $T_0$  است و  $T_1$  دمایی است که به مدت  $t > 0$  در سطح استوانه برقرار است.



شکل ۱۲-۳ توزیع دما برای رسانش گرمای حالت ناپایا در کره‌ای به شعاع  $R$ . دمای اولیه کره  $T_0$  است و  $T_1$  دمایی است که به مدت  $t > 0$  در سطح کره برقرار است.

**مثال ۱۲-۳**

رسانش گرمای ناپایا در نزدیکی جداری با شار گرمای سینوسی جسمی جامد که فضایی از  $y = 0$  تا  $y = \infty$  را اشغال می‌کند، ابتدا در دمای  $T_0$  است. با آغاز در زمان  $t = 0$ ، شار گرمای تناوبی که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$q_y = q_0 \cos \omega t = q_0 \mathcal{R}\{e^{i\omega t}\} \quad (۱۲-۱.۳۲)$$

در  $y = 0$  برقرار است. در این جا  $q_0$  دامنه نوسانات شار گرما، و  $\omega$  بسامد (دایره‌ای) است. می‌خواهیم دما در این سیستم،  $T(y, t)$ ، در «حالت پایای تناوبی» را به دست بیاوریم (نگاه کنید به مسئله ۱۲-۳.۴).

حل  
برای رسانش گرمای یک‌بعدی، معادله (۱۲-۱.۲) عبارت است از:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (۱۲-۱.۳۳)$$

با ضرب کردن در  $-k$  و اعمال عملگر  $\partial/\partial y$  بر کل معادله، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (۳۴-۱.۱۲)$$

یا، با استفاده از  $q_y = -k(\partial T/\partial y)$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 q_y}{\partial y^2} \quad (۳۵-۱.۱۲)$$

بنابراین  $q_y$  در همان معادله دیفرانسیلی صدق می‌کند که  $T$  در آن صدق می‌کند. شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$q_y = q_0 \mathcal{R}\{e^{i\omega t}\} \quad \text{شرط مرزی ۱: در } y = 0, \text{ داریم} \quad (۳۶-۱.۱۲)$$

$$q_y = 0 \quad \text{شرط مرزی ۲: در } y = \infty, \text{ داریم} \quad (۳۷-۱.۱۲)$$

این مسئله از لحاظ صوری دقیقاً مانند مسئله‌ای است که با معادله‌های (۴۴-۱.۴) تا (۴۷-۱.۴) مطرح شد. بنابراین از جواب معادله (۵۷-۱.۴)، با تغییرات مقتضی در نمادگذاری، می‌توان استفاده کرد:

$$q_y(y, t) = q_0 e^{-\sqrt{\omega/2\alpha}y} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}y\right) \quad (۳۸-۱.۱۲)$$

سپس با انتگرال‌گیری از قانون فوریه نتیجه می‌شود:

$$-k \int_T^T d\bar{T} = \int_y^\infty q_y^-(\bar{y}, t) d\bar{y} \quad (۳۹-۱.۱۲)$$

با جایگزین کردن توزیع شارگرما در سمت راست این معادله، پس از انتگرال‌گیری، نتیجه می‌شود:

$$T - T_\infty = \frac{q_0}{k} \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} e^{-\sqrt{\omega/2\alpha}y} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}y - \frac{\pi}{4}\right) \quad (۴۰-۱.۱۲)$$

بنابراین، در سطح  $y = 0$ ، نوسانات دما نسبت به نوسانات شارگرما، به اندازه  $\pi/4$  پس‌افت دارد.

این مسئله روشی استاندارد برای به‌دست آوردن «حالت‌پایای تناوبی» در سیستم‌های رسانش گرما را نشان می‌دهد. به‌علاوه، این مسئله نشان می‌دهد که وقتی شرایط مرزی شارگرما معلوم باشند، چگونه می‌توان از معادله رسانش گرما برحسب شارگرما استفاده کرد.

### مثال ۴-۱.۱۲

سرمایش کره در تماس با سیال هم‌زده

کره جامد همگنی به شعاع  $R$ ، ابتدا در دمای یکنواخت  $T_1$  است و در زمان  $t = 0$  به‌طور ناگهانی در سیالی با دمای  $T_\infty$  و حجم  $V_f$ ، که خوب هم‌زده می‌شود و در مخزنی عایق‌کاری شده قرار دارد، فروبرده می‌شود. می‌خواهیم ضریب نفوذ گرمایی ماده جامد،  $\alpha_s = k_s/\rho_s \hat{C}_{ps}$ ، را از طریق مشاهده تغییر دمای سیال،  $T_f$ ، با زمان به‌دست آوریم. از متغیرهای بدون بُعد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Theta_s(\xi, \tau) = \frac{T_1 - T_s}{T_1 - T_\infty} = \text{دمای بدون بُعد ماده جامد} \quad (۴۱-۱.۱۲)$$

$$\Theta_f(\tau) = \frac{T_1 - T_f}{T_1 - T_\infty} = \text{دمای بدون بُعد سیال} \quad (۴۲-۱.۱۲)$$

$$\xi = \frac{r}{R} = \text{مختص شعاعی بدون بُعد} \quad (۴۳-۱.۱۲)$$

$$\tau = \frac{\alpha_s t}{R^2} = \text{زمان بدون بُعد} \quad (۴۴-۱.۱۲)$$



حل

خواننده می‌تواند نشان دهد که مسئله برحسب متغیرهای بدون بُعد چنین است:

جامد	سیال
$\frac{\partial \Theta_s}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^2 \frac{\partial \Theta_s}{\partial \xi} \right)$ (۴۵-۱.۱۲)	$\frac{d\Theta_f}{d\tau} = -\frac{3}{B} \frac{\partial \Theta_s}{\partial \xi} \Big _{\xi=1}$ (۴۹-۱.۱۲)
$\Theta_s = 0, \tau = 0$ در (۴۶-۱.۱۲)	$\Theta_f = 1, \tau = 0$ در (۵۰-۱.۱۲)
$\Theta_s = \Theta_f, \xi = 1$ در (۴۷-۱.۱۲)	
$\Theta_s = \text{متناهی}, \xi = 0$ در (۴۸-۱.۱۲)	

که در آن  $B = \rho_f \hat{C}_{pf} V_f / \rho_s \hat{C}_{ps} V_s$  و  $V$ ها حجم سیال و حجم جامد را نشان می‌دهند.

مسئله‌های خطی با شرایط مرزی پیچیده و / یا توزیع بین معادله‌ها غالباً با استفاده از روش تبدیل لاپلاس به‌آسانی حل می‌شوند. حال از معادله‌های بالا و شرایط مرزی آن‌ها تبدیل لاپلاس می‌گیریم تا نتیجه شود:

جامد	سیال
$p\bar{\Theta}_s = \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\bar{\Theta}_s}{d\xi} \right)$ (۵۱-۱.۱۲)	$p\bar{\Theta}_f - 1 = -\frac{3}{B} \frac{d\bar{\Theta}_s}{d\xi} \Big _{\xi=1}$ (۵۴-۱.۱۲)
$\bar{\Theta}_s = \bar{\Theta}_f, \xi = 1$ در (۵۲-۱.۱۲)	
$\bar{\Theta}_s = \text{متناهی}, \xi = 0$ در (۵۳-۱.۱۲)	

در این جا  $p$  متغیر تبدیل است.<sup>۳</sup> جواب معادله (۵۱-۱.۱۲) عبارت است از:

$$\bar{\Theta}_s = \frac{C_1}{\xi} \sinh \sqrt{p}\xi + \frac{C_2}{\xi} \cosh \sqrt{p}\xi \quad (۵۵-۱.۱۲)$$

به علت وجود شرط مرزی در  $\xi = 0$ ، باید  $C_2$  را مساوی صفر قرار دهیم. با قرار دادن این نتیجه در معادله (۵۴-۱.۱۲) داریم:

$$\bar{\Theta}_f = \frac{1}{p} + \frac{3C_1}{Bp} (\sinh \sqrt{p} - \sqrt{p} \cosh \sqrt{p}) \quad (۵۶-۱.۱۲)$$

سیس، این دو نتیجه آخر را در شرط مرزی در  $\xi = 1$  قرار می‌دهیم تا  $C_1$  تعیین شود. در نتیجه برای  $\bar{\Theta}_f$  داریم:

$$\bar{\Theta}_f = \frac{1}{p} + \frac{3}{p} \left( \frac{1 - (1/\sqrt{p}) \tanh \sqrt{p}}{(3 - Bp)\sqrt{p} \tanh \sqrt{p} - 3p} \right) \quad (۵۷-۱.۱۲)$$

اکنون صورت و مخرج کسر داخل پرانتز را بر  $p$  تقسیم می‌کنیم و تبدیل لاپلاس وارون می‌گیریم تا نتیجه شود:

$$\Theta_f = 1 + 3\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(1/p) - (1/p^{3/2}) \tanh \sqrt{p}}{(3 - Bp)(1/\sqrt{p}) \tanh \sqrt{p} - 3} \right\} \equiv 1 + 3\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{N(p)}{D(p)} \right\} \quad (۵۸-۱.۱۲)$$

۳. از تعریف

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

استفاده می‌کنیم.

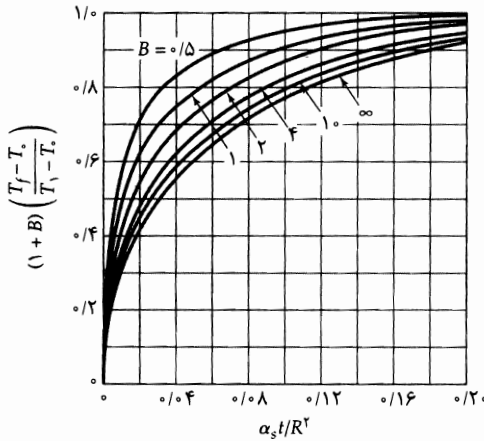
می‌توان نشان داد که  $D(p)$  ریشه تنهایی در  $p = 0$  و ریشه‌هایی در  $\sqrt{p_k} = ib_k$  دارد (و  $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$ )، که در آن ریشه‌های غیرصفر  $b_k = \sqrt{3 + Bb_k^2}$  است. اکنون می‌توان از قضیه بسط کسرهاى جزئی هیوساید<sup>۴</sup> با:

$$\frac{N(0)}{D'(0)} = -\frac{1/3}{1+B} \quad \frac{N(p_k)}{D'(p_k)} = \frac{2B}{9(1+B) + B^2 b_k^2} \quad (60, 59-1.12)$$

استفاده کرد تا نتیجه شود:

$$\Theta_f = \frac{B}{1+B} + \epsilon B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-b_k^2 \tau)}{9(1+B) + B^2 b_k^2} \quad (61-1.12)$$

معادله (۶۱-۱.۱۲) به صورت ترسیمی در شکل ۴-۱.۱۲ نشان داده شده است. در این نتیجه، تنها جایی که ضریب نفوذ گرمایی جامد  $\alpha_s$  ظاهر می‌شود، در جمله زمان بدون بعد  $\tau = \alpha_s t / R^2$  است؛ بنابراین می‌توان از افزایش دمای سیال برای تعیین تجربی ضریب نفوذ گرمایی جامد استفاده کرد. توجه کنید که روش تبدیل لاپلاس به ما امکان می‌دهد که پیشینه دمای سیال را، بدون به دست آوردن توزیع دما در جامد، به دست آوریم.



شکل ۴-۱.۱۲ تغییر دمای سیال با زمان، پس از قرار دادن کره‌ای به شعاع  $R$  و دمای  $T_1$  در سیال هم‌زده که ابتدا دمایی برابر  $T_0$  دارد. پارامتر بدون بعد  $B$  در متن پس از معادله (۵۰-۱.۱۲) تعریف شده است.

## ۲.۱۲ رسانش پایا در جریان تراکم‌ناپذیر آرام

در بحث قبلی در مورد رسانش گرما در مواد جامد، فقط به استفاده از معادله انرژی نیاز داشتیم. اما در مسئله‌های شامل سیالات جاری، به هر سه معادله تغییر نیاز داریم. در این جا بحث خود را به جریان پایای تراکم‌ناپذیر سیالات نیوتونی با خواص سیال ثابت محدود می‌کنیم که معادله‌های تغییر مربوط به آن‌ها عبارت است از:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (1-2.12) \text{ پیوستگی:}$$

$$\rho[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}] = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla P \quad (2-2.12) \text{ حرکت:}$$

$$\rho \hat{C}_p (\mathbf{v} \cdot \nabla T) = k \nabla^2 T + \mu \Phi_v \quad (3-2.12) \text{ انرژی:}$$

4. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York (1954), p. 232, Eq. 20; see also C. R. Wylie and L. C. Barrett, *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 6th Edition (1995), 10.9.

در معادله (۲-۳)،  $\Phi_v$  تابع اتلاف است که با معادله (۳-۳) نشان داده شد. برای به دست آوردن توزیع دما برای همرفت واداشته، از روشی دومرحله‌ای استفاده می‌شود: ابتدا معادله‌های (۱-۲) و (۲-۲) را حل می‌کنیم تا توزیع سرعت  $v(\mathbf{r}, t)$  به دست آید؛ سپس عبارت مربوط به  $v$  را در معادله (۳-۲) قرار می‌دهیم که آن را نیز می‌توان حل کرد و توزیع دمای  $T(\mathbf{r}, t)$  را به دست آورد.

معادله‌های (۱-۲) تا (۳-۲) جواب‌های تحلیلی بسیاری دارند که در وضعیت‌های مختلفی که معمولاً با آن‌ها سروکار پیدا می‌کنیم قابل استفاده‌اند. یکی از قدیمی‌ترین مسئله‌های (۲-۲) و (۱-۲) همرفت واداشته مسئله گراتس-نوسلت<sup>۸</sup> است که توزیع دما را در جریان داخل لوله‌ای توصیف می‌کند که در آن دمای جدار در محلی در طول لوله در معرض تغییر ناگهانی دما قرار دارد (نگاه کنید به مسئله‌های ۲-۱۲، ۳-۱۲، و ۴-۱۲). برای تغییرات اختیاری دمای جدار و شار جدار، جواب‌های نظیر به دست آمده‌اند.<sup>۹</sup> مسئله گراتس-نوسلت به سیالات غیرنیوتونی نیز تعمیم یافته است.<sup>۱۰</sup> برای دسته بزرگی از مسئله‌های مبادله‌کن خطی گرما نیز جواب‌هایی به دست آمده‌است،<sup>۱۱</sup> که در آن شرط مرزی جدار با پیوستگی شار گرما روی سطوحی که دو جریان را از هم جدا می‌کنند، تأمین می‌شود. مسئله دیگری که به آن توجه می‌شود، جریان داخل مجرا با آثار درخور اعتنای گرمایش ویسکوز است (مسئله برینکن)<sup>۱۲</sup>.

در این بخش مسئله مطرح شده در بخش ۸-۱؛ یعنی مسئله تعیین توزیع دما برای جریان آرام سیال تراکم‌ناپذیر در لوله دایره‌ای را تعمیم دادیم. در آن بخش این مسئله را مطرح کردیم و جواب مجانبی را برای فواصل پایین دست و دور از ابتدای منطقه گرمایش به دست آوردیم. در این جا، حل کامل معادله دیفرانسیل جزئی و هم‌چنین حل مجانبی برای فواصل کوتاه را ارائه می‌دهیم، یعنی سیستمی که در شکل ۸-۱ نشان داده شده‌است، از سه دیدگاه مطرح

1. M. Jakob, *Heat Transfer*, Vol. I, Wiley, New York (1949), pp. 451-464.
2. H. Gröber, S. Erk, and U. Grigull, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, Springer, Berlin (1961), Part II.
3. R. K. Shah and A. L. London, *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*, Academic Press, New York (1978).
4. L. C. Burmeister, *Convective Heat Transfer*, Wiley-Interscience, New York (1983).
5. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford (1987), Chapter 5.
6. L. G. Leal, *Laminar Flow and Convective Transport Processes*, Butterworth-Heinemann (1992), Chapters 8 and 9.
7. W. M. Deen, *Analysis of Transport Phenomena*, Oxford University Press (1998), Chapters 9 and 10.
8. L. Graetz, *Ann. Phys. (N.F.)*, **18**, 79-94 (1883), **25**, 337-357 (1885); W. Nusselt, *Zeits. Ver. deutsch. Ing.*, **54**, 1154-1158 (1910).

برای آشنایی با «مسئله توسیع یافته گراتس» که شامل رسانش محوری است، نگاه کنید به

- E. Papoutsakis, D. Ramkrishna, and H. C. Lim, *Appl. Sci. Res.*, **36**, 13-34 (1980).
9. E. N. Lightfoot, C. Massot, and F. Irani, *Chem. Eng. Progress Symp. Series*, Vol. 61, No. 58 (1965), pp. 28-60.
10. R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Wiley-Interscience (1987), 2nd edition, Vol. 1, §4.4.
11. R. J. Nunge and W. N. Gill, *AIChE Journal*, **12**, 279-289 (1966).
12. H. C. Brinkman, *Appl. Sci. Research*, **A2**, 120-124 (1951); R. B. Bird, *SPE Journal*, **11**, 35-40 (1955); H. L. Toor, *Ind. Eng. Chem.*, **48**, 922-926 (1956).

در این کتاب بررسی می‌شود:

- (الف) حل کامل معادله دیفرانسیل جزئی، از طریق جداسازی متغیرها (مثال ۱-۲.۱۲)؛  
 (ب) حل مجانبی برای فواصل کوتاه در پایین دست لوله، از طریق ترکیب متغیرها (مثال ۲-۲.۱۲)؛  
 (ج) حل مجانبی برای فواصل طولانی در پایین دست لوله (بخش ۸.۱۰).

### مثال ۱-۲.۱۲

جریان آرام داخل لوله با شار گرمای ثابت در جدار معادله (۱۹-۸.۱۰) را با شرایط مرزی ارائه شده با معادله‌های (۲۰-۸.۱۰) تا (۲۲-۸.۱۰) حل کنید.

حل

حس می‌زنیم جواب کامل برای دما صورت زیر را داشته باشد:

$$\Theta(\xi, \zeta) = \Theta_{\infty}(\xi, \zeta) - \Theta_d(\xi, \zeta) \quad (4-2.12)$$

که در آن  $\Theta_{\infty}(\xi, \zeta)$  جواب مجانبی است که با معادله (۳۱-۸.۱۰) نشان داده شد و  $\Theta_d(\xi, \zeta)$  تابعی است که به صورت نمایی با  $\zeta$  میرا می‌شود. با قرار دادن عبارت  $\Theta(\xi, \zeta)$  از معادله (۴-۲.۱۲) در معادله (۱۹-۸.۱۰)، می‌توان نشان داد که تابع  $\Theta_d(\xi, \zeta)$  باید در معادله (۱۹-۸.۱۰) و همچنین در شرایط مرزی زیر صدق کند:

$$\frac{\partial \Theta_d}{\partial \xi} = 0 \quad \text{در } \xi = 0, \text{ داریم} \quad (5-2.12)$$

$$\frac{\partial \Theta_d}{\partial \xi} = 0 \quad \text{در } \xi = 1, \text{ داریم} \quad (6-2.12)$$

$$\Theta_d = \Theta_{\infty}(\xi, 0) \quad \text{در } \zeta = 0, \text{ داریم} \quad (7-2.12)$$

انتظار می‌رود که جواب معادله برحسب  $\Theta_d(\xi, \zeta)$  قابل تجزیه به عوامل باشد:

$$\Theta_d(\xi, \zeta) = X(\xi)Z(\zeta) \quad (8-2.12)$$

سپس می‌توان معادله (۱۹-۸.۱۰) را به دو معادله دیفرانسیل معمولی تجزیه کرد:

$$\frac{dZ}{d\zeta} = -c^2 Z \quad \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dX}{d\xi} \right) + c^2 (1 - \xi^2) X = 0 \quad (10, 9-2.12)$$

که در آن  $-c^2$  ثابت جداسازی است. چون شرایط مرزی در مورد  $X$  عبارتند از:  $dX/d\xi = 0$  در  $\xi = 0, 1$ ،  $X = 0$  در  $\xi = 1$  و  $X_k$  ویژه  $c_k$  و تابع ویژه  $X_k$  وجود دارد و جواب نهایی باید به صورت زیر باشد:

$$\Theta(\xi, \zeta) = \Theta_{\infty}(\xi, \zeta) - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \exp(-c_k^2 \zeta) X_k(\xi) \quad (11-2.12)$$

که در آن:

$$B_k = \frac{\int_0^1 \Theta_{\infty}(\xi, 0) [X_k(\xi)] (1 - \xi^2) \xi d\xi}{\int_0^1 [X_k(\xi)]^2 (1 - \xi^2) \xi d\xi} \quad (12-2.12)$$

بنابراین مسئله به یافتن توابع ویژه  $X_k(\xi)$  از طریق حل کردن معادله (۱۲-۲-۱۰)، و سپس به دست آوردن مقادیر ویژه  $c_k$  با استفاده از شرط مرزی در  $\xi = 1$  تبدیل می‌شود. در این مسئله این عمل را برای  $k$  تا  $\gamma$  انجام داده‌ایم.<sup>۱۴</sup>

### مثال ۲-۲-۱۲

جریان آرام داخل لوله با شار گرمای ثابت در جدار: جواب مجانبی برای ناحیه ورودی توجه کنید که جمله جمع در معادله (۱۲-۲-۱۱) به ازای مقادیر بزرگ  $z$  به سرعت همگرا می‌شود، اما سرعت همگرایی آن به ازای مقادیر کوچک  $z$  کم است. عبارتی برای بیان  $T(r, z)$  به دست آورید که برای مقادیر کوچک قابل استفاده باشد.

حل

به ازای مقادیر کوچک  $z$  افزودن گرما فقط در ناحیه بسیار باریکی در نزدیکی جدار لوله تأثیر می‌گذارد، به طوری که سه تقریب زیر به نتایجی منتهی می‌شوند که در حد، وقتی  $z \rightarrow 0$ ، دقیق‌اند:

(الف) آثار انحنا را می‌توان نادیده گرفت و مسئله را برای جدار تخت حل کرد؛ فاصله از جدار را  $y = R - r$  بنامید؛

(ب) می‌توان فرض کرد سیال از سطح (تخت) انتقال گرما ( $y = 0$ ) تا  $y = \infty$  ادامه دارد؛

(ج) توزیع سرعت را می‌توان خطی و با شیبی فرض کرد که از شیب توزیع سرعت سهموی در جدار به دست می‌آید:  $v_z(y) = v_0 y/R$ ، که در آن  $v_0 = (P_0 - P_L)R^2/4\mu L$ .

سیستم مورد بررسی از دید «ناظر» کوچکی که در لایه بسیار نازک سیال گرم شده واقع است، چنین دیده می‌شود. از دید این ناظر، جدار تخت به نظر خواهد رسید، سیال به طور نامتناهی گسترده خواهد بود و توزیع سرعت خطی به نظر می‌رسد. بنابراین در ناحیه اندکی دورتر از  $z = 0$ ، معادله انرژی چنین نوشته می‌شود:

$$v_0 \frac{y}{R} \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (12-2-13)$$

عملاً کار کردن با معادله متناظر برای شار گرما در جهت  $y$ ،  $(q_y = -k\partial T/\partial y)$  آسان‌تر است. این معادله از تقسیم کردن معادله (۱۲-۲-۱۳) بر  $y$  و مشتق‌گیری نسبت به  $y$  به دست می‌آید:

$$v_0 \frac{1}{R} \frac{\partial q_y}{\partial z} = \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y} \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \quad (12-2-14)$$

کار با متغیرهای بدون بعدی که به صورت زیر تعریف می‌شوند، آسان‌تر است:

$$\psi = \frac{q_y}{q_0} \quad \eta = \frac{y}{R} \quad \lambda = \frac{\alpha z}{v_0 R^2} \quad (12-2-15)$$

بنابراین معادله (۱۲-۲-۱۴) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \quad (12-2-16)$$

و این سه شرط مرزی بر آن حاکم‌اند:

$$\psi = 0 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } \lambda = 0, \text{ داریم } \psi = 0.$$

$$\psi = 1 \quad \text{شرط مرزی ۲: در } \eta = 0, \text{ داریم } \psi = 1.$$

$$\psi \rightarrow 0 \quad \text{شرط مرزی ۳: در } \eta \rightarrow \infty, \text{ داریم } \psi \rightarrow 0.$$

14. R. Siegel, E. M. Sparrow, and T. M. Hallman, *Appl. Sci. Research*, **A7**, 386-392 (1958).

این مسئله را می‌توان با استفاده از متغیر مستقل جدید  $\chi = \eta/\sqrt{9\lambda}$  به روش ترکیب متغیرها حل کرد (نگاه کنید به مثال‌های ۱-۱.۴ و ۱-۱.۱۲). در این صورت معادله (۱۶-۲.۱۲) چنین نوشته می‌شود:

$$\chi \frac{d^2 \psi}{d\chi^2} + (3\chi^2 - 1) \frac{d\psi}{d\chi} = 0 \quad (20-2.12)$$

شرایط مرزی عبارت‌اند از: در  $\chi = 0$ ، داریم  $\psi = 1$  و هنگامی که  $\xi \rightarrow \infty$ ، داریم  $\psi \rightarrow 0$ . برای یافتن جواب معادله (۲۰-۲.۱۲) ابتدا فرض می‌کنیم  $d\psi/d\chi = p$  و یک معادله مرتبه اول برحسب  $p$  به دست می‌آوریم. این معادله برحسب  $p$  را می‌توان حل کرد و سپس  $\psi$  را چنین یافت:

$$\psi(\chi) = \frac{\int_{\chi}^{\infty} \bar{\chi} \exp(-\bar{\chi}^2) d\bar{\chi}}{\int_0^{\infty} \bar{\chi} \exp(-\bar{\chi}^2) d\bar{\chi}} = \frac{3}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_{\chi}^{\infty} \bar{\chi} \exp(-\bar{\chi}^2) d\bar{\chi} \quad (21-2.12)$$

سپس می‌توان با انتگرال‌گیری از شار گرما، توزیع دما را به دست آورد:

$$\int_T^{T_1} d\bar{T} = -\frac{1}{k} \int_y^{\infty} q \bar{y} d\bar{y} \quad (22-2.12)$$

یا، به صورت بدون بُعد:

$$\Theta(\eta, \lambda) = \frac{T - T_1}{q \cdot R/k} = \sqrt{9\lambda} \int_{\chi}^{\infty} \psi d\bar{\chi} \quad (23-2.12)$$

سپس عبارت  $\psi$  را در انتگرال قرار می‌دهیم و اکنون می‌توانیم ترتیب انتگرال‌گیری در انتگرال دوگانه را معکوس کنیم (نگاه کنید به مسئله ۷.د۱۲). نتیجه چنین است:

$$\Theta(\eta, \lambda) = \sqrt{9\lambda} \left[ \frac{\exp(-\chi^2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \chi \left( \frac{\Gamma(\frac{3}{2}, \chi^2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right) \right] \quad (24-2.12)$$

در این جا  $\Gamma(\frac{3}{2})$  تابع (کامل) گاماست، و  $\Gamma(\frac{3}{2}, \chi^2)$  تابع ناقص گاماست.<sup>۱۵</sup> به منظور مقایسه این نتیجه با نتیجه مثال ۱-۲.۱۲، به این نکته توجه می‌کنیم که  $\xi = 1 - \eta$  و  $\lambda = \frac{1}{9}\zeta$ . دمای بدون بُعد در بخش ۸.۱۰، در مثال ۱-۲.۱۲، و در این جا تعریف یکسانی دارد.

### ۳.۱۲ جریان پتانسیل پایای گرما در جامدات

جریان پایای گرما در جامداتی با رسانندگی گرمایی ثابت با روابط زیر توصیف می‌شود

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad (1-3.12) \text{ قانون فوریه:}$$

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2-3.12) \text{ معادلهٔ رسانش گرما:}$$

این معادله‌ها دقیقاً نظیر عبارت‌های سرعت برحسب پتانسیل سرعت  $(\mathbf{v} = -\nabla\phi)$ ، و معادلهٔ لاپلاس برای پتانسیل سرعت  $(\nabla^2\phi = 0)$  اند که در بخش ۳.۴ با آن‌ها سروکار پیدا کردیم. بنابراین مسئله‌های رسانش گرما را می‌توان با استفاده از نظریهٔ پتانسیل حل کرد.

15. M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical functions*, Dover, New York, 9th Printing (1973), pp. 255 et seq;

هم‌چنین نگاه کنید به مسئله ۷.د۱۲.

برای رسانش گرمای دو بُعدی در جامدات با رسانندگی گرمایی ثابت، دما در دو معادله لاپلاس دو بُعدی صدق می‌کند:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (۳-۳.۱۲)$$

اکنون از این نکته استفاده می‌کنیم که هر تابع تحلیلی  $w(z) = f(x, y) + ig(x, y)$  دو تابع اسکالر  $f$  و  $g$  را نتیجه می‌دهد که جواب‌های معادله (۳-۳.۱۲) هستند. منحنی‌های (مقدار ثابت)  $f$  را می‌توان به صورت خطوط جریان گرما تفسیر کرد، و منحنی‌های (مقدار ثابت)  $g$  هم دماهای متناظر برای بعضی از مسئله‌های جریان گرما هستند. این دو دسته منحنی متعامند؛ یعنی یکدیگر را با زاویه قائمه قطع می‌کنند. به علاوه، مؤلفه‌های بردار شار گرما در هر نقطه عبارت‌اند از:

$$ik \frac{dw}{dz} = q_x - iq_y \quad (۴-۳.۱۲)$$

با مفروض بودن یک تابع تحلیلی، به آسانی می‌توان مسئله‌های جریان گرمایی را یافت که توسط این تابع توصیف می‌شوند. اما فرایند معکوس یافتن تابع تحلیلی مناسب برای مسئله جریان گرمای مفروض معمولاً بسیار دشوار است. چند روش برای این کار وجود دارد، اما این روش‌ها در حیطه کار این کتاب نمی‌گنجند.<sup>۲،۱</sup>

برای هر تابع مختلط  $w(z)$ ، با مبادله خطوط با  $f$  ثابت و خطوط با  $g$  ثابت، دو شبکه جریان گرما به دست می‌آید. به علاوه، دو شبکه اضافی نیز با استفاده از تابع معکوس  $z(w)$  به دست می‌آید که در فصل ۴ برای جریان سیال ایده‌آل نشان داده شد.

توجه کنید که جریان سیال پتانسیل و جریان گرمای پتانسیل از لحاظ ریاضی مشابه‌اند. در هر دو مورد شبکه‌های جریان دو بُعدی با توابع تحلیلی توصیف می‌شوند. اما از لحاظ فیزیکی، چند تفاوت مهم وجود دارد. شبکه‌های جریان سیال در بخش ۳.۴ برای سیالی بدون ویسکوزیته (یک سیال خیالی!) توصیف شدند و بنابراین برای محاسبه نیروهای پسا در سطح نمی‌توان از آن‌ها استفاده کرد. از طرف دیگر، شبکه‌های جریان گرمایی که در این جا برای جامدات توصیف شدند، رسانندگی گرمایی متناهی دارند و بنابراین می‌توان از نتایج حاصل برای محاسبه جریان گرما در همه سطوح استفاده کرد. به علاوه، هم مؤلفه‌های سرعت (در دستگاه مختصات دکارتی!) در بخش ۳.۴ و هم توزیع دما در این بخش، در معادله لاپلاس صدق می‌کنند. اطلاعات بیشتر در مورد فرایندهای فیزیکی مشابهی که با معادله لاپلاس توصیف می‌شوند در کتاب‌های مربوط به معادله‌های دیفرانسیل جزئی یافت می‌شود.<sup>۳</sup>

در این جا فقط یک مثال ارائه می‌دهیم تا استفاده از توابع تحلیلی را نشان دهیم؛ مثال‌های دیگر را می‌توانید در مراجع مختلفی که به آن‌ها اشاره شده‌است، پیدا کنید.

### مثال ۱-۳-۱۲

توزیع دما در دیوار

دیواری به ضخامت  $b$  در نظر بگیرید که در جهت  $y$ ، از صفر تا  $\infty$ ، و در جهت عمود بر جهت‌های  $x$  و  $y$  از  $-\infty$  تا  $+\infty$  امتداد دارد (نگاه کنید به شکل ۱-۳-۱۲). سطوح واقع در  $x = \pm \frac{1}{2}b$  در دمای  $T_0$  نگه داشته می‌شوند و

1. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959), Chapter XVI.

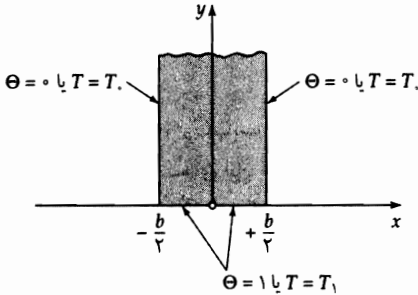
2. M. D. Greenberg, *Advanced Engineering Mathematics*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N. J., 2nd Edition (1998), Chapter 22.

3. I. N. Sneddon, *Elements of Partial Differential Equations*, Dover, New York (1996), Chapter 4.

پایین دیوار، در سطح  $y = 0$ ، در دمای  $T_1$  می‌ماند. نشان دهید که بخش موهومی تابع<sup>۴</sup>

$$w(z) = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{(\sin \pi z/b) - 1}{(\sin \pi z/b) + 1} \right) \quad (5-3.12)$$

توزیع دمای پایای  $\Theta(x, y) = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$  را به دست می‌دهد.



شکل ۱-۳.۱۲ توزیع دمای دوبعدی پایا در دیوار

حل

بخش موهومی  $w(z)$  در معادله (۵-۳.۱۲) عبارت است از:

$$\Theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{\cos \pi x/b}{\sinh \pi y/b} \right) \quad (6-3.12)$$

که در آن آرک تانژانت در گستره صفر تا  $\frac{\pi}{2}$  است. وقتی  $x = \pm \frac{b}{2}$ ، از معادله (۶-۳.۱۲) نتیجه می‌شود که  $\Theta = 0$  و وقتی  $y = 0$ ، نتیجه می‌شود که  $\Theta = (2/\pi) \arctan \infty = 1$ .

می‌توان با استفاده از معادله (۶-۳.۱۲) شارگرما در پایین دیوار را به دست آورد:

$$q_y|_{y=0} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{2k \sec \pi x/b}{b} (T_1 - T_0) \quad (7-3.12)$$

### ۴.۱۲ نظریه لایه مرزی برای جریان غیرهم‌دما<sup>۴.۲.۱</sup>

در بخش ۴.۴ استفاده از تقریب‌های لایه مرزی برای جریان آرام و پایای سیالات تراکم‌ناپذیر در دمای ثابت شرح داده شد. دیدیم که در همسایگی سطح جامد، معادله‌های پیوستگی و حرکت را می‌توان ساده کرد و این معادله‌ها را حل کرد تا «جواب‌های دقیق لایه مرزی» حاصل شوند و به علاوه، دیدیم که صورت انتگرال‌گیری شده این معادله‌ها (موازنة اندازه حرکت فون کارمان) به ما امکان می‌دهد تا «جواب‌های تقریبی لایه مرزی» را به دست آوریم. در این بخش بحث گذشته را، با شمول معادله لایه مرزی برای انرژی، تعمیم می‌دهیم تا بتوانیم توزیع دما در نزدیکی سطوح جامد را به دست بیاوریم.

4. R. V. Churchill, *Introduction to Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, New York (1948), Chapter IX. See also C. R. Wylie and L. C. Barrett, *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 6th Edition (1995), Chapter 20.

1. H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, 7th edition, McGraw-Hill, New York (1979), Chapter 12.

2. K. Stewartson, *The Theory of Laminar Boundary Layers in Compressible Fluids*, Oxford University Press (1964).

3. E. R. G. Eckert R. M. Drake, Jr., *Analysis of Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York, (1972), Chapters 6 and 7.



مانند بخش ۴.۴، جریان دو بعدی پایا در اطراف جسمی غوطه‌ور، مانند شکل ۱-۴.۴، را در نظر می‌گیریم. در مجاورت سطح جامد، معادله‌های تغییر را (با حذف خط روی  $\rho$  و  $\beta$ ) می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (۱-۴.۱۲) \text{ پیوستگی:}$$

$$\rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \rho v_e \frac{dv_e}{dx} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \rho g_x \beta (T - T_\infty) \quad (۲-۴.۱۲) \text{ حرکت:}$$

$$\rho \hat{C}_p \left( v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad (۳-۴.۱۲) \text{ انرژی:}$$

در این جا  $\rho$ ،  $\mu$ ،  $k$ ، و  $\hat{C}_p$  ثابت فرض می‌شوند و  $\mu(\partial v_x / \partial y)^2$  اثر گرمایش ویسکوز است که از این به بعد در نظر گرفته نمی‌شود. جواب‌های این معادله‌ها، به‌ازای ضریب نفوذ اندازه حرکت کوچک  $\nu = \mu / \rho$  در معادله (۲-۴.۱۲)، و به‌ازای ضریب نفوذ گرمایی کوچک  $\alpha = k / \rho \hat{C}_p$  در معادله (۳-۴.۱۲)، به‌طور مجانبی دقیق است.

معادله (۱-۴.۱۲) همانند معادله (۱-۴.۴) است. معادله (۲-۴.۱۲) با معادله (۲-۴.۴) تفاوت دارد، زیرا جمله نیروی شناوری را در آن گنجانده‌ایم (نگاه کنید به بخش ۳.۱۱)، که حتی وقتی تغییرات کسری چگالی اندک باشد، می‌تواند مقدار درخوردختنایی داشته‌باشد. معادله (۳-۴.۱۲) از معادله (۳-۲.۱۱) و با چشم‌پوشی از رسانش گرما در جهت  $x$  به‌دست می‌آید. صورت‌های پیچیده‌تر معادله‌های لایه مرزی را می‌توان در جاهای دیگر یافت. ۳.۲

شرایط مرزی معمول برای معادله‌های (۱-۴.۱۲) و (۲-۴.۱۲) عبارت‌اند از این‌که در سطح جامد داریم:  $v_x = v_y = 0$ ، و جریان پتانسیل در لبه خارجی لایه مرزی سرعت در جریان پتانسیل ادغام می‌شود، به‌طوری‌که  $v_e(x) \rightarrow v_e(x)$ . برای معادله (۳-۴.۱۲)، دمای  $T$  در سطح جامد  $T_0$ ، و در لبه خارجی لایه مرزی گرمایی  $T_\infty$  فرض می‌شود، یعنی سرعت و دما، فقط در لایه‌های نازکی در نزدیکی سطح جامد با  $v_e(x)$  و  $T_\infty$  تفاوت دارند. اما ضخامت لایه‌های مرزی سرعت و دما، متناظر با سهولت نسبی نفوذ اندازه حرکت و گرما، متفاوت است. چون  $Pr = \nu / \alpha$ ، به‌ازای  $Pr > 1$  لایه مرزی دما معمولاً در داخل لایه مرزی سرعت واقع می‌شود، درحالی‌که به‌ازای  $Pr < 1$ ، ضخامت‌های نسبی درست برعکس می‌شوند (در نظر داشته‌باشید که برای گازها  $Pr$  در حدود  $\frac{2}{3}$  است، اما برای مایعات معمولی  $Pr > 1$  و برای فلزات مذاب  $Pr \ll 1$ ).

در بخش ۴.۴ نشان دادیم که هرگاه از معادله پیوستگی استفاده شود، می‌توان انتگرال معادله لایه مرزی حرکت، از  $y = 0$  تا  $y = \infty$  را به‌طور صوری تشکیل داد. به‌همین ترتیب با انتگرال‌گیری از معادله‌های (۱-۴.۱۲) تا (۳-۴.۱۲) نتیجه می‌شود:

(۴-۴.۱۲) اندازه حرکت:

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho v_x (v_e - v_x) dy + \frac{dv_e}{dx} \int_0^\infty \rho (v_e - v_x) dy + \int_0^\infty \rho g_x \beta (T - T_\infty) dy$$

(۵-۴.۱۲) انرژی:

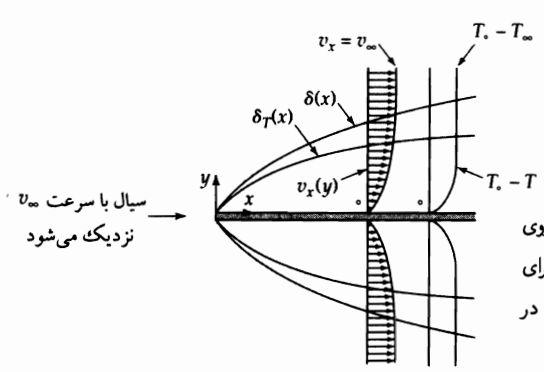
$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho \hat{C}_p v_x (T_\infty - T) dy$$

معادله‌های (۴-۴.۱۲) و (۵-۴.۱۲) موازنه‌های اندازه حرکت و انرژی فون کارمان‌اند، که برای سیستم‌های همرفت واداشته و آزاد معتبرند. در این جا نیز، مانند معادله (۴-۴.۴) از شرط عدم لغزش  $v_y = 0$  در  $y = 0$  استفاده شده‌است؛ سرعت‌های غیرصفر در  $y = 0$  در سیستم‌های انتقال جرم ایجاد می‌شوند و در فصل ۲۰ بررسی خواهند شد.

چنان‌که در بخش ۴.۴ گفته شد، دو رهیافت برای حل مسئله‌های لایه مرزی وجود دارد: جواب‌های تحلیلی یا عددی معادله‌های (۴.۱۲) تا (۳.۴.۱۲) را «جواب‌های دقیق لایه مرزی» می‌نامند، اما جواب‌های حاصل از معادله‌های (۴.۱۲) و (۵.۴.۱۲)، با حدس‌های منطقی برای توزیع سرعت و دما، «جواب‌های تقریبی لایه مرزی» نام دارند. غالباً با استفاده از روش دوم، و تلاشی نسبتاً کم، می‌توان بینش فیزیکی خوبی کسب کرد. مثال ۴.۱۲ این روش را نشان می‌دهد. معادله‌های لایه مرزی برای تعیین روابط همبستگی آهنگ‌های اندازه حرکت و انتقال گرما، چنان‌که در فصل ۱۴ خواهیم دید، کاربرد گسترده‌ای دارند. اگرچه در این بخش همرفت آزاد را بررسی نمی‌کنیم، در فصل ۱۴ نتایج بسیار خوبی، همراه با منابع مناسب، ارائه خواهد شد.

**مثال ۴.۱۲**

انتقال گرما در همرفت واداشته آرام روی صفحه تخت گرم‌شده (روش انتگرال فون کارمان) مطلوب است تعیین توزیع دما در نزدیکی صفحه تخت که، مطابق شکل ۴.۱۲، سیالی نیوتونی روی آن جاری است. سطح خیس شده صفحه در دمای  $T_0$  می‌ماند و دمای سیالی که به سطح نزدیک می‌شود  $T_\infty$  است.



شکل ۴.۱۲ تشکیل لایه مرزی برای جریان روی صفحه تخت گرم‌شده، که لایه مرزی گرمایی را برای  $\Delta = \delta_T(x)/\delta(x) < 1$  نشان می‌دهد. سطح صفحه در دمای  $T_0$ ، و سیال نزدیک‌شونده به آن در دمای  $T_\infty$  است.

حل برای استفاده از موازنه‌های فون کارمان، ابتدا صورت‌های منطقی توزیع سرعت و دما را حدس می‌زنیم. صورت چندجمله‌ای زیر در محل دیوار مقدار صفر و در حد خارجی لایه مرزی مقدار ۱ را نشان می‌دهد و شیب در حد خارجی صفر است:

$$\begin{cases} \frac{v_x}{v_\infty} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4 & y \leq \delta(x) \\ \frac{v_x}{v_\infty} = 1 & y \geq \delta(x) \end{cases} \quad (7, 6-4.12)$$

$$\begin{cases} \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} = 2\left(\frac{y}{\delta_T}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta_T}\right)^4 & y \leq \delta_T(x) \\ \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} = 1 & y \geq \delta_T(x) \end{cases} \quad (9, 8-4.12)$$

یعنی فرض می‌کنیم که توزیع سرعت و دمای بدون بُعد، در لایه‌های مرزی مربوط به خود، صورت‌های همانند دارند. به علاوه فرض می‌کنیم که ضخامت لایه مرزی  $\delta(x)$  و  $\delta_T(x)$  نسبت ثابتی دارند، به طوری که  $\Delta = \delta_T(x)/\delta(x)$  از  $x$  مستقل است. دو امکان را باید در نظر گرفت:  $\Delta \leq 1$  و  $\Delta \geq 1$ . در این جا فرض می‌کنیم  $\Delta \leq 1$  و حالت دیگر را به مسئله ۸.۵۱۲ موکول می‌کنیم.

اکنون استفاده از معادله‌های (۴-۴.۱۲) و (۵-۴.۱۲) سراسرت، اما خسته‌کننده است. با قرار دادن معادله‌های (۶-۴.۱۲) تا (۹-۴.۱۲) در انتگرال‌ها، (و قرار دادن  $v_e$  مساوی  $v_\infty$  در این‌جا)، نتیجه می‌شود:

$$\int_0^\infty \rho v_x (v_\infty - v_x) dy = \rho v_\infty^2 \delta(x) \int_0^1 (2\eta - 2\eta^2 + \eta^4)(1 - 2\eta + 2\eta^2 - \eta^4) d\eta$$

$$= \frac{37}{315} \rho v_\infty^2 \delta(x) \quad (10-4.12)$$

$$\int_0^\infty \rho \hat{C}_p v_x (T_\infty - T) dy = \rho \hat{C}_p v_\infty (T_\infty - T_0) \delta_T(x) \int_0^\infty (2\eta_T \Delta - 2\eta_T^2 \Delta^2 + \eta_T^4 \Delta^4)$$

$$\cdot (1 - 2\eta_T + 2\eta_T^2 - \eta_T^4) d\eta_T$$

$$= \left( \frac{2}{15} \Delta - \frac{3}{140} \Delta^2 + \frac{1}{180} \Delta^4 \right) \rho \hat{C}_p v_\infty (T_\infty - T_0) \delta_T(x) \quad (11-4.12)$$

در این انتگرال‌ها  $\eta = y/\delta(x)$  و  $\eta_T = y/\delta_T(x) = y/\Delta\delta(x)$  سپس با قرار دادن این انتگرال‌ها در معادله‌های (۴-۴.۱۲) و (۵-۴.۱۲) معادله‌های دیفرانسیل مختلفی برای ضخامت لایه مرزی به دست می‌آید. می‌توان از این معادله‌های دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک‌پذیر به سادگی انتگرال گرفت، و داریم:

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{1260}{37} \left( \frac{\nu x}{v_\infty} \right)} \quad (12-4.12)$$

$$\delta_T(x) = \sqrt{\frac{4}{\frac{2}{15} \Delta - \frac{3}{140} \Delta^2 + \frac{1}{180} \Delta^4} \left( \frac{\alpha x}{v_\infty} \right)} \quad (13-4.12)$$

اکنون ضخامت‌های لایه مرزی را، به استثنای محاسبه  $\Delta$  در معادله (۱۳-۴.۱۲) تعیین می‌کنیم. نسبت معادله (۱۲-۴.۱۲) به معادله (۱۳-۴.۱۲)، معادله  $\Delta$  را به صورت تابعی از عدد پرانتل به دست می‌دهد:

$$\frac{2}{15} \Delta^3 - \frac{3}{140} \Delta^5 + \frac{1}{180} \Delta^6 = \frac{37}{315} \text{Pr}^{-1} \quad \Delta \leq 1 \quad (14-4.12)$$

وقتی این معادله جبری درجه شش را برای یافتن  $\Delta$  به صورت تابعی از  $\text{Pr}$  حل کنیم، مشخص می‌شود که با استفاده از رابطه ساده زیر<sup>۴</sup>:

$$\Delta = \text{Pr}^{-1/3} \quad \Delta \leq 1 \quad (15-4.12)$$

می‌توان جواب را با حدود ۵٪ اختلاف، به منحنی برآزاند.

بنابراین توزیع دما (به‌ازای  $\Delta \leq 1$ ) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{T - T}{T_\infty - T_\infty} = 2 \left( \frac{y}{\Delta\delta} \right) - 2 \left( \frac{y}{\Delta\delta} \right)^2 + \left( \frac{y}{\Delta\delta} \right)^4 \quad (16-4.12)$$

که در آن  $\Delta \approx \text{Pr}^{-1/3}$  و  $\delta(x) = \sqrt{(1260/37)(\nu x/v_\infty)}$ . فرض جریان آرام که در این‌جا اختیار شد، برای  $x < x_{crit}$  صادق است که در آن  $x_{crit} v_\infty \rho / \mu$  معمولاً از  $10^5$  بزرگ‌تر است.

4. H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, 7th edition, McGraw-Hill, New York (1979), pp. 292-308.

سرانجام، آهنگ اتلاف گرما از هردو طرف صفحه گرم شده به عرض  $W$  و طول  $L$  را می‌توان از معادله‌های (۵-۴.۱۲)، (۱۱-۴.۱۲)، (۱۲-۴.۱۲)، (۱۵-۴.۱۲)، و (۱۶-۴.۱۲) به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} Q &= 2 \int_0^W \int_0^L q_y|_{y=0} dx dz \\ &= 2 \int_0^W \int_0^\infty \rho \hat{C}_p v_x (T - T_\infty)|_{x=L} dy dz \\ &= 2W \rho \hat{C}_p v_\infty (T_0 - T_\infty) \left( \frac{2}{15} \Delta - \frac{3}{140} \Delta^2 + \frac{1}{180} \Delta^3 \right) \delta_T(L) \\ &\approx \sqrt{\frac{148}{315}} (2WL) (T_0 - T_\infty) \left( \frac{k}{L} \right) \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_L^{1/2} \end{aligned} \quad (17-4.12)$$

که در آن  $\text{Re}_L = Lv_\infty \rho / \mu$ . بنابراین رهیافت لایه مرزی به ما امکان می‌دهد که وابستگی آهنگ اتلاف گرمای  $Q$  به ابعاد صفحه، شرایط جریان، و خواص گرمایی سیال را به‌دست بیاوریم.

معادله (۱۷-۴.۱۲) با جواب‌های تفصیلی‌تر مبتنی بر معادله‌های (۱۲-۴.۱۲) تا (۳-۴.۱۲) توافق بهتری دارد. جواب مجانبی به‌دست‌آمده برای  $Q$  به‌ازای مقادیر بزرگ عدد پرانتل که در مثال بعد ارائه می‌شود،<sup>۵</sup> همین صورت را دارد، با این تفاوت که ضریب عددی  $\sqrt{148/315} = 0.685$  با  $0.677$  جایگزین می‌شود. جواب دقیق  $Q$  به‌ازای عددهای پرانتل متناهی، که به‌صورت عددی به‌دست آمده‌اند،<sup>۶</sup> همین صورت را دارد، با این تفاوت که ضریب با تابع  $C(\text{Pr})$  جایگزین شده‌است که آهسته‌تر تغییر می‌کند و در جدول ۱-۴.۱۲ نشان داده شده‌است. مقدار  $C = 0.664$  در  $C = 1$  دقیق است و به‌ازای  $\text{Pr} > 0.6$  دقتی در حدود  $\pm 2\%$  دارد.

جدول ۱-۴.۱۲ مقایسه محاسبات انتقال گرمای لایه مرزی برای جریان روی صفحه تخت.

روش	مقدار ضریب عددی در عبارت آهنگ انتقال گرما در معادله (۱۷-۴.۱۲):
روش فون کارمان با توزیع طبق معادله‌های (۱۲-۴.۱۲) تا (۹)	$\sqrt{148/315} = 0.685$
جواب‌های دقیق معادله‌های (۱۲-۴.۱۲) تا (۳) توسط پول‌هاوزن	$\text{Pr} = 0.6$ در $0.657$
	$\text{Pr} = 1.6$ در $0.664$
	$\text{Pr} = 2.0$ در $0.670$
برازش منحنی محاسبات دقیق (پول‌هاوزن)	$0.664$
جواب مجانبی معادله‌های (۱۲-۴.۱۲) تا (۳) به‌ازای $\text{Pr} \gg 1$	$0.677$

تناسب  $Q$  با  $\text{Pr}^{1/3}$  که در این‌جا به‌دست آمد، به‌صورت مجانبی در حد وقتی  $\text{Pr} \rightarrow \infty$ ، نه‌تنها برای صفحه تخت، بلکه برای همه شکل‌های هندسی که تشکیل لایه آرام جدانشونده روی آن‌ها امکان‌پذیر است، صحیح است؛ در مثال بعد این نکته را نشان می‌دهیم. انحراف از  $Q \sim \text{Pr}^{1/3}$  در عددهای پرانتل متناهی برای جریان روی صفحه تخت، و حتی انحراف‌های بیش‌تر برای جریان در نزدیکی اجسامی با شکل‌های دیگر و در نزدیکی سطوح چرخان مشاهده می‌شود. این انحراف‌ها از غیرخطی بودن توزیع سرعت در داخل لایه مرزی گرمایی ناشی می‌شوند.

5. M. J. Lighthill, *Proc. Roy. Soc.*, **A202**, 359-377 (1950).

6. E. Pohlhausen, *Zeits. f. angew. Math. u. Mech.*, **1**, 115-121 (1921).

بسط‌های مجانبی برای وابستگی  $Pr$  به  $Q$ ، توسط مرک و دیگران نشان داده شده است.<sup>۷</sup>

مثال ۲-۴-۱۲

انتقال گرما در هرفرت واداشته آرام روی صفحه تخت گرم شده اجواب مجانبی به‌ازای عددهای پرانتل بزرگ<sup>۸</sup> در مثال قبل، از عبارت‌های انتگرالی لایه مرزی فون کارمان استفاده کردیم. اکنون همین مسئله را تکرار می‌کنیم، اما جواب دقیق معادله‌های لایه مرزی را در حدی که عدد پرانتل بزرگ است یعنی برای مایعات به‌دست می‌آوریم (نگاه کنید به بخش ۱۰۹). در این حد، لبه خارجی لایه مرزی گرمایی کاملاً داخل لایه مرزی سرعت است. بنابراین می‌توان با اطمینان فرض کرد که  $v_x$  در سرتاسر لایه مرزی گرمایی، با  $y$  تغییرات خطی دارد.

حل

با ترکیب معادله‌های لایه مرزی برای پیوستگی و انرژی (معادله‌های (۱۲-۴-۱) و (۱۲-۴-۳))، داریم:

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \left( - \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (12-4-18)$$

که در آن  $\alpha = k/\rho C_p$ . جمله اول بسط تیلر برای توزیع سرعت در نزدیکی دیوار عبارت است از:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = c \frac{y}{\sqrt{\nu x/v_\infty}} \quad (12-4-19)$$

که در آن ثابت  $c = 0.4696/\sqrt{2} = 0.332$  را می‌توان از معادله (۴-۴-۳) نتیجه گرفت.

با قرار دادن این عبارت سرعت در معادله (۱۲-۴-۱)، نتیجه می‌شود:

$$\left( c \frac{y v_\infty}{\sqrt{\nu x/v_\infty}} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \left( \frac{c}{4} \frac{y^2 v_\infty/x}{\sqrt{\nu x/v_\infty}} \right) \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (12-4-20)$$

این معادله را باید با این شرط مرزی که  $T = T_0$  در  $y = 0$  و  $T = T_\infty$  در  $x = 0$  حل کرد. این معادله را می‌توان با استفاده از روش ترکیب متغیرها حل کرد. با انتخاب متغیرهای بدون بُعد بعد:

$$\Pi(\eta) = \frac{T_0 - T}{T_\infty - T_0} \quad \eta = \left( \frac{c v_\infty^2/x}{12 \alpha \nu^{1/2}} \right)^{1/3} \frac{y}{x^{1/2}} \quad (12-4-21, 22)$$

می‌توان معادله (۱۲-۴-۲) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد (نگاه کنید به معادله (ج-۱-۹)):

$$\frac{d^3 \Pi}{d\eta^3} + 3\eta^2 \frac{d\Pi}{d\eta} = 0 \quad (12-4-23)$$

پس از انتگرال‌گیری از این معادله با شرایط مرزی  $\Pi = 0$  در  $\eta = 0$  و  $\Pi \rightarrow 1$  وقتی  $\eta \rightarrow \infty$ ، نتیجه زیر برای توزیع دمای بدون بُعد حاصل می‌شود:

$$\Pi(\eta) = \frac{\int_0^\eta \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta}}{\int_0^\infty \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta}} = \frac{\int_0^\eta \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta}}{\Gamma(4/3)} \quad (12-4-24)$$

برای آشنایی با تابع  $\Gamma(n)$  به بخش ج-۴ رجوع کنید.

7. H. J. Merk, *J. Fluid Mech.*, 5, 460-480 (1959).

برای آهنگ اتلاف گرما از هر دو طرف صفحه گرم شده به عرض  $W$  و طول  $L$ ، داریم:

$$\begin{aligned} Q &= 2 \int_0^W \int_0^L q_y|_{y=0} dx dz \\ &= 2W \int_0^L \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx \\ &= (2WL)(T_0 - T_\infty) \left( \frac{k}{L} \right) \int_0^L \left( +k \frac{d\Pi}{d\eta} \right) \Big|_{\eta=0} \left( \frac{c\nu_\infty^{3/2}}{12\alpha\nu^{1/2}} \right)^{1/3} \frac{dx}{x^{1/2}} \\ &= (2WL)(T_0 - T_\infty) \left( \frac{k}{L} \right) \left[ \frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})} \left( \frac{c}{12} \right)^{1/3} \right] \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_L^{1/2} \end{aligned} \quad (25-4.12)$$

که همان نتیجه‌ای است که در معادله (۱۷-۴.۱۲) به دست آمد و فقط در ثابت عددی تفاوت دارد. کمیت داخل کروشه برابر ۰٫۶۷۷ است، که همان مقدار مجانبی است که در جدول ۴.۱۲-۱ ظاهر می‌شود.

### مثال ۳-۴.۱۲

همرفت واداشته در جریان سه‌بعدی پایا با عددهای پرانتل بزرگ<sup>۹۸</sup>

راهکار معرفی شده در مثال قبل به جریان در اطراف اجسامی با شکل اختیاری تعمیم داده شده است. جریان پایای سیالی را روی جسم ساکنی مطابق شکل ۴.۱۲-۲ در نظر بگیرید. سیال با دمای یکنواخت  $T_\infty$  نزدیک می‌شود و سطح جامد در دمای یکنواخت  $T_0$  قرار دارد. می‌خواهیم توزیع دما و آهنگ انتقال گرما را برای ناحیه جریان آرام، که از مکان هندسی نقاط رکود به طرف پایین دست و تا نقطه آغاز تلاطم یا جدایش جریان ادامه دارد، به دست آوریم. توزیع سرعت معلوم فرض می‌شود.

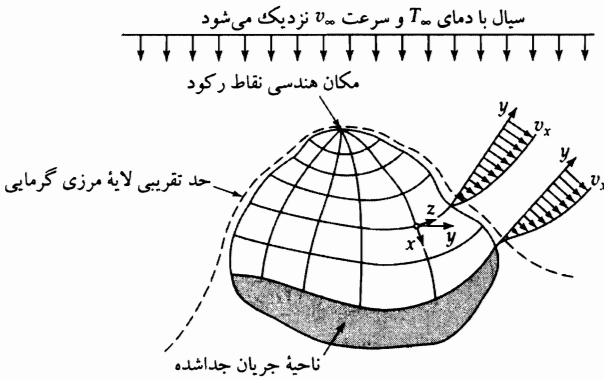
لایه مرزی گرمایی را بسیار نازک فرض می‌کنیم. این فرض متضمن این است که هم‌دماها تقریباً بر سطح جامد منطبق‌اند، به طوری که شار گرمای  $q$  تقریباً بر سطح عمود است. به علاوه متضمن آن است که در این جا به توزیع‌های سرعت کامل نیازی نیست. می‌خواهیم حالت حرکت را فقط در نزدیکی سطح جامد بدانیم.

برای بهره‌برداری از این ساده‌سازی‌ها، مختصات را به شیوه خاصی انتخاب می‌کنیم (نگاه کنید به شکل ۴.۱۲-۲).  $y$  را به صورت فاصله از سطح تا سیال، درست همانند شکل ۴.۱۲-۱، تعریف می‌کنیم. سپس  $x$  و  $z$  را به صورت مختصات نزدیک‌ترین نقطه روی سطح تعریف می‌کنیم که در جهت‌های موازی و عمود بر حرکت مماسی در مجاورت سطح اندازه‌گیری می‌شود. جزء کمان‌هایی را در جهت‌های  $x$  و  $z$  به صورت  $h_x dx$  و  $h_z dz$  تعریف می‌کنیم که در آن‌ها  $h_x$  و  $h_z$  «عامل‌های مقیاس» وابسته به مکان‌اند که در بخش الف.۷ شرح داده می‌شوند. چون در این جا به ناحیه  $y$  کوچک علاقه‌مندیم، عامل‌های مقیاس را به صورت توابعی فقط از  $x$  و  $z$  در نظر می‌گیریم که در  $y = 0$ ، با  $h_y = 1$  محاسبه می‌شوند.

8. W. E. Stewart, *AIChE Journal*, **9**, 528-535 (1963).

۹. برای آشنایی با تحلیل‌های دوبعدی مرتبط با این تحلیل، نگاه کنید به

M. J. Lighthill, *Proc. Roy. Soc.*, **A202**, 359-377 (1950); V. G. Levich, *Physico-Chemical Hydrodynamics*, Chapter 2, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962); A. Acrivos, *Physics of Fluids*, **3**, 657-658 (1960).



شکل ۲-۴.۱۲ انتقال گرما از سطح سه بعدی. تحلیل مجانبی در بالادست نواحی جریان جدا شده و تلاطم کاربرد دارد. در شکل ۲-۷.۳ این نواحی برای استوانه نشان داده شده‌اند.

با این انتخاب مختصات، مؤلفه‌های سرعت برای  $y$  کوچک عبارت‌اند از:

$$v_x = \beta(x, z)y \quad v_y = \left( -\frac{1}{2h_x h_z} \frac{\partial}{\partial x} (h_z \beta) \right) y^2 \quad v_z = 0 \quad (28, 27, 26-4.12)$$

در این جا  $\beta(x, z)$  مقدار موضعی  $\partial v_x / \partial y$  روی سطح است؛ در ناحیه جدا شده این مقدار مثبت است، اما ممکن است برابر رکود یا جدایش به صفر برسد. این معادله‌ها با نوشتن سری تیلر برای  $v_x$  و  $v_z$ ، حفظ جمله‌های درجه اول بر حسب  $y$ ، و سپس انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی با شرط مرزی  $v_y = 0$  در سطح، برای محاسبه  $v_y$  به دست می‌آیند. این نتایج برای جریان نیوتونی یا غیرنیوتونی با چگالی ویسکوزیته مستقل از دما معتبر است.<sup>۱۰</sup> با استفاده از راهکاری شبیه راهکار مورد استفاده در مثال ۲-۴.۱۲، می‌توان نتیجه‌ای مشابه نتیجه داده شده با معادله (۲۴-۴.۱۲) به دست آورد. تنها اختلاف در این است که  $\eta$  به صورتی عام‌تر از  $\eta = y / \delta_T$  تعریف می‌شود که در آن  $\delta_T$  ضخامت لایه مرزی گرمایی است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\delta_T = \frac{1}{\sqrt{h_z \beta}} \left( 9\alpha \int_{x_1(z)}^x \sqrt{h_z \beta} h_x h_z d\bar{x} \right)^{1/3} \quad (29-4.12)$$

و  $x_1(z)$  حد بالادستی ناحیه انتقال گرماست. از معادله‌های (۲۴-۴.۱۲) و (۲۵-۴.۱۲) شار گرمای سطحی موضعی  $q_0$  و جریان گرمای کل برای ناحیه‌ای گرم شده به صورت  $x_1(z) < x < x_2(z)$  و  $z_1 < z < z_2$  عبارت‌اند از:

$$q_0 = \frac{k(T_0 - T_\infty)}{\Gamma(\frac{4}{3})\delta_T} \quad (30-4.12)$$

$$Q = \frac{3^{1/2} k (T_0 - T_\infty)}{2\alpha^{1/2} \Gamma(\frac{4}{3})} \int_{z_1}^{z_2} \left( \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} \sqrt{h_z \beta} h_x h_z dx \right)^{2/3} dz \quad (31-4.12)$$

این نتیجه آخر نحوه وابستگی  $Q$  به خواص سیال، توزیع سرعت، و شکل هندسی سیستم را نشان می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که  $Q$  با اختلاف دما، با  $k/\alpha^{1/3} = k^{2/3} \rho^{1/3} \hat{C}_p^{1/2}$ ، و با توان  $\frac{1}{3}$  گرادیان سرعت میانگین روی سطح متناسب است.

<sup>۱۰</sup> خواص وابسته به دما توسط آکرویوس، در همان جا، نقل شده‌است.

نشان دهید که چگونه می‌توان از این نتایج برای به‌دست آوردن آهنگ انتقال گرما از کره گرم‌شده‌ای به شعاع  $R$  که سیال ویسکوزی در اطراف آن «جریان خزشی» دارد استفاده کرد<sup>۱۱</sup> (نگاه کنید به مثال ۱-۲.۴ و شکل ۱-۶.۲).

حل  
در این جا می‌توان مختصات لایه مرزی  $x, y, z$  را به صورت  $r = R, \pi - \theta$  و  $\phi$  در شکل ۱-۶.۲ شناسایی کرد. رکود در  $\theta = \pi$  و جدایش در  $\theta = 0$  رخ می‌دهد. عامل‌های مقیاس عبارت‌اند از:  $h_x = R$  و  $h_z = R \sin \theta$  گرادیان سرعت فصل مشترک  $\beta$  عبارت است از:

$$\beta = -\left. \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{3}{2} \frac{v_\infty}{R} \sin \theta \quad (32-4.12)$$

با قرار دادن عبارت بالا در معادله‌های (۲۹-۴.۱۲) و (۳۱-۴.۱۲)، نتایج زیر برای انتقال گرمای همرفتی واداشته از کره‌ای هم‌دما به قطر  $D$  حاصل می‌شود:

$$\delta_T = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} v_\infty \sin^2 \theta}} \left( -9\alpha \int_\pi^\theta \sqrt{\frac{3}{2} v_\infty \sin^2 \bar{\theta} R^2 \sin \bar{\theta} d\bar{\theta}} \right)^{1/2}$$

$$= \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} D (\text{Re Pr})^{-1/2} \frac{(\pi - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta)^{1/2}}{\sin \theta} \quad (33-4.12)$$

$$Q = \frac{3^{1/2} k (T_0 - T_\infty)}{2\alpha^{1/2} \Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^{2\pi} \left( - \int_\pi^\theta \sqrt{\frac{3}{2} v_\infty \sin^2 \theta R^2 \sin \theta d\theta} \right)^{2/3} d\phi$$

$$= (\pi D^2) (T_0 - T_\infty) \left( \frac{k}{D} \right) \left[ \frac{(3\pi)^{2/3}}{2^{2/3} \Gamma(\frac{3}{2})} \right] (\text{Re Pr})^{1/2} \quad (34-4.12)$$

ثابت داخل کروشه برابر ۰/۹۹۱ است.

رفتار بیش‌بینی‌شده توسط معادله‌های (۳۳-۴.۱۲) در شکل (۳-۴.۱۲) ترسیم شده‌است. ضخامت لایه مرزی به‌صورت پایا، از مقداری کوچک در نقطه رکود، تا مقداری نامتناهی در نقطه جدایش که لایه مرزی به دنباله‌ای در پایین دست تبدیل می‌شود، افزایش می‌یابد. این تحلیل برای بخش جلوی کره، که در آن  $\delta_T$  کوچک است، بیش‌ترین دقت را دارد؛ خوش‌بختانه بیش‌ترین انتقال گرما هم در همین ناحیه انجام می‌شود. نتیجه حاصل برای  $Q$ ، به‌ازای  $\text{Re Pr} > 100$  تا حدود ۵٪ دقت دارد؛ در نتیجه کاربرد آن به سیالاتی با  $\text{Pr} > 100$  محدود می‌شود، زیرا جریان خزشی فقط به‌ازای  $\text{Re}$  از مرتبه ۱ یا کم‌تر ایجاد می‌شود.<sup>۱۲</sup>

نتایجی به‌صورتی همانند معادله (۳۴-۴.۱۲) برای جریان خزشی در سایر وضعیت‌های هندسی، از جمله در بسترهای پرشده، به‌دست آمده‌اند.<sup>۱۳،۸</sup>

۱۱. این مسئله را نخستین بار وی. جی. لویچ (همان‌جا) حل کرد. پس از آن در منبع زیر، جواب این مسئله به عددهای رینولدز بزرگ‌تر تعمیم داده شد.

A. Acrivos and T. D. Taylor, *Phys. fluids*, **5**, 387-394 (1962).

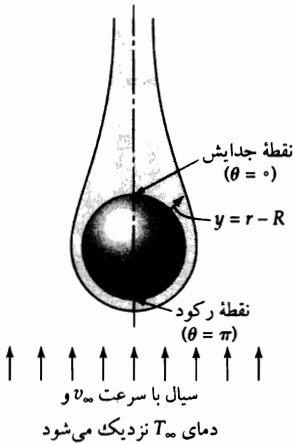
۱۲. مروری بر تحلیل‌های مربوط به گستره وسیعی از  $\text{Pe}' = \text{RePr}$  در منبع زیر آمده‌است:

S. K. Friedlander, *AIChE Journal*, **7**, 347-348 (1961).

13. J. P. Sørensen and W. E. Stewart, *Chem. Eng. Sci.*, **29**, 833-837 (1974).



لازم به تأکید است که جواب‌های مجانبی اهمیت خاصی دارند؛ به‌دست آوردن آن‌ها نسبتاً آسان است و برای بسیاری از کاربردها دقت کافی دارند. در فصل ۱۴ خواهیم دید که بعضی از روابط همبستگی استاندارد انتقال گرما بر جواب‌های مجانبی از نوع توصیف‌شده در این‌جا استوارند.



شکل ۳-۴-۱۲ انتقال گرمای همرفتی از کره با جریان خزشی. ناحیه سایه‌خورده، لایه مرزی گرمایی را (تعریف‌شده به صورت  $0.99 \leq \Pi_T \leq 1.5\delta_T$  یا  $y \leq \delta_T$ ) برای  $Pe = Re Pr \approx 200$  نشان می‌دهد.

### پرسش‌های تشریحی

- اگر منبع گرما در داخل جسم جامد باشد، معادله (۲-۱۰۱۲) را چگونه باید تغییر داد؟
- نشان دهید که معادله (۱۰-۱۰۱۲) از معادله (۸-۱۰۱۲) به‌دست می‌آید. جریان ویسکوز نظیر این معادله چیست؟
- کدام نوع مسئله‌های رسانش گرما را می‌توان توسط تبدیل لاپلاس حل کرد و کدام نوع را نمی‌توان؟
- در مثال ۳-۱۰۱۲، شار گرما و دما، هر دو در «معادله رسانش گرما» صدق می‌کنند. آیا همیشه چنین وضعیتی حاکم است؟
- نمودار دقیقاً نام‌گذاری‌شده نتایج نشان‌داده‌شده با معادله‌های (۳۸-۱۰۱۲) و (۴۰-۱۰۱۲) را ترسیم کنید و نشان دهید که منظور از عبارت «نوسانات دما نسبت به نوسانات شار گرما به اندازه  $\pi/4$  پس‌افت دارند» چیست؟
- نشان دهید که معادله (۴۰-۱۰۱۲) در شرایط مرزی صدق می‌کند. آیا باید در شرط اولیه‌ای نیز صدق کند؟ اگر چنین است، آن شرط کدام است؟
- در مثال ۱-۲-۱۲، اگر روش جداسازی متغیرها به‌جای تابع  $\Theta_d(\xi, \zeta)$  به‌طور مستقیم درمورد تابع  $\Theta(x, \zeta)$  به‌کار رود، بازهم نتیجه‌بخش است؟
- در مثال ۲-۲-۱۲، رابطه وابستگی دمای جدار به مختص  $z$  در پایین‌دست را نشان دهید.
- با استفاده از نموداری که با دقت نام‌گذاری شده‌است، نشان دهید که منظور از دو حالت  $\Delta \leq 1$  و  $\Delta \geq 1$  در بخش ۴-۱۲ چیست؟ کدام حالت درمورد گازهای چنداتمی رقیق صادق است؟ درمورد مایعات آلی چه‌طور؟ درمورد فلزات مذاب کدام حالت صادق است؟
- وضعیت‌هایی را که چهار روش ریاضی گفته‌شده در بخش ۱۰۱۲ درمورد آن‌ها قابل‌کاربردند، جمع‌بندی کنید.

مسئله‌ها

۱۲ الف. رسانش گرمای حالت ناپایا در کره آهنی. کره‌ای آهنی به قطر ۱ in. خواصی فیزیکی به شرح زیر دارد:  $\rho = 436 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$  و  $\hat{C}_p = 0.12 \text{ Btu}/\text{lb}_m \cdot \text{F}$ ،  $k = 30 \text{ Btu}/\text{hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$   $70^\circ\text{F}$  است.

(الف) ضریب نفوذ گرمایی کره چه قدر است؟

(ب) اگر کره ناگهان در مقدار زیادی سیال با دمای  $270^\circ\text{F}$  فرو برده شود، چه قدر طول می‌کشد تا مرکز آن به دمای  $128^\circ\text{F}$  برسد؟

(ج) کره‌ای با همین اندازه و همین دمای اولیه، اما از ماده‌ای دیگر، دو برابر زمان لازم دارد تا دمای مرکز آن به  $128^\circ\text{F}$  برسد. مطلوب است تعیین ضریب نفوذ گرمایی این کره.

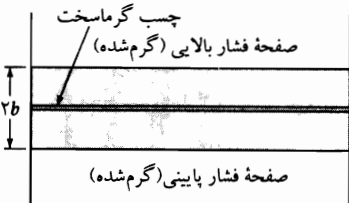
(د) نمودار مورد استفاده برای حل قسمت‌های (ب) و (ج) براساس حل یک معادله دیفرانسیل جزئی به دست آمد. این معادله دیفرانسیل کدام است؟

جواب: (الف)  $0.574 \text{ ft}^2/\text{hr}$ ؛ (ب)  $1.1 \text{ s}$ ؛ (ج)  $0.287 \text{ ft}^2/\text{hr}$ .

۱۲ الف. ۲. مقایسه دو جواب تیغه‌ای برای زمان‌های کوتاه. با استفاده از معادله (۱۲-۸) (که بر تیغه نیمه نامتناهی مبتنی است)، به جای استفاده از معادله (۱۲-۳۱) (که بر تیغه‌ای با ضخامت متناهی مبتنی است)، چه خطایی پدید می‌آید، هرگاه  $\alpha t/b^2 = 0.1$  و نقطه مورد نظر در  $0.9$  فاصله از صفحه میانی تا سطح تیغه واقع شده باشد؟ برای مقایسه از جواب‌هایی استفاده کنید که به صورت ترسیمی نمایش داده شده‌اند. جواب: ۰.۴٪.

۱۲ الف. ۳. چسباندن با چسب گرماسخت<sup>۱</sup> (شکل ۱۲ الف. ۳). می‌خواهیم دو ورق از ماده‌ای جامد، هریک به ضخامت  $0.77 \text{ cm}$  را به هم بچسبانیم. این کار با استفاده از لایه‌ای نازک از ماده‌ای گرماسخت انجام می‌شود که در  $160^\circ\text{C}$  ذوب شده و پیوند خوبی تشکیل می‌دهد. دو ورق را زیر پرس قرار می‌دهند و دو صفحه فشار پرس را در دمای  $220^\circ\text{C}$  نگه می‌دارند. چه مدت باید ورق‌ها را زیر پرس نگه داشت، هرگاه دمای اولیه آن‌ها  $20^\circ\text{C}$  باشد؟ ضریب نفوذ گرمایی ورق‌های جامد  $10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$   $4/2$  است.

جواب: ۸۵ s.



شکل ۱۲ الف. ۳. دو ورق از ماده جامد با لایه نازکی از چسب در بین آن‌ها.

۱۲ الف. ۴. آب‌دهی شمشال فولادی. یک شمشال فولادی استوانه‌ای به قطر ۱ ft و طول ۳ ft، ابتدا در دمای  $1000^\circ\text{F}$  است و در روغن آب‌دهی می‌شود. فرض کنید درحین آب‌دهی دمای سطح شمشال  $200^\circ\text{F}$  است. خواص

۱. این مسئله مبتنی بر مثال ۱۰ از منبع زیر است:

فیزیکی فولاد، که می‌توان آن‌ها را مستقل از دما فرض کرد، به شرح زیر است:  $k = 25 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$ ،  $\rho = 7.7 \text{ g/cm}^3$  و  $\hat{C}_p = 0.12 \text{ cal/g} \cdot \text{C}$ .

دمای داغ‌ترین نقطه شمشال را، پنج دقیقه پس از آب‌دهی تخمین بزنید. از آثار انتهایی چشم‌پوشی کنید؛ یعنی محاسبات را برای استوانه‌ای به قطر مفروض و طول نامتناهی انجام دهید. برای اطلاع از روش به حساب آوردن آثار انتهایی به مسئله ۱۲.ج نگاه کنید.  
جواب:  $750^\circ \text{F}$ .

۱۲.الف. ۵. اندازه‌گیری ضریب نفوذ گرمایی براساس دامنه نوسانات دما.

(الف) می‌خواهیم با استفاده از نتایج مثال ۱۲.۱-۳، ضریب نفوذ گرمایی  $\alpha = k/\rho\hat{C}_p$  ماده‌ای جامد را اندازه‌گیری کنیم. این کار را می‌توان با اندازه‌گیری دامنه‌های  $A_1$  و  $A_2$  در دو نقطه به فواصل  $y_1$  و  $y_2$  از سطحی که به تناوب گرم می‌شوند، انجام داد. نشان دهید که ضریب نفوذ گرمایی را می‌توان با استفاده از فرمول زیر تخمین زد:

$$\alpha = \frac{\omega}{2} \left( \frac{y_2 - y_1}{\ln(A_1/A_2)} \right)^2 \quad (12.الف.5)$$

(ب) ضریب نفوذ گرمایی  $\alpha$  را، وقتی شار گرمای سطحی سینوسی بسامدی برابر  $30^\circ$  چرخه در ثانیه دارد محاسبه کنید، هرگاه بدانی  $y_2 - y_1 = 6.19 \text{ cm}$  و نسبت دامنه  $A_1/A_2$  برابر  $6.5$  است.  
جواب:  $\alpha = 0.111 \text{ cm}^2/\text{s}$ .

۱۲.الف. ۶. هرفرت واداشته از کره در جریان خزشی. کره‌ای به قطر  $D$ ، که سطح آن در دمای  $T_\infty$  است، در جریان سیالی قرار دارد که با سرعت  $v_\infty$  و دمای  $T_\infty$  نزدیک می‌شود. جریان در اطراف کره «جریان خزشی» است؛ یعنی عدد رینولدز آن کم‌تر از حدود  $0.1$  است. اتلاف گرما از کره با معادله (۱۲.۴-۳۴) توصیف می‌شود.  
(الف) نشان دهید که این معادله از لحاظ بُعدی درست است.

(ب) آهنگ انتقال گرما،  $Q$ ، را برای جریان در اطراف کره‌ای به قطر  $1 \text{ mm}$  تخمین بزنید. سیال روغنی با دمای  $T_\infty = 50^\circ \text{C}$  است که با سرعت  $1 \text{ cm/s}$  نسبت به کره حرکت می‌کند و دمای سطح کره  $100^\circ \text{C}$  است. روغن خواصی به شرح زیر دارد:  $\hat{C}_p = 0.45 \text{ cal/g} \cdot \text{K}$ ،  $\rho = 0.9 \text{ g/cm}^3$ ،  $\mu = 150 \text{ cp}$  و  $k = 370 \times 10^{-4} \text{ W/s} \cdot \text{cm} \cdot \text{K}$ .

۱۲.ب. ۱. اندازه‌گیری ضریب نفوذ گرمایی در آزمایش حالت ناپایا. تیغه‌ای جامد به ضخامت  $1.9 \text{ cm}$ ، در محیطی با دمای ثابت  $20^\circ \text{C}$  به تعادل گرمایی می‌رسد. در لحظه‌ای مفروض ( $t = 0$ ) تیغه بین دو صفحه مسی ترموستات‌دار، که دمای سطوح آن‌ها دقیقاً در  $40^\circ \text{C}$  نگه داشته شده، محکم بسته می‌شود. دمای صفحه میانی تیغه به صورت تابعی از زمان، توسط یک ترموکوپل، حس می‌شود. داده‌های تجربی عبارت‌اند از:

$t(\text{s})$	0	120	240	360	480	600
$T(^\circ \text{C})$	20.0	24.4	30.5	34.2	36.5	37.8

مطلوب است تعیین ضریب نفوذ گرمایی و رسانندگی گرمایی تیغه، با فرض این‌که  $\rho = 1.5 \text{ g/cm}^3$  و  $\hat{C}_p = 0.365 \text{ cal/g} \cdot \text{C}$ .

جواب:  $\alpha = 1.5 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$  یا  $k = 8.72 \times 10^{-4} \text{ cal/s} \cdot \text{cm} \cdot \text{C}$  یا  $k = 0.2 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$ .

۱۲.ب.۲ همرفت واداشته دو بُعدی با منبع گرمای خطی. سیالی در دمای  $T_\infty$  در جهت  $x$ ، در طول سیمی طولی و بی‌نهایت نازک جریان دارد؛ سیم با عبور جریان برق، با آهنگ  $Q/L$  (انرژی بر واحد زمان بر واحد طول) گرم می‌شود. بنابراین سیم به صورت یک منبع گرمای خطی عمل می‌کند. فرض می‌شود که وجود سیم در جریان اختلال در خور اعتنایی ایجاد نمی‌کند. خواص سیال (چگالی، رسانندگی گرمایی، و ظرفیت گرمایی) ثابت فرض می‌شوند و جریان را یکنواخت در نظر می‌گیریم. به علاوه، انتقال گرمای تابشی از سیم را نادیده می‌گیریم.

(الف) معادله انرژی را، با چشم‌پوشی از رسانش گرما در جهت  $x$  نسبت به انتقال گرما از طریق همرفت، به صورت مقتضی ساده کنید. نشان دهید که شرایط زیر در مورد دما منطقی‌اند:

$$(۱۲.ب.۱) \quad y \rightarrow \infty, \text{ داریم } T \rightarrow T_\infty, \text{ به‌ازای همه مقادیر } x.$$

$$(۱۲.ب.۲) \quad \text{در } x < 0, \text{ داریم } T = T_\infty, \text{ به‌ازای همه مقادیر } y.$$

$$(۱۲.ب.۳) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \hat{C}_p (T - T_\infty) |x v_x dy = Q/L \text{ به‌ازای همه مقادیر } x > 0.$$

(ب) جوابی به صورت زیر (به‌ازای  $x > 0$ ) حدس بزنید:

$$(۱۲.ب.۴) \quad T(x, y) - T_\infty = f(x)g(\eta) \quad \text{که در آن } \eta = y/\delta(x)$$

با استفاده از معادله (۱۲.ب.۳) نشان دهید که  $f(x) = C_1/\delta(x)$ . سپس معادله (۱۲.ب.۴) را در معادله انرژی قرار دهید و رابطه زیر را به دست آورید:

$$(۱۲.ب.۵) \quad - \left[ \frac{v_x \delta}{\alpha} \frac{d\delta}{dx} \right] \frac{d}{d\eta} (\eta g) = \frac{d^2 g}{d\eta^2}$$

(ج) کمیت داخل کروشه معادله (۱۲.ب.۵) را برابر ۲ بگیرید (آیا می‌دانید چرا؟)، و سپس آن را حل کنید تا  $\delta(x)$  به دست آید.

(د) سپس معادله را برای یافتن  $g(\eta)$  حل کنید.

(ه) سرانجام، ثابت  $C_1$  را محاسبه کنید تا توزیع دما را به طور کامل به دست آورید.

۱۲.ب.۳ گرمایش جدار (شار گرمای ثابت جدار). جدار جامد و بسیار ضخیمی ابتدا در دمای  $T_0$  است. در زمان  $t = 0$ ، شار گرمای ثابت  $q_0$  به یک سطح از جدار (واقع در  $y = 0$ ) می‌رسد، و این شار گرما برقرار نگه داشته می‌شود. مطلوب است تعیین توزیع دمای وابسته به زمان،  $T(y, t)$ ، برای زمان‌های کوتاه. چون جدار بسیار ضخیم است، در هنگام به دست آوردن توزیع دما، می‌توان به آسانی فرض کرد که دو سطح آن به فاصله نامتناهی از هم قرار دارند.

(الف) راهکار مورد استفاده برای رسیدن به معادله (۱۲.ب.۳۵) با استفاده از معادله (۱۲.ب.۳۳) را دنبال کنید و سپس شرایط مرزی و اولیه مناسب را بنویسید. نشان دهید که جواب تحلیلی مسئله چنین است:

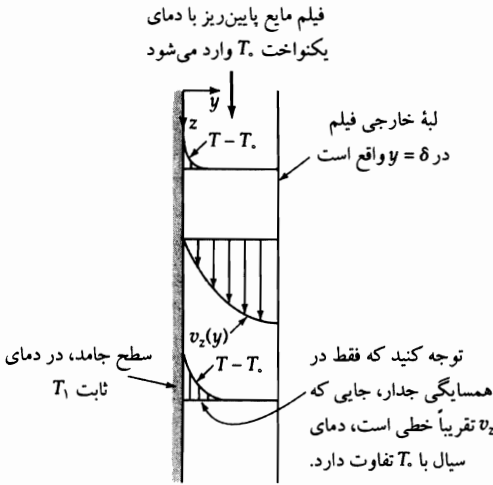
$$(۱۲.ب.۳۳) \quad T(y, t) - T_0 = \frac{q_0}{k} \left( \sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha t}\right) - \frac{y}{\sqrt{\pi}} \int_{y/\sqrt{4\alpha t}}^{\infty} \exp(-u^2) du \right)$$

(ب) با قرار دادن این جواب در معادله رسانش گرمای یک بُعدی برای دما (نگاه کنید به معادله ۱۲.ب.۳۳) نشان دهید که این جواب درست است. هم چنین نشان دهید که شرایط مرزی و اولیه برآورده می‌شوند.

۱۲.ب.۴ انتقال گرما از جدار به فیلم ریزان (حد زمان تماس کوتاه)<sup>۲</sup> (شکل ۱۲.ب.۴). فیلم مایع سردی که مطابق شکل از روی جدار جامد عمودی ریزش می‌کند، اثر سرمایشی درخور اعتنایی روی سطح جامد دارد. آهنگ انتقال گرما از جدار به سیال را، برای زمان‌های تماس کوتاهی که در آن‌ها دمای سیال فقط در مجاورت جدار تغییر چشم‌گیر دارد، تخمین بزنید.

(الف) نشان دهید که توزیع سرعت در فیلم ریزان را، که در بخش ۲.۲ ارائه شد، می‌توان به صورت  $v_z = v_{z,max} [2(y/\delta) - (y/\delta)^2]$  نوشت که در آن  $v_{z,max} = \rho g \delta^2 / 2\mu$ . سپس نشان دهید که در مجاورت جدار، سرعت تابعی خطی از  $y$  است و داریم:

$$v_z \approx \frac{\rho g \delta}{2\mu} y \quad (۱۲.ب.۴-۱)$$



شکل ۱۲.ب.۴ انتقال گرما به فیلم ریزان روی جدار عمودی.

(ب) نشان دهید که معادله انرژی در این وضعیت به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\rho \hat{C}_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (۱۲.ب.۴-۲)$$

همه فرض‌های ساده‌ساز لازم برای رسیدن به این نتیجه را نام ببرید. دو معادله بالا را ترکیب کنید تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$y \frac{\partial T}{\partial z} = \beta \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (۱۲.ب.۴-۳)$$

که در آن  $\beta = \mu k / \rho^2 \hat{C}_p g \delta$

(ج) نشان دهید که برای زمان‌های تماس کوتاه، می‌توان شرایط مرزی زیر را نوشت:

$$(۱۲.ب.۴-۴) \text{ شرط مرزی ۱: } T = T_\infty, \text{ به ازای } z = 0 \text{ و } y > 0.$$

2. R. L. Pigford, *Chemical Engineering Progress Symposium Series*, 51, No. 17, 79-92 (1955).

رابرت لامار پیگفورد (۱۹۸۸-۱۹۱۷)، در دانشگاه دلاور و دانشگاه کالیفرنیا در برکلی تدریس کرد و درباره بسیاری از جنبه‌های نفوذ و انتقال جرم به تحقیق پرداخت؛ او ویراستار مؤسس نشریه *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals* بود.

(۱۲.۴-۵) شرط مرزی ۲:  $T \rightarrow T_0$ ، وقتی  $y \rightarrow \infty$  و  $z$  متناهی باشد.

(۱۲.۴-۶) شرط مرزی ۳:  $T = T_1$ ، به‌ازای  $y = 0$  و  $z > 0$ .

توجه کنید که شرط مرزی واقعی در  $y = \delta$  با یک شرط مرزی غیرواقعی در  $y \rightarrow \infty$  جایگزین می‌شود. این کار ممکن است، زیرا گرما فقط به فاصله کوتاهی در سیال نفوذ می‌کند.

(د) با استفاده از متغیرهای بدون بُعد  $\Theta(\eta) = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$  و  $\eta = y/\sqrt{9\beta z}$  معادله دیفرانسیل را به‌صورت زیر بازنویسی کنید (نگاه کنید به معادله ج.۱-۹):

$$\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} + 3\eta^2 \frac{d\Theta}{d\eta} = 0 \quad (12.4-7)$$

نشان دهید که شرایط مرزی عبارت‌اند از:  $\Theta = 0$ ، به‌ازای  $\eta = \infty$  و  $\Theta = 1$  در  $\eta = 0$ .

(ه) در معادله (۱۲.۴-۷)، فرض کنید  $d\Theta/d\eta = p$  و معادله‌ای برای  $p(\eta)$  به‌دست آورید. این معادله را حل کنید تا رابطه  $d\Theta/d\eta = p(\eta) = C_1 \exp(-\eta^3)$  نتیجه شود. نشان دهید که با انتگرال‌گیری دوباره و کاربرد شرایط مرزی نتیجه می‌شود:

$$\Theta = \frac{\int_{\eta}^{\infty} \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta}}{\int_0^{\infty} \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{4}{3})} \int_{\eta}^{\infty} \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta} \quad (12.4-8)$$

(و) نشان دهید که شارگرمای متوسط از جدار به سیال برابر است با:

$$q_{avg}|_{y=0} = \frac{3}{4} \frac{(9\beta L)^{-1/2}}{\Gamma(\frac{4}{3})} k(T_1 - T_0) \quad (12.4-9)$$

که در آن از فرمول لایب‌نیتس در بخش ج.۳ استفاده شده‌است.

۱۲.۵. دما در تیغه‌ای که گرما تولید می‌کند. تیغه مثال ۱۲.۱-۲ با رسانندگی گرمایی  $k$ ، ابتدا در دمای  $T_0$  است. به‌ازای همهٔ زمان‌های  $t > 0$  حجم گرمای یکنواخت  $S$  در داخل تیغه تولید می‌شود.

(الف) عبارتی برای دمای بدون بُعد  $b^2(T - T_0)/S$ ، به‌صورت تابعی از مختص بدون بُعد  $\eta = y/b$  و زمان بدون بُعد به‌دست آورید؛ جواب را با جستجو در کتاب کارلسلاو و یگر پیدا کنید.

(ب) دمای ماکزیمی که مرکز تیغه به آن می‌رسد چه قدر است؟

(ج) چه مدت زمان سپری می‌شود تا  $90\%$  افزایش دما رخ دهد؟

جواب: (ج)  $t \approx b^2/\alpha$ .

۱۲.۶. هرفرت واداشته در جریان آهسته در اطراف استوانه (شکل ۱۲.۶). استوانهٔ طولی به شعاع  $R$  در سیالی نامتناهی با خواص ثابت  $\rho$ ،  $\mu$ ،  $C_p$ ، و  $k$  معلق است. سیال با دمای  $T_{\infty}$  و سرعت  $v_{\infty}$  نزدیک می‌شود. سطح استوانه‌ای در دمای  $T_0$  نگه داشته می‌شود. لمب توزیع سرعت در این سیستم را، در حد  $1 \ll \text{Re}$  تعیین کرده‌است.<sup>۳</sup>

3. H. Lamb, *Phil. mag.*, (6) **21**, 112-110 (1911).

برای آشنایی با تحلیل‌های مفصل‌تر، نگاه کنید به

L. Rosenhead (ed.), *Laminar Boundary Layers*, Oxford University Press, London (1963), Chapter 4.

نتیجه‌ای که او برای ناحیه نزدیک به استوانه به دست آورد، چنین است:

$$\psi = -\frac{v_{\infty} R \sin \theta}{2S} \left[ \frac{r}{R} \left( 2 \ln \frac{r}{R} - 1 \right) + \frac{R}{r} \right] \quad (۱۲.ب.۱-۶)$$

که در آن  $\psi$  نخستین تابع جریان در مختصات قطبی در جدول ۱۲.۴-۱ است. کمیت بدون بُعد  $S$  با رابطه  $S = \frac{1}{\gamma} - \gamma + \ln(8/Re)$  تعریف می‌شود که در آن  $\gamma = 0.5772\dots$  «ثابت اویلر» است و  $Re = Dv_{\infty}\rho/\mu$ .

(الف) مطلوب است تعیین گرادینان سرعت فصل مشترکی  $\beta$  برای این سیستم، که در مثال ۱۲.۴-۳ تعریف شد.

(ب) آهنگ اتلاف گرما  $Q$  از طول  $L$  استوانه را، با استفاده از روش مثال ۱۲.۴-۳ تعیین کنید. توجه کنید که:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin \theta} d\theta = B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = 2.3963\dots \quad (۱۲.ب.۲-۶)$$

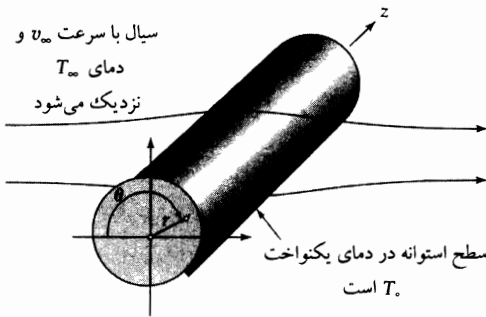
که در آن  $B(m, n) = \Gamma(m)\Gamma(n)/\Gamma(m+n)$  «تابع بتا» نام دارد.

(ج) مطلوب است تعیین  $\delta_T/R$  در  $\theta = 0$ ،  $\frac{1}{4}\pi$ ، و  $\pi$ .

جواب: (الف)  $\beta = \frac{2v_{\infty} \sin \theta}{RS}$

(ب)  $Q = C(\pi DL)(T_0 - T_{\infty}) \left(\frac{k}{D}\right) \left(\frac{Re Pr}{S}\right)^{1/3}$  (مقدار ثابت  $C$  را محاسبه کنید):

(ج)  $\frac{\delta_T}{R} = \left(\frac{9S}{Re Pr}\right)^{1/3} f(\theta)$ ;  $f = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}$ ,  $(1/1981)^{1/3}$ ,  $\infty$



شکل ۱۲.۶. انتقال گرما از استوانه طویل به شعاع  $R$ .

۱۲.۷. جدول زمانی برای سرخ کردن بوقلمون.

(الف) جسمی جامد و همگن، با شکل اختیاری، ابتدا به‌طور یکنواخت، در دمای  $T_0$  است. در لحظه  $t = 0$  آن را در سیالی با دمای  $T_1$  فرو می‌برند. فرض کنید  $L$  طول مشخصه در جسم جامد باشد. نشان دهید که پیش‌بینی براساس تحلیل بُعدی چنین است:

$$\Theta = \Theta(\xi, \eta, \zeta, \tau, \text{و نسبت‌های هندسی}) \quad (۱۲.ب.۷-۱)$$

که در آن  $\Theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ ،  $\xi = x/L$ ،  $\eta = y/L$ ،  $\zeta = z/L$ ، و  $\tau = \alpha t/L^2$ . این نتیجه را به نمودارهای بخش ۱۲.۱ ربط دهید.

(ب) جدول زمانی متداول برای سرخ کردن بوقلمون در دمای  $350^{\circ}\text{F}$  چنین است:<sup>۴</sup>

جرم بوقلمون (lb <sub>m</sub> )	زمان لازم به‌ازای واحد جرم (min/lb <sub>m</sub> )
۶ - ۱۰	۲۰ - ۲۵
۱۰ - ۱۶	۱۸ - ۲۰
۱۸ - ۲۵	۱۵ - ۱۸

این جدول زمانی تجربی آشپزی را با نتایج قسمت (الف)، برای بوقلمون‌هایی با شکل هندسی مشابه و در دمای اولیه  $T_0$  که با دمای سطحی  $T_1$  و توزیع دمای مشابه  $\Theta = \Theta(\xi, \eta, \zeta)$  پخته می‌شوند، مقایسه کنید.

۱۲.ب.۸ استفاده از جواب لایه مرزی مجانبی. با استفاده از نتایج مثال ۳-۴.۱۲،  $\delta_T$  و  $q_0$  را برای سیستم مسئله ۴.د.۱۲ به دست آورید. با مقایسه  $\delta_T$  با  $D$ ، گستره قابلیت کاربرد جواب به دست آمده در مسئله ۴.د.۱۲ را تخمین بزنید.

۱۲.ب.۹ انتقال گرمای غیرنیوتونی با شار گرمای ثابت جدار (جواب مجانبی برای فواصل محوری کوتاه). مثال ۲-۲.۱۲ را برای سیالی که رفتار غیرنیوتونی آن با مدل قانون توانی به خوبی توصیف می‌شود، دوباره حل کنید. نشان دهید که جواب نشان داده شده به صورت معادله (۲-۲.۱۲) را می‌توان از مدل قانون توانی برگرفت و فقط کافی است اصلاح مقتضی در تعریف  $v$  انجام شود.

۱۲.ج.۱ جواب‌های حاصل ضربی برای رسانش گرمای ناپایا در مواد جامد.

(الف) در مثال ۲-۱.۱۲ معادله رسانش گرمای حالت ناپایا برای تیغه‌ای به ضخامت  $2b$  حل شد. نشان دهید که جواب معادله (۲-۱.۱۲) برای مسئله نظیر در مورد قطعه‌ای مستطیلی با ابعاد متناهی  $2a$ ،  $2b$  و  $2c$  را می‌توان به صورت حاصل ضرب جواب‌های سه تیغه با ابعاد متناظر نوشت:

$$\frac{T_1 - T(x, y, z, t)}{T_1 - T_0} = \Theta\left(\frac{x}{a}, \frac{at}{a^2}\right) \Theta\left(\frac{y}{b}, \frac{at}{b^2}\right) \Theta\left(\frac{z}{c}, \frac{at}{c^2}\right) \quad (1-1.12)$$

که در آن  $\Theta(y/b, at/b^2)$  سمت راست معادله (۳۱-۱.۱۲) است.

(ب) نتیجه مشابهی را برای استوانه‌های با طول متناهی اثبات کنید؛ سپس مسئله ۴.الف.۱۲ را بدون فرض نامتناهی بودن طول استوانه حل کنید.

۱۲.ج.۲ گرمایش تیغه نیمه نامتناهی با رسانندگی گرمایی متغیر. مثال ۱-۱.۱۲ را برای جامدی حل کنید که رسانندگی گرمایی آن با دما به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\frac{k}{k_0} = 1 + \beta \left( \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \right) \quad (1-2.12)$$

که در آن  $k_0$  رسانندگی گرمایی در دمای  $T_0$  و  $\beta$  مقداری ثابت است.

4. Woman's Home Companion Cook Book, Garden City Publishing Co., (1946), courtesy of Jean Stewart.



از راهکار تجربی زیر استفاده کنید:

(الف) فرض کنید  $\Theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$  و  $\eta = y/\delta(t)$ ، که در آن  $\delta(t)$  ضخامت لایه مرزی است که با زمان تغییر می‌کند. سپس فرض کنید که:

$$\Theta(y, t) = \Phi(\eta) \quad (۱۲-۲)$$

که در آن تابع  $\Phi(\eta)$  شکل توزیع‌های «مشابه» را نشان می‌دهد. این کار معادل است با این فرض که توزیع دما به‌ازای همه مقادیر  $\beta$  شکل یکسانی دارد، که البته واقعاً درست نیست.

(ب) توزیع تقریبی بالا را در معادلهٔ رسانش گرما قرار دهید و معادلهٔ دیفرانسیل زیر را برای ضخامت لایه مرزی به‌دست آورید:

$$M\delta \frac{d\delta}{dt} = \alpha \cdot N \quad (۱۲-۳)$$

که در آن  $\alpha = k_0/\rho\hat{C}_p$  و:

$$M = \int_0^1 \Phi(\eta) d\eta \quad \text{و} \quad N = (1 + \beta\Phi)(d\Phi/d\eta)|_0 \quad (۱۲-۴، ۵)$$

سپس این معادله را حل کنید و تابع  $\delta(t)$  را به‌دست آورید.

(ج) اکنون فرض کنید  $\Phi(\eta) = 1 - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3$ . چرا این فرض به‌جاست؟ سپس توزیع دمای وابسته‌به‌زمان  $T(y, t)$ ، و هم‌چنین شار گرما در  $y = 0$  را به‌دست آورید.

۳.ج۱۲ رسانش گرما با تغییر فاز (مسئلهٔ نویمان-استفان) (شکل ۱۲.۳).<sup>۵</sup> مایعی که داخل استوانه‌ای طویل است، ابتدا در دمای  $T_1$  است. به‌ازای همهٔ زمان‌های  $t > 0$  کف ظرف در دمای  $T_0$  نگه داشته می‌شود که پایین‌تر از نقطهٔ ذوب  $T_m$  است. می‌خواهیم حرکت فصل مشترک جامد-مایع،  $Z(t)$ ، را درحین فرایند انجماد تخمین بزنیم. برای سادگی کار، در این‌جا فرض می‌کنیم که خواص فیزیکی  $\rho$ ،  $k$ ، و  $C_p$  ثابت‌اند و در هر دو فاز جامد و مایع یکسان‌اند. فرض کنید  $\Delta\hat{H}_f$  گرمای نهان ذوب برگرم باشد و از اختصار  $\Lambda = \Delta\hat{H}_f/\hat{C}_p(T_1 - T_0)$  استفاده کنید.

(الف) معادلهٔ رسانش گرما را برای نواحی مایع ( $L$ ) و جامد ( $S$ ) بنویسید. شرایط مرزی و اولیه را بیان کنید.

۵. برای آشنایی با نوشته‌ها، منابع و مسئله‌های مربوط به این موضوع، نگاه کنید به

H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959), Chapter XI;

در صفحه‌های ۲۸۶-۲۸۳ منبع فوق، مسئلهٔ موردبحث در این‌جا، برای وضعیتی حل شده‌است که در آن خواص فیزیکی فازهای مایع و جامد متفاوت‌اند. هم‌چنین نگاه کنید به

S. G. Bankoff, *Advances in Chemical Engineering*, Vol. 5, Academic Press, New York (1964), pp. 75-150; J. Crank, *Free and Moving Boundary Problems*, Oxford University Press (1984); J. M. Hill, *One-Dimensional Stefan Problems*, Longmans (1987).

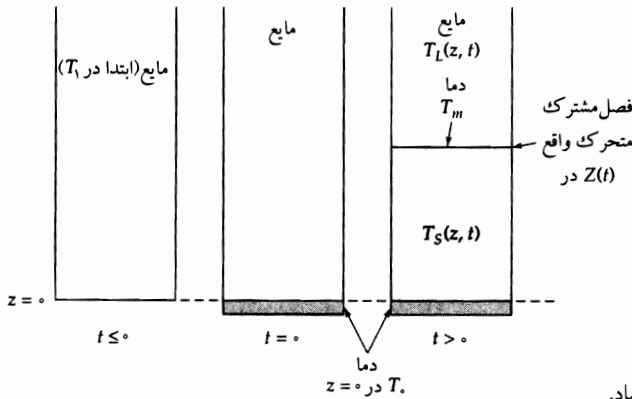
(ب) جواب‌ها را به صورت زیر فرض کنید:

$$\Theta_S \equiv \frac{T_S - T_1}{T_1 - T_0} = C_1 + C_2 \operatorname{erf} \frac{z}{\sqrt{4\alpha t}} \quad (۱۲.ج.۳)$$

$$\Theta_L \equiv \frac{T_L - T_1}{T_1 - T_0} = C_3 + C_4 \operatorname{erf} \frac{z}{\sqrt{4\alpha t}} \quad (۱۲.ج.۳)$$

(ج) با استفاده از شرط مرزی در  $z = 0$ ، نشان دهید که  $C_1 = 0$ ، و با استفاده از شرط مرزی در  $z = \infty$  نشان دهید که  $C_3 = 1 - C_4$ . سپس با استفاده از این نکته که در  $z = Z(t)$  داریم هنوز تعیین نشده‌است). سپس  $C_3$  و  $C_4$  را برحسب  $\lambda$  به دست آورید. از شرط مرزی باقی‌مانده برای به دست آوردن  $\lambda$  برحسب  $\Lambda$  و  $\Theta_m = (T_m - T_0)/(T_1 - T_0)$  استفاده کنید:

$$\sqrt{\pi} \Lambda \lambda \exp \lambda^2 = \frac{\Theta_m}{\operatorname{erf} \lambda} - \frac{1 - \Theta_m}{1 - \operatorname{erf} \lambda} \quad (۱۲.ج.۳)$$



شکل ۱۲.ج.۳ رسانش گرما از طریق انجماد.

عبارت نهایی  $Z(t)$  چیست؟ (تذکره: در این مسئله فرض شده‌است که تغییر فاز به طور لحظه‌ای رخ می‌دهد و فوق سرمایش در فاز مایع رخ نمی‌دهد. معلوم شده‌است که در انجماد بسیاری از مایعات، این فرض غیرقابل دفاع است. یعنی برای توصیف صحیح فرایند انجماد، باید سینتیک فرایند تبلور را نیز به حساب آورد.)<sup>۶</sup>

۱۲.ج.۴ گرمایش ویسکوز در جریان نوسانی.<sup>۷</sup> گرمایش ویسکوز می‌تواند عاملی مزاحم در اندازه‌گیری‌های ویسکوزیته باشد. در این جا اثر گرمایش ویسکوز بر اندازه‌گیری ویسکوزیته در سیستم صفحه نوسان‌گر را می‌بینیم.

6. H. Janeschitz-Kriegl, *Plastics and Rubber Processing and Applications*, 4, 145-158 (1984); H. Janeschitz-Kriegl, in *One-Hundred Years of Chemical Engineering* (N. A. Peppas, ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (Netherlands)(1989), pp. 111-124; H. Janeschitz-Kriegl, E. Ratajski, and G. Eder, *Ind. Eng. Chem. Res.*, 34, 3481-3487 (1995); G. Astarita and J. M. Kenny, *Chem. Eng. Comm.*, 53, 69-84 (1987).

7. R. B. Bird, *Chem. Eng. Prog. Symposium Series*, Vol. 61, No. 58 (1965), pp. 13-14; see also F. Ding, A. J. Giacomin, R. B. Bird, and C-B Kweon, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 86, 359-374 (1999).

یک سیال نیوتونی در ناحیه بین دو صفحه موازی قرار دارد که به اندازه  $b$  از هم فاصله دارند. دمای هر دو صفحه  $T_0$  است. صفحه پایینی (در  $x = 0$ ) به نوسان سینوسی در جهت  $z$  با دامنه سرعت  $v_0$  و بسامد دایره‌ای  $\omega$  وادار می‌شود. افزایش دمای ناشی از گرمایش ویسکوز را تخمین بزنید. فقط حد بسامد بالا را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که توزیع سرعت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{v_z(x, t)}{v_0} = \frac{\begin{bmatrix} \left( \begin{array}{l} \sinh a(1-\xi) \cos a(1-\xi) \sinh a \cos a \\ + \sin a(1-\xi) \cosh a(1-\xi) \sin a \cosh a \end{array} \right) \cos \omega t \\ + \left( \begin{array}{l} -\sin a(1-\xi) \cosh a(1-\xi) \sinh a \cos a \\ + \sinh a(1-\xi) \cos a(1-\xi) \sin a \cosh a \end{array} \right) \sin \omega t \end{bmatrix}}{\sinh^2 a \cos^2 a + \cosh^2 a \sin^2 a} \quad (12.4.12)$$

که در آن  $a = \sqrt{\rho\omega b^2/2\mu}$  و  $\xi = x/b$ .

(ب) سپس تابع اتلاف  $\Phi_v$  را برای توزیع سرعت طبق معادله (12.4.12) محاسبه کنید. پس از آن تابع اتلاف متوسط‌گیری شده زمانی  $\bar{\Phi}_v$  را، با متوسط‌گیری روی یک چرخه به دست بیاورید. از فرمول‌های زیر استفاده کنید:

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \overline{\sin \omega t \cos \omega t} = 0 \quad (12.4.2)$$

که می‌توان درستی آن‌ها را نشان داد. سپس نتیجه را برای بسامدهای بالا (یعنی به ازای مقادیر بزرگ  $a$ ) ساده کنید تا نتیجه شود:

$$\bar{\Phi}_v(\omega) = a^2 \left(\frac{v_0}{b}\right)^2 e^{-2a\xi} \quad (12.4.3)$$

(ج) سپس از معادله رسانش گرما، متوسط‌گیری زمانی کنید تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$0 = k \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} + \mu \bar{\Phi}_v \quad (12.4.4)$$

که در آن  $\bar{T}$  دمای متوسط‌گیری شده در یک چرخه است. این معادله را حل کنید و رابطه زیر را به دست بیاورید:

$$\bar{T} - T_0 = \left(\frac{\mu v_0^2}{4k}\right) [(1 - e^{-2a\xi}) - (1 - e^{-2a})\xi] \quad (12.4.5)$$

این رابطه نحوه وابستگی دما در شکاف را به مکان نشان می‌دهد. با استفاده از این تابع، افزایش دمای ماکزیمم را می‌توان محاسبه کرد. برای بسامدهایی که به اندازه معقول بالا هستند، داریم:  $\bar{T} - T_0 \approx \mu v_0^2 / 4k$ .

۱۲.۵. نفوذ گرمای خورشید. بسیاری از جانوران بیابان با نقب زدن در عمق کافی از زمین، به منظور تامین دمای پایا برای خود، با نوسانات شدید دما در شب و روز مقابله می‌کنند. فرض کنید دما در زمین  $T(y, t)$  باشد که در آن  $y$  عمق در زیر سطح زمین و  $t$  زمان است، که از هنگام دمای ماکزیمم  $T_0$  اندازه‌گیری می‌شود. به علاوه، فرض کنید دما در عمق زمین  $T_\infty$  است و دمای سطح زمین از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} T(0, t) - T_\infty &= 0 & t < 0 \text{ به ازای} \\ T(0, t) - T_\infty &= (T_0 - T_\infty) \cos \omega t & t \geq 0 \text{ به ازای} \end{aligned} \quad (12.5.1)$$

در این جا  $\omega = 2\pi/t_{per}$ ، که در آن زمان یک چرخه کامل نوسان دما، مثلاً ۲۴ ساعت، است. حال می‌توان نشان داد که دما در هر عمق از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{T(y, t) - T_{\infty}}{T_s - T_{\infty}} = e^{-\sqrt{\omega/2\alpha y}} \cos(\omega t - \sqrt{\omega/2\alpha y}) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\bar{\omega}t} (\sin \sqrt{\bar{\omega}/\alpha y}) \frac{\bar{\omega}}{\omega^2 + \bar{\omega}^2} d\bar{\omega} \quad (۱۲.ج.۵-۲)$$

این معادله، مشابه معادلهٔ رسانش گرمای (۱.۱.۵۴) است که پاسخ توزیع سرعت در نزدیکی صفحهٔ نوسان‌گر را توصیف می‌کند. جملهٔ اول «حالت پایای تناوبی» را توصیف می‌کند و جملهٔ دوم توصیف‌کنندهٔ رفتار «گذرا» است. فرض کنید خواص خاک به شرح زیر است:  $k = 0.7 \times 27 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ،  $\rho = 1515 \text{ kg/m}^3$ ،  $C_p = 800 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$  و

(الف) فرض کنید گرمایش سطح زمین دقیقاً سینوسی است و دامنهٔ تغییرات دما در زیر سطح و در فاصلهٔ  $y$  را بیابید. برای انجام این کار فقط از جملهٔ حالت پایای تناوبی در معادلهٔ (۱۲.ج.۵-۲) استفاده کنید. نشان دهید که در عمق  $10 \text{ cm}$ ، این دامنه مقداری برابر  $0.176^\circ$  دارد.

(ب) اهمیت جملهٔ گذرا در معادلهٔ (۱۲.ج.۵-۲) را نشان دهید. اندازهٔ این سهم را تخمین بزنید.

(ج) سپس یک عبارت صوری اختیاری برای دمای سطحی روزانه در نظر بگیرید؛ سری فوریه به صورت زیر مفروض است:

$$\frac{T(\circ, t) - T_{\infty}}{T_s - T_{\infty}} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (۱۲.ج.۵-۳)$$

برای حل قسمت (الف) چند جمله از این سری به کار می‌رود؟

۱۲.ج.۶ انتقال گرما در فیلم ریزان غیرنیوتونی. مسئلهٔ ۱۲.ب.۴ را برای سیال پلیمری که با مدل قانون توانی معادلهٔ (۳.۵.۸) نسبتاً خوب توصیف می‌شود، تکرار کنید.

۱۲.ج.۷ گرمایش حالت ناپایای تیغه (روش تبدیل لاپلاس).

(الف) مثال ۱۲.۱-۲ را با استفاده از تبدیل لاپلاس دوباره حل کنید و نتیجهٔ ارائه شده با معادلهٔ (۱۲.۱-۳۱) را به دست آورید.

(ب) توجه کنید که سری معادلهٔ (۱۲.۱-۳۱) به سرعت و در زمان‌های کوتاه همگرا نمی‌شود. با وارون کردن تبدیل لاپلاس به روشی متفاوت با روش قسمت (الف)، سری متفاوتی به دست آورید که به سرعت و در زمان‌های کوتاه همگرا شود.<sup>۹</sup>

(ج) نشان دهید که جملهٔ اول سری قسمت (ب) به جواب «زمان تماس کوتاه» مثال ۱۲.۱-۱ مربوط است.

8. W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, and Y. I. Cho, eds., *Handbook of Heat Transfer*, 3rd edition, McGraw-Hill (1998), p. 2.68.

9. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959), pp. 308-310.

۲.۵۱۲ مسئله گراتس-نوسلت (جدول ۲.۵۱۲).

(الف) سیالی (نیوتونی یا نیوتونی تعمیم یافته) داخل لوله‌ای مدور به شعاع  $R$  جریان آرام دارد. در ناحیه ورودی  $z < 0$ ، دمای سیال یکنواخت و برابر  $T_1$  است. در ناحیه  $z > 0$ ، دمای جدار لوله در  $T_0$  ثابت نگه داشته می‌شود. فرض کنید همه خواص فیزیکی ثابت‌اند و آثار اتلاف ویسکوز و رسانش گرمای محوری قابل چشم‌پوشی است. از متغیرهای بدون بُعد زیر استفاده کنید:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad \Phi = \frac{v_z}{\langle v_x \rangle} \quad \xi = \frac{r}{R} \quad \zeta = \frac{\alpha z}{\langle v_x \rangle R^2} \quad (۱-۲.۵۱۲)$$

نشان دهید که توزیع دما در این سیستم چنین است:

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i(\xi) \exp(-\beta_i^2 \zeta) \quad (۲-۲.۵۱۲)$$

که در آن  $X_i$  و  $B_i$  توابع ویژه و مقادیر ویژه حاصل از حل معادله زیر است:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dX_i}{d\xi} \right) + \beta_i^2 \phi X_i = 0 \quad (۳-۲.۵۱۲)$$

و شرایط مرزی عبارت‌اند از: (مقدار منتهای)  $X = 0$  در  $\xi = 0$  و  $X = 1$  در  $\xi = 1$ . به علاوه نشان دهید که:

$$A_i = \frac{\int_0^1 X_i \phi \xi d\xi}{\int_0^1 X_i^2 \phi \xi d\xi} \quad (۴-۲.۵۱۲)$$

(ب) معادله (۳-۲.۵۱۲) را، با به دست آوردن جواب سری توانی برای  $X_i$ ، برای سیال نیوتونی حل کنید. با حل کردن معادله‌ای جبری، پایین‌ترین مقدار ویژه را محاسبه کنید. نتیجه حاصل را با نتیجه بیان شده در جدول ۲.۵۱۲ مقایسه کنید.

جدول ۲.۵۱۲ ویژه‌مقدارهای  $\beta_i^2$  برای مسئله گراتس-نوسلت، برای سیالات نیوتنی.

$i$	با محاسبه مستقیم	توسط روش WKB	توسط روش استودولا و ویانلو <sup>۵</sup>
۱	۳٫۶۷	۳٫۵۶	۳٫۶۶۱
۲	۲۲٫۳۰	۲۲٫۲۲	-
۳	۵۶٫۹۵	۵۶٫۸۸	-
۴	۱۰۷٫۶۶	۱۰۷٫۵۵	-

(الف) در این جا،  $\beta_i^2$  با  $\lambda_i^2$  در منبع زیر متناظر است:

W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, and Y. I. Cho, *Handbook of Heat Transfer*, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York, Table 5.3 on p. 510.

(ب) مقادیر برگرفته شده از

K. Yamagata, *Memoirs of the Faculty of Engineering*, Kyūshū University, Volume VIII, No. 6, Fukuoka, Japan (1940).

(ج) محاسبه شده با استفاده از معادله (۵-۲.۵۱۲).

(د) برای تابع آزمایشی خاص قسمت (د) مسئله.

(ج) از کاری که در قسمت (ب) برای محاسبه  $\beta_i^z$  انجام شد، می‌توان استنباط کرد که محاسبه مقادیرهای ویژه بالاتر نسبتاً دشوار و خسته‌کننده است. برای مقادیرهای ویژه بالاتر از دوم یا سوم، می‌توان از روش وانتسل-کرامرز-بولوتن (WKB)<sup>۱۰</sup> استفاده کرد؛ هرچه مقدار ویژه بالاتر باشد، روش WKB دقیق‌تر خواهد بود. درباره این روش مطالعه کنید و نشان دهید که برای سیال نیوتونی:

$$\beta_i^z = \frac{1}{\rho} \left( 4i - \frac{4}{3} \right)^2 \quad (5-2.12)$$

فرمول مشابهی برای مدل قانون توانی به‌دست آمده‌است.<sup>۱۱</sup>

(د) پایین‌ترین مقدار ویژه را با استفاده از روش استودولا و ویانلو به‌دست آورید. از معادله‌های (۷۱الف) و (۷۲ب)، در صفحه ۲۰۳ کتاب هیلدبرانده<sup>۱۲</sup> با  $\phi = 2(1 - \xi^2)$  برای جریان نیوتونی و  $X_1 = 1 - \xi^2$ ، به‌عنوان یک تابع آزمایشی ساده، اما مناسب، استفاده کنید. نشان دهید که این مقدار به‌سرعت به مقدار  $\beta_1^z = 3/661$  منتهی می‌شود.

۳.۵۱۲ مسئله گراتس-نوسلت (جواب مجانبی به‌ازای  $z$  بزرگ). توجه کنید که در حد  $z$  بسیار بزرگ، در معادله (۲-۲.۱۲) فقط به یک جمله ( $i = 1$ ) نیاز است. می‌خواهیم با استفاده از این نتیجه شارگما در جدار،  $q_0$ ، را به‌ازای  $z$  بزرگ محاسبه و نتیجه را به‌صورت زیر بیان کنیم:

$$q_0 = (T_b - T_0) \times (\text{تابعی از سیستم و خواص سیال}) \quad (1-3.12)$$

که در آن  $T_b$  «دمای توده سیال» است که در معادله (۳۳-۸.۱۰) تعریف شد.

(الف) ابتدا نشان دهید که:

$$q_0 = -\frac{k}{R} \frac{\partial \Theta / \partial \xi |_{\xi=1}}{\Theta_b} (T_b - T_0) \quad (2-3.12)$$

در این جا  $\Theta$  همان است که در مسئله ۲.۵۱۲ دیدیم و  $\Theta_b = (T_b - T_0) / (T_1 - T_0)$ .

(ب) نشان دهید که به‌ازای  $z$  بزرگ، معادله (۲-۳.۱۲) و معادله (۲-۲.۱۲) هر دو نتیجه زیر را به‌دست می‌دهند:

$$q_0 = \frac{k}{\rho R} \beta_1^z (T_b - T_0) \quad (3-3.12)$$

بنابراین به‌ازای  $z$  بزرگ، فقط کافی است که نخستین مقدار ویژه را بدانیم؛ نیازی به محاسبه تابع‌های ویژه نیست. این موضوع میزان سودمندی روش استودولا و ویانلو<sup>۱۲</sup> را برای محاسبه مقدار حدی شارگما نشان می‌دهد.

۴.۵۱۲ مسئله گراتس-نوسلت (جواب مجانبی به‌ازای  $z$  کوچک).

(الف) روش مثال ۲-۲.۱۲ را برای حل مسئله ۲.۵۱۲ به‌کار ببرید. سیالی نیوتونی در نظر بگیرید و از کمیت‌های بدون بُعد زیر استفاده کنید:

$$\Theta = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \quad \zeta = \frac{z}{R} \quad \sigma = \frac{R - r}{R} = \frac{s}{R} \quad N = \frac{4 \langle v_z \rangle R}{\alpha} \quad (1-4.12)$$

10. J. Heading, *An Introduction to Phase-Integral Method*, Wiley, New York (1962); J. R. Sellars, M. Tribus, and J. S. Klein, *Trans. ASME*, **78**, 441-448 (1956).

برای آشنایی با حل دیگر معادله (۳-۲.۱۲) نگاه کنید به

C.-R. Huang, M. Matlosz, W.-D. Pan, and W. Snyder, Jr., *AIChE Journal*, **30**, 833-834 (1984).

11. I. R. Whiteman and W. B. Drake, *Trans. ASME*, **80**, 728-732 (1958).

12. F. B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1963), §5.5.

نشان دهید که از روش ترکیب متغیرها نتیجه می‌شود:

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma(\frac{4}{3})} \int_{\eta}^{\infty} \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta} \quad (2-4.12)$$

$$\eta = (N\sigma^3/9\zeta)^{1/3} \text{ که در آن}$$

(ب) نشان دهید که شار جدار برابر است با:

$$q_r|_{r=R} = \frac{k}{R} \left[ \frac{1}{9^{1/3}\Gamma(\frac{4}{3})} \left( \text{Re Pr} \frac{D}{z} \right)^{1/3} \right] (T_1 - T_0) \quad (3-4.12)$$

با کمیت  $Gz = (w\hat{C}_p/kz)$   $(\text{Re Pr}D/z) = (4/\pi)(w\hat{C}_p/kz)$  مکرراً سروکار پیدا می‌کنیم؛ گروه  $Gz = (w\hat{C}_p/kz)$  عدد گراتس نامیده می‌شود. این نتیجه را با نتیجه ارائه شده توسط معادله (۳-۳.۱۲)، درخصوص وابستگی به گروه‌های بدون بُعد، مقایسه کنید.

(ج) چگونه می‌توان این نتایج را طوری نوشت که برای هر مدل نیوتونی تعمیم یافته معتبر باشند؟

۵.۱۲ مسئله گراتس برای جریان بین صفحه‌های موازی. مسئله‌های ۱۲، ۲، ۳، و ۴ را برای جریان بین صفحه‌های موازی (یا جریان در مجرای مستطیلی باریک) حل کنید.

۶.۱۲ مسئله شار گرمای ثابت جدار برای صفحه‌های موازی. روش‌های به کاررفته در بخش ۸.۱۰، مثال ۱۲-۱، و مثال ۱۲-۲ را در مورد جریان بین صفحه‌های موازی به کار ببندید.

۷.۱۲ جواب مجانبی به‌ازای  $z$  کوچک برای جریان آرام داخل لوله با شار گرمای ثابت. مراحل حذف شده بین معادله (۲۳-۲.۱۲) و معادله (۲۴-۲.۱۲) را انجام دهید. از قرار دادن عبارتی برای  $\psi$  در معادله (۲۳-۲.۱۲) نتیجه می‌شود:

$$\Theta = \sqrt[3]{9\lambda} \int_{\chi}^{\infty} \left[ \frac{3}{\Gamma(\frac{4}{3})} \int_{\bar{\chi}}^{\infty} \bar{\chi} \exp(-\bar{\chi}^3) d\bar{\chi} \right] d\bar{\chi} \quad (1-7.12)$$

چرا نمادهای  $\bar{\chi}$  و  $\bar{\bar{\chi}}$  را معرفی کردیم؟ سپس ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنید تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\Theta = \sqrt[3]{9\lambda} \int_{\chi}^{\infty} \left[ \frac{3}{\Gamma(\frac{4}{3})} \int_{\chi}^{\bar{\chi}} \bar{\chi} \exp(-\bar{\chi}^3) d\bar{\chi} \right] d\bar{\chi} \quad (2-7.12)$$

سپس انتگرال‌گیری را روی  $\bar{\chi}$  انجام دهید و نتیجه بگیرید:

$$\Theta(\eta, \lambda) = \frac{\sqrt[3]{9\lambda}}{\Gamma(\frac{4}{3})} \left[ \exp(-\chi^3) - 3\chi \left( \int_{\chi}^{\infty} \bar{\chi} \exp(-\bar{\chi}^3) d\bar{\chi} \right) \right] \quad (3-7.12)$$

پس از آن از تعریف‌های  $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$  و  $\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$  به‌عنوان توابع کامل و ناقص گاما استفاده کنید.<sup>۱۳</sup>

13. M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 9th Printing (1973), pp. 255 et seq.

۸.۵۱۲ انتقال گرمای رسانشی واداشته از صفحه تخت (لایه مرزی گرمایی تا ورای لایه مرزی اندازه حرکت امتداد دارد). نشان دهید که نتیجه نظیر معادله (۴.۱۲-۱۴) به ازای  $\Delta \geq 1$  عبارت است از:<sup>۱۴</sup>

$$\frac{3}{10} \Delta^2 - \frac{3}{10} \Delta + \frac{2}{15} - \frac{3}{140} \frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{180} \frac{1}{\Delta^2} = \frac{37}{315} \frac{1}{Pr} \quad (۱-۸.۵۱۲)$$



## فصل ۱۳

### توزیع دما در جریان متلاطم

- ۱.۱۳ معادله‌های هموارشدهٔ زمانی تغییر برای جریان تراکم‌ناپذیر غیرهم‌دما
- ۲.۱۳ توزیع دمای هموارشدهٔ زمانی در نزدیکی جدار
- ۳.۱۳ روابط تجربی برای شار گرمای تلاطمی
- ۴.۱۳<sup>۰</sup> توزیع دما برای جریان متلاطم داخل لوله
- ۵.۱۳<sup>۰</sup> توزیع دما برای جریان متلاطم در جت
- ۶.۱۳<sup>۰</sup> تحلیل فوریه از انتقال انرژی در جریان داخل لوله به‌ازای اعداد پرانتل بزرگ

در فصل‌های ۱۰ تا ۱۲ نحوهٔ به‌دست آوردن توزیع دما در جامدات و سیالات درحین حرکت آرام را شرح دادیم. این کار شامل حل معادله‌های تغییر با شرایط مرزی و اولیهٔ مناسب بود.

اکنون به‌سراغ مسئلهٔ یافتن توزیع دما در جریان متلاطم می‌رویم. این بحث تقریباً مشابه بحثی است که در فصل ۵ مطرح شد. کار را با هموارسازی زمانی معادله‌های تغییر شروع می‌کنیم. در معادلهٔ انرژی هموارشدهٔ زمانی، یک جملهٔ شار گرمای تلاطمی  $\bar{q}^{(t)}$  پدید می‌آید که برحسب روابط همبستگی سرعت و نوسانات دما بیان می‌شود. چندین رابطهٔ تجربی نسبتاً سودمند برای  $\bar{q}^{(t)}$  وجود دارد که به‌کمک آن‌ها می‌توان توزیع دمای هموارشدهٔ زمانی را در تلاطم جدار و آزاد پیش‌بینی کرد. برای نشان دادن این روش از انتقال گرما در جریان داخل لوله استفاده می‌کنیم. آشکارترین تأثیر تلاطم روی انتقال گرما، انتقال تقویت‌شده در امتداد عمود بر جریان اصلی است. اگر گرما به سیالی تریق شود که درجهٔ  $z$  جریان آرام دارد، حرکت گرما درجهت‌های  $x$  و  $y$  فقط از طریق رسانش انجام می‌شود و بنابراین بسیار آهسته است. از طرف دیگر، اگر جریان متلاطم باشد، گرما با سرعت بسیار زیاد درجهت‌های  $x$  و  $y$  «پخش می‌شود». این پخش سریع گرما ویژگی مشخصهٔ جریان متلاطم است. در این بخش فرایند اختلاط را، برای جریان داخل لوله و در جت‌های مدور، تا حدودی به‌تفصیل بررسی می‌کنیم.

اگرچه متداول این است که انتقال گرمای تلاطمی از طریق معادلهٔ انرژی هموارشدهٔ زمانی بررسی شود، امکان تحلیل شار گرما در جدار، با استفاده از روش تبدیل فوریه بدون هموارسازی زمانی نیز وجود دارد. این کار را به بخش آخر موکول می‌کنیم.

۱.۱۳ معادله‌های هموارشدهٔ زمانی تغییر برای جریان تراکم‌ناپذیر غیرهم‌دما

در بخش ۲.۵ مفهوم کمیت‌های هموارشدهٔ زمانی و نوسانات تلاطمی را معرفی کردیم. در این فصل عمدتاً با توزیع دما سروکار داریم. دمای هموارشدهٔ زمانی  $\bar{T}$  و نوسان دمای  $T'$  را معرفی می‌کنیم و مشابه معادلهٔ (۱-۲.۵) می‌نویسیم:

$$T = \bar{T} + T' \quad (1-1.13)$$

بدیهی است که مقدار متوسط  $T'$  صفر می‌شود، بنابراین  $\bar{T}' = 0$ ، اما کمیت‌هایی مانند  $\overline{v'_x T'}$ ،  $\overline{v'_y T'}$  و  $\overline{v'_z T'}$  صفر نخواهند شد، زیرا در هر نقطه بین نوسانات دما و سرعت «رابطهٔ همبستگی» وجود دارد.

برای سیال خالص غیرهم‌دما به سه معادلهٔ تغییر نیاز داریم و در این جا می‌خواهیم صورت‌های هموارشدهٔ زمانی آن‌ها را شرح دهیم. معادله‌های هموارشدهٔ زمانی پیوستگی و حرکت، برای سیالی با چگالی و ویسکوزیتهٔ ثابت به صورت معادله‌های (۱-۲.۵) و (۱۲-۲.۵) ارائه شدند و در این جا نیازی به تکرار آن‌ها نیست. معادلهٔ (۵-۲.۱۱) برای سیالی با  $\mu$ ،  $\rho$ ،  $\hat{C}_p$  و  $k$  ثابت، وقتی با استفاده از معادلهٔ (۴-۵.۳) به صورت  $\partial/\partial t$  نوشته شود و قانون نیوتون و قانون فوریه نیز به‌کار گرفته شود، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{C}_p T = & - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho \hat{C}_p v_x T + \frac{\partial}{\partial y} \rho \hat{C}_p v_y T + \frac{\partial}{\partial z} \rho \hat{C}_p v_z T \right) + k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\ & + \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (2-1.13)$$

که در آن فقط چند جملهٔ نمونه در عبارت اتلاف ویسکوز  $\mu \Phi_v = (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  - نوشته شده‌است (برای اطلاع از عبارت کامل نگاه کنید به معادلهٔ (ب-۱-۷)).

در معادلهٔ (۲-۱.۱۳)،  $T = \bar{T} + T'$  را با  $v_x$ ،  $T = \bar{T} + T'$  را با  $v_x$  و غیره جایگزین می‌کنیم. سپس معادلهٔ هموارسازی زمانی می‌شود تا نتیجهٔ زیر به‌دست آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{C}_p \bar{T} = & - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho \hat{C}_p \bar{v}_x \bar{T} + \frac{\partial}{\partial y} \rho \hat{C}_p \bar{v}_y \bar{T} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \hat{C}_p \bar{v}_z \bar{T} \right) \\ & - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho \hat{C}_p \overline{v'_x T'} + \frac{\partial}{\partial y} \rho \hat{C}_p \overline{v'_y T'} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \hat{C}_p \overline{v'_z T'} \right) \\ & + k \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right) \\ & + \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) + \dots \right] \\ & + \mu \left[ 2 \overline{\left( \frac{\partial v'_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v'_x}{\partial x} \right)} + \overline{\left( \frac{\partial v'_x}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v'_x}{\partial y} \right)} + 2 \overline{\left( \frac{\partial v'_x}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v'_y}{\partial x} \right)} + \dots \right] \end{aligned} \quad (3-1.13)$$

مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ قبل نشان می‌دهد که معادلهٔ هموارشدهٔ زمانی همان صورت معادلهٔ اصلی را دارد، با این تفاوت که جمله‌هایی در آن ظاهر می‌شوند که زیر آن‌ها نقطه‌چین شده‌است و به نوسانات تلاطمی مربوط‌اند. بنابراین

تعریف شار گرمای تلاطمی  $\bar{q}^{(t)}$  با مؤلفه‌های:

$$\bar{q}_x^{(t)} = \rho \hat{C}_p \overline{v'_x T'} \quad \bar{q}_y^{(t)} = \rho \hat{C}_p \overline{v'_y T'} \quad \bar{q}_z^{(t)} = \rho \hat{C}_p \overline{v'_z T'} \quad (۴-۱.۱۳)$$

و تابع اتلاف انرژی تلاطمی  $\bar{\Phi}_v^{(t)}$  نتیجه می‌شود:

$$\bar{\Phi}_v^{(t)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \overline{\left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)} + \overline{\left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)} \right) \quad (۵-۱.۱۳)$$

به شباهت بین مؤلفه‌های  $\bar{q}^{(t)}$  در معادله (۴-۱.۱۳) و مؤلفه‌های  $\bar{\tau}^{(t)}$  در معادله (۸-۲.۵) باید توجه کرد. در معادله (۵-۱.۱۳)،  $v'_x, v'_y, v'_z$  با  $v'_x, v'_y, v'_z$  مترادف‌اند و  $x_1, x_2, x_3$  همان مفهوم  $x, y, z$  را دارند.

برای جمع‌بندی، هر سه معادلهٔ هموارشدهٔ زمانی تغییر برای جریان متلاطم سیال‌های خالص با  $\mu, \rho, \hat{C}_p$  و  $k$  را به صورت  $D/Dt$ ، باهم می‌نویسیم (دو معادلهٔ نخست را قبلاً به صورت معادله‌های (۱۰-۲.۵) و (۱۲-۲.۵) نوشته بودیم):

$$(\nabla \cdot \bar{v}) = 0 \quad (۶-۱.۱۳) \quad \text{پیوستگی:}$$

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla \bar{p} - [\nabla \cdot (\bar{\tau}^{(v)} + \bar{\tau}^{(t)})] + \rho g \quad (۷-۱.۱۳) \quad \text{حرکت:}$$

$$\rho \hat{C}_p \frac{D\bar{T}}{Dt} = -(\nabla \cdot (\bar{q}^{(v)} + \bar{q}^{(t)})) + \mu (\bar{\Phi}_v^{(v)} + \bar{\Phi}_v^{(t)}) \quad (۸-۱.۱۳) \quad \text{انرژی:}$$

باتوجه به این معادله‌ها درمی‌یابیم که  $D/Dt = \partial/\partial t + \bar{v} \cdot \nabla$  در این جا  $\bar{q}^{(v)}$  و  $\bar{q}^{(t)}$  تابع اتلاف ویسکوز معادله (ب.۷-۱) است که در آن همهٔ  $v_i$ ‌ها جای خود را به  $\bar{v}_i$  داده‌اند.

در تشریح مسئله‌های جریان گرمای تلاطمی، متداول این است که جمله‌های اتلاف ویسکوز را حذف کنند. بنابراین می‌توان مسئلهٔ انتقال گرمای تلاطمی را همانند مسئلهٔ جریان آرام حل کرد، با این تفاوت که  $\tau$  و  $q$ ، به ترتیب، جای خود را به  $\bar{q}^{(v)} + \bar{q}^{(t)}$  و  $\bar{\tau}^{(v)} + \bar{\tau}^{(t)}$  می‌دهند و در جمله‌های باقی‌مانده از  $\bar{p}, \bar{v}$ ، و  $\bar{T}$  هموارشدهٔ زمانی استفاده می‌شود.

## ۲.۱۳ توزیع دمای هموارشدهٔ زمانی در نزدیکی جدار<sup>۱</sup>

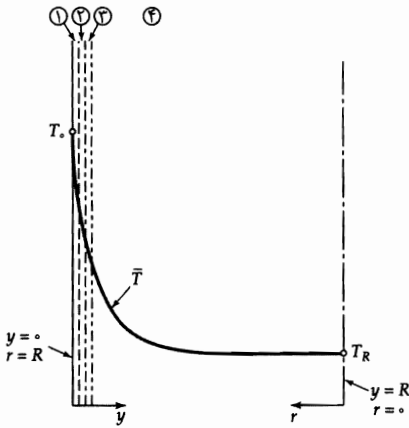
قبل از ارائهٔ روابط تجربی برای  $\bar{q}^{(t)}$  در بخش بعد، بحث کوتاهی را در مورد بعضی از نتایجی مطرح می‌کنیم که به هیچ رابطهٔ تجربی وابسته نیستند.

جریان تلاطمی در طول جداری تخت را، مطابق شکل ۲-۱۳، در نظر می‌گیریم و دربارهٔ دما در زیرلایهٔ لخت تحقیق می‌کنیم. روش پی‌ریزی معادله (۱-۳.۵) را الگو قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم شار گرمای ورودی به سیال در  $y = 0$  برابر  $q_0 = \bar{q}_y|_{y=0}$  باشد و حدس می‌زنیم که شار گرما در زیرلایهٔ لخت با شار گرما در جدار تفاوت زیادی نداشته باشد. می‌خواهیم  $q_0$  را به گرادین دمای هموارشدهٔ زمانی در زیرلایهٔ لخت مربوط کنیم. چون انتقال در این ناحیه بیش‌تر از طریق همرفت تلاطمی انجام می‌شود، ویسکوزیتهٔ  $\mu$  و رسانندگی گرمایی  $k$  نقش مهمی بازی نخواهند کرد. بنابراین تنها پارامترهایی که  $d\bar{T}/dy$  می‌تواند به آن‌ها وابسته باشد، عبارت‌اند از:  $q_0, \rho, \hat{C}_p, v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ ، و  $y$ . به علاوه باید از این نکته استفاده کرد که خطی بودن معادلهٔ انرژی ایجاب می‌کند که  $d\bar{T}/dy$  با  $q_0$  متناسب باشد.

1. L. Landau & E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon Press, New York (1987), §54.

تنها ترکیبی که این شرایط را برآورده می‌کند، عبارت است از:

$$\frac{d\bar{T}}{dy} = \frac{\beta q_0}{\kappa \rho \hat{C}_p v_* y} \quad (۱-۲.۱۳)$$



شکل ۱-۲.۱۳ توزیع دما در لوله با جریان متلاطم. نواحی عبارت‌اند از: (۱) زیرلایه ویسکوز، (۲) لایه میانگیر، (۳) زیرلایه لخت، و (۴) جریان متلاطم اصلی.

که در آن  $\kappa$  ثابت بدون بُعد در معادله (۱-۳.۵) و  $\beta$  ثابتی اضافی است (که معلوم می‌شود عدد پرانتل تلاطمی است، یعنی  $(Pr)^{(t)} = \bar{v}^{(t)}/\alpha^{(t)}$ ).

با انتگرال‌گیری از معادله (۱-۲.۱۳) نتیجه می‌شود:

$$T_0 - \bar{T} = \frac{\beta q_0}{\kappa \rho \hat{C}_p v_*} \ln y + C \quad (۲-۲.۱۳)$$

که در آن  $T_0$  دمای جدار و  $C$  ثابت انتگرال‌گیری است. این ثابت را با جورسازی عبارت لگاریتمی با عبارت مربوط به  $\bar{T}(y)$  که در محل اتصال با زیرلایه ویسکوز برقرار است، به دست می‌آورند. عبارت اخیر شامل هردو پارامتر  $k$  و  $\mu$  خواهد بود؛ چون  $C$  ضرورتاً حاوی  $\mu$  و  $k$  است، بنابراین شامل گروه بدون بُعد  $Pr = \hat{C}_p \mu / k$  خواهد بود. به علاوه، اگر مختص بدون بُعد  $y v_* / \nu$  را معرفی کنیم، می‌توانیم معادله (۲-۲.۱۳) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$T_0 - \bar{T} = \frac{\beta q_0}{\kappa \rho \hat{C}_p v_*} \left[ \ln \left( \frac{y v_*}{\nu} \right) + f(Pr) \right] \quad \text{به‌ازای } \frac{y v_*}{\nu} > 1 \quad (۳-۲.۱۳)$$

که در آن  $f(Pr)$  تابع معرف مقاومت گرمایی بین جدار و زیرلایه لخت است. لاندائو و لیف‌شیتس (نگاه کنید به منبع ۱ در صفحه ۴۰۹) با استفاده از شناسه طول اختلاط (نگاه کنید به معادله (۳-۳.۱۳))، تخمین زدند که به‌ازای عددهای پرانتل بزرگ،  $f(Pr) = Pr^{2/4}$  (مقدار ثابت)؛ اما مثال ۱-۳.۱۳ به‌طور ضمنی نشان می‌دهد که تابع  $f(Pr) = Pr^{2/3}$  (مقدار ثابت) تخمین بهتری است. در نظر داشته‌باشید که می‌توان انتظار داشت معادله (۳-۲.۱۳) فقط در زیرلایه لخت معتبر باشد و نباید در مجاورت جدار از آن استفاده کرد.

### ۳.۱۳ عبارتهای تجربی برای شار گرمای تلاطمی

در بخش ۱.۱۳ دیدیم که هموارسازی زمانی معادله انرژی سبب پیدایش شار گرمای تلاطمی  $\bar{q}^{(t)}$  می‌شود. به‌منظور حل معادله انرژی برای یافتن توزیع دمای هموارشده زمانی، متداول است که رابطه بین  $\bar{q}^{(t)}$  و گرادیان دمای هموارشده زمانی حدس زده شود. در این‌جا دو تا از متداول‌ترین عبارتهای تجربی را مطرح می‌کنیم؛ در نوشته‌های مربوط به انتقال گرما می‌توانید روابط پیش‌تری را پیدا کنید.

### رسانندگی گرمایی گردابی

به قیاس با قانون رسانش گرمای فوریه، می‌توان نوشت:

$$\bar{q}_y^{(t)} = -k^{(t)} \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (۱-۳.۱۳)$$

که در آن کمیت  $k^{(t)}$  رسانندگی گرمایی تلاطمی یا رسانندگی گرمایی گردابی نامیده می‌شود. این کمیت خاصیت فیزیکی سیال نیست، اما به مکان، جهت، و ماهیت جریان متلاطم بستگی دارد. ویسکوزیته سینماتیکی گردابی  $\nu^{(t)} = \mu^{(t)} / \rho$  و ضریب نفوذ گرمایی گردابی  $\alpha^{(t)} = k^{(t)} / \rho \hat{C}_p$  هم‌بعدند. نسبت آن‌ها گروه بدون بُعد زیر است:

$$\text{Pr}^{(t)} = \frac{\nu^{(t)}}{\alpha^{(t)}} \quad (۲-۳.۱۳)$$

که عدد پرانتل تلاطمی نامیده می‌شود. این کمیت بدون بُعد از مرتبه واحد است و مقادیر ارائه شده در متون از ۰٫۵ تا ۱٫۰ تغییر می‌کند. برای جریان گاز در مجراها،  $\text{Pr}^{(t)}$  از ۰٫۷ تا ۰٫۹ تغییر می‌کند (برای لوله‌های مدور مقدار ۰٫۸۵ توصیه شده است)<sup>۱</sup>، اما برای جریان در جت‌ها و دنباله‌ها مقدار مناسب به ۰٫۵ نزدیک‌تر است. این فرض که  $\text{Pr}^{(t)} = ۱$  قیاس رینولدز نامیده می‌شود.

### عبارت طول اختلاط پرانتل و تیلر

طبق نظریه طول اختلاط پرانتل، در جریان متلاطم، اندازه حرکت و انرژی با مکانیسم‌های یکسان انتقال می‌یابند. بنابراین، به قیاس معادله (۴-۴.۵)، می‌توان نوشت:

$$\bar{q}_y^{(t)} = -\rho \hat{C}_p l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (۳-۳.۱۳)$$

که در آن  $l$  طول اختلاط پرانتل است که با معادله (۴-۴.۵) معرفی شد. این عبارت پیش‌بینی می‌کند که  $\text{Pr}^{(t)} = ۱$  از نظریه انتقال گردشاری تیلر<sup>۲</sup> نتیجه می‌شود که  $\text{Pr}^{(t)} = \frac{1}{4}$ .

### مثال ۳-۱۳

رابطه‌ای تقریبی برای شارگرمای جداری در جریان متلاطم داخل لوله با استفاده از قیاس رینولدز ( $\nu^{(t)} = \alpha^{(t)}$ )، همراه با معادله (۲-۴.۵) برای ویسکوزیته گردابی، شارگرمای جدار  $q_w$  را برای جریان متلاطم داخل لوله‌ای به قطر  $D = ۲R$  تخمین بزنید. نتیجه را برحسب نیروی رانش اختلاف دما  $T_w - \bar{T}_R$  بیان کنید که در آن  $T_w$  دما در جدار ( $y = 0$ ) و  $\bar{T}_R$  دمای هموارشده زمانی در محور لوله ( $y = R$ ) است.

حل

شارگرمای شعاعی هموارشده زمانی در لوله برابر است با جمع  $\bar{q}_r^{(v)}$  و  $\bar{q}_r^{(t)}$ :

$$\bar{q}_r = -(k + k^{(t)}) \frac{d\bar{T}}{dr} = -(1 + \frac{\alpha^{(t)}}{\alpha}) k \frac{d\bar{T}}{dr} = +(1 + \frac{\nu^{(t)}}{\alpha}) k \frac{d\bar{T}}{dy} \quad (۴-۳.۱۳)$$

1. W. M. Kays and M. E. Crawford, *Convective Heat and Mass Transfer*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1993), pp. 259-266.

2. G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A135**, 685-702 (1932); *Phil. Trans.*, **A215**, 1-26 (1915).

در این جا از معادله (۱۳-۳-۱) و قیاس رینولدز استفاده کرده‌ایم و مختص  $y$  را به‌کار برده‌ایم که فاصله از جدار است. اکنون از رابطه تجربی معادله (۲-۴-۵) استفاده می‌کنیم که در زیرلایه و بسکوز مجاور جدار صادق است:

$$\bar{q}_y = - \left[ 1 + \text{Pr} \left( \frac{yv_*}{14.5\nu} \right)^2 \right] k \frac{dT}{dy} \quad \text{به‌ازای } \frac{yv_*}{\nu} < 5 \quad (5-3-13)$$

و در آن از  $\bar{q}_r = -\bar{q}_y$  استفاده شده‌است. اگر اکنون شارگرما  $\bar{q}_y$  در معادله (۱۳-۳-۵) را با مقدار آن در جدار، یعنی  $q_0$ ، تقریب بزنیم، پس از انتگرال‌گیری از  $y = 0$  تا  $y = R$  نتیجه می‌شود:

$$q_0 \int_0^R \frac{dy}{1 + \text{Pr}(yv_*/14.5\nu)^2} = k(T_0 - \bar{T}_R) \quad (6-3-13)$$

به‌ازای اعداد بسیار بزرگ پرانتل، حد بالایی  $R$  در انتگرال را می‌توان با  $\infty$  جایگزین کرد، زیرا با افزایش  $y$ ، انتگرال ده به‌سرعت کاهش پیدا می‌کند. سپس، وقتی انتگرال‌گیری در سمت چپ انجام شود و نتیجه به‌صورت بدون بُعد نوشته شود، داریم:

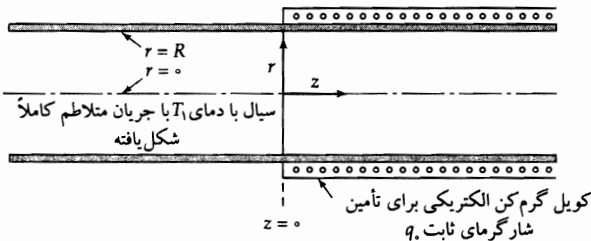
$$\frac{q_0 D}{k(T_0 - \bar{T}_R)} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi(14.5)} \left( \frac{v_*}{\langle v_z \rangle} \right) \text{Re Pr}^{1/3} = \frac{1}{17.5} \sqrt{\frac{f}{2}} \text{Re Pr}^{1/3} \quad (7-3-13)$$

که در آن از معادله (۱۳-۴-۱۶ الف) برای حذف  $v_*$  به‌نفع ضریب اصطکاک، استفاده شده‌است.

رابطه‌ای که به‌این ترتیب به‌دست آمد، صرفاً رابطه‌ای تقریبی است. تغییر دمای توده سیال را، درحین حرکت محوری در لوله، و تغییر شارگرما در سرتاسر لوله را به‌حساب نیاورده‌ایم. به‌علاوه، نتیجه به عدد‌های پرانتل بسیار بالای  $\text{Pr}$  محدود است، زیرا دامنه انتگرال‌گیری تا  $y = \infty$  می‌رسد. در بخش بعد رابطه دیگری به‌دست می‌آوریم که این فرض‌ها در آن به‌کار نرفته‌است. اما خواهیم دید که وقتی عدد پرانتل بزرگ باشد، معادله (۱۳-۴-۲) به معادله (۱۳-۳-۷) ساده می‌شود، اما با یک ثابت عددی متفاوت.

### ۴.۱۳ توزیع دما برای جریان متلاطم داخل لوله

در بخش ۸.۱۰ نحوه تعیین رفتار مجانبی توزیع دما را، به‌ازای  $z$  بزرگ در جریان آرام سیال داخل لوله مدور نشان دادیم. سیال با دمای ورودی  $T_1$  وارد لوله‌ای به‌شعاع  $R$  می‌شود. به‌ازای  $z > 0$ ، سیال گرم می‌شود، زیرا شارگرمای شعاعی یکنواخت  $q_0$  در جدار لوله برقرار است (نگاه کنید به شکل ۱۳-۴-۱).



شکل ۱۳-۴-۱ سیستم مورد استفاده برای گرم کردن یک مایع با جریان متلاطم کاملاً شکل یافته و شارگرمای ثابت، به‌ازای  $z > 0$ .

کار را از معادله انرژی، معادله (۱۳-۴-۱۸)، به‌صورت نوشته شده در مختصات استوانه‌ای، شروع می‌کنیم:

$$\rho \hat{C}_p \bar{v}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(\bar{q}_r^{(v)} + \bar{q}_r^{(t)})) \quad (14-4-13)$$

سپس عبارت مربوط به شار گرمای شعاعی را از معادله (۳-۴.۱۳) قرار می‌دهیم و داریم:

$$\bar{v}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r(\alpha + \alpha^{(t)}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) \quad (۲-۴.۱۳)$$

این معادله را باید با شرایط مرزی زیر حل کرد:

(۳-۴.۱۳) شرط مرزی ۱: در  $r = 0$ ، مقدار متناهی  $\bar{T}$ .

(۴-۴.۱۳) شرط مرزی ۲: در  $r = R$ ،  $q = k \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + c$  (مقداری ثابت).

(۵-۴.۱۳) شرط مرزی ۳: در  $z = 0$ ،  $\bar{T} = T_1$ .

حال از همان متغیرهای بدون بعدی استفاده می‌کنیم که قبلاً در معادله‌های (۱۶-۸.۱۰) تا (۱۸-۸.۱۰) داده شد (در تعریف دمای بدون بعد از  $\bar{T}$  به جای  $T$  استفاده می‌کنیم). بنابراین معادله (۲-۴.۱۳)، به صورت بدون بعد، چنین نوشته می‌شود:

$$\phi \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \left( 1 + \frac{\alpha^{(t)}}{\alpha} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) \quad (۶-۴.۱۳)$$

که در آن  $\phi(\xi) = \bar{v}_z / v_{\max}$  توزیع سرعت تلاطمی بدون بعد است. این معادله را باید با شرایط مرزی بدون بعد حل کرد:

(۷-۴.۱۳) شرط مرزی ۱: در  $\xi = 0$ ، مقدار متناهی  $\Theta$ .

(۸-۴.۱۳) شرط مرزی ۲: در  $\xi = 1$ ، داریم  $1 = \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + c$ .

(۹-۴.۱۳) شرط مرزی ۳: در  $\zeta = 0$ ، داریم  $\Theta = 0$ .

جواب کامل این مسئله به دست آمده است<sup>۱</sup>، اما در این جا به جواب به ازای  $z$  بزرگ قناعت می‌کنیم. کار را با این فرض آغاز می‌کنیم که جوابی مجانبی به صورت معادله (۲۳-۸.۱۰) وجود دارد:

$$\Theta(\xi, \zeta) = C_0 \zeta + \Psi(\xi) \quad (۱۰-۴.۱۳)$$

که همراه با شرایط مرزی ۱ و ۲ و شرط ۴ در معادله (۲۴-۸.۱۰) (که در آن  $T$  و  $v_z = v_{\max}(1 - \xi^2)$  و  $\bar{T}$  با  $\bar{T}$  و  $v_z = v_{\max} \phi(\xi)$  جایگزین شده است) باید در معادله دیفرانسیل صدق کند. معادله حاصل برای  $\Psi$  چنین است:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \left( 1 + \frac{\alpha^{(t)}}{\alpha} \right) \frac{d\Psi}{d\xi} \right) = C_0 \phi \quad (۱۱-۴.۱۳)$$

با دو بار انتگرال‌گیری از این معادله و سپس تشکیل تابع  $\Theta$  با استفاده از معادله (۱۰-۴.۱۳)، نتیجه می‌شود:

$$\Theta = C_0 \zeta + C_1 \int_0^\xi \frac{I(\bar{\xi})}{\bar{\xi} [1 + \alpha^{(t)}/\alpha]} + d\bar{\xi} + C_2 \int_0^\xi \frac{1}{\bar{\xi} [1 + \alpha^{(t)}/\alpha]} d\bar{\xi} + C_3 \quad (۱۲-۴.۱۳)$$

که در آن درمی‌یابیم که  $\alpha^{(t)}$  تابع  $\bar{\xi}$  است و  $I(\bar{\xi})$  صورتی اختصاری برای انتگرال زیر است:

$$I(\bar{\xi}) = \int_0^{\bar{\xi}} \phi \bar{\xi} d\bar{\xi} \quad (۱۳-۴.۱۳)$$

ثابت انتگرال‌گیری  $C_1$  را برابر صفر می‌گیریم تا شرط مرزی ۱ برقرار شود. ثابت  $C$  با استفاده از شرط مرزی ۲ به‌دست می‌آید و داریم:

$$C_0 = \left( \int_0^1 \phi \xi d\xi \right)^{-1} = [I(1)]^{-1} \quad (14-4.13)$$

در صورت نیاز می‌توانیم ثابت باقی‌مانده،  $C_2$ ، را از شرط ۴ به‌دست بیاوریم، اما در این‌جا نیازی به آن نداریم (نگاه کنید به مسئله ۱۳.۵).

سپس عبارتی برای اختلاف دمای بدون بُعد  $\Theta_0 - \Theta_b$ ، «نیروی رانش» انتقال گرما در جدار لوله، به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \Theta_0 - \Theta_b &= C_0 \int_0^1 \frac{I(\xi)}{\xi[1 + (\alpha^{(t)}/\alpha)]} d\xi - \frac{C_0}{I(1)} \int_0^1 \phi \xi \left[ \int_0^\xi \frac{I(\bar{\xi})}{\bar{\xi}[1 + (\alpha^{(t)}/\alpha)]} d\bar{\xi} \right] d\xi \\ &= C_0 \int_0^1 \frac{I(\xi)}{\xi[1 + (\alpha^{(t)}/\alpha)]} d\xi - \frac{C_0}{I(1)} \int_0^1 \frac{I(\bar{\xi})}{\bar{\xi}[1 + (\alpha^{(t)}/\alpha)]} \left[ \int_{\bar{\xi}}^1 \phi \xi d\xi \right] d\bar{\xi} \quad (15-4.13) \end{aligned}$$

در سطر دوم، ترتیب انتگرال‌گیری انتگرال دوگانه محفوظ نگه داشته شده‌است. انتگرال داخلی جمله دوم سمت راست برابر است با:  $I(\bar{\xi}) - I(\xi)$ ، و بخش حاوی  $I(1)$ ، جمله اول معادله (۱۵-۴.۱۳) را دقیقاً خنثی می‌کند. بنابراین وقتی از معادله (۱۴-۴.۱۳) استفاده می‌شود، نتیجه می‌گیریم:

$$\Theta_0 - \Theta_b = \int_0^1 \frac{[I(\xi)/I(1)]^2}{\xi[1 + (\alpha^{(t)}/\alpha)]} d\xi \quad (16-4.13)$$

اما کمیت  $I(1)$  که در معادله (۱۶-۴.۱۳) ظاهر می‌شود، تعبیر ساده‌ای دارد:

$$I(1) = \int_0^1 \phi \xi d\xi = \left( \int_0^R \bar{v}_z r dr \right) \frac{1}{\bar{v}_{z,\max} R^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle \bar{v}_z \rangle}{\bar{v}_{z,\max}} \quad (17-4.13)$$

سرانجام، می‌خواهیم شار گرمای بدون بُعد جدار را به‌دست آوریم:

$$\frac{q \cdot D}{k(T_0 - T_b)} = \frac{2}{\Theta_0 - \Theta_b} \quad (18-4.13)$$

که عکس آن چنین است:<sup>۲</sup>

$$\frac{k(T_0 - T_b)}{q \cdot D} = 2 \left( \frac{\bar{v}_{z,\max}}{\langle \bar{v}_z \rangle} \right)^2 \int_0^1 \frac{[I(\xi)]^2}{\xi[1 + (\nu^{(t)}/\nu)(Pr/Pr^{(t)})]} d\xi \quad (19-4.13)$$

برای استفاده از این نتیجه، باید عبارتی برای توزیع سرعت هموارشده زمانی  $\bar{v}_z$  (که در  $I(\xi)$  ظاهر می‌شود)، ویسکوزیته سینماتیکی تلاطمی  $\nu^{(t)}$  به‌صورت تابعی از مکان، به‌دست آورد و صورت عدد پرانتل تلاطمی  $Pr^{(t)}$  را نیز حدس زد.

۲. معادله (۱۹-۴.۱۳) نخستین بار توسط R. N. Lyon, *Chem. Eng. Prog.*, 47, 75-79 (1950) در مقاله‌ای درباره انتقال گرما در فلز مذاب به‌دست آمد. سمت چپ معادله (۱۹-۴.۱۳) عکس عدد نوسلت،  $Nu = hD/k$  است که ضریب انتقال گرمای بدون بُعد است. این نام‌گذاری در فصل بعد شرح داده می‌شود.

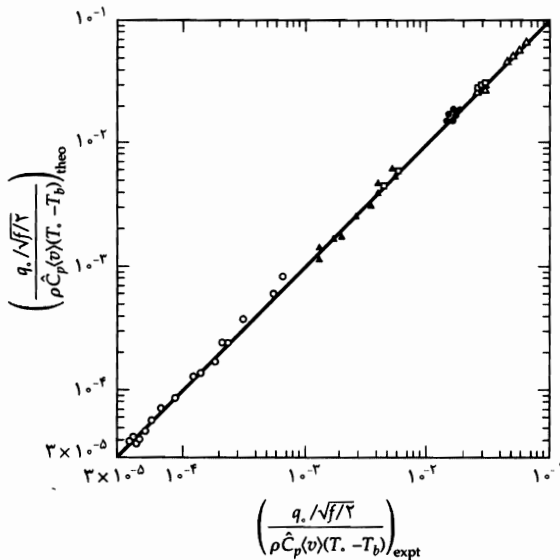


سندل، هنا، و مازت<sup>۳</sup> محاسبات گسترده‌ای براساس معادله (۱۹-۴.۱۳) انجام دادند. این مؤلفان عدد پرانتل تلاطمی را واحد گرفتند. آن‌ها ناحیه انتقال‌گیری را به دو بخش تقسیم کردند، یکی در نزدیکی جدار و دیگری برای هسته متلاطم. در «ناحیه جدار» از صورت اصلاح‌شده معادله وان درایست، یعنی معادله (۷-۴.۵) برای طول اختلاط استفاده کردند، و در «ناحیه هسته» توزیع سرعت لگاریتمی را به‌کار گرفتند. نتیجه نهایی<sup>۳</sup> آن‌ها به صورت زیر است:

$$\frac{q \cdot D}{k(T_s - T_b)} = \frac{\text{Re Pr} \sqrt{f/2}}{12,48 \text{Pr}^{1/2} - 7,853 \text{Pr}^{1/2} + 3,613 \ln \text{Pr} + 5,78 + 2,778 \ln(\frac{1}{f} \text{Re} \sqrt{f/8})} \quad (20-4.13)$$

برای به‌دست آوردن این نتیجه، از معادله (۴-۱.۶) استفاده شده است.

معادله (۲۰-۴.۱۳) با داده‌های موجود در مورد انتقال گرما (و انتقال جرم)، در گستره  $0,73 < \text{Pr} < 590$ ، بسته به مجموعه داده‌های بررسی‌شده، با خطای ۳/۶ تا ۸/۱٪ توافق دارد. عبارت نظیر برای انتقال جرم، حاوی  $Sc = \mu/\rho D_{AB}$  به جای  $\text{Pr}$ ، با داده‌های تجربی انتقال جرم در گستره  $452 < Sc < 97600$ ، با خطای ۸٪ توافق دارد. توافق نظریه با داده‌های تجربی انتقال جرم، که در شکل ۲-۴.۱۳ نشان داده شده، نسبتاً متقاعدکننده است.



شکل ۲-۴.۱۳ مقایسه عبارت معادله (۲۰-۴.۱۳) برای شار گرمای جدار در جریان متلاطم کاملاً شکل‌یافته با داده‌های تجربی. داده‌های هاریوت و هامیلتون به آزمایش انتقال جرم نظیر مربوط اند که معادله (۲۰-۴.۱۳) هم درباره آن‌ها صدق می‌کند.

### ۵.۱۳ توزیع دما برای جریان متلاطم در جت<sup>۱</sup>

در بخش ۶.۵ عبارتی برای توزیع سرعت در جت سیال مدور به‌دست آوردیم که در پهنه‌ای نامتناهی از همان سیال تخلیه می‌شد (نگاه کنید به شکل ۱-۶.۵). در این جا می‌خواهیم با در نظر گرفتن یک جت ورودی با دمای  $T_s$ ، بالاتر از دمای سیال اطراف جت که  $T_1$  فرض می‌شود، این مسئله را تعمیم بدهیم. در این حالت مسئله یافتن توزیع دمای هموار شده زمانی  $\bar{T}(r, z)$  در جتی با رانش پایاست. انتظار داریم که این توزیع در هر دو جهت  $r$  و  $z$  نزولی و یکنوا باشد.

3. O. C. Sandall, O. T. Hanna, and P. R. Mazet, *Canad. J. Chem. Eng.*, **58**, 443-447 (1980). See also O. T. Hanna and O. C. Sandall, *AIChE Journal*, **18**, 527-533 (1972).

1. J. O. Hinze, *Turbulence*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York (1975), pp. 531-546.

کار را با این فرض آغاز می‌کنیم که اتلاف ویسکوز قابل چشم‌پوشی است و از سهم  $\bar{q}^{(v)}$  در شار گرما، و همچنین سهم محوری  $\bar{q}^{(t)}$  چشم‌پوشی می‌کنیم. در نتیجه معادله (۱۳-۱.۱۳) صورت متوسط‌گیری شده‌ی زمانی پیدا می‌کند:

$$\rho \hat{C}_p \left( \bar{v}_r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{q}_r^{(t)}) \quad (1-5.13)$$

سپس شار گرمای تلاطمی را برحسب رسانندگی گرمایی معرفی شده در معادله (۱۳-۳.۱۳) بیان می‌کنیم:

$$\bar{q}_r^{(t)} = -k^{(t)} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = -\rho \hat{C}_p \alpha^{(t)} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = -\rho \hat{C}_p \frac{\nu^{(t)}}{\text{Pr}^{(t)}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \quad (2-5.13)$$

وقتی معادله (۱-۵.۱۳) برحسب تابع دمای بدون بُعد:

$$\Theta(\xi, \zeta) = \frac{\bar{T} - T_1}{T_0 - T_1} \quad (3-5.13)$$

نوشته شود، به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\left( \bar{v}_r \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = \frac{\nu^{(t)}}{\text{Pr}^{(t)}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \quad (4-5.13)$$

در این جا فرض شده است که عدد پرانتل تلاطمی و ویسکوزیته سینماتیکی تلاطمی ثابت‌اند (نگاه کنید به شرح پس از معادله (۳-۶.۵)). این معادله را باید با شرایط مرزی زیر حل کرد:

$$\Theta = 1 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } z = 0, \quad (5-5.13)$$

$$\Theta = 0, \quad r = 0 \quad \text{شرط مرزی ۲: در } r = 0, \quad \Theta \text{ متناهی است.}$$

$$\Theta \rightarrow 0 \quad \text{شرط مرزی ۳: وقتی } r \rightarrow \infty, \quad \text{داریم } \Theta \rightarrow 0.$$

سپس عبارتهایی برای مؤلفه‌های سرعت هموارشده‌ی زمانی،  $\bar{v}_z$  و  $\bar{v}_r$ ، برحسب تابع جریان  $F(\xi)$ ، به صورت مفروض در معادله‌های (۱۲-۶.۵) و (۱۳-۶.۵)، و عبارتی آزمایشی برای تابع دمای بدون بُعد هموارشده‌ی زمانی تعریف می‌کنیم:

$$\Theta(\xi, \zeta) = \frac{1}{\zeta} f(\xi) \quad (8-5.13)$$

در این جا  $\xi = r/z$  و  $\zeta = (\rho \nu^{(t)}/w)z$ ، که در آن  $w$  آهنگ جریان جرمی کل در جت است. عبارتی برای  $\bar{v}_z$  که در معادله (۲۱-۶.۵) به دست آمد، علت موجهی برای عبارت پیشنهادی در معادله (۸-۵.۱۳) به شمار می‌رود. وقتی این عبارتهای مربوط به مؤلفه‌های سرعت و دمای بدون بُعد در معادله (۱-۵.۱۳) جایگزین شوند، بعضی از جمله‌ها حذف می‌شوند و می‌توان جمله‌های دیگر را ترکیب کرد و معادله نسبتاً ساده‌ی زیر را به دست آورد:

$$\text{Pr}^{(t)} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (F f) = \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{df}{d\xi} \right) \quad (9-5.13)$$

می‌توان از این معادله یک بار انتگرال گرفت تا نتیجه شود:

$$\text{Pr}^{(t)} F f = \xi \frac{df}{d\xi} + C \quad (10-5.13)$$

ثابت انتگرال‌گیری را می‌توان برابر صفر قرار داد، زیرا، طبق معادله (۲۰-۶.۵)، در  $\xi = 0$ ، داریم  $F = 0$ . با دومین انتگرال‌گیری از صفر تا  $\xi$  نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \ln \frac{f(\xi)}{f(0)} &= \text{Pr}^{(t)} \int_0^\xi \frac{F}{\xi} d\xi = -\text{Pr}^{(t)} \int_0^\xi \frac{C_T^2 \bar{\xi}}{1 + \frac{1}{4}(C_T \bar{\xi})^2} d\bar{\xi} \\ &= -\text{Pr}^{(t)} \ln \left( 1 + \frac{1}{4}(C_T \xi)^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (11-5.13)$$

یا

$$\frac{f(\xi)}{f(0)} = \left( 1 + \frac{1}{4}(C_T \xi)^2 \right)^{-2\text{Pr}^{(t)}} \quad (12-5.13)$$

سرانجام، مقایسه معادله‌های (۱۲-۵.۱۳) و (۸-۵.۱۳) با معادله (۲۱-۶.۵) نشان می‌دهد که شکل‌های توزیع دمای هموارشدهٔ زمانی و توزیع سرعت محوری باهم رابطهٔ نزدیک زیر را دارند:

$$\frac{\Theta}{\Theta_{\max}} = \left( \frac{\bar{v}_z}{\bar{v}_{z,\max}} \right)^{\text{Pr}^{(t)}} \quad (13-5.13)$$

این معادله را به رایشارت نسبت می‌دهند.<sup>۲</sup> این نظریه توضیحی نسبتاً قانع‌کننده برای شکل توزیع دما ارائه می‌دهد.<sup>۱</sup> عدد پرانتل (یا اشمیت) تلاطمی که از اندازه‌گیری‌های دما (یا غلظت) در جت‌های مدور نتیجه می‌شود، در حدود  $0.7$  است. کمیت  $C_T$  که در معادله (۱۲-۵.۱۳) ظاهر می‌شود، به‌صراحت در معادله (۲۳-۶.۵)، به‌صورت  $C_T = \sqrt{3/16\pi} \sqrt{J/\rho} (1/\nu^{(t)})$  آمده‌بود و در آن  $J$  آهنگ جریان اندازه‌حرکت در جت است که با معادله (۲-۶.۵) تعریف شد. به‌همین ترتیب، می‌توان با برابر نهادن انرژی جت ورودی با انرژی عبوری از هر صفحه در پایین‌دست جریان، برای کمیت  $f(0)$  در معادله (۱۲-۵.۱۳) عبارتی یافت:

$$w \hat{C}_p (T_0 - T_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho \hat{C}_p \bar{v}_z (\bar{T} - T_1) r dr d\theta \quad (14-5.13)$$

سپس با قرار دادن عبارت‌های توزیع سرعت و دما و انتگرال‌گیری، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{f(0)} = 4\pi C_T^2 \int_0^\infty \left( 1 + \frac{1}{4}(C_T \xi)^2 \right)^{-(2+2\text{Pr}^{(t)})} \xi d\xi = \frac{8\pi}{1 + 2\text{Pr}^{(t)}} \quad (15-5.13)$$

که در آن از تغییر متغیر  $u = 1 + \frac{1}{4}(C_T \xi)^2$  استفاده شده‌است. با ترکیب معادله‌های (۳-۵.۱۳)، (۸-۵.۱۳) و (۲۳-۶.۵)، (۱۲-۵.۱۳) و (۱۵-۵.۱۳)، عبارت کامل برای توزیع دمای  $\bar{T}(r, z)$  در جت متلاطم مدور، برحسب اندازه‌حرکت کل جت، ویسکوزیتهٔ تلاطمی، عدد پرانتل تلاطمی، و چگالی سیال به‌دست می‌آید.

### ۶.۱۳ تحلیل فوریه از انتقال انرژی در جریان داخل لوله به‌ازای اعداد پرانتل بزرگ

در دو بخش گذشته، انتقال انرژی در سیستم‌های متلاطم را، با استفاده از معادله‌های هموارشدهٔ زمانی تغییر تحلیل کردیم. برای توصیف شارهای تلاطمی برحسب توزیع‌های هموارشدهٔ زمانی با استفاده از ضرایب انتقال تخمین‌زده‌شده

2. H. Reichardt, *Zeits. f. angew. Math., u. Mech.*, **24**, 268-272 (1944).

براساس آزمایش، به عبارت‌های تجربی نیاز داشتیم. در این بخش یک مسئله انتقال انرژی تلاطمی را، بدون هموارسازی زمانی - یعنی با استفاده مستقیم از معادله انرژی با میدان‌های نوسانی دما و سرعت تحلیل می‌کنیم تبدیل فوری<sup>۱</sup> برای چنین مسئله‌هایی بسیار مناسب است. و «روش موازنه غالب»<sup>۲</sup> اطلاعات سودمندی در اختیار ما می‌گذارد، بدون این‌که وارد محاسبات تفصیلی شود.

برسش خاصی که در این‌جا مطرح می‌شود اثر ضریب نفوذ گرمایی،  $\alpha = k/\rho\hat{C}_p$ ، بر توزیع قابل‌انتظار و نوسانات دمای سیال در همرفت واداشته تلاطمی در نزدیکی جدار است.<sup>۳</sup> در مثال ۱۳-۳، با استفاده از روشی تقریبی، این موضوع شکافته شد.

سیالی را با  $\rho$ ،  $\hat{C}_p$ ، و  $k$  ثابت در جریان تلاطمی داخل لوله‌ای به شعاع  $R = \frac{1}{2}D$  در نظر می‌گیریم. جریان در  $z = -\infty$  با دمای یکنواخت  $T_1$  وارد و در  $z = L$  خارج می‌شود. جدار لوله برای  $z < 0$  آدیاباتیک، و در  $T_0$  به‌ازای  $z \leq L$  هم‌دماست. از رسانش گرما در جهت  $z$  چشم‌پوشی می‌شود. می‌خواهیم توزیع دما  $T(r, \theta, z, t)$  را در حد درازمدت، در لایه مرزی گرمایی نازکی که به‌ازای  $z > 0$  تشکیل می‌شود، وقتی ضریب نفوذ گرمایی مولکولی  $\alpha$  کوچک است (مانند حالت سیال نیوتونی، وقتی عدد پرانتل،  $Pr = \hat{C}_p\mu/k = \mu/\rho\alpha$ ، بزرگ باشد) تحلیل کنیم. تابع کشش  $\kappa(\alpha)$  برای ضخامت متوسط لایه مرزی، بدون معرفی ضریب نفوذ گرمایی گردابی  $\alpha^{(t)}$  به‌دست خواهد آمد.

در حد، وقتی  $\alpha \rightarrow 0$ ، لایه مرزی به‌طور کامل داخل زیرلایه ویسکوز قرار می‌گیرد و مؤلفه‌های سرعت توسط بسط بریده تیلر در فاصله  $y = R - r$  از جدار نشان داده می‌شوند (این بسط را با بسط‌های ارائه‌شده در معادله‌های (۸-۴.۵) تا (۱۰-۴.۵) مقایسه کنید):

$$v_\theta = \beta_\theta y + O(y^2) \quad v_z = \beta_z y + O(y^2) \quad (2, 13-6.1)$$

$$v_r = - \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_z}{\partial z} \right) \frac{y^2}{2} + O(y^3) \quad (3-6.13)$$

در این‌جا ضرایب  $\beta_\theta$  و  $\beta_z$  را توابع مفروضی از  $\theta$ ،  $z$ ، و  $t$  می‌گیریم. این عبارت‌های سرعت در شرایط عدم لغزش و شرط ناتراوایی جدار در  $y = 0$  و معادله پیوستگی به‌ازای  $y$  کوچک صدق می‌کنند و با معادله حرکت تا مرتبه نشان‌داده‌شده توسط  $y$  سازگارند. بنابراین معادله انرژی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left( \frac{\beta_\theta}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \beta_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) y - \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_z}{\partial z} \right) \frac{y^2}{2} \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4-6.13)$$

با تقریب لایه مرزی معمول برای  $\nabla^2 T$ ، و با شرایط مرزی زیر درمورد  $T(y, \theta, z, t)$  داریم:

$$0 < y \leq R \text{ شرط ورودی: در } z = 0, \text{ داریم } T(y, \theta, 0, t) = T_1 \quad (5-6.13)$$

$$0 \leq z \leq L \text{ شرط جدار: در } y = 0, \text{ داریم } T(0, \theta, z, t) = T_0 \quad (6-6.13)$$

1. R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York (1978).

۲. این روش در منبع زیر به‌خوبی شرح داده شده‌است:

C. M. Bender and S. A. Orzag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York (1978), pp. 435-437.

3. W. E. Stewart, *AIChE Journal*, **33**, 2008-2016 (1987); errata, *ibid.*, **34**, 1030 (1988); W. E. Stewart and D. G. O'Sullivan, (unpublished).

به توزیع اولیهٔ دما  $T(y, \theta, z, \circ)$  نیازی نیست، زیرا اثر آن در حد درازمدت برطرف می‌شود.

برای به‌دست آوردن نتایجی که به‌طور مجانبی برای  $\alpha \rightarrow \circ$  معتبر باشند، مختص کشیدهٔ  $Y = y/\kappa(\alpha)$  را معرفی می‌کنیم که فاصله از دیوار نسبت به ضخامت متوسط لایهٔ مرزی  $\kappa(\alpha)$  است. گسترهٔ  $Y$  از صفر در  $y = \circ$  تا  $\infty$  در  $y = R$  در حد است.  $\alpha \rightarrow \circ$  تغییر می‌کند. استفاده از  $\kappa Y$  به جای  $y$ ، و معرفی تابع دمای بدون بُعد  $\Theta(Y, \theta, z, t) = (T - T_1)/(T_0 - T_1)$  به ما امکان می‌دهد که معادلهٔ (۶.۱۳) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \left( \frac{\beta_\theta}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \beta_z \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) \kappa Y - \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_z}{\partial z} \right) \frac{\kappa Y^2}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{\alpha}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \quad (۷-۶.۱۳)$$

شرط‌های مرزی عبارت‌اند از:

$$(۸-۶.۱۳) \text{ شرط ورودی: در } z = \circ, \text{ داریم } \Theta(Y, \theta, \circ, t) = \circ, \text{ به‌ازای } Y > \circ.$$

$$(۹-۶.۱۳) \text{ شرط جدار: در } Y = \circ, \text{ داریم } \Theta(\circ, \theta, z, t) = 1, \text{ به‌ازای } \circ \leq z \leq L.$$

معادلهٔ (۷-۶.۱۳) شامل مشتق بدون کران  $\partial \Theta / \partial t$  با ضریب ۱ مستقل از  $\alpha$  است. بنابراین برای تحلیل تأثیر پارامتر  $\alpha$  در این مسئله به تغییر متغیر نیاز است. به‌این‌منظور، به‌سراغ تبدیل فوریه می‌رویم که ابزاری استاندارد برای تحلیل فرایندهای شلوغ است.

تعریف زیر را برای تبدیل فوریهٔ تابع  $g(t)$  در حوزهٔ بسامد  $\nu$  در مکان خاص  $Y, \theta$ ، و  $z$  انتخاب می‌کنیم:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \nu t} g(t) dt = \tilde{g}(\nu) \quad (۱۰-۶.۱۳)$$

تبدیل‌های متناظر برای مشتق  $t$  و حاصل‌ضرب‌های توابع  $t$  عبارت‌اند از:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \nu t} \frac{\partial}{\partial t} g(t) dt = 2\pi i \nu \tilde{g}(\nu) \quad (۱۱-۶.۱۳)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \nu t} g(t) h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\nu) \tilde{h}(\nu - \nu_1) d\nu_1 = \tilde{g} * \tilde{h} \quad (۱۲-۶.۱۳)$$

و انتگرال آخر را پیچش تبدیل‌های  $\tilde{g}$  و  $\tilde{h}$  می‌نامیم.

قبل از گرفتن تبدیل فوریهٔ معادله‌های (۷-۶.۱۳) تا (۹-۶.۱۳)، هر تابع مشمول  $g(t)$  را به‌صورت متوسط زمانی  $\bar{g}$ ، به‌اضافهٔ تابع نوسان  $g'(t)$  بیان می‌کنیم و هر حاصل‌ضرب این توابع را بسط می‌دهیم. عبارت‌های حاصل تبدیل‌های فوریه‌ای به‌شرح زیر دارند:

$$\mathcal{F}\{\bar{g} + g'\} = \delta(\nu) \bar{g} + \tilde{g}'(\nu) \quad (۱۳-۶.۱۳)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{(\bar{g} + g')(\bar{h} + h')\} &= \mathcal{F}\{\bar{g}\bar{h} + \bar{g}h' + g'\bar{h} + g'h'\} \\ &= \delta(\nu) \bar{g}\bar{h} + \bar{g}\tilde{h}' + \tilde{g}'\bar{h} + \tilde{g}' * \tilde{h}' \end{aligned} \quad (۱۴-۶.۱۳)$$

در این‌جا  $\delta(\nu)$  تابع دلتای دیراک است که در حد درازمدت به‌صورت تبدیل فوریهٔ تابع  $g(t) = 1$  به‌دست آمد. جملهٔ نخست در سطر آخر، ضربه‌ای با مقدار حقیقی در  $\nu = \circ$  است که از حاصل‌ضرب مستقل از زمان  $\bar{g}\bar{h}$  ناشی می‌شود. دو جملهٔ آخر توابع بسامد  $\nu$  با مقادیر مختلط‌اند. جملهٔ پیچش  $\tilde{g}' * \tilde{h}'$  می‌تواند شامل توابع مختلط‌مقدار  $\nu$ ، همراه با ضربهٔ  $\delta(\nu) \bar{g}'\bar{h}'$  با مقدار حقیقی باشد که از حاصل‌ضرب‌های مستقل از زمان نوسانات سادهٔ هم‌ساز در  $g'$  و  $h'$  ناشی می‌شود.

با گرفتن تبدیل فوریه از معادله (۷-۶.۱۳)، با استفاده از روشی که در بالا بیان شد، و با توجه به این نکته که  $\partial\bar{\Theta}/\partial t$  متحداً صفر است، معادله دیفرانسیل:

$$\begin{aligned} & 2\pi i\nu\bar{\Theta}' + \left( \delta(\nu)\frac{\bar{\beta}_\theta}{R}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial\theta} + \frac{\bar{\beta}_\theta}{R}\frac{\partial\bar{\Theta}'}{\partial\theta} + \frac{\bar{\beta}'_\theta}{R}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial\theta} + \frac{\bar{\beta}'_\theta}{R} * \frac{\partial\bar{\Theta}'}{\partial\theta} \right) \kappa\Upsilon \\ & + \left( \delta(\nu)\bar{\beta}_z\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z} + \bar{\beta}_z\frac{\partial\bar{\Theta}'}{\partial z} + \bar{\beta}'_z\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z} + \bar{\beta}'_z * \frac{\partial\bar{\Theta}'}{\partial z} \right) \kappa\Upsilon \\ & - \left( \frac{\delta(\nu)}{R}\frac{\partial\bar{\beta}_\theta}{\partial\theta}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial\Upsilon} + \frac{1}{R}\frac{\partial\bar{\beta}_\theta}{\partial\theta}\frac{\partial\bar{\Theta}'}{\partial\Upsilon} + \frac{1}{R}\frac{\partial\bar{\beta}'_\theta}{\partial\theta}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial\Upsilon} + \frac{1}{R}\frac{\partial\bar{\beta}'_\theta}{\partial\theta} * \frac{\partial\bar{\Theta}'}{\partial\Upsilon} \right) \kappa\Upsilon^2 \\ & - \left( \delta(\nu)\frac{\partial\bar{\beta}_z}{\partial z}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial\Upsilon} + \frac{\partial\bar{\beta}_z}{\partial z}\frac{\partial\bar{\Theta}'}{\partial\Upsilon} + \frac{\partial\bar{\beta}'_z}{\partial z}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial\Upsilon} + \frac{\partial\bar{\beta}'_z}{\partial z} * \frac{\partial\bar{\Theta}'}{\partial\Upsilon} \right) \kappa\Upsilon^2 \\ & = \left( \delta(\nu)\frac{\partial'\bar{\Theta}}{\partial\Upsilon^2} + \frac{\partial'\bar{\Theta}'}{\partial\Upsilon^2} \right) \frac{\alpha}{\kappa^2} \end{aligned} \quad (۱۵-۶.۱۳)$$

را برای دمای تبدیل فوریه یافته  $\bar{\Theta}(\Upsilon, \theta, z, \nu)$  به دست می آوریم. شرایط مرزی تبدیل یافته عبارت اند از:

$$(۱۶-۶.۱۳) \text{ شرط ورودی: در } z = 0, \bar{\Theta}(\Upsilon, \theta, z, \nu) = 0, \text{ به ازای } \Upsilon > 0.$$

$$(۱۷-۶.۱۳) \text{ شرط جدار: در } \Upsilon = 0, \bar{\Theta}(\Upsilon, \theta, z, \nu) = \delta(\nu), \text{ به ازای } 0 \leq z \leq L.$$

در این جا نیز، تابع ضربه واحد  $\delta(\nu)$  به صورت تبدیل فوریه تابع  $g(t) = 1$  در حد درازمدت ظاهر می شود.

دو نوع سهم در معادله (۱۵-۶.۱۳) ظاهر می شود: ضربه های بسامد صفر حقیقی مقدار  $\delta(\nu)$  حاصل از توابع حاصل ضرب های مستقل از  $t$  و توابع مختلط مقدار  $\nu$  حاصل از جمله های حاصل ضرب مستقل از زمان. در این جا این دو نوع سهم را جداگانه در نظر می گیریم و بنابراین معادله (۱۵-۶.۱۳) را به دو معادله تفکیک می کنیم.

کار را با جمله های ضربه بسامد صفر آغاز می کنیم. علاوه بر جمله های صریح  $\delta(\nu)$  در معادله (۱۵-۶.۱۳)، ضربه های ضمنی هم در جمله های پیچش حاصل از نوسانات هم گام سرعت و دما پدید می آیند و خود سبب پدید آمدن شار انرژی تلاطمی  $\bar{q}^{(t)} = \rho\hat{C}_p\bar{v}'T'$  می شوند که در بخش ۲.۱۳ شرح داده شد. ضرایب همه جمله های ضربه باید با توابع  $\alpha$  متناسب باشند تا جمله های غالب در هر نقطه، وقتی  $\alpha \rightarrow 0$ ، متوازن بمانند (یعنی اندازه قابل مقایسه داشته باشند). بنابراین، ضریب  $\kappa$  جمله های ضربه همرفتی، شامل جمله های حاصل از نوسانات هم گام، باید با ضریب  $\alpha/\kappa^2$  در جمله ضربه همرفتی، متناسب باشند و در نتیجه  $\kappa \propto \alpha^{1/2}$ ، یا:

$$\kappa = \text{Pr}^{-1/2} D \quad (۱۸-۶.۱۳)$$

برای وابستگی ضخامت لایه مرزی گرمایی متوسط به عدد پراختل حاصل شود.

جمله های باقی مانده در معادله (۱۵-۶.۱۳) نوسانات دمای تلاطمی را توصیف می کنند. این جمله ها شامل جمله انباشت  $2\pi i\nu\bar{\Theta}'$  و جمله های باقی مانده همرفت و رسانش است. ضرایب همه این جمله ها (شامل  $2\pi i\nu$  در جمله نخست) باید با توابع  $\alpha$  متناسب باشد تا وقتی  $\alpha \rightarrow 0$ ، این جمله ها متوازن بمانند. این استدلال مؤید معادله (۱۸-۶.۱۳) است و رابطه  $\nu \propto \kappa$ ، یا:

$$\frac{D\Delta\nu}{\langle v_z \rangle} \propto \kappa = \text{Pr}^{-1/2} D \quad (۱۹-۶.۱۳)$$

را برای پهنای باند بسامد  $\Delta\nu$  نوسانات دما به‌دست می‌دهد. در نتیجه، بسامد کشیده  $\nu Pr^{1/2}$  و زمان کشیده  $t Pr^{-1/2}$  و متغیرهای طبیعی برای گزارش دادن تحلیل‌های فوریه در حوزه همرفت واداشته تلاطمی به‌شمار می‌روند. شاو و هانزاتی<sup>۴</sup> طیف تلاطم را برای آزمایش‌های انتقال جرم خود، به‌طور قیاسی، برحسب متغیر بسامد کشیده متناسب با  $\nu Sc^{1/2}$  گزارش دادند (در این‌جا  $Sc = \mu/\rho D_{AB}$  است که در فصل ۱۶ معرفی خواهد شد).

تا این‌جا در هر جمله از معادله‌های انرژی، فقط جمله نخست بسط تیلر برحسب  $\kappa$  را در نظر گرفتیم. با ادامه بسط تیلر تا توان‌های بالاتر  $\kappa$ ، و در نتیجه  $Pr^{-1/2} D$ ، نتایج دقیق‌تری حاصل می‌شود. جواب صوری حاصل، بسط اختلال:

$$\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}_0(\Upsilon, \theta, z, Pr^{1/2}\nu) + \kappa\tilde{\Theta}_1(\Upsilon, \theta, z, Pr^{1/2}\nu) + \dots \quad (۲۰-۶.۱۳)$$

برای توزیع دمای نوسانی روی مکان و بسامد، در میدان سرعت مفروض است.

بسط  $\bar{T}$  (متوسط درازمدت دما) متناظر با معادله (۲۰-۶.۱۳) از بخش بسامدصفر  $\tilde{\Theta}$  به‌دست می‌آید:

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_0(\Upsilon, \theta, z) + \kappa\bar{\Theta}_1(\Upsilon, \theta, z) + \dots \quad (۲۱-۶.۱۳)$$

با استفاده از این رابطه می‌توان شار گرمای متوسط‌گیری‌شده زمانی موضعی در جدار را به‌دست آورد:

$$q_0 = -k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{k(T_0 - T_1)}{Pr^{-1/2} D} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \Upsilon} \Big|_{\Upsilon=0} \quad (۲۲-۶.۱۳)$$

و بنابراین عدد نوسلت موضعی برابر است با:

$$Nu_{loc} = \frac{q_0 D}{k(T_0 - T_1)} = Pr^{1/2} \left( -\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \Upsilon} \right) \Big|_{\Upsilon=0} \quad (۲۳-۶.۱۳)$$

سپس، عدد نوسلت متوسط روی سطح جدار برای انتقال گرما، و کمیت نظیر آن برای انتقال جرم، عبارت‌اند از:

$$Nu_m = Pr^{1/2} \left\langle \left( -\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \Upsilon} \right) \Big|_{\Upsilon=0} \right\rangle = a_1 Pr^{1/2} + a_2 Pr^0 + \dots \quad (۲۴-۶.۱۳)$$

$$Sh_m = Sc^{1/2} \left\langle \left( -\frac{\partial \bar{\Theta}_A}{\partial \Upsilon} \right) \Big|_{\Upsilon=0} \right\rangle = a_1 Sc^{1/2} + a_2 Sc^0 + \dots \quad (۲۵-۶.۱۳)$$

در این معادله آخر  $Sh_m$ ،  $\theta'_A$  و  $Sc$  جمله‌های نظیر  $Nu_m$ ،  $\bar{\Theta}$ ، و  $Pr$  در انتقال جرم‌اند. در این‌جا (به‌جای منتظر شدن تا قسمت سوم کتاب) عبارت انتقال جرم را ارائه می‌دهیم، زیرا دقت آزمایش‌های الکتروشیمیایی انتقال جرم از دقت آزمایش‌های انتقال گرما بیش‌تر است و گستره دسترسی‌پذیر اعداد اشمیت بسیار بزرگ‌تر از اعداد پرانتل است. اگر بسط‌های نشان‌داده‌شده با معادله‌های (۲۴-۶.۱۳) و (۲۵-۶.۱۳) بریده و به یک جمله منحصر شوند، به روابط  $Nu_m \propto Pr^{1/2}$  و  $Sh_m \propto Sc^{1/2}$  می‌رسیم. این عبارتها اجزای ضروری روابط مشهور چیلتون-کولبورن‌اند<sup>۵</sup> (نگاه کنید به معادله‌های (۱۸-۳.۱۴) و (۱۹-۳.۱۴)، و معادله‌های (۲۲-۳.۲۲) تا (۲۴-۳.۲۲). جمله اول در معادله (۲۴-۶.۱۳) یا (۲۵-۶.۱۳) نیز با عدد پرانتل (یا اشمیت) بزرگ مجانب معادله (۲۰-۴.۱۳) متناظر است.<sup>۶</sup>

4. D. A. Shaw and T. J. Hanratty, *AIChE Journal*, **23**, 160-169 (1977); D. A. Shaw and T. J. Hanratty, *AIChE Journal*, **23**, 28-37 (1977).

5. T. H. Chilton and A. P. Colburn, *Ind. Eng. Chem*, **26**, 1183-1187 (1934)

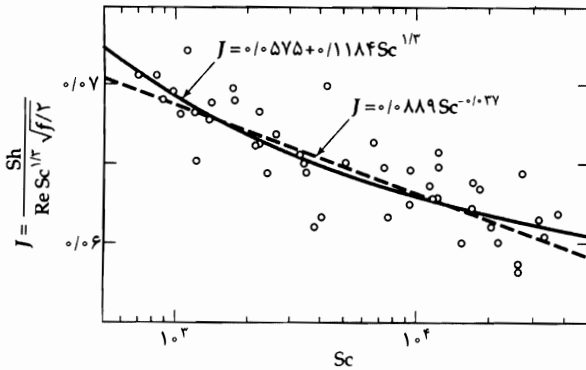
توماس هامیلتون چیلتون (۱۸۹۹-۱۹۷۲) در تمام دوران کار خود در شرکت دو پون در ویلمینگتون، دلاور، شاغل بود؛ او در سال ۱۹۵۱ رئیس *AIChE* بود. پس از «بازنشستگی» در چندین دانشگاه استاد مدعو بود.

6. O. C. Sandall and O. T. Hanna, *AIChE Journal*, **25**, 190-192 (1979).

با توسعه و پیشرفت روش‌های الکتروشیمیایی اندازه‌گیری انتقال جرم در سطح، تحقیق روی جمله دوم در معادله (۱۳-۶-۲۵) امکان‌پذیر شده است. در شکل (۱۳-۶-۱) داده‌های شاو و هانزاتی نشان داده شده است؛ آن‌ها جریان با نفوذ محدود را در الکتروود جدار، به‌ازای مقادیر عدد اشمیت  $Sc = \mu/\rho D_{AB}$  از ۶۹۳ تا ۳۷۲۰۰ اندازه‌گیری کردند. این داده‌ها برازش بسیار خوبی<sup>۳</sup> با رابطه زیر دارند:

$$\frac{Sh}{Re Sc^{1/2} \sqrt{f/2}} = 0.0575 + 0.1184 Sc^{-1/2} \quad (13-6-26)$$

که در آن  $f(Re)$  ضریب اصطکاک تعریف شده در فصل ۶ است. در معادله (۱۳-۶-۲۶) وابستگی مشاهده‌شده عدد شروود به عدد  $Re$ ، با دو جمله نخست معادله (۱۳-۶-۲۵) ترکیب شده است (یعنی ضرایب  $a_1$ ،  $a_2$  ... با  $Re \sqrt{f/2}$  متناسب‌اند). معادله (۱۳-۶-۲۶) تعبیر فیزیکی روشنی دارد: جمله نخست با یک لایه مرزی نفوذی بسیار نازک متناظر است، به طوری که سرعت مماسی برحسب  $y$  خطی است و می‌توان از انحناهای جدار چشم‌پوشی کرد، اما جمله دوم انحناهای جدار و جمله‌های شامل  $y^2$  در بسط سرعت مماسی معادله‌های (۱۳-۶-۱) و (۱۳-۶-۲) را به حساب می‌آورد. در تقریب‌های بالاتر، می‌توان انتظار داشت که جمله‌های خاصی از آثار لبه ناشی شوند که نویمان<sup>۷</sup> و استورت<sup>۳</sup> آن‌ها را یادآور شده‌اند.



شکل ۱۳-۶-۱ داده‌های انتقال جرم تلاطمی D. A. Shaw and T. J. Han-ratty [AICHE Journal, 28, 23-37, (1977) در مقایسه با منحنی مبتنی بر معادله (۱۳-۶-۲۵) (منحنی با خط پُر). یک تابع قانون توانی ساده که شاو و هانزاتی به‌دست آورده‌اند نیز نشان داده شده است.

### پرسش‌های تشریحی

۱. رسانندگی گرمایی تلاطمی و ویسکوزیته تلاطمی را از لحاظ تعریف، مرتبه بزرگی، وابستگی به خواص فیزیکی و ماهیت جریان مقایسه کنید.
۲. «قیاس رینولدز» چیست و چه مفهومی دارد؟
۳. آیا بین معادله (۱۳-۲-۳) و معادله (۱۳-۴-۱۲)، پس از تعیین ثابت‌های انتگرال‌گیری معادله دوم، رابطه‌ای وجود دارد؟
۴. آیا قیاس بین قانون رسانش گرمای فوریه و معادله (۱۳-۳-۱) قیاس معتبری است؟
۵. مفهوم فیزیکی این نکته که عدد پراتل تلاطمی از مرتبه واحد است، چیست؟

### مسئله‌ها

۱۳.ب.۱ شار گرمای جدار برای جریان متلاطم داخل لوله (تقریبی). مثال ۱۳-۳.۱ را مرور کنید و این بار مراحل حذف شده را کامل کنید. به‌ویژه درستی انتگرال‌گیری در هنگام رسیدن به معادله (۱۳-۳-۷) از معادله (۱۳-۳-۶) را نشان دهید.

7. J. S. Newman, *Electroanalytical Chemistry*, 6, 187-352 (1973).



۱۳.۲. شار گرمای جدار برای جریان تلاطمی داخل لوله.

(الف) فرض‌های بخش ۴.۱۳ را جمع‌بندی کنید.

(ب) جزئیات ریاضی این بخش را مرور کنید و به‌ویژه در مورد مراحل مرتبط با معادله‌های (۴.۱۳-۱۲) و (۴.۱۳-۱۶) دقت خاصی به عمل آورید.

(ج) چه وقت یافتن ثابت  $C_2$  در معادله (۴.۱۳-۱۲) ضرورت ندارد؟

۱۳.ج.۱. شار گرمای جدار برای جریان متلاطم بین دو صفحه موازی.

(الف) عملیات پی‌ریزی معادلات در بخش ۴.۱۳ را مرور کنید و سپس معادله مشابهی برای جریان متلاطم در شکاف نازک نشان داده‌شده در شکل ۲.۳ به دست آورید. نشان دهید که نظیر معادله (۴.۱۳-۱۹) عبارت است از:

$$\frac{k(T_s - T_b)}{q_0 B} = \left( \frac{\bar{v}_{z, \max}}{\langle \bar{v}_z \rangle} \right)^2 \int_0^1 \frac{[J(\xi)]^2}{[1 + (\nu^{(t)}/\nu)(Pr/Pr^{(t)})]} d\xi \quad (1-13.ج)$$

که در آن  $\xi = x/B$  و  $J(\xi) = \int_0^\xi \phi(\bar{\xi}) d\bar{\xi}$

(ب) نشان دهید که نتیجه قسمت (الف) چگونه برای جریان آرام سیالات نیوتونی، و برای «جریان قالی» (توزیع سرعت تخت) ساده می‌شود.

جواب: (ب)  $k(T_s - T_b)/q_0 B = \frac{17}{35}, \frac{1}{3}$

۱۳.د.۱. توزیع دما برای جریان متلاطم داخل لوله. برای محاسبه توزیع دما در جریان متلاطم داخل لوله‌های مدور، با استفاده از معادله (۴.۱۳-۱۲) باید مقدار  $C_2$  را بدانیم.

(الف) نحوه به دست آوردن  $C_2$  از طریق به‌کارگیری شرط مرزی ۴، مطابق بخش ۸.۱۰، را نشان دهید. نتیجه چنین است:

$$C_2 = \int_0^1 \frac{[I(\xi)/I(1)]^2 - [I(\xi)/I(1)]}{\xi[1 + (\alpha^{(t)}/\alpha)]} d\xi \quad (1-13.د)$$

(ب) نشان دهید که برای سیال نیوتونی با جریان آرام کاملاً شکل‌یافته، از معادله (۱۳.د-۱) نتیجه می‌شود که  $C_2 = -\frac{7}{34}$ .

## فصل ۱۴

### انتقال میان‌فازی در سیستم‌های غیرهم‌دما

۱.۱۴ تعریف ضرایب انتقال گرما

۲.۱۴ محاسبات تحلیلی ضرایب انتقال گرما برای همرفت واداشته از میان لوله‌ها و شکاف‌ها

۳.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای همرفت واداشته در لوله‌ها

۴.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای همرفت واداشته در اطراف اجسام غوطه‌ور

۵.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای همرفت واداشته از میان بسترهای پرشده

۶.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای همرفت آزاد و مختلط

۷.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای چگالش بخار خالص روی سطوح جامد

در فصل ۱۰ دیدیم که چگونه می‌توان برای مسئله‌های ساده مختلف موازنه لایه‌ای انرژی را تشکیل داد و چگونه این موازنه‌ها به معادله‌های دیفرانسیلی منتهی می‌شوند که با استفاده از آن‌ها می‌توان توزیع دما را محاسبه کرد. به‌علاوه، در فصل ۱۱ دیدیم که موازنه انرژی روی جزء دیفرانسیلی از یک سیال اختیاری به یک معادله دیفرانسیل جزئی - معادله انرژی - منتهی می‌شود که می‌توان با استفاده از آن مسئله‌های پیچیده‌تر را حل کرد. سپس در فصل ۱۳ دیدیم که معادله انرژی هموارشده زمانی، همراه با روابط تجربی برای شارگرماي تلاطمی، مبنای سودمندی برای جمع‌بندی و برون‌یابی اندازه‌گیری‌های توزیع دما در سیستم‌های متلاطم فراهم می‌آورد. بنابراین، در این نقطه، دانشجو باید شناخت نسبتاً خوبی از معنای معادله‌های تغییر برای جریان غیرهم‌دما و گستره قابلیت کاربرد آن‌ها داشته باشد. آشکار است که همه مسئله‌هایی که توصیف شدند مربوط به سیستم‌هایی با وضعیت هندسی نسبتاً ساده بودند و در اغلب آن‌ها فرض‌هایی اختیار شده بود؛ فرض‌هایی از قبیل مستقل از دما بودن ویسکوزیته و ثابت بودن چگالی سیال. این جواب‌ها برای بعضی مقاصد، به‌ویژه برای تخمین زدن مرتبه بزرگی، مناسب‌اند. گذشته از آن، بررسی سیستم‌های ساده اساس لازم برای بحث درباره سیستم‌های پیچیده‌تر را فراهم می‌آورد.

در این فصل به‌سراغ بعضی از مسئله‌هایی می‌رویم که در آن‌ها استفاده از تحلیل‌هایی با جزئیات کم‌تر، راحت یا ضروری است. در این نوع مسائل، رهیافت معمول مهندسی، فرمول‌بندی موازنه انرژی روی تجهیزات، یا بخش‌هایی از آن‌هاست، که در فصل ۱۵ شرح داده می‌شود. در موازنه انرژی ماکروسکوپی که به این ترتیب به‌دست می‌آید، معمولاً جمله‌هایی وجود دارند که باید از طریق تخمین زدن گرمایی که از مرزهای سیستم انتقال می‌یابند، تعیین شوند. این

کار مستلزم اطلاع از ضریب انتقال گرما برای توصیف انتقال میان فازی است. معمولاً ضریب انتقال گرما برای سیستم‌های جریان موردنظر، به صورت رابطه همبستگی تجربی عدد نوسلت<sup>۱</sup> (شارگرمای بدون بُعد جدار یا ضریب انتقال گرما) که تابعی از کمیت‌های بدون بُعدی از قبیل عدد رینولدز و عدد پرانتل است، داده می‌شود. در این جا با وضعیتی همانند فصل ۶ سروکار نداریم که در آن روش استفاده از روابط همبستگی بدون بُعد ضریب اصطکاک را، برای حل مسئله‌های انتقال اندازه حرکت آموختیم. اما در مسئله‌های غیرهم‌دما، تعداد گروه‌های بدون بُعد بیش‌تر است، شرایط مرزی متنوع‌ترند و وابستگی خواص فیزیکی به دما غالباً مهم است. به علاوه، در سیستم‌های غیرهم‌دما، پدیده‌های همرفت آزاد، چگالش، و جوشیدن نیز مطرح‌اند. در این جا، به عمد، خود را به تعداد کمی از روابط و فرمول‌های انتقال گرما محدود می‌کنیم، درست به تعداد کافی برای آشنا کردن خواننده با موضوع، بدون تلاش برای شرح و بسط اضافی. بسیاری از رساله‌ها و کتاب‌های مرجع این موضوع را با عمق بیش‌تری بررسی کرده‌اند. ۶.۵، ۴.۳، ۲.

### ۱.۱۴ تعریف ضرایب انتقال گرما

سیستم جریانی را در نظر می‌گیریم که در آن سیالی در یک مجرا یا در اطراف جسمی جامد جریان دارد. فرض کنید سطح جامد از سیال گرم‌تر است، به طوری که گرما از جامد به سیال انتقال می‌یابد. انتظار می‌رود که آهنگ جریان گرما در فصل مشترک جامد-سیال به مساحت فصل مشترک و افت دما بین سیال و جامد بستگی داشته باشد. معمولاً ضریب تناسب  $h$  (ضریب انتقال گرما) را با رابطه زیر تعریف می‌کنند:

$$Q = hA\Delta T \quad (1-1.14)$$

که در آن  $Q$  جریان گرمای ورودی به سیال (J/hr یا Btu/hr)،  $A$  سطح مشخصه، و  $\Delta T$  اختلاف دمای مشخصه است. از معادله (۱-۱.۱۴) در هنگام سرد شدن سیال نیز می‌توان استفاده کرد. معادله (۱-۱.۱۴) را، به صورت اندکی متفاوت، در معادله (۲-۱.۱۰) دیدیم. توجه کنید که  $h$  تعریف نمی‌شود، مگر سطح  $A$  و اختلاف دمای  $\Delta T$  مشخص شده باشند. اکنون تعریف‌های متداول  $h$  را برای دو نوع هندسه جریان در نظر می‌گیریم.

به عنوان مثالی از جریان در مجرا، سیالی را در نظر می‌گیریم که در لوله‌ای مدور به قطر  $D$  جریان دارد (نگاه کنید به شکل ۱-۱.۱۴)، که در آن با بخشی از جدار به طول  $L$  و دمای سطح داخلی متغیر  $T_0(z)$  سروکار داریم که گرم می‌شود و دمای آن از  $T_0$  به  $T_0 + z$  می‌رسد. فرض کنید که دمای توده سیال،  $T_b$  (که در معادله (۸-۱.۱۰) برای ۱. این گروه بدون بُعد را به افتخار ارنست کرافت ویلهلم نوسلت (۱۹۵۷-۱۸۸۲) نامگذاری کرده‌اند؛ این مهندس آلمانی نخستین چهره برجسته در حوزه انتقال گرما و جرم همرفتی بود. مثلاً نگاه کنید به

W. Nusselt, *Zeits. d. Ver. deutsch. Ing.*, **53**, 1750-1755 (1909), *Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ingenieurwes.*, No. 80, 1-38, Berlin (1910), and *Gesundheits-Ing.*, **38**, 477-482, 490-496 (1915).

2. M. Jakob, *Heat Transfer*, Vol. 1 (1949) and Vol. 2 (1957), Wiley, New York.

3. W. M. Kays and M. E. Crawford, *Convective Heat and Mass Transfer*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1993).

4. H. D. Baehr and K. Stephan, *Heat and Mass Transfer*, Springer, Berlin (1998).

5. W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, and Y. I. Cho (eds.), *Handbook of Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York (1998).

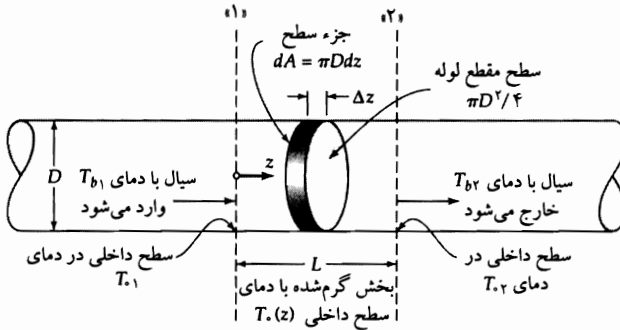
6. H. Gröber, S. Erk, and U. Grigull, *Die Grundgesetze der Wärmeübertragung*, Springer, Berlin, 3rd edition (1961).

سیالاتی با  $\rho$  و  $\hat{C}_p$  ثابت تعریف شد) در بخش گرم شده از  $T_{b1}$  به  $T_{b2}$  افزایش می‌یابد. در این وضعیت سه تعریف قراردادی برای ضرایب انتقال گرما در سیال واقع در بخش گرم شده وجود دارد:

$$Q = h_1(\pi DL)(T_{o1} - T_{b1}) \equiv h_1(\pi DL)\Delta T_1 \quad (۲-۱.۱۴)$$

$$Q = h_a(\pi DL) \left( \frac{(T_{o1} - T_{b1}) + (T_{o2} - T_{b2})}{2} \right) \equiv h_a(\pi DL)\Delta T_a \quad (۳-۱.۱۴)$$

$$Q = h_{ln}(\pi DL) \left( \frac{(T_{o1} - T_{b1}) - (T_{o2} - T_{b2})}{\ln(T_{o1} - T_{b1}) - \ln(T_{o2} - T_{b2})} \right) \equiv h_{ln}(\pi DL)\Delta T_{ln} \quad (۴-۱.۱۴)$$



شکل ۱-۱.۱۴ انتقال گرما در لولهٔ مدور.

یعنی  $h_1$  بر اختلاف دمای  $\Delta T_1$  در ورودی،  $h_a$  بر میانگین حسابی  $\Delta T_a$  اختلاف‌های دمای نهایی، و  $h_{ln}$  بر اختلاف دمای میانگین لگاریتمی  $\Delta T_{ln}$  مبتنی است. در اغلب محاسبات، استفاده از  $h_{ln}$  ترجیح داده می‌شود، زیرا کم‌تر از دو ضریب دیگر به  $L/D$  وابسته است، اگرچه همیشه از آن استفاده نمی‌شود.<sup>۱</sup> در هنگام استفاده از روابط همبستگی انتقال گرما که در رساله‌ها و کتاب‌های مرجع نقل شده‌است، باید به تعریف ضرایب انتقال گرما توجه کرد. اگر توزیع دمای جدار در ابتدا مجهول باشد، یا اگر خواص سیال در طول لوله تغییرات چشمگیر داشته باشد، به دشواری می‌توان ضرایب انتقال گرما تعریف شده در بالا را پیش‌بینی کرد. در چنین شرایطی، معمولاً معادله (۲-۱.۱۴) را به صورت دیفرانسیل می‌نویسند:

$$dQ = h_{loc}(\pi D dz)(T_o - T_b) \equiv h_{loc}(\pi D dz)\Delta T_{loc} \quad (۵-۱.۱۴)$$

در این جا  $dQ$  گرمای اضافه شده به سیال در فاصله  $dz$  در طول لوله،  $\Delta T_{loc}$  اختلاف دمای موضعی (در مکان  $z$ )، و  $h_{loc}$  ضریب انتقال گرما موضعی است. این معادله در طراحی مهندسی کاربرد گسترده‌ای دارد. در واقع، تعریف  $h_{loc}$  و  $\Delta T_{loc}$ ، بدون مشخص کردن شکل جزء سطح کامل نیست. در معادله (۵-۱.۱۴) فرض کرده‌ایم که  $dA = \pi D dz$ ، به این معنا که  $h_{loc}$  و  $\Delta T_{loc}$  مقادیر میانگین در سطح سایه‌خورده  $dA$  در شکل ۱-۱.۱۴ هستند. به عنوان مثالی از جریان در اطراف اجسام غوطه‌ور، سیالی را در نظر بگیرید که در اطراف کره‌ای به شعاع  $R$  جریان دارد، که دمای سطح آن در مقدار یکنواخت  $T_o$  نگه داشته می‌شود. فرض کنید که سیال با دمای یکنواخت  $T_\infty$  به کره نزدیک می‌شود. بنابراین می‌توان ضریب انتقال گرما میانگین،  $h_m$ ، را برای تمام سطح کره، با رابطه زیر تعریف کرد:

$$Q = h_m(4\pi R^2)(T_o - T_\infty) \quad (۶-۱.۱۴)$$

۱. هنگام استفاده از روابط اگر  $\Delta T_1/\Delta T_2$  بین  $0.5^\circ$  و  $2^\circ$  باشد، آن‌گاه  $\Delta T_a$  را می‌توان جایگزین  $\Delta T_{ln}$ ، و  $h_a$  را جایگزین  $h_{ln}$  کرد و خطای ماکزیمم ۴٪ خواهد بود. این درجهٔ دقت در اغلب محاسبات انتقال گرما قابل قبول است.

در این‌جا سطح مشخصه را سطح انتقال گرما گرفته‌ایم (در معادله‌های (۱۴-۱) تا (۱۴-۵) نیز چنین بود)، اما در معادله (۱۴-۵) از سطح مقطع کره استفاده کردیم. برای اجسام غوطه‌ور، می‌توان ضریبی موضعی را به قیاس معادله (۱۴-۵) تعریف کرد:

$$dQ = h_{loc}(dA)(T_s - T_\infty) \quad (14-7)$$

این ضریب از  $h_m$  گویاتر است، زیرا نحوه توزیع شار گرما روی سطح را پیش‌بینی می‌کند. اما در اغلب آزمایش‌ها فقط  $h_m$  گزارش داده می‌شود که اندازه‌گیری آن آسان‌تر است.

حال می‌خواهیم تأکید کنیم که قبل از تعریف  $h$ ، باید تعریف‌های  $A$  و  $\Delta T$  روشن شوند. هم‌چنین در نظر داشته‌باشید که  $h$  ثابت مشخصه محیط سیال نیست. برعکس، ضریب انتقال گرما، به‌صورتی پیچیده به متغیرهای متعدد، شامل خواص سیال ( $C_p, \rho, \mu, k$ )، شکل هندسی سیستم، و سرعت جریان وابسته است. بقیه این فصل به پیش‌بینی وابستگی  $h$  به این کمیت‌ها اختصاص یافته‌است. به‌علاوه، در بعضی از سیستم‌های بسیار ساده، می‌توان ضریب انتقال گرما را مستقیماً با استفاده از معادله‌های تغییر به‌دست آورد. بعضی از گستره‌های متداول  $h$  در جدول ۱۴-۱ آمده‌است.

جدول ۱۴-۱ مرتبه‌های بزرگی متداول برای ضرایب انتقال گرما. الف

$h$		سیستم
$h$ (Btu/ft <sup>2</sup> · hr · F)	یا (W/m <sup>2</sup> · K) (kcal/m <sup>2</sup> · hr · C)	
		همرفت آزاد
۱-۴	۳-۲۰	گازها
۲۰-۱۲۰	۱۰۰-۶۰۰	مایعات
۲۰۰-۴۰۰۰	۱۰۰۰-۲۰۰۰۰	آب جوشان
		همرفت واداشته
۲-۲۰	۱۰-۱۰۰	گازها
۱۰-۱۰۰	۵۰-۵۰۰	مایعات
۱۰۰-۲۰۰۰	۵۰۰-۱۰۰۰۰	آب
۲۰۰-۲۰۰۰۰	۱۰۰۰-۱۰۰۰۰۰	بخارهای در حال چگالش

(الف) برگرفته از

H. Gröber, S. Erk, and U. Grigull, *Wärmeübertragung*, Springer, Berlin, 3rd edition (1955), p. 158

وقتی  $h$  برحسب kcal/m<sup>2</sup> · hr · C باشد، باید آن را در ۰٫۲۰۴ ضرب کنید تا  $h$  برحسب Btu/ft<sup>2</sup> · hr · F به‌دست آید، یا در ۱٫۱۶۲ ضرب کنید تا  $h$  برحسب W/m<sup>2</sup> · K حاصل شود. برای اطلاع از سایر ضرایب تبدیل، به پیوست (و) رجوع کنید.

در بخش ۶-۱۰ دیدیم که، در محاسبه آهنگ‌های انتقال گرما بین دو جریان سیال، که توسط لایه‌های جامد از هم جدا شده‌اند، راحت‌تر آن است که از ضریب انتقال گرمای کلی،  $U$ ، استفاده کنیم که اثر ترکیبی یک رشته مقاومت را بیان می‌کند که گرما از میان آن‌ها عبور می‌کند. در این‌جا تعریفی از  $U$  ارائه می‌کنیم و نحوه محاسبه آن را در حالت

خاص مبادله گرما بین دو جریان هم محور، با دمای کلی  $T_h$  («گرم») و  $T_c$  («سرد») نشان می دهیم؛ این دو جریان با لوله‌ای استوانه‌ای به قطر داخلی  $D_o$  و قطر خارجی  $D_i$  از هم جدا شده‌اند:

$$dQ = U_o (\pi D_o dz) (T_h - T_c) \quad (۸-۱.۱۴)$$

$$\frac{1}{D_o U_o} = \left( \frac{1}{D_o h_o} + \frac{\ln(D_o/D_i)}{2k_w} + \frac{1}{D_i h_i} \right)_{loc} \quad (۹-۱.۱۴)$$

توجه کنید که  $U_o$  به صورت ضریبی موضعی تعریف می شود. در اغلب راهکارهای طراحی، این تعریف در نظر است (نگاه کنید به مثال ۱۴-۱۵).

البته معادله‌های (۸-۱.۱۴) و (۹-۱.۱۴)، به مقاومت‌های گرمایی با اتصال متوالی محدود می شود. در اغلب وضعیت‌ها، ممکن است شار گرمای موازی در یک یا چند سطح، از طریق تابش، درخور اعتنا باشد و معادله‌های (۸-۱.۱۴) و (۹-۱.۱۴) به اصلاح خاص نیاز پیدا کنند (نگاه کنید به مثال ۱۶-۵). برای نمایش مفهوم فیزیکی ضرایب انتقال گرما و نشان دادن روشی برای تعیین آن‌ها، این بخش را با تحلیل مجموعه‌ای فرضی از داده‌های انتقال گرما به پایان می بریم.

### مثال ۱-۱.۱۴

محاسبه ضرایب انتقال گرما با استفاده از داده‌های تجربی

در شکل ۱-۱۴ یک رشته آزمایش حالت پایا نشان داده شده که روی گرمایش هوا در لوله‌ها انجام شده‌اند. در نخستین آزمایش، هوا با دمای  $T_{b1} = 200^\circ\text{F}$  در لوله‌ای به قطر داخلی  $0.75 \text{ in.}$  و توزیع سرعت آرام کاملاً شکل یافته در قسمت هم دمای لوله، به ازای  $z < 0$  جریان دارد. در  $z = 0$ ، دمای جدار به طور ناگهانی افزایش می یابد و به  $T_o = 212^\circ\text{F}$  می رسد و در بقیه طول لوله،  $L_A$ ، در این مقدار می ماند. در  $z = L_A$  سیال به داخل محفظه اختلاطی جریان می یابد که در آن دمای مخلوط (یا «توده سیال»)  $T_{b2}$  اندازه گیری می شود. آزمایش‌های مشابهی با لوله‌هایی به طول‌های مختلف  $L_B$ ،  $L_C$ ، و غیره، با نتایج زیر، انجام می شود:

آزمایش	A	B	C	D	E	F	G
$L(\text{in.})$	۱٫۵	۳٫۰	۶٫۰	۱۲٫۰	۲۴٫۰	۴۸٫۰	۹۶٫۰
$T_{b2}(\text{°F})$	۲۰۱٫۴	۲۰۲٫۲	۲۰۳٫۱	۲۰۴٫۶	۲۰۶٫۶	۲۰۹٫۰	۲۱۱٫۰

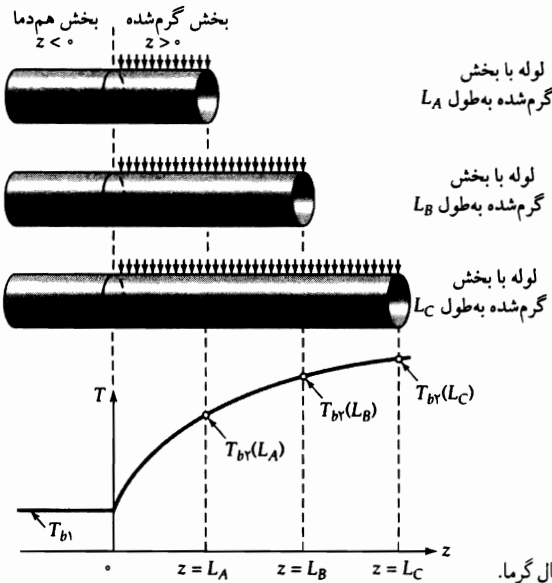
در همه آزمایش‌ها، آهنگ جریان هوا  $w$ ، برابر است با:  $370 \text{ lb}_m/\text{hr}$ . مطلوب است محاسبه  $h_a$ ،  $h_i$  و مقدار خروجی  $h_{loc}$  به صورت تابعی از نسبت  $L/D$ .

حل

ابتدا موازنه انرژی حالت پایا را روی طول  $L$  لوله، با بیان این که گرمای عبوری از جدار، به علاوه انرژی ورودی در  $z = 0$  از طریق همرفت، با انرژی خروجی از لوله در  $z = L$  برابر است، می نویسیم. شار انرژی محوری در ورودی و خروجی لوله را می توان با استفاده از معادله (۸-۹) محاسبه کرد. برای جریان کاملاً شکل یافته، تغییر در شار انرژی جنبشی  $\frac{1}{2} \rho v^2$  و جمله کار  $[\tau \cdot v]$ ، در مقایسه با تغییرات شار آنتالپی، قابل چشم پوشی است. هم چنین فرض می کنیم که  $\rho \dot{H} v_z \ll q_z$ ، به طوری که می توان از جمله رسانش گرمای محوری چشم پوشی کرد. بنابراین تنها سهم در شار انرژی ورودی و خروجی با جریان، جمله شامل آنتالپی خواهد بود که به کمک معادله (۸-۹) و این فرض‌ها

که ظرفیت گرمایی و چگالی سیال ثابت است، می‌توان آن را محاسبه کرد. بنابراین موازنه انرژی حالت پایا به سادگی عبارت است از: «آهنگ جریان انرژی ورودی = آهنگ جریان انرژی خروجی»: یا:

$$Q + w\hat{C}_p T_{b1} = w\hat{C}_p T_{b2} \quad (۱۰-۱.۱۴)$$



شکل ۲-۱.۱۴ چند آزمایش برای اندازه‌گیری ضرایب انتقال گرما.

با استفاده از معادله (۲-۱.۱۴) برای محاسبه \$Q\$ و مرتب کردن جمله‌ها، نتیجه می‌شود:

$$w\hat{C}_p(T_{b2} - T_{b1}) = h_1(\pi DL)(T_s - T_{b1}) \quad (۱۱-۱.۱۴)$$

و از آن نتیجه می‌گیریم:

$$h_1 = \frac{w\hat{C}_p(T_{b2} - T_{b1})}{\pi D^2(T_s - T_{b1})} \left(\frac{D}{L}\right) \quad (۱۲-۱.۱۴)$$

این رابطه فرمولی برای محاسبه \$h\_1\$ با استفاده از داده‌های بالاست.

به‌همین ترتیب، با استفاده از معادله‌های (۳-۱.۱۴) و (۴-۱.۱۴) رابطه‌های:

$$h_a = \frac{w\hat{C}_p(T_{b2} - T_{b1})}{\pi D^2(T_s - T_b)_a} \left(\frac{D}{L}\right) \quad h_{1n} = \frac{w\hat{C}_p(T_{b2} - T_{b1})}{\pi D^2(T_s - T_b)_{1n}} \left(\frac{D}{L}\right) \quad (۱۴, ۱۳-۱.۱۴)$$

برای به‌دست آوردن \$h\_a\$ و \$h\_{1n}\$ از روی داده‌ها به‌دست می‌آیند.

برای محاسبه \$h\_{1oc}\$، باید از داده‌های قبلی برای ترسیم منحنی پیوسته \$T\_b(z)\$، همانند شکل ۲-۱.۱۴، برای نشان دادن تغییر دمای توده سیال با \$z\$ در طولیل‌ترین لوله (۹۶ in.) استفاده کنیم. در این صورت معادله (۱۰-۱.۱۴) چنین نوشته می‌شود:

$$Q(z) + w\hat{C}_p T_{b1} = w\hat{C}_p T_b(z) \quad (۱۵-۱.۱۴)$$

با مشتق‌گیری از این عبارت نسبت به  $z$  و ترکیب کردن نتیجه با معادله (۱۵-۱.۱۴)، نتیجه می‌شود:

$$w\hat{C}_p \frac{dT_b}{dz} = h_{loc}\pi D(T_s - T_b) \quad (۱۶-۱.۱۴)$$

یا

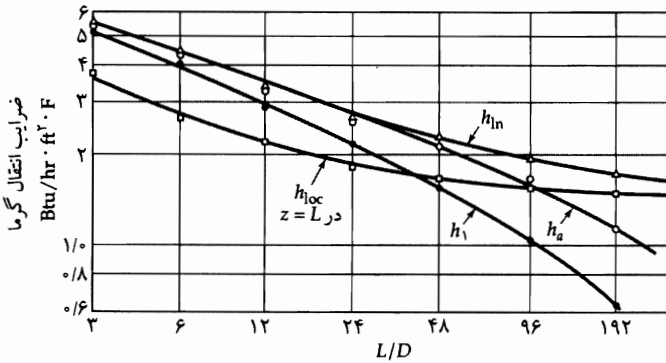
$$h_{loc} = \frac{w\hat{C}_p}{\pi D} \frac{1}{(T_s - T_b)} \frac{dT_b}{dz} \quad (۱۷-۱.۱۴)$$

چون  $T_s$  ثابت است، نتیجه می‌شود:

$$h_{loc} = -\frac{w\hat{C}_p}{\pi D^2} \frac{d \ln(T_s - T_b)}{d(z/L)} \left(\frac{D}{L}\right) \quad (۱۸-۱.۱۴)$$

مشتق این معادله به راحتی از روی نمودار  $(T_s - T_b)$  برحسب  $z/L$  به دست می‌آید. چون با مشتق‌گیری سرورکار داریم، به سختی می‌توانیم  $h_{loc}$  را با دقت تعیین کنیم.

نتایج محاسبه شده در شکل ۳-۱.۱۴ نشان داده شده است. توجه کنید که همه ضرایب، با افزایش  $L/D$  کاهش می‌یابند، اما  $h_{loc}$  کم‌تر از ضرایب دیگر تغییر می‌کنند. این ضرایب به سمت یک مجانب مشترک میل می‌کنند (نگاه کنید به مسئله ۱۴ ب. ۵. و شکل ۳-۱.۱۴). در جریان تلاطمی با دمای ثابت جدار رفتاری تقریباً مشابه مشاهده می‌شود، با این تفاوت که  $h_{loc}$  با سرعتی بسیار بیش‌تر به سمت مجانب میل می‌کند (نگاه کنید به شکل ۲-۳.۱۴).



شکل ۳-۱.۱۴ ضرایب انتقال گرمای محاسبه شده در مثال ۱-۱.۱۴.

### ۲.۱۴ محاسبات تحلیلی ضرایب انتقال گرما برای همرفت واداشته از میان لوله‌ها و شکاف‌ها

در فصل ۶ که ضرایب اصطکاک را تعریف و تشریح کردیم، گفتیم که در بعضی سیستم‌های جریان آرام بسیار ساده، می‌توانیم برای تعیین ضریب اصطکاک (بدون بُعد) به صورت تابعی از عدد رینولدز (بدون بُعد) فرمول‌های تحلیلی به دست بیاوریم. می‌خواهیم همین کار را در مورد ضریب انتقال گرما،  $h$ ، انجام دهیم که بدون بُعد نیست. با وجود این، می‌توانیم با آن کمیتی بدون بُعد،  $Nu = hD/k$ ، موسوم به عدد نوسلت را، با استفاده از رسانندگی گرمایی سیال  $k$  و طول مشخصه  $D$  به دست بیاوریم که باید برای هر سیستم جریان مشخص شود. دو گروه بدون بُعد و مرتبط دیگر که استفاده از آن‌ها متداول است، عبارت‌اند از: عدد استفان،  $St = Nu/Re Pr$  و ضریب چیلتون-کولبورن برای انتقال گرما،  $j_H = Nu/Re Pr^{1/3}$ . هر یک از این گروه‌های بدون بُعد را می‌توان با اندیس  $a$ ،  $ln$ ، یا  $m$ ، متناسب با اندیس عدد نوسلت «زینت بخشید».



دوباره به سراغ بخش ۸.۱۰ می‌رویم که در آن گرمایش سیال را در جریان آرام داخل لوله شرح دادیم و برای این کار همهٔ خواص سیال را ثابت گرفتیم. از معادله‌های (۳۳-۸.۱۰) و (۳۱-۸.۱۰)، می‌توانیم اختلاف بین دمای جدار و دمای تودهٔ سیال را به‌دست آوریم:

$$T_c - T_b = \left(4\zeta + \frac{11}{24}\right) \left(\frac{q \cdot R}{k}\right) - 4\zeta \left(\frac{q \cdot R}{k}\right) \\ = \frac{11}{24} \left(\frac{q \cdot R}{k}\right) = \frac{11}{48} \left(\frac{q \cdot D}{k}\right) \quad (1-2.14)$$

که در آن  $R$  و  $D$  شعاع و قطر لوله است. با حل کردن این معادله برای یافتن شار جدار، داریم:

$$q_0 = \frac{48}{11} \left(\frac{k}{D}\right) (T_c - T_b) \quad (2-2.14)$$

سپس، با استفاده از تعریف ضریب انتقال گرمای موضعی  $h_{loc}$ ، یعنی  $q_0 = h_{loc}(T_c - T_b)$ ، درمی‌یابیم که:

$$h_{loc} = \frac{48}{11} \left(\frac{k}{D}\right) \quad \text{یا} \quad Nu_{loc} = \frac{hD}{k} = \frac{48}{11} \quad (3-2.14)$$

این نتیجه، معادلهٔ (ل) در جدول ۱-۲.۱۴، برای جریان آرام سیالی با خواص ثابت و شار گرمای ثابت جدار، به‌ازای مقدار بسیار بزرگ  $z$  است. مدخل‌های دیگر جدول ۱-۲.۱۴ و ۲-۲.۱۴ را نیز می‌توان به‌روش مشابهی به‌دست آورد.<sup>۱</sup> سیالات نیوتونی با خواص فیزیکی ثابت در شکل ۱-۲.۱۴ بعضی از اعداد نوسلت برای سیالات با خواص فیزیکی ثابت در شکل ۱-۲.۱۴ نشان داده شده‌اند.<sup>۲</sup>

برای جریان متلاطم در لولهٔ مدور با شار گرمای ثابت، عدد نوسلت را می‌توان از معادلهٔ (۲۰-۴.۱۳) به‌دست آورد (که به‌نوبهٔ خود ریشه در معادلهٔ (ک) جدول ۱-۲.۱۴ دارد):<sup>۳</sup>

$$Nu_{loc} = \frac{Re \, Pr \sqrt{f/2}}{12.48 Pr^{1/2} - 7.853 Pr^{1/2} + 3.613 \ln Pr + 5.8 + 2.78 \ln\left(\frac{1}{45} Re \sqrt{f/8}\right)} \quad (4-2.14)$$

۱. این جدول‌ها از منبع زیر برگرفته شده‌اند:

R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1, Fluid Mechanics*, 1st edition, Wiley, New York, (1977), pp. 212-213. They are based, in turn, on W. J. Beek and R. Eggink, *De Ingenieur*, **74**, (35) Ch. 81-Ch. 89 (1962) and J. M. Valstar and W. J. Beek, *De Ingenieur*, **75**, (1), Ch. 1-Ch. 7 (1963).

۲. تناظر بین مدخل‌های جدول‌های ۱-۲.۱۴ و ۲-۲.۱۴ و مسئله‌های این کتاب به‌شرح زیر است:  
 (○) لولهٔ مدور، || = شکاف مسطح):

معادلهٔ (ج)	مسئلهٔ ۴.د۱۲: ○ ۵.د۱۲	نیوتونی آرام
معادلهٔ (و)	مسئلهٔ ۳.د۱۲: ○ ۵.د۱۲	نیوتونی آرام
معادلهٔ (ز)	مسئلهٔ ۹.ب۱۰ (الف): ○ ۹.ب۱۰ (ب)	جریان قالبی
معادلهٔ (ط)	مسئلهٔ ۷.د۱۲: ○ ۶.د۱۲	نیوتونی آرام
معادلهٔ (ک)	مسئلهٔ ۲.د۱۰: ○	غیرنیوتونی آرام
معادلهٔ (ل)	مسئلهٔ ۶.د۱۲	نیوتونی آرام

معادله‌های نظیر معادلهٔ (ک) در جدول‌های ۱-۲.۱۴ و ۲ برای جریان متلاطم، با معادله‌های (۱۹-۴.۱۳) و (۱۳-۱.ج) نشان داده شده‌اند.  
 3. O. C. Sandall, O. T. Hanna, and P. R. Mazet, *Canad. J. Chem. Eng.*, **58**, 443-447 (1980).

جدول ۲.۱۴ نتایج مجانبی برای عددهای نوسلت موضعی (جریان داخل لوله): الف ب ک

شار گرمای ثابت جدار $Nu_{loc} = h_{loc}D/k$		مدای ثابت جدار $Nu$		همه مقادیر عددهای موضعی هستند
(ز)	$Nu = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} \left( \frac{\langle v_z \rangle D^2}{\alpha z} \right)^{1/2}$	جریان قالی	(الف) $Nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\langle v_z \rangle D^2}{\alpha z} \right)^{1/2}$	جریان قالی
(ح)	$Nu = \frac{\gamma \Gamma(\frac{\gamma}{2})}{\gamma^{1/2} \Gamma(\frac{\gamma}{2})} \left[ \frac{\langle v_z \rangle D^2}{\alpha z} \left( -\frac{1}{\gamma} \frac{d\phi}{d\xi} \Big _{\xi=1} \right) \right]^{1/2}$	جریان آرام غیرنیوتنی	(ب) $Nu = \frac{\gamma}{\gamma^{1/2} \Gamma(\frac{\gamma}{2})} \left[ \frac{\langle v_z \rangle D^2}{\alpha z} \left( -\frac{1}{\gamma} \frac{d\phi}{d\xi} \Big _{\xi=1} \right) \right]^{1/2}$	جریان آرام غیرنیوتنی
(ط)	$Nu = \frac{\gamma \Gamma(\frac{\gamma}{2})}{\gamma^{1/2} \Gamma(\frac{\gamma}{2})} \left( \frac{\langle v_z \rangle D^2}{\alpha z} \right)^{1/2}$	جریان آرام نیوتنی	(ج) $Nu = \frac{\gamma}{\gamma^{1/2} \Gamma(\frac{\gamma}{2})} \left( \frac{\langle v_z \rangle D^2}{\alpha z} \right)^{1/2}$	جریان آرام نیوتنی
(ث)	$Nu = 8$	جریان قالی	(د) $Nu = 5.772$	جریان قالی
(ک)	$Nu = \left[ \gamma \int_0^1 \int_0^{\xi} \phi(\xi') d\xi' \right]^{-1}$	جریان آرام غیرنیوتنی	که در آن $Nu = \beta_1^2$ زیر است: $\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dX_n}{d\xi} \right) + \beta_n^2 \phi(\xi) X_n = 0$ ; $X_n'(0) = 0, X_n(1) = 0$	جریان آرام غیرنیوتنی
(ل)	$Nu = \frac{\gamma A}{\gamma} = 4.762$	جریان آرام نیوتنی	(ه) $Nu = 3.657$	جریان آرام نیوتنی

تذکره:

$\alpha = k/\rho C_p$  در این جا  $Re = D \langle v_z \rangle \rho / \mu$  با  $(v_z) D^2 / \alpha z = Re Pr(D/z)$  برای سیالات نیوتنی  $R = D/\gamma$  و  $\xi = r/R$  که در آن  $\phi(\xi) = v_z / \langle v_z \rangle$

b. W. J. Beek and R. Eggink, *De Ingenieur*, 74, No. 35, Ch. 81-89 (1962); erratum, 75, No. 1, Ch. 7 (1963).

ج) گروه  $(v_z) D^2 / \alpha z$  به صورت  $Gz \cdot (L/z)$  نوشته می‌شود که در آن  $Gz = (v_z) D^2 / \alpha L$  عدد گرتس نامیده می‌شود؛ در این جا  $L$  طول لوله پس از  $z = 0$  بنا برین ناحیه گرمایی ورودی با عدد گرتس بزرگ متناظر است.

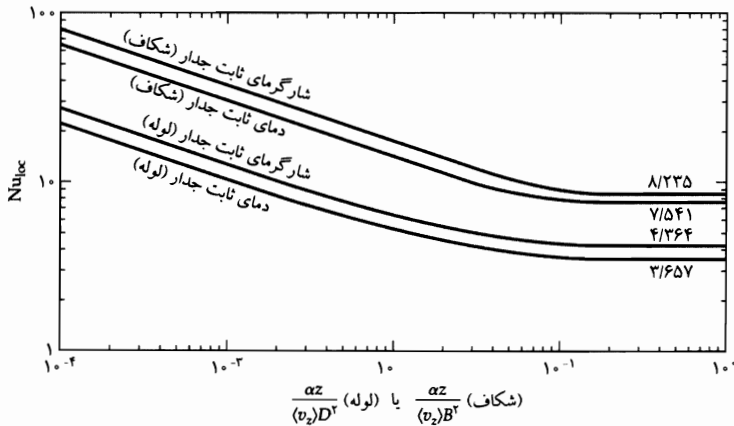
جدول ۲-۲-۱۴ نتایج مجانبی برای عددهای نوسلت موضعی (جریان در شکاف باریک): الف)  $Nu_{loc} = \frac{2h_{loc}B}{k}$

شار گرمای ثابت جدار		دمای ثابت جدار		همهٔ مقادیر عددهای موضعی هستند
		جریان قائمی	جریان قائمی	ناحیهٔ گرمایی درودی، $\frac{(v_z)B^2}{\alpha z} > 1$
(ا) $Nu = 2\sqrt{\pi} \left( \frac{(v_z)B^2}{\alpha z} \right)^{1/2}$	(الف) $Nu = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{(v_z)B^2}{\alpha z} \right)^{1/2}$	جریان قائمی	جریان قائمی	
(ب) $Nu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ \frac{(v_z)B^2}{\alpha z} \left( -\frac{d\phi}{d\sigma} \right)_{\sigma=1} \right]^{1/2}$	(ب) $Nu = \frac{4}{9^{1/2}\Gamma(\frac{3}{2})} \left[ \frac{(v_z)B^2}{\alpha z} \left( -\frac{d\phi}{d\sigma} \right)_{\sigma=1} \right]^{1/2}$	جریان آرام نیوتونی	جریان آرام نیوتونی	
(ج) $Nu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{(v_z)B^2}{\alpha z} \right)^{1/2}$	(ج) $Nu = \frac{4}{3^{1/2}\Gamma(\frac{3}{2})} \left( \frac{(v_z)B^2}{\alpha z} \right)^{1/2}$	جریان آرام نیوتونی	جریان آرام نیوتونی	
(د) $Nu = 1.2$	(د) $Nu = \pi^2 = 9.87$	جریان قائمی	جریان قائمی	جریان کاملاً شکل‌یافته گرمایی $\frac{(v_z)B^2}{\alpha z} < 1$
(ه) $Nu = \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\sigma \phi(\sigma') d\sigma' \right]^{-1}$	جریان آرام نیوتونی	جریان آرام نیوتونی	جریان آرام نیوتونی	
(و) $Nu = \frac{140}{11} = 12.73$	(و) $Nu = 7.541$	جریان آرام نیوتونی	جریان آرام نیوتونی	

الف) تذکر:  $\alpha = k/\rho C_p$  در این جا  $Re = \frac{2Bv_z}{\nu}$ ،  $\beta = \frac{\rho v_z B}{\mu}$  با  $(v_z)D^2/\alpha z = 2RePr(B/z)$  برای سیالات نیوتونی  $\beta = 2RePr(B/z)$  که در آن  $\sigma = y/B$ ،  $\phi(\sigma) = v_z/\alpha z$

b. J. M. Valstar and W. J. Beek, *De Ingenieur*, 75, No. 1, Ch. 1-7 (1963).

ج) گروه  $(v_z)D^2/\alpha z$  گاهی به صورت  $Gz \cdot (L/z)$  نوشته می‌شود که در آن  $Gz = (v_z)B^2/\alpha L$  عدد گرتس نامیده می‌شود؛ در این جا  $L$  طول لوله پس از  $z = 0$  است. بنابراین ناحیهٔ گرمایی درودی با عدد گرتس بزرگ متناظر است.



شکل ۲-۱۴ عدد نوسلت برای جریان آرام کاملاً شکل‌یافته سیالات نیوتونی با خواص فیزیکی ثابت:  $Nu_{loc} D/k$  برای لوله‌های مدور به قطر  $Nu_{loc} = 4h_{loc} B/k$  و  $D$  برای شکاف با نیم‌عرض  $B$ . عبارت‌های حدی در جدول‌های ۲-۲.۱۴ و ۲-۲.۱۴ ارائه شده‌اند.

این معادله فقط به‌ازای  $\alpha z / \langle v_z \rangle D^2 \gg 1$  برای سیالاتی با خواص فیزیکی ثابت، و برای لوله‌هایی بدون زبری سطح، صادق است. این معادله با موفقیت در گستره عدد پرانتل  $0.7 < Pr < 59$  به‌کار رفته‌است. توجه کنید که به‌ازای عددهای پرانتل بسیار بزرگ، از معادله (۲-۱۴) نتیجه می‌شود:

$$Nu_{loc} = 0.566 Re Pr^{1/2} \sqrt{f} \quad (2-14)$$

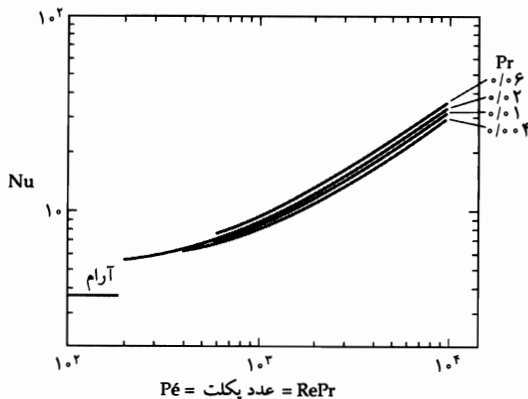
وابستگی  $Pr^{1/2}$  با حد  $Pr$  بزرگ در بخش ۶.۱۳ و معادله (۳-۱۳) توافق دقیق دارد. برای جریان متلاطم تفاوت اندکی بین  $Nu$  برای دمای ثابت جدار و برای شار گرمای ثابت جدار وجود دارد.

برای جریان متلاطم فلزات مذاب، که در آن‌ها عددهای پرانتل معمولاً از واحد کوچک‌ترند، دو نتیجه مهم وجود دارد. نوتر و اسلیشر<sup>۴</sup> معادله انرژی را، با استفاده از توزیع سرعت تلاطمی واقع‌گرایانه، به‌صورت عددی حل کردند و آهنگ انتقال گرما در جدار را به‌دست آوردند. نتایج نهایی با عبارت‌های تجربی، در دو حالت زیر برآزش خوبی داشتند:

$$Nu_{loc} = 4.8 + 0.156 Re^{0.85} Pr^{0.12} \quad (2-14) \text{ دمای ثابت جدار:}$$

$$Nu_{loc} = 6.3 + 0.167 Re^{0.85} Pr^{0.12} \quad (2-14) \text{ شار گرمای ثابت جدار:}$$

این معادله‌ها به  $L/D > 60$  و خواص فیزیکی ثابت محدود می‌شوند. معادله (۲-۱۴) در شکل ۲-۲.۱۴ نشان داده شده‌است.



شکل ۲-۱۴ عددهای نوسلت برای جریان متلاطم فلزات مذاب در لوله‌های مدور، براساس محاسبات نظری، R. H. Notter and C. A. Sleicher, *Chem. Eng. Sci.* **27**, 2073-2093 (1972).

4. R. H. Notter and C. A. Sleicher, *Chem. Eng. Sci.*, **27**, 2073-2093 (1972).

بر این نکته تأکید شده‌است که همهٔ نتایج این بخش به سیالاتی محدود می‌شود که خواص فیزیکی ثابت دارند. وقتی اختلاف دما در سیستم زیاد باشد، باید وابستگی دمایی ویسکوزیته، چگالی، ظرفیت گرمایی، و رسانندگی گرمایی را به حساب آورد. معمولاً این کار با استفاده از رابطه‌ای تجربی، مثلاً از طریق محاسبهٔ خواص فیزیکی در دمای متوسط مناسب، انجام می‌شود. در سرتاسر این فصل همهٔ خواص فیزیکی در دمای فیلم  $T_f$  محاسبه می‌شوند، مگر خلاف آن تصریح شده‌باشد؛ این دما چنین تعریف می‌شود:<sup>۵</sup>

(الف) برای لوله‌ها، شکاف‌ها، و سایر مجراها:

$$T_f = \frac{1}{4}(T_{o,a} + T_{b,a}) \quad (۸-۲.۱۴)$$

که در آن  $T_{o,a}$  متوسط حسابی دماهای سطح در دو انتها،  $T_{o,a} = \frac{1}{4}(T_{o,1} + T_{o,2})$  و  $T_{b,a}$  متوسط حسابی دماهای توده‌ای ورودی و خروجی است،  $T_{b,a} = \frac{1}{4}(T_{b,1} + T_{b,2})$ . هم‌چنین توصیه می‌شود که عدد رینولدز به صورت  $Re = D\langle\rho v\rangle/\mu = Dw/S\mu$  نوشته شود تا تغییرات ویسکوزیته، سرعت، و چگالی روی مقطعی به سطح  $S$  در نظر گرفته شود.

(ب) برای اجسام غوطه‌ور با دمای سطحی یکنواخت  $T_o$  در جریانی از مایع که با دمای یکنواخت  $T_\infty$  نزدیک می‌شود، عبارت است از:

$$T_f = \frac{1}{4}(T_o + T_\infty) \quad (۹-۲.۱۴)$$

برای سیستم‌های جریان شامل وضعیت‌های هندسی پیچیده‌تر، استفاده از روابط همبستگی تجربی برای ضرایب انتقال گرما ترجیح داده می‌شود. در بخش‌های آینده نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این نوع روابط همبستگی را با تلفیقی از تحلیل بُعدی و داده‌های تجربی به‌دست آورد.

### ۳.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای همرفت واداشته در لوله‌ها

در بخش قبل نشان دادیم که عددهای نوسلت برای بعضی از جریان‌های آرام را می‌توان با استفاده از اصول اولیه محاسبه کرد. در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه تحلیل بُعدی به‌صورت عامی از وابستگی عدد نوسلت به گروه‌های بدون بُعد مختلف منتهی می‌شود و این صورت فقط شامل نتایج بخش گذشته نیست و جریان متلاطم را نیز شامل می‌شود. سپس نمودار بدون بُعدی از عددهای نوسلت ارائه می‌دهیم که با ایجاد ارتباط بین داده‌های تجربی به‌دست آمده‌است. ابتدا تحلیل بُعدی بخش ۵.۱۱ را تعمیم می‌دهیم تا صورتی کلی برای روابط همبستگی ضرایب انتقال گرما در همرفت واداشته به‌دست آوریم. جریان آرام یا متلاطم حالت‌پایای سیالی نیوتونی را در لوله‌ای مستقیم به‌شعاع داخلی  $R$ ، مطابق شکل ۱۴-۳ در  $z = 0$  با سرعتی یکنواخت تا مجاورت جدار، و با دمای ورودی یکنواخت  $T_{b,1} (= T_1)$  وارد لوله می‌شود. جدار لوله عایق‌کاری شده‌است، مگر در ناحیه  $0 \leq z \leq L$  که در آن دمای یکنواخت سطح داخلی  $T_o$  با تأمین گرما از طریق چگالش بخار روی سطح خارجی، ثابت نگه داشته

5. W. J. M. Douglas and S. W. Churchill, *Chem. Eng. Prog. Symposium Series*, No. 18, 52, 23-28 (1956); E. R. G. Eckert, *Recent Advances in Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York (1961), pp. 51-81, Eq. (20);

حالت‌های مرجع مفصل‌تر در منبع زیر پیشنهاد شده‌است:

W. E. Stewart, R. Kilgour, and K.-T. Liu, University of Wisconsin-Madison Mathematics Research Center Report # 1310 (June 1973).

می‌شود. فعلاً خواص فیزیکی  $\rho, \mu, k, \hat{C}_p$  را ثابت فرض می‌کنیم. بعداً رابطهٔ تجربی به دست آمده در بخش ۲.۱۴ را تعمیم می‌دهیم تا وابستگی این خواص به دما در نظر گرفته شود.

از همان روشی استفاده می‌کنیم که در بخش ۲.۶ برای ضرایب اصطکاک استفاده کردیم. کار را با نوشتن عبارتی برای جریان گرمای لحظه‌ای از جدار لوله به داخل سیال، در سیستم توصیف شده در بالا آغاز می‌کنیم:

$$Q(t) = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( +k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} R d\theta dz \quad (۱-۳.۱۴)$$

که برای جریان آرام یا متلاطم معتبر است (در جریان آرام  $Q$  از زمان مستقل است). علامت + در این جا ظاهر می‌شود، زیرا گرما در جهت منفی  $r$  به سیستم اضافه می‌شود.

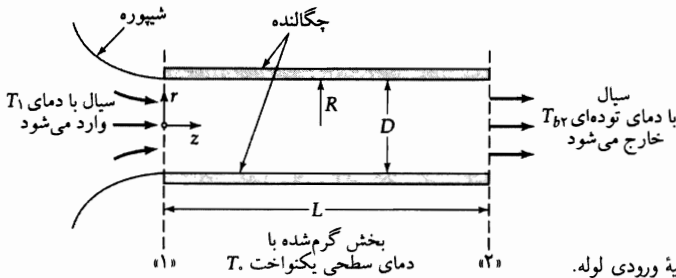
با برابر نهادن عبارت‌های مربوط به  $Q$  در معادله‌های (۲-۱.۱۴) و (۱-۳.۱۴)، و حل کردن این معادله‌ها برای یافتن  $h_1$  نتیجه می‌شود:

$$h_1(t) = \frac{1}{\pi DL(T_b - T_0)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( +k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} R d\theta dz \quad (۲-۳.۱۴)$$

سپس کمیت‌های بدون بُعد  $\check{z} = z/D, \check{r} = r/D$  و  $\check{T} = (T - T_0)/(T_b - T_0)$  را معرفی می‌کنیم و عبارت بالا را در  $D/k$  ضرب می‌کنیم تا عبارتی برای عدد نوسلت  $Nu_1$  به دست آید:

$$Nu_1(t) = \frac{1}{2\pi L/D} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\partial \check{T}}{\partial \check{r}} \right) \Big|_{\check{r}=1/2} d\theta d\check{z} \quad (۳-۳.۱۴)$$

بنابراین عدد نوسلت (لحظه‌ای) اساساً گرادیان دمای بدون بُعد است که روی سطح انتقال گرما متوسط‌گیری شده است.



شکل ۱-۳.۱۴ انتقال گرما در ناحیهٔ ورودی لوله.

از لحاظ اصولی می‌توان گرادیان دمای بدون بُعدی را که در معادلهٔ (۳-۳.۱۴) ظاهر می‌شود، با مشتق‌گیری از عبارت مربوط به  $\check{T}$ ، که از حل کردن معادله‌های (۱۱-۵.۷، ۸، ۹) با شرایط مرزی زیر حاصل می‌شود، محاسبه کرد:

$$(۴-۳.۱۴) \quad \text{در } \check{z} = 0, \check{v}_z = \delta, \text{ به‌ازای } \frac{1}{4} < \check{r} \leq 1.$$

$$(۵-۳.۱۴) \quad \text{در } \check{r} = \frac{1}{4}, \check{v}_z = 0, \text{ به‌ازای } \check{z} \geq 0.$$

$$(۶-۳.۱۴) \quad \text{در } \check{r} = 0 \text{ و } \check{z} = 0, \text{ داریم } \mathcal{P} = 0.$$

$$(۷-۳.۱۴) \quad \text{در } \check{z} = 0, \text{ داریم } \check{T} = 1, \text{ به‌ازای } \frac{1}{4} < \check{r} \leq 1.$$

$$(۸-۳.۱۴) \quad \text{در } \check{r} = \frac{1}{4}, \text{ داریم } \check{T} = 0, \text{ به‌ازای } 0 \leq \check{z} \leq L/D.$$

که در آن  $\check{v} = \mathbf{v}/\langle v_z \rangle_1$  و  $\check{P} = (P - P_1)/\rho\langle v_z \rangle_1^2$ . چنان‌که در بخش ۲.۶ دیدیم، از جمله‌های  $\partial^2/\partial \check{z}^2$  در معادله‌های تغییر، با استدلال مرتبه بزرگی شبیه به استدلال بخش ۴.۴ چشم‌پوشی کردیم. با حذف این جمله‌ها، انتقال گرما و اندازه حرکت بالادستی نادیده گرفته می‌شود، به طوری که جواب‌های بالادستی صفحه ۲ در شکل ۱۴-۳.۱ به  $L/D$  وابسته نیستند.

از معادله‌های (۵.۱۱، ۷، ۸، ۹) و این شرایط مرزی، نتیجه می‌شود که توزیع دمای لحظه‌ای بدون بُعد باید به صورت زیر باشد:

$$\check{T} = \check{T}(\check{r}, \theta, \check{z}, \check{t}; \text{Re}, \text{Pr}, \text{Br}) \quad \text{بازای } 0 \leq \check{z} \leq L/D \quad (۹-۳.۱۴)$$

با قرار دادن این رابطه در معادله (۳-۳.۱۴) این نتیجه حاصل می‌شود که  $\text{Nu}_1(\check{t}) = \text{Nu}_1(\text{Re}, \text{Pr}, \text{Br}, L/D, \check{t})$ . وقتی این رابطه روی بازه‌ای به اندازه کافی طویل که همه اختلالات تلاطمی را شامل شود، متوسط‌گیری شود، به عبارت زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{Nu}_1 = \text{Nu}_1(\text{Re}, \text{Pr}, \text{Br}, L/D) \quad (۱۰-۳.۱۴)$$

وقتی جریان در صفحه ۱ کاملاً شکل‌یافته باشد، رابطه مشابهی صادق است. اگر، چنان‌که غالباً مشاهده می‌شود، گرمایش اتلاف ویسکوز اندک باشد، می‌توان عدد برینکمن را حذف کرد. در نتیجه معادله (۱۰-۳.۱۴) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\text{Nu}_1 = \text{Nu}_1(\text{Re}, \text{Pr}, L/D) \quad (۱۱-۳.۱۴)$$

بنابراین تحلیل بُعدی به ما می‌گوید که، برای انتقال گرمای همرفتی واداشته در لوله‌های مدور با دمای جدار ثابت، مقادیر تجربی ضریب انتقال گرمای  $h_1$  را می‌توان با تعریف  $\text{Nu}_1$  به صورت تابعی از عدد رینولدز، عدد پراتل، و نسبت هندسی  $L/D$  به هم مربوط کرد. این وضعیت را باید با وضعیت مشابه، اما ساده‌تر، مربوط به ضریب اصطکاک (معادله‌های ۹-۲.۶ و ۱۰) مقایسه کرد.

با همین استدلال به عبارت‌های مشابهی برای سایر ضرایب انتقال گرمای تعریف شده می‌رسیم. می‌توان نشان داد (نگاه کنید به مسئله ۱۴-ب-۴) که

$$\text{Nu}_a = \text{Nu}_a(\text{Re}, \text{Pr}, L/D) \quad (۱۲-۳.۱۴)$$

$$\text{Nu}_{\text{in}} = \text{Nu}_{\text{in}}(\text{Re}, \text{Pr}, L/D) \quad (۱۳-۳.۱۴)$$

$$\text{Nu}_{\text{loc}} = \text{Nu}_{\text{loc}}(\text{Re}, \text{Pr}, z/D) \quad (۱۴-۳.۱۴)$$

که در آن  $\text{Nu}_a = h_a D/k$ ،  $\text{Nu}_{\text{in}} = h_{\text{in}} D/k$  و  $\text{Nu}_{\text{loc}} = h_{\text{loc}} D/k$ . یعنی متناظر با هر ضریب انتقال گرما یک عدد نوسلت وجود دارد. البته این عددهای نوسلت باهم رابطه دارند (نگاه کنید به مسئله ۱۴-ب-۵). این صورت‌های کلی تابعی برای عددهای نوسلت مبنای علمی مستحکمی دارند، زیرا فقط شامل تحلیل بُعدی معادله‌های تغییر و شرایط مرزی‌اند.

تا این‌جا فرض کردیم که خواص فیزیکی در گستره دمایی موردنظر در سیستم جریان ثابت‌اند. در پایان بخش ۲.۱۴ نشان دادیم که محاسبه خواص فیزیکی در دمای فیلم رابطه تجربی مناسبی را نتیجه می‌دهد. اما، به‌ازای اختلاف دماهای بسیار زیاد، ممکن است تغییرات ویسکوزیته سبب آن چنان اعوجاجی در توزیع سرعت شود که

منظور کردن آن را، از طریق معرفی یک گروه بدون بُعد دیگر،  $\mu_b/\mu_0$ ، ضروری سازد؛ در این گروه،  $\mu_b$  ویسکوزیته در دمای متوسط حسابی توده سیال و  $\mu_0$  ویسکوزیته در دمای متوسط حسابی جدار است.<sup>۱</sup> سپس می‌توان نوشت:

$$Nu = Nu(Re, Pr, L/D, \mu_b/\mu_0) \quad (۱۵-۳-۱۴)$$

به نظر می‌رسد این نوع رابطه همبستگی نخستین بار توسط سیدرو نیت ارائه شد. اگر علاوه بر آن، چگالی تغییرات چشم‌گیر داشته باشد، آن‌گاه ممکن است همرفت آزاد نیز تا حدودی انجام شود. در روابط همبستگی، با گنجاندن عدد گراسهوف، همراه با سایر گروه‌های بدون بُعد، می‌توان این اثر را به حساب آورد. این نکته را در بخش ۶.۱۴ بیش‌تر بیگیری می‌کنیم. حال اندکی درنگ می‌کنیم تا اهمیت بحث بالا را، در پی‌ریزی روابط همبستگی انتقال گرما، نشان دهیم. ضریب انتقال گرمای  $h$  به هشت کمیت فیزیکی وابسته است  $(D, \langle v \rangle, \rho, \mu_0, \mu_b, \hat{C}_p, k, L)$ . اما معادله (۱۵-۳-۱۴) به ما می‌گوید که با نوشتن  $Nu$  به صورت تابعی از فقط چهار گروه بدون بُعد  $(Re, Pr, L/D, \mu_b/\mu_0)$  این وابستگی را می‌توان به صورت خلاصه‌تری نشان داد. به این ترتیب، به جای تهیه داده‌های  $h$  به ازای ۵ مقدار از هریک از هشت کمیت فیزیکی مجزا (۵<sup>۸</sup> آزمایش)، می‌توانیم  $h$  را به ازای ۵ مقدار گروه‌های بدون بُعد (۵<sup>۴</sup> آزمایش) اندازه‌گیری کنیم، که صرفه‌جویی بسیار چشم‌گیری در زمان و کار است.

دورنمای کلی خوبی از انتقال گرما در لوله‌های مدور با دمای جدار تقریباً ثابت را می‌توان با استفاده از رابطه همبستگی سیدرو و تیت<sup>۲</sup> به دست آورد که در شکل ۲-۳-۱۴ نشان داده شده است. این رابطه به صورت معادله (۱۵-۳-۱۴) است. با آزمایش مشخص شده است که گذار به جریان متلاطم، حتی وقتی  $Re^{۰.۲}$  ویسکوزیته در جهت شعاعی تغییرات چشم‌گیر داشته باشد، معمولاً در حدود  $Re = 2100$  آغاز می‌شود.

برای جریان به شدت متلاطم، منحنی‌های  $L/D > 10$  به یک منحنی همگرا می‌شوند. به ازای  $Re > 20000$  این منحنی با معادله زیر توصیف می‌شود:

$$Nu_{ln} = 0.026 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left( \frac{\mu_b}{\mu_0} \right)^{0.14} \quad (۱۶-۳-۱۴)$$

۱. با قرار دادن ویسکوزیته وابسته به زمان معادله‌های تغییر، که توسط بسط تیلر حول دمای جدار توصیف می‌شود، می‌توان نسبت ویسکوزیته را به دست آورد:

$$\mu = \mu_0 + \frac{\partial \mu}{\partial T} \Big|_{T=T_0} (T - T_0) + \dots \quad (۱۵-۳-۱۴ الف)$$

وقتی این سری بریده شود و خارج قسمت دیفرانسیلی با خارج قسمت تقاضلی تقریب زده شود، نتیجه می‌شود:

$$\mu \cong \mu_0 + \left( \frac{\mu_b - \mu_0}{T_b - T_0} \right) (T - T_0) \quad (۱۵-۳-۱۴ ب)$$

یا، با مرتب کردن جمله‌ها،

$$\frac{\mu}{\mu_0} \cong 1 + \left( \frac{\mu_b}{\mu_0} - 1 \right) \left( \frac{T - T_0}{T_b - T_0} \right) \quad (۱۵-۳-۱۴ ج)$$

به این ترتیب، نسبت ویسکوزیته در معادله حرکت، و بنابراین در رابطه همبستگی بدون بُعد ظاهر می‌شود.

2. E. N. Sieder and G. E. Tate, *Ind. Eng. Chem.*, **28**, 1429-1345 (1936).

3. A. P. Colburn, *Trans. AICHE*, **29**, 174-210 (1933).

آلن فیلیپ کولبورن (۱۹۵۵-۱۹۰۴)، رئیس دانشگاه دلور (۱۹۵۵-۱۹۵۰)، سهم مهمی در حوزه‌های انتقال گرما و انتقال جرم داشت که از جمله می‌توان به پی‌ریزی «روابط چیلتون-کولبورن» اشاره کرد.



این معادله داده‌های تجربی دسترس‌پذیر را با تقریب  $\pm 2\%$ ، در گستره  $10^4 < Re < 10^5$  و  $0.6 < Pr < 100$  به دست می‌دهد.

برای جریان آرام، خطوط نزولی سمت چپ از معادله زیر به دست می‌آیند:

$$Nu_{ln} = 1.86 \left( Re Pr \frac{D}{L} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu_b}{\mu_s} \right)^{0.14} \quad (17-3.14)$$

که بر معادله (ج) در جدول ۱۴-۲ و مسئله ۱۲-۴ مبتنی است. ضریب عددی در معادله (ج) در عامل  $\frac{3}{4}$  ضرب شده تا از  $h_{loc}$  به  $h_{ln}$  تبدیل شود، و سپس اصلاحات تجربی دیگری انجام شده تا انحرافات ناشی از خواص فیزیکی متغیر به حساب آورده شود. به این ترتیب مشاهده می‌شود که چگونه می‌توان رابطه همبستگی تجربی رضایت‌بخشی را با اصلاح نتیجه حاصل از روش تحلیلی به دست آورد. معادله (۱۷-۳-۱۴) با تقریبی در حدود  $2\%$  برای  $Re Pr D/L > 10$  صادق است، اما برای مقادیر پایین‌تر  $Re Pr D/L$  مقدار  $h_{ln}$  را پایین برآورد می‌کند. ظهور  $Pr^{1/3}$  در معادله‌های (۱۶-۳-۱۴) و (۱۷-۳-۱۴) با مجانب عدد پرانتل بزرگی که در بخش‌های ۶-۱۳ و ۴-۱۲ به دست آمد، سازگار است.

ناحیه گذار، تقریباً بین  $8000 < Re < 21000$  در شکل ۳-۱۴، به خوبی مطالعه نشده است و معمولاً در صورت امکان در طراحی از آن اجتناب می‌شود. منحنی‌های این ناحیه با اندازه‌گیری‌های تجربی<sup>۲</sup> پشتیبانی می‌شوند، اما نسبت به بقیه نمودار کم‌تر قابل اعتمادند.

مشخصه‌های عمومی منحنی‌های شکل ۳-۱۴ شایان بررسی دقیق است. توجه کنید که برای بخش گرم‌شده‌ای با  $L$  و  $D$  مفروض، و سیالی با خواص فیزیکی مفروض، مختص عرض با افزایش دمای بدون بعد سیالی که از این بخش می‌گذرد، یعنی با  $(T_{b2} - T_{b1}) / (T_s - T_b)_{ln}$ ، متناسب است. تحت این شرایط، وقتی آهنگ جریان (یا عدد رینولدز) افزایش می‌یابد، دمای سیال خروجی ابتدا کاهش می‌یابد تا  $Re$  به حدود  $2100$  برسد، سپس افزایش می‌یابد تا  $Re$  به حدود  $8000$  برسد، و سرانجام دوباره کاهش می‌یابد. تأثیر  $L/D$  در  $h_{ln}$  در جریان آرام چشم‌گیر است، اما به ازای  $Re > 8000$  با  $L/D > 60$  اهمیت خود را از دست می‌دهد.

هم‌چنین به این نکته توجه کنید که شکل ۳-۱۴ از لحاظی شبیه نمودار ضریب اصطکاک در شکل ۲-۲۶ است، اگرچه وضعیت فیزیکی آن‌ها کاملاً متفاوت است. در گستره بسیار تلاطمی ( $Re > 10000$ ) مختص عرض انتقال گرما با  $f/2$  برای لوله‌های طویل جدارصاف مورد نظر تقریباً در توافق است. این نکته را نخستین بار کولبورن<sup>۳</sup> اعلام، و تشابه تجربی زیر را برای لوله‌های طویل جدارصاف پیشنهاد کرد:

$$j_{H,ln} \approx \frac{1}{3} f \quad (Re > 10000) \quad (18-3.14)$$

۴. معادله (ج) جواب مجانبی مسئله گرانس است که یکی از مسئله‌های کلاسیک همرفت گرما به شمار می‌رود:

L. Graetz, *Ann. d. Physik*, **13**, 79-94 (1883), **25**, 337-357 (1885).

برای آشنایی با مجانب در معادله (ج) نگاه کنید به

J. L ev eque, *Ann. Mines (Series 12)*, **13**, 201-299, 305-362, 381-415 (1928).

جمع‌بندی دامنه‌داری را می‌توانید در منبع زیر بیابید:

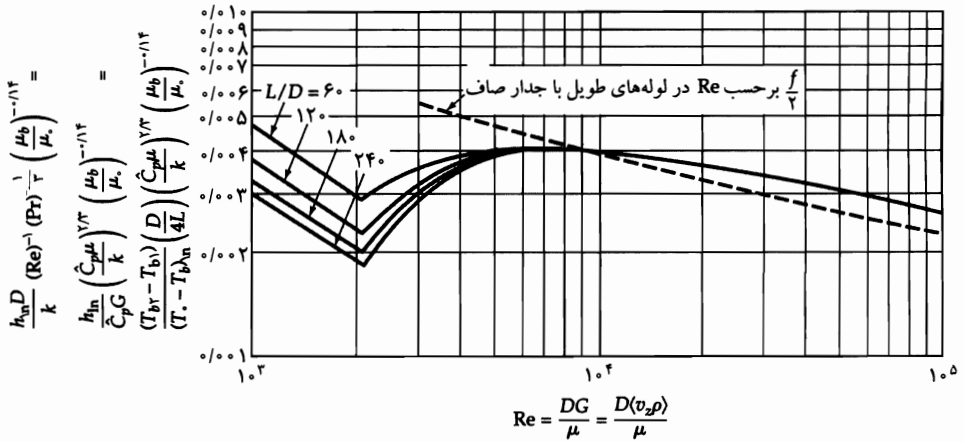
M. A. Ebadian and Z. F. Dong, Chapter 5 of *Handbook of Heat Transfer*, 3rd edition, (W. M.

Rohsenow, J. P. Hartnett, and Y. I. Cho, eds.), McGraw-Hill, New York (1998).

که در آن:

$$j_{H,ln} = \frac{Nu_{ln}}{Re Pr^{1/2}} = \frac{h_{ln}}{(\rho v) \hat{C}_p} \left( \frac{\hat{C}_p \mu}{k} \right)^{2/3} = \frac{h_{ln} S}{w \hat{C}_p} \left( \frac{\hat{C}_p \mu}{k} \right)^{2/3} \quad (۱۹-۳.۱۴)$$

در رابطه بالا  $S$  سطح مقطع لوله، و  $w$  آهنگ جریان جرمی در لوله است و  $f/2$  را می‌توان با استفاده از  $Re = Dw/S\mu = 4w/\pi D\mu$  از شکل ۲-۲.۶ به دست آورد. بدیهی است که تشابه معادله (۱۹-۳.۱۴) در زیر  $Re = 10000$  معتبر نیست. برای لوله‌های جدارزیر با جریان متلاطم کاملاً شکل‌یافته، این تشابه کاملاً متغی می‌شود، زیرا  $f$  بیش‌تر از زبری تأثیر می‌پذیرد تا  $j_H$ .



شکل ۲-۳.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای جریان کاملاً شکل‌یافته در لوله‌های جدارصاف. خطوط جریان آرام را نباید درگستره  $Re Pr D/L < 10$  به کار برد که با  $(T_w - T_b)_2 / (T_w - T_b)_1 < 0.2$  متناظر است. منحنی‌های جریان آرام بر داده‌های مربوط به  $Re Pr D/L \gg 10$  و دمای نسبتاً ثابت جدار مبتنی‌اند؛ تحت این شرایط،  $h_a$  و  $h_{ln}$  از هم تشخیص داده نمی‌شوند. ما استفاده از  $h_{ln}$  را توصیه می‌کنیم، اما سیدر و تیت استفاده از  $h_a$  را توصیه کرده‌اند؛ توصیه ما در محاسبات متداول در طراحی مبادله‌کن گرما محافظه‌کارانه‌تر است.

یک نکته دیگر در مورد شکل ۲-۳.۱۴ به کاربرد آن در مورد مجراهای با مقطع غیردایره‌ای مربوط است. برای جریان بسیار متلاطم، می‌توان از شعاع هیدرولیکی میانگین، طبق معادله (۱۶-۲.۶) استفاده کرد. برای استفاده از آن رابطه تجربی، در همه جا در عددهای رینولدز و نوسلت، به جای  $D$  جمله  $4R_h$  قرار داده می‌شود.



طراحی گرم‌کن لوله‌ای

هوا با دمای  $70^\circ F$  و فشار ۱ اتمسفر، با آهنگ جریان  $70 \text{ lb}_m/\text{hr}$  در لوله‌ای به قطر داخلی  $2 \text{ in.}$  جریان دارد. بخشی از لوله را گرم می‌کنیم تا دمای سطح داخلی آن به  $250^\circ F$  برسد و دمای هوا را به  $230^\circ F$  افزایش دهد. چه طولی از لوله را باید گرم کرد؟

حل

دمای متوسط حسابی توده هوا  $T_{ba} = 150^\circ F$  و دمای فیلم  $T_f = \frac{1}{2}(150 + 250) = 200^\circ F$  در این دما خواص هوا عبارت‌اند از:  $k = 0.018 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot F$ ,  $\hat{C}_p = 0.242 \text{ Btu/lb}_m \cdot F$ ,  $\mu = 0.052 \text{ lb}_m/\text{ft} \cdot \text{hr}$

و  $Pr = \hat{C}_p \mu / k = 0.70$ . ویسکوزیته هوا در  $150^\circ F$  و  $250^\circ F$ ، به ترتیب، برابر است با:  $0.70$  و  $0.70$  lb<sub>m</sub>/ft · hr، به طوری که نسبت ویسکوزیته عبارت است از:  $0.70/0.55 = 0.89$ . بنابراین، عدد رینولدز، محاسبه شده در دمای فیلم  $200^\circ F$ ، برابر است با:

$$Re = \frac{Dw}{S\mu} = \frac{fw}{\pi D\mu} = \frac{f(70)}{\pi(2/12)(0.55)} = 1.03 \times 10^4 \quad (20-3.14)$$

از شکل ۲-۳.۱۴ نتیجه می‌شود:

$$\frac{(T_{br} - T_{bi})}{(T_s - T_b)_{ln}} \frac{D}{fL} Pr^{2/3} \left( \frac{\mu_b}{\mu_s} \right)^{-0.14} = 0.0039 \quad (21-3.14)$$

وقتی این معادله برای یافتن  $L/D$  حل شود، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{L}{D} &= \frac{1}{f(0.0039)} \frac{(T_{br} - T_{bi})}{(T_s - T_b)_{ln}} Pr^{2/3} \left( \frac{\mu_b}{\mu_s} \right)^{-0.14} \\ &= \frac{1}{f(0.0039)} \frac{(230 - 70)}{72.8} (0.70)^{2/3} (0.89)^{-0.14} \\ &= \frac{1}{f(0.0039)} \frac{160}{72.8} (0.788)(1.02) = 113 \quad (22-3.14) \end{aligned}$$

بنابراین طول لازم برابر است با:

$$L = 113D = (113)(2/12) = 19 \text{ ft} \quad (23-3.14)$$

اگر  $Re_b$  خیلی کوچک‌تر بود، تخمین زدن  $L/D$  قبل از قرائت از روی شکل ۲-۳.۱۴ ضرورت می‌یافت، و به این ترتیب باید از فرایند آزمون و خطا استفاده می‌کردیم.

توجه کنید که در این مسئله مجبور نبودیم  $h$  را محاسبه کنیم. اما در مسئله‌های پیچیده‌تر، مانند مبادله گرما بین دو سیال، که جداری بین آن‌هاست، محاسبه عددی  $h$  ضرورت دارد.

#### ۴.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای همرفت واداشته در اطراف اجسام غوطه‌ور

موضوع دیگری که در صنعت اهمیت دارد، انتقال گرما از جسمی، یا به جسمی است که سیالی در اطراف آن جریان دارد. این جسم ممکن است نسبتاً ساده باشد، مانند استوانه یا کره، یا پیچیده‌تر باشد، مانند «دسته‌لوله» تشکیل شده از مجموعه‌ای از لوله‌های استوانه‌ای با جریانی از گاز یا مایع که بین آن‌ها جاری است. در این جا فقط چند رابطه همبستگی انتخابی برای سیستم‌های ساده را بررسی می‌کنیم: صفحه تخت، کره، و استوانه. در مراجعی که در ابتدای فصل معرفی شدند، می‌توانید تعداد زیادی رابطه همبستگی دیگر را پیدا کنید.

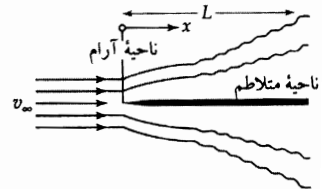
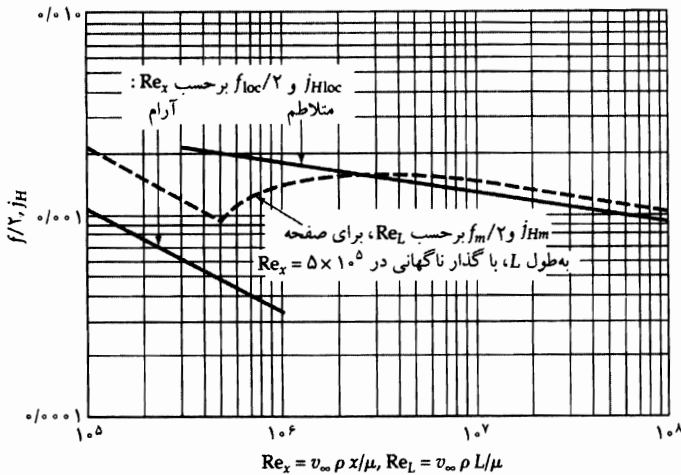
#### جریان روی صفحه تخت

ابتدا جریان روی صفحه‌ای تخت را بررسی می‌کنیم که موازی با جریان است و سطح آن در دمای  $T_0$  است و جریانی با دمای یکنواخت  $T_\infty$  و سرعت یکنواخت  $v_\infty$  به آن نزدیک می‌شود. ضریب انتقال گرمای  $h_{loc} = q_0 / (T_0 - T_\infty)$  و ضریب اصطکاک  $f_{loc} = \tau_0 / \frac{1}{2} \rho v_\infty^2$  در شکل ۱-۱.۱۴ نشان داده شده‌است. در ناحیه آرام، که معمولاً

در نزدیکی لبه جلوی صفحه است، عبارت‌های نظری زیر به دست می‌آیند (نگاه کنید به معادله (۴.۱۴-۳)، هم‌چنین به معادله‌های (۱۲-۴.۱۴)، (۱۲-۴.۱۴) و (۱۶-۴.۱۴):

$$\frac{1}{\sqrt{x}} f_{loc} = + \frac{\mu(\partial v_x / \partial y)|_{y=0}}{\rho v_{\infty}^2} = f''(0) \sqrt{\frac{\mu}{2xv_{\infty}\rho}} = 0,332 Re_x^{-1/2} \quad (1-4.14)$$

$$Nu_{loc} = \frac{h_{loc}x}{k} = \frac{x}{(T_{\infty} - T_0)} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 2 \sqrt{\frac{37}{126}} Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (2-4.14)$$



شکل ۴-۱۴ ضرایب انتقال برای صفحه تخت در جریان مماسی.

چنان‌که در جدول ۴-۱۲ نشان داده شد، مقدار دقیق‌تر ضریب عددی معادله (۲-۴.۱۴) مقداری است که پول‌هاوزن اعلام کرده است؛ یعنی ۰,۳۳۲. اگر از این مقدار استفاده کنیم، از معادله (۲-۴.۱۴) نتیجه می‌شود:

$$j_{H,loc} = \frac{Nu_{loc}}{Re Pr^{1/3}} = \frac{h_{loc}}{\rho C_p v_{\infty}} \left( \frac{\hat{C}_p \mu}{k} \right)^{1/3} = 0,332 Re_x^{-1/2} \quad (3-4.14)$$

چون ضریب عددی در معادله (۳-۴.۱۴) همان است که در معادله (۱-۴.۱۴) دیدیم، عبارت:

$$j_{H,loc} = \frac{1}{\sqrt{x}} f_{loc} = 0,332 Re_x^{-1/2} \quad (4-4.14)$$

برای تشابه کولبورن بین انتقال گرما و اصطکاک سیال به دست می‌آید. این عبارت قابل پیش‌بینی بود زیرا در جریانی با این وضعیت هندسی، «پسای شکل» وجود ندارد.

معادله (۴-۴.۱۴) برای سیالاتی با خواص فیزیکی ثابت به دست آمد. وقتی خواص فیزیکی در دمای فیلم  $T_f = \frac{1}{4}(T_0 + T_{\infty})$  محاسبه شوند، معادله (۳-۴.۱۴) برای گازها<sup>۲</sup> بهتر قابل کاربرد است. تشابه معادله (۴-۴.۱۴) برای  $Pr > 0,6$  دقتی در حدود ۲٪ دارد، اما در عددهای پرانتل پایین‌تر دقت خود را از دست می‌دهد.

۱. معادله (۱-۴.۱۴) ابتدا در منبع زیر مطرح شد:

H. Blasius, *Z. Math. Phys.*, **56**, 1-37 (1908).

معادله (۳-۴.۱۴) نیز نخستین بار در منبع زیر مطرح شد:

E. Pohlhausen, *Z. angew. Math. Mech.*, **1**, 115-121 (1921).

2. E. R. G. Eckert, *Trans. ASME*, **56**, 1273-1283 (1956).

این مقاله شامل جریان‌های پرسرعت نیز هست که در آن‌ها تراکم‌پذیری و اتلاف ویسکوز اهمیت پیدا می‌کند.

برای جریان‌های بسیار متلاطم، تشابه کولبورن با زهم با دقت نسبتاً خوبی برقرار است و  $f_{loc}$  با منحنی تجربی شکل ۱۴-۱۳ نشان داده می‌شود. گذار بین جریان آرام و متلاطم شبیه گذار مربوط به لوله‌های شکل ۱۴-۱۳ است، اما پیش‌بینی حدود ناحیه گذار دشوارتر است. برای صفحه‌های هموار تخت، با لبه‌های تیز، در جریان هم‌دما، گذار معمولاً در عدد رینولدز  $Re_x = xv_{\infty}\rho/\mu$  برابر  $10^5$  تا  $3 \times 10^6$  شروع می‌شود و در عدد رینولدزی  $50\%$  بالاتر از این، تقریباً کامل می‌شود.

### جریان در اطراف کره

در مسئله ۱۰ ب. ۱ نشان داده شد که عدد نوسلت برای کره‌ای واقع در سیالی ساکن برابر ۲ است. برای این کره‌ها با دمای سطح  $T_s$  در سیال جاری که با سرعت یکنواخت  $v_{\infty}$  نزدیک می‌شود، میانگین عدد نوسلت از رابطه تجربی زیر به دست می‌آید:<sup>۳</sup>

$$Nu_m = 2 + 0.6 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (5-4.14)$$

این نتیجه برای پیش‌بینی انتقال گرما از قطره‌ها و حباب‌ها، یا به قطره‌ها و حباب‌ها سودمند است. رابطه همبستگی دیگری که کاربرد آن موفقیت‌آمیز بوده، چنین است:<sup>۴</sup>

$$Nu_m = 2 + (0.4 Re^{1/2} + 0.6 Re^{2/3}) Pr^{0.4} \left( \frac{\mu_{\infty}}{\mu_s} \right)^{1/4} \quad (6-4.14)$$

که در آن خواص فیزیکی پدیدار شده در  $Re$ ،  $Nu_m$ ،  $Pr$  در دمای جریان نزدیک‌شونده ارزیابی می‌شوند. این رابطه همبستگی برای  $10^4 < Re < 3.5 \times 10^5$ ،  $0.71 < Pr < 380$ ، و  $1/7 < \mu_{\infty}/\mu_s < 3/2$  توصیه می‌شود. برخلاف معادله (۴-۵.۱۴)، این معادله در حد، وقتی  $Pr \rightarrow \infty$  معتبر نیست.

### جریان در اطراف استوانه

استوانه‌ای که در سیالی ساکن با وسعت نامتناهی قرار دارد، جواب حالت پایا را نمی‌پذیرد. بنابراین عدد نوسلت برای استوانه همان شکلی را ندارد که برای کره دارد. ویتیکر رابطه زیر را برای عدد نوسلت<sup>۴</sup> در گستره  $10^5 < Re < 10^6$ ،  $0.67 < Pr < 300$ ، و  $5/2 < \mu_{\infty}/\mu_s < 0.25$  توصیه می‌کند:

$$Nu_m = (0.4 Re^{1/2} + 0.6 Re^{2/3}) Pr^{0.4} \left( \frac{\mu_{\infty}}{\mu_s} \right)^{1/4} \quad (7-4.14)$$

در این جا، مانند معادله (۶-۴.۱۴)، مقادیر ویسکوزیته و رسانندگی گرمایی در  $Re$  و  $Pr$  همان است که در دمای جریان تقرب دیدیم. نتایج مشابهی برای مجموعه‌های استوانه‌ها، که در انواع خاصی از مبادله‌کن گرما به کار می‌روند، قابل‌دسترس است.<sup>۴</sup>

رابطه همبستگی<sup>۵</sup> دیگری که بر برازش منحنی مجموعه داده‌های ضریب انتقال گرما که مک‌آدامز گردآوری کرده،<sup>۳</sup>  $3. W. E. Ranz and W. R. Marshall, Jr., Chem. Eng. Prog., 48, 141-146, 173-180 (1952). N. Frössling, Gerlands Beitr, Geophys., 52, 170-216 (1938)$  در این منبع برای نخستین بار رابطه همبستگی از این نوع مطرح شد، با این تفاوت که در جمله آخر، به جای ضریب  $0.6$  از ضریب  $0.552$  استفاده شده‌بود.

4. S. Whitaker, *Fundamental Principles of Heat Transfer*, Krieger Publishing Co., Malabar, Fla. (1977), pp. 340-342; *AIChE Journal*, 18, 361-371 (1972).

5. W. E. Stewart (to be published).

کرده،<sup>۶</sup> و بر مجانب Re پایین در مسئله ۱۲.ب.۶ مبتنی است، چنین است:

$$Nu_m = (0.376Re^{1/2} + 0.57Re^{2/3})Pr^{1/3} + 0.92 \left[ \ln \left( \frac{7.4 \times 55}{Re} \right) + 4.18Re \right]^{-1/2} Re^{1/3} Pr^{1/3} \quad (8-4.14)$$

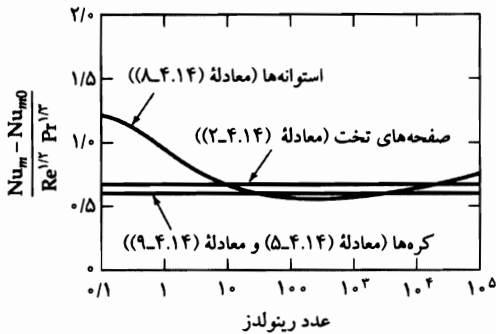
این رابطه همبستگی در حد، وقتی  $Pr \rightarrow \infty$ ، و هم چنین به ازای مقادیر کوچک عدد رینولدز، رفتار خوبی دارد. از این نتیجه می توان برای تحلیل عملکرد حالت پایای بادسنج سیم داغ استفاده کرد که معمولاً در عددهای رینولدز پایین کار می کند.

### جریان در اطراف سایر اجسام

از سه بحث بالا می آموزیم که، برای جریان در اطراف اجسامی با شکل هایی غیر از شکل های توصیف شده در بالا، با استفاده از رابطه زیر، می توان ضرایب انتقال گرما را به خوبی حدس زد:

$$Nu_m - Nu_{m,0} = 0.6Re^{1/2}Pr^{1/3} \quad (9-4.14)$$

که در آن  $Nu_{m,0}$  عدد نوسلت میانگین در عدد رینولدز صفر است. این تعمیم، که در شکل ۲-۴.۱۴ نشان داده شده است، غالباً در تخمین انتقال گرما از اجسامی با شکل های نامنظم به کار می آید.



شکل ۲-۴.۱۴ نموداری که در آن عددهای نوسلت برای جریان در اطراف صفحه های تخت، کره ها، و استوانه ها، با معادله (۹-۴.۱۴) مقایسه می شود.

### ۵.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای همرفت واداشته از میان بسترهای پر شده

ضرایب انتقال گرما بین ذرات و سیال در بسترهای پر شده در طراحی رآکتورهای استوانه ای بستر ثابت، جذب کن ها، خشک کن ها، و مبادله کن های گرمای بسترریگی اهمیت دارند. توزیع سرعت در بسترهای پر شده ماکزیم نیرومندی در نزدیکی جدار از خود نشان می دهد که تاحدودی به کسر بالاتر فضاهای خالی در این جا، و تاحدودی به عبورهای بین شبکه ای منظم تر در طول این مرزهای هموار، نسبت داده می شود. جدا شدن حاصل به دو جریان، یکی جریان خارجی سریع و دیگری جریان داخلی آهسته تر، که در خروجی بستر باهم مخلوط می شوند، سبب رفتار پیچیده عددهای نوسلت میانگین در بسترهای پر شده عمیق می شود،<sup>۱</sup> مگر درحالتی که نسبت قطر لوله به قطر ذره  $D_t/D_p$  بسیار بزرگ یا نزدیک به واحد باشد. آزمایش های انجام شده روی بسترهای عریض و کم عمق رفتار ساده تری را نشان می دهند و در بحث زیر از آن ها استفاده می شود.

6. W. H. McAdams, *Heat Transmission*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1954), p. 259.

1. H. Martin, *Chem. Eng. Sci.*, **33**, 913-919 (1978).

با اصلاح معادله (۵-۱.۱۴)  $h_{loc}$  را به‌عنوان حجم معرف  $Sdz$  ذرات و سیال تعریف می‌کنیم:

$$dQ = h_{loc}(aSdz)(T_s - T_b) \quad (۱-۵.۱۴)$$

در این جا  $a$  مساحت سطح خارجی ذرات در واحد حجم بستر است که در بخش ۴.۶ نیز چنین بود. معادله‌های (۵-۴.۶) و (۶-۴.۶) اندازه ذره مؤثر  $D_p$  را به صورت  $\psi/a = \psi(1 - \varepsilon)/a$ ، برای بستر پر شده با کسر فضای خالی  $\varepsilon$  نشان می‌دهند.

داده‌های زیادی در مورد همرفت واداشته برای جریان گازها<sup>۲</sup> و مایعات<sup>۳</sup> در بستری پر شده کم‌عمق با موشکافی تحلیل<sup>۴</sup> شده‌اند تا رابطه همبستگی انتقال گرمای موضعی زیر حاصل شود:

$$j_H = 2,19 \text{Re}^{-2/3} + 0,78 \text{Re}^{-0,381} \quad (۲-۵.۱۴)$$

و فرمولی یکسان برای تابع انتقال جرم  $j_D$  به دست آید که در بخش ۳.۲۲ تعریف می‌شود. در این جا ضریب چیلتون-کولبورن، یعنی  $j_H$ ، و عدد رینولدز چنین تعریف می‌شوند:

$$j_H = \frac{h_{loc}}{\hat{C}_p G_s} \left( \frac{\hat{C}_p \mu}{k} \right)^{2/3} \quad \text{Re} = \frac{D_p G_s}{(1 - \varepsilon) \mu \psi} = \frac{\psi G_s}{a \mu \psi} \quad (۴,۳-۵.۱۴)$$

در این معادله خواص فیزیکی همگی در دمای فیلم  $T_f = \frac{1}{4}(T_s - T_b)$  محاسبه می‌شوند و  $G_s = w/S$  شار جرم ظاهری در بخش ۴.۶ است. کمیت  $\psi$  ضریب مربوط به شکل ذره است که مقدار تعریف شده آن برای کره‌ها ۱ است و مقدار برازشی آن برای تپه‌های استوانه‌ای<sup>۴</sup>  $0,92$  است. گامسون<sup>۵</sup> ضریب شکل مرتبطی را در  $\text{Re}$  و  $j_H$  به کار برد؛ ضریب فعلی  $\psi$  فقط در  $\text{Re}$  به کار می‌رود.

به‌ازای مقادیر کوچک  $\text{Re}$ ، معادله (۲-۵.۱۴) مجانب زیر را نتیجه می‌دهد:

$$j_H = 2,19 \text{Re}^{-2/3} \quad (۵-۵.۱۴)$$

یا

$$\text{Nu}_{loc} = \frac{h_{loc} D_p}{k(1 - \varepsilon) \psi} = 2,19 (\text{Re Pr})^{1/3} \quad (۶-۵.۱۴)$$

که با نظریه لایه مرزی<sup>۶</sup> برای جریان خزشی با  $\text{Re Pr} \gg 1$  سازگار است. از محدودیت اخیر نتیجه<sup>۱</sup>  $\text{Nu} \gg 1$  حاصل می‌شود که با لایه مرزی گرمایی نازک نسبت به  $\psi(1 - \varepsilon) D_p$  متناظر است. این مجانب داده‌های انتقال جرم با جریان خزشی برای مایعات<sup>۳</sup> را بسیار خوب نشان می‌دهد.

2. B. W. Gamson, G. Thodos, and O. A. Hougen, *Trans. AIChE*, **39**, 1-35 (1943); C. R. Wilke and O. A. Hougen, *Trans. AIChE*, **41**, 445-451 (1945).

3. L. K. McCune and R. H. Wilhelm, *Ind. Eng. Chem.*, **41**, 1124-1134 (1949); J. E. Williamson, K. E. Bazaire, and C. J. Geankoplis, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **2**, 126-129 (1963); E. J. Wilson and C. J. Geankoplis, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **5**, 9-14 (1966).

4. W. E. Stewart, to be submitted.

5. B. W. Gamson, *Chem. Eng. Prog.*, **47**, 19-28 (1951).

6. W. E. Stewart, *AIChE Journal*, **9**, 528-535 (1963); R. Pfeffer, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **3**, 380-383 (1964); J. P. Sørensen and W. E. Stewart, *Chem. Eng. Sci.*, **29**, 833-837 (1974).

هم‌چنین نگاه کنید به مثال ۳-۴.۱۲.

نمای  $\frac{1}{4}$  در معادله (۳-۵.۱۴) بجانب Pr بالاست که از نظریه لایه مرزی برای جریان‌های آرام پایا<sup>۶</sup> و برای جریان‌های متلاطم با رانش پایا<sup>۷</sup> به دست می‌آید. این وابستگی با داده‌های نقل‌شده درگستره کامل  $0.7 < Pr$  و گستره متناظر گروه بدون بعد Sc برای انتقال جرم سازگار است.

#### ۶.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای همرفت آزاد و مختلط<sup>۱</sup>

در این جا با تکیه بر مثال ۵-۴.۱۱ رفتار بعضی از سیستم‌های مهم را در حضور نیروهای شناوری درخور اعتنا، ابتدا با بیان دیگری از نتایج به دست آمده برحسب عدد نوسلت، و سپس از طریق تعمیم به وضعیت‌های دیگر، جمع‌بندی می‌کنیم: (۱) نیروهای شناوری کوچک، که در حضور آن‌ها فرض لایه مرزی نازک در مثال ۵-۴.۱۱ ممکن است معتبر باشد؛ (۲) نیروهای شناوری بسیار بزرگ، که در حضور آن‌ها تلاطم می‌تواند در لایه مرزی روی دهد، و (۳) نیروهای مختلط و همرفت واداشته. ما بحث خود را به انتقال گرما بین اجسام جامد و حجم هلالی شکل بزرگی از سیال اطراف آن، و به شرایط مرزی دمابابت مثال ۵-۴.۱۱ محدود می‌کنیم. بحث در مورد سایر وضعیت‌ها، شامل رفتار گذرا و جریان در مجراها و کاواک‌ها، را می‌توانید در منابع دیگر پیدا کنید.<sup>۱</sup>

در مثال ۵-۴.۱۱ دیدیم که برای همرفت آزاد در نزدیکی صفحه تخت عمودی، گروه اصلی بدون بعد GrPr است که غالباً عدد ریلی، Ra، نامیده می‌شود. اگر عدد نوسلت میانگین سطحی را به صورت:

$$Nu_m = hH/k = q_{avg}H/k(T_o - T_1)$$

تعریف کنیم، آن‌گاه معادله (۵-۴.۱۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$Nu_m = C(Gr Pr)^{1/4} \quad (۱-۶.۱۴)$$

که در آن C تابع ضعیفی از Pr بود. رفتار انتقال گرما در مقادیر متوسط  $Ra = Gr Pr$ ، در مورد بسیاری از اشکال فضایی، با لایه‌های مرزی آرام، از نوع توصیف شده در مثال ۵-۴.۱۱ اداره می‌شود و نتایج آن بحث‌ها را معمولاً به طور مستقیم به کار می‌بندند.

اما به ازای مقادیر کوچک GrPr رسانش گرمای مستقیم به محیط اطراف می‌تواند نتایج لایه مرزی را بی‌اعتبار کند، و به ازای مقادیر بالای GrPr مکانیسم انتقال گرما به سمت فوران‌ها یا زبانه‌های موضعی تصادفی سیال جابه‌جا می‌شود که سبب ایجاد تلاطم در لایه مرزی می‌شوند. سپس عدد نوسلت از اندازه سیستم مستقل می‌شود. حالت همرفت مرکب واداشته و آزاد (که معمولاً آن را همرفت مختلط می‌نامند) پیچیده‌تر است: در این حالت باید Gr، Pr، Re را به صورت متغیرهای مستقل در نظر گرفت و هم‌چنین به این نکته توجه کرد که آیا آثار همرفت واداشته و آزاد در یک جهت‌اند یا درجهت‌های مخالف. به نظر می‌رسد که فقط حالت قبلی خوب درک شده باشد. توصیف این رفتار بسیار پیچیده‌تر است، زیرا گذارهای ناگهانی بین رژیم‌های مختلف جریان وجود ندارد.

اما نشان داده شده است که با استفاده از تلفیقی از روابط تجربی به صورت عبارات‌های مجانبی، پیش‌بینی‌های ساده و قابل اعتماد آهنگ انتقال گرما (برحسب عدد نوسلت میانگین سطحی  $Nu_m$ ) برای این انواع گوناگون رژیم جریان قابل دسترس است:

(الف)  $Nu_m^{cond}$ ، برای رسانش در غیاب نیروهای شناوری یا همرفت واداشته؛

7. W. E. Stewart, *AIChE Journal*, **33**, 2008-2016 (1987); corrigenda **34**, 1030 (1988).

1. G. D. Raithby and K. G. T. Hollands, Chapter 4 in W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, and Y. I. Cho, eds., *Handbook of Heat Transfer*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1998).



(ب)  $Nu_m^{lam}$ ، برای لایه‌های مرزی نازک، مانند مثال ۴.۱۱-۵؛

(ج)  $Nu_m^{turb}$ ، برای لایه‌های مرزی متلاطم؛

(د)  $Nu_m^{forced}$ ، برای همرفت واداشته خالص.

در بخش‌های فرعی زیر به بررسی این وضعیت‌ها می‌پردازیم.

### نیود نیروهای شناوری

عدد نوسلت حدی برای همرفت آزاد و واداشته ناچیز با حل کردن معادلهٔ رسانش گرما (معادلهٔ لاپلاس،  $\nabla^2 T = 0$ ) برای دمای ثابت یکنواخت روی سطح جامد و دمای ثابت متفاوت در بی‌نهایت، به دست می‌آید. بنابراین عدد نوسلت میانگین صورت کلی زیر را دارد:

$$Nu_m^{cond} = K \text{ (شکل ۲-۶.۱۴)}$$

که برای همهٔ اجسامی که دست‌کم یک بُعد نامتناهی داشته باشند (مثلاً استوانه‌های بسیار طویل یا صفحه‌های بسیار عریض)، برابر صفر است. برای اجسام متناهی  $K$  غیر صفر است، و حالتی مهم کره است، که برای آن، طبق مسئلهٔ ۱۰.ب داریم:

$$Nu_m^{cond} = 2 \text{ (۳-۶.۱۴)}$$

در عبارت بالا طول مشخصه را قطر کره گرفته‌ایم. بیضی‌وارهای دورانی یخ و دیسک‌های دایره‌ای در مسئلهٔ ۱۴.د.۱ شرح داده می‌شوند.

### لایه‌های مرزی نازک

صفحهٔ تخت عمودی هم‌دما، طبق معادلهٔ (۱-۶.۱۴)، سیستم معرف لایه‌های مرزی نازک به شمار می‌رود. این معادله را می‌توان به معادلهٔ زیر تعمیم داد:

$$Nu_m^{lam} = C(\text{Pr}, \text{شکل}) (\text{Gr Pr})^{1/2} \text{ (۴-۶.۱۴)}$$

به علاوه، تابع  $\text{Pr}$  و تابع شکل را می‌توان به صورت عامل وارد حاصل ضرب کرد:

$$C = C_1(\text{شکل}) C_2(\text{Pr}) \text{ (۵-۶.۱۴)}$$

که در آن:

$$C_2 \approx \frac{0.671}{[1 + (0.492/\text{Pr})^{1/4}]^{4/9}} \text{ (۶-۶.۱۴)}$$

مقادیر معرف  $C_1$  و  $C_2$ ، به ترتیب، در جدول‌های ۱-۶.۱۴ و ۲ ارائه شده‌است. ضرایب شکل برای انواع مختلفی از شکل‌های دیگر قابل دسترس است.<sup>۴،۵</sup> برای سطوح تخت افقی گرم‌شدهٔ روبه پایین و سطوح تخت افقی سردشدهٔ روبه بالا، استفاده از رابطهٔ همبستگی<sup>۵</sup> زیر توصیه می‌شود:

2. S. W. Churchill and R. Usagi, *AIChE Journal*, **23**, 1121-1128 (1972).

3. W. E. Stewart, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **14**, 1013-1031 (1971).

4. A. Acrivos, *AIChE Journal*, **6**, 584-590 (1960).

5. T. Fujii, M. Honda, and I. Morioka, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **15**, 755-767 (1972).

$$Nu_m^{lam} = \frac{0.527}{[1 + (1/9/Pr)^{1/4}]^{1/4}} (Gr Pr)^{1/5} \quad (7-6.14)$$

جدول ۶-۱۴ ضریب  $C_1$  در معادله (۵-۶.۱۴) و  $D$  در عدد نوسلت، برای چندین شکل معرف الف.

شکل ←	صفحه عمودی	صفحه افقی الف	استوانه افقی	کره
$C_1$	$1^\circ$	$0.835$	$0.772$	$0.878$
$D$ برحسب $Nu$	ارتفاع $H$	عرض $W$	قطر $D$	قطر $D$

الف) برای سطح بالایی گرم و سطح پایینی عایق‌کاری شده، یا برعکس برای سطوح سرد.

جدول ۶-۱۴ ضریب  $C_2$  به صورت تابعی از عدد پرانتل.

	Hg	گاز	آب	روغن
Pr	$0.022$	$0.71$	$1^\circ$	$2000$
$C_2$	$0.287$	$0.515$	$0.534$	$0.668$

برای صفحه عمودی با شرط مرزی شارگرمای ثابت، توان توصیه شده برای  $Gr Pr$  نیز  $1/5$  است.

شارهای گرمای همرفتی آزاد آرام گرایش به کوچکی دارند و غالباً تصحیح رسانشی برای پیش‌بینی‌های دقیق ضروری است. حد رسانش با حل معادله  $\nabla^2 T = 0$  برای شکل هندسی مفروض به دست می‌آید و به محاسبه «عدد نوسلت رسانش»،  $Nu_m^{cond}$  منتهی می‌شود. در این صورت عدد نوسلت مرکب،  $Nu_m^{comb}$ ، با تلفیق دو عدد نوسلت توسط معادله‌ای به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$Nu_m^{comb} \cong [(Nu_m^{lam})^n + (Nu_m^{cond})^n]^{1/n} \quad (8-6.14)$$

مقادیر بهینه  $n$  به شکل وابسته‌اند، اما عدد  $1/7$  تخمین پیشنهادی در نبود اطلاع خاص است.

### لایه‌های مرزی تلاطمی

آثار تلاطم به تدریج افزایش می‌یابد و روش معمول ترکیب سهم‌های تلاطمی و آرام، به صورت زیر است<sup>۱</sup>:

$$Nu_m^{free} = [(Nu_m^{comb})^m + (Nu_m^{turb})^m]^{1/m} \quad (9-6.14)$$

بنابراین برای صفحه تخت هم‌دمای عمودی، می‌نویسیم:

$$Nu_m^{turb} = \frac{C_2 (Gr Pr)^{1/2}}{1 + (1/4 \times 10^9 / Gr)} \quad (10-6.14)$$

با

$$C_2 = \frac{0.13 Pr^{1/22}}{(1 + 0.61 Pr^{1/4})^{1/22}} \quad (11-6.14)$$

و  $m = 6$ . مقادیر  $m$  در معادله (۹-۶.۱۴) به شدت به دما وابسته‌اند.

همرفت آزاد و واداشتهٔ مختلط

سرانجام باید مسئلهٔ همرفت آزاد و واداشتهٔ هم‌زمان را بررسی کنیم و این کار هم با استفاده از قاعدهٔ ترکیبی تجربی زیر انجام می‌شود:<sup>۶</sup>

$$\text{Nu}_m^{\text{total}} = [(\text{Nu}_m^{\text{free}})^3 + (\text{Nu}_m^{\text{forced}})^3]^{1/3} \quad (۱۲-۶.۱۴)$$

به‌نظر می‌رسد که این قاعده برای همهٔ شکل‌ها و وضعیت‌های هندسی، در حدود منطقی، صادق است، فقط به شرط این‌که همرفت آزاد و واداشته جهت‌های جریان اولیهٔ یکسان داشته باشند.

مثال ۱۴-۱۶

اتلاف گرما از طریق همرفت آزاد از لولهٔ افقی

آهنگ اتلاف گرما از طریق همرفت آزاد از واحد طول یک لولهٔ افقی به قطر خارجی ۶ in. را تخمین بزنید، هرگاه دمای سطح خارجی  $100^\circ\text{F}$ ، دمای هوای محیط  $80^\circ\text{F}$  و فشار آن ۱ اتمسفر باشد.

حل

خواص هوا در فشار ۱ اتمسفر و دمای فیلم  $T_f = 90^\circ\text{F} = 55^\circ\text{R}$  عبارت‌اند از:

$$\mu = 0.7019 \text{ cp} = 0.7046 \text{ lb}_m/\text{ft} \cdot \text{hr}$$

$$\rho = 0.70723 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$$

$$\hat{C}_p = 0.241 \text{ Btu}/\text{lb}_m \cdot \text{R}$$

$$k = 0.70152 \text{ Btu}/\text{hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{R}$$

$$\beta = 1/T_f = (1/550) \text{ R}^{-1}$$

سایر مقادیر مربوطه عبارت‌اند از:  $D = 0.5 \text{ ft}$ ،  $\Delta T = 20^\circ\text{R}$ ، و  $g = 4.17 \times 10^8 \text{ ft}/\text{hr}^2$ ، با استفاده از این داده‌ها نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Gr Pr} &= \left( \frac{(0.5)^2 (0.70723)^2 (4.17 \times 10^8) (20/550) }{(0.7046)^2} \right) \left( \frac{(0.241)(0.7046)}{0.70152} \right) \\ &= (4.68 \times 10^6) (0.729) = 3.4 \times 10^6 \end{aligned} \quad (۱۳-۶.۱۴)$$

سپس از معادله‌های (۴-۶.۱۴) تا (۶-۶.۱۴) و جدول ۱۴-۶.۱، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Nu}_m &= 0.772 \left( \frac{0.671}{[1 + (0.492/0.729)^{1/4}]^{4/9}} \right) (3.4 \times 10^6)^{1/4} \\ &= 0.772 \left( \frac{0.671}{1.30} \right) (42.9) = 17.1 \end{aligned} \quad (۱۴-۶.۱۴)$$

بنابراین ضریب انتقال گرما برابر است با:

$$h_m = \text{Nu}_m \frac{k}{D} = 17.1 \left( \frac{0.70152}{0.5} \right) = 0.52 \text{ Btu}/\text{hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F} \quad (۱۵-۶.۱۴)$$

6. E. Ruckenstein, *Adv. in Chem. Eng.*, **13**, 11-112 (1987); E. Ruckenstein and R. Rajagopalan, *Chem. Eng. Communications*, **4**, 15-29 (1980).

آهنگ اتلاف گرما به‌ازای واحد طول لوله، برابر است با:

$$\frac{Q}{L} = \frac{h_m A \Delta T}{L} = h_m \pi D \Delta T$$

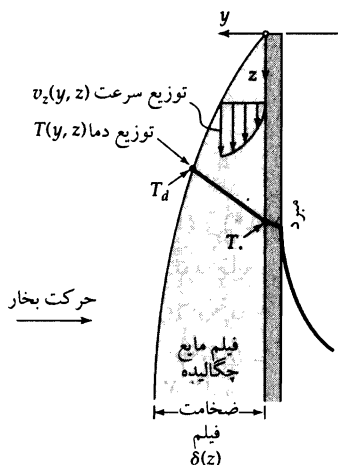
$$= (0,52)(3,1416)(0,5)(20) = 16 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \quad (16-6.14)$$

این فقط اتلاف از طریق همرفت است. اتلاف تابشی برای همین مسئله، در مثال ۲-۵.۱۶ محاسبه می‌شود.

### ۷.۱۴ ضرایب انتقال گرما برای چگالش بخار خالص روی سطوح جامد

چگالش بخار خالص روی سطح جامد یکی از فرایندهای پیچیده انتقال گرماست، زیرا شامل دو فاز سیال جاری است: بخار و مایع چگالیده. در صنعت چگالش در انواع مختلفی از تجهیزات رخ می‌دهد؛ برای سادگی کار در این‌جا فقط حالت‌های متداول چگالش بخاری را که به‌آهستگی روی سطح خارجی لوله‌های افقی، لوله‌های عمودی و جدارهای تخت عمودی حرکت می‌کند، در نظر می‌گیریم.

فرایند چگالش روی جدار عمودی در شکل ۱-۷.۱۴ نشان داده شده‌است. بخار روی سطح در حال چگالش جریان پیدا می‌کند و توسط گرادیان فشار کوچکی در نزدیکی سطح مایع به سمت آن حرکت می‌کند.<sup>۱</sup> بعضی از مولکول‌های فاز بخار به سطح مایع برخورد می‌کنند و واجهش می‌یابند؛ مولکول‌های دیگر در سطح نفوذ می‌کنند و گرمای نهان چگالش خود را آزاد می‌کنند. گرمایی که به‌این ترتیب آزاد می‌شود باید در مایع چگالیده حرکت کند تا به جدار برسد، سپس به میرد واقع در سمت دیگر جدار می‌رسد. در همین زمان، مایع چگالیده باید توسط جریان گرانشی از سطح تخلیه شود.



شکل ۱-۷.۱۴ چگالش فیلیم روی سطح عمودی (ناپیوستگی دمای فصل مشترک با اغراق نشان داده شده‌است).

مایع چگالیده روی جدار معمولاً تنها عامل مهم مقاوم در برابر انتقال گرما روی جدار است. اگر سطح جامد تمیز باشد، مایع چگالیده معمولاً فیلیم پیوسته‌ای روی سطح تشکیل می‌دهد، اما اگر آثاری از ناخالصی‌های خاص در آن موجود باشد (مانند اسیدهای چرب در چگالنده بخار)، مایع چگالیده قطره‌هایی تشکیل می‌دهد.

۱. توجه کنید که تغییرات کوچک اما ناگهانی در فشار و دما در فصل مشترک رخ می‌دهد. این ناپیوستگی‌ها از ضروریات فرایند چگالش‌اند، اما اندازه آن‌ها در محاسبات مهندسی برای سیالات خالص، کوچک است. برای مخلوط‌ها، ممکن است این اندازه اهمیت پیدا کند. نگاه کنید به

در «چگالش قطره‌وار»<sup>۲</sup> آهنگ انتقال گرما بسیار بالاتر از «چگالش فیلمی» است، اما برقرار نگه داشتن آن دشوار است، به طوری که معمولاً در طراحی چگالنده، فرض می‌شود چگالش از نوع فیلمی است. روابط همبستگی که در ادامه مطلب می‌آیند، فقط در مورد چگالش فیلمی صدق می‌کنند.

تعریف متداول  $h_m$  برای چگالش بخار خالص روی سطح جامدی به مساحت  $A$  و دمای یکنواخت  $T$  برابر است با:

$$Q = h_m A (T_d - T_0) = w \Delta \hat{H}_{\text{vap}} \quad (۱-۷.۱۴)$$

که در آن  $Q$  آهنگ جریان گرما در سطح جامد، و  $T_d$  نقطهٔ شبنم بخاری است که به سطح جدار نزدیک می‌شود - یعنی، دمایی است که در آن بخار چگالش خواهد یافت، هرگاه در فشار حاکم، به آهستگی سرد شود. این دما بسیار نزدیک به دمای مایع در فصل مشترک مایع-گاز است. بنابراین  $h_m$  را می‌توان به‌عنوان ضریب انتقال گرما برای فیلم مایع در نظر گرفت.

با حل تقریبی معادله‌های انرژی و حرکت برای فیلم مایع ریزان، عبارت‌های  $h_m$ ، برای جریان<sup>۳</sup> مایع چگالیده بدون موج آرام، به‌دست آمده‌است (نگاه کنید به مسئلهٔ ۱۴ ج. ۱). برای چگالش فیلمی روی لوله‌ای افقی به قطر  $D$ ، طول  $L$ ، و دمای سطح ثابت  $T_0$ ، نتیجهٔ نوسلت<sup>۴</sup> را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$h_m = 0.۹۵۴ \left( \frac{k^r \rho^r g L}{\mu w} \right)^{1/3} \quad (۲-۷.۱۴)$$

در این جا  $w/L$  آهنگ جرمی چگالش در واحد طول لوله است و چنین فهمیده می‌شود که همهٔ خواص فیزیکی مایع چگالیده را باید در دمای فیلم،  $T_f = \frac{1}{2}(T_d + T_0)$ ، محاسبه کرد.

برای اختلاف دماهای متوسط، می‌توان معادلهٔ (۲-۷.۱۴) را به‌کمک موازنهٔ انرژی روی مایع چگالیده نوشت تا نتیجه شود:

$$h_m = 0.۷۲۵ \left( \frac{k^r \rho^r g \Delta \hat{H}_{\text{vap}}}{\mu D (T_d - T_0)} \right)^{1/4} \quad (۳-۷.۱۴)$$

معادله‌های (۲-۷.۱۴) و (۳-۷.۱۴) به‌طور تجربی تا دقت  $\pm 10\%$  برای لوله‌های افقی تکی تأیید شده‌اند. به‌نظر می‌رسد که این معادله‌ها نتایج رضایت‌بخشی هم برای دسته‌لوله‌های افقی<sup>۴</sup>، به‌رغم پیچیدگی‌های ناشی از چکیدن مایع چگالیده از روی لوله‌ای به لولهٔ دیگر، ارائه می‌دهند.

برای چگالش فیلمی روی لوله‌های عمودی یا جدارهای عمودی به‌ارتفاع  $L$ ، نتایج نظری متناظر با معادله‌های (۲-۷.۱۴) و (۳-۷.۱۴)، به‌ترتیب، عبارت‌اند از:

$$h_m = \frac{4}{3} \left( \frac{k^r \rho^r g}{3 \mu \Gamma} \right)^{1/3} \quad \text{و} \quad h_m = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( \frac{k^r \rho^r g \Delta \hat{H}_{\text{vap}}}{\mu L (T_d - T_0)} \right)^{1/4} \quad (۵، ۴.۷.۱۴)$$

۲. چگالش و جوشش قطره‌وار به‌تفصیل در منبع زیر شرح داده شده‌اند:

J. G. Collier and J. R. Thome, *Convective Boiling and Condensation*, 3rd edition, Oxford University Press (1996).

3. W. Nusselt, *Z. Ver. deutsch. Ing.*, **60**, 541-546, 596-575 (1916).

4. B. E. Short and H. E. Brown, *Proc. General Disc. Heat Transfer*, London (1951), pp. 27-31. see also D. Butterworth, in *Handbook of Heat Exchanger Design* (G. F. Hewitt, ed.), Oxford University Press, London (1977), pp. 426-462.

کمیت  $\Gamma$  در معادله (۷-۱۴) آهنگ کل جریان مایع چگالیده از پایین سطح چگالش در واحد عرض سطح است. برای لوله‌ای عمودی،  $\Gamma = w/\pi D$ ، که در آن  $w$  آهنگ جرمی کل چگالش روی لوله است. برای لوله‌های عمودی کوتاه ( $L < 0.5$  ft) مقادیر تجربی  $h_m$  به خوبی مؤید نظریه است، اما مقادیر اندازه‌گیری شده برای لوله‌های عمودی طویل ( $L > 8$  ft)، ممکن است به‌ازای مقدار مفروض  $T_d - T$ ، تا حدود ۷۰٪ بیش‌تر از مقدار نظری باشد. این مغایرت را به موج‌هایی نسبت می‌دهند که در لوله‌های عمودی طویل بزرگ‌ترین دامنه را پیدا می‌کنند.<sup>۵</sup>

اکنون به سراغ روابط تجربی مربوط به جریان متلاطم مایع چگالیده می‌رویم. جریان متلاطم، روی لوله‌ها یا جدارهای عمودی، هنگامی آغاز می‌شود که عدد رینولدز  $Re = \Gamma/\mu$  به حدود  $35^\circ$  برسد. به‌ازای عددهای رینولدز بزرگ‌تر، فرمول تجربی زیر پیشنهاد شده است:<sup>۶</sup>

$$h_m = 0.1003 \left( \frac{k^r \rho^r g (T_d - T) L}{\mu^r \Delta \hat{H}_{\text{vap}}} \right)^{1/2} \quad (6-7.14)$$

این معادله، به‌ازای مقادیر کوچک  $T_d - T$ ، با فرمول زیر هم‌ارز است:

$$h_m = 0.1021 \left( \frac{k^r \rho^r g \Gamma}{\mu^r} \right)^{1/3} \quad (7-7.14)$$

در شکل ۷-۱۴، معادله‌های (۷-۱۴) تا (۷-۱۴) خلاصه شده‌اند تا محاسبات ساده شوند و دامنه توافقی با داده‌های تجربی نشان داده شود. با استفاده از خانواده‌ای از خطوط درگستره متلاطم، برای نمایش اثر عدد پراتل، می‌توان به توافق بهتری دست یافت. اما به سبب پراکندگی داده‌ها، یک خط تنها کافی است.

برقراری جریان متلاطم مایع چگالیده روی لوله‌های افقی بسیار دشوار است، مگر این‌که قطر لوله‌ها به اندازه کافی زیاد باشد، یا با اختلاف دمای بالا سروکار داشته باشیم. معادله‌های (۷-۱۴) و (۷-۱۴) تا اعداد رینولدز گذرای تخمینی،  $Re = w_T/L\mu$  حدود  $1000$ ، رضایت‌بخش‌اند؛ در رابطه اخیر  $w_T$  جریان کل مایع چگالیده در لوله‌ای مفروض است و شامل مایع چگالیده دریافتی از لوله‌های بالایی نیز هست.<sup>۷</sup>

فرایند معکوس تبخیر سیالی خالص بسیار پیچیده‌تر از چگالش آن است. در این‌جا درمورد انتقال گرما به مایعات در حال جوشیدن بحث نمی‌کنیم، اما خواننده را به چند منبع ارجاع می‌دهیم.<sup>۸،۲</sup>

### مثال ۷-۱۴

چگالش بخار روی سطح عمودی

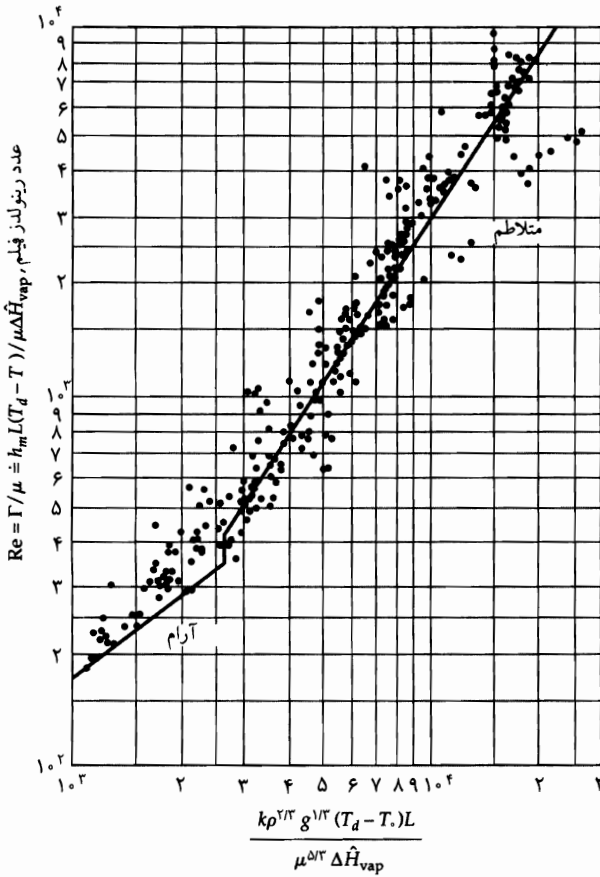
مایعی جوشان که در لوله‌ای عمودی جریان دارد، از طریق چگالش بخار روی سطح خارجی لوله، گرما دریافت می‌کند. بخشی از لوله که با بخار گرم می‌شود  $10$  ft ارتفاع دارد و قطر خارجی آن  $2$  in است. اگر از بخار اشباع استفاده شود، دمای بخار چه قدر باشد تا  $92000$  Btu/hr گرما به لوله بدهد؟ دمای سطح لوله را  $200^\circ\text{F}$  بگیرید. چگالش را از نوع فیلمی فرض کنید.

5. W. H. McAdams, *Heat Transmission*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1954) p. 333.

6. U. Grigull, *Forsch. Ingenieurwesen*, **13**, 49-57 (1942); *Z. Ver. dtsh. Ing.*, **86**, 444-445 (1942).

7. W. H. McAdams, *Heat Transmission*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1954), pp. 338-339.

8. H. D. Baehr and K Stephan, *Heat and Mass Transfer*, Springer, Berlin (1998), Chapter 4.



شکل ۲-۷.۱۴ رابطه همبستگی داده‌های انتقال گرما برای چگالش فیلمی بخارهای خالص روی سطوح عمودی.

حل

خواص سیال به دمای مجهول  $T_d$  وابسته است. حدس می‌زنیم  $T_d = T_s = 200^\circ\text{F}$ . در این صورت خواص فیزیکی در دمای فیلم ( $200^\circ\text{F}$ ) عبارت‌اند از:

$$\Delta \hat{H}_{\text{vap}} = 978 \text{ Btu/lb}_m$$

$$k = 0.393 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$$

$$\rho = 60.1 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$$

$$\mu = 0.738 \text{ lb}_m/\text{ft} \cdot \text{hr}$$

فرض می‌کنیم که بخار فقط گرمای نهان خود را آزاد کند (فرض  $T_d = T_s = 200^\circ\text{F}$ ، چنین چیزی را اجاب می‌کند)، از موازنه انرژی در اطراف لوله نتیجه می‌شود:

$$Q = w \Delta \hat{H}_{\text{vap}} = \pi D \Gamma \Delta \hat{H}_{\text{vap}} \quad (8-7.14)$$

که در آن  $Q$  جریان گرمای ورودی به جدار لوله است. عدد رینولدز فیلم عبارت است از:

$$\frac{\Gamma}{\mu} = \frac{Q}{\mu D \mu \Delta \hat{H}_{\text{vap}}} = \frac{92,000}{\pi (2/12) (0.738) (978)} = 244 \quad (9-7.14)$$

با قرائت از روی شکل ۷.۱۴، به ازای این مقدار عرض، درمی‌یابیم که جریان آرام است. معادله (۴-۷.۱۴) قابل کاربرد است، اما استفاده از خط مبتنی بر این معادله در شکل ۷.۱۴ راحت‌تر است، و نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\frac{k \rho^{1/2} g^{1/2} (T_d - T_s) L}{\mu^{5/2} \Delta \hat{H}_{\text{vap}}} = 1700 \quad (10-7.14)$$

که از آن:

$$\begin{aligned} T_d - T_s &= 1700 \frac{\mu^{5/2} \Delta \hat{H}_{\text{vap}}}{k \rho^{1/2} g^{1/2} L} \\ &= 1700 \frac{(0.738)^{5/2} (978)}{(0.393) (60/1)^{1/2} (4/12 \times 10^8)^{1/2} (10)} \\ &= 22^\circ F \quad (11-7.14) \end{aligned}$$

بنابراین تقریب اول برای دمای بخار عبارت است از:  $T_d = 222^\circ F$ . این نتیجه به اندازه کافی نزدیک هست؛ با محاسبه خواص فیزیکی براساس این نتیجه، به عنوان تقریب دوم داریم  $T_d = 220^\circ F$ . از شکل ۷.۱۴ آشکار می‌شود که این نتیجه معرف یک حد بالایی است. به سبب موج‌داری، افت دما در فیلم مایع چگالیده ممکن است تا نصف مقدار پیش‌بینی شده در این جا کاهش یابد.

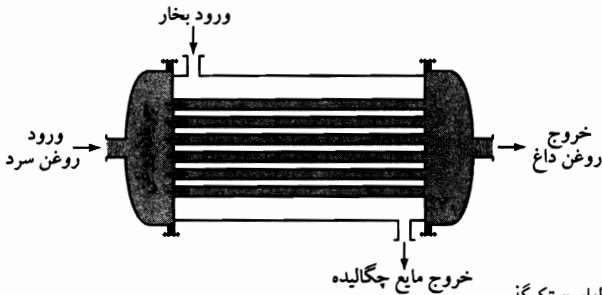
### پرسش‌های تشریحی

۱. ضریب انتقال گرما، عدد نوسلت، عدد استانتون، و  $j_H$  چیلتون-کولبورن را تعیین کنید. هر یک از این پارامترها را چگونه می‌توان «ترتیب کرد» تا نوع نیروی رانش مبتنی بر اختلاف دمای مورد استفاده را نشان دهد؟
۲. مشخصه‌های گروه‌های بدون بعدی که در روابط همبستگی اعداد نوسلت برای همرفت واداشته مطرح می‌شوند، کدام‌اند؟ برای همرفت آزاد چه‌طور؟ برای همرفت مختلط کدام‌اند؟
۳. تا چه حدودی می‌توان اعداد نوسلت را از روی جواب‌های تحلیلی محاسبه کرد؟
۴. شرح دهید که چگونه می‌توان یک رابطه همبستگی تجربی برای اعداد نوسلت، به صورت تابعی از گروه‌های بدون بعد مربوطه به دست آورد؟
۵. تا چه حدودی می‌توان روابط همبستگی تجربی را پی‌ریزی کرد که از آن‌ها عدد نوسلت به صورت حاصل ضرب گروه‌های بدون بعد مربوطه، که هر یک به یک توان مشخصه رسیده‌اند، به دست آید؟
۶. علاوه بر عدد نوسلت، با عدد رینولدز  $Re$ ، عدد پراتل  $Pr$ ، عدد گراسهوف  $Gr$ ، عدد پکلت  $Pé$ ، و عدد ریلی  $Ra$  نیز سروکار پیدا کردیم. هر یک از این عددها را تعریف کنید و مفهوم و کاربرد آن‌ها را شرح دهید.
۷. مفهوم دمای سردی باد را شرح دهید.



مسئله‌ها

۱۴ الف ۱. ضرایب متوسط انتقال گرما (شکل ۱۴ الف ۱). روغنی با آهنگ جرمی  $10000$  پوند بر ساعت و ظرفیت گرمایی  $0.6 \text{ Btu/lb}_m \cdot \text{F}$ ، در مبادله‌کن گرمای ساده‌ای مطابق شکل، از  $100^\circ\text{F}$  گرم می‌شود تا دمای آن به  $200^\circ\text{F}$  برسد. روغن در لوله‌هایی از جنس مس، به قطر خارجی  $1 \text{ in.}$  و ضخامت جدار  $0.065 \text{ in.}$  جریان دارد. طول مرکب لوله‌ها  $300 \text{ ft}$  است. گرمای لازم از طریق چگالش بخار اشباع در  $157 \text{ psia}$  روی سطح خارجی لوله‌ها تأمین می‌شود. مطلوب است محاسبه  $h_1$ ،  $h_a$  و  $h_{1in}$  برای روغن، با فرض این‌که سطوح داخلی لوله‌ها در دمای اشباع بخار،  $213^\circ\text{F}$  است.  
جواب:  $190 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F}$ ،  $139$ ،  $78$ .



شکل ۱۴ الف ۱. مبادله‌کن گرمای «پوسته‌لوله‌ای» تک‌گذر.

۱۴ الف ۲. انتقال گرما در جریان داخل لوله. روغن با آهنگ جرمی صد پوند بر ساعت، در دمای  $100^\circ\text{F}$  از لوله مسی به قطر داخلی  $1 \text{ in.}$  و طول  $20 \text{ ft}$  عبور می‌کند. سطح داخلی لوله، از طریق چگالش بخار روی سطح خارجی، در دمای  $215^\circ\text{F}$  نگه داشته می‌شود. جریان در کل طول لوله را می‌توان کاملاً شکل یافته فرض کرد و خواص فیزیکی روغن را می‌توان در مقادیر زیر ثابت فرض کرد:  $\rho = 55 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ ،  $\dot{C}_p = 0.49 \text{ Btu/lb}_m \cdot \text{F}$ ،  $k = 0.0825 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$ ، و  $\mu = 1.42 \text{ lb}_m/\text{hr} \cdot \text{ft}$ .

(الف) مطلوب است محاسبه  $Pr$ .

(ب) مطلوب است محاسبه  $Re$ .

(ج) مطلوب است محاسبه دمای روغن خروجی.

جواب‌ها: (الف)  $8.44$ ؛ (ب)  $1075$ ؛ (ج)  $155^\circ\text{F}$ .

۱۴ الف ۳. اثر آهنگ جریان بر دمای خروجی از مبادله‌کن گرما.

(الف) قسمت‌های (ب) و (ج) مسئله ۱۴ الف ۲. را براساس آهنگ جریان روغن  $200$ ،  $400$ ،  $800$ ،  $1600$ ، و  $3200 \text{ lb}_m/\text{hr}$  دوباره حل کنید.

(ب) جریان کل گرمای عبوری از جدار لوله را به‌ازای هریک از آهنگ‌های جریان قسمت (الف) محاسبه کنید.

۱۴ الف ۴. ضریب انتقال گرمای موضعی برای همرفت واداشته تلاطمی در لوله. آب در لوله‌ای به قطر داخلی  $2 \text{ in.}$  با آهنگ جریان جرمی  $w = 15000 \text{ lb}_m/\text{hr}$  در جریان دارد. دمای جدار داخلی در نقطه‌ای در طول لوله  $160^\circ\text{F}$  است و دمای توده سیال در همان نقطه  $60^\circ\text{F}$  است. شار گرمای موضعی  $q_r$  در جدار لوله چه قدر است؟ فرض کنید که  $h_{loc}$  به مقدار مجانبی ثابتی رسیده‌است (نگاه کنید به شکل ۱۴-۳-۲).

جواب:  $-8 \times 10^4 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2$ .

۱۴ الف ۵. انتقال گرما از بخارهای در حال جگالش.

(الف) سطح خارجی لوله‌ای عمودی به قطر خارجی ۱ in. و طول ۱ ft در دمای  $190^\circ\text{F}$  نگه داشته می‌شود. اگر این لوله را بخار اشباع با فشار ۱ اتمسفر در میان گرفته‌باشد، آهنگ کل انتقال گرما از جدار لوله چه قدر خواهد بود؟

(ب) آهنگ انتقال گرما چه قدر خواهد بود، هرگاه لوله افقی باشد؟

جواب: (الف)  $8400 \text{ Btu/hr}$ ؛ (ب)  $127000 \text{ Btu/hr}$ .

۱۴ الف ۶. انتقال گرمای همرفتی واداشته از کره عایق.

(الف) کراهی توپر به قطر ۱ in. در جریان هوایی قرار داده می‌شود که در نبود کره اختلالی در آن ایجاد نمی‌شود؛ سرعت کره به  $100 \text{ ft/s}$ ، فشار آن به ۱ اتمسفر، و دمای آن به  $100^\circ\text{F}$  می‌رسد. با استفاده از یک کوئل گرم‌کن برقی که در داخل کره کار گذاشته شده، دمای آن را در  $200^\circ\text{F}$  ثابت نگه می‌دارند. آهنگ گرمایش الکتریکی به  $\text{cal/s}$  چه قدر باشد تا شرایط یادشده برقرار بماند؟ از تابش چشم‌پوشی کنید و معادله (۵-۴.۱۴) را به کار ببرید.

(ب) قسمت (الف) مسئله را، این بار با استفاده از معادله (۶-۴.۱۴) حل کنید.

جواب: (الف)  $371 \text{ cal/s} = 129 \text{ W}$ ؛ (ب)  $470 \text{ cal/s} = 168 \text{ W}$ .

۱۴ الف ۷. انتقال گرمای همرفتی آزاد از کره عایق‌کاری شده. اگر کره مسئله ۱۴ الف ۶. در هوای ساکنی با فشار ۱ اتمسفر و دمای  $100^\circ\text{F}$  آویزان شود، آهنگ گرمایش الکتریکی لازم چه قدر خواهد بود؟ از تابش چشم‌پوشی کنید. جواب:  $0.20 \text{ cal/s} = 0.80 \text{ W}$ .

۱۴ الف ۸. اتلاف گرما توسط همرفت آزاد از لوله افقی فرورفته در یک مایع. آهنگ اتلاف گرما از طریق همرفت آزاد از واحد طول یک لوله افقی طویل به قطر خارجی ۶ in. را تخمین بزنید، هرگاه دمای سطح خارجی  $100^\circ\text{F}$  و دمای آب اطراف  $80^\circ\text{F}$  باشد. این نتیجه را با نتیجه به دست آمده در مثال ۶-۱۴ مقایسه کنید که در آن لوله در هوا قرار دارد. خواص آب در دمای فیلم  $90^\circ\text{F}$  (یا  $32.3^\circ\text{C}$ ) عبارت‌اند از:  $\mu = 0.7632 \text{ cP}$ ،  $\rho = 0.9986 \text{ g/cm}^3$  و  $k = 0.363 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$ . هم‌چنین چگالی آب در همسایگی  $90^\circ\text{F}$  برابر است با:

$T(^{\circ}\text{C})$	۳۰٫۳	۳۱٫۳	۳۲٫۳	۳۳٫۳	۳۴٫۳
$\rho(\text{g/cm}^3)$	۰٫۹۹۵۵۸	۰٫۹۹۵۲۸	۰٫۹۹۴۹۶	۰٫۹۹۴۶۳	۰٫۹۹۴۳۰

جواب:  $Q/L = 1930 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}$ .

۱۴ الف ۹. ماهی‌گیر روی یخ در دریاچه مندوتا. آهنگ‌های اتلاف گرمای بدن ماهی‌گیر روی یخ را، وقتی در هوای آرام (سرعت باد صفر) ماهی‌گیری می‌کند، و وقتی سرعت باد  $20 \text{ mph}$  به سمت شمال است، مقایسه کنید. دمای هوا  $10^\circ\text{F}$  - است. فرض کنید ماهی‌گیر چمباتمه‌زده را بتوان با کراهی به قطر ۳ ft تقریب زد.

۱۴ ب ۱. عدد نوسلت موضعی حدی برای جریان قالبی با شار گرمای ثابت.

(الف) معادله (۱۰-۹.ب) توزیع دمای مجانبی را برای گرمایش سیالی با خواص فیزیکی ثابت در جریان قالبی داخل لوله‌ای طویل با شار گرمای ثابت در جدار، به دست می‌دهد. با استفاده از این توزیع دما نشان دهید که عدد نوسلت حدی در این شرایط عبارت است از  $Nu = 8$ .

(ب) توزیع دمای مجانبی برای مسئله نظیر جریان قالبی داخل شکافی مسطح با معادله (۱۰-۹-۲) بیان می‌شود. با استفاده از این معادله نشان دهید که عدد نوسلت حدی برابر است با  $Nu = ۱۲$ .

۱۴-۲. ضریب انتقال گرمای کلی موضعی. در مسئله ۱۴ الف.۱ از مقاومت‌های گرمایی فیلم بخار چگالیده و جدار چشم‌پوشی می‌کنیم. با محاسبه دمای واقعی سطح داخلی لوله‌ها در مقطعی از مبادله‌کن گرما که دمای توده روغن در آن  $۱۵۰^{\circ}\text{F}$  است، این چشم‌پوشی را توجیه کنید. می‌توانید فرض کنید که برای روغن  $h_{10c}$  در سرتاسر مبادله‌کن ثابت و برابر  $۱۹۰ \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F}$  است. لوله‌ها افقی‌اند.

۱۴-۳. بادسنج سیم‌داغ.<sup>۱</sup> بادسنج سیم داغ اساساً سیم ظریفی است که معمولاً از پلاتین ساخته می‌شود و آن را با جریان الکتریکی گرم می‌کنند و در سیال جاری فرومی‌برند. دمای سیم، که تابعی از دمای سیال، سرعت سیال، و آهنگ گرمایش است، با اندازه‌گیری مقاومت الکتریکی آن تعیین می‌شود.

(الف) یک سیم استوانه‌ای مستقیم به طول  $۰/۵ \text{ in.}$  و قطر  $۰/۰۱ \text{ in.}$  در معرض جریان هوایی با دمای  $۷۰^{\circ}\text{F}$  قرار دارد که با سرعت  $۱۰۰ \text{ ft/s}$  از کنار سیم عبور می‌کند. آهنگ تأمین انرژی برحسب وات چه قدر باشد تا سطح سیم در دمای  $۶۰۰^{\circ}\text{F}$  بماند؟ از تابش و هم‌چنین از رسانش گرما در طول سیم چشم‌پوشی کنید. (ب) گزارش<sup>۲</sup> داده شده است که برای سیالی مفروض و دمای مفروض سیم (و در نتیجه مقاومت مفروض سیم)، داریم:

$$I^2 = B\sqrt{v_{\infty}} + C \quad (۱۴-۳-۱)$$

که در آن  $I$  جریان لازم برای حفظ دمای مطلوب،  $v_{\infty}$  سرعت تقرب سیال، و  $C$  مقداری ثابت است. این معادله با پیش‌بینی‌های معادله (۱۴-۴-۷) یا (۱۴-۴-۸) برای سیال و سیم (الف) در گستره ویسکوزیته سیال  $۱۰۰ \text{ ft/s}$  تا  $۳۰۰ \text{ ft/s}$ ، تا چه میزان توافق دارد؟ مفهوم مقدار ثابت  $C$  در معادله (۱۴-۳-۱) چیست؟

۱۴-۴. تحلیل بُعدی. سیستم جریان توصیف‌شده در پاراگراف نخست بخش ۱۴-۳ را در نظر بگیرید که تحلیل بُعدی آن قبلاً در توزیع سرعت بدون بُعد (معادله (۱۴-۲-۷)) و توزیع دما (معادله (۱۴-۳-۹)) ارائه شد.

(الف) با استفاده از معادله‌های (۱۴-۳-۹) و تعریف دمای اختلاط فنجانی، عبارت متوسط‌گیری شده زمانی را به دست آورید.

$$\frac{T_{b2} - T_{b1}}{T_c - T_{b1}} = \text{Re, Pr, } L/D \quad (۱۴-۳-۱)$$

(ب) با استفاده از نتیجه به دست آمده و تعریف‌های ضرایب انتقال گرما، معادله‌های (۱۴-۳-۱۲) تا (۱۴-۳-۱۴) را به دست آورید.

۱۴-۵. رابطه بین  $h_{10c}$  و  $h_{10i}$ . در بسیاری از مبادله‌کن‌های گرمای لوله‌ای که در صنعت به کار می‌روند (نگاه کنید به مثال ۱۴-۴-۱۵)، دمای سطح لوله  $T_c$  با دمای توده سیال  $T_b$  تغییرات خطی دارد. برای این وضعیت متداول  $h_{10c}$  و  $h_{10i}$  را می‌توان به سادگی به هم مربوط کرد.

1. G. Comte-Bellot, Chapter 34 in *The Handbook of Fluid Dynamics* (R. W. Johnson, ed.), CRC Press, Boca Raton, Fla. (1999).

2. L. V. King, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, **A214**, 373-432 (1914).

(الف) با استفاده از معادله (۵-۱.۱۴) نشان دهید که:

$$h_{loc}(\pi D dz)(T_b - T_c) = -\left(\frac{1}{4}\pi D^2\right)(\rho \hat{C}_p \langle v \rangle dT_b) \quad (۱۴.ب-۵)$$

و بنابراین:

$$\int_0^L h_{loc} dz = \frac{1}{4}\rho \hat{C}_p D \langle v \rangle \frac{T_b(L) - T_b(0)}{(T_c - T_b)_{in}} \quad (۱۴.ب-۵)$$

(ب) نتیجه قسمت (الف) را با معادله (۴-۱.۱۴) ترکیب کنید و نشان دهید که:

$$h_{in} = \frac{1}{L} \int_0^L h_{loc} dz \quad (۱۴.ب-۵)$$

که در آن  $L$  طول کل لوله است و بنابراین (اگر  $\partial h_{loc}/\partial L = 0$ ) که با این عبارت هم‌ارز است که از رسانش گرمای محوری چشم‌پوشی می‌شود:

$$h_{loc}|_{z=L} = h_{in} + L \frac{dh_{in}}{dL} \quad (۱۴.ب-۵)$$

۱۴.ب-۶. اتلاف گرما از طریق همرفت آزاد از لوله. در مثال ۱۴-۱، اگر دمای سطح لوله  $200^\circ\text{F}$  و دمای هوا  $180^\circ\text{F}$  بود، اتلاف گرما بیشتر می‌شد یا کم‌تر؟

۱۴.ج-۱. عبارت نوسلت برای ضرایب انتقال گرمای چگالش فیلمی (شکل ۱۴-۷.۱). فیلم آرامی از جریان روبه پایین مایع چگالیده روی جداری عمودی را در نظر بگیرید و فرض کنید که این فیلم مایع تنها مقاومت گرمایی در سمتی از جدار است که با بخار تماس دارد. به علاوه، فرض کنید که (۱) از تنش برشی بین مایع و بخار می‌توان چشم‌پوشی کرد؛ (۲) خواص فیزیکی فیلم را می‌توان در دماهای میانگین بخار و سطح سرمایش تعیین کرد و دمای سطح سرمایش را ثابت فرض کرد؛ (۳) می‌توان از شتاب اجزای سیال در فیلم، در مقایسه با نیروهای گرانشی و ویسکوز، چشم‌پوشی کرد؛ (۴) تغییرات گرمای محسوس،  $\hat{C}_p dT$ ، در فیلم مایع چگالیده، در مقایسه با گرمای نهان انتقال‌یافته از طریق آن، بی‌اهمیت است؛ و (۵) شار گرما بسیار نزدیک به حالت قائم بر سطح جدار است.

(الف) از بخش ۲.۲ یادآوری می‌کنیم که سرعت متوسط فیلمی به ضخامت ثابت  $\delta$  برابر است با:  $\rho g \delta^2 / 3\mu = \langle v_z \rangle$ . فرض کنید این رابطه به‌ازای همه مقادیر  $z$  صادق است.

(ب) با چشم‌پوشی از انحنای فیلم و همرفت، معادله انرژی را برای فیلم بنویسید. نشان دهید که شار گرمای عبوری از فیلم به‌طرف سطح سرد عبارت است از:

$$-q_y = k \left( \frac{T_d - T_c}{\delta} \right) \quad (۱۴.ج-۱)$$

(ج) وقتی فیلم روی جدار پایین می‌رود، از طریق فرایند چگالش ماده بیشتر را جمع‌آوری می‌کند. در این فرایند گرما به میزان  $\Delta \hat{H}_{vap}$  بر واحد جرم ماده‌ای که تغییر حالت می‌دهد، آزاد می‌شود. نشان دهید که برابر نهادن گرمای آزاد شده بر اثر چگالش، با گرمای جریان‌یافته در قطعه  $dz$  فیلم، به رابطه زیر منتهی می‌شود:

$$\rho \Delta \hat{H}_{vap} d(\langle v_z \rangle \delta) = k \left( \frac{T_d - T_c}{\delta} \right) dz \quad (۱۴.ج-۱)$$

(د) عبارت سرعت متوسط را از قسمت (الف) در معادله (۱۴-۱-۲) قرار دهید و از  $z = L$  تا  $z = 0$  انتگرال بگیرید تا نتیجه زیر عاید شود:

$$\delta(L) = \left( \frac{4k(T_d - T_0)\mu L}{\rho^2 g \Delta \hat{H}_{\text{vap}}} \right)^{1/4} \quad (14-1-3)$$

(ه) با استفاده از تعریف ضریب انتقال گرما و نتیجه قسمت (د)، معادله (۱۴-۷-۵) را به دست آورید.

(و) نشان دهید که معادله‌های (۱۴-۷-۴) و (۱۴-۷-۵) برای شرایط این مسئله هم‌ارزند.

۲.۱۴ روابط همبستگی انتقال گرما برای مخزن‌های هم‌زده (شکل ۱۴-۲). مایعی با خواص فیزیکی اساساً ثابت، با عبور از یک مخزن هم‌زده مطابق شکل، به‌طور پیوسته گرم می‌شود. گرما از طریق چگالش بخار روی جدار خارجی مخزن تأمین می‌شود. مقاومت گرمایی فیلم مایع چگالیده و جدار مخزن را می‌توان، در مقایسه با مقاومت سیال داخل مخزن، کوچک گرفت، و هم‌چنین می‌توان فرض کرد که بخش بدون پوشش مخزن کاملاً عایق‌کاری شده است. اثر آهنگ جریان مایع در مخزن، بر الگوی جریان در مخزن قابل چشم‌پوشی است.

صورت کلی رابطه همبستگی بدون بعد انتقال گرما برای مخزن، با رابطه همبستگی برای جریان داخل لوله در بخش ۳.۱۴ متناظر است. کمیت‌های مرجع زیر را انتخاب کنید: طول مرجع،  $D$ ، قطر پروانه؛ سرعت مرجع  $ND$ ، که در آن  $N$  آهنگ چرخش محور بر حسب دور در واحد زمان است؛ فشار مرجع،  $\rho N^2 D^2$ ، که در آن  $\rho$  چگالی سیال است.

۱.د.۱۴ انتقال گرما از بیضی‌وار دورانی پُخ. سیستم‌هایی از این نوع در دستگاه مختصات بیضی‌واری پُخ  $(\xi, \eta, \psi)$  بهتر توصیف می‌شوند؛ در چنین دستگاهی:

$\xi =$  ثابتی که بیضی‌وار پُخ را توصیف می‌کند  $(0 \leq \xi < \infty)$

$\eta =$  ثابتی که هذلولی‌وار دورانی را توصیف می‌کند  $(0 \leq \eta \leq \pi)$

$\psi =$  ثابتی که نیم‌صفحه‌ها را توصیف می‌کند  $(0 \leq \psi < 2\pi)$

توجه کنید که  $\xi = 0$  می‌تواند بیضی‌واری پُخ را توصیف کند و  $\xi = \infty$  حالت حدی یک دیسک دوطرفه است و در حد، وقتی  $\xi \rightarrow \infty$ ، به کره تبدیل می‌شود. در این مسئله در پی یافتن دو مقدار حدی متناظر عدد نوسلت هستیم.

(الف) ابتدا با استفاده از معادله (الف-۷-۱۳) ضرایب مقیاس را از رابطه بین مختصات بیضی‌واری پُخ و مختصات دکارتی به دست آورید:

$$x = a \cosh \xi \sin \eta \cos \psi \quad (14-1-1)$$

$$y = a \cosh \xi \sin \eta \sin \psi \quad (14-1-2)$$

$$z = a \sinh \xi \cos \eta \quad (14-1-3)$$

۳. برای آشنایی با دستگاه مختصات بیضی‌واری پُخ، نگاه کنید به

P. Moon and D. E. Spencer, *Field Theory Handbook*, Springer, Berlin (1961), pp. 31-34. see also J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1965), pp. 512-516.

توجه کنید که ضرایب مقیاس آن‌ها عکس ضرایب تعریف‌شده در این کتاب‌اند.

که در آن  $a$  نصف فاصله بین کانون‌هاست. نشان دهید که:

$$h_{\xi} = h_{\eta} = a \sqrt{\cosh^2 \xi - \sin^2 \eta} \quad (۴-۱.د۱۴)$$

$$h_{\psi} = a \cosh \xi \sin \eta \quad (۵-۱.د۱۴)$$

می‌توان از معادله‌های (الف.۷-۱۴) و (الف.۷-۱۵) استفاده کرد و هریک از عملگرهای  $\nabla$  مورد نیاز را به دست آورد.

(ب) سپس توزیع دما در بیرون بیضی وارپنج را، با دمای سطح  $T_0$  بیابید؛ بیضی وار در محیطی نامتناهی فرورفته که دمای آن در نقاط دور از بیضی وار  $T_{\infty}$  است. فرض کنید  $\Theta = (T - T_0)/(T_{\infty} - T_0)$  دمایی بدون بُعد است، و نشان دهید که معادله لاپلاسی که رسانش گرما در بیرون بیضی وار را توصیف می‌کند چنین است:

$$\frac{1}{a^2 (\cosh^2 \xi - \sin^2 \eta)} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \cosh \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + \dots \right] = 0 \quad (۶-۱.د۱۴)$$

جمله‌های شامل مشتق نسبت به  $\eta$  و  $\psi$  حذف شده‌اند، زیرا نیازی به آن‌ها نیست. نشان دهید که این معادله را می‌توان با شرایط مرزی  $\Theta(\xi_0) = 0$  و  $\Theta(\infty) = 1$  حل کرد و نتیجه گرفت که:

$$\Theta = 1 - \frac{\frac{1}{4}\pi - \arctan(\sinh \xi)}{\frac{1}{4}\pi - \arctan(\sinh \xi_0)} \quad (۷-۱.د۱۴)$$

(ج) سپس، این نتیجه را برای حالت خاص دیسک دوطرفه (که حالت حدی  $\xi_0 = 0$  است) اصلاح کنید و نشان دهید که گرادیان دمای قائم در سطح برابر است با:

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla \Theta)|_{\text{surf}} = \left( \mathbf{n}_{\xi} \cdot \mathbf{n}_{\xi} \frac{1}{h_{\xi}} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{R \cos \eta} \quad (۸-۱.د۱۴)$$

که در آن  $a$  برحسب  $R$ ، شعاع دیسک بیان شده است. به علاوه، نشان دهید که اتلاف گرمای کل از دو طرف دیسک عبارت است از:

$$\begin{aligned} Q &= -2k \int (\mathbf{n} \cdot \nabla T) dS \\ &= +2k(T_0 - T_{\infty}) \int (\mathbf{n} \cdot \nabla \Theta) dS \\ &= 2k(T_0 - T_{\infty}) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{2}{\pi R \cos \eta} \right) R^2 \cos \eta \sin \eta \, d\eta \, d\psi \\ &= 8kR(T_0 - T_{\infty}) \end{aligned} \quad (۹-۱.د۱۴)$$

و این که عدد نوسلت از رابطه  $\text{Nu} = h(2R)/k = 8/\pi = 2.55$  مشاهده می‌کنیم که عدد نوسلت برای هر بیضی وارپنج باید بین ۲ و ۲.۵۵ باشد.

(د) با تحلیل بُعدی نشان دهید که، بدون انجام عملیات جزئی برای به دست آوردن روابط (مانند عملیات بالا)، می‌توان پیش‌بینی کرد که اتلاف گرما از بیضی وار باید با بُعد خطی  $a$  متناسب باشد، نه با مساحت سطح. آیا این نتیجه به بیضی‌وارها محدود می‌شود؟ بحث کنید.

## فصل ۱۵

### موازنه‌های ماکروسکوپی در سیستم‌های غیرهم‌دما

۱.۱۵ موازنه ماکروسکوپی انرژی

۲.۱۵ موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی

۳.۱۵ کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی در حل مسئله‌های حالت‌پایا با توزیع سرعت تخت

۴.۱۵ صورت‌های  $d$  موازنه ماکروسکوپی

۵.۱۵ کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی در حل مسئله‌های حالت‌پایا و مسئله‌های با توزیع سرعت غیرتخت

در فصل ۷ موازنه‌های ماکروسکوپی جرم، اندازه حرکت، اندازه حرکت زاویه‌ای، و انرژی مکانیکی را شرح دادیم. در آن فصل کار ما محدود به سیستم‌هایی با دمای ثابت بود. این محدودیت به نوعی مصنوعی است، زیرا در سیستم‌های جریان واقعی، بر اثر اتلاف ویسکوز، همواره انرژی مکانیکی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود. آنچه در فصل ۷ واقعاً فرض کردیم این است که گرمای تولیدی کم‌تر از آن است که خواص سیال را تغییر دهد، یا این گرما بلافاصله از طریق جدار سیستم حاوی سیال به بیرون هدایت می‌شود. در این فصل نتایج قبلی را تعمیم می‌دهیم تا رفتار کلی سیستم‌های جریان ماکروسکوپی غیرهم‌دما را توصیف کنیم.

برای هر سیستم غیرهم‌دما پنج موازنه ماکروسکوپی می‌توان نوشت که روابط بین شرایط خروجی و ورودی جریان را توصیف می‌کنند. با انتگرال‌گیری از معادلات تغییر در سیستم ماکروسکوپی، می‌توان این موازنه‌ها را به دست آورد:

$$\int_{V(t)} dV = \text{موازنه ماکروسکوپی جرم} \quad (\text{معادله پیوستگی})$$

$$\int_{V(t)} dV = \text{موازنه ماکروسکوپی اندازه حرکت} \quad (\text{معادله حرکت})$$

$$\int_{V(t)} dV = \text{موازنه ماکروسکوپی اندازه حرکت زاویه‌ای} \quad (\text{معادله اندازه حرکت زاویه‌ای})$$

$$\int_{V(t)} dV = \text{موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی} \quad (\text{معادله انرژی مکانیکی})$$

$$\int_{V(t)} dV = \text{موازنه ماکروسکوپی انرژی (کل)} \quad (\text{معادله انرژی (کل)})$$

چهار انتگرال نخست را در فصل ۷ شرح دادیم و روش به‌دست آوردن آن‌ها نشان می‌دهد که می‌توان در هر دو نوع سیستم هم‌دما و غیرهم‌دما آن‌ها را به‌کار برد. در این فصل موازنه پنجم؛ یعنی موازنه انرژی کل را هم اضافه می‌کنیم. این معادله را در بخش ۱.۱۵ به‌دست می‌آوریم، اما نه با انجام انتگرال‌گیری بالا، بلکه با کاربرد مستقیم قانون پایستگی انرژی کل در مورد سیستم نشان‌داده‌شده در شکل ۱۰-۷. سپس در بخش ۲.۱۵ دوباره به‌سراغ موازنه انرژی مکانیکی می‌رویم و با توجه به بحث موازنه انرژی (کل) آن را بررسی می‌کنیم. پس از آن در بخش ۳.۱۵ روایت‌های ساده‌شده موازنه‌های ماکروسکوپی را در مورد سیستم‌های حالت‌پایا ارائه می‌کنیم و کاربرد آن‌ها را نشان می‌دهیم.

در بخش ۴.۱۵ صورت‌های دیفرانسیلی (صورت‌های  $d$ ) موازنه‌های حالت‌پایا را ارائه می‌دهیم. در این صورت‌ها، فرض می‌کنیم صفحه‌های ورود و خروج ۱ و ۲ فقط به‌اندازه یک جزء فاصله از هم دورند. صورت‌های دیفرانسیلی در حل مسئله‌های جریان در کانال‌ها، که در آن‌ها سرعت، دما، و فشار به‌طور پیوسته در جهت جریان تغییر می‌کنند، مکرراً به‌کار می‌آیند.

سرانجام در بخش ۵.۱۵ چندین مسئله حالت‌ناپایا را مطرح می‌کنیم که می‌توان با استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی آن‌ها را حل کرد.

در این فصل تقریباً از همه موضوعاتی که تا این‌جا مطالعه کرده‌ایم استفاده می‌کنیم و این فصل فرصتی عالی برای مرور مطالب فصل‌های قبلی است. یک‌باردیگر از این فرصت استفاده می‌کنیم و به دانشجوی یادآوری می‌کنیم که در کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی، شاید حذف بعضی از جمله‌ها و تخمین زدن مقدار بعضی از جمله‌های دیگر ضرورت داشته باشد. این کار مستلزم داشتن قوه شهودی خوب یا بعضی داده‌های تجربی اضافی است.

### ۱.۱۵ موازنه ماکروسکوپی انرژی

سیستم نشان‌داده‌شده در شکل ۱۰-۷ را در نظر می‌گیریم و همان فرض‌هایی را در مورد کمیت‌ها در صفحه‌های ورودی و خروجی اختیار می‌کنیم که در فصل ۷ اختیار کردیم:

۱. سرعت هموارشده زمانی بر سطح مقطع مربوط به خود عمود است؛

۲. چگالی و سایر خواص فیزیکی در تمام سطح مقطع یکنواخت‌اند؛

۳. از نیروهای مرتبط با تانسور تنش  $\mathcal{T}$  چشم‌پوشی می‌کنیم؛

۴. فشار در سطح مقطع تغییر نمی‌کند؛

به این فرض‌ها (چنان‌که در مورد صفحه‌های ورودی و خروجی دیدیم) دو فرض زیر را اضافه می‌کنیم:

۵. آهنگ انتقال رسانشی انرژی،  $q$ ، در مقایسه با آهنگ انتقال همرفتی انرژی کوچک و قابل چشم‌پوشی است.

۶. از کار مرتبط با  $[T \cdot v]$ ، در مقایسه با  $pV$ ، می‌توان چشم‌پوشی کرد.

اکنون عبارت پایستگی انرژی را در مورد سیال موجود در سیستم جریان ماکروسکوپی به‌کار می‌بندیم. در انجام این کار، از مفهوم انرژی پتانسیل برای منظور کردن کار انجام‌شده در برابر نیروهای خارجی استفاده می‌کنیم (این کار متناظر است با استفاده از معادله (۷-۱۱۱) به‌جای معادله تغییر انرژی).

در این صورت عبارت قانون پایستگی انرژی چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}(U_{\text{tot}} + K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}) = (\rho_1 \hat{U}_1 \langle v_1 \rangle + \frac{1}{\gamma} \rho_1 \langle v_1^2 \rangle + \rho_1 \hat{\Phi}_1 \langle v_1 \rangle) S_1$$

آهنگ ورود انرژی داخلی، جنبشی، و پتانسیل به سیستم در صفحه ۱ توسط جریان

آهنگ افزایش انرژی داخلی، جنبشی، و پتانسیل در سیستم



$$-(\rho_2 \hat{U}_2 \langle v_2 \rangle + \frac{1}{\gamma} \rho_2 \langle v_2^2 \rangle + \rho_2 \hat{\Phi}_2 \langle v_2 \rangle) S_2 \quad (1-1.15)$$

آهنگ خروج انرژی داخلی، جنبشی، و پتانسیل از  
سیستم در صفحهٔ ۲ توسط جریان

$+Q$	$+W_m$	$+(p_1 \langle v_1 \rangle S_1 - p_2 \langle v_2 \rangle S_2)$
آهنگ اضافه شدن گرما به سیستم از طریق مرز سیستم	آهنگ انجام کار روی سیستم توسط محیط اطراف، از طریق سطوح متحرک	آهنگ انجام کار روی سیستم توسط محیط در صفحه‌های ۱ و ۲

در این جا عبارت‌های  $\Phi_{\text{tot}} = \int \rho \hat{\Phi} dV$ ،  $U_{\text{tot}} = \int \rho \hat{U} dV$ ،  $K_{\text{tot}} = \int \frac{1}{\gamma} \rho v^2 dV$  جنبشی، و پتانسیل در سیستم‌اند و انتگرال‌گیری روی کل حجم سیستم انجام می‌شود.  
با معرفی آهنگ‌های جریان جرمی  $w_2 = \rho_2 \langle v_2 \rangle S_2$  و  $w_1 = \rho_1 \langle v_1 \rangle S_1$ ، و انرژی کل  $E_{\text{tot}} = U_{\text{tot}} + K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}$ ، این معادله را می‌توان به صورت کوتاه‌تری نوشت. بنابراین موازنهٔ ماکروسکوپی انرژی حالت‌ناپایا چنین نوشته می‌شود:

$$\boxed{\frac{d}{dt} E_{\text{tot}} = -\Delta \left[ \left( \hat{U} + p \hat{V} + \frac{1}{\gamma} \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} + \hat{\Phi} \right) w \right] + Q + W_m} \quad (2-1.15)$$

باتوجه به نحوهٔ آوردن معادلهٔ (۱-۱.۱۵) آشکار است که «کار انجام‌شده روی سیستم توسط محیط» از دو بخش تشکیل می‌شود: (۱) کار انجام‌شده از طریق حرکت سطوح  $W_m$ ، و (۲) کار انجام‌شده در دوسر سیستم (صفحه‌های ۱ و ۲)، که در معادلهٔ (۲-۱.۱۵) به صورت  $-\Delta(p \hat{V} w)$  ظاهر می‌شود. اگرچه در معادلهٔ (۲-۱.۱۵) جمله‌های  $pV$  را با جمله‌های انرژی داخلی، جنبشی و پتانسیل ترکیب کرده‌ایم، درست نیست که بگوییم در ورودی و خروجی «انرژی وارد سیستم می‌شود و آن را ترک می‌کند». جمله‌های  $pV$  منشأیی مانند جمله‌های کار دارند و باید آن‌ها را به‌همین صورت دید.

اکنون وضعیتی را در نظر بگیرید که در آن سیستم به‌صورت حالت‌پایا عمل می‌کند، به‌طوری‌که انرژی کل  $E_{\text{tot}}$  ثابت است و آهنگ‌های جریان جرمی ورودی و خروجی مساوی‌اند ( $w_1 = w_2 = w$ ). اکنون بهتر است نمادهای  $\hat{Q} = Q/w$  (گرمای اضافه‌شده در واحد جرم سیال در حال جریان) و  $\hat{W}_m = W_m/w$  (کار انجام‌شده روی واحد جرم سیال در حال جریان) را معرفی کنیم. در این صورت موازنهٔ ماکروسکوپی انرژی حالت‌پایا عبارت است از:

$$\Delta \left( \hat{H} + \frac{1}{\gamma} \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} + gh \right) = \hat{Q} + \hat{W}_m \quad (3-1.15)$$

در این جا  $\hat{\Phi}_2 = gh_2$  و  $\hat{\Phi}_1 = gh_1$  که در آن  $h_2$  و  $h_1$  ارتفاع نسبت به صفحهٔ مبنای اختیاری است (نگاه کنید به بحثی که درست قبل از معادلهٔ (۲-۳.۳) مطرح شد). به‌همین ترتیب،  $\hat{H}_2 = \hat{U}_2 + p_2 \hat{V}_2$  و  $\hat{H}_1 = \hat{U}_1 + p_1 \hat{V}_1$ ، به‌همین ترتیب، فرمول‌های صریح آنتالپی بر واحد جرم‌اند که نسبت به حالت مرجع مشخص‌شده به‌دلخواه اندازه‌گیری می‌شوند. فرمول‌های صریح آنتالپی در معادلهٔ (۸-۸.۹) ارائه شد.

در بسیاری از مسئله‌های مهندسی شیمی، جمله‌های انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل، و کار، در مقایسه با جمله‌های گرمایی معادلهٔ (۳-۱.۱۵) قابل چشم‌پوشی هستند و موازنهٔ انرژی به صورت  $\hat{Q} = \hat{H}_2 - \hat{H}_1$  ساده می‌شود که غالباً آن را «موازنهٔ آنتالپی» می‌نامند. اما این رابطه را نباید به‌عنوان معادلهٔ پایستگی آنتالپی تفسیر کرد.

### ۲.۱۵ موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی

موازنه انرژی مکانیکی را در بخش ۴.۷ توصیف کردیم و در بخش ۸.۷ معادله آن را به دست آوردیم. در این جا به منظور مقایسه با معادله‌های (۳ و ۲-۱.۱۵) آن را تکرار می‌کنیم. موازنه ماکروسکوپی حالت ناپایای انرژی مکانیکی، به صورتی که در معادله (۲-۴.۷) دیدیم، چنین است:

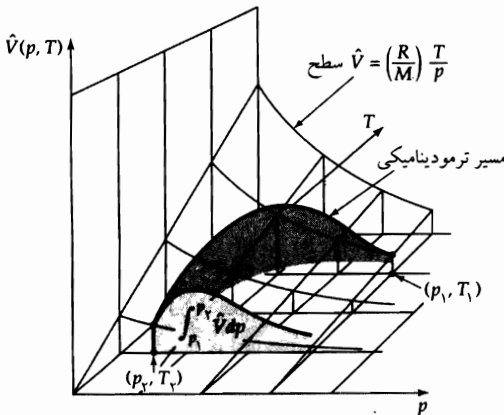
$$\frac{d}{dt}(K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}) = -\Delta \left( \frac{1}{2} \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} + \hat{\Phi} + \frac{p}{\rho} \right) w + W_m - E_c - E_v \quad (1-2.15)$$

که در آن  $E_v$  و  $E_c$  با معادله‌های (۳-۴.۷ و ۴) تعریف می‌شوند. صورت تقریبی موازنه ماکروسکوپی حالت پایای انرژی مکانیکی، طبق معادله (۷-۴.۷) چنین است:

$$\Delta \left( \frac{1}{2} \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} \right) + g\Delta h + \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp = \hat{W}_m - \hat{E}_v \quad (2-2.15)$$

جزئیات تقریب اختیار شده در این جا را ضمن معادله‌های (۹-۸.۷) تا (۱۲-۸.۷) شرح می‌دهیم.

جمله انتگرالی معادله (۲-۲.۱۵) را باید در طول یک «خط جریان معرف» سیستم محاسبه کرد. برای انجام این کار باید معادله حالت  $\rho = \rho(p, T)$  را بدانیم و از تغییرات  $T$  با  $p$  در طول این خط جریان نیز مطلع باشیم. در شکل ۱-۲.۱۵ سطح  $\hat{V} = \hat{V}(p, T)$  برای گاز ایده‌آل نشان داده شده است. در صفحه  $pT$  منحنی مشاهده می‌شود که از  $p_1, T_1$  (شرایط ورودی جریان) شروع شده، به  $p_2, T_2$  (شرایط خروجی جریان) ختم می‌شود. منحنی واقع در صفحه  $pT$  نشان‌دهنده توالی حالت‌هایی است که گاز، در گذر از حالت ابتدایی به حالت انتهایی، از آن‌ها عبور می‌کند. بنابراین انتگرال  $\int_1^2 (\hat{V}/\rho) dp$  تصویر ناحیه هاشورخورده در شکل ۱-۲.۱۵، روی صفحه  $p\hat{V}$  است. آشکار است که با تغییر «مسیر ترمودینامیکی» فرایند از صفحه ۱ تا ۲، مقدار این انتگرال تغییر می‌کند. اگر مسیر و معادله حالت معلوم باشد، آن‌گاه می‌توان عبارت  $\int_1^2 (\hat{V}/\rho) dp$  را محاسبه کرد.



شکل ۱-۲.۱۵ نمایش ترسیمی جمله انتگرالی معادله (۲-۲.۱۵). در ناحیه‌ای که هاشور کم‌رنگ‌تری دارد.  $\int_{p_1}^{p_2} \hat{V} dp = \int_{p_1}^{p_2} (\hat{V}/\rho) dp$  توجه کنید که مقدار این انتگرال در این جا منفی است، زیرا انتگرال‌گیری را از راست به چپ انجام می‌دهیم.

در چندین وضعیت خاص، محاسبه این انتگرال دشوار نیست:

(الف) برای سیستم‌های هم‌دما، این انتگرال با تعیین معادله حالت هم‌دما؛ یعنی با ارائه رابطه‌ای برای بیان  $\rho$  به صورت

تابعی از  $p$  محاسبه می‌شود. مثلاً، برای گازهای ایده‌آل  $\rho = pM/RT$  و:

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho} dp = \frac{RT}{M} \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} dp = \frac{RT}{M} \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (\text{گازهای ایده‌آل}) \quad (۳-۲.۱۵)$$

(ب) برای مایعات تراکم‌ناپذیر،  $\rho$  ثابت است، در نتیجه:

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) \quad (\text{مایعات تراکم‌ناپذیر}) \quad (۴-۲.۱۵)$$

(ج) برای جریان بدون اصطکاک و آدیاباتیک گازهای ایده‌آل با ظرفیت گرمایی ثابت،  $p$  و  $\rho$  با عبارت (مقدار ثابت)  $pp^{-\gamma} = \text{مهم}$  مربوط می‌شوند که در آن، چنان‌که در مثال ۶-۴.۱۱ دیدیم،  $\gamma = \hat{C}_p/\hat{C}_v$ . بنابراین انتگرال چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp &= \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p^{1/\gamma}} dp = \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] \\ &= \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \end{aligned} \quad (۵-۲.۱۵)$$

بنابراین در این حالت خاص جریان غیرهم‌دما، می‌توان انتگرال‌گیری تحلیلی انجام داد.

این بحث را با چند نکته در مورد موازنه انرژی مکانیکی و موازنه انرژی کل به پایان می‌بریم. در بخش ۸.۷ بر این نکته تأکید کردیم که معادله (۲-۴.۷) (مانند معادله (۱-۲.۱۵)) با تعیین حاصل ضرب نقطه‌ای  $v$  و معادله حرکت، و سپس انتگرال‌گیری از نتیجه حاصل، روی حجم سیستم جریان به‌دست می‌آید. چون کار را از معادله حرکت آغاز کردیم - که بیانی از قانون پایستگی اندازه حرکت خطی است - موازنه انرژی مکانیکی حاوی اطلاعاتی متفاوت از موازنه انرژی (کل) است که بیان قانون پایستگی انرژی است. بنابراین، برای حل مسئله در حالت کلی به هردو موازنه نیاز داریم. موازنه انرژی مکانیکی «صورت بدیل» موازنه انرژی نیست. درحقیقت، اگر موازنه انرژی مکانیکی، معادله (۱-۲.۱۵) را از موازنه انرژی کل، معادله (۲-۱.۱۵) تفریق کنیم، موازنه ماکروسکوپی انرژی داخلی حاصل می‌شود:

$$\boxed{\frac{dU_{\text{tot}}}{dt} = -\Delta \hat{U}w + Q + E_c + E_v} \quad (۶-۲.۱۵)$$

این رابطه نشان می‌دهد که انرژی داخلی کل سیستم تغییر می‌کند، چون بین مقدار انرژی داخلی ورودی به سیستم و خروجی از سیستم، از طریق جریان سیال تفاوت وجود دارد، زیرا گرما از طریق جدارهای سیستم وارد (یا خارج) می‌شود، زیرا گرما، در نتیجه تراکم (یا انبساط)، در داخل سیال تولید (یا مصرف) می‌شود، و زیرا برآثر گرمایش اتلافی ویسکوز، در داخل سیستم گرما تولید می‌شود. معادله (۶-۲.۱۵) را نمی‌توان به صورت پیشینی نوشت، زیرا قانون پایستگی انرژی داخلی نداریم. اما می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله (۱-۲.۱۱)، روی کل سیستم جریان، آن را به‌دست آورد.

۳.۱۵ کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی در حل مسئله‌های حالت پایا با توزیع سرعت تخت

مهم‌ترین کاربردهای موازنه‌های ماکروسکوپی در حل مسئله‌های حالت پایاست. به علاوه، معمولاً فرض می‌شود که جریان متلاطم است، به طوری که تغییرات سرعت در مقطع جریان را می‌توان نادیده گرفت (نگاه کنید به «تذکر» پس از معادله‌های (۳-۲.۷) و (۷-۴.۷). پنج موازنه ماکروسکوپی، با این قیود اضافی، در جدول ۱۵-۳ خلاصه شده‌اند. این معادله‌ها را به سیستم‌هایی با چند ورودی و چند خروجی تعمیم داده‌ایم تا مجموعه بزرگ‌تری از مسئله‌ها را شامل شوند.

جدول ۱۵-۳ موازنه‌های ماکروسکوپی حالت پایا برای جریان متلاطم در سیستم‌های غیرهم‌دما.

جرم:  $\sum w_1 - \sum w_2 = 0$  (الف)

اندازه حرکت:  $\sum (v_1 w_1 + p_1 S_1) \mathbf{u}_1 - \sum (v_2 w_2 + p_2 S_2) \mathbf{u}_2 + m_{\text{tot}} \mathbf{g} = \mathbf{F}_{f \rightarrow s}$  (ب)

اندازه حرکت زاویه‌ای:  $\sum (v_1 w_1 + p_1 S_1) [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1] - \sum (v_2 w_2 + p_2 S_2) [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2] + \mathbf{T}_{\text{ext}} = \mathbf{T}_{f \rightarrow s}$  (ج)

انرژی مکانیکی:  $\sum \left( \frac{1}{\rho} v_1^2 + gh_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) w_1 - \sum \left( \frac{1}{\rho} v_2^2 + gh_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) w_2 = -W_m + E_c + E_v$  (د)

انرژی (کل):  $\sum \left( \frac{1}{\rho} v_1^2 + gh_1 + \hat{H}_1 \right) w_1 - \sum \left( \frac{1}{\rho} v_2^2 + gh_2 + \hat{H}_2 \right) w_2 = -W_m - Q$  (ه)

تذکر:

(الف) همه فرمول‌ها با فرض توزیع سرعت تخت نوشته شده‌اند.

(ب)  $\sum w_1 = w_{1a} + w_{1b} + w_{1c} + \dots$  که در آن  $w_{1a} = \rho_{1a} v_{1a} S_{1a}$  و غیره.

(ج)  $h_1$  و  $h_2$  ارتفاع نسبت به صفحه مبدأ اختیاری‌اند.

(د)  $\hat{H}_1$  و  $\hat{H}_2$  آنتالپی در واحد حجم، نسبت به حالت مرجعی است که به دلخواه انتخاب می‌شود (معادله (۸-۸.۹)).

(ه) همه معادله‌ها برای جریان تراکم‌پذیر نوشته شده‌اند؛ برای جریان تراکم‌ناپذیر داریم،  $E_c = 0$ . کمیت‌های  $E_v$  و  $E_c$  با معادله‌های (۷-۴.۷ و ۴) تعریف می‌شوند.

(و)  $\mathbf{u}_1$  و  $\mathbf{u}_2$  بردارهای یک درجهت جریان‌اند.

مثال ۱۵-۳

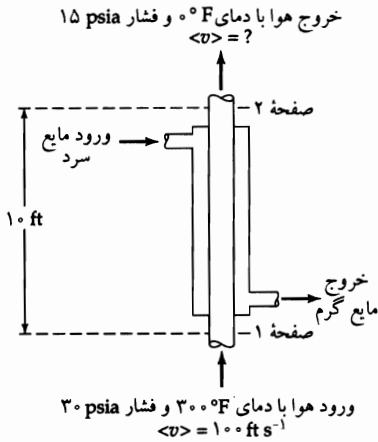
سرد کردن گاز ایده‌آل

هوای خشک با آهنگ دویست پوند بر ساعت، با دمای  $300^\circ\text{F}$  و فشار ۳۰ psi و سرعت  $100 \text{ ft/s}$  وارد لوله داخلی مبادله‌کن گرمای نشان داده شده در شکل ۱۵-۳ می‌شود. هوا با دمای  $90^\circ\text{F}$  و فشار ۱۵ psi، در ارتفاع  $10 \text{ ft}$  بالاتر از مبادله‌کن از آن خارج می‌شود. مطلوب است محاسبه آهنگ حذف انرژی در جدار لوله. جریان را متلاطم و رفتار گاز را ایده‌آل فرض کنید و برای محاسبه ظرفیت گرمایی از عبارت زیر استفاده کنید:

$$\bar{C}_p = 6.39 + (9.78 \times 10^{-4})T - (8.718 \times 10^{-8})T^2 \quad (15-3)$$

که در آن  $\bar{C}_p$  برحسب  $\text{Btu}/(\text{lb-mole} \cdot ^\circ\text{R})$  و  $T$  برحسب درجه R است.

۳.۱۵ کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی در حل مسئله‌های حالت پایا با توزیع سرعت تخت • ۵۳۵



شکل ۳.۱۵-۱ سرد کردن هوا در مبادله‌کن گرما با جریان متقابل.

حل

موازنه ماکروسکوپی انرژی، معادله (۳-۱.۱۵)، برای این سیستم چنین نوشته می‌شود:

$$(\hat{H}_2 - \hat{H}_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g(h_2 - h_1) = \hat{Q} \quad (2-3.15)$$

اختلاف آنتالپی را می‌توان از معادله (۸-۸.۹) به‌دست آورد و به‌کمک موازنه ماکروسکوپی جرم  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$  و قانون گاز ایده‌آل  $p = \rho RT/M$ ، سرعت را می‌توان به‌صورت تابعی از دما و فشار نوشت. بنابراین معادله (۲-۳.۱۵) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{M} \int_{T_1}^{T_2} \bar{C}_p dT + \frac{1}{2} v_1^2 \left[ \left( \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} \right)^2 - 1 \right] + g(h_2 - h_1) = \hat{Q} \quad (3-3.15)$$

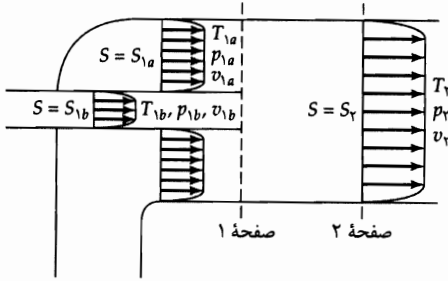
اکنون عبارت صریح  $\bar{C}_p$  را از معادله (۱-۳.۱۵) می‌توان در معادله (۳-۳.۱۵) قرار داد و انتگرال گرفت. سپس، با جایگزین کردن مقادیر عددی، آهنگ حذف گرما به‌ازای هر پوند سیال عبوری از مبادله‌کن گرما به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} -\hat{Q} &= \frac{1}{29} [(6,39)(300) + \frac{1}{2}(9,8 \times 10^{-4})(5,78 - 2,12)(10^5) \\ &\quad - \frac{1}{2}(8,18 \times 10^{-8})(4,39 - 0,97)(10^8)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{10^2}{(32,2)(778)} \right) [1 - (1,21)^2] - \left( \frac{10}{778} \right) \\ &= 72,0 - 0,093 - 0,0128 \\ &= 71,9 \text{ Btu/lb}_m \end{aligned} \quad (4-3.15)$$

در نتیجه آهنگ حذف گرما برابر است با:

$$-\hat{Q}w = 14380 \text{ Btu/hr} \quad (5-3.15)$$

توجه کنید که در معادله (۴-۳.۱۵)، سهم‌های انرژی جنبشی و پتانسیل، در مقایسه با تغییر آنتالپی قابل چشم‌پوشی است.



شکل ۲-۳.۱۵ اختلاط دو جریان گاز ایده‌آل.

**مثال ۲-۳.۱۵**

اختلاط دو جریان گاز ایده‌آل

دو جریان متلاطم پایا از یک گاز ایده‌آل با سرعت‌ها، دماها، و فشارهای متفاوت، مطابق شکل ۲-۳.۱۵، باهم مخلوط می‌شوند. مطلوب است محاسبه سرعت، دما، و فشار جریان حاصل از این اختلاط.

حل

رفتار سیال در این مثال پیچیده‌تر از وضعیت هم‌دما و تراکم‌ناپذیری است که در مثال ۲-۶.۷ شرح داده شد، زیرا در مثال حاضر، تغییر چگالی و دما ممکن است اهمیت داشته‌باشد. در این جا باید از موازنه ماکروسکوپی انرژی حالت‌پایا، معادله (۱.۳-۱.۱۵)، و معادله حالت گاز ایده‌آل، به‌علاوه موازنه‌های جرم و اندازه‌حرکت استفاده کنیم. با این استثناها، همان روش مثال ۲-۶.۷ را دنبال می‌کنیم.

صفحه‌های ورودی (۱a و ۱b) را به‌عنوان مقاطعی انتخاب می‌کنیم که در آن‌ها سیال‌ها شروع به اختلاط می‌کنند. صفحه خروجی (۲) به‌فاصله کافی در پایین دست جریان در نظر گرفته می‌شود تا اختلاط کامل روی دهد. چنان‌که در مثال ۲-۶.۷ دیدیم، فرض می‌کنیم توزیع سرعت تخت باشد، از تنش‌های برشی روی جدار لوله چشم‌پوشی می‌کنیم، و فرض می‌کنیم انرژی پتانسیل تغییر نمی‌کند. به‌علاوه، از تغییرات ظرفیت گرمایی سیال چشم‌پوشی می‌کنیم، عملیات را آدیاباتیک فرض می‌کنیم. اکنون معادله‌های زیر را برای این سیستم با دو دریچه ورودی و یک دریچه خروجی می‌نویسیم:

$$w_1 = w_{1a} + w_{1b} = w_2 \quad (۶-۳.۱۵) \text{ جرم:}$$

$$v_2 w_2 + p_2 S_2 = v_{1a} w_{1a} + p_{1a} S_{1a} + v_{1b} w_{1b} + p_{1b} S_{1b} \quad (۷-۳.۱۵) \text{ اندازه حرکت:}$$

$$w_2 [\hat{C}_p (T_2 - T_{ref}) + \frac{1}{\gamma} v_2^2] = w_{1a} [\hat{C}_p (T_{1a} - T_{ref}) + \frac{1}{\gamma} v_{1a}^2] + w_{1b} [\hat{C}_p (T_{1b} - T_{ref}) + \frac{1}{\gamma} v_{1b}^2] \quad (۸-۳.۱۵) \text{ انرژی:}$$

$$p_2 = \rho_1 R T_2 / M \quad (۹-۳.۱۵) \text{ معادله حالت:}$$

در این مجموعه از معادله‌ها، همه کمیت‌ها در ۱a و ۱b معلوم‌اند و چهار کمیت مجهول عبارت‌اند از:  $\rho_2$ ،  $T_2$ ،  $p_2$  و  $v_2$ . کمیت  $T_{ref}$  دمای مرجع برای محاسبه آنتالپی است. با ضرب کردن معادله (۶-۳.۱۵) در  $\hat{C}_p T_{ref}$  و جمع کردن نتیجه با معادله (۸-۳.۱۵)، داریم:

$$w_2 [\hat{C}_p T_2 + \frac{1}{\gamma} v_2^2] = w_{1a} [\hat{C}_p T_{1a} + \frac{1}{\gamma} v_{1a}^2] + w_{1b} [\hat{C}_p T_{1b} + \frac{1}{\gamma} v_{1b}^2] \quad (۱۰-۳.۱۵)$$

سمت راست معادله‌های (۳.۱۵-۶، ۷، و ۱۰) حاوی کمیت‌های معلوم‌اند و آن‌ها را به ترتیب با  $P$ ،  $w$  و  $E$  نمایش می‌دهیم. توجه کنید که  $w$ ،  $P$  و  $E$  مستقل نیستند، زیرا فشار، دما، و چگالی هر جریان ورودی را باید با معادلهٔ حالت به هم مربوط کرد.

اکنون معادلهٔ (۳.۱۵-۷) را برحسب  $v_2$  حل می‌کنیم و با استفاده از قانون گاز ایده‌آل،  $p_2$  را حذف می‌کنیم. به‌علاوه،  $w_2$  را به صورت  $\rho_2 v_2 S_2$  می‌نویسیم. در نتیجه:

$$v_2 + \frac{RT_2}{Mv_2} = \frac{P}{w} \quad (۳.۱۵-۱۱)$$

این معادله را می‌توان حل کرد و  $T_2$  را به‌دست آورد و آن را در معادلهٔ (۳.۱۵-۱۰) قرار داد تا نتیجه شود:

$$v_2^2 - \left[ 2 \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \frac{P}{w} \right] v_2 + 2 \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \frac{E}{w} = 0 \quad (۳.۱۵-۱۲)$$

که در آن  $\gamma = C_p/C_v$  کمیتی است که برای گازها از حدود ۱٫۱ تا ۱٫۶۶۷ تغییر می‌کند. در این‌جا از این نکته استفاده کرده‌ایم که برای گاز ایده‌آل  $\bar{C}_p/R = \gamma/(\gamma-1)$ . هنگامی که معادلهٔ (۳.۱۵-۱۲) را برای یافتن  $v_2$  حل کنیم، نتیجه می‌شود:

$$v_2 = \left( \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \frac{P}{w} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 2 \left( \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} \right) \frac{wE}{P^2}} \right] \quad (۳.۱۵-۱۳)$$

در کاربردهای فیزیکی، انتگرال‌ده نمی‌تواند منفی باشد. می‌توان نشان داد (نگاه کنید به مسئلهٔ ۱۵.ب.۴) که هرگاه انتگرال‌ده صفر شود، سرعت جریان نهایی سرعت صوت است. بنابراین، درحالت کلی، یکی از جواب‌های  $v_2$  فوق‌صوتی و دیگری زیرصوتی است. برای فرایند اختلاط تلاطمی موردبحث فقط دو جواب زیرصوتی می‌توان به‌دست آورد، زیرا جریان فوق‌صوتی در مجرا ناپایدار است. گذار از جریان فوق‌صوتی به زیرصوتی در مجرا را در مثال ۴.۱۱-۷ نشان دادیم.

وقتی سرعت  $v_2$  معلوم باشد، می‌توان فشار و دما را با استفاده از معادله‌های (۳.۱۵-۷ و ۱۱) محاسبه کرد. برای به‌دست آوردن  $(E_c + E_v)$  می‌توان از موازنهٔ انرژی مکانیکی استفاده کرد.

#### ۴.۱۵ صورت‌های $d$ موازنهٔ ماکروسکوپی

تخمین زدن  $E_v$  در موازنهٔ انرژی مکانیکی و  $Q$  در موازنهٔ انرژی کل برای سیستم‌های غیرهم‌دما، غالباً مشکلاتی ایجاد می‌کند.

مثلاً برای  $E_v$ ، دو وضعیت غیرهم‌دمای زیر را در نظر بگیرید:

(الف) در مایعات، سرعت جریان متوسط در لوله‌ای با سطح مقطع ثابت، تقریباً ثابت است. اما ممکن است ویسکوزیته درجهت جریان تغییرات چشم‌گیر داشته‌باشد، زیرا دما تغییر می‌کند؛ در نتیجه  $f$  در معادلهٔ (۵.۷-۹) با فاصله تغییر می‌کند. بنابراین نمی‌توان از معادلهٔ (۵.۷-۹) برای کل لوله استفاده کرد.

(ب) در گازها، ویسکوزیته با فشار تغییرات درخور اعتنائی ندارد، در نتیجه عدد رینولدز موضعی و ضریب اصطکاک موضعی، برای مجراهایی با مقطع ثابت، تقریباً ثابت‌اند. اما ممکن است، در نتیجهٔ تغییر چگالی با دما، سرعت متوسط در طول مجرا تغییرات چشم‌گیر داشته‌باشد. بنابراین معادلهٔ (۵.۷-۹) را نمی‌توان در مورد کل مجرا به‌کار برد.

به‌همین ترتیب، برای جریان در لوله‌ای که دمای جدار آن با فاصله تغییر می‌کند، شاید استفاده از ضرایب انتقال گرمای موضعی ضرورت داشته‌باشد. در چنین وضعیتی، می‌توان معادله (۳-۱۰.۱۵) را بر مبنای نموی نوشت و یک معادله دیفرانسیل به‌دست آورد. ممکن است سطح مقطع مجرا با فاصله تغییر کند و این وضعیت نیز منتهی به ضرورت حل مسئله بر مبنای نموی می‌شود.

بنابراین بهتر است برای نوشتن موازنه ماکروسکوپی حالت پایای انرژی مکانیکی و موازنه انرژی کل، صفحه‌های ۱ و ۲ را به فاصله جزئی  $dl$  از یکدیگر در نظر بگیریم. در این صورت نتیجه‌ای حاصل می‌شود که آن را «صورت  $d$ » موازنه می‌نامیم:

صورت  $d$  موازنه انرژی مکانیکی

اگر صفحه‌های ۱ و ۲ را به فاصله جزئی از هم در نظر بگیریم، می‌توانیم معادله (۲-۲.۱۵) را به صورت دیفرانسیلی (با فرض تخت بودن توزیع سرعت) بنویسیم:

$$d\left(\frac{1}{\rho}v^2\right) + gdh + \frac{1}{\rho}dp = d\hat{W} - d\hat{E}_v \quad (۱-۴.۱۵)$$

سپس با استفاده از معادله (۸-۵.۷) برای طول دیفرانسیلی  $dl$ ، می‌توان نوشت:

$$v dv + gdh + \frac{1}{\rho}dp = d\hat{W} - \frac{1}{\rho}v^2 \frac{f}{R_h} dl \quad (۲-۴.۱۵)$$

که در آن  $f$  ضریب اصطکاک موضعی، و  $R_h$  مقدار موضعی شعاع هیدرولیکی متوسط است. در اغلب کاربردها جمله  $d\hat{W}$  را حذف می‌کنیم، زیرا کار معمولاً در نقاط مجزایی در طول مسیر جریان انجام می‌شود. در لوله‌هایی با جدار قابل‌گسترش، جریان‌هایی با محرک مغناطیسی، یا سیستم‌هایی که عمل انتقال را توسط پیچ‌های چرخان انجام می‌دهند، به جمله  $d\hat{W}$  نیاز خواهیم داشت.

صورت  $d$  موازنه انرژی کل

اگر معادله (۳-۱۰.۱۵) را به صورت دیفرانسیلی بنویسیم، داریم (با توزیع سرعت تخت):

$$d\left(\frac{1}{\rho}v^2\right) + gdh + d\hat{H} = d\hat{Q} + d\hat{W} \quad (۳-۴.۱۵)$$

سپس با استفاده از معادله (۷-۸.۹) برای  $d\hat{H}$  و معادله (۸-۱۰.۱۴) برای  $d\hat{Q}$ ، نتیجه می‌شود:

$$v dv + gdh + \hat{C}_p dT + \left[ \hat{V} - T \left( \frac{\partial \hat{V}}{\partial T} \right)_p \right] dp = \frac{U_{10c} Z \Delta T}{w} dl + d\hat{W} \quad (۴-۴.۱۵)$$

که در آن  $U_{10c}$  ضریب انتقال گرمای کل،  $Z$  محیط موضعی متناظر مجرا، و  $\Delta T$  اختلاف دمای موضعی بین سیالات داخل و خارج مجراست.

کاربرد معادله‌های (۲-۴.۱۵) و (۴-۴.۱۵) را با مثال زیر نشان می‌دهیم.



مبادله‌کن‌های گرمای جریان موازی، یا جریان متقابل

می‌خواهیم عملکرد مبادله‌کن گرمای دولوله‌ای ساده نشان‌داده‌شده در شکل ۱-۴.۱۵ را، برحسب ضرایب انتقال گرمای دو جریان و مقاومت گرمایی جدار لوله توصیف کنیم. این مبادله‌کن اساساً از دو لوله هم‌محور تشکیل شده‌است

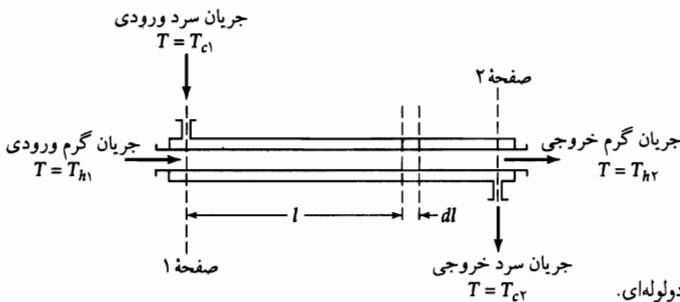


که یک سیال در لولهٔ داخلی و دیگری در فضای حلقوی بین دو لوله جریان دارد؛ گرما از طریق جدار لولهٔ داخلی انتقال می‌یابد. هردو جریان می‌توانند، چنان‌که در شکل نشان داده شده، در یک جهت جاری شوند، اما معمولاً استفاده از جریان متقابل بازده را افزایش می‌دهد؛ در این نوع جریان، جهت یکی از جریان‌ها را معکوس می‌کنیم تا  $w_c$  یا  $w_h$  منفی شود. جریان را می‌توان متلاطم و حالت‌پایا فرض کرد و از اتلاف گرما در محیط چشم‌پوشی کرد. فرض بعدی این است که ضریب انتقال گرمای موضعی کل، در طول مبادله‌کن ثابت است.

حل

(الف) موازنهٔ ماکروسکوپی انرژی برای هر جریان به صورت کلی. کمیت‌های مربوط به جریان گرم را با اندیس  $h$  و کمیت‌های مربوط به جریان سرد را با اندیس  $c$  مشخص می‌کنیم. موازنهٔ انرژی حالت‌پایای معادلهٔ (۳-۱.۱۵)، به‌ازای تغییرات قابل چشم‌پوشی انرژی جنبشی و پتانسیل، چنین نوشته می‌شود:

$$w_h(\hat{H}_{h2} - \hat{H}_{h1}) = Q_h \quad w_c(\hat{H}_{c2} - \hat{H}_{c1}) = Q_c \quad (۶, ۵-۴.۱۵)$$



شکل ۴-۱۵ مبادله‌کن گرمای دولوله‌ای.

چون گرما در محیط اطراف تلف نمی‌شود،  $Q_h = -Q_c$ . برای مایعات تراکم‌ناپذیر با افت فشاری که چندان بزرگ نیست، یا برای گازهای ایده‌آل، از معادلهٔ (۸-۸.۹) برای ثابت  $\hat{C}_p$  رابطهٔ  $\Delta\hat{H} = \hat{C}_p\Delta T$  به‌دست می‌آید. بنابراین معادله‌های (۶ و ۵-۴.۱۵) را می‌توان چنین نوشت:

$$w_h\hat{C}_{ph}(T_{h2} - T_{h1}) = Q_h \quad (۷-۴.۱۵)$$

$$w_c\hat{C}_{pc}(T_{c2} - T_{c1}) = Q_c = -Q_h \quad (۸-۴.۱۵)$$

(ب) صورت  $d$  موازنهٔ ماکروسکوپی انرژی. از کاربرد معادلهٔ (۴-۴.۱۵) درمورد جریان گرم، نتیجه می‌شود:

$$\hat{C}_p h dT_h = \frac{U \cdot (\pi r_o) (T_c - T_h) dl}{w_h} \quad (۹-۴.۱۵)$$

که در آن  $r_o$  شعاع خارجی لولهٔ داخلی و  $U$  ضریب کلی انتقال گرما، بر مبنای شعاع  $r_o$  است (نگاه کنید به معادلهٔ (۸-۱.۱۴)).

پس از مرتب کردن معادلهٔ (۹-۴.۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{dT_h}{T_c - T_h} = U \cdot \frac{(\pi r_o) dl}{w_h \hat{C}_p h} \quad (۱۰-۴.۱۵)$$

معادله متناظر برای جریان سرد عبارت است از:

$$-\frac{dT_c}{T_c - T_h} = U_o \frac{(2\pi r_o)dl}{w_c \hat{C}_{pc}} \quad (۱۱-۴.۱۵)$$

با جمع کردن معادله‌های (۱۰-۴.۱۵) و (۱۱-۴.۱۵) معادله دیفرانسیلی برای اختلاف دمای دو سیال، به صورت تابعی از  $l$  به دست می‌آید:

$$-\frac{d(T_h - T_c)}{T_h - T_c} = U_o \left( \frac{1}{w_h \hat{C}_{ph}} + \frac{1}{w_c \hat{C}_{pc}} \right) (2\pi r_o) dl \quad (۱۲-۴.۱۵)$$

با فرض این که  $U_o$  از  $l$  مستقل است، و پس از انتگرال‌گیری از صفحه ۱ تا صفحه ۲، نتیجه می‌شود:

$$\ln \left( \frac{T_{h1} - T_{c1}}{T_{h2} - T_{c2}} \right) = U_o \left( \frac{1}{w_h \hat{C}_{ph}} + \frac{1}{w_c \hat{C}_{pc}} \right) (2\pi r_o) L \quad (۱۳-۴.۱۵)$$

این عبارت دماهای نهایی را به آهنگ‌های جریان و ابعاد مبادله‌کن مربوط می‌کند و بنابراین می‌توان برای توصیف عملکرد مبادله‌کن از آن استفاده کرد. اما مرسوم است که با استفاده از موازنه‌های انرژی حالت پایا، طبق معادله‌های (۷-۴.۱۵) و (۸-۴.۱۵)، معادله (۱۳-۴.۱۵) را مرتب کنند. هر یک از این معادله‌ها را برحسب  $w \hat{C}_p$  حل می‌کنیم و نتایج را در معادله (۱۳-۴.۱۵) قرار می‌دهیم تا نتیجه زیر حاصل شود:

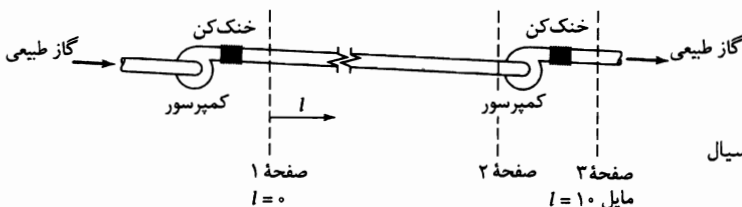
$$Q_c = U_o (2\pi r_o L) \left( \frac{(T_{h2} - T_{c2}) - (T_{h1} - T_{c1})}{\ln[(T_{h2} - T_{c2})/(T_{h1} - T_{c1})]} \right) \quad (۱۴-۴.۱۵)$$

یا

$$Q_c = U_o A_o (T_h - T_c) \ln \quad (۱۵-۴.۱۵)$$

در این جا  $A_o$  سطح خارجی کل لوله داخلی، و  $(T_h - T_c) \ln$  «اختلاف دمای متوسط لگاریتمی» بین دو جریان است. معادله‌های (۱۴-۴.۱۵) و (۱۵-۴.۱۵) آهنگ مبادله گرما بین دو جریان را نشان می‌دهند و در کارهای مهندسی کاربرد گسترده‌ای دارند. توجه شما را به این نکته جلب می‌کنیم که آهنگ‌های جریان در این معادله‌ها، که هم برای مبادله‌کن‌های جریان موازی، و هم برای مبادله‌کن‌های جریان متقابل معتبرند، به صراحت ظاهر نمی‌شوند (نگاه کنید به مسئله ۱۵ الف).

در صورت نیاز، با استفاده از معادله‌های (۱۰-۴.۱۵) و (۱۱-۴.۱۵) نیز می‌توان دمای جریان را به صورت تابعی از  $l$  به دست آورد. در هنگام کاربرد نتایج این مثال در مورد جریان آرام باید دقت زیادی به خرج داد، زیرا در این نوع جریان ممکن است تغییرات ضریب انتقال گرمای کلی نسبتاً چشم‌گیر باشد. مسئله ۱۵ ب. نمونه‌ای از مسئله با  $U_o$  متغیر است.



شکل ۲-۴.۱۵ تلمبه کردن سیال تراکم‌پذیر در خط لوله.

## مثال ۲-۴.۱۵

توان لازم برای تلمبه کردن سیال تراکم‌پذیر در لوله‌ای بزرگ قرار است گاز طبیعی، که می‌توان آن را متان خالص فرض کرد، در یک خط لولهٔ طولانی با جدار صاف و قطر داخلی ۲ ft تلمبه شود. گاز با فشار ۱۰۰ psia، سرعت ۴۰ ft/s و در دمای محیط ۷۰°F وارد خط لوله می‌شود. در هر ۱۰ مایل در طول خط لوله یک تلمبه‌خانه وجود دارد و در هر تلمبه‌خانه گاز مجدداً متراکم و خنک می‌شود تا به دما و فشار اولیه برسد (نگاه کنید به شکل ۲-۴.۱۵). توان لازم برای این عملیات را در هر تلمبه‌خانه تخمین بزنید، رفتار گاز را ایده‌آل فرض کنید، توزیع سرعت را تخت بگیرید و از تغییرات ارتفاع چشم‌پوشی کنید.

حل

بهرتر است لوله و کمپرسور را جداگانه در نظر بگیریم. ابتدا معادلهٔ (۲-۴.۱۵) را در مورد طول  $dl$  لوله به‌کار می‌بندیم. سپس از این معادله بین صفحه‌های ۱ و ۲ انتگرال می‌گیریم تا فشار مجهول  $p_2$  به‌دست آید. هنگامی که این فشار معلوم شد، می‌توانیم معادلهٔ (۲-۲.۱۵) را، بین صفحه‌های ۲ و ۳ سیستم به‌کار ببریم تا کار انجام‌شده توسط پمپ به‌دست آید. (الف) جریان در لوله. برای این بخش از سیستم، معادلهٔ (۲-۴.۱۵) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$v dv + \frac{1}{\rho} dp + \frac{2v^2 f}{D} dl = 0 \quad (۱۶-۴.۱۵)$$

که در آن  $D$  قطر لوله است. چون طول لوله زیاد است، سیال را در ۷۰°F هم‌دما فرض می‌کنیم. سپس می‌توانیم  $v$  و  $\rho$  را، با استفاده از معادلهٔ حالت فرضی  $p = \rho RT/M$ ، و موازنهٔ ماکروسکوپی جرم، که اکنون می‌توان آن را به‌صورت  $\rho v = \rho_1 v_1$  نوشت، از معادلهٔ (۱۶-۴.۱۵) به‌دست آوریم. هرگاه  $\rho$  و  $v$  را برحسب فشار بنویسیم، معادلهٔ (۱۶-۴.۱۵) چنین نوشته می‌شود:

$$-\frac{1}{p} dp + \frac{RT_1}{M(p_1 v_1)^2} p dp + \frac{2f}{D} dl = 0 \quad (۱۷-۴.۱۵)$$

در بخش ۳.۱ نشان دادیم که ویسکوزیتهٔ گازهای ایده‌آل از فشار مستقل است. نتیجه می‌گیریم که عدد رینولدز گاز،  $Re = Dw/S\mu$ ، و بنابراین ضریب اصطکاک  $f$  باید ثابت باشد. سپس از معادلهٔ (۱۷-۴.۱۵) انتگرال می‌گیریم تا نتیجهٔ زیر حاصل شود:

$$-\ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^2 - 1 \right] \frac{RT_1}{Mv_1^2} + \frac{2fL}{D} = 0 \quad (۱۸-۴.۱۵)$$

این معادله  $p_2$  را برحسب کمیت‌های معلوم به‌دست می‌دهد و تنها استثنا  $f$  است که می‌توان آن را به‌آسانی محاسبه کرد: ویسکوزیتهٔ سینماتیکی متان در ۱۰۰ psia و ۷۰°F در حدود  $7.61 \times 10^{-5}$  ft<sup>2</sup>/s است و بنابراین  $Re = Dv/\nu = (2 \text{ ft})(40 \text{ ft/s}) / (7.61 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{s}) = 3.707 \times 10^6$ . ضریب اصطکاک را تخمین زد و عدد ۰.۰۲۵ را به‌دست آورد (نگاه کنید به شکل ۲-۲.۶). با قرار دادن مقادیر عددی در معادلهٔ (۱۸-۴.۱۵)، نتیجه می‌شود:

$$-\ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^2 - 1 \right] \frac{(1545)(530)(32.2)}{(16.04)(40)^2} + \frac{(2)(0.025)(52800)}{(2100)} = 0 \quad (۱۹-۴.۱۵)$$

یا

$$-\ln \frac{p_r}{p_1} + 513 \left[ \left( \frac{p_r}{p_1} \right)^2 - 1 \right] + 132 = 0 \quad (20-4.15)$$

با حل این معادله و استفاده از مقدار معلوم  $p_1 = 100 \text{ psia}$ ، مقدار  $p_r = 86 \text{ psia}$  به دست می‌آید.

(ب) جریان عبوری از کمپرسور. اکنون می‌توانیم موازنه انرژی مکانیکی را در مورد کمپرسور به کار ببریم. کار را با قرار دادن معادله (۲۰-۲.۱۵) در صورت زیر آغاز می‌کنیم:

$$\hat{W}_m = \frac{1}{\gamma} (v_r^2 - v_1^2) + \int_{p_r}^{p_1} \frac{1}{\rho} dp + \hat{E}_v \quad (21-4.15)$$

برای محاسبه انتگرال این معادله، فرض می‌کنیم تراکم آدیاباتیک است و به علاوه، می‌توان از  $\hat{E}_v$  بین صفحه‌های ۲ و ۳ چشم‌پوشی کرد. اکنون می‌توانیم با استفاده از معادله (۵-۲.۱۵)، معادله (۲۱-۲.۱۵) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{W}_m &= \frac{1}{\gamma} (v_r^2 - v_1^2) + \frac{p_r^{1/\gamma}}{\rho_r} \int_{p_r}^{p_1} p^{-1/\gamma} dp \\ &= \frac{v_1^2}{\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_r} \right)^\gamma \right] + \frac{RT_r}{M} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_1}{p_r} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] \end{aligned} \quad (22-4.15)$$

که در آن  $\hat{W}_m$  انرژی لازم برای کمپرسور است. با قرار دادن مقدارهای عددی در معادله (۲۲-۴.۱۵)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{W}_m &= \frac{(40)^2}{2(32.2)} \left[ 1 - (1.163)^\gamma \right] + \frac{(1545)(530)}{16} \frac{1.3}{0.3} (1.163^{3/1.3} - 1) \\ &= -9 + 7834 = 7825 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f / \text{lb}_m \end{aligned} \quad (23-4.15)$$

توان لازم برای متراکم کردن سیال برابر است با:

$$\begin{aligned} w \hat{W}_m &= \left( \frac{\pi D^2}{4} \right) \left( \frac{p_1 M}{RT_1} \right) v_1 \hat{W}_m \\ &= \frac{\pi (100)(16.04)(40)}{(10.73)(530)} (7825) \text{ ft} \cdot \text{lb}_f / \text{s} \\ &= 277000 \text{ ft} \cdot \text{lb}_f / \text{s} = 504 \text{ hp} \end{aligned} \quad (24-4.15)$$

در صورتی که جریان در لوله آدیاباتیک بود، توان لازم عملاً تغییر نمی‌کرد (نگاه کنید به مسئله ۱۵ الف.۲).

فرض‌هایی که در این جا اختیار شد - فرض آدیاباتیک بودن تراکم و چشم‌پوشی از اتلاف ویسکوز در طراحی مجموعه‌های کمپرسور - خنک‌کن متداول است. توجه کنید که انرژی لازم برای بهره‌برداری از کمپرسور، به اندازه (۱)  $\hat{E}_v$  بین صفحه‌های ۲ و ۳، (۲) تلفات مکانیکی در خود کمپرسور، و (۳) خطا در مسیر فرضی  $p$ - $v$ ، بیش‌تر از کار محاسبه‌شده، یعنی  $\hat{W}_m$ ، است. معمولاً انرژی لازم در محور پمپ، دست‌کم، ۱۵ تا ۲۰٪ بیش‌تر از  $\hat{W}_m$  است.

۵.۱۵ کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی در حل مسئله‌های حالت پایا و مسئله‌های با توزیع سرعت غیرتخت در جدول ۱۵-۱. همه موازنه‌های ماکروسکوپی مربوط به توزیع‌های سرعت غیر پایا و غیرتخت، و سیستم‌های با چند ورودی و خروجی، را خلاصه کرده‌ایم. در عمل هرگز به استفاده از این موازنه‌ها، با این درجه از کامل بودن، نیاز نخواهید داشت، اما بهتر است همه این معادله‌ها را، یک جا، کنار هم داشته باشید. کاربرد آن‌ها را در مثال‌های زیر نشان خواهیم داد.

جدول ۱۵-۱ موازنه‌های ماکروسکوپی با حالت غیر پایا برای جریان در سیستم‌های غیر هم‌دما.

$$\text{جرم: } \frac{d}{dt} m_{\text{tot}} = \sum w_1 - \sum w_2 = \sum \rho_1 \langle v_1 \rangle S_1 - \sum \rho_2 \langle v_2 \rangle S_2 \quad (\text{الف})$$

$$\text{اندازه حرکت: } \frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{tot}} = \sum \left( \frac{\langle v_1^2 \rangle}{\langle v_1 \rangle} w_1 + p_1 S_1 \right) \mathbf{u}_1 - \sum \left( \frac{\langle v_2^2 \rangle}{\langle v_2 \rangle} w_2 + p_2 S_2 \right) \mathbf{u}_2 + m_{\text{tot}} \mathbf{g} - \mathbf{F}_{f \rightarrow s}$$

$$\text{اندازه حرکت زاویه‌ای: } \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{\text{tot}} = \sum \left( \frac{\langle v_1^2 \rangle}{\langle v_1 \rangle} w_1 + p_1 S_1 \right) [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1] - \sum \left( \frac{\langle v_2^2 \rangle}{\langle v_2 \rangle} w_2 + p_2 S_2 \right) [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{u}_2] + \mathbf{T}_{\text{ext}} - \mathbf{T}_{f \rightarrow s} \quad (\text{ج})$$

$$\text{انرژی مکانیکی: } \frac{d}{dt} (K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}) = \sum \left( \frac{1}{\bar{v}} \frac{\langle v_1^2 \rangle}{\langle v_1 \rangle} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) w_1 - \sum \left( \frac{1}{\bar{v}} \frac{\langle v_2^2 \rangle}{\langle v_2 \rangle} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) w_2 + W_m - E_c - E_v \quad (\text{د})$$

$$\text{انرژی (کل): } \frac{d}{dt} (K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}} + U_{\text{tot}}) = \sum \left( \frac{1}{\bar{v}} \frac{\langle v_1^2 \rangle}{\langle v_1 \rangle} + gh_1 + \hat{H}_1 \right) w_1 - \sum \left( \frac{1}{\bar{v}} \frac{\langle v_2^2 \rangle}{\langle v_2 \rangle} + gh_2 + \hat{H}_2 \right) w_2 + W_m + Q \quad (\text{ه})$$

تذکر:

(الف)  $\sum w_1 = w_{1a} + w_{1b} + w_{1c} + \dots$  که در آن  $w_{1a} = \rho_{1a} v_{1a} S_{1a}$  و غیره.

(ب)  $h_1$  و  $h_2$  ارتفاع نسبت به صفحه منبسطی اختیاری‌اند.

(ج)  $\hat{H}_1$  و  $\hat{H}_2$  عبارت‌اند از آنتالپی بر واحد جرم، نسبت به حالت مرجع انتخابی دلخواه؛ فرمول به دست آوردن  $\hat{H}$  با معادله (۸-۸-۹) ارائه شد.

(د) همه معادله‌ها برای جریان تراکم‌پذیر نوشته شده‌اند؛ برای جریان تراکم‌ناپذیر،  $E_c = 0$ . کمیت‌های  $E_c$  و  $E_v$  با معادله‌های (۳-۴-۷) و (۳-۴-۸) تعریف شده‌اند.

(ه)  $\mathbf{u}_1$  و  $\mathbf{u}_2$  بردارهای یک‌جهت جریان‌اند.

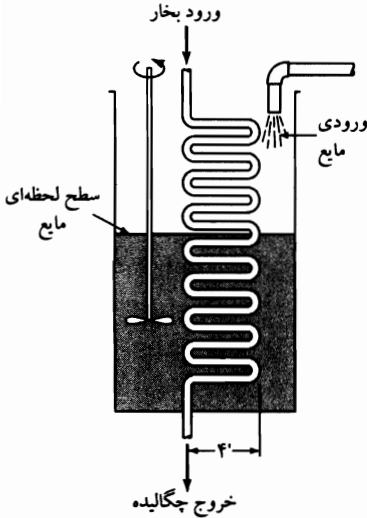


گرم کردن مایع در مخزن هم‌زن دار<sup>۱</sup>

مخزنی استوانه‌ای می‌تواند  $1000 \text{ ft}^3$  مایع را در خود جای دهد و هم‌زنی دارد که توان آن برای ثابت نگه داشتن

۱. این مسئله با اصلاحاتی برگرفته شده از منبع زیر است:

دمای مایع کافی است (نگاه کنید به شکل ۱-۵.۱۵) گرما توسط کویلی که چنان نصب شده که سطح انتقال گرمای آن با مقدار مایع موجود در مخزن متناسب باشد، به محتویات مخزن انتقال می‌یابد. این کویل گرمایی از  $10^\circ$  دور لوله به قطر خارجی ۱ اینچ تشکیل شده و قطر هر دور از آن ۴ ft است. آب با دمای  $20^\circ\text{C}$  و با آهنگ  $20 \text{ lb}_m/\text{min}$  وارد مخزن می‌شود و در زمان  $t = 0$  مخزن خالی است. بخار با دمای  $105^\circ\text{C}$  در کویل گرمایی جریان پیدا می‌کند و ضریب انتقال گرمای کلی  $100 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F}$  است. دمای آب، وقتی مخزن پر شود، چه قدر است؟



شکل ۱-۵.۱۵ گرمایش مایع در مخزنی با سطح مایع متغیر.

حل

فرض‌های زیر را اختیار می‌کنیم:

- (الف) دمای بخار در سراسر کویل یکنواخت است؛
- (ب) چگالی و ظرفیت گرمایی با دما تغییرات چشم‌گیری ندارند؛
- (ج) سیال تقریباً تراکم‌ناپذیر است، به طوری که  $\hat{C}_p \approx \hat{C}_v$ ؛
- (د) هم‌زن دما را در سراسر مایع یکنواخت نگه می‌دارد؛
- (ه) ضریب انتقال گرما از زمان و مکان مستقل است؛
- (و) جدارهای مخزن کاملاً عایق‌کاری شده‌اند، به طوری که گرما تلف نمی‌شود.

سیال داخل مخزن را به منزله سیستم در نظر می‌گیریم و موازنه وابسته به زمان انرژی را روی این سیستم می‌نویسیم. این موازنه توسط معادله (ه) در جدول ۱-۵.۱۵ نشان داده شده است. در سمت چپ معادله، می‌توان از آهنگ‌های زمانی تغییر انرژی جنبشی و پتانسیل، نسبت به آهنگ زمانی تغییر انرژی داخلی، چشم‌پوشی کرد. در سمت راست می‌توان جمله کار را حذف کرد و جمله‌های انرژی جنبشی و پتانسیل را کنار گذاشت، زیرا در مقایسه با سایر جمله‌ها خیلی کوچک‌اند. چون جریان خروجی وجود ندارد، می‌توان  $w_2$  را مساوی صفر گرفت. بنابراین موازنه انرژی کلی برای این سیستم به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d}{dt} U_{\text{tot}} = w_1 \hat{H}_1 + Q \quad (1-5.15)$$

این رابطه نشان می‌دهد که انرژی داخلی سیستم افزایش می‌یابد، زیرا سیال ورودی آنتالپی به سیستم می‌افزاید، و زیرا کویل بخار نیز به سیستم گرما اضافه می‌کند.

چون  $\dot{H}_1$  و  $U_{\text{tot}}$  را نمی‌توان به‌طور مطلق تعیین کرد، دمای ورودی  $T_1$  را به‌عنوان صفحه مبنا برای انتخاب می‌کنیم. در این صورت  $\dot{H}_1 = 0$  و  $\dot{H}_1 = \rho \hat{C}_p V (T - T_1) \approx \rho \hat{C}_p V (T - T_1)$  که در آن  $U_{\text{tot}} = \rho \hat{C}_p V (T - T_1)$  و  $V$  دما و حجم لحظه‌ای مایع‌اند. به‌علاوه، آهنگ اضافه شدن گرما به مایع، یعنی  $Q$ ، از رابطه  $Q = U_s A (T_s - T)$  به‌دست می‌آید که در آن  $T_s$  دمای بخار و  $A$  سطح انتقال گرمای لحظه‌ای است. در نتیجه معادله (۱۵-۵.۱) چنین نوشته می‌شود:

$$\rho \hat{C}_p \frac{d}{dt} V (T - T_1) = U_s A (T_s - T) \quad (2-5.15)$$

عبارت‌های  $V(t)$  و  $A(t)$  عبارت‌اند از:

$$V(t) = \frac{w_1}{\rho} t \quad A(t) = \frac{V}{V_s} A_s = \frac{w_1 t}{\rho V_s} A_s \quad (3-5.15)$$

که در آن  $V_s$  و  $A_s$  حجم و سطح انتقال گرما، در هنگام پر بودن مخزن‌اند. بنابراین معادله موازنه انرژی چنین نوشته می‌شود:

$$w_1 \hat{C}_p t \frac{d}{dt} (T - T_1) + w_1 \hat{C}_p (T - T_1) = \frac{w_1 t}{\rho V_s} U_s A_s (T_s - T) \quad (4-5.15)$$

که باید با شرط اولیه  $T = T_1$  در  $t = 0$  آن را حل کرد.

این معادله به‌صورت بدون بُعد آسان‌تر حل می‌شود. هردو طرف معادله را بر  $w_1 \hat{C}_p (T_s - T_1)$  تقسیم می‌کنیم

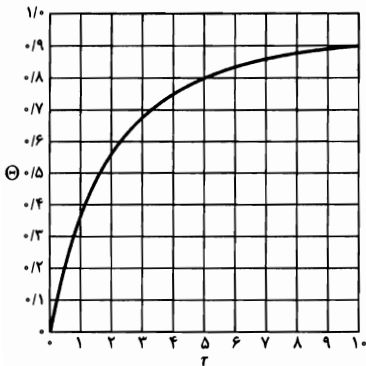
تا نتیجه شود:

$$t \frac{d}{dt} \left( \frac{T - T_1}{T_s - T_1} \right) + \left( \frac{T - T_1}{T_s - T_1} \right) = \frac{U_s A_s t}{\rho \hat{C}_p V_s} \left( \frac{T_s - T}{T_s - T_1} \right) \quad (5-5.15)$$

این معادله حاکی از آن است که تعریف‌های مناسب برای دما و زمان بدون بُعد عبارت‌اند از:

$$\Theta = \left( \frac{T - T_1}{T_s - T_1} \right) \quad (6-5.15)$$

$$\tau = \frac{U_s A_s t}{\rho \hat{C}_p V_s} \quad (7-5.15)$$



شکل ۵-۱۵ نمودار دمای بدون بُعد  $\Theta = (T - T_1)/(T_s - T_1)$

بر حسب زمان بدون بُعد  $\tau = (U_s A_s / \rho \hat{C}_p V_s) t$ ، طبق معادله

(۱۵-۵.۱).

در نتیجه معادله (۱۵-۵.۵)، پس از مرتب کردن، چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d\Theta}{d\tau} + \left( 1 + \frac{1}{\tau} \right) \Theta = 1 \quad (8-5.15)$$

و شرط اولیه ایجاب می‌کند که در  $\tau = 0$  داشته‌باشیم  $\Theta = 0$ .

معادله بالا یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که جوابی به صورت زیر دارد (نگاه کنید به معادله (ج.۱-۱)):

$$\Theta = 1 - \frac{1 - Ce^{-\tau}}{\tau} \quad (۹-۵.۱۵)$$

ثابت انتگرال‌گیری،  $C$ ، را می‌توان از شرط اولیه به دست آورد، اما ابتدا باید معادله (۹-۵.۱۵) را در  $\tau$  ضرب کرد. به این ترتیب درمی‌یابیم که  $C = 1$ ، و جواب نهایی چنین است:

$$\Theta = 1 - \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \quad (۱۰-۵.۱۵)$$

این تابع را در شکل ۲-۵.۱۵ ترسیم کرده‌ایم.

سرانجام، دمای  $T_0$  مایع موجود در مخزن، وقتی پر شده باشد، از معادله (۱۰-۵.۱۵) به دست می‌آید، هرگاه  $t = \rho V_0 / w_1$  (از معادله (۳-۵.۱۵)) یا  $\tau = U_0 A_0 / w_1 \hat{C}_p$  (از معادله (۷-۵.۱۵)). بنابراین، برحسب متغیرهای اولیه، داریم:

$$\frac{T_0 - T_1}{T_s - T_1} = 1 - \frac{1 - \exp(-U_0 A_0 / w_1 \hat{C}_p)}{U_0 A_0 / w_1 \hat{C}_p} \quad (۱۱-۵.۱۵)$$

مشاهده می‌شود که دمای نهایی مایع توسط گروه بدون بُعد  $U_0 A_0 / w_1 \hat{C}_p$  تعیین می‌شود که در این مسئله، مقدار آن ۲٫۷۴ است. با دانستن این نکته، می‌توان از معادله (۱۱-۵.۱۵) دریافت که  $(T_0 - T_1) / (T_s - T_1) = 0.659$  که در آن  $T_0 = 76^\circ\text{C}$ .

### مثال ۲-۵.۱۵

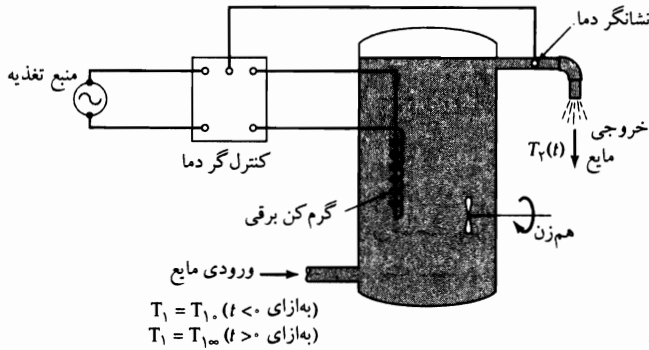
طرز کار یک کنترلگر ساده دما

در شکل ۳-۵.۱۵ یک مخزن هم‌زن دار که به خوبی عایق‌کاری شده، نشان داده شده است. مایع با دمای  $T_1(t)$ ، که می‌تواند با زمان تغییر کند، وارد مخزن می‌شود. می‌خواهیم دمای  $T_2(t)$  سیال خروجی از مخزن را کنترل کنیم. فرض می‌شود عملیات هم‌زنی برای یکنواخت کردن دما در مخزن و برابری آن با دمای خروجی کافی باشد. حجم مایع داخل مخزن،  $V$ ، و آهنگ جریان جرمی مایع،  $w$ ، هر دو ثابت‌اند.

برای انجام کنترل مطلوب، یک کویل گرمایی فلزی برقی به سطح  $A$  را در مخزن قرار می‌دهیم و یک عنصر حسگر دما را در محل خروجی تعبیه می‌کنیم تا دمای  $T_2(t)$  را اندازه‌گیری کند. این وسایل را به کنترلگر دمایی متصل می‌کنیم که انرژی موردنیاز کویل گرمایی را با آهنگ  $Q_e = b(T_{\max} - T_2)$  تأمین می‌کند، که در آن  $T_{\max}$  حداکثر دمایی است که کنترلگر می‌تواند در آن کار کند، و  $b$  پارامتری معلوم است. می‌توان فرض کرد که دمای مایع  $T_2(t)$ ، در شرایط بهره‌برداری عادی، همواره از  $T_{\max}$  کوچک‌تر است. کویل گرمایی با آهنگ  $Q = UA(T_c - T_2)$  به مایع داخل مخزن انرژی می‌دهد؛ در این رابطه  $U$  ضریب انتقال گرمای کلی بین کویل و مایع، و  $T_c$  دمای لحظه‌ای کویل است که یکنواخت فرض می‌شود.

تا زمان  $t = 0$ ، سیستم به حالت پایا کار می‌کند و دمای مایع ورودی  $T_1 = T_{10}$  و دمای مایع خروجی  $T_2 = T_{20}$  است. در زمان  $t = 0$ ، دمای جریان ورودی به‌طور ناگهانی به  $T_1 = T_{1\infty}$  افزایش می‌یابد و در این دما ثابت می‌ماند. در نتیجه این اختلال، دمای مخزن روبه افزایش می‌رود و حسگری که در محل جریان خروجی تعبیه شده به کنترلگر سیگنال می‌دهد تا توان تحویلی به کویل گرمایی را کاهش دهد. سرانجام، دمای مایع در مخزن به مقدار حالت پایایی جدید  $T_{2\infty}$  می‌رسد. می‌خواهیم رفتار دمای مایع  $T_2(t)$  را توصیف کنیم. نموداری کیفی که دماهای مختلف را نشان می‌دهد، در شکل ۴-۵.۱۵ نشان داده شده است.





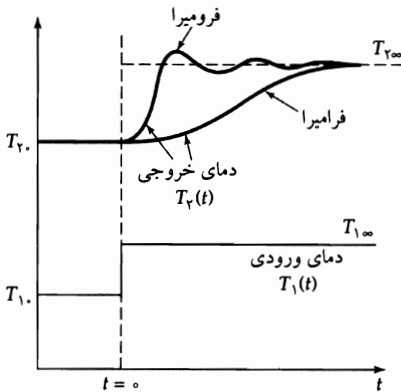
حل

ابتدا موازنه‌های ماکروسکوپی حالت غیرپایای انرژی [معادله (ه) در جدول ۱۵-۵.۱] را برای مایع داخل مخزن و کویل گرمایی می‌نویسیم:

$$\rho \hat{C}_p V \frac{dT_r}{dt} = w \hat{C}_p (T_1 - T_r) + UA(T_c - T_r) \quad (\text{مایع}) \quad (۱۲-۵.۱۵)$$

$$\rho_c \hat{C}_{pc} V_c \frac{dT_c}{dt} = b(T_{\max} - T_r) - UA(T_c - T_r) \quad (\text{کویل}) \quad (۱۳-۵.۱۵)$$

توجه کنید که در هنگام کاربرد موازنه ماکروسکوپی انرژی در مورد مایع، از تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل، و هم چنین توان تحویلی به هم‌زن چشم‌پوشی کرده‌ایم.



شکل ۴-۵.۱۵ دماهای ورودی و خروجی به صورت توابعی از زمان.

الف) رفتار حالت پایا به ازای  $t \leq 0$ . هنگامی که مشتق‌های زمانی در معادله‌های (۱۲-۵.۱۵ و ۱۳) مساوی صفر قرار داده شوند و معادله‌ها را با هم جمع کنیم، به ازای  $t \leq 0$ ، که داریم  $T_1 = T_{1_0}$ ، نتیجه می‌شود:

$$T_{r_0} = \frac{w \hat{C}_p T_{1_0} + b T_{\max}}{w \hat{C}_p + b} \quad (۱۴-۵.۱۵)$$

سپس از معادله (۱۳-۵.۱۵) می‌توانیم دمای اولیه کویل را به دست آوریم:

$$T_{c_0} = T_{r_0} \left( 1 - \frac{b}{UA} \right) + \frac{b T_{\max}}{UA} \quad (۱۵-۵.۱۵)$$

(ب) رفتار حالت پایا به‌ازای  $t \rightarrow \infty$ . هنگامی‌که عملیات مشابهی را با  $T_1 = T_{1\infty}$  انجام دهیم، نتیجه می‌شود:

$$T_{r\infty} = \frac{w\hat{C}_p T_{1\infty} + bT_{\max}}{w\hat{C}_p + b} \quad T_{c\infty} = T_{r\infty} \left(1 - \frac{b}{UA}\right) + \frac{bT_{\max}}{UA} \quad (17-5.16)$$

که دمای نهایی کوپل را نشان می‌دهد.

(ج) رفتار حالت پایا به‌ازای  $t > 0$ . در این حالت بهتر است با استفاده از کمیت‌های حالت پایا به‌ازای  $t \leq 0$  و  $t \rightarrow \infty$ ، متغیرهای بدون بُعد را تعریف کنیم:

$$\Theta_r = \frac{T_r - T_{r\infty}}{T_r - T_{r\infty}} = \text{دمای بدون بُعد مایع} \quad (18-5.15)$$

$$\Theta_c = \frac{T_c - T_{c\infty}}{T_c - T_{c\infty}} = \text{دمای بدون بُعد کوپل} \quad (19-5.15)$$

$$\tau = \frac{UA t}{\rho\hat{C}_p V} = \text{زمان بدون بُعد} \quad (20-5.15)$$

به‌علاوه، سه پارامتر بدون بُعد نیز تعریف می‌کنیم:

$$R = \rho\hat{C}_p V / \rho_c\hat{C}_{pc} V_c = \text{نسبت ظرفیت‌های گرمایی} \quad (21-5.15)$$

$$F = w\hat{C}_p / UA = \text{پارامتر آهنگ جریان} \quad (22-5.15)$$

$$B = b / UA = \text{پارامتر کنترلگر} \quad (23-5.15)$$

موازنه‌های حالت پایای معادله‌های (۱۵-۵.۱۲ و ۱۳)، برحسب این کمیت‌ها (پس‌از دستکاری‌های زیاد)، به روابط زیر تبدیل می‌شوند:

$$\frac{d\Theta_r}{d\tau} = -(1 + F)\Theta_r + (1 - B)\Theta_c \quad (24-5.15)$$

$$\frac{d\Theta_c}{d\tau} = R(\Theta_r - \Theta_c) \quad (25-5.15)$$

با حذف  $\Theta_c$  بین این دو معادله، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم، برای بیان دمای مایع خروجی به‌صورت تابعی از زمان، به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^2\Theta_r}{d\tau^2} + (1 + R + F)\frac{d\Theta_r}{d\tau} + R(B + F)\Theta_r = 0 \quad (26-5.15)$$

این معادله می‌تواند همان صورتی را داشته باشد که برای مانومتر می‌باشد در معادله (۷-۵.۲۱) به‌دست آمد (هم‌چنین نگاه کنید به معادله (ج-۱-۷)). در این صورت جواب عمومی معادله‌ای به‌صورت معادله (۷-۵.۲۳ یا ۲۴) است:

$$\Theta_r = C_+ \exp(m_+ \tau) + C_- \exp(m_- \tau) \quad (m_+ \neq m_-) \quad (27-5.15)$$

$$\Theta_r = C_1 \exp m\tau + C_2 \tau \exp m\tau \quad (m_+ = m_- = m) \quad (28-5.15)$$

که در آن:

$$m_{\pm} = \frac{1}{2} [-(1 + R + F) \pm \sqrt{(1 + R + F)^2 - 4R(B + F)}] \quad (29-5.15)$$

به‌این ترتیب، به قیاس مثال ۲-۷.۷، دمای خروجی سیال می‌تواند به صورت تابعی یکنوا و افزایشی (تندمیرا یا میرای بحرانی)، یا با نوسان‌هایی (کندمیرا) به مقدار نهایی خود نزدیک شود. پارامترهای سیستم در متغیر زمان بدون بُعد، و هم‌چنین در پارامترهای  $B$ ،  $F$ ، و  $R$  ظاهر می‌شوند. بنابراین باید در هر سیستم تعیین کنیم که آیا دما نوسان می‌کند یا نمی‌کند.

### مثال ۳-۵.۱۵

جریان سیال‌های تراکم‌پذیر در گذر از فشارسنج ارتفاعی نتایج مثال ۵-۶.۷ را به جریان پایای سیال‌های تراکم‌پذیر در گذر از سنج‌های روزنه‌دار (آریفیس) و لوله‌های ونتوری تعمیم دهید.

حل

مانند مثال ۵-۶.۷، کار را با نوشتن موازنه‌های حالت‌پایای جرم و انرژی مکانیکی بین صفحه‌های مرجع ۱ و ۲ در سنجه جریان نشان داده شده در شکل ۵-۵.۱۵ آغاز می‌کنیم. برای سیال‌های تراکم‌پذیر، می‌توان نوشت:

$$w = \rho_1 \langle v_1 \rangle S_1 = \rho_2 \langle v_2 \rangle S_2 \quad (۳۰-۵.۱۵)$$

$$\frac{\langle v_2 \rangle^2}{2\alpha_2} - \frac{\langle v_1 \rangle^2}{2\alpha_1} + \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp + \frac{1}{\gamma} \langle v_2 \rangle^2 e_v = 0 \quad (۳۱-۵.۱۵)$$

که در آن کمیت‌های  $\langle v_i \rangle^2 / \langle v_i^2 \rangle$  را به‌این سبب گنجانده‌ایم که بتوان متوسط مکعب را با مکعب متوسط جایگزین کرد.

سپس  $\langle v_1 \rangle$  و  $\langle v_2 \rangle$  را از دو معادله بالا حذف می‌کنیم تا عبارتی برای آهنگ جریان جرمی به دست آوریم:

$$w = \rho_2 S_2 \sqrt{\frac{-2\alpha_2 \int_1^2 (1/\rho) dp}{1 - (\alpha_2/\alpha_1)(\rho_2 S_2 / \rho_1 S_1)^2 + \alpha_2 e_v}} \quad (۳۲-۵.۱۵)$$

حال فرض‌های مثال ۵-۶.۷ را تکرار می‌کنیم: (i)  $e_v = 0$ ، (ii)  $\alpha_1 = 1$ ، (iii)  $\alpha_2 (S_0/S_2)^2$ . در این صورت معادله (۳۲-۵.۱۵) چنین نوشته می‌شود:

$$w = C_d \rho_2 S_0 \sqrt{\frac{-2 \int_1^2 (1/\rho) dp}{1 - (\rho_2 S_0 / \rho_1 S_1)^2}} \quad (۳۳-۵.۱۵)$$

پارامتر تجربی «ضریب تخلیه»،  $C_d$  را در این معادله گنجانده‌ایم تا این عبارت را برای خطاهای ایجاد شده در نتیجه اختیار سه فرض بالا، تصحیح کند. مقدار آن را باید با آزمایش تعیین کرد.

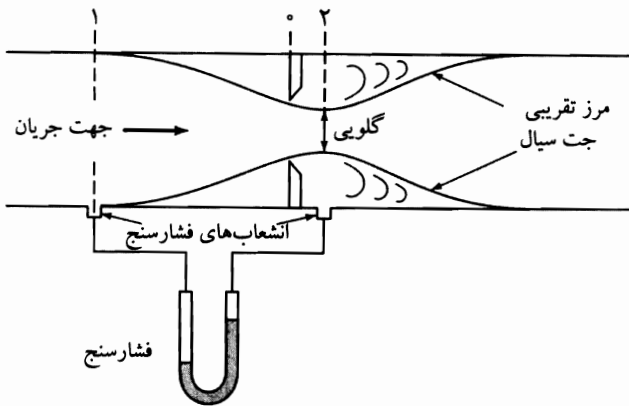
در سنجه‌های ونتوری، بهتر است صفحه ۲ در محل کوچک‌ترین مقطع مستقر کنیم به طوری که  $S_2 = S_0$ . در این صورت  $\alpha_2$  بسیار نزدیک واحد خواهد بود و با آزمایش مشخص شده که  $C_d$  برای سیال‌های تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر تقریباً مساوی است؛ یعنی برای سنجه‌های ونتوری در حدود  $0.98$  است. برای سنجه‌های روزنه‌دار درجه انقباض جریان سیال تراکم‌پذیر در صفحه ۲ تاحدودی کم‌تر از سیال‌های تراکم‌ناپذیر است، مخصوصاً اگر آهنگ جریان بالا باشد، و به ضریب تخلیه متفاوتی نیاز خواهد بود.<sup>۲</sup>

2. R. H. Perry, D. W. Green, and J. O. Maloney, *Chemical Engineers' Handbook*, 7th edition, McGraw-Hill, New York (1997); see also, Chapter 15 of *Handbook of Fluid Dynamics and Fluid Machinery* (J. A. Schertz and A. E. Fuhs, eds.), Wiley, New York (1996).

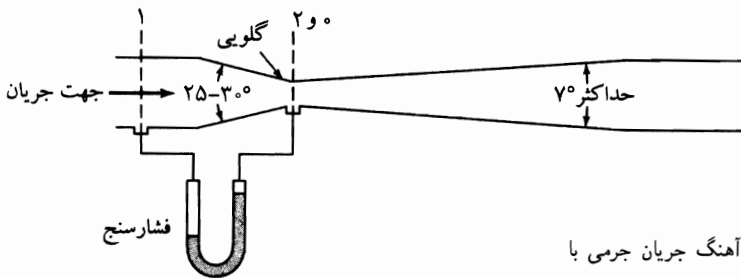
به‌منظور استفاده از معادله (۳۳-۵.۱۵)، باید چگالی سیال به‌صورت تابعی از فشار معلوم باشد. یعنی باید هم مسیر انبساط و هم معادله حالت سیال را بدانیم. در اغلب موارد فرض رفتار آدیاباتیک بدون اصطکاک قابل قبول به‌نظر می‌رسد. در مورد گازهای ایده‌آل، می‌توان نوشت (مقدار ثابت)  $p\rho^{-\gamma} = C_p/C_V$  در رابطه اخیر  $\gamma = C_p/C_V$  (نگاه کنید به معادله (۵-۲.۱۵)). سپس معادله (۳۳-۵.۱۵) چنین نوشته می‌شود:

$$w = C_d \rho_2 S_2 \sqrt{\frac{2(p_1/\rho_1)[\gamma/(\gamma-1)][1 - (p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}]}{1 - (S_2/S_1)^2 (p_2/p_1)^{2/\gamma}}} \quad (34-5.15)$$

این فرمول آهنگ جریان جرمی را به‌صورت تابعی از کمیت‌های قابل اندازه‌گیری و ضریب تخلیه نشان می‌دهد. مقدار کمیت اخیر را باید با مراجعه به هندبوک‌های مهندسی یافت.<sup>۲</sup>



(الف)



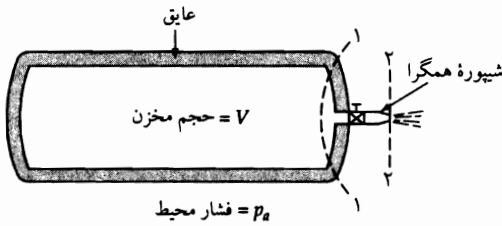
(ب)

شکل ۵-۵.۱۵ اندازه‌گیری آهنگ جریان جرمی با استفاده از (الف) سنجه روزنه‌دار، و (ب) لوله ونتوری.

### مثال ۴-۵.۱۵

انبساط آزاد سیال تراکم‌پذیر

گازی تراکم‌پذیر، که ابتدا در  $T = T_0$ ،  $p = p_0$  و  $\rho = \rho_0$  است، از طریق یک شیپوره کوچک همگرا، مطابق شکل ۵-۵.۱۵، از یک مخزن بزرگ ثابت و عایق‌کاری شده تخلیه می‌شود. کسر جرمی سیال باقی‌مانده در مخزن،  $\rho/\rho_0$  را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست آورید. گاز را ایده‌آل فرض کنید و معادله‌های لازم را بنویسید.



شکل ۵-۱۵-۶ انبساط آزاد سیال تراکم‌پذیر. نمودار محل سطوح ۱ و ۲ را نشان می‌دهد.

حل

برای سهولت کار، مخزن را به دو بخش تقسیم می‌کنیم که مطابق شکل توسط سطح ۱ از هم جدا شده‌اند. فرض می‌کنیم سطح ۱ به اندازه کافی به خروجی مخزن نزدیک هست که همه جرم سیال در سمت چپ آن واقع شود، و به اندازه کافی از خروجی مخزن دور هست که سرعت سیال گذرنده از سطح ۱ قابل چشم‌پوشی باشد. سپس فرض می‌کنیم که خواص متوسط سیال در سمت چپ سطح ۱ با خواص آن روی سطح ۱ همانند است. اکنون رفتار این دو بخش از سیستم را، جدا از هم، در نظر می‌گیریم.

(الف) توده سیال داخل مخزن. در ناحیه واقع در سمت چپ سطح ۱، موازنه حالت‌ناپایای جرم در معادله (الف) جدول ۵-۱۵-۱ عبارت است از:

$$\frac{d}{dt}(\rho_1 V) = -w_1 \quad (35-5.15)$$

در همین ناحیه، موازنه انرژی معادله (ه) در جدول ۵-۱۵-۱ چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}(\rho_1 V(\hat{U}_1 + \hat{\Phi}_1)) = -w_1 \left( \hat{U} + \frac{p_1}{\rho_1} + \hat{\Phi}_1 \right) \quad (36-5.15)$$

که در آن  $V$  حجم کل در سیستم موردنظر، و  $w_1$  آهنگ جریان جرمی گازی است که از سیستم بیرون می‌رود. در نوشتن این معادله‌ها، از انرژی جنبشی سیال چشم‌پوشی کردیم. با قرار دادن موازنه جرم در هر دو طرف معادله انرژی، نتیجه می‌شود:

$$\rho_1 \left( \frac{d\hat{U}_1}{dt} + \frac{d\hat{\Phi}_1}{dt} \right) = \frac{p_1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} \quad (37-5.15)$$

برای سیستم ساکنی که غیراز گرانش هیچ نیروی خارجی بر آن وارد نمی‌شود،  $d\hat{\Phi}_1/dt = 0$ ، به طوری که معادله (۳۷-۵-۱۵) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d\hat{U}_1}{d\rho_1} = \frac{p_1}{\rho_1^2} \quad (38-5.15)$$

این معادله را می‌توان با معادله‌های دمایی و گرمایی حالت سیال ترکیب کرد تا  $T_1(\rho_1)$  و  $p_1(\rho_1)$  حاصل شود. بنابراین درمی‌یابیم که وضعیت سیال داخل مخزن فقط به میزان خالی شدن مخزن بستگی دارد، نه به آهنگ تخلیه آن. درحالت خاص گاز ایده‌آل با  $\hat{C}_V$  ثابت، که برای آن  $d\hat{U} = \hat{C}_V dT$  و  $p = \rho RT/M$  می‌توان از معادله (۳۸-۵-۱۵) انتگرال گرفت تا نتیجه شود:

$$p_1 \rho_1^{-\gamma} = p_0 \rho_0^{-\gamma} \quad (39-5.15)$$

که در آن  $\gamma = C_p/C_V$ . این نتیجه از معادله (۵۷-۴-۱۱) نیز به دست می‌آید.

(ب) تخلیهٔ گاز از شیپوره. برای سهولت کار، در این جا فرض می‌کنیم که جریان بین سطوح ۱ و ۲ هم بدون اصطکاک و هم آدیاباتیک است. به علاوه، از آن جاکه  $w_1$  با  $w_2$  تفاوت چندانی ندارد، بهتر است آن را در لحظه‌ای در نظر بگیریم که جریان در حالت شبه پایاست. در این صورت می‌توانیم از موازنهٔ ماکروسکوپی انرژی مکانیکی، به صورت معادلهٔ (۲-۲.۱۵)، با حذف جمله‌های دوم، چهارم، و پنجم، استفاده کنیم. یعنی:

$$\frac{1}{\gamma} v_2^2 + \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp = 0 \quad (۴۰-۵.۱۵)$$

چون با گاز ایده‌آل سروکار داریم، می‌توانیم از نتیجهٔ معادلهٔ (۳۴-۵.۱۵) برای به دست آوردن آهنگ تخلیهٔ لحظه‌ای استفاده کنیم. چون در این مسئله نسبت  $S_2/S_1$  بسیار کوچک است و مجذور آن حتی کوچک‌تر هم هست، می‌توانیم در معادلهٔ (۳۴-۵.۱۵)، مخرج زیر علامت رادیکال را با ۱ جایگزین کنیم. در این صورت  $w_2$  از بیرون علامت رادیکال به داخل می‌آید و می‌توان از معادلهٔ (۳۹-۵.۱۵) استفاده کرد. در نتیجه:

$$w_2 = -V \frac{d\rho_1}{dt} = S_2 \sqrt{2 p_1 \rho_1 [\gamma / (\gamma - 1)] [(p_2/p_0)^{2/\gamma} - (p_2/p_0)^{(\gamma+1)/\gamma}]} \quad (۴۱-۵.۱۵)$$

که در آن  $S_2$  سطح مقطع سوراخ شیپوره است.

حال از معادلهٔ (۳۹-۵.۱۵) برای حذف  $p_1$  از معادلهٔ (۴۱-۵.۱۵) استفاده می‌کنیم. در این صورت با یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول برحسب  $\rho_1$  سروکار پیدا می‌کنیم که می‌توانیم از آن انتگرال بگیریم تا نتیجهٔ زیر به دست آید:

$$t = \frac{V/S_2}{\sqrt{2(p_0/\rho_0)[\gamma/(\gamma-1)]}} \int_{\rho_1/\rho_0}^1 \frac{d(\bar{p}_1/\rho_0)}{\sqrt{(p_2/\rho_0)^{2/\gamma}(\bar{p}_1/\rho_0)^{\gamma-1} - (p_2/\rho_0)^{(\gamma+1)/\gamma}}} \quad (۴۲-۵.۱۵)$$

با استفاده از این معادله می‌توان زمان لازم برای تخلیهٔ هر کسری از گاز اولیه را محاسبه کرد. در آهنگ‌های جریان پایین، فشار  $p_2$  در دهانهٔ شیپوره با فشار محیط برابر است. اما بررسی معادلهٔ (۴۱-۵.۱۵) نشان می‌دهد که، با کاهش دمای محیط، آهنگ جریان جرمی محاسبه شده، در نسبت فشار بحرانی، به مقدار ماکزیمم می‌رسد:

$$r \equiv \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{\text{crit}} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (۴۳-۵.۱۵)$$

برای هوا ( $\gamma = 1.4$ )، این نسبت فشار بحرانی  $0.53$  است. اگر فشار محیط بازهم کاهش یابد، فشار درست در داخل شیپوره در مقدار  $p_2$  که با استفاده از معادلهٔ (۴۳-۵.۱۵) محاسبه شد، ثابت می‌ماند و آهنگ جریان جرمی از فشار محیط،  $p_a$ ، مستقل خواهد بود. در این وضعیت، آهنگ تخلیه برابر است با:

$$w_{\text{max}} = S_2 \sqrt{p_1 \rho_1 \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \quad (۴۴-۵.۱۵)$$

در این صورت، به ازای  $p_a/p_1 < r$ ، می‌توان معادلهٔ (۴۲-۵.۱۵) را به صورت ساده‌تری نوشت:

$$t = \frac{V/S_2}{\sqrt{(p_0/\rho_0)\gamma(2/(\gamma+1))^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}} \int_{\rho_1/\rho_0}^1 \frac{dx}{x^{(\gamma+1)/\gamma}} \quad (۴۵-۵.۱۵)$$

$$t = \frac{V/S_r}{\sqrt{(\gamma RT_0/M)(2/(\gamma+1))^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}} \left( \frac{2}{\gamma-1} \right) \left[ \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^{(1-\gamma)/2} - 1 \right] \quad (p_a/p_1 < r) \quad (۴۶-۵.۱۵)$$

اگر  $p_a/p_1$  در ابتدا کم‌تر از  $r$  باشد، هردو معادله (۴۶-۵.۱۵) و (۴۳-۵.۱۵) برای محاسبه زمان کل تخلیه به‌کار می‌آیند.

### پرسش‌های تشریحی

۱. مفهوم فیزیکی هر جمله در پنج موازنه ماکروسکوپی را شرح دهید.
۲. ویژگی معادله‌های تغییر مربوط به موازنه‌های ماکروسکوپی چیست؟
۳. آیا هریک از چهار جمله داخل پرانتز در معادله (۲-۱.۱۵) معرف صورتی از انرژی است؟ توضیح دهید.
۴. موازنه ماکروسکوپی انرژی (کل) با قانون اول ترمودینامیک،  $\Delta U = Q + W$ ، چه رابطه‌ای دارد؟
۵. توضیح دهید که متوسط‌های  $\langle v \rangle$  و  $\langle v^2 \rangle$  در معادله (۱-۱.۱۵) از کجا پیدا می‌شوند.
۶. مفهوم فیزیکی  $E_v$  و  $E_c$  چیست؟ این جمله‌ها چه علامتی دارند؟ رابطه آن‌ها با توزیع سرعت چیست؟ چگونه می‌توان آن‌ها را تخمین زد؟
۷. موازنه ماکروسکوپی انرژی داخلی چگونه به‌دست می‌آید؟
۸. از معادله (۲-۲.۱۵) چه اطلاعاتی می‌توان درباره سیال در حال سکون به‌دست آورد؟

### مسئله‌ها

#### ۱۵ الف. انتقال گرما در مبادله‌کن گرمای دولوله‌ای.

(الف) روغن داغ در سطح ۲ وارد مبادله‌کن گرمای مثال ۴-۱۵ می‌شود و آبی که در سطح ۱ وارد می‌شود، باید آن را خنک کند. یعنی مبادله‌کن به‌حالت جریان متقابل عمل می‌کند. مطلوب است محاسبه سطح تبادل  $A$ ، هرگاه ضریب انتقال گرمای  $U$  برابر  $200 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F}$  باشد و جریان‌های سیال خواصی به‌شرح زیر داشته باشند:

	آهنگ جریان	ظرفیت گرمایی	دما	
	جرمی	گرمایی	ورودی	خروجی
	(lb <sub>m</sub> /hr)	(Btu/lb <sub>m</sub> · F)	(°F)	(°F)
روغن	۱۰۰۰۰	۰٫۶۰	۲۰۰	۱۰۰
آب	۵۰۰۰	۱٫۰۰	۶۰	—

- (ب) محاسبه بخش (الف) را تکرار کنید، هرگاه  $U_1 = 50$  و  $U_2 = 350 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F}$ . فرض کنید که تغییرات  $U$  با دمای آب خطی است، و از نتایج مسئله ۱۵ ب.۱ استفاده کنید.
- (ج) حداقل مقدار آبی که می‌توان در بخش‌های (الف) و (ب) مصرف کرد تا تغییر دمای مطلوب در روغن ایجاد شود، چه قدر است؟ حداقل مقدار آبی که در حالت جریان موازی می‌توان مصرف کرد چه قدر است؟

(د) مطلوب است محاسبه سطح لازم برای مبادله‌کن گرما در حالت جریان موازی، هرگاه آهنگ جریان جرمی آب  $15500 \text{ lb}_m/\text{hr}$  باشد و  $U$  ثابت و برابر  $F \cdot \text{Btu}/\text{hr} \cdot \text{ft}^2$  فرض شود.

جواب: (الف)  $104 \text{ ft}^2$ ؛ (ب)  $122 \text{ ft}^2$ ؛ (ج)  $4290 \text{ lb}_m/\text{hr}$ ،  $15000 \text{ lb}_m/\text{hr}$ ؛ (د) در حدود  $101 \text{ ft}^2$ .

۱۵ الف ۲. جریان آدیاباتیک گاز طبیعی در خط لوله. توان مورد نیاز  $w\dot{W}$  در مثال ۲-۴.۱۵ را درحالتی حل کنید که جریان در خط لوله آدیاباتیک باشد، نه هم‌دما.

(الف) با استفاده از نتیجه مسئله ۱۵ ب.۳ (د)، چگالی گاز را در صفحه ۲ تعیین کنید.

(ب) با استفاده از جوابی که برای بخش (الف) به دست آوردید، همراه با نتیجه مسئله ۱۵ ب.۳ (ه)،  $p_2$  را تعیین کنید.

(ج) توان لازم را، مانند مثال ۲-۴.۱۵ تعیین کنید.

جواب: (الف)  $3 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$ ؛ (ب)  $86 \text{ psia}$ ؛ (ج)  $504 \text{ hp}$ .

۱۵ الف ۳. اختلاط دو جریان گاز ایده‌آل.

(الف) مطلوب است محاسبه سرعت، دما، و فشار وقتی دو جریان هوا در دستگاهی مانند دستگاه مثال ۲-۳.۱۵ باهم مخلوط می‌شوند. ظرفیت گرمایی  $\hat{C}_p$  هوا را می‌توان ثابت و برابر  $697 \text{ Btu}/\text{lb} \cdot \text{mole} \cdot \text{F}$  گرفت. خواص دو جریان عبارت‌اند از:

$w(\text{lb}_m/\text{hr})$	$v(\text{ft}/\text{s})$	$T(^{\circ}\text{F})$	$p(\text{atm})$	
۱۰۰۰	۱۰۰۰	۸۰	۱٫۰۰	جریان الف:
۱۰۰۰۰	۱۰۰	۸۰	۱٫۰۰	جریان ب:

جواب: (الف)  $11000 \text{ lb}_m/\text{hr}$ ؛ در حدود  $110 \text{ ft}/\text{s}$ ؛  $86.5^{\circ}\text{F}$ ؛  $1.700 \text{ atm}$ .

(ب) در صورتی که چگالی سیال ثابت فرض شود، سرعت محاسبه‌ای چه قدر خواهد بود؟

(ج) براساس محاسباتی که روی نتایج بخش (ب) انجام دادید،  $\hat{E}_v$  را برای این عملیات تخمین بزنید.

جواب: (ب)  $109 \text{ ft}/\text{s}$ ؛ (ج)  $10^3 \text{ ft lb}_f/\text{lb}_m$ ؛  $1.4 \times 10^3$ .

۱۵ الف ۴. جریان در لوله و نتوری. یک لوله و نتوری با قطر گلوبی ۳ in. در لوله‌ای به قطر ۱ ft، که هوای خشک از آن می‌گذرد، تعبیه می‌شود. ضریب تخلیه  $C_d$  سنجه  $0.98$  است. مطلوب است محاسبه آهنگ جریان هوا در لوله، هرگاه هوا با دمای  $70^{\circ}\text{F}$  و فشار ۱ atm وارد و نتوری شود و فشار گلوبی  $0.75 \text{ atm}$  باشد.

(الف) جریان را آدیاباتیک بدون اصطکاک فرض کنید و  $\gamma = 1.4$ .

(ب) جریان را هم‌دما فرض کنید.

(ج) جریان را تراکم‌ناپذیر و با همان چگالی ورودی فرض کنید.

جواب: (الف)  $2707 \text{ lb}_m/\text{s}$ ؛ (ب)  $196 \text{ lb}_m/\text{s}$ ؛ (ج)  $2743 \text{ lb}_m/\text{s}$ .

۱۵ الف ۵. انبساط آزاد سیال تراکم‌پذیر. مخزنی به حجم  $V = 10 \text{ ft}^3$  (نگاه کنید به شکل ۵-۱۵) با هوا ( $\gamma = 1.4$ ) در دمای  $T_0 = 300 \text{ K}$  و  $p_0 = 100 \text{ atm}$  پر می‌شود. در زمان  $t = 0$  شیر مخزن باز می‌شود و هوا می‌تواند از طریق شیپوره‌ای همگرا با مقطع گلوبی  $0.1 \text{ ft}^2$  منبسط شود تا فشار آن به فشار محیط، یعنی  $1 \text{ atm}$  برسد.



(الف) مطلوب است محاسبه فشار و دما در گلوبی شیپوره، درست پس از شروع تخلیه.

(ب) مطلوب است محاسبه فشار و دما در داخل مخزن، وقتی  $p_2$  به مقدار نهایی  $1 \text{ atm}$  می‌رسد.

(ج) چه قدر طول می‌کشد تا سیستم به حالت توصیف شده در (ب) برسد؟

۱۵ الف ۶. گرم کردن هوا در لوله. لوله‌ای افقی به طول  $20 \text{ ft}$  توسط یک مقاومت الکتریکی که به صورت یکنواخت دور آن پیچیده شده است، گرم می‌شود. هوای خشک با دمای  $5^\circ\text{F}$ ، فشار  $4^\circ \text{ psia}$ ، سرعت  $75 \text{ ft/s}$ ، و آهنگ  $185 \text{ lb}_m/\text{hr}$  وارد لوله می‌شود. مقاومت الکتریکی گرما را با آهنگ  $80^\circ \text{ Btu/hr}$  به ازای هر فوت از طول لوله، تأمین می‌کند. هوا با چه دمایی از لوله خارج می‌شود، هرگاه فشار خروجی  $15 \text{ psia}$  باشد؟ جریان را متلاطم و رفتار گاز را ایده‌آل فرض کنید. ظرفیت گرمایی هوا در گستره موردنظر و در فشار ثابت، برحسب  $\text{Btu/lb}_m \cdot \text{F}$  برابر است با:

$$\bar{C}_p = 6,39 + (9,8 \times 10^{-4})T - (8,18 \times 10^{-8})T^2 \quad (15 \text{ الف } 6-1)$$

که در آن  $T$  برحسب درجه رانکین بیان می‌شود.

$$\text{جواب: } T_2 = 354^\circ\text{F}$$

۱۵ الف ۷. بهره‌برداری از یک مبادله‌کن گرمای دولوله‌ای ساده. جریانی از آب سرد، با آهنگ جریان  $5400 \text{ lb}_m/\text{hr}$  و دمای  $70^\circ\text{F}$  توسط آب گرم با آهنگ جریان  $8100 \text{ lb}_m/\text{hr}$  و دمای  $200^\circ\text{F}$  در یک مبادله‌کن گرمای دولوله‌ای ساده گرم می‌شود. آب سرد در لوله داخلی و آب گرم در فضای حلقوی بین دو لوله جریان دارد. دو طول  $20$  فوتی از مبادله‌کن گرما، به علاوه همه اتصالات لازم موجود است.

(الف) با ترسیم شکل، نشان دهید که این دو مبادله‌کن را چگونه باید متصل کرد تا انتقال گرما با بیش‌ترین بازده انجام شود.

(ب) دمای خروجی آب سرد را برای آرایش تعیین شده در بخش (الف)، در وضعیت زیر محاسبه کنید:

(i) ضریب انتقال گرما در فضای حلقوی، براساس مساحت سطح داخلی لوله داخلی  $2000 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F}$  است.

(ii) لوله داخلی خواصی به شرح زیر دارد: طول کل،  $4^\circ \text{ ft}$ ؛ قطر داخلی  $8,75 \text{ ft}$ ؛ سطح انتقال گرما به ازای هر فوت از طول لوله،  $2745 \text{ ft}^2$ ؛ ظرفیت در سرعت متوسط  $1 \text{ ft/s}$  برابر  $1345 \text{ lb}_m/\text{hr}$ .

(iii) خواص متوسط آب در لوله داخلی به شرح زیر است:

$$\mu = 0,45 \text{ cp} = 1,09 \text{ lb}_m/\text{hr} \cdot \text{ft}$$

$$\hat{C}_p = 1,0^\circ \text{ Btu/lb}_m \cdot \text{F}$$

$$k = 0,376 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$$

$$\rho = 61,5 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$$

(iv) مقاومت مرکب جدار لوله و پوسته تشکیل شده روی آن  $0,001 \text{ hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F/Btu}$ ، براساس مساحت سطح داخلی لوله داخلی است.

(ج) نمودار توزیع دما در مبادله‌کن گرما را ترسیم کنید.

جواب: (ب)  $136^\circ\text{F}$ .

۱۵.ب.۱ عملکرد مبادله‌کن گرمای دولوله‌ای با ضریب انتقال گرمای کلی متغیر. عبارتی برای بیان مقدار گرمای انتقال‌یافته در مبادله‌کنی از نوع توصیف‌شده در مثال ۱۴.۱۵ به دست آورید، هرگاه ضریب انتقال گرمای  $U$  با دمای هریک از دو جریان به‌طور خطی تغییر کند.

(الف) چون  $T_h - T_c$  تابعی خطی از هردو متغیر  $T_h$  و  $T_c$  است، نشان دهید که:

$$\frac{U - U_1}{U_2 - U_1} = \frac{\Delta T - \Delta T_1}{\Delta T_2 - \Delta T_1} \quad (15.1-1)$$

که در آن  $\Delta T = T_h - T_c$  و اندیس‌های ۱ و ۲ به شرایط در سطوح کنترل ۱ و ۲ اشاره می‌کنند.

(ب) نتایج به دست آمده در بخش (الف) برای  $T_h - T_c$  را در معادله (۱۲.۴.۱۵) قرار دهید و از معادله حاصل روی طول مبادله‌کن انتگرال‌گیری کنید. با استفاده از این نتیجه نشان دهید که:

$$Q_c = A \frac{U_1 \Delta T_2 - U_2 \Delta T_1}{\ln(U_1 \Delta T_2 / U_2 \Delta T_1)} \quad (15.1-2)$$

۱۵.ب.۲ افت فشار در جریان متلاطم در لوله‌ای با همگرایی مختصر (شکل ۱۵.ب.۲). جریان متلاطم سیالی تراکم‌ناپذیر در لوله‌ای با مقطع دایره‌ای را در نظر بگیرید که قطر آن، با فاصله، تغییراتی خطی طبق رابطه زیر دارد:

$$D = D_1 + (D_2 - D_1) \frac{z}{L} \quad (15.2-1)$$

در  $z = 0$ ، سرعت  $v_1$  است و می‌توان فرض کرد که در تمام مقطع ثابت باشد. عدد رینولدز جریان طوری است که  $f$  تقریبی از فرمول بلازیوس، یعنی معادله (۱۲.۲.۶) به دست می‌آید:

$$f = \frac{0.0791}{\text{Re}^{1/4}} \quad (15.2-2)$$

مطلوب است تعیین افت فشار  $p_1 - p_2$  برحسب  $v_1$ ،  $D_1$ ،  $D_2$ ،  $L$ ،  $\rho$  و  $\mu/\rho$ .

(الف) از صورت  $d$  موازنه انرژی مکانیکی انتگرال بگیرید تا نتیجه شود:

$$\frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) = \frac{1}{4}(v_2^2 - v_1^2) + 2 \int_0^L \frac{v^2 f}{D} dz \quad (15.2-3)$$

و سپس  $v_2$  را از معادله حذف کنید.

(ب) نشان دهید که  $v$  و  $f$ ، هردو تابع  $D$  هستند:

$$v = v_1 \left( \frac{D_1}{D} \right)^2; f = \frac{0.0791}{(D_1 v_1 / \nu)^{1/4}} \left( \frac{D}{D_1} \right)^{1/4} \quad (15.2-4)$$

البته  $D$ ، طبق معادله (۱۵.ب.۲) تابع  $z$  است.

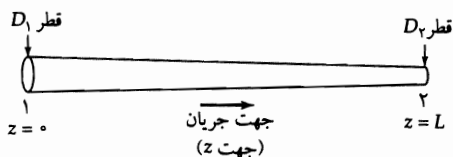
(ج) انتگرال معادله (۱۵-۲-۳) را تغییر متغیر دهید و نشان دهید که:

$$\int_0^L \frac{v^2 f}{D} dz = \frac{L}{D_2 - D_1} \int_{D_1}^{D_2} \frac{v^2 f}{D} dD \quad (۱۵-۲-۵)$$

(د) نتایج بخش‌های (ب) و (ج) را تلفیق کنید تا نتیجه نهایی زیر حاصل شود:

$$\frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) = \frac{1}{2} v_1^2 \left[ \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right] + \frac{2Lv_1^2}{D_1 - D_2} \frac{f}{15(0.0791)} \left[ \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{15/4} - 1 \right] \quad (۱۵-۲-۶)$$

(ه) نشان دهید که این نتیجه به‌ازای  $D_1 = D_2$  به‌خوبی ساده می‌شود.



شکل ۱۵-۲. جریان متلاطم در لوله افقی که کمی باریک می‌شود ( $D_1$  اندکی از  $D_2$  بزرگ‌تر است).

۱۵-۳. جریان پایای گازهای ایده‌آل در مجراهایی با مقطع ثابت.

(الف) نشان دهید که برای جریان افقی هر سیال در مجرای دایره‌ای با قطر یکنواخت  $D$ ، صورت  $d$  موازنه انرژی مکانیکی، معادله (۱۵-۴-۱)، را می‌توان چنین نوشت:

$$v dv + \frac{1}{\rho} dp + \frac{1}{2} v^2 de_v = 0 \quad (۱۵-۳-۱)$$

که در آن  $de_v = (4f/D)dL$ . توزیع سرعت را تحت فرض کنید. (ب) نشان دهید که معادله (۱۵-۳-۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$v dv + d \left( \frac{p}{\rho} \right) + \left( \frac{p}{\rho^2} \right) d\rho + \frac{1}{2} v^2 de_v = 0 \quad (۱۵-۳-۲)$$

هم‌چنین نشان دهید که هرگاه از صورت  $d$  موازنه جرم استفاده شود، معادله (۱۵-۳-۲) برای جریان هم‌دمای گاز ایده‌آل به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$de_v = \frac{2RT}{M} \frac{dv}{v^2} - 2 \frac{dv}{v} \quad (۱۵-۳-۳)$$

(ج) از معادله (۱۵-۳-۳) بین هردو مقطع دلخواه ۱ و ۲ لوله، که طول  $L$  لوله را درمیان می‌گیرند، انتگرال بگیرید. از معادله حالت گاز ایده‌آل و موازنه ماکروسکوپی جرم استفاده کنید و نشان دهید که  $v_2/v_1 = \rho_1/\rho_2 = p_1/p_2$ ، به‌طوری‌که شار جرم  $G$  را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$G \equiv \rho_1 v_1 = \sqrt{\frac{\rho_1 p_1 (1-r)}{e_v - \ln r}} \quad (\text{جریان هم‌دمای گاز ایده‌آل}) \quad (۱۵-۳-۴)$$

که در آن  $r = (p_2/p_1)^2$ . نشان دهید که، به‌ازای هر مقدار مفروض  $e_v$  و شرایط در مقطع ۱، کمیت  $G$  به‌ازای مقدار بحرانی  $r$  که با رابطه  $e_v = \ln r_c + (1 - r_c)/r_c$  تعریف می‌شود، به مقدار ماکزیمم خود می‌رسد. به مسئله ۱۵.ب.۴ نیز رجوع کنید.

(د) نشان دهید که، برای جریان آدیاباتیک گازی ایده‌آل با  $\hat{C}_p$  ثابت در مجرای افقی با سطح مقطع ثابت، صورت  $d$  موازنه انرژی کل (معادله ۴-۴.۱۵) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$p\hat{V} + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{1}{\gamma} v^2 = \text{مقدار ثابت} \quad (5-3.15)$$

که در آن  $\gamma = C_p/C_v$ . این نتیجه را با معادله (۱۵.ب.۳-۲) ترکیب کنید تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{dv}{v} - 2 \left( \frac{p_1}{\rho_1} + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{1}{\gamma} v_1^2 \right) \frac{dv}{v^3} = -de_v \quad (6-3.15)$$

از این معادله بین مقاطع ۱ و ۲، با مقاومت  $e_v$ ، انتگرال بگیرید و فرض کنید  $\gamma$  ثابت است. نتیجه را به‌کمک موازنه ماکروسکوپی جرم مرتب کنید تا رابطه زیر برای شار جرم  $G$  حاصل شود:

$$G \equiv \rho_1 v_1 = \sqrt{\frac{\rho_1 p_1}{e_v \left[ \frac{(\gamma+1)/2\gamma \ln s}{1-s} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]}} \quad (\text{جریان آدیاباتیک برای گازهای ایده‌آل}) \quad (7-3.15)$$

که در آن  $s = (\rho_2/p_1)^2$ .

(ه) با استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی انرژی و جرم نشان دهید که برای جریان افقی آدیاباتیک گازهای ایده‌آل با  $\gamma$  ثابت، داریم:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[ 1 + \frac{[1 - (\rho_1/\rho_2)^2] G^2}{\rho_1 p_1} \left( \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) \right] \quad (8-3.15)$$

این معادله را می‌توان با معادله (۱۵.ب.۳-۷) ترکیب کرد و نشان داد که، همان‌طور که در مورد جریان هم‌دما دیدیم، یک نسبت فشار بحرانی  $p_2/p_1$ ، متناظر با آهنگ جریان جرمی ماکزیمم، وجود دارد.

۱۵.ب.۴ عدد ماخ در اختلاط دو جریان سیال.

(الف) نشان دهید که وقتی انتگرال‌ده معادله (۱۳-۳.۱۵) صفر باشد، عدد ماخ جریان نهایی واحد است. توجه کنید که عدد ماخ،  $Ma$ ، را که برابر است با: نسبت سرعت موضعی سیال به‌سرعت صوت در شرایط موضعی، برای گاز ایده‌آل می‌توان به‌صورت  $v/v_s = v/\sqrt{\gamma RT/M}$  نوشت (نگاه کنید به مسئله ۱۱.ج.۱).

(ب) نشان دهید که چگونه می‌توان از نتایج مثال ۱۵.۳-۲ برای پیش‌بینی رفتار گازی که از گشادگی ناگهانی مجرا عبور می‌کند، استفاده کرد.

۱۵.ب.۵ آهنگ‌های تخلیه حدی برای سنجه‌های ونتوری.

(الف) با شروع از معادله (۱۵.۵-۳۴) (برای جریان آدیاباتیک)، نشان دهید که با کاهش فشار گلوبی در سنجه

ونتوری، آهنگ جریان جرمی هنگامی ماکزیمم می‌شود که نسبت  $r = p_2/p_1$  فشار گلوبی به فشار ورودی با رابطه زیر بیان شود:

$$\frac{\gamma + 1}{r^{2/\gamma}} - \frac{2}{r^{(\gamma+1)/\gamma}} - \frac{\gamma - 1}{(S_1/S_0)^2} = 0 \quad (15.1-5)$$

(ب) نشان دهید که به ازای  $S_0 \gg S_1$ ، آهنگ جریان جرمی تحت شرایط حدی عبارت است از:

$$w = C_{ap_1 S_0 \sqrt{\frac{\gamma M}{RT_1} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \quad (15.2-5)$$

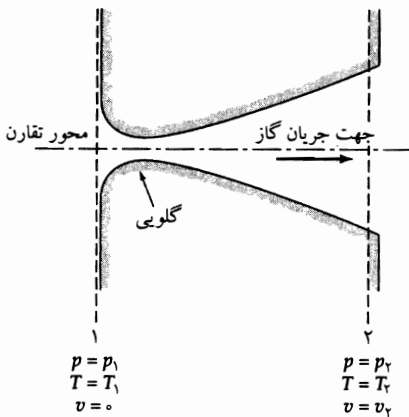
(ج) نتایجی نظیر معادله‌های (۱۵.۱-۵ و ۲) برای جریان هم‌دما به دست آورید.

۶.۱۵ ب. جریان سیال تراکم‌پذیر در شیپوره همگراواگرا (شکل ۱۵.۶). در بسیاری از کاربردها، مانند توربین‌های بخار یا موشک‌ها، گازهای فشرده داغ در شیپوره‌هایی از نوع نشان داده شده در شکل انبساط می‌یابند تا آنتالپی گاز را به انرژی جنبشی تبدیل کنند. این عمل از بسیاری جهات شبیه جریان گازها در روزنه‌ها (آریفیس) است. اما در این جا هدف از انبساط، تولید توان، مثلاً از طریق برخورد سیالی که با سرعت حرکت می‌کند به پره توربین، یا پیشرانی مستقیم، مانند موتور موشکی، است.

برای توضیح دادن رفتار چنین سیستمی و توجیه شکل کلی شیپوره توصیف شده، مسیر انبساط گاز ایده‌آل را دنبال کنید. فرض کنید گاز ابتدا در مخزنی بسیار بزرگ قرار دارد و سرعت آن صفر است؛ سپس از طریق شیپوره‌ای بدون اصطکاک و به صورت آدیاباتیک منبسط می‌شود تا فشار آن به صفر برسد. هم‌چنین فرض کنید توزیع سرعت تخت است و تغییرات ارتفاع را نادیده بگیرید.

(الف) با نوشتن موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی یا موازنه انرژی کل بین صفحه‌های ۱ و ۲، نشان دهید که:

$$\frac{1}{2} v_2^2 = \frac{RT_1}{M} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \quad (15.6-1)$$



شکل ۱۵.۶. مقطع شماتیک شیپوره همگراواگرا.

(ب) با استفاده از قانون گازهای ایده‌آل، موازنه ماکروسکوپی حالت‌پایای جرم، و معادله (۱۵.۶-۱)، نشان دهید که سطح مقطع  $S$  بخار در حال انبساط، در فشار بحرانی زیر، از مقدار مینیمی می‌گذرد:

$$p_{r,crit} = p_1 \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (15.6-2)$$

(ج) نشان دهید که عدد ماخ،  $Ma = v_2/v_s(T_2)$ ، سیال در این مقطع مینیمم واحد است ( $v_s$  برای امواج صوتی با بسامد پایین در مسئله ۱۱.ج ۱. به دست آمد). نتیجه بخش (الف) را با نتیجه مسئله ۱۵.ب. ۵ مقایسه کنید.

(د) سرعت سیال  $v$ ، دمای سیال  $T$ ، و سطح مقطع جریان  $S$  را به صورت تابعی از فشار موضعی  $p$  برای تخلیه هوا با آهنگ  $10 \text{ lb-moles}$  در ثانیه، از دمای  $56^\circ \text{R}$  و فشار  $10 \text{ atm}$  تا فشار صفر، محاسبه کنید. مفهوم این نتایج را توضیح دهید.

جواب:

$p, \text{atm}$	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵٫۲۸	۵	۴	۳	۲	۱	۰
$v, \text{ft s}^{-1}$	۰	۴۴۹	۶۴۵	۸۰۷	۹۵۶	۱۰۵۸	۱۰۹۹	۱۲۴۵	۱۳۹۸	۱۵۷۴	۱۷۹۸	۲۵۹۱
$T, ^\circ \text{R}$	۵۶۰	۵۴۳	۵۲۵	۵۰۶	۴۸۴	۴۶۶	۴۵۹	۴۳۱	۳۹۷	۳۵۳	۲۹۰	۰
$S, \text{ft}^2$	$\infty$	۰٫۹۷۷	۰٫۷۳۹	۰٫۶۵۰	۰٫۶۱۳	۰٫۶۰۶	۰٫۶۰۷	۰٫۶۲۸	۰٫۶۸۸	۰٫۸۱۶	۱٫۱۷۱	$\infty$

۱۵.۷ رفتار گرمایی گذرای دستگاه کروماتوگرافی (شکل ۱۵.۷). فرض کنید مشاوری یک مؤسسه صنعتی هستید که از جمله روی پدیده‌های گرمایی گذرا در کروماتوگرافی گازی آزمایش می‌کند. یکی از کارکنان این مؤسسه کپی نوشته‌ای از یک پژوهش‌گر معروف را به شما نشان می‌دهد و می‌گوید قصد دارد بعضی از روش‌های جدید این پژوهش‌گر را به کار ببندد، اما در حال حاضر درگیر یک مسئله انتقال گرماست. اگرچه این مسئله از فرعیات بررسی مورد نظر است، اما باید در ارتباط با تفسیر او از داده‌ها و کاربرد نظریه‌های جدید به خوبی درک شود. یک ستون کروماتوگرافی بسیار کوچک در داخل یک کوئل نصب شده است و کوئل نیز در لوله‌ای فرو برده شده که گازی در آن دمیده می‌شود تا دما را تنظیم کند (نگاه کنید به شکل ۱۵.۷ الف). دمای گاز را  $T_g(t)$  می‌نامیم. دما در سرهای کوئل (خارج از لوله)  $T_0$  است که با مقدار اولیه  $T_g$  تفاوت چندانی ندارد. دمای واقعی در داخل ستون کروماتوگرافی (یعنی در داخل کوئل) را  $T(t)$  می‌نامیم. در ابتدا گاز و کوئل هر دو در دمای  $T_g^0$  قرار دارند. سپس، با شروع از زمان  $t = 0$ ، دمای گاز طبق رابطه خطی زیر افزایش می‌یابد:

$$T_g(t) = T_g^0 \left( 1 + \frac{t}{t_0} \right) \quad (15.7-1)$$

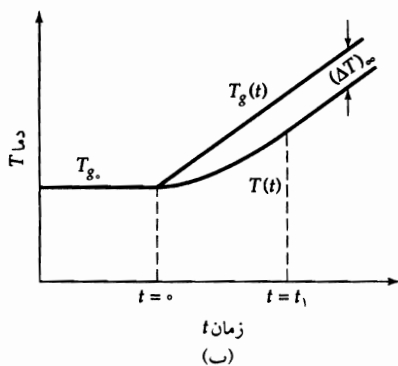
که در آن  $t_0$  ثابت معلومی با بعد زمان است.

به شما گفته می‌شود که کارکنان آزمایشگاه با تعبیه ترموکوپل در داخل ستون، منحنی‌های دمایی از نوع نشان داده شده در شکل ۱۵.۷.ب (ب) به دست آورده‌اند. به نظر می‌رسد که به ازای مقادیر بزرگ‌تر  $t$ ، منحنی  $T(t)$  با منحنی  $T_g(t)$  موازی می‌شود. از شما می‌خواهند که جواب پرسش‌های زیر را پیدا کنید:

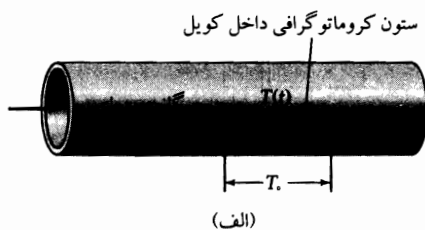
(الف) در هر زمان  $t$ ، مقدار  $T_g - T$  چه قدر خواهد بود؟

(ب) مقدار حدی  $T_g - T$ ، وقتی  $t \rightarrow \infty$  چه قدر خواهد بود؟ این کمیت را  $(\Delta T)_\infty$  بنامید.

- (ج) بازهٔ زمانی  $t_1$  لازم برای آن که مقدار  $T_g - T$ ، به حدود یک درصد  $(\Delta T)_\infty$  برسد چه قدر است؟  
 (د) برای مدل‌سازی این سیستم باید از چه فرض‌هایی استفاده کرد؟  
 (ه) کدام ثابت‌های فیزیکی، خواص فیزیکی، و غیره، باید معلوم باشند تا بتوان مقادیر اندازه‌گیری شده و نظری  $(\Delta T)_\infty$  را باهم مقایسه کرد؟  
 ساده‌ترین نظریهٔ ممکن را برای تبیین منحنی‌های دما و پاسخ‌گویی به این پنبج پرسش پی‌ریزی کنید.



شکل ۱۵. ب. ۷. دستگاه کروماتوگرافی؛ (ب) پاسخ دمایی سیستم کروماتوگرافی.



۸.۱۵ گرمایش پیوستهٔ دوغاب در مخزن هم‌زن‌دار (شکل ۱۵. ب. ۸). دوغابی را با تلمبه کردن آن به داخل یک مخزن گرمایش هم‌زن‌دار، گرم می‌کنند. دمای ورودی دوغاب  $T_i$  و دمای سطح خارجی کویل بخار  $T_s$  است. از نمادهای زیر استفاده کنید:

$$\begin{aligned}
 V &= \text{حجم دوغاب در مخزن} \\
 \hat{C}_p, \rho &= \text{چگالی و ظرفیت گرمایی دوغاب} \\
 w &= \text{آهنگ جریان جرمی دوغاب در مخزن} \\
 U &= \text{ضریب کلی انتقال گرمای کویل گرمایی} \\
 A &= \text{سطح کل انتقال گرمای کویل}
 \end{aligned}$$

فرض کنید هم‌زنی برای یکنواخت‌سازی دمای سیال در سراسر مخزن و مساوی شدن آن با دمای سیال خروجی کفایت می‌کند.

(الف) با استفاده از موازنهٔ انرژی، نشان دهید که دمای دوغاب،  $T(t)$ ، از معادلهٔ دیفرانسیل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dT}{dt} = \left( \frac{UA}{\rho \hat{C}_p V} \right) (T_s - T) - \left( \frac{w}{\rho V} \right) (T - T_i) \quad (۱۵. ب. ۸-۱)$$

متغیر  $t$  زمان از شروع گرمایش است.

(ب) این معادلهٔ دیفرانسیل را برحسب متغیرهای بدون بُعد بازنویسی کنید:

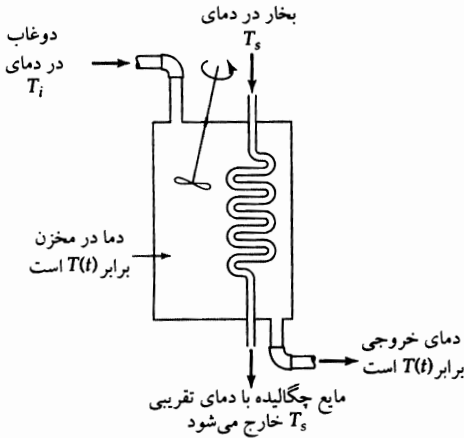
$$\tau = \frac{wt}{\rho V} \quad (۱۵. ب. ۸-۲)$$

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad (۱۵. ب. ۸-۳)$$

که در آن:

$$T_{\infty} = \frac{(UA/w\hat{C}_p)T_s + T_i}{(UA/w\hat{C}_p) + 1} \quad (۱۵.۸-۴)$$

مفهوم فیزیکی  $\tau$ ،  $\Theta$ ، و  $T_{\infty}$  را شرح دهید.



شکل ۱۵.۸. گرمایش دوغاب در مخزن هم‌زن‌دار.

(ج) معادله بدون بُعد به‌دست‌آمده در بخش (ب) را با شرط اولیه  $T = T_i$  در  $t = 0$  حل کنید.

(د) جواب را واریسی کنید تا معلوم شود که در معادله دیفرانسیل و شرط اولیه صدق می‌کند. رفتار این سیستم

در درازمدت چگونه خواهد بود؟ آیا این رفتار حدی با بیشش شهودی شما توافق دارد؟

(ه) تأثیر آهنگ جریان بر دما، در زمان نامتناهی چیست؟ آیا این تأثیر معقول است؟

جواب: (ج) 
$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp \left[ - \left( \frac{UA}{\rho\hat{C}_p V} + \frac{w}{\rho V} \right) t \right]$$

۱۵.۱. مبادله‌کن‌های گرمای جریان متقابل موازی (شکل ۱۵.۱). در مبادله‌کن گرمای نشان‌داده‌شده در شکل، «سیال

لوله» (سیال A) از یک سر مبادله‌کن داخل و خارج می‌شود، اما «سیال پوسته» (سیال B) همیشه در یک

جهت حرکت می‌کند. بنابراین در یک دستگاه هم جریان موازی و هم جریان متقابل وجود دارد. این آرایش

جریان یکی از ساده‌ترین نمونه‌های «جریان مختلط» است که غالباً در عمل، برای کاهش طول مبادله‌کن، از

آن استفاده می‌کنند.<sup>۲</sup>

با اختیار کردن فرض‌های زیر، رفتار این نوع دستگاه‌ها را می‌توان به‌سادگی تحلیل کرد:

۱. شرایط حالت پایا برقرار است؛

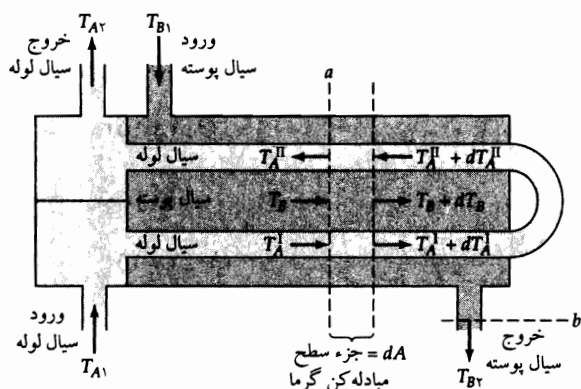
۲. ضریب کلی انتقال گرمای  $U$  و ظرفیت‌های گرمایی دو سیال ثابت‌اند؛

۳. دمای سیال پوسته،  $T_B$ ، در هر مقطع عمود بر جهت جریان ثابت است؛

۴. برای هر «عبور» سیال از لوله - یعنی برای جریان‌های I و II در شکل - سطح گرمایش مساوی وجود دارد.

2. See D. Q. Kern, *Process Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York (1950), pp. 127-189; J. H. Perry, *Chemical Engineers' Handbook*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, (1950), pp. 464-465; W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, and Y. I. Cho, *Handbook of Heat Transfer*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1998), Chapter 17; S. Whitaker, *Fundamentals of Heat Transfer*, corrected edition, Krieger Publishing Company, Malabar, Fla., (1983), Chapter 11.





شکل ۱۵ ج ۱ الف مبادله‌کن گرمای  
جریان متقابل موازی.

(الف) با استفاده از موازنه انرژی روی بخشی از سیستم واقع بین صفحه‌های  $a$  و  $b$ ، نشان دهید که:

$$T_B - T_{B2} = R(T_A^{II} - T_A^I) \quad \text{که در آن } R = |w_A \hat{C}_{pA} / w_B \hat{C}_{pB}| \quad (۱۵-۱-۱)$$

(ب) نشان دهید که در یک جزء مقطع از مبادله‌کن، شامل سطح انتقال گرمای کل  $dA$ ، داریم:

$$\frac{dT_A^I}{d\alpha} = \frac{1}{\bar{V}}(T_B - T_A^I) \quad (۱۵-۱-۲)$$

$$\frac{dT_A^{II}}{d\alpha} = \frac{1}{\bar{V}}(T_A^{II} - T_B) \quad (۱۵-۱-۳)$$

$$\frac{1}{R} \frac{dT_B}{d\alpha} = - \left[ T_B - \frac{1}{\bar{V}}(T_A^I + T_A^{II}) \right] \quad (۱۵-۱-۴)$$

که در آن  $d\alpha = (U/w_A \hat{C}_{pA})dA$  و  $\hat{C}_{pA}$  مانند مثال ۱۵-۴-۱ تعریف می‌شوند.

(ج) نشان دهید که وقتی  $T_A^I$  و  $T_A^{II}$  بین این سه معادله حذف شوند، می‌توان یک معادله دیفرانسیل برای سیال پوسته به دست آورد:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\alpha^2} + R \frac{d\Theta}{d\alpha} - \frac{1}{\bar{V}} \Theta = 0 \quad (۱۵-۱-۵)$$

که در آن  $\Theta(\alpha) = (T_B - T_{B2}) / (T_{B1} - T_{B2})$ . این معادله را با شرایط مرزی زیر حل کنید (نگاه کنید به معادله (ج-۱-۷)).

$$\Theta = 1, \alpha = 0 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } (۱۵-۱-۶)$$

$$\Theta = 0, \alpha = (UA_T / w_A \hat{C}_{pA}) \quad \text{شرط مرزی ۲: در } (۱۵-۱-۷)$$

که در آن  $A_T$  سطح کل انتقال گرمای مبادله‌کن است.

(د) با استفاده از نتیجه بخش (ج)، عبارتی برای بیان  $dT_B/d\alpha$  به دست آورید. با استفاده از این عبارت، و به کمک معادله (۱۵-۱-۴) مقدار  $dT_B/d\alpha$  را تخمین بزنید و معادله حاصل را در  $\alpha = 0$  محاسبه کنید تا رابطه زیر برای عملکرد مبادله‌کن به دست آید:

$$\alpha_T = \frac{UA_T}{w_A \hat{C}_{pA}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + 1}} \ln \left[ \frac{2 - \Psi(R + 1 - \sqrt{R^2 + 1})}{2 - \Psi(R + 1 + \sqrt{R^2 + 1})} \right] \quad (۱۵-۱-۸)$$

که در آن  $\Psi = (T_{A2} - T_{A1}) / (T_{B1} - T_{A1})$ .

(ه) با استفاده از این نتیجه، رابطه زیر را برای آهنگ انتقال گرما در مبادله‌کن به دست آورید:

$$Q = UA(\Delta T)_{\ln} \cdot \Upsilon \quad (۹-۱۰.ج۱۵)$$

که در آن:

$$(\Delta T)_{\ln} = \frac{(T_{B1} - T_{A2}) - (T_{B2} - T_{A1})}{\ln[(T_{B1} - T_{A2}) / (T_{B2} - T_{A1})]} \quad (۱۰-۱۰.ج۱۵)$$

$$\Upsilon = \frac{\sqrt{R^2 + 1} \ln[(1 - \Psi) / (1 - R\Psi)]}{(R - 1) \ln \left[ \frac{2 - \Psi(R + 1 - \sqrt{R^2 + 1})}{2 - \Psi(R + 1 + \sqrt{R^2 + 1})} \right]} \quad (۱۱-۱۰.ج۱۵)$$

کمیت  $\Upsilon$  معرف نسبت گرمای انتقال یافته در «مبادله‌کن جریان متقابل موازی» نشان داده شده در شکل، به گرمای انتقال یافته در یک مبادله‌کن جریان متقابل واقعی با سطح مساوی و دماهای مساوی برای سیال‌های خروجی است. مقادیر  $\Upsilon(R, \Psi)$  به صورت ترسیمی در هندبوک پری آمده است.<sup>۲</sup> می‌توان مشاهده کرد که  $\Upsilon(R, \Psi)$  همواره از واحد کوچک‌تر است.

۲.ج۱۵ تخلیه هوا از یک مخزن بزرگ. می‌خواهیم هوا را با آهنگ  $5 \text{ lb}_m/\text{s}$  از یک مخزن بزرگ، و از طریق لوله فولادی نو به قطر  $2.067 \text{ in.}$  و طول معادل  $55 \text{ ft}$  تخلیه کنیم. هوا در هنگام ورود به لوله دچار انقباض ناگهانی می‌شود و اتلاف انقباضی در طول معادل لوله در نظر گرفته نشده است. در صورتی که دمای هوا در مخزن  $150 \text{ psig}$ ، دمای آن  $70^\circ\text{F}$  و فشار در پایین دست لوله  $50 \text{ psig}$  باشد، آیا می‌توان به آهنگ جریان مطلوب دست یافت؟

با در نظر گرفتن این که ورودی هوا از یک شیوره ایده آل تشکیل شده است که مقطع آن باریک می‌شود تا با مقطع لوله مساوی شود، و پس از آن قطعه‌ای لوله با  $e_v = 0.5$  قرار دارد، می‌توان اثر انقباض ناگهانی را با دقت معقول تخمین زد (نگاه کنید به جدول ۱۵.۷). رفتار شیوره را می‌توان با استفاده از معادله (۱۵.۵-۳۴) و با فرض نامتناهی بودن سطح  $S_1$  و برابر واحد بودن  $C_d$  تعیین کرد.

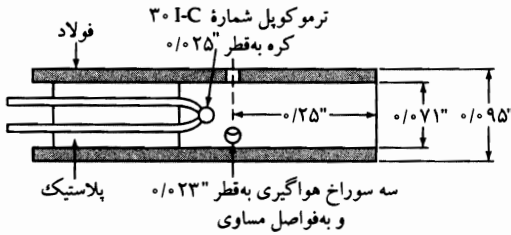
جواب: بلی. آهنگ تخلیه محاسبه شده در حدود  $6 \text{ lb}_m/\text{s}$  است، هرگاه جریان هم‌دما فرض شود (نگاه کنید به مسئله ۱۵.ب.۳) و حدود  $6/3 \text{ lb}_m/\text{s}$  است هرگاه جریان آدیاباتیک باشد. در دمای محیط  $70^\circ\text{F}$ ، آهنگ واقعی تخلیه باید بین این دو حد باشد.

۳.ج۱۵ دمای سکون (شکل ۱۵-ج.۳). یک «حسگر دمای کل» مطابق شکل، در جریان پایایی گازی ایده آل با دمای  $T_1$  و سرعت  $v_1$  فروبرده می‌شود. بخشی از گاز در حال حرکت وارد سر باز حسگر می‌شود و، قبل از خروج از سوراخ‌های هواگیری، سرعت آن تقریباً به صفر می‌رسد. این شتاب منفی سبب افزایش دما می‌شود و این افزایش دما را با ترموکوپل اندازه‌گیری می‌کنند. چون شتاب منفی به سرعت ایجاد می‌شود، فرایند را می‌توان تقریباً آدیاباتیک فرض کرد.

(الف) با استفاده از موازنه ماکروسکوپی حالت پایایی انرژی، معادله (۱۵-۱۰.۳)، عبارتی برای بیان دمای ثبت شده توسط ترموکوپل، بر حسب  $T_1$  و  $v_1$  به دست آورید. سیستم را جریان معرف سیال ورودی به حسگر فرض

کنید. صفحه مبنای ۱ را به فاصله کافی در بالادست جریان در نظر بگیرید تا بتوان فرض کرد وجود حسگر در وضعیت تأثیر ندارد، و صفحه مبنای ۲ را در خود حسگر فرض کنید. سرعت را در صفحه ۲ برابر صفر بگیرید، از تابش چشم‌پوشی کنید، و رسانش گرما از سیال را، درحین گذر از بین صفحه‌های مبنای، نادیده بگیرید. (ب) نقش سوراخ‌های هواگیری چیست؟

جواب: (الف)  $T_2 - T_1 = v_1^2 / 2C_p$ . دما در حدود ۲٪ مقادیر ارائه شده با این عبارت، بالاتر می‌رود و با استفاده از حسگری که خوب طراحی شده باشد می‌توان به آن دست یافت.



شکل ۳.۱۵ ج ۳ «حسگر دمای کل».

۱.۵۱۵ موازنه ماکروسکوپی آنتروپی.

(الف) نشان دهید که انتگرال‌گیری از معادله تغییر آنتروپی (معادله ۱.۵۱۱-۳) روی سیستم جریان شکل ۱-۷ به رابطه زیر منتهی می‌شود:

$$\frac{d}{dt} S_{\text{tot}} = -\Delta \left( \hat{S} + \frac{q}{\rho v T} \right) w + g_{S,\text{tot}} + Q_S \quad (1-1.515)$$

که در آن:

$$S_{\text{tot}} = \int_V \rho \hat{S} dV \quad (2-1.515)$$

$$g_{S,\text{tot}} = - \int_V \frac{1}{T} ((\mathbf{q} \cdot \nabla \ln T) + (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})) dV \quad (3-1.515)$$

(ب) معادله‌های بخش (الف) را جمله به جمله تفسیر کنید.

(ج) آیا جمله موجود در  $g_{S,\text{tot}}$  شامل تانسور تنش، همان اتلاف انرژی از طریق گرمایش ویسکوز است؟

۲.۵۱۵ به دست آوردن موازنه ماکروسکوپی انرژی. نحوه انتگرال‌گیری از معادله (N) در جدول ۱-۴.۱۱، روی کل حجم  $V$  سیستم جریان را، که به علت وجود قطعات متحرک ممکن است تابع زمان باشد، نشان دهید. به کمک قضیه دیورژانس گاوس و فرمول‌های لایب‌نیس برای مشتق‌گیری از یک انتگرال، نشان دهید که حاصل انتگرال‌گیری بالا، موازنه ماکروسکوپی انرژی، یعنی معادله (۲-۱.۱۵) است. در مشتق‌گیری چه فرض‌هایی اختیار می‌شود؟  $W_m$  را چگونه باید تفسیر کرد؟ (راهنمایی: با مطالعه مشتق موازنه ماکروسکوپی در بخش ۸.۷، می‌توان به نکاتی برای حل این مسئله پی برد).

۳.۵۱۵ بهره‌برداری از مبادله‌کن گرما (شکل ۳.۱۵). سیال داغی وارد لوله‌ای مدور به شعاع  $R_1$  در وضعیت  $z = 0$  می‌شود و در جهت مثبت  $z = L$  حرکت می‌کند و در این نقطه لوله را ترک می‌کند و روی سطح خارجی

آن، در فضای حلقوی، بازمی‌گردد. گرما بین سیال داخل لوله و سیال موجود در فضای حلقوی مبادله می‌شود. به‌علاوه، گرما از فضای حلقوی به هوای خارج نیز دفع می‌شود، که در دمای محیط،  $T_a$ ، و ثابت است. چگالی و ظرفیت گرمایی را ثابت فرض کنید. از نمادگذاری زیر استفاده کنید:

$$U_1 = \text{ضریب کلی انتقال گرما بین سیال داخل لوله و سیال داخل فضای حلقوی}$$

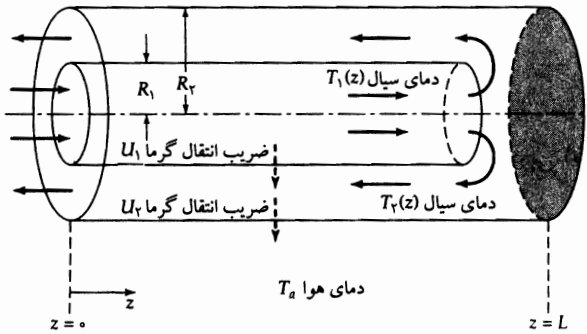
$$U_2 = \text{ضریب کلی انتقال گرما بین سیال داخل فضای حلقوی و هوا با دمای } T_a$$

$$T_1(z) = \text{دمای سیال در لوله}$$

$$T_2(z) = \text{دمای سیال در فضای حلقوی}$$

$$w = \text{آهنگ جریان جرمی در سیستم (مقدار ثابت)}$$

اگر سیال با دمای  $T_i$  وارد شود، دمای خروجی آن،  $T_o$ ، چه قدر خواهد بود؟ می‌توانید از کمیت‌های بدون بُعد زیر استفاده کنید:  $\Theta_1 = (T_1 - T_a)/(T_i - T_a)$ ،  $N_1 = 2\pi R_1 U_1 L/w\hat{C}_p$ ، و  $\zeta = z/L$ .



شکل ۳.د۱۵ دستگاه مبادله‌کن گرما.

۴.د۱۵ تخلیه‌ی گاز از مخزن متحرک (شکل ۶.۵.۱۵). معادله (۳۸.۵.۱۵) در مثال ۴.۵.۱۵ با برابر صفر قرار دادن  $d\hat{\Phi}/dt$  به دست آمد و این روش فقط به این علت توجیه‌پذیر است که مخزن ثابت فرض شده است. اما معادله (۳۸.۵.۱۵) در مورد مخازن متحرک نیز صادق است. این نکته را می‌توان به ترتیب زیر اثبات کرد:

(الف) مخزنی را مانند مخزن نشان داده شده در شکل ۶.۵.۱۵ در نظر بگیرید، با این تفاوت که در این حالت با سرعت  $\mathbf{v}$  حرکت می‌کند که از سرعت نسبی سیال و مخزن در ناحیه‌ی واقع در سمت چپ سطح ۱ بسیار بیش‌تر است. نشان دهید که برای این ناحیه از مخزن، موازنه‌ی ماکروسکوپی اندازه حرکت چنین است:

$$-\left(\mathbf{F}_{f \rightarrow s} + \mathbf{u}_r \int_{S_r} p_r dS\right) = m_{\text{tot}} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{g}\right) \quad (۱-۴.د۱۵)$$

که در آن سرعت سیال یکنواخت و مساوی  $\mathbf{v}$  فرض می‌شود. سپس هردو طرف معادله (۱-۴.د۱۵) را در  $\mathbf{v}$  ضرب نقطه‌ای کنید تا نتیجه شود:

$$W_m = m_{\text{tot}} \left(\frac{d\hat{K}}{dt} + \frac{d\hat{\Phi}}{dt}\right) \quad (۲-۴.د۱۵)$$

که در آن از  $\partial\hat{\Phi}/\partial t$  چشم‌پوشی می‌شود.

(ب) این نتیجه را در موازنه‌ی ماکروسکوپی انرژی قرار دهید و کار را مانند مثال ۴.۵.۱۵ ادامه دهید.

۵.۱۵ معادلهٔ کلاسیک برنولی. پس از معادلهٔ (۵-۲.۱۵) بر این نکته تأکید کردیم که موازنهٔ انرژی مکانیکی و موازنهٔ انرژی کل شامل اطلاعاتی متفاوت‌اند، زیرا اولی از پایستگی اندازه حرکت نتیجه می‌شود، اما دومی نتیجهٔ پایستگی انرژی است.

برای جریان حالت پایای سیالی تراکم‌پذیر با خواص انتقالی صفر، هردو موازنه به معادلهٔ کلاسیک برنولی منتهی می‌شوند. در مثال ۱-۵.۳ روش به دست آوردن آن را از معادلهٔ حرکت نشان دادیم. کار مشابهی را برای معادلهٔ انرژی حالت پایا انجام دهید؛ خواص انتقالی را صفر فرض کنید، یعنی جریان تک‌آنتروپیک فرض می‌شود.<sup>۳</sup>

---

3. R. B. Bird and M. D. Graham, in *Handbook of Fluid Dynamics* (R. W. Johnson, ed.), CRC Press, Boca Raton, Fla. (1998), p. 3-13.

## فصل ۱۶

### انتقال انرژی از طریق تابش

۱.۱۶ طیف تابش الکترومغناطیسی

۲.۱۶ جذب و گسیل در سطوح جامد

۳.۱۶ قانون توزیع پلانک، قانون جابه‌جایی وین، و قانون استفان-بولتزمن

۴.۱۶ تابش مستقیم بین اجسام سیاه در خلأ در دماهای مختلف

۵.۱۶<sup>۰</sup> تابش بین اجسام غیرسیاه در دماهای مختلف

۶.۱۶<sup>۰</sup> انتقال انرژی تابشی در محیط‌های جاذب

قسمت اول این کتاب را با فصلی دربارهٔ سیالاتی پایان دادیم که با قانون ویسکوزیتهٔ نیوتون قابل توصیف نبودند، بلکه برای توصیف آن‌ها به عبارتهای غیرخطی و وابسته‌به‌زمان نیاز بود. اکنون قسمت دوم کتاب را با شرح مختصری از انتقال انرژی تابشی به پایان می‌بریم که نمی‌توان آن را با قانون فوریه توصیف کرد. در فصل‌های ۹ تا ۱۵ انتقال انرژی از طریق رسانش و همرفت را شرح دادیم. هردو شیوهٔ انتقال به حضور محیط مادی وابسته است. برای رسانش گرما، باید بین دو نقطهٔ همسایه اختلاف دما وجود داشته‌باشد. برای همرفت گرما، باید سیال برای حرکت و انتقال انرژی به همراه خود، آزاد باشد. در این فصل مکانیسم سومی را برای انتقال انرژی به نام تابش بررسی می‌کنیم. تابش اساساً مکانیسمی الکترومغناطیسی است که به انرژی امکان می‌دهد با سرعت نور، در فضای خالی از ماده، انتقال یابد. آهنگ انتقال انرژی بین دو جسم «سیاه» در خلأ با اختلاف توان چهارم دمای مطلق آن‌ها متناسب است. این مکانیسم، از لحاظ کیفی، با سه مکانیسم انتقال که در بخش‌های دیگری از این کتاب بررسی شدند بسیار متفاوت است. این مکانیسم‌ها عبارت بودند از: انتقال اندازه‌حرکت در سیالات نیوتونی، متناسب با گرادیان سرعت؛ انتقال انرژی از طریق رسانش گرما، متناسب با گرادیان دما؛ و انتقال جرم از طریق نفوذ، متناسب با گرادیان غلظت. به علت منحصربه‌فرد بودن تابش به منزلهٔ شیوهٔ انتقال، و به سبب اهمیت انتقال گرمای تابشی در محاسبات صنعتی، فصل جداگانه‌ای را به این موضوع اختصاص داده‌ایم. درک کامل فیزیک انتقال تابشی<sup>۱</sup> مستلزم استفاده از چندین حوزهٔ علمی

1. M. Planck, *Theory of Heat*, Macmillian, London (1932) parts II and IV.

ماکس کارل ارنست لودویگ پلانک (۱۸۵۸-۱۹۴۷)، برندهٔ جایزهٔ نوبل، نخستین فردی بود که نظریهٔ کوانتومی بودن انرژی را پی‌ریزی و ثابت بنیادی جدید  $h$ ، موسوم به ثابت پلانک، را معرفی کرد؛ نام او در معادلهٔ «فوکر-پلانک» در دینامیک تصادفی نیز مطرح می‌شود.

است:<sup>۲</sup> به نظریه الکترومغناطیس برای توصیف ماهیت موجی تابش، به ویژه انرژی و فشار مربوط به امواج الکترومغناطیسی، نیاز است؛ ترمودینامیک برای به دست آوردن بعضی روابط بین «خواص کپهای» محفظه حاوی تابش سودمند است؛ مکانیک کوانتومی ضروری است تا بتوان فرایندهای اتمی و مولکولی را که در هنگام تولید تابش در داخل ماده و در هنگام جذب آن توسط ماده رخ می دهند، به تفصیل توصیف کرد؛ و مکانیک آماری برای توصیف نحوه توزیع انرژی تابشی در طیف طول موج لازم است. در این بررسی ابتدایی صرفاً می خواهیم کمیت های کلیدی را تعریف، و نتایج نظری و تجربی را مطرح کنیم. سپس نشان خواهیم داد که چگونه می توان با استفاده از بعضی از این نتایج آهنگ انتقال گرما از طریق فرایندهای تابشی در سیستم های ساده را محاسبه کرد.

در بخش های ۱.۱۶ و ۲.۱۶ مفاهیم و تعریف های پایه را ارائه می کنیم. سپس در بخش ۳.۱۶ بعضی از نتایج فیزیکی اصلی مرتبط با تابش جسم سیاه ارائه می شود. در بخش بعدی، یعنی بخش ۴.۱۶، در مورد آهنگ تبادل گرما بین دو جسم سیاه بحث می کنیم. در این بخش هیچ اصل فیزیکی جدیدی بیان نمی شود و مسائل پایه ماهیت هندسی دارند. بخش ۵.۱۶ به تعمیم بخش قبلی به سطوح غیرسیاه اختصاص دارد. سرانجام، در بخش آخر، شرح مختصری از فرایندهای تابش در محیط های جاذب ارائه می شود.<sup>۳</sup>

### ۱.۱۶ طیف تابش الکترومغناطیسی

هنگامی که به جسمی -مثلاً با استفاده از یک کویل برقی- گرما داده می شود، سطح جامد تابشی گسیل می کند که طول موج آن اساساً درگستره ۰/۱ تا ۱۰ میکرون است. این نوع تابش را معمولاً تابش گرهایی می نامند. توصیف کمی مکانیسم های اتمی و مولکولی تولید تابش در مکانیک کوانتومی ارائه می شود و از حوزه بحث ما خارج است. اما توصیف کیفی آن امکان پذیر است: وقتی به جسمی صلب انرژی داده می شود، بعضی از مولکول ها و اتم های تشکیل دهنده جسم به «حالت های برانگیخته» می روند. این اتم ها یا مولکول ها گرایش دارند که به طور خودبه خود به حالت های انرژی پایین تر بازگردند. وقتی چنین اتفاقی می افتد، انرژی به صورت تابش الکترومغناطیسی گسیل می شود. چون تابش گسیل شده از تغییر در حالت های الکترونی، ارتعاشی و چرخشی اتم ها و مولکول ها ناشی می شود، این تابش گستره ای از طول موج ها را دارد.

در عمل، تابش گرمایی فقط معرف بخش کوچکی از طیف تابش الکترومغناطیسی است. انواع مکانیسم های دخیل در بخش های گوناگون طیف تابش در شکل ۱-۱.۱۶ نشان داده شده است. انواع مختلف تابش، فقط براساس گستره طول موج از هم متمایز می شوند. در خلا همه این صورت های انرژی تابشی با سرعت نور  $c$  حرکت می کنند. طول موج  $\lambda$ ، که مشخصه موجی الکترومغناطیسی است، با بسامد آن موج،  $\nu$ ، رابطه زیر را دارد:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (1-1.16)$$

که در آن  $c = 2.998 \times 10^8$  m/s. در بخش مرئی طیف، طول موج های مختلف با «رنگ» نور رابطه دارند. برای بعضی از مقاصد، بهتر است تابش الکترومغناطیسی را از دیدگاه ذره ای بنگریم. در این صورت موج الکترومغناطیسی با بسامد  $\nu$  را به یک فوتون مربوط می کنیم که ذره ای با بار صفر و جرم صفر است و انرژی آن از

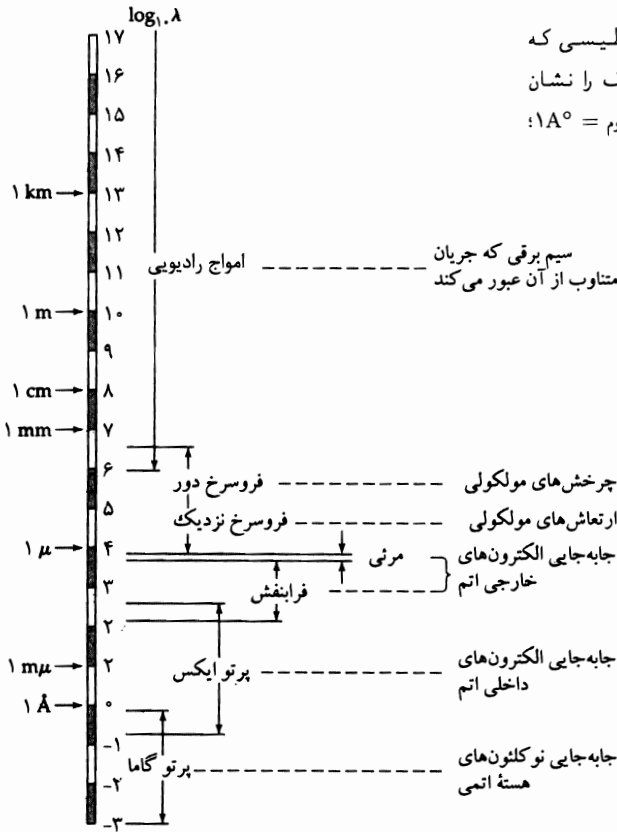
2. W. Heitler, *Quantum Theory of Radiation*, 2nd edition, Oxford University Press (1944).

۳. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد انتقال گرمایی تابشی و کاربردهای مهندسی آن، به کتاب درسی جامع زیر رجوع کنید:  
R. Siegel and J. R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 3rd edition, Hemisphere Publishing Co., New York (1992). See also J. R. Howell and M. P. Mengöc, in *Handbook of Heat Transfer*, 3rd edition, (W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, and Y. I. Cho, eds.) McGraw-Hill, New York (1998), Chapter 7.

رابطه زیر به دست می آید:

$$\varepsilon = h\nu \quad (۲-۱.۱۶)$$

شکل ۱.۱۶-۱ طیف تابش الکترومغناطیسی که مکانیسم‌های تولید طول‌موج‌های مختلف را نشان می‌دهد  $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm} = 0.1 \text{ nm}$ ؛ واحد آنگستروم  $1 \mu = 10^{-6} \text{ m}$  میکرون =  $10^{-6} \text{ m}$



در این رابطه  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  ثابت پلانک است. با توجه به این دو معادله و اطلاعات شکل ۱.۱۶-۱، مشاهده می‌کنیم که کاهش طول‌موج تابش الکترومغناطیسی متناظر است با افزایش انرژی فوتون‌های متناظر. این نکته در مورد همه مکانیسم‌های تولید تابش صادق است. مثلاً، هنگامی که سرعت چرخش مولکولی کاهش می‌یابد، انرژی نسبتاً کمی آزاد می‌شود و تابش در گستره فروسرخ است. اما هنگامی که هسته اتمی از یک حالت انرژی به حالت انرژی پایین‌تر می‌رود، مقدار نسبتاً زیادی انرژی آزاد می‌شود و تابش حاصل از آن تابش گاما یا ایکس است. با توجه به آنچه گفته شد، معقول به نظر می‌رسد که انرژی تابشی گسیل شده از اجسامی که گرم می‌شوند، با افزایش دما به سوی طول‌موج‌های کوتاه‌تر (فوتون‌های با انرژی بیشتر) گرایش پیدا می‌کند.

تا این‌جا پدیده گسیل انرژی تابشی یا فوتون‌ها را، هنگامی که یک سیستم مولکولی یا اتمی از یک حالت انرژی بالاتر به یک حالت انرژی پایین‌تر می‌رود، نشان دادیم. فرایند بعدی این است که نشان دهیم وقتی انرژی تابشی به سطحی جامد برخورد می‌کند و دمای آن را بالا می‌برد، چه اتفاقی می‌افتد.



### ۲.۱۶ جذب و گسیل در سطوح جامد

با معرفی مفاهیم جذب و گسیل برحسب تصویر اتمی، اکنون به بحث دربارهٔ همین فرایندها از دیدگاه میکروسکوپی می‌پردازیم. بحث خود را به جامدات کدر محدود می‌کنیم.

تابشی که به سطح جامدی کدر برخورد می‌کند، یا جذب این سطح می‌شود و یا از آن بازتاب می‌یابد. کسری از تابش رسیده به جسم را که جذب می‌شود، ضریب جذب می‌نامند و آن را با نماد  $a$  نشان می‌دهند. هم‌چنین کسری از تابش رسیده به سطح با بسامد  $\nu$  را، که جذب می‌شود، با  $a_\nu$  نشان می‌دهند.  $a$  و  $a_\nu$  چنین تعریف می‌شوند:

$$a = \frac{q^{(a)}}{q^{(i)}} \quad (۱-۲.۱۶)$$

$$a_\nu = \frac{q_\nu^{(a)}}{q_\nu^{(i)}} \quad (۲-۲.۱۶)$$

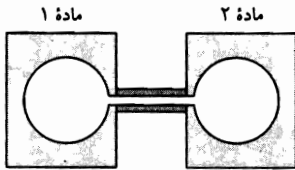
که در آن  $q_\nu^{(a)} dv$  و  $q_\nu^{(i)} dv$  تابش جذب‌شده و دریافتی در واحد سطح بر واحد زمان در گسترهٔ بسامد  $\nu$  تا  $\nu + d\nu$  است. برای هر جسم حقیقی،  $a_\nu$  از واحد کم‌تر است و با بسامد تغییرات چشم‌گیری دارد. جسمی فرضی که  $a_\nu$  برای آن، در کل گسترهٔ بسامدی و در همهٔ دماها ثابت و از واحد کوچک‌تر باشد، جسم خاکستری نامیده می‌شود. یعنی جسم خاکستری همواره و در همهٔ بسامدها، کسر ثابتی از تابش دریافتی را جذب می‌کند. حالت حدی جسم خاکستری حالتی است که در آن  $a_\nu = 1$ ، در همهٔ بسامدها و همهٔ دماها. این رفتار حدی، معرف رفتار جسم سیاه است.

همهٔ سطوح جامد انرژی تابشی گسیل می‌کنند. انرژی تابشی کل گسیل‌شده در واحد سطح بر واحد زمان را با  $q^{(e)}$  نشان می‌دهند و انرژی گسیل‌شده در گسترهٔ بسامدی  $\nu$  تا  $\nu + d\nu$  را  $q_\nu^{(e)} dv$  می‌نامند. آهنگ‌های متناظر گسیل انرژی از جسم سیاه با نمادهای  $q_b^{(e)}$  و  $q_{b\nu}^{(e)}$  مشخص می‌شوند. ضریب گسیل برای گسیل انرژی تابشی کل، هم‌چنین برای بسامدی مفروض، برحسب این کمیت‌ها چنین تعریف می‌شود:

$$e = \frac{q^{(e)}}{q_b^{(e)}} \quad e_\nu = \frac{q_\nu^{(e)}}{q_{b\nu}^{(e)}} \quad (۴، ۳-۲.۱۶)$$

ضریب گسیل برای سطوح حقیقی و غیرفلوئورسان از واحد کم‌تر است و برای اجسام سیاه برابر واحد است. در هر دمای مفروض، انرژی تابشی گسیل‌شده توسط جسم سیاه معرف حد بالایی برای انرژی تابشی گسیل‌شده توسط سطوح حقیقی و غیرفلوئورسان است.

حال تابش در محفظه‌ای تهی، یا «کاواک» با جدارهای هم‌دما را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم کل سیستم در حال تعادل است. در این وضعیت، شار خالص انرژی در فصل مشترک بین سطح جامد و کاواک وجود ندارد. اکنون نشان می‌دهیم که تابش در چنین کاواکی از ماهیت جدارها مستقل است و فقط به دمای جدارهای کاواک بستگی دارد. دو کاواک را به هم متصل می‌کنیم که جدارهای آن‌ها دمای برابر دارند، اما مطابق شکل ۱-۲.۱۶ از دو جنس مختلف ساخته شده‌اند. اگر شدت‌های تابش در دو کاواک متفاوت بود، انتقال انرژی تابشی از یکی به دیگری صورت می‌گرفت. چون چنین شاری سبب نقض قانون دوم ترمودینامیک می‌شود، شدت تابش در دو کاواک، صرف‌نظر از ترکیب شیمیایی سطوح آن‌ها، باید برابر باشد. به‌علاوه، می‌توان نشان داد که در سرتاسر کاواک، تابش یکنواخت و غیرقطبی است. این تابش گاواکی نقش مهمی در پی‌ریزی قانون پلانک دارد. شدت تابش را با  $q^{(cav)}$  نشان می‌دهیم. این انرژی تابشی است که به واحد سطح جامد واقع در هر نقطه‌ای از کاواک می‌رسد.



شکل ۱۶-۲. آزمایشی برای اثبات این نکته که تابش کاواکی از جنس جدار کاواک مستقل است.

اکنون دو آزمایش دیگر انجام می‌دهیم. در آزمایش نخست، جسم سیاه کوچکی را که دمایی برابر دمای جدار کاواک دارد، داخل کاواک می‌گذاریم. بنابراین انرژی‌ای که به سطح جسم سیاه می‌رسد، باید با انرژی گسیل شده توسط جسم سیاه برابر باشد:

$$q^{(cav)} = q_b^{(e)} \quad (۵-۲.۱۶)$$

از این آزمایش، این نتیجه مهم را می‌گیریم که تابش گسیل شده توسط جسم سیاه با شدت تابش تعادلی در داخل کاواکی با همان دما، برابر است.

در آزمایش دوم، یک جسم غیرسیاه کوچک را در کاواکی قرار می‌دهیم که دمای جدار آن با دمای جسم برابر است. بین جسم غیرسیاه و جدار کاواک تبادل گرمای خالص وجود ندارد. بنابراین می‌توان گفت که انرژی جذب شده توسط جسم غیرسیاه، با انرژی تابش یافته از آن برابر است:

$$aq^{(cav)} = q^{(e)} \quad (۶-۲.۱۶)$$

مقایسه معادله‌های (۵-۲.۱۶ و ۶) به نتیجه زیر منتهی می‌شود:

$$a = \frac{q^{(e)}}{q_b^{(e)}} \quad (۷-۲.۱۶)$$

تعریف ضریب گسیل  $e$  در معادله (۳-۲.۱۶) به ما امکان می‌دهد که نتیجه بگیریم:

$$e = a \quad (۸-۲.۱۶)$$

این قانون کیرشهوف<sup>۱</sup> است، که بنابه آن در دمایی مفروض، ضریب گسیل و ضریب جذب هر سطح جامد برابر است، هرگاه تابش با سطح جامد در تعادل باشد. می‌توان نشان داد که معادله (۸-۲.۱۶) برای هر طول موج هم، به‌طور مجزا، معتبر است:

$$e_\nu = a_\nu \quad (۹-۲.۱۶)$$

مقادیر ضریب گسیل کل  $e$  برای بعضی از جامدات در جدول ۱۶-۲. آمده است. در واقع  $e$  به بسامد و به زاویه گسیل نیز بستگی دارد، اما مقادیر متوسط آن کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند. مقادیر گفته شده در جدول، با چند استثنا، برای گسیل قائم بر سطح به دست آمده‌اند، اما می‌توان برای گسیل نیم‌کروی، به‌ویژه از سطوح ناصاف، نیز از آن‌ها استفاده کرد. سطوح فلزی پاکیزه و اکسید نشده ضریب گسیل بسیار پایینی دارند، اما اغلب غیرفلزات و اکسیدهای فلزی،

1. G. Kirchhoff, *Monatsber. d. preuss. Akad. d. Wissenschaften*, p. 783 (1859); *Poggendorffs Annalen*, 109, 275-301 (1860).

گوستاو رابرت کیرشهوف (۱۸۲۴-۱۸۸۷) هنگامی قوانین مشهور خود در مورد مدارهای الکتریکی را منتشر کرد که هنوز دانشجوی دوره کارشناسی ارشد بود؛ او در برسلاو، هایدلبرگ، و برلن تدریس کرد.

در دمای محیط یا دماهای بالاتر، ضریب گسیلی بالاتر از ۰٫۸ دارند. توجه کنید که با افزایش دما، ضریب گسیل تقریباً همه مواد، افزایش می‌یابد.

جدول ۱۲-۱۶ ضریب گسیل کل سطوح مختلف، برای گسیل عمودی. الف

$T(^{\circ}\text{R})$	$e$	$T(^{\circ}\text{R})$	$e$	
۹۰۰	۰٫۰۳۹	۱۵۳۰	۰٫۰۵۷	آلومینیم
۸۵۰	۰٫۱۱	۱۵۷۰	۰٫۱۹	کاملاً صیقلی، با خلوص ۹۸٫۳٪
۵۶۰	۰٫۲۱۶			اکسیدشده در دمای ۱۱۱۰°F
				پوشش بام با روکش آلومینیم
				مس
۶۳۶	۰٫۰۱۸			کاملاً صیقلی، الکترولیزی
۸۵۰	۰٫۵۷	۱۵۷۰	۰٫۵۷	اکسیدشده در دمای ۱۱۱۰°F
				آهن
۸۱۰	۰٫۰۵۲	۹۰۰	۰٫۰۶۴	کاملاً صیقلی، الکترولیزی
۵۲۷	۰٫۶۸۵			کاملاً زنگ‌زده
۸۵۲	۰٫۲۱			چدن، صیقلی
۸۵۰	۰٫۶۴	۱۵۷۰	۰٫۷۸	چدن اکسیدشده در دمای ۱۱۱۰°F
۵۶۰	۰٫۹۳	۱۱۶۰	۰٫۹۴۵	کاغذ آزبستی
				آجر
۵۳۰	۰٫۹۳			سرخ، زبر
۲۲۹۲	۰٫۸۰			سیلیسی، بدون لعاب، زبر
۲۴۷۲	۰٫۸۵			سیلیسی، لعاب‌دار، زبر
۵۶۰	۰٫۹۴۵	۱۱۶۰	۰٫۹۴۵	دوده چراغ، به ضخامت ۰٫۰۰۳ in. یا بیشتر
				رنگ‌ها
۵۳۶	۰٫۸۷۵			لاک سیاه براق روی آهن
۵۶۰	۰٫۸۰	۶۶۰	۰٫۹۵	لاک سفید
۶۷۲	۰٫۹۲-۰٫۹۶			رنگ‌های روغنی، ۱۶ رنگ
۶۷۲	۰٫۲۷-۰٫۶۷			رنگ‌های آلومینیمی، با عمر و مقدار لاک متغیر
				مواد نسوز، ۴۰ نوع مختلف
۱۵۷۰	۰٫۶۵-۰٫۷۰	۲۲۹۰	۰٫۷۵	تابش‌گرهای ضعیف
۱۵۷۰	۰٫۸۰-۰٫۸۵	۲۲۹۰	۰٫۸۵-۰٫۹۰	تابش‌گرهای قوی
۴۹۲	۰٫۹۵	۶۷۲	۰٫۹۶۳	آب، مایع، لایه ضخیم <sup>۳</sup>

الف) مقادیر منتخب از جدول ارائه شده در H. C. Hottel for W. H. McAdams, *Heat Transmission*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1954), pp. 472-479.

ب) محاسبه شده با استفاده از داده‌های طیف‌سنجی.

نشان دادیم که انرژی تابشی گسیل شده توسط جسم سیاه کران بالایی انرژی تابشی گسیل شده توسط سطوح حقیقی است و این انرژی تابعی از دماست. با آزمایش نشان داده شده که شار انرژی گسیلی کل، از سطحی سیاه

برابر است با:

$$q_b^{(e)} = \sigma T^4 \quad (۱۰-۲.۱۶)$$

که در آن  $T$  دمای مطلق است. این رابطه را قانون استفان-بولتزمن<sup>۲</sup> می‌نامند. ثابت استفان-بولتزمن،  $\sigma$ ، مقداری برابر  $۵.۶۷ \times 10^{-8} \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{R}^4$  یا  $۵.۶۷ \times 10^{-12} \text{ cal/s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{K}^4$  دارد. در بخش بعد دو مسیر برای به‌دست آوردن این رابطه مهم، به‌شیوه نظری، نشان می‌دهیم. برای سطوح غیرسیاه در دمای  $T$ ، شار انرژی گسیل شده برابر است با:

$$q^{(e)} = e\sigma T^4 \quad (۱۱-۲.۱۶)$$

که در آن  $e$  را باید در دمای  $T$  محاسبه کرد. طرز استفاده از معادله‌های (۱۰-۲.۱۶) و (۱۱) برای محاسبه آهنگ انتقال گرمای تابشی بین سطوح گرم شده در بخش‌های ۴.۱۶ و ۵.۱۶ نشان داده می‌شود.

قبلاً گفتیم که ثابت استفان-بولتزمن به‌طور تجربی تعیین شده‌است. انجام این کار مستلزم در اختیار داشتن جسم سیاه حقیقی است. جامدهایی با سطوح کاملاً سیاه وجود ندارند. اما می‌توان با ایجاد سوراخی بسیار کوچک در جدار یک کاواک هم‌دما، سطحی سیاه با تقریب عالی به‌دست آورد. در این وضعیت خود سوراخ سطحی بسیار نزدیک به سطح سیاه است. با توجه به رابطه زیر می‌توان دریافت که این تقریب تا چه اندازه خوب است؛ این رابطه ضریب گسیل مؤثر سوراخ،  $e_{\text{hole}}$ ، در محفظه‌ای با جدار زبر را، برحسب ضریب گسیل واقعی  $e$  جدارهای کاواک و کسر  $f$  از کل سطح داخلی کاواک، که توسط سوراخ بریده می‌شود، نشان می‌دهد:

$$e_{\text{hole}} \cong \frac{e}{e + f(1 - e)} \quad (۱۲-۲.۱۶)$$

اگر  $e = ۰.۸$  و  $f = ۰.۰۰۱$ ، آن‌گاه  $e_{\text{hole}} = ۰.۹۹۹۷۵$ . بنابراین  $۰.۹۹۹۷۵\%$  از تابشی که به سوراخ می‌رسد، جذب می‌شود. در این صورت تابشی که از سوراخ بیرون می‌آید بسیار نزدیک به تابش جسم سیاه است.

### ۳.۱۶ قانون توزیع پلانک، قانون جابه‌جایی وین، و قانون استفان-بولتزمن<sup>۳،۴،۵</sup>

قانون استفان-بولتزمن را می‌توانیم از ترمودینامیک استنتاج کنیم، به شرط آن‌که نتایج خاصی از نظریه میدان‌های الکترومغناطیسی را بدانیم. به‌ویژه، می‌توان نشان داد که برای تابش کاواکی، چگالی انرژی (یعنی انرژی بر واحد حجم)

2. J. Stefan, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien*, **79**, part 2, 391-428 (1879); L. Boltzmann, *Ann. Phys. (Wied. Ann.)*, Ser. 2, **22**, 291-294 (1884).

یوزف استفان، متولد اسلونی (۱۸۹۳-۱۸۳۵)، رئیس دانشگاه وین بود (۱۸۷۷-۱۸۷۶)، و علاوه بر آن، به‌سبب قانون تابشی که نام او را بر خود دارد، معروف است؛ استفان در پی‌ریزی نظریه نفوذ چند جزئی، و در مسئله رسانش گرما با تغییر فاز نیز سهم داشت. لودویگ ادوارد بولتزمن (۱۸۴۴-۱۹۰۶)، که در دانشگاه‌های وین، گراس، مونیخ، و لایپزیک کرسی استادی داشت، معادله دیفرانسیل پایه نظریه سینتیک گازها (نگاه کنید به پیوست د) و رابطه بنیادی آنتروپی-احتمال،  $S = K \ln W$ ، را پی‌ریزی کرد که بر سنگ قبرش در وین کنده‌کاری شده‌است؛  $K$  را ثابت بولتزمن می‌نامند.

1. J. de Boer, Chapter VII in *Leerboek der Natuurkunde*, 3rd edition, (R. Kronig, ed.), Scheltema and Holkema, Amsterdam (1951).

2. H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd edition, Wiley, New York (1985), pp. 78-79.

3. M. Planck, *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung*, 5th edition, Barth, Leipzig (1923); *Ann Phys.*, **4**, 553-563, 564-566 (1901).

داخل کاواک برابر است با:

$$u^{(r)} = \frac{4}{c} q_b^{(e)} \quad (۱-۳.۱۶)$$

چون انرژی تابشی گسیل شده از جسم سیاه فقط تابع دماست، چگالی انرژی  $u^{(r)}$  فقط باید تابع دما باشد. به علاوه، می‌توان نشان داد که تابش الکترومغناطیسی فشاری مانند  $p^{(r)}$  بر جدارهای کاواک وارد می‌کند که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$p^{(r)} = \frac{1}{3} u^{(r)} \quad (۲-۳.۱۶)$$

نتایج قبلی مربوط به تابش کاواکی را می‌توان با در نظر گرفتن این که کاواک از گاز تشکیل شده از فوتون‌هایی پر شده که هریک انرژی  $h\nu$  و اندازه حرکت  $h\nu/c$  دارد، نیز به دست آورد. اکنون می‌توان فرمول ترمودینامیکی:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \quad (۳-۳.۱۶)$$

را در مورد گاز یا تابش فوتونی داخل کاواک به کار برد. با قرار دادن  $U^{(r)} = V u^{(r)}$  و  $p^{(r)} = \frac{1}{3} u^{(r)}$  در این رابطه، معادله دیفرانسیل معمولی زیر برای  $u^{(r)}(T)$  نتیجه می‌شود:

$$u^{(r)} = \frac{1}{3} T \frac{du^{(r)}}{dT} - \frac{1}{3} u^{(r)} \quad (۴-۳.۱۶)$$

از این معادله می‌توان انتگرال گرفت تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$u^{(r)} = bT^4 \quad (۵-۳.۱۶)$$

که در آن  $b$  ثابت انتگرال‌گیری است. با ترکیب این نتیجه با معادله (۱-۳.۱۶)، انرژی تابشی گسیل شده از سطح جسم سیاه، بر واحد سطح و در واحد زمان به دست می‌آید:

$$q_b^{(e)} = \frac{c}{4} u^{(r)} = \frac{cb}{4} T^4 = \sigma T^4 \quad (۶-۳.۱۶)$$

این قانون استفان-بولتزمن است. توجه کنید که در هنگام به دست آوردن این قانون از فرمول‌های ترمودینامیک، مقدار عددی  $\sigma$  پیش‌بینی نمی‌شود.

روش دوم استنتاج قانون استفان-بولتزمن انتگرال‌گیری از قانون توزیع پلانک است. این معادله معروف شار انرژی تابشی  $q_{b\lambda}^{(e)}$  را، از سطح جسم سیاه و در گستره طول موج  $\lambda$  تا  $\lambda + d\lambda$ ، به دست می‌دهد:

$$q_{b\lambda}^{(e)} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{ch/\lambda KT} - 1} \quad (۷-۳.۱۶)$$

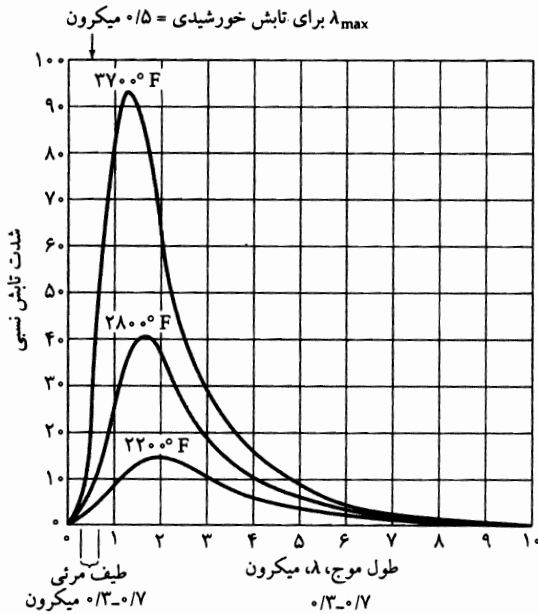
در این جا  $h$  ثابت پلانک است. این نتیجه را می‌توان با کاربرد آمار کوانتومی در مورد گاز فوتونی موجود در کاواک نیز به دست آورد، به شرط آن که فوتون‌ها از آمار بوز-انشتین پیروی کنند.<sup>۵۴</sup> توزیع پلانک، چنان‌که در شکل ۱-۳.۱۶ نشان

4. J. E. Mayer and M. G. Mayer, *Statistical Mechanics*, Wiley, New York (1940), pp. 363-374.

5. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, 3rd edition, Part 1, Pergamon, Oxford (1980), §63.

داده شده است، به درستی انرژی کل را برحسب طول موج، و جابه‌جایی نقطهٔ ماکزیمم به طرف طول موج‌های کوتاه‌تر در دماهای بالاتر را پیش‌بینی می‌کند. هنگامی که از معادلهٔ (۳.۱۶-۷) روی همهٔ طول موج‌ها انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 q_b^{(e)} &= \int_0^{\infty} q_{b\lambda}^{(e)} d\lambda \\
 &= 2\pi c^2 h \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{-5}}{e^{ch/\lambda KT} - 1} d\lambda \\
 &= \frac{2\pi K^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\
 &= \frac{2\pi K^4 T^4}{c^2 h^3} \left( \frac{\pi^4}{15} \right) \\
 &= \frac{2\pi K^4 T^4}{c^2 h^3} \left( \frac{\pi^4}{15} \right) \quad (۳.۱۶-۸)
 \end{aligned}$$



در انتگرال‌گیری بالا، متغیر انتگرال را از  $\lambda$  به  $x = ch/\lambda KT$  تغییر دادیم. سپس انتگرال‌گیری را روی  $x$ ، با استفاده از بسط سری تیلر  $1/(e^x - 1)$  برحسب  $e^x$ ، به صورت جمله‌به‌جمله، انجام دادیم (نگاه کنید به بخش ج.۲). به این ترتیب رهیافت مکانیک آماری جزئیات توزیع طیفی تابش، و هم‌چنین عبارتی برای بیان ثابت استفان-بولتزمن، به دست می‌دهد:

$$\sigma = \frac{2 \pi^5 K^4}{15 c^2 h^3} \quad (۳.۱۶-۹)$$

که مقدار آن  $1/355 \times 10^{-12} \text{ cal/s} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{K}^4$  است که در محدوده عدم قطعیت تجربی، با اندازه‌گیری‌های مستقیم تابش، تأیید می‌شود. معادله (۹-۳.۱۶) فرمولی شگفت‌آور است و  $\sigma$  را از تابش،  $K$  را از مکانیک آماری، سرعت نور  $c$  را از الکترومغناطیس، و  $h$  را از مکانیک کوانتومی به هم مربوط می‌کند.

علاوه بر به‌دست آوردن قانون استغنان-بولتزمن از توزیع پلانک، می‌توانیم رابطه مهم دیگری نیز به‌دست آوریم که به نقطه ماکزیمم در توزیع پلانک مربوط است. ابتدا معادله (۷-۳.۱۶) را برحسب  $x$  بازنویسی می‌کنیم و سپس فرض می‌کنیم  $dq_{b\lambda}^{(e)}/dx = 0$ . در نتیجه معادله زیر برای  $x_{\max}$  به‌دست می‌آید که مقدار  $x$  را نشان می‌دهد که به‌ازای آن توزیع پلانک ماکزیمم می‌شود:

$$x_{\max} = 5(1 - e^{-x_{\max}}) \quad (10-3.16)$$

جواب این معادله به‌صورت عددی پیدا می‌شود و برابر است با:  $x_{\max} = 4.9651 \dots$ . بنابراین در دمای مفروض  $T$ :

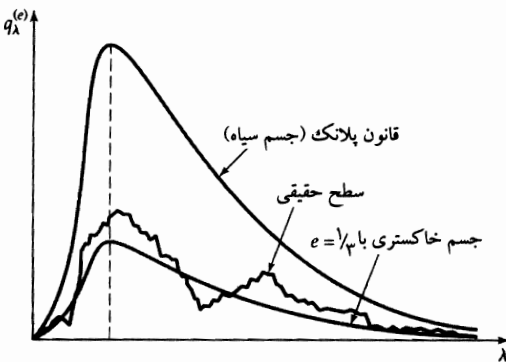
$$\lambda_{\max} T = \frac{ch}{Kx_{\max}} \quad (11-3.16)$$

با قرار دادن مقدار ثابت‌های عمومی و مقدار  $x_{\max}$ ، نتیجه می‌شود:

$$\lambda_{\max} T = 0.2898 \text{ cmK} \quad (12-3.16)$$

این نتیجه، که در اصل به‌طور تجربی به‌دست آمد،<sup>۶</sup> قانون جابه‌جایی وین نامیده می‌شود. این قانون بیش‌تر برای تخمین زدن دمای اجسام دور سودمند است. این قانون، درتوافق با تجربه، پیش‌بینی می‌کند که با افزایش دما، رنگ ظاهری تابش از سرخ (طول‌موج‌های بلند) به‌سمت آبی (طول‌موج‌های کوتاه) جابه‌جا می‌شود.

سرانجام، می‌توان بعضی از نکات قبلی را برحسب قانون توزیع پلانک از نو تفسیر کرد. در شکل ۲-۳.۱۶ سه منحنی ترسیم کرده‌ایم: قانون توزیع پلانک برای جسم سیاه فرضی، منحنی توزیع برای جسم خاکستری فرضی، و منحنی توزیعی برای جسمی حقیقی. بنابراین آشکار است که وقتی از مقادیر ضریب گسیل کل، مانند مقادیر بیان‌شده در جدول ۱-۲.۱۶، استفاده می‌کنیم، انحراف از قانون پلانک در سرتاسر طیف را، به‌طور تجربی منظور می‌کنیم.



شکل ۲-۳.۱۶ مقایسه تابش گسیل‌شده از سطوح سیاه، خاکستری، و حقیقی.

شایسته نیست که بحث توزیع پلانک را، بدون خاطرنشان کردن این نکته به پایان برسانیم که معادله (۷-۳.۱۶) در

6. W. Wien, *Sitzungsber. d. kgl. preuss. Akad. d. Wissenschaften*, (VI), p. 55-62 (1893).

جلسهٔ اکتبر ۱۹۰۰ انجمن فیزیک آلمان، به‌عنوان قانونی تجربی که با داده‌های<sup>۷</sup> موجود هم‌خوانی دارد، ارائه شد. اما قبل از پایان همان سال،<sup>۸</sup> پلانک توانست این معادله را استنتاج کند، اما به بهای معرفی نمادگذاری افراطی کوانتس انرژی؛ ایده‌ای که با استقبال چندانی روبه‌رو نشد. پلانک خود نیز، چنان‌که آشکارا در کتابش اظهار می‌کند، در این مورد تردید داشت.<sup>۹</sup> او در نامه‌ای در سال ۱۹۳۱ نوشت: «... آن‌چه را من انجام دادم می‌توان عملی از سر استیصال توصیف کرد... شش سال بوده که با این مسئله کلنجار می‌رفتم، بدون این‌که موفقیتی کسب کنم... مسئلهٔ تعادل بین تابش و ماده، و من می‌دانستم که این مسئله اهمیت بنیادی دارد...» سپس پلانک ادامه می‌دهد و می‌گوید که «آماده بودم هر یک از باورهای قبلی خود دربارهٔ قوانین فیزیک را قربانی کنم» مگر قوانین اول و دوم ترمودینامیک.<sup>۱۰</sup> پیشنهاد انقلابی پلانک آغازگر دورانی نو و پرهیجان در فیزیک بود و در قرن بیستم، مکانیک کوانتومی در شیمی و سایر حوزه‌های علمی نیز نفوذ کرد.

### مثال ۳.۱۶-۱

دما و گسیل انرژی تابشی خورشید

برای محاسبات تقریبی، خورشید را می‌توان جسم سیاهی در نظر گرفت که تابشی با شدت ماکزیمم در  $\lambda = 0.5$  میکرون ( $5000 \text{ \AA}$ ) گسیل می‌کند. با این اطلاعات، مطلوب است برآورد (الف) دمای سطح خورشید و (ب) شار گرمای گسیل‌شده در سطح خورشید.

حل

(الف) از قانون جابه‌جایی وین، معادلهٔ (۳.۱۶-۱۲) داریم:

$$T = \frac{0.2898}{\lambda_{\max}} = \frac{0.2898 \text{ cmK}}{0.5 \times 10^{-7} \text{ cm}} = 5760 \text{ K} = 10400^\circ \text{R} \quad (13-3.16)$$

(ب) از قانون استفان-بولتزمن، معادلهٔ (۳.۱۶-۱۰)، داریم:

$$\begin{aligned} q_b^{(e)} &= \sigma T^4 = (0.1712 \times 10^{-8})(10400)^4 \\ &= 2.0 \times 10^7 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \end{aligned} \quad (14-3.16)$$

### ۴.۱۶ تابش مستقیم بین اجسام سیاه در خلأ در دماهای مختلف

در بخش‌های قبل قانون استفان-بولتزمن را مطرح کردیم که گسیل انرژی تابشی کل را از سطحی کاملاً سیاه توصیف می‌کند. در این بخش انتقال انرژی تابشی بین دو جسم سیاه با شکل هندسی و جهت‌گیری دلخواه را شرح می‌دهیم. در این جا به اطلاع از نحوهٔ توزیع انرژی تابشی انتشار یافته از جسم سیاه، برحسب زاویهٔ انتشار نیاز داریم. چون تابش جسم سیاه تک‌آنزوتروپیک است، می‌توان رابطهٔ زیر، موسوم به قانون کسینوس لامبرت<sup>۱</sup>، را استنتاج کرد:

$$q_{b\theta}^{(e)} = \frac{q_b^{(e)}}{\pi} \cos \theta = \frac{\sigma T^4}{\pi} \cos \theta \quad (1-4.16)$$

7. O. Lummer and E. Pringsheim, *Wied. Ann.*, **63**, 396 (1897); *Ann. der Physik*, **3**, 159 (1900).

8. M. Planck, *Verhandl. d. deutsch. physik. Ges.*, **2**, 202 and 237 (1900); *Ann. Phys.*, **4**, 553-563, 564-566 (1901).

9. M. Planck, *The Theory of Heat Radiation*, Dover, New York (1991), English translation of *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung* (1913), p. 154.

10. A. Hermann, *The Genesis of Quantum Theory*, MIT Press (1971), pp. 23-24.

1. H. Lambert, *Photometria*, Augsburg (1760).

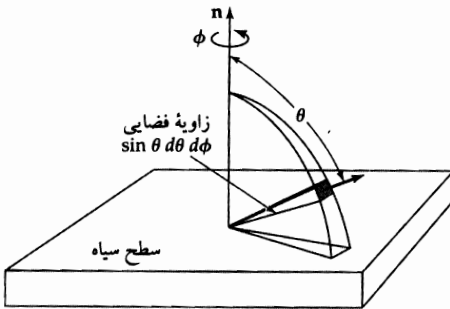


که در آن  $q_{b\theta}^{(e)}$  انرژی گسیل شده در واحد سطح بر واحد زمان در واحد زاویه فضایی در جهت  $\theta$  است (نگاه کنید به شکل ۱۶-۴-۱). بنابراین انرژی گسیل شده تحت زاویه فضایی سایه خورده برابر است با:  $q_{b\theta}^{(e)} \sin \theta d\theta d\phi$  در واحد سطح سیاه. انتگرال گیری از عبارت یاد شده بر حسب  $q_{b\theta}$  روی کل نیم کره، گسیل انرژی کل زیر را نتیجه می دهد:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} q_{b\theta}^{(e)} \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\sigma T^4}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

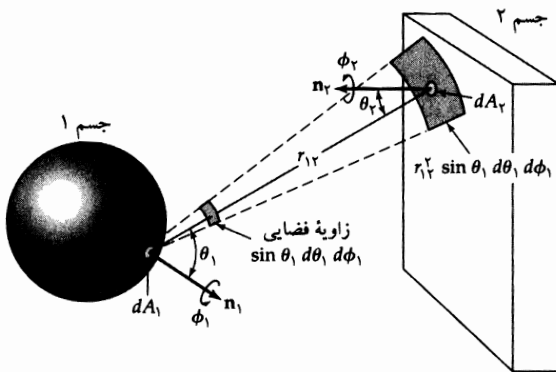
$$= \sigma T^4 = q_0^{(e)} \quad (2-4-16)$$

به این ترتیب گنجاندن ضریب  $1/\pi$  در معادله (۱۶-۴-۱) توجیه می شود.



شکل ۱۶-۴-۱ تابش تحت زاویه  $\theta$  نسبت به قائم بر سطح در زاویه فضایی  $\sin \theta d\theta d\phi$ .

اکنون در وضعیتی هستیم که آهنگ انتقال گرمای خالص از جسم ۱ به جسم ۲ را به دست بیاوریم؛ این دو اجسام سیاه با شکل و جهت گیری دلخواه اند (نگاه کنید به شکل ۱۶-۴-۲). این کار را با به دست آوردن آهنگ انتقال گرمای خالص بین یک جفت جزء سطح  $dA_1$  و  $dA_2$  انجام می دهیم که می توانند یکدیگر را «ببینند»؛ سپس روی همه جفت های جزء سطح ممکن، انتگرال می گیریم. اجزای  $dA_1$  و  $dA_2$  توسط خط مستقیمی به طول  $r_{12}$  به هم متصل می شوند که با قائم بر  $dA_1$  زاویه  $\theta_1$  و با قائم بر  $dA_2$  زاویه  $\theta_2$  تشکیل می دهد.



شکل ۲-۴-۱۶ تبادل تابشی بین دو جسم سیاه.

کار را با نوشتن عبارتی برای انرژی تابش یافته از  $dA_1$  در زاویه فضایی  $\sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1$  حول  $r_{12}$  آغاز می کنیم. این زاویه فضایی را با وسعت کافی انتخاب کردیم تا  $dA_2$  کاملاً در «باریکه» واقع شود (نگاه کنید به شکل ۱۶-۴-۲).

طبق قانون کسینوس لامبرت، انرژی تابش یافته در واحد زمان برابر خواهد بود با:

$$\left( \frac{\sigma T_1^f}{\pi} \cos \theta_1 \right) dA_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1 \quad (۳-۴.۱۶)$$

از کل انرژی که جزء سطح  $dA_1$  را تحت زاویه  $\theta_1$  ترک می‌کند، فقط کسری از آن که از نسبت زیر پیروی می‌کند، به جزء سطح  $dA_2$  می‌رسد:

$$\frac{\left( \begin{array}{l} \text{مساحت تصویر } dA_2 \\ \text{روی صفحه عمود بر } r_{12} \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{l} \text{مساحت حاصل از برخورد زاویه} \\ \text{فضایی } \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1 \text{ با کره‌ای} \\ \text{به شعاع } r_{12} \text{ به مرکز } dA_1 \end{array} \right)} = \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r_{12}^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1} \quad (۴-۴.۱۶)$$

با ضرب کردن این دو عبارت آخر در یکدیگر، نتیجه می‌شود:

$$dQ_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma T_1^f \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r_{12}^2} dA_1 dA_2 \quad (۵-۴.۱۶)$$

این انرژی تابشی گسیل شده توسط جزء سطح  $dA_1$  و دریافت شده توسط جزء سطح  $dA_2$  در واحد زمان است. به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$dQ_{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma T_2^f \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r_{12}^2} dA_1 dA_2 \quad (۶-۴.۱۶)$$

که انرژی تابشی گسیل شده توسط جزء سطح  $dA_2$  و دریافتی توسط جزء سطح  $dA_1$  در واحد زمان است. پس آهنگ خالص انتقال انرژی از  $dA_1$  به  $dA_2$  برابر است با:

$$\begin{aligned} dQ_{12} &= dQ_{1 \rightarrow 2} - dQ_{2 \rightarrow 1} \\ &= \frac{\sigma}{\pi} (T_1^f - T_2^f) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dA_1 dA_2 \end{aligned} \quad (۷-۴.۱۶)$$

بنابراین آهنگ خالص انتقال انرژی از جسم سیاه هم‌دمای ۱ به جسم سیاه هم‌دمای ۲ برابر است با:

$$Q_{12} = \frac{\sigma}{\pi} (T_1^f - T_2^f) \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dA_1 dA_2 \quad (۸-۴.۱۶)$$

در این جا درمی‌یابیم که انتگرال‌گیری به آن دسته از جزء سطح‌های  $dA_1$  و  $dA_2$  محدود می‌شود که کاملاً در معرض دید یکدیگرند. این نتیجه را معمولاً به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$Q_{12} = A_1 F_{12} \sigma (T_1^f - T_2^f) = A_2 F_{21} \sigma (T_1^f - T_2^f) \quad (۹-۴.۱۶)$$

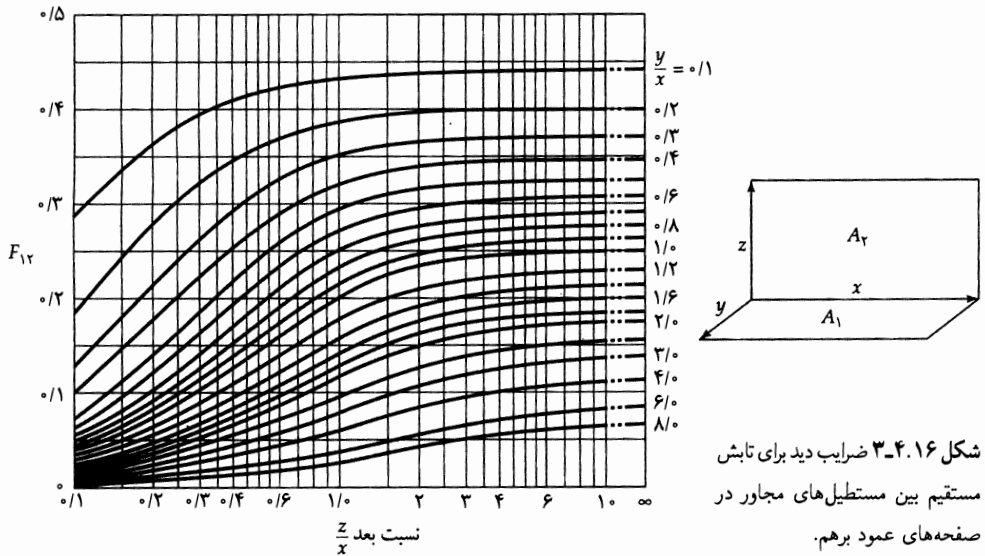
که در آن  $A_1$  و  $A_2$  معمولاً به عنوان سطوح کل جسم‌های ۱ و ۲ انتخاب می‌شوند. کمیت‌های بدون بُعد  $F_{21}$  و  $F_{12}$ ، موسوم به ضرایب دید (یا ضرایب زاویه یا ضرایب پیکربندی)، از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dA_1 dA_2 \quad (۱۰-۴.۱۶)$$

$$F_{21} = \frac{1}{\pi A_2} \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dA_1 dA_2 \quad (۱۱-۴.۱۶)$$

و دو ضریب دید توسط  $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$  به هم مربوط می‌شوند. ضریب دید  $F_{12}$  معرف کسری از تابش است که جسم ۱ را ترک می‌کند و مستقیماً به جسم ۲ می‌رسد.

محاسبه واقعی ضرایب دید کار دشواری است، مگر در وضعیت‌های بسیار ساده. در شکل ۳-۴.۱۶ و شکل ۴-۴.۱۶، بعضی از ضرایب دید برای تابش مستقیم نشان داده شده‌اند. هنگامی که چنین نمودارهایی در دسترس باشند، محاسبات تبادل انرژی توسط معادله (۹-۴.۱۶) آسان می‌شود.



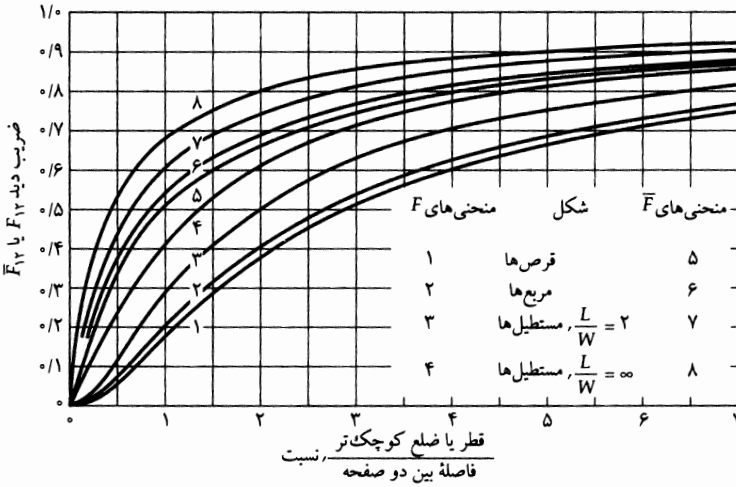
در عملیات بالا، فرض کرده‌ایم که می‌توان از قانون لامبرت و قانون استفان-بولتزمن برای توصیف فرایند انتقال غیرتبادل‌ی استفاده کرد، هرچند این قوانین فقط برای تعادل تابشی معتبرند. به نظر نمی‌رسد خطایی که به این ترتیب ایجاد می‌شود، کاملاً مطالعه شده باشد، اما آشکار است که این فرمول‌ها توصیف کمی خوبی ارائه می‌دهند. تا این جا با برهم‌کنش‌های تابشی بین دو جسم سیاه سروکار داشتیم. اکنون می‌خواهیم مجموعه‌ای از سطوح سیاه ۱، ۲، ...،  $n$  را در نظر بگیریم که جدارهای یک محفظه کامل را تشکیل می‌دهند. دمای این سطوح، به ترتیب،  $T_1, T_2, \dots, T_n$  است. جریان گرمای خالص از هر سطح  $i$  به سطوح محفظه برابر است با:

$$Q_{ie} = \sigma A_i \sum_{j=1}^n F_{ij} (T_i^f - T_j^f) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12-4.16)$$

یا

$$Q_{ie} = \sigma A_i \left( T_i^f - \sum_{j=1}^n F_{ij} T_j^f \right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13-4.16)$$

2. H. C. Hottel and A. F. Sarofim, *Radiative Transfer*, McGraw-Hill, New York (1967).  
 3. H. C. Hottel, Chapter 4 in W. H. McAdams, *Heat Transmission*, McGraw-Hill, New York (1954).  
 4. R. Siegel and J. R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 3rd edition, Hemisphere Publishing Co., New York (1992).



شکل ۴.۱۶-۴ ضرایب دید برای تابش مستقیم بین شکل های همانند مقابل هم، در صفحه های موازی.

در نوشتن صورت دوم، از روابط زیر استفاده کرده ایم:

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14-4.16)$$

جمع های موجود در معادله های (۱۴-۴.۱۶) و (۱۳-۴.۱۶) شامل جمله  $F_{ii}$  هستند که برای هر جسمی که هیچ یک از پرتوهای خود را قطع نمی کند، صفر است. دستگاه  $n$  معادله ای که به صورت معادله (۱۲-۴.۱۶) (یا معادله (۱۳-۴.۱۶)) نشان داده می شود را می توان حل کرد و دماها یا جریان های گرما را طبق داده های موجود به دست آورد.

یکی از جواب های دستگاه معادله های (۱۴-۴.۱۶) و (۱۳-۴.۱۶) که توجه خاصی به آن می شود، جوابی است که به ازای  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = 0$  سطوحی مانند ۳، ۴، ...،  $n$  را «آدیاباتیک» می نامند. در این وضعیت می توان دمای همه سطوح، به استثنای ۱ و ۲ را از محاسبه جریان گرما حذف کرد و جوابی دقیق برای جریان گرمای خالص از سطح ۱ به سطح ۲ به دست آورد:

$$Q_{12} = A_1 \bar{F}_{12} \sigma (T_1^f - T_2^f) = A_2 \bar{F}_{21} \sigma (T_1^f - T_2^f) \quad (15-4.16)$$

مقادیر  $\bar{F}_{12}$  برای کاربرد در این معادله، در شکل (۴-۴.۱۶) نشان داده شده اند. این مقادیر فقط هنگامی به کار می آیند که جدارهای آدیاباتیک از جزء خط های عمود بر سطوح ۱ و ۲ تشکیل شوند.

استفاده از این ضرایب دید  $F$  و  $\bar{F}$  محاسبات مربوط به تابش جسم سیاه را بسیار ساده می کند، به شرط آن که دماهای سطوح ۱ و ۲ یکنواخت باشند. خواننده مشتاق کسب اطلاعات بیش تر در مورد تبادل گرمای تابشی را به مرجع ۴ در همین بخش ارجاع می دهیم.

### مثال ۴.۱۶-۱

برآورد ثابت خورشیدی

شار گرمای تابشی که از خورشید به جو زمین می رسد «ثابت خورشیدی» نام گرفته است و در کاربردهای انرژی خورشیدی، و هم چنین در هواشناسی اهمیت دارد. خورشید را جسم ۱ و زمین را جسم ۲ بنامید و با استفاده

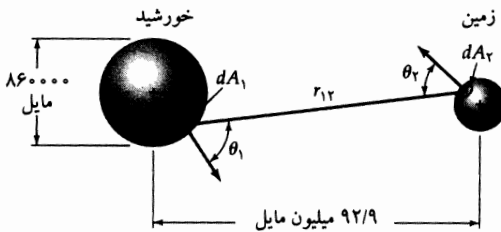
از داده‌های زیر، ثابت خورشیدی را محاسبه کنید: مایل  $D_1 = 8,760 \times 10^5$ ؛ مایل  $r_{12} = 9,729 \times 10^7$ ؛  $q_{b1}^{(e)} = 2,70 \times 10^7 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2$  (از مثال ۱۶-۳).

حل

باتوجه به اصطلاحات به‌کاررفته در معادله (۵-۴.۱۶) و شکل ۵-۴.۱۶، داریم:

$$\begin{aligned} \text{ثابت خورشیدی} &= \frac{dQ_{12}}{\cos \theta_2 dA_2} = \frac{\sigma T_1^4}{\pi r_{12}^2} \int \cos \theta_1 dA_1 \\ &= \frac{\sigma T_1^4}{\pi r_{12}^2} \left( \frac{\pi D_1^2}{4} \right) = \frac{q_{b1}^{(e)}}{4} \left( \frac{D_1}{r_{12}} \right)^2 \\ &= \frac{2,70 \times 10^7}{4} \left( \frac{8,760 \times 10^5}{9,729 \times 10^7} \right)^2 \\ &= 430 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \quad (16-4.16) \end{aligned}$$

این نتیجه با سایر برآوردهای انجام‌شده توافق رضایت‌بخشی دارد. ثابت فرض کردن  $r_{12}$  در انتگرال‌ده در این‌جا مجاز است، زیرا فاصله  $r_{12}$  در روی سطح مرئی خورشید کم‌تر از ۰/۵٪ تغییر می‌کند. انتگرال باقی‌مانده، یعنی  $\int \cos \theta_1 dA_1$  سطح تصویرشده خورشید از دید ناظر زمینی، یا بسیار نزدیک به  $\pi D_1^2/4$  است.



شکل ۵-۴.۱۶ برآورد ثابت خورشیدی.

### مثال ۲-۴.۱۶

انتقال گرمای تابشی بین دیسک‌ها

دو دیسک سیاه به قطر ۲ ft مستقیماً و به فاصله ۴ ft در مقابل یکدیگر قرار دارند. دیسک ۱ در دمای  $2000^\circ\text{R}$  و دیسک ۲ در دمای  $1000^\circ\text{R}$  نگه داشته می‌شود. مطلوب است محاسبه جریان گرما بین دو دیسک (الف) وقتی سطح دیگری موجود نباشد، و (ب) وقتی دو دیسک توسط سطح سیاه استوانه‌ای قائم آدیاباتیک به هم متصل شوند.

حل

(الف) از معادله (۹-۴.۱۶) و منحنی ۱ در شکل ۴-۴.۱۶ داریم:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \\ &= \pi (0,706) (0,1712 \times 10^{-8}) [(2000)^4 - (1000)^4] \\ &= 4,83 \times 10^7 \text{ Btu/hr} \quad (17-4.16) \end{aligned}$$

(ب) از معادله (۱۵-۴.۱۶) و منحنی ۵ در شکل ۴-۴.۱۶ داریم:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= A_1 \bar{F}_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \\ &= \pi (0,34) (0,1712 \times 10^{-8}) [(2000)^4 - (1000)^4] \\ &= 27,4 \times 10^3 \text{ Btu/hr} \end{aligned} \quad (18-4.16)$$

### ۵.۱۶ تابش بین اجسام غیرسیاه در دماهای مختلف

به طور اصولی، تابش بین دو سطح غیرسیاه را می توان با تحلیل دیفرانسیلی پرتوهای گسیل یافته و مؤلفه های بازتاب یافته متوالی آن ها بررسی کرد. این کار برای سطوح نزدیک به جسم سیاه امکان پذیر است، زیرا فقط یک یا دو بازتاب را باید در نظر گرفت. اما در مورد سطوح بسیار بازتاب گر، این تحلیل پیچیده می شود و توزیع پرتوهای گسیل شده و بازتاب یافته، از لحاظ زاویه و طول موج، معمولاً با دقت کافی برای انجام محاسبه تفصیلی معلوم نیست.

برای سطوح محدب کوچک واقع در محفظه ای بزرگ و تقریباً هم دما (یعنی «کاواک»)، مانند لوله حاوی بخار در اتاقی که دیوارهای آن دمای ثابتی دارند، امکان پذیر است. آهنگ گسیل انرژی از سطح غیرسیاه ۱ به محفظه اطراف آن، ۲، از رابطه زیر به دست می آید:

$$Q_{1\rightarrow} = e_1 A_1 \sigma T_1^4 \quad (1-5.16)$$

و آهنگ جذب انرژی از محیط اطراف توسط سطح ۱ برابر است با:

$$Q_{\rightarrow 1} = a_1 A_1 \sigma T_1^4 \quad (2-5.16)$$

در این جا از این نکته استفاده کرده ایم که تابش برخوردی به سطح ۱ بسیار نزدیک به تابش کاواکی یا تابش جسم سیاه متناظر با دمای  $T_1$  است. چون  $A_1$  محدب است، هیچ یک از پرتوهای خود را دریافت نمی کند؛ بنابراین  $F_{12}$  را برابر واحد گرفته ایم. بنابراین آهنگ تابش خالص از  $A_1$  به محیط اطراف برابر است با:

$$Q_{12} = \sigma A_1 (e_1 T_1^4 - a_1 T_1^4) \quad (3-5.16)$$

در معادله (۳-۵.۱۶)،  $e_1$  مقدار ضریب گسیل سطح ۱ در دمای  $T_1$  است. ضریب جذب  $a_1$  را معمولاً به صورت مقدار  $e$  در دمای  $T_2$  تخمین می زنند.

سپس محفظه ای را در نظر می گیریم که از  $n$  سطح خاکستری، کدر، و پخشی-بازتابی  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  در دماهای  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$  تشکیل شده است. با دنبال کردن روش اوینهایم<sup>۱</sup>، پرتوتابی را به صورت مجموع شارهای انرژی تابشی گسیل شده و بازتاب یافته از سطح  $A_i$  تعریف می کنیم. بنابراین جریان تابشی خالص از  $A_i$  به  $A_k$  چنین بیان می شود:

$$Q_{ik} = A_i F_{ik} (J_i - J_k) \quad i, k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4-5.16)$$

یعنی، با معادله (۹-۴.۱۶) بیان می شود که در آن پرتوتابی های  $J_i$  جایگزین توان های گسیل جسم سیاه،  $\sigma T_i^4$  شده اند.

1. A. K. Oppenheim, *Trans. ASME*, **78**, 725-735 (1956);

برای آشنایی با کارهای قدیمی تر، نگاه کنید به

G. Poljak, *Tech. Phys. USSR*, **1**, 555-590 (1935).

از تعریف  $J_i$  برای سطح کدر، نتیجه می‌شود:

$$J_i = (1 - e_i)I_i + e_i\sigma T_i^f \quad (5-5.16)$$

که در آن  $I_i$  شار تابشی رسیده به سطح  $I_i$  است. با حذف  $A_i$  در مقابل شار تابشی خالص  $Q_{ie}/A_i$  از  $A_i$  به داخل محفظه، نتیجه می‌شود:

$$\frac{Q_{ie}}{A_i} = J_i - I_i = J_i - \frac{J_i - e_i\sigma T_i^f}{1 - e_i} \quad (6-5.16)$$

و از آن‌جا:

$$\frac{Q_{ie}}{A_i} = \frac{e_i}{1 - e_i}(\sigma T_i^f - J_i) \quad (7-5.16)$$

سرانجام از موازنه انرژی حالت پایا روی هر سطح، نتیجه می‌شود:

$$Q_i = Q_{ie} = \sum_{k=1}^n Q_{ik} \quad (8-5.16)$$

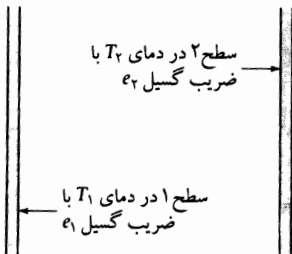
در این جا  $Q_i$  آهنگ اضافه شدن گرمای سطح  $A_i$  از راه‌های غیرتابشی است.

معادله‌های نظیر معادله‌های (۱۶-۵.۴، ۷، ۸) در تحلیل مدارهای جریان مستقیم، براساس قانون رسانش اهم و قانون پایستگی بار الکتریکی کیرشهوف، ظاهر می‌شوند. بنابراین قیاس زیر را داریم:

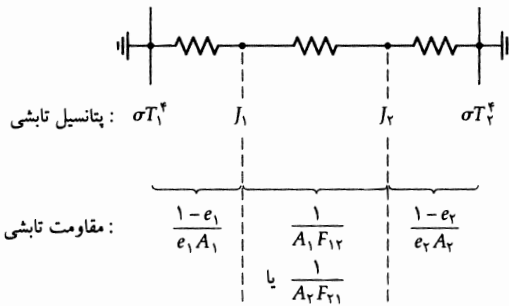
تابشی	الکتریکی
$Q$	جریان
$J$ یا $\sigma T^f$	ولتاژ
$(1 - e_i)/e_i A_i$ یا $1/A_i F_{ij}$	مقاومت

این قیاس به ما کمک می‌کند که مدارهای هم‌ارز را، برای تجسم مسئله‌های ساده تابش در محفظه ترسیم کنیم. مثلاً سیستم نشان داده شده در شکل ۱۵-۱۶ مدار هم‌ارزی مطابق شکل ۱۶-۵.۲ دارد، به طوری که آهنگ انتقال گرمای تابشی خالص برابر است با:

$$Q_{12} = \frac{\sigma(T_1^f - T_2^f)}{\frac{1-e_1}{e_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1-e_2}{e_2 A_2}} \quad (9-5.16)$$



شکل ۱۵-۱۶ تابش بین دو سطح خاکستری نامتناهی و موازی.



شکل ۲-۵.۱۶ مدار هم‌ارز سیستم نشان داده شده در شکل ۱-۵.۱۶

جواب میان‌بر خلاصه شده به صورت معادله (۱۶-۴-۱۵) را به محفظه‌هایی با دیوارهای غیرسیاه نیز تعمیم داده‌اند و در نتیجه معادله:

$$Q_{12} = A_1 \bar{F}_{12} (J_1 - J_2) \quad (۱۰-۵.۱۶)$$

به جای معادله (۸-۵.۱۶) برای محفظه‌ای با  $Q_i = 0$ ، به ازای  $i = 2, 3, \dots, n$  به دست آمده است. این نتیجه مانند معادله (۹-۵.۱۶) است، با این تفاوت که به جای  $F_{12}$  باید از  $\bar{F}_{12}$  استفاده کرد تا مسیرهای غیرمستقیم از  $A_1$  به  $A_2$  را نیز شامل شود و در نتیجه آهنگ انتقال گرمای بزرگ‌تری به دست آید.

### مثال ۱-۵.۱۶

سپرهای تابش مطلوب است تعیین عبارتی برای کاهش انتقال گرمای تابشی بین دو صفحه خاکستری با سطح برابر  $A$ ، هنگامی که یک ورق خاکستری نازک موازی، با رسانندگی گرمایی بسیار بالا، مطابق شکل ۳-۵.۱۶، بین آن‌ها تعبیه شود.

حل

آهنگ تابش بین صفحه‌های ۱ و ۲ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q_{12} = \frac{A\sigma(T_1^f - T_2^f)}{\frac{1-e_1}{e_1} + 1 + \frac{1-e_2}{e_2}} = \frac{A\sigma(T_1^f - T_2^f)}{\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1} \quad (۱۱-۵.۱۶)$$

چون هر دو صفحه سطح مساوی  $A$  دارند، ضریب دید برابر واحد است. به همین ترتیب، انتقال گرما بین صفحه‌های ۲ و ۳ برابر است با:

$$Q_{23} = \frac{A\sigma(T_2^f - T_3^f)}{\frac{1-e_2}{e_2} + 1 + \frac{1-e_2}{e_2}} = \frac{A\sigma(T_2^f - T_3^f)}{\frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_2} - 1} \quad (۱۲-۵.۱۶)$$

این دو معادله آخر را می‌توان باهم ترکیب کرد تا دمای سپر تابش،  $T_2$ ، حذف شود:

$$Q_{12} \left( \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1 \right) + Q_{23} \left( \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_2} - 1 \right) = A\sigma(T_1^f - T_2^f) \quad (۱۳-۵.۱۶)$$

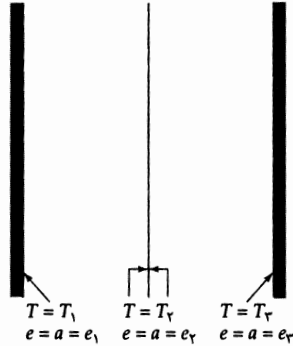
بنابراین، چون  $Q_{12} = Q_{23} = Q_{13}$ ، نتیجه می‌شود:

$$Q_{13} = \frac{A\sigma(T_1^f - T_2^f)}{\left( \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1 \right) + \left( \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_2} - 1 \right)} \quad (۱۴-۵.۱۶)$$



سرانجام، نسبت انتقال انرژی تابشی با سپر، به انتقال انرژی تابشی بدون سپر، برابر است با:

$$\frac{(Q_{12})_{\text{با سپر}}}{(Q_{12})_{\text{بدون سپر}}} = \frac{\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1\right)}{\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_2} - 1\right)} \quad (15-5.16)$$



شکل ۳-۵.۱۶ سپر تابش.

### مثال ۲-۵.۱۶

تلفات گرمای تابشی و همرفتی آزاد از یک لوله افقی

مطلوب است پیش‌بینی آهنگ کل اتلاف گرما، از طریق تابش و همرفت آزاد، از واحد طول لوله‌ای افقی که با آبست پوشانده شده‌است. قطر خارجی عایق ۶ in. است. سطح خارجی عایق در دمای  $56^\circ\text{R}$ ، و دیوارها و هوای اتاق در دمای  $54^\circ\text{R}$  است.

حل

سطح خارجی عایق را سطح ۱ و دیوارهای اتاق را سطح ۲ بنامید. در این صورت از معادله (۳-۵.۱۶) نتیجه می‌شود:

$$Q_{12} = \sigma A_1 F_{12} (e_1 T_1^4 - a_1 T_2^4) \quad (16-5.16)$$

چون سطح لوله محدب است و کاملاً توسط سطح ۲ پوشانده شده،  $F_{12}$  برابر واحد است. از جدول ۱-۲.۱۶، داریم  $e_1 = 0.93$  در دمای  $56^\circ\text{R}$  و  $a_1 = 0.93$  در دمای  $54^\circ\text{R}$ . با قرار دادن مقادیر عددی در معادله (۱۶-۵.۱۶)، برای هر فوت از لوله، داریم:

$$Q_{12} = (0.1712 \times 10^{-8})(\pi/2)(1/0)[0.93(56^\circ)^4 - 0.93(54^\circ)^4] \quad (17-5.16)$$

$$= 33 \text{ Btu/hr}$$

با اضافه کردن اتلاف همرفتی گرما از مثال ۱-۶.۱۴، اتلاف گرمای کل به دست می‌آید:

$$Q = Q^{(\text{conv})} + Q^{(\text{rad})} = 16 + 33 = 49 \text{ Btu/hr} \quad (18-5.16)$$

توجه کنید که در این وضعیت، بیش از نیمی از اتلاف گرما، از تابش ناشی می‌شود. اگر سیال شفاف نبود، فرایندهای همرفت و تابش مستقل از هم نبودند و نمی‌توانستیم سهم‌های همرفتی و تابشی را مستقیماً با هم جمع کنیم.

مثال ۳-۵.۱۶

تابش و همرفت مرکب

جسمی که مستقیماً در معرض آسمان صاف شب قرار دارد با تابش به فضای خارج، تا کم‌تر از دمای محیط سرد می‌شود. از این اثر می‌توان برای منجمد کردن آب در تشت‌های کم‌عمقی که به‌خوبی از زمین عایق شده‌اند، استفاده کرد. حداکثر دمای هوایی را که در آن انجماد امکان‌پذیر است، تخمین بزنید؛ از تبخیر چشم‌پوشی کنید.

حل

به عنوان تقریب اول، می‌توان فرض‌های زیر را اختیار کرد:

(الف) همه گرمایی که آب دریافت می‌کند، از طریق همرفت آزاد از هوای محیط است که ساکن فرض می‌شود.

(ب) اثر گرمایی تبخیر یا چگالش آب چشم‌گیر نیست.

(ج) حالت پایا حاصل می‌شود.

(د) مقطع تشت آب مربع است.

(ه) پس‌تابش از جو نادیده گرفته می‌شود.

حداکثر دمای مجاز هوا در سطح آب برابر است با:  $T_1 = 492^\circ\text{R}$ . آهنگ اتلاف گرما از طریق تابش برابر است با:

$$Q^{(\text{rad})} = \sigma A_1 \epsilon_1 T_1^4 = (0.1712 \times 10^{-8})(L^2)(0.95)(492)^4 \\ = 95L^2 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \quad (19-5.16)$$

که در آن  $L$  طول یک ضلع از تشت است.

برای به‌دست آوردن گرمای دریافتی از طریق همرفت، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$Q^{(\text{conv})} = hL^2(T_{\text{هوآ}} - T_{\text{آب}}) \quad (20-5.16)$$

که در آن  $h$  ضریب انتقال گرما برای همرفت آزاد است. برای سرمایش هوای جو توسط یک مربع افقی روبه‌بالا، ضریب انتقال گرما از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$h = 0.72(T_{\text{هوآ}} - T_{\text{آب}})^{1/4} \quad (21-5.16)$$

که در آن  $h$  برحسب  $\text{Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F}$  بیان می‌شود و دما برحسب درجه رانکین است.

هرگاه عبارت‌های مربوط به اتلاف گرما از طریق تابش و دریافت گرما از طریق همرفت آزاد را باهم مساوی

بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$95L^2 = 0.72L^2(T_{\text{هوآ}} - 492)^{5/4} \quad (22-5.16)$$

باتوجه به رابطه اخیر درمی‌یابیم که حداکثر دمای هوا می‌تواند  $63^\circ\text{R}$  یا  $17^\circ\text{F}$  باشد. به‌استثنای شرایطی که در بیابان حاکم است، پس‌تابش و چگالش رطوبت هوای محیط سبب می‌شود که دمای لازم برای هوا به‌شدت پایین بیاید. برای آشنایی با شرایط واقعی‌تر به مسئله ۲۲.ب.۴ و مثال ۲۰-۵.۱۹ رجوع کنید.

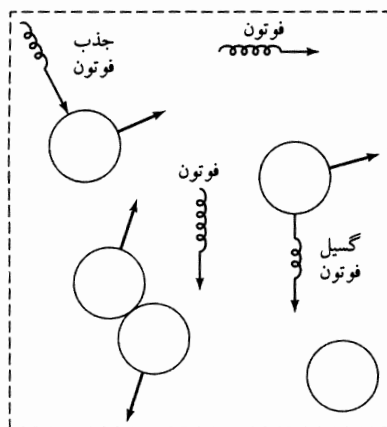
### ۶.۱۶ انتقال انرژی تابشی در محیط‌های جاذب<sup>۱</sup>

روش‌هایی که در بخش‌های قبل ارائه شد، فقط در مورد موادی قابل‌کاربرد است که کاملاً شفاف یا کاملاً کدر باشند. برای توصیف انتقال انرژی در محیط‌های غیرشفاف، معادله‌های دیفرانسیل را برای آهنگ موضعی تغییر انرژی از هردو دیدگاه ماده و تابش می‌نویسیم. یعنی محیط مادی را که تابش الکترومغناطیسی از آن می‌گذرد، به صورت دو «فاز» هم‌زیست تلقی می‌کنیم: یک «فاز مادی»، تشکیل شده از همهٔ جرم‌های موجود در سیستم، و یک «فاز فوتونی»، تشکیل شده از تابش الکترومغناطیسی.

در فصل ۱۱ معادلهٔ موازنهٔ انرژی را برای سیستمی بدون تابش ارائه دادیم. در این جا معادلهٔ (۱۶-۲-۱۱) را به فاز مادی تعمیم می‌دهیم تا انرژی مبادله‌شده با فاز فوتونی، از طریق فرایندهای تابش و جذب نیز به حساب آورده شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \hat{U} = -(\nabla \cdot \rho \hat{U} \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot p \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) - (\mathcal{E} - \mathcal{A}) \quad (۱۶-۶)$$

در این جا  $\mathcal{E}$  و  $\mathcal{A}$  را معرفی کرده‌ایم که، به ترتیب، عبارت‌اند از: آهنگ کل گسیل فوتون و جذب فوتون در واحد حجم. یعنی  $\mathcal{E}$  معرف اتلاف انرژی توسط فاز مادی، بر اثر گسیل فوتون توسط مولکول‌ها، و  $\mathcal{A}$  معرف جذب موضعی انرژی توسط فاز مادی، بر اثر جذب فوتون توسط مولکول‌هاست (نگاه کنید به شکل ۱۶-۶-۱). در معادلهٔ (۱۶-۶-۱)،  $\mathbf{q}$  شار گرمای رسانشی است که از قانون فوری به دست می‌آید.



شکل ۱۶-۶-۱ جزء حجمی که موازنهٔ انرژی برای آن نوشته می‌شود؛ دایره‌ها معرف مولکول‌اند.

برای «فاز فوتونی» می‌توان معادله‌ای نوشت که آهنگ موضعی تغییر چگالی انرژی تابشی،  $u^{(r)}$  را توصیف کند:

$$\frac{\partial}{\partial t} u^{(r)} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}^{(r)}) + (\mathcal{E} - \mathcal{A}) \quad (۲-۶-۱۶)$$

که در آن  $q^{(r)}$  شار انرژی تابشی است. این معادله را می‌توان با نوشتن موازنهٔ انرژی تابشی برای جزء حجم ثابت در فضا به دست آورد. توجه کنید که معادلهٔ (۲-۶-۱۶) جملهٔ همرفتی ندارد، زیرا فوتون‌ها مستقل از سرعت موضعی ماده حرکت می‌کنند. به علاوه توجه شما را به این نکته جلب می‌کنیم که جملهٔ  $(\mathcal{E} - \mathcal{A})$  در معادله‌های (۱۶-۶-۱ و ۲)

1. G. C. Pomraning, *Radiation Hydrodynamics*, Pergamon Press, New York (1973); R. Siegel and J. R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 3rd edition, Hemisphere Publishing Co., New York (1992).

با علامت‌های مخالف ظاهر می‌شود که حاکی از این است که انرژی تابشی خالصی، به‌بهای کاهش انرژی مولکولی، جذب می‌شود. معادله (۶.۱۶-۲) را می‌توان برای انرژی تابشی در گستره بسامد  $\nu + d\nu$  نیز نوشت:

$$\frac{\partial u_\nu^{(r)}}{\partial t} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}_\nu^{(r)}) + (\mathcal{E}_\nu - \mathcal{A}_\nu) \quad (۳-۶.۱۶)$$

این عبارت با مشتق‌گیری از معادله (۶.۱۶-۲) نسبت به  $\nu$  به دست می‌آید. به منظور ساده کردن بحث، سیستم غیرجریانی حالت پایایی را در نظر می‌گیریم که در آن تابش فقط در جهت  $z$  مثبت حرکت می‌کند. چنین سیستمی را می‌توان با گذراندن باریکه نور موازی شده از محلولی در دمایی به اندازه کافی پایین برای بی‌اهمیت شدن گسیل توسط محلول، به خوبی تقریب زد. (اگر گسیل اهمیت داشته باشد، باید تابش را در همه جهت‌ها در نظر گرفت.) این شرایطی است که معمولاً در طیف‌سنجی با آن روبه‌رو می‌شویم. برای چنین سیستمی، معادله‌های (۶.۱۶-۱ و ۶.۱۶-۲) چنین نوشته می‌شوند:

$$\circ = -\frac{d}{dz} q_z + \mathcal{A} \quad \circ = -\frac{d}{dz} q_z^{(r)} - \mathcal{A} \quad (۵, ۴-۶.۱۶)$$

برای استفاده از این معادله‌ها، به اطلاعاتی دربارهٔ آهنگ جذب حجمی  $\mathcal{A}$  نیاز داریم. عبارت قراردادی برای باریکه‌ای بدون جهت، چنین است:

$$\mathcal{A} = m_a q_z^{(r)} \quad (۶-۶.۱۶)$$

که در آن  $m_a$  جذب‌کنندگی نامیده می‌شود. اساساً این معادله نشان می‌دهد که آهنگ جذب فوتون با غلظت فوتون‌ها متناسب است.

### مثال ۶.۱۶

جذب باریکه تابش تک‌فام  
باریکه تابش تک‌فام با بسامد  $\nu$ ، که به موازات محور  $z$  متمرکز شده، از سیالی جاذب عبور می‌کند. آهنگ موضعی جذب انرژی از رابطه  $m_{av} q_\nu^{(r)}$  به دست می‌آید که در آن  $m_{av}$  جذب‌کنندگی برای تابشی با بسامد  $\nu$  است. مطلوب است تعیین توزیع شار تابشی  $q_\nu^{(r)}(z)$  در سیستم.

حل

از شکست و پراکندگی باریکه تابیده چشم‌پوشی می‌کنیم. به علاوه، فرض می‌کنیم مایع سرد می‌شود، بنابراین از بازتابش نیز می‌توان چشم‌پوشی کرد. در این صورت، معادله (۶.۱۶-۵) برای حالت پایا چنین نوشته می‌شود:

$$\circ = -\frac{d}{dz} q_\nu^{(r)} - m_{av} q_\nu^{(r)} \quad (۷-۶.۱۶)$$

با انتگرال‌گیری نسبت به  $z$  نتیجه می‌شود:

$$q_\nu^{(r)}(z) = q_\nu^{(r)}(\circ) \exp(-m_{av} z) \quad (۸-۶.۱۶)$$

این قانون جذب لامبرت است،<sup>۲</sup> که در طیف نورسنجی کاربرد گسترده‌ای دارد. برای هر ماده خالص مفروض،  $m_{av}$  به‌شیوه خاصی به  $\nu$  وابسته است. بنابراین شکل طیف جذب، ابزار سودمندی برای تحلیل کیفی است.

2. J. H. Lambert, *Photometria*, Augsburg (1760).

## پرسش‌های تشریحی

۱. «قوانین نام‌دار» این فصل مهم‌اند. محتوای فیزیکی قوانین منسوب به نام‌های «علمی» زیر را تشریح کنید: استفان و بولتزمن، پلانک، کیرشهوف، لامبرت، و وین.
۲. قانون استفان-بولتزمن و قانون جابه‌جایی وین، با قانون توزیع جسم سیاه پلانک چه رابطه‌ای دارند؟
۳. آیا جسم سیاه وجود دارد؟ چرا مفهوم جسم سیاه سودمند است؟
۴. در بازتاب آینه‌ای، زاویهٔ فرود با زاویهٔ تابش برابر است. رابطهٔ این زوایا در حالت بازتاب پخشی چیست؟
۵. مفهوم فیزیکی ضریب دید چیست و چگونه می‌توان آن را محاسبه کرد؟
۶. واحدهای  $q^{(e)}$ ،  $q_{\nu}^{(e)}$  و  $q_{\lambda}^{(e)}$  را نام ببرید.
۷. تحت چه شرایطی اثر شکل هندسی بر تبادل گرمای تابشی را می‌توان به‌طور کامل برحسب ضریب دید بیان کرد؟
۸. کدامیک از معادله‌های این فصل نشان می‌دهند که روشنایی ظاهری جسم سیاه با دمای سطحی یکنواخت، از مکان (فاصله و جهت) دیده شدن آن از پشت محیطی شفاف، مستقل است؟
۹. رابطهٔ نظیر معادلهٔ (۳-۱۶) برای گاز تک‌اتمی ایده‌آل کدام است؟
۱۰. سازگاری ابعادی معادلهٔ (۳-۱۶) را واریسی کنید.

## مسئله‌ها

- ۱۶ الف. ۱. تقریب زدن جسم سیاه با سوراخی در کره. کره‌ای نازک از مس، که سطح داخلی آن به‌شدت اکسید شده است، قطری برابر ۶ اینچ دارد. اندازهٔ سوراخی که در کره ایجاد می‌کنیم چه قدر باشد تا حفره‌ای با ضریب جذب ۰/۹۹ ایجاد شود؟  
جواب: شعاع =  $0.7^{\circ}$  in.
- ۱۶ الف. ۲. بازده موتور خورشیدی. وسیله‌ای برای استفاده از انرژی خورشیدی که توسط ابوت<sup>۱</sup> ابداع شد از یک آینهٔ سهموی تشکیل شده است که نور دریافتی از خورشید را روی لوله‌ای از جنس پیرکس متمرکز می‌کند که حاوی مایع تقریباً سیاه، با نقطهٔ جوش بالا است. این مایع در یک مبادله‌کن گرما گردش می‌کند که در آن انرژی به آب فوق داغ تحت فشار ۲۵ atm انتقال می‌یابد. بخار را می‌توان از مبادله‌کن بیرون کشید و برای به‌کار انداختن یک موتور مصرف کرد. طرحی کارآمد به آینه‌ای به قطر ۱۰ ft نیاز دارد تا هنگامی که محور آینه مستقیماً به سمت خورشید است، توانی معادل ۲ hp تولید کند. بازده کلی این دستگاه چه قدر است؟  
جواب: ۱۵٪.
- ۱۶ الف. ۳. شرایط گرمایش تابشی. یک انباری به شکل مستطیل، با مساحت کف  $30 \times 15$  ft و بامی به ارتفاع ۷/۵ ft از کف، مفروض است. کف انباری با عبور آب گرم از داخل کویل گرم می‌شود. در روزهای سرد زمستان، دمای دیوارهای خارجی و بام انباری به  $10^{\circ}\text{F}$  - می‌رسد. گرما با چه آهنگی باید به کف انباری برسد تا دمای آن در  $75^{\circ}\text{F}$  ثابت بماند؟ (همهٔ سطوح این سیستم را سیاه فرض کنید).

1. C. G. Abbot, in *Solar Energy Research* (F. Daniels and J. A. Duffie, eds.), University of Wisconsin Press, Madison (1955), pp. 91-95; see also U. S. Patent No. 2, 460, 482 (Feb. 1, 1945).

۱۶ الف ۴. دمای حالت پایایی بام. حداکثر دمای بام تختی در عرض  $45^\circ$  شمالی را در روز ۲۱ ژوئن و در هوای صاف تخمین بزنید. از تابش دریافتی از منابعی غیر از خورشید می‌توان چشم‌پوشی کرد و ضریب انتقال گرمای همرفتی را  $2/0 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2$  در نظر گرفت. می‌توان حداکثر دمای هوای محیط را  $100^\circ\text{F}$  فرض کرد. می‌توان از ثابت خورشیدی مثال ۱۶-۴ استفاده کرد و جذب و پراکنده‌سازی پرتوهای خورشید توسط جو را نادیده گرفت.

(الف) این مسئله را برای یک بام کاملاً سیاه حل کنید.

(ب) این مسئله را برای بامی با پوشش آلومینیم و ضریب جذب  $0/3$  برای تابش خورشیدی و ضریب گسیل  $0/7$  در دمای بام، حل کنید.

۱۶ الف ۵. خطاهای تابشی در اندازه‌گیری‌های دما. دمای جریان هوای عبوری از یک کانال را با استفاده از ترموکوپل اندازه‌گیری می‌کنیم. سیم‌ها و اتصال ترموکوپل استوانه‌های به قطر  $0/5 \text{ in}$  فرض می‌شوند و در عرض کانال، در امتداد عمود بر جهت جریان تعبیه شده‌اند و اتصال ترموکوپل در مرکز کانال است. با فرض این‌که ضریب گسیل اتصال  $e = 0/8$ ، دمای جریان گاز را، با استفاده از داده‌های زیر که تحت شرایط پایا به دست آمده‌اند، تخمین بزنید:

$$\text{دمای اتصال ترموکوپل} = 500^\circ\text{F}$$

$$\text{دمای جدار کانال} = 300^\circ\text{F}$$

$$\text{ضریب انتقال گرمای همرفتی از سیم به هوا} = 50 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{F}$$

دمای جدار کانال، تا مسافتی به اندازه  $20$  برابر قطر آن، در بالادست و پایین دست ترموکوپل، ثابت فرض می‌شود. سیم‌های ترموکوپل طوری مستقر شده‌اند که بتوان از اثر رسانش گرما در طول آن‌ها، بر دمای اتصال، چشم‌پوشی کرد.

۱۶ الف ۶. دماهای سطح ماه.

(الف) دمای سطح کره ماه را در نزدیک‌ترین نقطه به خورشید، با استفاده از موازنه حالت شبه پایایی انرژی تابش تخمین بزنید؛ سطح ماه را کره‌ای خاکستری فرض کنید. از تابش و بازتابش سیارات دیگر چشم‌پوشی کنید. ثابت خورشیدی در زمین در مثال ۱۶-۴ داده شده است.

(ب) قسمت (الف) را تعمیم دهید تا دمای سطح ماه به صورت تابعی از جابه‌جایی زاویه‌ای از داغ‌ترین نقطه به دست آید.

۱۶ ب ۱. دمای مرجع برای ضریب گسیل مؤثر. نشان دهید که هرگاه ضریب گسیل به طور خطی با دما افزایش یابد، معادله (۱۶-۵-۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Q_{12} = e_1 \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (16-1-1)$$

که در آن  $e_1$  ضریب گسیل سطح ۱ است که در دمای مرجع  $T^0$  محاسبه شده و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T^0 = \frac{T_1^0 - T_2^0}{T_1^4 - T_2^4} \quad (16-1-2)$$

۱۶.۲ تابش در فضایی حلقوی. عبارتی برای بیان انتقال گرما بین دو استوانهٔ خاکستری طولی هم‌محور ۱ و ۲ به دست آورید. نشان دهید که:

$$Q_{12} = \frac{\sigma(T_1^f - T_2^f)}{\frac{1}{A_1 e_1} + \frac{1}{A_2} \left( \frac{1}{e_2} - 1 \right)} \quad (16.2-1)$$

که در آن  $A_1$  مساحت سطح استوانهٔ داخلی است.

۱۶.۳ سپرهای تابشی مضاعف.

(الف) معادله‌ای برای بیان آهنگ انتقال گرمای تابشی در مجموعه‌ای از  $n$  ورق فلزی بسیار نازک، تخت و موازی به دست آورید که وقتی ورق اول در دمای  $T_1$  و ورق  $n$ م در دمای  $T_n$  است، هریک ضریب گسیل متفاوت  $e$  دارد. جواب خود را برحسب مقاومت‌های تابشی:

$$R_{i,i+1} = \frac{\sigma(T_i^f - T_{i+1}^f)}{Q_{i,i+1}} \quad (16.3-1)$$

برای هر زوج صفحهٔ متوالی بیان کنید. از آثار لبه و رسانش در فاصلهٔ هوایی بین ورق‌ها چشم‌پوشی کنید.

(ب) نسبت آهنگ انتقال گرمای تابشی را برای  $n$  ورق یکسان، به آهنگ مربوط به دو ورق یکسان، تعیین کنید.

(ج) جواب‌های خود را برای سه ورق، با جواب به دست آمده در مثال ۱۶.۵-۱ مقایسه کنید.

کاهش چشم‌گیر آهنگ‌های انتقال گرمای ایجادشده توسط تعدادی سپر تابش متوالی، با استفاده از لایه‌های مضاعف روی فویل‌های فلزی، برای عایق‌کاری دماهای بالا منتهی شده است.

۱۶.۴ تابش و رسانش در محیط‌های جاذب. تیغه‌ای شیشه‌ای، که به صفحه‌های  $z = 0$  و  $z = \delta$  محدود شده است،

درجهت‌های  $x$  و  $y$  بعد نامتناهی دارد. دماهای این سطوح در  $z = 0$  و  $z = \delta$ ، به ترتیب،  $T_0$  و  $T_\delta$  است و

ثابت نگه داشته می‌شود. تابش تک‌فام یکنواختی با شدت  $q_0^{(r)}$  درجهت  $z$  به سطح واقع در  $z = 0$  برخورد

می‌کند. گسیل در داخل تیغه، بازتاب و تابش فرودی درجهت منفی  $z$  را می‌توان نادیده گرفت.

(الف) توزیع دما در تیغه را، با فرض ثابت بودن  $m_a$  و  $k$ ، تعیین کنید (نگاه کنید به بخش ۱۶.۶).

(ب) رابطهٔ شار گرمای رسانشی  $q_z$  با  $m_a$  چیست؟

۱۶.۵ سرمایه‌گذاری جسم سیاه در خلأ. جسم سیاه نازکی با رسانندگی گرمایی بسیار بالا و حجم  $V$ ، سطح  $A$ ، چگالی  $\rho$ ،

و ظرفیت گرمایی  $\hat{C}_p$  مفروض است. در زمان  $t = 0$ ، این جسم که ابتدا دمایی برابر  $T_1$  دارد، در محفظه‌ای

سیاه قرار داده می‌شود که جدارهای آن همواره در دمای  $T_2$  نگه داشته می‌شوند ( $T_2 < T_1$ ). رابطه‌ای برای

بیان دمای  $T(t)$  جسم سیاه به دست آورید.

۱۶.۶ اتلاف گرما از لولهٔ عایق‌کاری شده. یک لولهٔ فولادی افقی نمرة  $40^\circ$  دواینچی (قطر داخلی ۲۷.۰۶۷ in؛ ضخامت

جدار ۰.۱۵۴ in؛  $k = 26 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$ ) که حامل بخار است با ۲ in. اکسید منیزیم ۸۵٪ عایق‌کاری

شده است ( $k = 0.4 \text{ Btu/hr} \cdot \text{ft} \cdot \text{F}$ ) و لایه‌ای از فویل آلومینیمی تمیز ( $e = 0.5$ ) را محکم دور آن

پیچیده‌اند. در اطراف لوله هوا با دمای  $80^\circ \text{F}$  و فشار ۱ atm وجود دارد و دمای سطح داخلی لوله  $250^\circ \text{F}$  است.

(الف) جریان گرمای رسانشی در واحد طول،  $Q^{(\text{cond})}/L$  در جدار لوله و عایق را، در دماهای مفروض

$T_1 = 100^\circ \text{F}$ ، و  $T_2 = 250^\circ \text{F}$  در سطح خارجی فویل آلومینیمی محاسبه کنید.

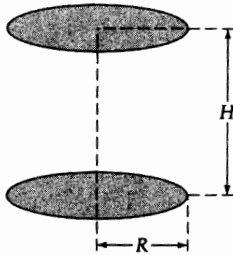
(ب) تلفات گرمای تابشی و همرفتی آزاد،  $Q^{(\text{rad})}/L$  و  $Q^{(\text{conv})}/L$  را، برای همان دماهای مفروض  $T$  در سطح خارجی، محاسبه کنید.

(ج) این نتایج را ترسیم یا برون‌یابی کنید تا مقدار حالت‌پایای  $T$  را به‌ازای  $Q^{(\text{cond})}/L = Q^{(\text{rad})}/L + Q^{(\text{conv})}/L$  به‌دست آورید.

۱.ج.۱۶ محاسبهٔ انتگرال‌های ضریب دید برای یک جفت دیسک (شکل ۱۶.ج.۱). دو دیسک موازی و کاملاً سیاه به‌شعاع  $R$  در فاصلهٔ  $H$  از یکدیگر قرار دارند. مطلوب است محاسبهٔ انتگرال‌های ضریب دید در این حالت؛ نشان دهید که:

$$F_{12} = F_{21} = \frac{1 + 2B^2 - \sqrt{1 + 4B^2}}{2B^2} \quad (16.ج.۱-2)$$

که در آن  $B = R/H$ .



شکل ۱۶.ج.۱ دو دیسک کاملاً سیاه.

۱.د.۱۶ اتلاف گرما از سیم حامل جریان الکتریکی<sup>۳</sup> سیمی به طول  $L$  که با عبور جریان برق گرم می‌شود، گرما را از طریق انتقال تابشی به محیط می‌دهد. اگر سرهای سیم در دمای ثابت  $T$  نگه داشته شوند، عبارتی برای بیان تغییرات محوری در دمای سیم پیدا کنید. می‌توان فرض کرد که سیم در محفظهٔ سیاهی با دمای  $T$  تابش می‌کند.

2. C. Christiansen, *Wiedemann' Ann. d. Physik*, **19**, 267-283 (1883), see also M. Jakob, *Heat Transfer*, Vol. II, Wiley, New York (1957), p. 14.

3. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959), pp. 154-156.



## فصل ۱۷

### نفوذ و مکانیسم‌های انتقال جرم

- ۱.۱۷ قانون فیک برای نفوذ دوتایی (انتقال جرم مولکولی)
- ۲.۱۷ وابستگی ضریب نفوذ به دما و فشار
- ۳.۱۷ نظریه نفوذ در گازها در چگالی پایین
- ۴.۱۷ نظریه نفوذ در مایعات دوتایی
- ۵.۱۷ نظریه نفوذ در سوسپانسیون‌های کلئیدی
- ۶.۱۷ نظریه نفوذ در پلیمرها
- ۷.۱۷ انتقال جرم و انتقال مولی از طریق همرفت
- ۸.۱۷ جمع‌بندی شارهای جرمی و مولی
- ۹.۱۷ معادلات ماکسول-استفان برای نفوذ چندجزئی در گازها در چگالی پایین

در فصل ۱ کار خود را با بیان قانون ویسکوزیته نیوتون آغاز کردیم و در فصل ۹ بحث با قانون رسانش گرمای فوریه شروع شد. در این فصل بحث را با معرفی قانون نفوذ فیک آغاز می‌کنیم که حرکت گونه شیمیایی  $A$  در مخلوط دوتایی  $A$  و  $B$ ، به علت گرادیان غلظت  $A$ ، را توصیف می‌کند.

حرکت یک گونه شیمیایی از ناحیه‌ای با غلظت بالا به ناحیه‌ای با غلظت پایین را می‌توان با انداختن بلور کوچکی از پتاسیم پرمنگنات در بشر حاوی آب مشاهده کرد. پتاسیم پرمنگنات ( $\text{KMnO}_4$ ) به تدریج در آب حل می‌شود و در ناحیه بسیار نزدیک به بلور، محلول بنفش تیره و غلیظ  $\text{KMnO}_4$  مشاهده می‌شود. به علت وجود گرادیان غلظت،  $\text{KMnO}_4$  از بلور دور می‌شود و در آب نفوذ می‌کند. پیشرفت پدیده نفوذ را می‌توان با مشاهده رشد ناحیه بنفش‌رنگ دنبال کرد.

در بخش ۱.۱۷ قانون فیک را برای نفوذ دوتایی بیان، و ضریب نفوذ  $D_{AB}$  برای زوج  $A-B$  را تعریف می‌کنیم. سپس وابستگی ضریب نفوذ به دما و فشار را شرح می‌دهیم. پس از آن نظریه‌های موجود برای پیش‌بینی ضریب نفوذ در گازها، مایعات، کلئیدها، و پلیمرها را جمع‌بندی می‌کنیم. در پایان این فصل انتقال همرفتی جرم از یک گونه شیمیایی را شرح می‌دهیم و به این ترتیب به موازات بحث‌های فصول ۱ و ۹ در مورد انتقال اندازه حرکت و انتقال گرما حرکت می‌کنیم. سیستم واحدهای مولی و نمادگذاری لازم برای توصیف نفوذ در این سیستم را نیز معرفی می‌کنیم.

سرانجام معادله‌های ماکسول-استفان برای گازهای چندجزئی با چگالی پایین را ارائه می‌دهیم. پیش از آغاز بحث قراردادهای زیر را اختیار می‌کنیم. برای نفوذ چندجزئی، گونه‌های شیمیایی را با حروف یونانی کوچک  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  و غلظت‌های آن‌ها را با اندیس‌های متناظر نشان می‌دهیم. برای نفوذ دوتایی از حروف بزرگ ایتالیک  $A$  و  $B$  استفاده می‌کنیم. برای خودنفوذی (نفوذ گونه‌های شیمیایی همانند) گونه‌ها را با نمادهای  $A$  و  $A^*$  نمایش می‌دهیم. گونه «ستاره‌دار»  $A^*$  ممکن است در بعضی از خواص فیزیکی، مثلاً پرتوایی، یا سایر خواص هسته‌ای مانند جرم، گشتاور مغناطیسی، یا اسپین<sup>۱</sup> با گونه  $A$  تفاوت داشته‌باشد. با استفاده از این سیستم نمادگذاری می‌توان با یک نگاه گذرا تشخیص داد که فرمولی مفروض در مورد کدام نوع سیستم قابل کاربرد است.

### ۱.۱۷ قانون فیک برای نفوذ دوتایی (انتقال جرم مولکولی)

صفحه‌ای نازک و افقی از جنس سیلیس گدازیده، به مساحت  $A$  و ضخامت  $\Upsilon$  را در نظر بگیرید. فرض کنید ابتدا (در زمان  $t < 0$ ) هردو سطح افقی صفحه با هوا تماس دارند و فرض می‌کنیم هوا در سیلیس نامحلول است. در زمان  $t = 0$  هوای زیر صفحه را به‌طور ناگهانی با هلیم خالص جایگزین می‌کنیم که به‌طور چشم‌گیری در سیلیس حل می‌شود. در نتیجه حرکت مولکولی، هلیم به تدریج در صفحه نفوذ می‌کند و سرانجام در گاز روی صفحه پدیدار می‌شود. این پدیده انتقال مولکولی یک ماده نسبت به ماده دیگر را نفوذ می‌نامند (این پدیده نفوذ جرمی، نفوذ غلظتی، یا نفوذ عادی نیز نامیده می‌شود). هوای روی صفحه به سرعت جایگزین می‌شود، در نتیجه در این ناحیه هلیم انباشته نمی‌شود. بنابراین با وضعیت نشان داده شده در شکل ۱-۱۷.۱-۱ سرورکار داریم؛ این فرایند شبیه فرایندهایی است که در شکل‌های ۱-۱۰.۱ و ۱-۱۰.۹ توصیف شدند؛ در این شکل‌ها ویسکوزیته و رسانندگی گرمایی را نشان دادیم.

در این سیستم هلیم را «گونه  $A$ » و سیلیس را «گونه  $B$ » می‌نامیم. غلظت‌ها را نیز با «کسرهای جرمی»  $\omega_A$  و  $\omega_B$  نشان خواهیم داد. کسر جرمی  $\omega_A$  برابر است با: جرم هلیم تقسیم بر جرم هلیم به علاوه جرم سیلیس در یک جزء حجم میکروسکوپی مفروض. کسر جرمی  $\omega_B$  نیز تعریف مشابهی دارد.

به ازای زمان  $t$  کوچک‌تر از صفر، کسر جرمی هلیم،  $\omega_A$ ، همه جا با صفر برابر است. به ازای زمان  $t$  بزرگ‌تر از صفر، در سطح زیری صفحه،  $y = 0$ ، کسر جرمی هلیم برابر  $\omega_{A0}$  است. کمیت اخیراً اختلال‌پذیری هلیم در سیلیس است که به صورت کسر جرمی، درست در داخل جامد، تعریف می‌شود. با گذشت زمان توزیع کسر جرمی پدید می‌آید که در آن در سطح زیری صفحه داریم  $\omega_A = \omega_{A0}$  و در سطح رویی صفحه  $\omega_A = 0$ . چنان‌که در شکل ۱-۱۷.۱ نشان داده شده است، با افزایش  $t$  این توزیع به سمت خطی راست میل می‌کند.

در شرایط حالت پایا، جریان جرمی هلیم،  $w_{Ay}$ ، در جهت  $y$  مثبت، با تقریب خوب توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

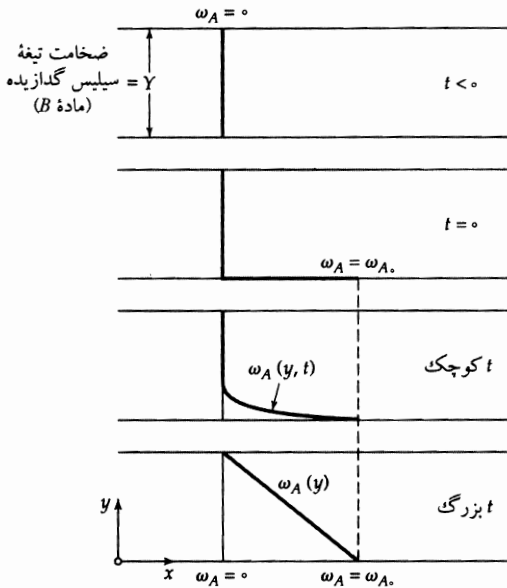
$$\frac{w_{Ay}}{A} = \rho D_{AB} \frac{\omega_{A0} - 0}{\Upsilon} \quad (1-1.17)$$

یعنی آهنگ جریان جرمی هلیم در واحد سطح (یا شار جرمی) با اختلاف کسر جرمی تقسیم بر ضخامت صفحه برابر است. در این رابطه  $\rho$  چگالی سیستم سیلیس-هلیم، و ضریب تناسب  $D_{AB}$  ضریب نفوذ سیستم سیلیس-هلیم است. حال معادله (۱-۱۷.۱) را برای یک جزء دیفرانسیل داخل قاج بازنویسی می‌کنیم:

$$j_{Ay} = -\rho D_{AB} \frac{d\omega_A}{dy} \quad (2-1.17)$$

1. E. O. Stejskal and J. E. Tanner, *J. Chem. Phys.*, **42**, 288-292 (1965); P. Stilbs, *Prog. NMR Spectros*, **19**, 1-45 (1987); P. T. Callaghan and J. Stepišnik, *Adv. Magn. Opt. Reson*, **19**, 325-388 (1996).

که در آن  $w_{Ay}/A$  با  $j_{Ay}$ ، شار جرمی مولکولی هلیوم در جهت  $y$  مثبت، جایگزین شده است. توجه کنید که اندیس نخست،  $A$ ، گونه شیمیایی (در این مورد هلیوم)، و اندیس دوم جهت انجام انتقال نفوذی (در این مورد جهت  $y$ ) را نشان می دهد.



شکل ۱-۱۷ ایجاد توزیع غلظت حالت پایا برای نفوذ هلیوم (ماده A) در سیلیس گدازیده (ماده B). نماد  $\omega_A$  نشانه کسر جرمی هلیوم و نماد  $\omega_{A0}$  نشانه انحلال پذیری هلیوم در سیلیس گدازیده برحسب کسر جرمی است. برای آشنایی با وضعیت های مشابه برای انتقال اندازه حرکت و انتقال گرما به شکل های ۱-۱.۱ و ۱-۱.۹ رجوع کنید.

معادله (۲-۱.۱۷) صورت تک بعدی قانون اول نفوذ فیک است.<sup>۱</sup> این قانون برای هر محلول دوتایی جامد، مایع یا گاز معتبر است، به شرط آن که  $j_{Ay}$  به صورت شار جرمی نسبت به سرعت مخلوط،  $v_y$ ، بیان شود. در سیستمی که در شکل ۱-۱.۱۷ نشان داده شد، هلیوم نسبتاً آهسته حرکت می کند و غلظت آن بسیار کم است، بنابراین در طی فرایند نفوذ  $v_y$  تفاوت چندانی با صفر ندارد. به طور کلی، برای مخلوطی دوتایی داریم:

$$v_y = \omega_A v_{Ay} + \omega_B v_{By} \quad (۳-۱.۱۷)$$

بنابراین  $v$  مقدار میانگینی است که در آن سرعت های گونه ها،  $v_B$  و  $v_A$  براساس کسرهای جرمی وزن دهی شده اند. این نوع سرعت را سرعت متوسط جرمی می نامند. سرعت گونه  $v_A$  سرعت مولکولی لحظه ای یک مولکول  $A$  نیست، بلکه میانگین حسابی سرعت های همه مولکول های  $A$  در یک جزء حجم کوچک است. در حالت کلی، شار جرمی  $j_{Ay}$  چنین تعریف می شود:

$$j_{Ay} = \rho \omega_A (v_{Ay} - v_y) \quad (۴-۱.۱۷)$$

شار جرمی  $B$  به صورت قیاسی تعریف می شود. چون دو گونه شیمیایی در هم نفوذ می کنند، در صورتی که وزن مولکولی  $A$  با وزن مولکولی  $B$  تفاوت داشته باشد، مرکز جرم به طور موضعی در جهت  $y$  جابه جا می شود. شارهای

1. A. Fick, *Ann. der physik*, **94**, 59-86 (1855).

قانون دوم فیک، که نظیر معادله رسانش گرما (معادله (۲-۱.۱۱)) است با معادله (۱۸-۱.۱۹) نشان داده می شود. آدولف اویگن فیک (۱۸۲۹-۱۹۰۱) پزشکی بود که در زوریخ و ماربورگ تدریس می کرد و بعدها رئیس دانشگاه وورتسبورگ شد. او قوانین نفوذ را در قیاس با رسانش گرما وضع کرد، نه بر اساس آزمایش.

جرمی  $j_{Ay}$  و  $j_{By}$  چنان تعریف می‌شوند که  $j_{Ay} + j_{By} = 0$ . به عبارت دیگر، شارهای  $j_{Ay}$  و  $j_{By}$  نسبت به حرکت مرکز جرم اندازه‌گیری می‌شوند. در بخش‌های ۷.۱۷ و ۸.۱۷ این نکته را به تفصیل شرح می‌دهیم. اگر معادله‌هایی شبیه معادله (۲-۱.۱۷) برای جهت‌های  $x$  و  $z$  بنویسیم و سپس هر سه معادله را باهم ترکیب کنیم، صورت برداری قانون فیک حاصل می‌شود:

$$\mathbf{j}_A = -\rho \mathcal{D}_{AB} \nabla \omega_A \quad (5-1.17)$$

برای گونه  $B$  نیز می‌توان رابطه مشابهی نوشت:

$$\mathbf{j}_B = -\rho \mathcal{D}_{BA} \nabla \omega_B \quad (6-1.17)$$

در مثال ۲-۱.۱۷ نشان داده می‌شود که  $\mathcal{D}_{BA} = \mathcal{D}_{AB}$ . بنابراین برای زوج  $A-B$  فقط یک ضریب نفوذ وجود دارد؛ درحالت کلی این ضریب نفوذ تابع فشار، دما، و ترکیب شیمیایی است. ضریب نفوذ جرمی  $\mathcal{D}_{AB}$ ، ضریب نفوذ گرمایی  $k/\rho \hat{C}_p$  و ضریب نفوذ اندازه حرکت (ویسکوزیته سینماتیکی)  $\nu = \mu/\rho$ ، همگی بُعد زمان/طول<sup>۲</sup> دارند. بنابراین نسبت‌های این سه کمیت گروه‌های بدون بُعدند:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\hat{C}_p \mu}{k} \quad \text{عدد پراتل: (7-1.17)}$$

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{\mathcal{D}_{AB}} = \frac{\mu}{\rho \mathcal{D}_{AB}} \quad \text{عدد اشمیت:}^2 \text{ (8-1.17)}$$

$$\text{Le} = \frac{\alpha}{\mathcal{D}_{AB}} = \frac{k}{\rho \hat{C}_p \mathcal{D}_{AB}} \quad \text{عدد لوئیس:}^2 \text{ (9-1.17)}$$

این گروه‌های بدون بُعد خواص سیال در معادله‌های بدون بُعد سیستم‌هایی که در آن‌ها فرایندهای انتقال در رقابت باهم عمل می‌کنند، نقش برجسته‌ای دارند. (تذکر: گاهی عدد لوئیس را به صورت عکس عبارت بالا تعریف می‌کنند.) در جدول‌های ۱-۱.۱۷، ۲، ۳، و ۴ چند مقدار  $\mathcal{D}_{AB}$  برحسب  $\text{cm}^2/\text{s}$  برای چند سیستم گاز، مایع، جامد و پلیمر ارائه شده است. این مقادیر را می‌توان به آسانی، با ضرب کردن در  $10^{-4}$  به  $\text{m}^2/\text{s}$  تبدیل کرد. ضریب نفوذ گازها در چگالی پایین از  $\omega_A$  تقریباً مستقل است، با دما افزایش می‌یابد و با فشار تناسب معکوس دارد. ضریب نفوذ مایعات و جامدات به شدت به غلظت وابسته است و معمولاً با دما افزایش می‌یابد. چندین روش تجربی برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ وجود دارد که بعضی از آن‌ها را در فصل‌های بعد شرح می‌دهیم.<sup>۳</sup>

برای مخلوط‌های گازی، عدد اشمیت درگستره حدود ۰/۲ تا ۳ تغییر می‌کند که در جدول ۱-۱.۱۷ می‌توان آن را مشاهده کرد. برای مخلوط‌های مایع مقادیر تا ۴۰۰۰۰ نیز مشاهده شده است.<sup>۴</sup>

۲. این گروه‌ها را به افتخار ارنست هاینریش ویلهلم اشمیت (۱۹۷۵-۱۹۸۲) که در دانشگاه‌های گدانسک، براونشوایک و مونیخ تدریس کرد (در این دانشگاه جانشین نوسلت شد) و وارن کندال لوئیس (۱۹۷۵-۱۹۸۲) که در ام‌آی‌تی تدریس کرد و مؤلف همکار در تدوین کتاب درسی زیر بود، چنین نامیده‌اند.

W. H. Walker, W. K. Lewis, and W. H. McAdams, *Principles of Chemical Engineering*, McGraw-Hill, New York (1923).

۳. برای آشنایی بیشتر با این روش‌ها، نگاه کنید به

W. E. Wakeham, A. Nagashima, and J. V. Sengers, *Measurement of the Transport Properties of Fluids: Experimental Thermodynamics, Vol. III*, CRC Press, Boca Raton, Fla. (1991).

4. D. A. Shaw and T. J. Hanratty, *AIChE Journal*, **23**, 28-37, 160-169 (1977); Harriott and R. M. Hamilton, *Chem. Eng. Sci.*, **20**, 1073-1078 (1965).

جدول ۱-۱۰۱۷ ضرایب نفوذ تجربی الف و عددهای حدی اشمیت<sup>ب</sup> زوج‌های گازی در فشار ۱ اتمسفر.

A-B زوج گازی	دما (K)	$D_{AB}(\text{cm}^2/\text{s})$	$Sc[x_A \rightarrow 1]$	$x_B \rightarrow 1]$
CO <sub>2</sub> -N <sub>2</sub> O	۲۷۳٫۲	۰٫۰۹۶	۰٫۷۳	۰٫۷۲
CO <sub>2</sub> -CO	۲۷۳٫۲	۰٫۱۳۹	۰٫۵۰	۰٫۹۶
CO <sub>2</sub> -N <sub>2</sub>	۲۷۳٫۲	۰٫۱۴۴	۰٫۴۸	۰٫۹۱
	۲۸۸٫۲	۰٫۱۵۸	۰٫۴۹	۰٫۹۲
	۲۹۸٫۲	۰٫۱۶۵	۰٫۵۰	۰٫۹۳
N <sub>2</sub> -C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	۲۹۸٫۲	۰٫۱۴۸	۱٫۰۴	۰٫۵۱
N <sub>2</sub> -nC <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	۲۹۸٫۲	۰٫۰۹۶۰	۱٫۶۰	۰٫۳۳
N <sub>2</sub> -O <sub>2</sub>	۲۷۳٫۲	۰٫۱۸۱	۰٫۷۲	۰٫۷۴
H <sub>2</sub> -SF <sub>6</sub>	۲۹۸٫۲	۰٫۴۴۰	۳٫۳۷	۰٫۵۵
H <sub>2</sub> -CH <sub>4</sub>	۲۹۸٫۲	۰٫۷۲۶	۱٫۹۵	۰٫۳۳
<sup>ε</sup> H <sub>2</sub> -N <sub>2</sub>	۲۷۳٫۲	۰٫۶۷۴	۱٫۴۰	۰٫۱۹
<sup>ε</sup> NH <sub>3</sub> -H <sub>2</sub>	۲۶۳	۰٫۵۸	▲ ۰٫۱۹	۱٫۵۳
<sup>ε</sup> NH <sub>3</sub> -N <sub>2</sub>	۲۹۸	۰٫۲۳۳	▲ ۰٫۶۲	۰٫۶۵
<sup>ε</sup> H <sub>2</sub> O-N <sub>2</sub>	۳۰۸	۰٫۲۵۹	▲ ۰٫۵۸	۰٫۶۲
<sup>ε</sup> H <sub>2</sub> O-O <sub>2</sub>	۳۵۲	۰٫۳۵۷	▲ ۰٫۵۶	۰٫۵۹
<sup>δ</sup> C <sub>2</sub> H <sub>8</sub> -nC <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	۳۷۸٫۲	۰٫۰۷۶۸	۰٫۹۵	۰٫۶۶
	۴۳۷٫۷	۰٫۱۰۷	۰٫۹۱	۰٫۶۳
<sup>δ</sup> C <sub>2</sub> H <sub>8</sub> -iC <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	۲۹۸٫۰	۰٫۰۴۳۹	۱٫۰۴	۰٫۷۳
	۳۷۸٫۲	۰٫۰۸۲۳	۰٫۸۹	۰٫۶۳
	۴۳۷٫۸	۰٫۱۱۲	۰٫۸۷	۰٫۶۱
<sup>δ</sup> C <sub>2</sub> H <sub>8</sub> -neo-C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	۲۹۸٫۱	۰٫۰۴۳۱	۱٫۰۶	۰٫۵۶
	۳۷۸٫۲	۰٫۰۷۰۳	۱٫۰۴	۰٫۵۵
	۴۳۷٫۷	۰٫۰۹۴۵	۱٫۰۳	۰٫۵۵
<sup>δ</sup> nC <sub>4</sub> H <sub>10</sub> -neo-C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	۲۹۸٫۰	۰٫۰۴۱۳	۰٫۷۶	۰٫۵۹
	۳۷۸٫۲	۰٫۰۶۴۴	۰٫۷۸	۰٫۶۱
	۴۳۷٫۸	۰٫۰۸۳۹	۰٫۸۰	۰٫۶۲
<sup>δ</sup> iC <sub>4</sub> H <sub>10</sub> -neo-C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	۲۹۸٫۱	۰٫۰۳۶۲	۰٫۸۹	۰٫۶۷
	۳۷۸٫۲	۰٫۰۵۸۰	۰٫۸۹	۰٫۶۷
	۴۳۷٫۷	۰٫۰۷۸۶	۰٫۸۷	۰٫۶۶

الف) این مقادیر از منبع زیر برگرفته شده‌اند، مگر خلاف آن تصریح شده‌باشد. همه مقادیر به فشار ۱ اتمسفر مربوط‌اند.

J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, 2nd Corrected printing, Wiley, New York (1964), p. 579.

ب) محاسبه شده با استفاده از پارامترهای لندارد-جوز از جدول ۱۰۰، پارامترهای مربوط به گوگرد هگزافلورید از داده‌های ضریب ویرال دوم به دست آمده‌اند.  
ج) مقادیر  $D_{AB}$  برای مخلوط‌های آب و آمونیاک از جدول‌بندی زیر برگرفته شده‌اند.

R. C. Reid, J. M. Prausnitz, and B. E. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, 4th edition, McGraw-Hill, New York (1987).

د) مقادیر  $D_{AB}$  برای زوج‌های هیدروکربن-هیدروکربن از منبع زیر برگرفته شده‌اند.

S. Gotoh, M. Manner, J. P. Sorensen, and W. E. Stewart, *J. Chem. Eng. Data*, 19, 169-171 (1974)

ه) مقادیر  $\mu$  برای آب و آمونیاک با استفاده از توابع ارائه شده در منبع زیر محاسبه شده‌اند.

T. E. Daubert, R. P. Danner, H. M. Sibul, C. C. Stebbins, J. L. Oscarson, R. L. Rowley, W. V. Wilding, M. E. Adams, T. L. Marshall, and N. A. Zundel, *DIPPR, Data Compilation of Pure Compound Properties*, Design Institute for Physical Property Data, AIChE, New York, N. Y. (2000).

تا این‌جا دربارهٔ سیالات همسان‌گرد بحث کردیم که در آن‌ها سرعت نفوذ به جهت‌گیری مخلوط سیال بستگی ندارد. در بعضی از جامدها و سیالات نظم‌یافته، ضریب نفوذ کمیتهی اسکالر نیست، بلکه تانسور است، بنابراین باید قانون فیک را اصلاح کرد و داریم:

$$\mathbf{j}_A = -[\rho \Delta_{AB} \cdot \nabla \omega_A] \quad (10-1.17)$$

که در آن  $\Delta_{AB}$  تانسور (مقارن) ضریب نفوذ است.<sup>۶،۵</sup> طبق این معادله، شار جرمی اساساً با گرادیان کسر جرمی هم‌راستا نیست. در این‌جا این موضوع را بیش‌از این دنبال نمی‌کنیم.

جدول ۲-۱۰.۱۷ ضرایب جذب تجربی در حالت مایع. الف، ب

A	B	T(°C)	$x_A$	$D_{AB} \times 10^5$ (cm <sup>2</sup> /s)
کلروبنزن	برموبنزن	۱۰،۱۰	۰،۰۳۳۲	۱،۰۰۷
			۰،۰۲۶۴۲	۱،۰۶۹
			۰،۰۵۱۲۲	۱،۱۴۶
			۰،۰۷۶۱۷	۱،۲۲۶
			۰،۰۹۶۵۲	۱،۲۹۱
		۳۹،۹۲	۰،۰۳۳۲	۱،۵۸۴
			۰،۰۲۶۴۲	۱،۶۹۱
			۰،۰۵۱۲۲	۱،۸۰۶
			۰،۰۷۶۱۷	۱،۹۰۲
			۰،۰۹۶۵۲	۱،۹۹۶
آب	n-پوتانول	۳۰	۰،۰۱۳۱	۱،۲۴
			۰،۰۲۲۲	۰،۹۲۰
			۰،۰۳۵۸	۰،۵۶۰
			۰،۰۴۵۴	۰،۴۳۷
			۰،۰۵۲۴	۰،۲۶۷
اتانول	آب	۲۵	۰،۰۲۶	۱،۰۷۶
			۰،۰۲۶۶	۰،۳۶۸
			۰،۰۴۰۸	۰،۴۰۵
			۰،۰۶۸۰	۰،۷۴۳
			۰،۰۸۸۰	۱،۰۴۷
			۰،۰۹۹۴	۱،۱۸۱

(الف) داده‌های دو زوج اول از مقالهٔ مروری

P. A. Johnson and A. L. Babb, *Chem. Revs.*, **56**, 387-453 (1956)

برگرفته شده‌اند. خلاصهٔ نتایج تجربی دیگر را می‌توان در مرجع زیر یافت:

P. W. M. Rutten, *Diffusion in Liquids*, Delft University Press, Delft, The Netherlands (1992); L. J. Gosting, *Adv. in Protein Chem.*, Vol. XI, Academic Press, New York (1956); A. Vignes, *I. E. C. Fundamentals*, **5**, 189-199 (1966).

(ب) داده‌های اتانول-آب از مرجع زیر برگرفته شده‌اند:

M. T. Tyn and W. F. Calus, *J. Chem. Eng. Data*, **20**, 310-316 (1975).

۵. برای پلیمرهایی که جریان می‌یابند، با استفاده از نظریهٔ سینتیک، عبارت‌هایی نظری برای تانسور نفوذ به دست آمده‌است؛ نگاه کنید به H. C. Öttinger, *AIChE Journal*, **35**, 279-286 (1989), and C. F. Curtiss and R. B. Bird, *Adv. Polym. Sci.*, 1-101 (1996), §§6 and 15.  
6. M. E. Glicksman, *Diffusion in Solids: Field Theory, Solid State Principles, and Applications*, Wiley, New York (2000).

جدول ۱.۱۷-۳ ضرایب نفوذ تجربی در حالت جامد. الف

A	B	T(°C)	$D_{AB}$ (cm <sup>2</sup> /s)
He	SiO <sub>2</sub>	۲۰	$۲,۴ - ۵,۵ \times ۱۰^{-۱۰}$
He	پیرکس	۲۰	$۴,۵ \times ۱۰^{-۱۱}$
		۵۰۰	$۲ \times ۱۰^{-۸}$
H <sub>2</sub>	SiO <sub>2</sub>	۵۰۰	$۰,۶ - ۲,۱ \times ۱۰^{-۸}$
H <sub>2</sub>	Ni	۸۵	$۱,۱۶ \times ۱۰^{-۸}$
		۱۶۵	$۱,۰۵ \times ۱۰^{-۸}$
Bi	Pb	۲۰	$۱,۱ \times ۱۰^{-۱۶}$
Hg	Pb	۲۰	$۲,۵ \times ۱۰^{-۱۵}$
Sb	Ag	۲۰	$۳,۵ \times ۱۰^{-۲۱}$
Al	Cu	۲۰	$۱,۳ \times ۱۰^{-۳۰}$
Cd	Cu	۲۰	$۲,۷ \times ۱۰^{-۱۵}$

الف) فرض می‌شود که در هر یک از زوج‌های بالا، جزء A فقط به مقدار ناچیز وجود دارد. داده‌ها از مرجع زیر برگرفته شده‌اند:

R. M. Barrer, *Diffusion in and through Solids*, Macmillan, New York (1941), pp. 141, 222, and 275.

جدول ۱.۱۷-۴ ضرایب نفوذ تجربی گازها در پلیمرها. الف ضرایب نفوذ  $D_{AB}$  برحسب واحد (cm<sup>2</sup>/s)  $\times ۱۰^{-۶}$  ارائه شده‌اند. مقادیر N<sub>2</sub> و O<sub>2</sub> به دمای ۲۹۸ K، و مقادیر CO<sub>2</sub> و H<sub>2</sub> به ۱۹۸ K مربوط‌اند.

	N <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>
پلی‌بوتادیان <sup>*</sup>	۱,۱	۱,۵	۱,۰۵	۹,۶
لاستیک سیلیکونی	۱۵	۲۵	۱۵	۷۵
پلی‌ایزوپرن ترانس ۴,۱	۰,۵۰	۰,۷۰	۰,۴۷	۵,۰
پلی‌استیرن	۰,۰۶	۰,۱۱	۰,۰۶	۴,۴

الف) برگزیده از

D. W. van Krevelen, *Properties of Polymers*, 3rd edition, Elsevier, Amsterdam (1990), pp. 544-545.

مرجع دیگر در این زمینه عبارت است از:

S. Pauly, in *Polymer Handbook*, 4th edition (J. Brandrup and E. H. Immergut, eds.), Wiley-Interscience, New York (1999), Chapter VI.

در این بخش نوعی از نفوذ را شرح دادیم که در نتیجه گرادیان غلظت در سیستم رخ می‌دهد. این نوع نفوذ را نفوذ غلظتی یا نفوذ عادی می‌نامیم. اما انواع دیگری از نفوذ هم هست: نفوذ گرمایی، که از گرادیان دما ناشی می‌شود؛ نفوذ فشاری، که از گرادیان فشار ناشی می‌شود، و نفوذ واداشته که به سبب اثر نیروهای خارجی نامساوی بر گونه‌های شیمیایی رخ می‌دهد.

در حال حاضر فقط نفوذ غلظتی را بررسی می‌کنیم و بحث درباره سایر مکانیسم‌های نفوذ را تا فصل ۲۴ به تعویق می‌اندازیم. به علاوه، در آن فصل استفاده از فعالیت، به جای غلظت را، به عنوان نیروی رانش نفوذ عادی نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۱۷

نفوذ هلیوم در شیشه پیرکس می‌خواهیم شار جرمی حالت پایایی  $j_{Ay}$  هلیوم را در سیستم شکل ۱-۱۷ در دمای  $500^\circ\text{C}$  محاسبه کنیم. فشار جزئی هلیوم در  $y = 0$  برابر ۱ اتمسفر و در سطح بالایی صفحه صفر است. ضخامت  $\gamma$  صفحه پیرکس  $10^{-2}\text{mm}$  و چگالی آن  $\rho^{(B)}$  برابر  $2.6\text{g/cm}^3$  است. انحلال‌پذیری و ضریب نفوذ هلیوم در پیرکس،  $\gamma$  به ترتیب،  $0.0084$  حجم هلیوم گازی در هر حجم شیشه، و  $D_{AB} = 0.2 \times 10^{-7}\text{cm}^2/\text{s}$  گزارش داده شده‌است. نشان دهید که نادیده گرفتن ضمنی سرعت جرمی متوسط در معادله (۱-۱۷) منطقی است.

حل

غلظت جرمی هلیوم در شیشه، در سطح پایینی، از داده‌های انحلال‌پذیری و قانون گازهای ایده‌آل به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \rho_{A^0} &= (0.0084) \frac{p_{A^0} M_A}{RT} \\ &= (0.0084) \frac{(1.0\text{ atm})(4.00\text{ g/mole})}{(82.05\text{ cm}^3\text{ atm/mole K})(773\text{ K})} \\ &= 5.3 \times 10^{-7}\text{ g/cm}^3 \end{aligned} \quad (11-1.17)$$

بنابراین کسر جرمی هلیوم در فاز جامد در سطح پایینی برابر است با:

$$\omega_{A^0} = \frac{\rho_{A^0}}{\rho_{A^0} + \rho_{B^0}} = \frac{5.3 \times 10^{-7}}{5.3 \times 10^{-7} + 2.6} = 2.04 \times 10^{-7} \quad (12-1.17)$$

اکنون می‌توان شار هلیوم را با استفاده از معادله (۱-۱۷) به دست آورد:

$$\begin{aligned} j_{Ay} &= (2.6\text{g/cm}^3)(2.0 \times 10^{-8}\text{ cm}^2/\text{s}) \frac{2.04 \times 10^{-7}}{10^{-2}\text{ cm}} \\ &= 1.05 \times 10^{-11}\text{ g/cm}^2\text{s} \end{aligned} \quad (13-1.17)$$

سپس می‌توان سرعت هلیوم را از معادله (۴-۱۷) به دست آورد:

$$v_{Ay} = \frac{j_{Ay}}{\rho_A} + v_y \quad (14-1.17)$$

در سطح پایینی صفحه ( $y = 0$ )، مقدار این سرعت برابر است با:

$$v_{Ay}|_{y=0} = \frac{1.05 \times 10^{-11}\text{ g/cm}^2\text{s}}{5.3 \times 10^{-7}\text{ g/cm}^3} + v_{y^0} = 1.98 \times 10^{-5}\text{ cm/s} + v_{y^0} \quad (15-1.17)$$

مقدار متناظر  $v_{y^0}$  سرعت جرمی متوسط سیستم شیشه-هلیوم در  $y = 0$  از معادله (۳-۱۷) به دست می‌آید:

$$v_{y^0} = (2.04 \times 10^{-7})(1.98 \times 10^{-5}\text{ cm/s} + v_{y^0}) + (1 - 2.04 \times 10^{-7})(0) \quad (16-1.17)$$

$$v_{y^0} = \frac{(2.04 \times 10^{-7})(1.98 \times 10^{-5}\text{ cm/s})}{1 - (2.04 \times 10^{-7})} = 4.04 \times 10^{-12}\text{ cm/s}$$



بنابراین می‌توان در معادله (۱۴-۱.۱۷) را نادیده گرفت و تحلیل آزمایش شکل ۱-۱.۱۷ در حالت پایا درست است.

### مثال ۲-۱.۱۷

هم‌ارزی  $D_{BA}$  و  $D_{AB}$

نشان دهید که برای توصیف رفتار نفوذی یک مخلوط دوتایی، فقط به یک ضریب نفوذ نیاز است.

حل

کار را با نوشتن معادله (۶-۱.۱۷) به صورت زیر آغاز می‌کنیم:

$$\mathbf{j}_B = -\rho D_{BA} \nabla \omega_B = +\rho D_{BA} \nabla \omega_A \quad (۱۷-۱.۱۷)$$

صورت دوم این معادله از این نکته ناشی می‌شود که  $\omega_A + \omega_B = ۱$ . سپس از هم‌ارزهای برداری معادله‌های (۳-۱.۱۷) و (۴) استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_A &= \rho \omega_A (\mathbf{v}_A - \omega_A \mathbf{v}_A - \omega_B \mathbf{v}_B) \\ &= \rho \omega_A ((1 - \omega_A) \mathbf{v}_A - \omega_B \mathbf{v}_B) \\ &= \rho \omega_A \omega_B (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \end{aligned} \quad (۱۸-۱.۱۷)$$

تعویض جای  $A$  و  $B$  در این عبارت نشان می‌دهد که  $\mathbf{j}_A = -\mathbf{j}_B$ . سپس با ترکیب این عبارت و صورت دوم معادله (۱۷-۱.۱۷) نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{j}_A = -\rho D_{BA} \nabla \omega_A \quad (۱۹-۱.۱۷)$$

از مقایسه معادله اخیر با معادله (۵-۱.۱۷) نتیجه می‌شود که  $D_{BA} = D_{AB}$ . درمی‌یابیم که ترتیب اندیس‌ها برای سیستم دوتایی اهمیت ندارد و برای توصیف رفتار نفوذی در این سیستم‌ها فقط به یک ضریب نفوذ نیاز داریم. اما باید دانست که ضریب نفوذ محلول رقیق  $A$  در  $B$ ، با ضریب نفوذ محلول رقیق  $B$  در  $A$ ، از لحاظ عددی متفاوت است. علت آن است که ضریب نفوذ به غلظت وابسته است، به طوری که دو مقدار حدی گفته شده در بالا مقادیر ضریب نفوذ  $D_{BA} = D_{AB}$  در دو غلظت مختلف است.

### ۲.۱۷ وابستگی ضرایب نفوذ به دما و فشار

در این بخش درباره پیش‌بینی ضریب نفوذ  $D_{AB}$  برای سیستم‌های دوتایی با استفاده از روش‌های حالت‌های متناظر بحث می‌کنیم. این روش‌ها برای برون‌یابی داده‌های موجود نیز مناسب‌اند. در مراجع مختلف می‌توان روش‌های مقایسه متعددی را یافت.<sup>۲۰</sup>

برای مخلوط‌های گاز دوتایی در فشار پایین،  $D_{AB}$  با فشار تناسب معکوس دارد، با افزایش دما افزایش می‌یابد، و از ترکیب شیمیایی هر جفت گاز مفروض تقریباً مستقل است. معادله زیر از تلفیق نظریه سینتیکی و استدلال‌های

1. R. C. Reid, J. M. Prausnitz, and B. E. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, 4th edition, McGraw-Hill, New York (1987), Chapter 11.

2. E. N. Fuller, P. D. Shettler, and J. C. Giddings, *Ind. Eng. Chem.*, **58**, No. 5, 19-27 (1966); Erratum: *ibid.* **58**, No. 8, 81 (1966).

در این مقاله روش سودمندی برای پیش‌بینی ضرایب نفوذ گازهای دوتایی با استفاده از فرمول‌های مولکولی دوگانه شیمیایی ارائه شده است.

حالت‌های متناظر<sup>۳</sup>، برای تخمین  $D_{AB}$  در فشارهای پایین به دست آمده است:

$$\frac{pD_{AB}}{(p_c A p_c B)^{1/2} (T_c A T_c B)^{0.5} (\sqrt{M_A} + \sqrt{M_B})^{1/2}} = a \left( \frac{T}{\sqrt{T_c A T_c B}} \right)^b \quad (1-2.17)$$

در این جا  $p[=]$ atm،  $D_{AB}[=]$ cm<sup>۲</sup>/s و  $T[=]$ K. با تحلیل داده‌های تجربی ثابت‌های بدون بُعد  $a = 2.745 \times 10^{-4}$  و  $b = 1.823$  برای زوج‌های گاز غیرقطبی، به‌استثنای هلیوم و هیدروژن، و  $a = 3.640 \times 10^{-4}$  و  $b = 2.334$  برای زوج‌های تشکیل‌شده از H<sub>2</sub>O و یک گاز غیرقطبی به دست می‌آیند. معادله (۱-۲.۱۷) در فشار جو و با خطایی در محدوده ۶ تا ۸٪، به داده‌های تجربی می‌برازد. اگر گازهای A و B غیرقطبی باشند و پارامترهای لنارد-جونز آن‌ها معلوم باشد، روش نظریه سینتیکی توصیف‌شده در بخش بعد معمولاً دقت بهتری دارد.

در فشارهای بالا، و درحالت مایع، رفتار  $D_{AB}$  پیچیده‌تر است. ساده‌ترین وضعیت و وضعیتی که بهتر از همه درک شده، خودنفوذی (نفوذ مولکول‌های نشان‌دار یک گونه شیمیایی در همان گونه) است. ابتدا این حالت را بررسی می‌کنیم و سپس نتایج را به صورت تقریبی به مخلوط‌های دوتایی تعمیم می‌دهیم.

نمودار حالت‌های متناظر برای ضریب خودنفوذی  $D_{AA^*}$ ، برای مواد غیرقطبی، در شکل ۱-۲.۱۷ نشان داده شده است. این نمودار بر اندازه‌گیری‌های خودنفوذی<sup>۴</sup> مبتنی است که توسط شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی و نظریه سینتیکی برای حد فشار پایین تکمیل شده‌اند.

محور عرض‌ها  $cD_{AA^*}$  را در فشار  $p$  و دمای  $T$ ، تقسیم بر  $cD_{AA^*}$  در نقطه بحرانی نشان می‌دهد. این کمیت به صورت تابعی از فشار فروکاسته  $p_r = p/p_c$  و دمای فروکاسته  $T_r = T/T_c$  ترسیم شده است. به علت همانندی گونه A و گونه نشان‌دار A\*، خواص بحرانی را همان خواص بحرانی گونه A در نظر می‌گیریم.

با توجه به شکل ۱-۲.۱۷ مشاهده می‌کنیم که  $cD_{AA^*}$ ، به‌ویژه در مایعات، با دما به شدت افزایش می‌یابد. در هر دمای مفروض،  $cD_{AA^*}$ ، با افزایش فشار به سمت صفر کاهش می‌یابد. با کاهش فشار،  $cD_{AA^*}$  به سمت حد فشار پایین، افزایش می‌یابد که مطابق با پیش‌بینی نظریه سینتیکی است (نگاه کنید به بخش ۳.۱۷).

به دانشجو هشدار می‌دهیم که این نمودار آزمایشی است و خطوط، به‌استثنای خط مربوط به حد چگالی پایین، براساس داده‌های حاصل از مواد معدودی ترسیم شده‌اند: Ar، Kr، Xe، و CH<sub>۴</sub>.

کمیت  $(cD_{AA^*})_c$  را می‌توان با استفاده از یکی از سه روش زیر تخمین زد:

۱. با معلوم بودن  $cD_{AA^*}$  در دما و فشار معلوم، می‌توان  $(cD_{AA^*})_r$  را از روی نمودار قرائت کرد و نتیجه گرفت که  $(cD_{AA^*})_c = cD_{AA^*} / (cD_{AA^*})_r$ .

۲. می‌توان با استفاده از روش‌های ارائه‌شده در بخش ۳.۱۷ مقداری برای  $cD_{AA^*}$  در ناحیه چگالی پایین پیش‌بینی کرد و سپس کار را مانند حالت ۱ ادامه داد.

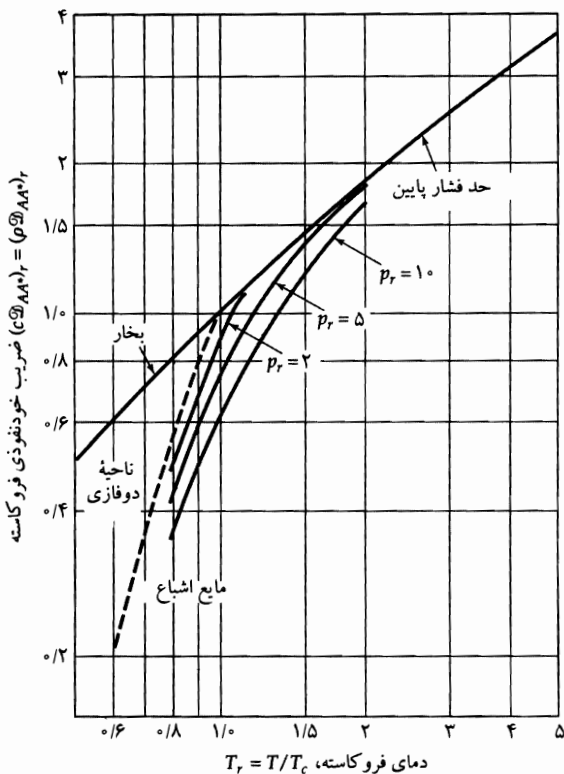
3. J. C. Slattery and R. B. Bird, *AIChE Journal*, 4, 137-142 (1958).

۴. سایر روابط مربوط به خودنفوذی در فشارهای بالا در مرجع ۳ و مراجع زیر یافت می‌شوند:

L. S. Tee, G. F. Kuether, R. C. Robinson, and W. E. Stewart, *API Proceedings, Division of Refining*, 235-243 (1966); R. C. Robinson and W. E. Stewart, *IEC Fundamentals*, 7, 90-95 (1968); J. L. Bueno, J. Dizey, R. Alvarez, and J. Coca, *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 68, Part A, 392-397 (1990).

۳. می‌توان از فرمول تجربی زیر استفاده کرد (نگاه کنید به مسئله ۱۷ الف ۹):

$$(cD_{AA^*})_c = 2,96 \times 10^{-6} \left( \frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_{A^*}} \right)^{1/2} \frac{p_{cA}^{1/2}}{T_{cA}^{1/6}} \quad (2-2.17)$$



شکل ۱-۲.۱۷ نمودار حالت‌های متناظر برای ضریب خودنفوذی فروکاسته. در این جا برای  $(cD_{AA^*})_r = (\rho D_{AA^*})_r$  برای Kr, Ar, Xe, و  $CH_4$ ، به صورت تابعی از دمای فروکاسته به ازای چندین مقدار فشار فروکاسته، ترسیم شده است.

این معادله، مانند معادله (۱-۲.۱۷)، نباید برای ایزوتوپ‌های هلیوم یا هیدروژن به کار رود. در این جا  $c [=] \text{g-mole/cm}^3$ ،  $p_c [=] \text{atm}$  و  $T_c [=] \text{K}$ ،  $D_{AA^*} [=] \text{cm}^2/\text{s}$

تا این جا بحث درباره رفتار در چگالی بالا، روی خودنفوذی متمرکز بود. اکنون به سراغ نفوذ در سیستم‌های دوتایی تشکیل شده از گونه‌های شیمیایی متفاوت می‌رویم. در غیاب اطلاعات دیگر، می‌توان با استفاده از معادله (۱-۲.۱۷) تخمین اولیه‌ای از  $cD_{AB}$  به دست آورد؛ برای این کار در همه جا  $\sqrt{p_{cA}p_{cB}}$  و  $\sqrt{T_{cA}T_{cB}}$  را به ترتیب، جایگزین  $p_{cA}$  و  $T_{cA}$  می‌کنیم (برای اطلاع از مبنای این تجربه‌گرایی به مسئله ۱۷ الف ۹. رجوع کنید). عرض این نمودار به صورت  $(cD_{AB})_r = cD_{AB}/(cD_{AB})_c$  تفسیر می‌شود و معادله (۲-۲.۱۷) با معادله زیر جایگزین خواهد شد:

$$(cD_{AB})_c = 2,96 \times 10^{-6} \left( \frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} \right)^{1/2} \frac{(p_{cA}p_{cB})^{1/2}}{(T_{cA}T_{cB})^{1/6}} \quad (3-2.17)$$

با این جایگزینی‌ها، نتایج دقیقی در حد فشار پایین به دست می‌آید. در فشارهای بالاتر، داده‌های اندکی برای مقایسه موجود است و این روش را باید صرفاً روشی موقتی محسوب کرد.

نتایج نشان داده شده در شکل ۱۷-۲.۱۷ و تعمیم آن‌ها به سیستم‌های دوتایی، به جای  $D_{AB}$  و  $D_{AA^*}$ ، برحسب  $cD_{AB}$  و  $cD_{AA^*}$  بیان می‌شوند. علت انجام این کار این است که در محاسبات انتقال جرم بیش‌تر از ضرایب نفوذ با مضرب  $c$  استفاده می‌شود و وابستگی آن‌ها به فشار و دما ساده‌تر است.

### مثال ۱۷-۲.۱۷

تخمین ضریب نفوذ در چگالی پایین  $D_{AB}$  را برای سیستم  $\text{CO} - \text{CO}_2$  در  $296.1 \text{ K}$  و فشار کل  $1 \text{ atm}$  تخمین بزنید.

حل

خواص موردنیاز برای معادله (۱۷-۲.۱۷) عبارت‌اند از (نگاه کنید به جدول ۱.۰):

نشانه	گونه	$M$	$T_c(\text{K})$	$p_c(\text{atm})$
A	CO	۲۸٫۰۱	۱۳۳	۳۴٫۵
B	CO <sub>2</sub>	۴۴٫۰۱	۳۰۴٫۲	۷۲٫۹

بنابراین:

$$(p_{cA}p_{cB})^{1/2} = (34.5 \times 72.9)^{1/2} = 13.60$$

$$(T_{cA}T_{cB})^{5/12} = (133 \times 304.2)^{5/12} = 83.1$$

$$\left(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{28.01} + \frac{1}{44.01}\right)^{1/2} = 0.2417$$

$$a \left(\frac{T}{\sqrt{T_{cA}T_{cB}}}\right)^b = 2.745 \times 10^{-2} \left(\frac{296.1}{\sqrt{133 \times 304.2}}\right)^{1.823} = 5.56 \times 10^{-2}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله (۱۷-۲.۱۷) نتیجه می‌شود:

$$(1.0)D_{AB} = (5.56 \times 10^{-2})(13.60)(83.1)(0.2417) \quad (4-2.17)$$

نتیجه می‌شود  $D_{AB} = 0.152 \text{ cm}^2/\text{s}$  که با مقادیر تجربی توافق دارد. این توافق به‌طور غیرعادی خوب است. این مسئله را می‌توان با استفاده از شکل ۱۷-۲.۱۷ و معادله (۱۷-۲.۱۷)، همراه با قانون گازهای ایده‌آل  $p = cRT$  نیز حل کرد. نتیجه عبارت است از:  $D_{AB} = 0.140 \text{ cm}^2/\text{s}$ ، که با داده‌های تجربی توافق خوبی دارد.

### مثال ۱۷-۲.۲

تخمین ضریب خودنفوذی در چگالی بالا

مطلوب است تخمین  $cD_{AA^*}$  برای  $\text{C}^{14}\text{O}_2$  در  $\text{CO}_2$  معمولی در فشار  $171.7 \text{ atm}$  و  $377 \text{ K}$ . می‌دانیم  $c = \frac{p}{RT} = 4.12 \times 10^{-5} \text{ g.mole/cm}^3$  که در این صورت  $D_{AA^*} = 0.113 \text{ cm}^2/\text{s}$  در  $1.0 \text{ atm}$  و  $298 \text{ K}$  که در این صورت  $c = \frac{p}{RT} = 4.12 \times 10^{-5} \text{ g.mole/cm}^3$ .

حل

چون مقدار اندازه‌گیری شده  $D_{AA^*}$  مفروض است، از روش ۱ استفاده می‌کنیم. شرایط فروگاسته اندازه‌گیری عبارت‌اند از:  $T_r = 298/304.2 = 0.980$  و  $p_r = 1.0/171.7 = 0.00582$  سپس از شکل ۱۷-۲.۱۷ مقدار

5. B. A. Ivakin and P. E. Suetin, *Sov. Phys. Tech. Phys.* (English translation), 8, 748-751 (1964).

6. E. B. Wynn, *Phys. Rev.*, 80, 1024-1027 (1950).

$(cD_{AA^*})_r = ۰,۹۸$  به دست می‌آید. بنابراین:

$$(cD_{AA^*}) = \frac{cD_{AA^*}}{(cD_{AA^*})_r} = \frac{(۴,۱۲ \times ۱۰^{-۵})(۰,۱۱۳)}{۰,۹۸}$$

$$= ۴,۷۵ \times ۱۰^{-۶} \text{ g\_mole/cm} \cdot \text{s} \quad (۵-۲.۱۷)$$

در شرایط پیش‌بینی  $(cD_{AA^*})_r = ۱,۲۱$  مقدار  $(p_r = ۱۷۱,۷/۷۲,۹ = ۲,۳۶$  و  $T_r = ۳۷۳/۳۰۴,۲ = ۱/۲۳)$  قرانت می‌شود. بنابراین مقدار پیش‌بینی شده برابر است با:

$$cD_{AA^*} = (cD_{AA^*})_r (cD_{AA^*})_c = (۱,۲۱)(۴,۷۵ \times ۱۰^{-۶})$$

$$= ۵,۷۵ \times ۱۰^{-۶} \text{ g\_mole/cm} \cdot \text{s} \quad (۶-۲.۱۷)$$

داده‌های اوهرن و مارتین<sup>۷</sup> در این شرایط نتیجه  $cD_{AA^*} = ۵,۹۸ \times ۱۰^{-۶} \text{ g\_mole/cm} \cdot \text{s}$  را عاید می‌کنند. این توافق خوب دور از انتظار نیست زیرا در تخمین  $(cD_{AA^*})_c$  از داده‌های آن‌ها استفاده شد. این مسئله را می‌توان با استفاده از روش ۳ بدون مقدار تجربی  $cD_{AA^*}$  نیز حل کرد. از معادله (۲-۲.۱۷) مستقیماً نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$(cD_{AA^*})_c = ۲,۹۶ \times ۱۰^{-۶} \left( \frac{۱}{۴۴,۰۱} + \frac{۱}{۴۶} \right)^{۱/۲} \frac{(۷۲,۹)^{۲/۳}}{(۳۰۴,۲)^{۱/۶}}$$

$$= ۴,۲۰ \times ۱۰^{-۶} \text{ g\_mole/cm} \cdot \text{s} \quad (۷-۲.۱۷)$$

مقدار پیش‌بینی شده حاصل برای  $cD_{AA^*}$  برابر است با:  $۵,۱ \times ۱۰^{-۶} \text{ g\_mole/cm} \cdot \text{s}$ .

### مثال ۳-۲.۱۷

تخمین ضریب نفوذ دوتایی در چگالی بالا مقدار  $cD_{AB}$  را برای مخلوطی از  $\text{CH}_4$  مول٪ ۸۰ و  $\text{C}_2\text{H}_6$  مول٪ ۲۰ در فشار ۱۳۶ atm و دمای ۳۱۳ K تخمین بزنید. می‌دانیم که، در فشار ۱ atm و دمای ۲۹۳ K، چگالی مولی برابر است با:  $c = ۴,۱۷ \times ۱۰^{-۵} \text{ g\_mole/cm}^3$  و  $D_{AB} = ۰,۱۶۳ \text{ cm}^2/\text{s}$

حل

از شکل ۱-۲.۱۷، و روش ۱ استفاده می‌کنیم. شرایط فروکاسته برای داده‌های معلوم عبارت‌اند از:

$$T_r = \frac{T}{\sqrt{T_{cA}T_{cB}}} = \frac{۲۹۳}{\sqrt{(۱۹۰,۷)(۳۰۵,۴)}} = ۱,۲۲ \quad (۸-۲.۱۷)$$

$$p_r = \frac{p}{\sqrt{p_{cA}p_{cB}}} = \frac{۱,۰}{\sqrt{(۴۵,۸)(۴۸,۲)}} = ۰,۰۲۱ \quad (۹-۲.۱۷)$$

از شکل ۱-۲.۱۷ در این شرایط، نتیجه می‌شود  $(cD_{AB})_r = ۱,۲۱$ . بنابراین مقدار بحرانی  $(cD_{AB})_c$  برابر است با:

$$(cD_{AB})_c = \frac{cD_{AB}}{(cD_{AB})_r} = \frac{(۴,۱۷ \times ۱۰^{-۵})(۰,۱۶۳)}{۱,۲۱}$$

$$= ۵,۶۲ \times ۱۰^{-۶} \text{ g\_mole/cm} \cdot \text{s} \quad (۱۰-۲.۱۷)$$

7. H. A. O'Hern and J. J. Martin, *Ind. Eng. Chem.*, **47**, 2081-2086 (1955).

سپس شرایط فروکاسته را برای پیش‌بینی محاسبه می‌کنیم ( $T_r = ۱,۳۰$ ,  $p_r = ۲,۹۰$ ) و مقدار  $(cD_{AB})_r = ۱,۳۱$  را از روی شکل ۱۲-۱۷ می‌خوانیم. بنابراین مقدار پیش‌بینی شده  $cD_{AB}$  برابر است با:

$$\begin{aligned} cD_{AB} &= (cD_{AB})_r (cD_{AB})_c = (۱,۳۱)(۵,۶۲ \times ۱۰^{-۶}) \\ &= ۷,۴ \times ۱۰^{-۶} \text{ g-mole/cm} \cdot \text{s} \end{aligned} \quad (۱۱-۲.۱۷)$$

از اندازه‌گیری‌های تجربی نتیجه می‌شود<sup>۸</sup>  $cD_{AB} = ۶,۱۰ \times ۱۰^{-۶} \text{ g-mole/cm} \cdot \text{s}$ ، به طوری که مقدار پیش‌بینی شده به اندازه ۲۳٪ بالاست. انحراف از این مقدار در تخمین  $cD_{AB}$  در چگالی‌های بالا غیرعادی نیست. با استفاده از روش ۳ می‌توان جواب دیگری به دست آورد. با قرار دادن مقدار در معادله (۳-۲.۱۷) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} (cD_{AB})_c &= ۲,۹۶ \times ۱۰^{-۶} \left( \frac{۱}{۱۶,۰۴} + \frac{۱}{۳۰,۰۷} \right)^{۱/۲} \frac{(۴۵,۸ \times ۴۸,۲)^{۱/۳}}{(۱۹۰,۷ \times ۳۰۵,۴)^{۱/۱۲}} \\ &= ۴,۷۸ \times ۱۰^{-۶} \text{ g-mole/cm} \cdot \text{s} \end{aligned} \quad (۱۲-۲.۱۷)$$

از ضرب کردن این نتیجه در مقدار  $(cD_{AB})_r$  در شرایط مطلوب، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} cD_{AB} &= (۴,۷۸ \times ۱۰^{-۶})(۱,۳۱) \\ &= ۶,۲۶ \times ۱۰^{-۶} \text{ g-mole/cm} \cdot \text{s} \end{aligned} \quad (۱۳-۲.۱۷)$$

این نتیجه با مقدار اندازه‌گیری شده، توافق بهتری دارد.<sup>۸</sup>

### ۳.۱۷ نظریه نفوذ در گازها در چگالی پایین

ضریب نفوذ جرمی  $D_{AB}$  برای مخلوط‌های دوتایی از گازهای غیرقطبی را می‌توان با خطایی در حدود ۵٪، با استفاده از نظریه سینتیکی پیش‌بینی کرد. چنان‌که در بحث قبلی درباره نظریه سینتیکی در بخش‌های ۴.۱ و ۳.۹ دیدیم، کار را با اشتقاق ساده آغاز می‌کنیم تا مکانیسم‌های دخیل را نشان دهیم، و سپس نتایج دقیق‌تر نظریه چابمن-انسکوگ را ارائه می‌دهیم.

مقدار زیادی گاز را در نظر بگیرید که حاوی گونه‌های مولکولی  $A$  و  $A^*$  است، که همانند یکدیگرند، اما نشانه‌گذاری‌های متفاوت دارند. می‌خواهیم ضریب خودنفوذی  $D_{AA^*}$  را برحسب خواص مولکولی و براساس این فرض تعیین کنیم که مولکول‌ها کره‌های صلب با جرم‌های برابر  $m_A$  و قطر  $d_A$  هستند.

چون خواص  $A$  و  $A^*$  تقریباً همانند است، می‌توانیم از نتایج نظریه سینتیکی، به شرح زیر، برای گاز خالص با مولکول‌هایی به شکل کره صلب و در چگالی پایین که در آن گرادیان‌های دما، فشار، و سرعت کوچک‌اند، استفاده کنیم:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{AKT}{\pi m}} = v \text{ سرعت مولکولی میانگین نسبت به } v \quad (۱-۳.۱۷)$$

$$Z = \frac{1}{4} n \bar{u} = \text{بسامد برخورد با جدار در واحد سطح، برای گاز ساکن} \quad (۲-۳.۱۷)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \text{مسافت آزاد میانگین} \quad (۳-۳.۱۷)$$

8. V. J. Berry, Jr., and R. C. Koeller, *AIChE Journal*, 6, 274-280 (1960).

مولکول‌هایی که به هر صفحه در گاز می‌رسند، به‌طور متوسط، آخرین برخورد خود را در فاصله  $a$  از صفحه انجام داده‌اند، و داریم:

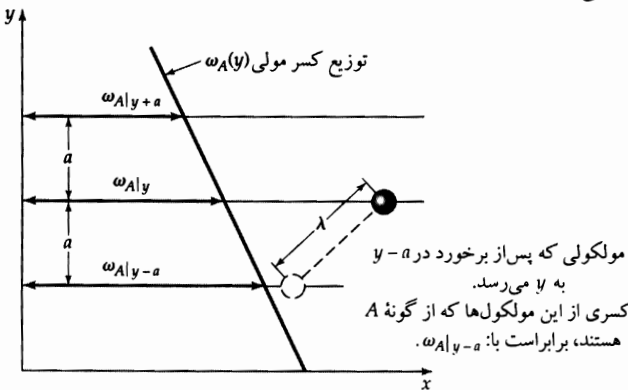
$$a = \frac{2}{3}\lambda \quad (۴-۳.۱۷)$$

در این معادله‌ها  $n$  چگالی عددی (تعداد کل مولکول‌ها در واحد حجم) است.

برای پیش‌بینی ضریب خودنفوذی  $D_{AA^*}$ ، حرکت گونه  $A$  را در جهت  $y$  و تحت گرادینان کسر جرمی  $d\omega_A/dy$  (شکل ۱-۳.۱۷) در نظر می‌گیریم که در آن مخلوط سیال با سرعت جرمی متوسط متناهی  $v_y$  در جهت  $y$  حرکت می‌کند. دمای  $T$  و غلظت جرمی مولی کل  $\rho$  را ثابت می‌گیریم. فرض می‌کنیم که معادله‌های (۱-۳.۱۷) تا (۴) در این وضعیت غیرتعادلی اعتبار خود را حفظ می‌کنند. شار جرمی خاص گونه‌های  $A$  که از واحد سطح هر صفحه با  $y$  ثابت عبور می‌کنند با نوشتن رابطه‌ای برای جرم  $A$  عبوری از صفحه در جهت مثبت  $y$  و تفریق کردن جرم  $A$  عبوری در جهت منفی  $y$  به‌دست می‌آید:

$$(\rho\omega_A v_y)|_y + \left[ \left( \frac{1}{3}\rho\omega_A \bar{u} \right)|_{y-a} - \left( \frac{1}{3}\rho\omega_A \bar{u} \right)|_{y+a} \right] \quad (۵-۳.۱۷)$$

در این رابطه جمله اول انتقال جرم در جهت  $y$ ، به‌سبب حرکت جرمی سیال است - یعنی انتقال همرفتی-، و دو جمله آخر انتقال مولکولی نسبت به  $v_y$  را نشان می‌دهند.



شکل ۱-۳.۱۷ انتقال مولکولی گونه  $A$  از صفحه واقع در  $(y-a)$  به صفحه واقع در  $y$ .

فرض می‌کنیم که توزیع غلظت  $\omega_A(y)$  در فواصلی معادل چند مسافت آزاد میانگین، بسیار نزدیک به خطی است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\omega_A|_{y\pm a} = \omega_A|_y \pm \frac{2}{3}\lambda \frac{d\omega_A}{dy} \quad (۶-۳.۱۷)$$

از ترکیب دو معادله آخر شار جرمی مرکب در صفحه  $y$  نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} n_{Ay} &= \rho\omega_A v_y - \frac{1}{3}\rho\bar{u}\lambda \frac{d\omega_A}{dy} \\ &\equiv \rho\omega_A v_y - \rho D_{AA^*} \frac{d\omega_A}{dy} \end{aligned} \quad (۷-۳.۱۷)$$

شار جرمی مرکب عبارت است از: شار جرمی همرفتی، به‌علاوه شار جرمی مولکولی، که دومی از معادله (۱-۳.۱۷) به‌دست می‌آید. بنابراین عبارت زیر را برای ضریب خودنفوذی به‌دست می‌آوریم:

$$D_{AA^*} = \frac{1}{3}\bar{u}\lambda \quad (۸-۳.۱۷)$$

سرانجام، با استفاده از معادله‌های (۱۷-۳-۱) و (۳)، نتیجه می‌شود:

$$D_{AA^*} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{KT/\pi m_A}}{\pi d_A^2} \frac{1}{n} = \frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{\pi m_A KT}}{\pi d_A^2} \frac{1}{\rho} \quad (9-3-17)$$

که می‌توان آن را با معادله (۹-۴-۱) برای ویسکوزیته و معادله (۱۲-۳-۹) برای رسانندگی گرمایی مقایسه کرد. به‌دست آوردن فرمولی برای  $D_{AB}$  مربوط به کره‌های صلب با جرم‌ها و قطرهای نابرابر بسیار دشوارتر است. در این‌جا صرفاً نتیجه را نقل می‌کنیم:

$$D_{AB} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{KT}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)} \frac{1}{\pi \left( \frac{1}{4} (d_A + d_B) \right)^2} \frac{1}{n} \quad (10-3-17)$$

یعنی، به‌جای  $1/m_A$  متوسط حسابی  $1/m_B$  و  $1/m_A$ ، و به‌جای  $d_A$  متوسط حسابی  $d_A$  و  $d_B$  را قرار داده‌ایم. بحث قبل نحوه به‌دست آوردن ضریب نفوذ با استفاده از مسافت‌های آزاد میانگین را نشان می‌دهد. برای کسب نتایج دقیق باید از نظریه سینتیکی چاپمن-انسکوگ استفاده کرد. نتایج چاپمن-انسکوگ برای ویسکوزیته و رسانندگی گرمایی، به‌ترتیب، در بخش‌های ۴-۱ و ۳-۹ ارائه شد. فرمول متناظر برای  $cD_{AB}$  عبارت است از: ۳-۲

$$\begin{aligned} cD_{AB} &= \frac{3}{16} \sqrt{\frac{2RT}{\pi}} \left( \frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} \right) \frac{1}{\bar{N} \sigma_{AB}^2 \Omega_{D,AB}} \\ &= 2,2646 \times 10^{-5} \sqrt{T} \left( \frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} \right) \frac{1}{\sigma_{AB}^2 \Omega_{D,AB}} \end{aligned} \quad (11-3-17)$$

یا، اگر  $c$  را با قانون گازهای ایده‌آل،  $p = cRT$ ، تقریب بزنیم، برای  $D_{AB}$  نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} D_{AB} &= \frac{3}{16} \sqrt{\frac{2(RT)^2}{\pi}} \left( \frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} \right) \frac{1}{\bar{N} p \sigma_{AB}^2 \Omega_{D,AB}} \\ &= 0,70018583 \sqrt{T^2} \left( \frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} \right) \frac{1}{p \sigma_{AB}^2 \Omega_{D,AB}} \end{aligned} \quad (12-3-17)$$

در سطر دوم معادله‌های (۱۱-۳-۱۷) و (۱۲-۳-۱۷)،  $p [=] \text{atm}$ ،  $T [=] \text{K}$ ،  $\sigma_{AB} [=] \text{\AA}$ ،  $D_{AB} [=] \text{cm}^2/\text{s}$ ،  $\bar{N}$  کمیت بدون بُعد  $\Omega_{D,AB}$  - «انتگرال برخورد» برای نفوذ تابعی از دمای بدون بُعد  $KT/\varepsilon_{AB}$  است. پارامترهای  $\varepsilon_{AB}$  و  $\sigma_{AB}$  همان‌ها هستند که در رابطه پتانسیل لnard-جونز، بین یک مولکول  $A$  و یک مولکول  $B$  ایجاد می‌شوند (مقایسه کنید با معادله (۱-۴-۱)).

$$\varphi_{AB}(r) = \varepsilon_{AB} \left[ \left( \frac{\sigma_{AB}}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma_{AB}}{r} \right)^6 \right] \quad (13-3-17)$$

۱. نتیجه مشابهی در منبع زیر ارائه شده است:

R. D. Present, *Kinetic Theory of Gases*, McGraw-Hill, New York (1958), p. 55.

2. S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, 3rd edition, Cambridge University Press (1970), Chapters 10 and 14.

3. J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, 2nd corrected printing, Wiley, New York (1964), p. 539.



این تابع  $\Omega_{D,AB}$  در جدول ۲.۰ و معادله (۲-۲.۰) ارائه شده است. با استفاده از این نتایج می توان دریافت که  $D_{AB}$  در دماهای پایین با توان  $۲/۰$  دمای  $T$ ، و در دماهای بسیار بالا با توان  $۱/۶۵$  دمای  $T$  افزایش می یابد؛ نگاه کنید به منحنی  $p_r \rightarrow 0$  در شکل ۱-۲.۱۷. برای کره های صلب،  $\Omega_{D,AB}$  در همه دماها برابر واحد است و نتیجه ای نظیر معادله (۱۰-۳.۱۷) عاید خواهد شد.

پارامترهای  $\sigma_{AB}$  و  $\varepsilon_{AB}$  را، اصولاً، می توان با اندازه گیری دقیق  $D_{AB}$  درگستره وسیعی از دما، مستقیماً تعیین کرد. هنوز برای بسیاری از زوج های گازی داده های مناسب تهیه نشده است و باید به خاصیت قابل اندازه گیری دیگری، مانند ویسکوزیته مخلوطی<sup>۴</sup> دوتایی از  $A$  و  $B$  متوسل شد. در صورتی که هیچ داده ای موجود نباشد، می توان  $\sigma_{AB}$  و  $\varepsilon_{AB}$  را با استفاده از قاعده های ترکیب زیر برای زوج های گازی غیرقطبی به دست آورد:<sup>۵</sup>

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{4}(\sigma_A + \sigma_B) \quad \varepsilon_{AB} = \sqrt{\varepsilon_A \varepsilon_B} \quad (15, 14-3.17)$$

استفاده از این قواعد ترکیب به ما امکان می دهد که مقادیر  $D_{AB}$  را، با استفاده از داده های ویسکوزیته گونه های خالص  $A$  و  $B$ ، با حدود ۶٪ خطا، و در صورت تخمین زدن پارامترهای لارند-جونز از روی نقطه جوش و به کمک معادله (۱۲-۴.۱) با حدود ۱۰٪ خطا پیش بینی کنیم.<sup>۶</sup>

برای زوج های ایزوتوپ،  $\varepsilon_{AA^*} = \varepsilon_A = \varepsilon_{A^*}$  و  $\sigma_{AA^*} = \sigma_A = \sigma_{A^*}$ ؛ یعنی میدان های نیروی بین مولکولی برای زوج های مختلف  $A-A$ ،  $A-A^*$ ،  $A^*-A^*$ ، همانندند، و پارامترهای  $\sigma_A$  و  $\varepsilon_A$  را می توان از داده های ویسکوزیته مربوط به  $A$  خالص به دست آورد. به علاوه، اگر  $M_A$  بزرگ باشد، معادله (۱۱-۳.۱۷) به صورت زیر ساده می شود:

$$cD_{AA^*} = 3,72027 \times 10^{-5} \sqrt{\frac{T}{M_A \sigma_A^2 \Omega_{D,AA^*}}} \quad (16-3.17)$$

معادله متناظر برای مدل کره صلب به صورت معادله (۹-۳.۱۷) نشان داده می شود. از مقایسه معادله (۱۶-۳.۱۷) با معادله (۱۴-۴.۱) مشاهده می شود که ضریب خودنفوذی  $D_{AA^*}$ ، و ویسکوزیته  $\mu$  (یا ویسکوزیته سینماتیکی  $\nu$ ) در زوج های گازی ایزوتوپ سنگین، در چگالی پایین، با رابطه زیر به هم مربوط می شوند:

$$\frac{\mu}{\rho D_{AA^*}} = \frac{\nu}{D_{AA^*}} = \frac{5}{6} \frac{\Omega_{D,AA^*}}{\Omega_\mu} \quad (17-3.17)$$

که در آن، درگستره وسیعی از  $KT/\varepsilon_A$ ، داریم  $\Omega_\mu \approx 1/11 \Omega_{D,AA^*}$ ، که با رجوع به جدول ۲.۰ نیز می توان آن را مشاهده کرد. بنابراین برای خودنفوذی داریم  $D_{AA^*} \approx 1/32 \nu$ . رابطه بین  $\nu$  و ضریب نفوذ دوتایی  $D_{AB}$  به این سادگی نیست، زیرا ممکن است با تغییر ترکیب شیمیایی،  $\nu$  به شدت تغییر کند. عدد اشمیت  $Sc = \mu/\rho D_{AB}$ ، برای اغلب زوج های گازی، درگستره ۰/۲ تا ۵/۰ است.

معادله های (۱۷-۳.۱۷)، ۱۲، ۱۶، و ۱۷) برای گازهای تک اتمی غیرقطبی به دست آمدند، اما برای گازهای چند اتمی غیرقطبی نیز به کار می آیند. به علاوه، این معادله ها را می توان برای پیش بینی  $D_{AB}$  برای نفوذ متقابل یک گاز قطبی و یک

4. S. Weissman and E. A. Mason, *J. Chem. Phys.*, **37**, 1289-1300 (1962); S. Weissman, *J. Chem. Phys.*, **40**, 3397-3406 (1964).

5. J. O. Hirschfelder, R. B. Bird, and E. L. Spotz, *Chem. Revs.*, **44**, 205-231 (1949); S. Gotoh, M. Manner, J. P. Sorensen, and W. E. Stewart, *J. Chem. Eng. Data*, **19**, 169-171 (1974).

6. R. C. Reid, J. M. Prausnitz, and B. E. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, 4th edition, McGraw-Hill, New York (1987).

گاز غیرقطبی با استفاده از قوانین ترکیبی متفاوت با قوانین ارائه شده در<sup>۷</sup> معادله‌های (۱۴-۳.۱۷) و (۱۵)، نیز به‌کار برد.

### مثال ۱۴-۱۷

محاسبه ضریب نفوذ جرمی برای گازهای با چگالی پایین مقدار  $D_{AB}$  را برای سیستم  $\text{CO} - \text{CO}_2$  در  $296.15 \text{ K}$  و فشار کل  $1 \text{ atm}$  پیش‌بینی کنید. حل پارامترهای زیر را از جدول ۱۰ به‌دست می‌آوریم:

$$\text{CO:} \quad M_A = 28.01 \quad \sigma_A = 3.590 \text{ \AA} \quad \varepsilon_{A/K} = 110 \text{ K}$$

$$\text{CO}_2: \quad M_B = 44.01 \quad \sigma_B = 3.996 \text{ \AA} \quad \varepsilon_{B/K} = 190 \text{ K}$$

سپس پارامترهای مخلوط را با استفاده از معادله‌های (۱۴-۳.۱۷) و (۱۵) تخمین می‌زنیم:

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2}(3.590 + 3.996) = 3.793 \text{ \AA} \quad (14-3.17)$$

$$\varepsilon_{AB/K} = \sqrt{(110)(190)} = 144.6 \text{ K} \quad (19-3.17)$$

بنابراین دمای بدون بُعد عبارت است از:  $KT/\varepsilon_{AB} = (296.15)/(144.6) = 2.048$  از جدول ۲.۰ می‌توان انتگرال برخورد برای نفوذ را به‌دست آورد و داریم:  $\Omega_{D,AB} = 1.067$  با جایگزینی مقادیر در معادله (۱۴-۳.۱۷) نتیجه می‌شود:

$$D_{AB} = 0.0018583 \sqrt{\frac{1}{(296.15)^2} \left( \frac{1}{28.01} + \frac{1}{44.01} \right) \frac{1}{(1.067)(3.793)^2 (1.067)^2}} \\ = 0.149 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (20-3.17)$$

### ۴.۱۷ نظریه نفوذ در مایعات دوتایی

نظریه سینتیکی نفوذ در مایعات ساده به خوبی گازهای رقیق پی‌ریزی نشده است و در حال حاضر نمی‌توان پیش‌بینی‌های تحلیلی دقیق از ضرایب نفوذ ارائه داد. در نتیجه درک ما از نفوذ مایعات عمدتاً به مدل‌های نسبتاً ابتدایی هیدرودینامیکی و حالت فعال وابسته است. این مدل‌ها نیز، به نوبه خود، به پیدایش روابط تجربی متعددی منتهی شده‌اند که بهترین ابزارهای موجود برای پیش‌بینی به‌شمار می‌روند. این روابط همبستگی تخمین زدن ضرایب نفوذ برحسب خواصی مانند ویسکوزیته و حجم مولی را امکان‌پذیر می‌کنند که آسان‌تر می‌توان آن‌ها را اندازه‌گیری کرد.

7. J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, 2nd corrected printing, Wiley, New York (1964), §8.6b and p. 1201.

در باره گازهای قطبی و مخلوط‌های گازی در منبع زیر بحث شده است:

E. A. Mason and L. Monchick, *J. Chem. Phys.*, **36**, 2746-2757 (1962).

1. R. J. Bearman and J. G. Kirkwood, *J. Chem. Phys.*, **28**, 136-145 (1958).

2. R. J. Bearman, *J. Phys. Chem.*, **65**, 1961-1968 (1961).

3. C. F. Curtiss and R. B. Bird, *J. Chem. Phys.*, **111**, 10362-10370 (1999).

نظریه هیدرودینامیکی نقطه شروع خود را معادله نرنست-انشتین<sup>۴</sup> انتخاب می‌کند که بنابه آن ضریب نفوذ یک ذره تنها یا مولکول حل شده  $A$  در محیط ساکن  $B$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D_{AB} = KT(u_A/F_A) \quad (۱-۴.۱۷)$$

که در آن  $u_A/F_A$  «تحرک» ذره  $A$  است (یعنی سرعت حالت پایایی که ذره تحت اثر نیروی واحد کسب می‌کند). منشأ پیدایش معادله (۱-۴.۱۷) در بخش ۵.۱۷، در ارتباط با حرکت براونی سوسپانسیون‌های کلوئیدی شرح داده شد. اگر شکل و اندازه  $A$  معلوم باشد، می‌توان تحرک را با حل معادله جریان خزشی حرکت<sup>۵</sup> (معادله (۸-۵.۳)) محاسبه کرد. بنابراین اگر  $A$  کروی باشد و اگر امکان «لغزش» در فصل مشترک سیال-جامد را به حساب بیاوریم، نتیجه زیر به دست می‌آید:<sup>۶</sup>

$$\frac{u_A}{F_A} = \left( \frac{3\mu_B + R_A\beta_{AB}}{4\mu_B + R_A\beta_{AB}} \right) \frac{1}{6\pi\mu_B R_A} \quad (۲-۴.۱۷)$$

که در آن  $\mu_B$  ویسکوزیته حلال خالص،  $R_A$  شعاع ذره حل شده، و  $\beta_{AB}$  «ضریب اصطکاک لغزشی» (از لحاظ صوری همان  $\mu/\zeta$  مسئله ۲.ب.۹) است. حالت‌های حدی  $\beta_{AB} = \infty$  و  $\beta_{AB} = 0$  اهمیت خاصی دارند: (الف)  $\beta_{AB} = \infty$  (وضعیت بدون لغزش)؛

در این حالت معادله (۲-۴.۱۷) به قانون استوکس (معادله (۱۵-۶.۲)) و معادله (۱-۴.۱۷) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{D_{AB}\mu_B}{KT} = \frac{1}{6\pi R_A} \quad (۳-۴.۱۷)$$

که معمولاً معادله استوکس-انشتین نامیده می‌شود. این معادله در مورد نفوذ هر مولکول کروی<sup>۷</sup> بسیار بزرگ در حلال‌های با وزن مولکولی کم و در مورد ذرات معلق معتبر است. عبارت‌های نظیر این عبارت برای ذرات غیرکروی پی‌ریزی شده و در تخمین شکل مولکول‌های پروتئین به کار رفته‌اند.<sup>۸،۹</sup> (ب)  $\beta_{AB} = 0$  (وضعیت لغزش کامل).

در این حالت معادله (۱-۴.۱۷) به رابطه زیر تبدیل می‌شود (نگاه کنید به معادله (۴-۳.۴)):

$$\frac{D_{AB}\mu_B}{KT} = \frac{1}{4\pi R_A} \quad (۴-۴.۱۷)$$

4. see §17.7 & E. A. Moelwyn-Hughes, *Physical Chemistry*, 2nd ed, corrected printing, Macmillan, New York (1964), pp. 62-74. See also R. J. Silbey & R. A. Alberty, *Physical Chemistry*, 3rd ed, Wiley, New York (2001), 20.2. see also H. C. Öttinger, *AIChE Journal*, **35**, 279-286 (1989).

5. S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*, Butterworth Heinemann, Boston (1991).

6. H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th edition, Cambridge University Press (1932), reprinted (1997), 337.

7. A. Polson, *J. Phys. Colloid Chem.*, **54**, 649-652 (1950).

8. H. J. V. Tyrrell, *Diffusion and Heat Flow in Liquids*, Butterworths, London (1961), Chapter 6.

۹. حرکت خزشی حول اجسام متاهی در سیالی با گستره نامتناهی در منبع زیر مرور شده‌است.

J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1965); see also S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*, Butterworth-Heinemann, Boston (1991). G. K. Youngren and A. Acrivos, *J. Chem. Phys.*, **63**, 3846-3848 (1975).

اگر مولکول‌های  $A$  و  $B$  همانند باشند (یعنی درحالت خودنفوذی) و اگر بتوان فرض کرد که این مولکول‌ها شبکه‌ای مکعبی تشکیل می‌دهند که در آن مولکول‌های مجاور صرفاً باهم تماس دارند، آن‌گاه  $\sqrt[3]{2R_A} = (\tilde{V}_A/\tilde{N}_A)^{1/3}$  و:

$$\frac{D_{AA}\mu_A}{KT} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\tilde{N}_A}{\tilde{V}_A} \right)^{1/3} \quad (5-4.17)$$

معلوم شده که معادله (۵-۴.۱۷) با داده‌های<sup>۱۰</sup> خودنفوذی در تعدادی از مایعات، شامل مواد قطبی، فلزات مایع، و گوگرد مذاب، با حدود ۱۲٪ خطا، در توافق است.

مدل هیدرودینامیکی برای نفوذ دوتایی (یعنی درحالتی که  $A$  همانند  $B$  نباشد) کارایی کم‌تری دارد، اگرچه وابستگی‌های دما و ویسکوزیته پیش‌بینی شده تقریباً صحیح است.

در نظر داشته باشید که فرمول بالا فقط در مورد محلول‌های رقیق  $A$  در  $B$  قابل‌کاربرد است. اما تلاش‌هایی به عمل آمده که این مدل هیدرودینامیکی را به محلول‌هایی با غلظت محدود نیز تعمیم دهند.<sup>۱۱</sup>

نظریه حالت فعال‌شده آیرینگ در تلاش است تا رفتار انتقال را از طریق یک مدل شبه‌بلورین حالت مایع توضیح دهد.<sup>۱۲</sup> در این نظریه فرض می‌شود که فرایندی با آهنگ تک‌مولکولی وجود دارد که می‌توان نفوذ را برحسب آن توصیف کرد، و به علاوه فرض می‌شود که در این فرایند پیکربندی وجود دارد که می‌توان آن را به عنوان «حالت فعال‌شده» شناسایی کرد. نظریه آهنگ‌های واکنش آیرینگ در مورد این فرایند ابتدایی، به شیوه‌ای نظیر شیوه توصیف‌شده در بخش ۵.۱ برای تخمین ویسکوزیته مایعات، به کار می‌رود. مدل اصلاح‌شده‌ای براساس مدل اولیه آیرینگ، که ری، آیرینگ، و همکاران ابداع کردند،<sup>۱۳</sup> عبارتی شبیه معادله (۵-۴.۱۷) را برای مقادیر ناچیز  $A$  در حلال  $B$  به دست می‌دهد:

$$\frac{D_{AB}\mu_B}{KT} = \frac{1}{\xi} \left( \frac{\tilde{N}_A}{\tilde{V}_B} \right)^{1/3} \quad (6-4.17)$$

در این جا  $\xi$  «پارامتر انباشت» است، که در این نظریه معرف تعداد نزدیک‌ترین همسایگان هر مولکول حلال مفروض است. در حالت خاص خودنفوذی،  $\xi$  بسیار نزدیک به  $2\pi$  است، به طوری که معادله‌های (۵-۴.۱۷) و (۶)، به رغم اختلاف بین مدل‌هایی که منشأ پیدایش آن‌ها بوده‌اند، توافق خوبی باهم دارند.

نظریه آیرینگ بر مدل بسیار ساده‌شده حالت مایع مبتنی است و در نتیجه شرایط لازم برای اعتبار آن روشن نیست. اما بیرمن نشان داده‌است<sup>۲</sup> که مدل آیرینگ برای «حلال‌های منظم»، یعنی برای مخلوط‌های تشکیل‌شده از مولکول‌هایی با اندازه، شکل، و نیروهای بین‌مولکولی مشابه، نتایجی سازگار با مکانیک آماری ارائه می‌دهد. بیرمن، برای این وضعیت حدی، عبارتی نیز برای وابستگی ضریب نفوذ به غلظت پیدا کرد:

$$\frac{D_{AB}\mu_B}{(D_{AB}\mu_B)_{x_A \rightarrow 0}} = \left[ 1 + x_A \left( \frac{\tilde{V}_A}{\tilde{V}_B} - 1 \right) \right] \left( \frac{\partial \ln a_A}{\partial \ln x_A} \right)_{T,p} \quad (7-4.17)$$

10. J. C. M. Li and P. Chang, *J. Chem. Phys.*, **23**, 518-520 (1955).

11. C. W. Pyun and M. Fixman, *J. Chem. Phys.*, **41**, 937-944 (1964).

12. S. Glasstone, K. J. Laidler, and H. Eyring, *Theory of Rate Processes*, McGraw-Hill, New York (1941), Chapter IX.

13. H. Eyring, D. Henderson, B. J. Stover, and E. M. Eyring, *Statistical Mechanics and Dynamics*, Wiley, New York (1964), §16.8.

که در آن  $D_{AB}$  و  $\mu_B$  ضریب نفوذ و ویسکوزیته مخلوط در ترکیب  $x_A$ ، و  $a_A$  فعالیت ترمودینامیکی گونه‌هاست. برای محلول‌های منظم، حجم‌های مولی جزئی  $\bar{V}_A$  و  $\bar{V}_B$  با حجم‌های مولی اجزای خالص برابرند. بیرمن می‌گوید که براساس تحلیل او، معادله (۴.۱۷) باید به محلول‌های منظم محدود شود، و درحقیقت معلوم شده که این معادله فقط در مورد محلول‌های بسیار نزدیک به ایده‌آل به خوبی قابل‌کاربرد است.

به‌علت ماهیت غیرقابل‌قبول نظریه نفوذ در مایعات، باید به عبارتهای تجربی اتکا کرد. به‌عنوان مثال، معادله ویلکه-چانگ<sup>۱۴</sup> ضریب نفوذ برای غلظتهای کم  $A$  و  $B$  را به‌صورت زیر ارائه می‌دهد:

$$D_{AB} = 7.4 \times 10^{-8} \frac{\sqrt{\psi_B M_B T}}{\mu \bar{V}_A^{1/3}} \quad (4.17)$$

در این جا  $\bar{V}_A$  حجم مولی مولکول حل‌شده  $A$  در هر  $\text{cm}^3/\text{g-mole}$  مایع در نقطه جوش عادی آن،  $\mu$  ویسکوزیته محلول برحسب سانتی‌پواز،  $\psi_B$  (پارامتر وابستگی) برای حلال، و  $T$  دمای مطلق برحسب  $K$  است. مقادیر توصیه‌شده  $\psi_B$  عبارت‌اند از: ۲/۶ برای آب؛ ۱/۹ برای متانول؛ ۱/۹ برای بنزن، اتر، هپتان، و سایر حلال‌های غیروابسته. معادله (۴.۱۷) فقط برای محلول‌های رقیق مولکول‌های حل‌شده غیروابسته مفید است. برای چنین محلول‌هایی، دقت آن در حدود  $\pm 10\%$  است.

روابط تجربی دیگری، همراه با امتیازهای نسبی آن‌ها، توسط رید، پراسنیتز، و پولینگ خلاصه شده‌اند.<sup>۱۵</sup>

#### مثال ۴.۱۷

تخمین ضریب نفوذ مایعات

مطلوب است تخمین  $D_{AB}$  برای محلول رقیق TNT (تری‌نیتروتولون ۲، ۴، و ۶) در بنزن در دمای  $15^\circ\text{C}$ .

حل

از معادله ویلکه و چانگ استفاده می‌کنیم و TNT را جزء  $A$  و بنزن را جزء  $B$  در نظر می‌گیریم. داده‌های لازم عبارت‌اند از:

$$\mu = 0.705 \text{ cp (ویسکوزیته بنزن خالص)}$$

$$V_A = 140 \text{ cm}^3/\text{g-mole (برای TNT)}$$

$$\psi_B = 1.0 \text{ (برای بنزن)}$$

$$M_B = 78.11 \text{ (برای بنزن)}$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله (۴.۱۷) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} D_{AB} &= 7.4 \times 10^{-8} \frac{\sqrt{(1.0)(78.11)(273 + 15)}}{(0.705)(140)^{1/3}} \\ &= 1.38 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s} \end{aligned} \quad (4.17)$$

این نتیجه با مقدار اندازه‌گیری‌شده  $1.39 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$  کاملاً قابل‌مقایسه است.

14. C. R. Wilke, *Chem. Eng. Prog.*, **45**, 218-224 (1949); C. R. Wilke and P. Chang, *AIChE Journal*, **1**, 264-270 (1955).

15. R. C. Reid, J. M. Prausnitz, and B. E. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, 4th edition, McGraw-Hill, New York (1987), Chapter 11.

۵.۱۷ نظریه نفوذ در سوسپانسیون‌های کلوئیدی<sup>۳،۲،۱</sup>

حال به سراغ حرکت ذرات کلوئیدی کوچک در یک مایع می‌رویم. مخصوصاً یک سوسپانسیون رقیق و کاملاً پراکنده از ذرات کروی ماده  $A$  در مایع ساکن  $B$  را در نظر می‌گیریم. وقتی کره‌های  $A$  به اندازه کافی کوچک باشند (اما در مقایسه با مولکول‌های محیط سوسپانسیون بزرگ باشند)، برخورد بین کره‌ها و مولکول‌های  $B$  سبب حرکت بی‌نظم کره‌ها خواهد شد. این حرکت تصادفی را حرکت براونی می‌نامند.<sup>۴</sup>

حرکت هر کره را می‌توان با یک معادله حرکت، موسوم به معادله لانتون بیان کرد:

$$m \frac{d\mathbf{u}_A}{dt} = -\zeta \mathbf{u}_A + \mathbf{F}(t) \quad (۱-۵.۱۷)$$

که در آن  $\mathbf{u}_A$  سرعت لحظه‌ای کره به جرم  $m$  است. جمله  $-\zeta \mathbf{u}_A$  نیروی پسای قانون استوکس را به دست می‌دهد که عبارت است از:  $\zeta = 6\pi\mu_B R_A$  و همان «ضریب اصطکاک» است. سرانجام  $\mathbf{F}(t)$  نیروی نامنظم حرکت براونی است که به سرعت نوسان می‌کند. معادله (۱-۵.۱۷) را نمی‌توان به معنای متداول حل کرد، زیرا حاوی نیروی  $\mathbf{F}(t)$  است که نوسانات تصادفی دارد. معادله‌هایی از قبیل معادله (۱-۵.۱۷) را «معادله‌های دیفرانسیل تصادفی» می‌نامند. فرض می‌شود که (۱)  $\mathbf{F}(t)$  از  $\mathbf{u}_A$  مستقل است و (۲) تغییرات  $\mathbf{F}(t)$  بسیار سریع‌تر از تغییرات  $\mathbf{u}_A$  است؛ براین اساس می‌توان از معادله (۱-۵.۱۷) احتمال  $W(\mathbf{u}_A, t; \mathbf{u}_{A0}) d\mathbf{u}_A$  را استخراج کرد که احتمال حرکت ذره با سرعتی درگستره  $\mathbf{u}_A$  تا  $\mathbf{u}_A + d\mathbf{u}_A$ ، را در زمان  $t$ ، نشان می‌دهد. استدلال فیزیکی مستلزم آن است که وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، چگالی احتمال  $W(\mathbf{u}_A, t; \mathbf{u}_{A0})$  به توزیع ماکسولوی (تعادلی) برسد.

$$W(\mathbf{u}_A, t; \mathbf{u}_{A0}) \rightarrow \left(\frac{m}{\sqrt{2\pi KT}}\right)^{3/2} \exp(-m\mathbf{u}_A^2/2KT) \quad (۲-۵.۱۷)$$

در این جا  $T$  دمای سیالی است که ذره در آن معلق است.

کمیت دیگری که می‌توان آن را از معادله لانتون به دست آورد، احتمال  $W(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, \mathbf{u}_{A0}) d\mathbf{r}$  است؛ یعنی احتمال بودن ذره در زمان  $t$ ، در مکانی درگستره  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ . هرگاه مکان و سرعت اولیه آن  $\mathbf{r}_0$  و  $\mathbf{u}_{A0}$  باشند. برای

1. A. Einstein, *Ann. d. Phys.*, **17**, 549-560 (1905), **19**, 371-381 (1906); *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*, Dover, New York (1956).

2. S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 1-89 (1943).

3. W. B. Russel, D. A. Saville, and W. R. Schowalter, *Colloidal Dispersions*, Cambridge University Press (1989); H. C. Öttinger, *Stochastic Processes in Polymeric Fluids*, Springer, Berlin (1996).

۴. به افتخار گیاه‌شناس مشهور

R. Brown, *Phil. Mag.* (4), p. 161 (1828); *Ann. d. Phys. u. Chem.*, **14**, 294-313 (1828).

نام‌گذاری شده است. در واقع این پدیده در سال ۱۷۸۹ توسط یان اینگنهاوس (۱۷۹۹-۱۷۳۰) در هلند کشف و گزارش داده شده بود.

۵. چنان‌که در مثال ۱-۲.۴ نشان داده شد، قانون استوکس فقط برای حرکت غیرجهت‌دار و پایای کره در یک سیال معتبر است. برای کره‌ای که به شیوه‌ای اختیاری حرکت می‌کند، علاوه بر سهم استوکس، یک جمله لختی و یک جمله انتگرال-حافظه (نیروی بابت)، نیز وجود دارد. نگاه کنید به

A. B. Basset, *Phil. Trans.*, **179**, 43-63 (1887); H. Lamb, *Hydrodynamics*, 6th edition, Cambridge University Press (1932), reprinted (1997), p. 644; H. Villat and J. Kravtchenko, *Lecons sur les Fluids Visqueux*, Gauthier-Villars, Paris (1943), p. 213, Eq. (62); L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon, New York (1987), p. 94.

در کاربرد معادله لانتون در نظریه سینتیکی پلیمر، در منبع زیر، در مورد نقش نیروی بابت تحقیق شده است:

J. D. Schieber, *J. Chem. Phys.*, **94**, 7526-7533 (1991).

زمان‌های طولانی، مخصوصاً  $m/\zeta \gg t$ ، این احتمال از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_0, \mathbf{u}_{A0}) d\mathbf{r} = \left( \frac{\zeta}{4\pi K T t} \right)^{3/2} \exp(-\zeta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 / 4 K T t) d\mathbf{r} \quad (3-5.17)$$

اما، این عبارت درست همان صورت جواب قانون دوم نفوذ فیک برای نفوذ از منبع نقطه‌ای را دارد (نگاه کنید به معادله (۱۸-۱.۱۹) و مسئله ۲۰-۵). باید  $W$  را با غلظت  $c_A$  و  $\zeta/K T$  را با  $D_{AB}$  نشان دهیم. به همین ترتیب انشتین (نگاه کنید به مرجع ۱ در صفحه ۵۳۱) به عبارت زیر برای ضریب نفوذ در سوسپانسیون رقیقی از ذرات کلوئیدی کروی رسید:

$$D_{AB} = \frac{K T}{\zeta} = \frac{K T}{6\pi\mu_B R_A} \quad (4-5.17)$$

بنابراین  $D_{AB}$  به دما و ضریب اصطکاک  $\zeta$  (عکس ضریب اصطکاک را «تحرک» می‌نامند) مربوط می‌شود. معادله (۴-۵.۱۷) قبلاً به صورت معادله (۳-۴.۱۷) برای نفوذ متقابل مایعات به دست آمده بود.

### ۶.۱۷ نظریه نفوذ در پلیمرها

برای محلول رقیق پلیمر  $A$  در حلال  $B$  با وزن مولکولی پایین، نظریه مفصلی وجود دارد، که در آن<sup>۱</sup> مولکول‌های پلیمر به صورت زنجیرهایی از مهره و فنر به هم متصل شده‌اند (نگاه کنید به شکل ۲-۶.۸). هر زنجیر از آرایه‌ای خطی از  $N$  مهره و  $N - 1$  فنر هوکی تشکیل شده است. مهره‌ها با ضریب اصطکاک  $\zeta$  مشخص می‌شوند که مقاومت در برابر حرکت مهره در حلال را، طبق قانون استوکس، نشان می‌دهد. در این مدل این نکته نیز منظور شده که مهره با حرکت به اطراف، حلال را در همسایگی همه مهره‌های دیگر، دچار اختلال می‌کند؛ این پدیده را برهم‌کنش هیدرودینامیکی می‌نامند. این نظریه سرانجام پیش‌بینی می‌کند که ضریب نفوذ باید، به‌ازای مقادیر بزرگ  $N$ ، با  $N^{-1/2}$  متناسب باشد. چون تعداد مهره‌ها با وزن مولکولی  $M$  پلیمر متناسب است، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$D_{AB} \sim \frac{1}{\sqrt{M}} \quad (1-6.17)$$

وابستگی به عکس ریشه دوم با آزمایش تأیید شده است.<sup>۲</sup> اگر برهم‌کنش هیدرودینامیکی در میان مهره‌ها در نظر گرفته نشود، در این صورت می‌توان پیش‌بینی کرد که  $D_{AB} \sim 1/M$ . نظریه خودنفوذی در پلیمر رقیق‌نشده را از چندین دیدگاه بررسی کرده‌اند. این نظریه‌ها، که نسبتاً<sup>۳</sup> ابتدایی‌اند، به این نتیجه منتهی می‌شوند که:

$$D_{AA^*} \sim \frac{1}{M^2} \quad (2-6.17)$$

1. J. G. Kirkwood, *Macromolecules*, Gordon and Breach, New York (1967), pp. 13, 41, 76-77, 95, 101-102.

نظریه اصلی کیرکوود در منبع زیر بررسی و اندکی اصلاح شده است:

H. C. Öttinger, *J. Chem. Phys.*, **87**, 3156-3165 (1987).

2. R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 2, *Kinetic Theory*, 2nd edition, Wiley, New York (1987), pp. 174-175.

۳. دی گس مفهوم خزنده‌واری را معرفی کرد که براساس آن مولکول‌های پلیمر طی یک حرکت براونی مارمانند، در طول اسکلت خود عقب و جلو می‌روند.

4. R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 2, *Kinetic Theory*, 2nd edition, Wiley, New York (1987), pp. 326-327; C. F. Curtiss and R. B. Bird, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **93**, 7440-7445 (1996).

داده‌های تجربی کمابیش با این نتیجه در توافق‌اند، اما<sup>۵</sup> نمای وزن مولکولی برای بعضی پلیمرها ممکن است تا ۳ نیز برسد. اگرچه نظریه‌ای بسیار کلی برای نفوذ پلیمرهای ریزی شده،<sup>۶</sup> اما کار زیادی روی آن انجام نشده است. تا به حال از این نظریه فقط برای نشان دادن این نکته استفاده شده که در محلول‌های رقیق پلیمرهای روان، تانسور ضریب نفوذ (نگاه کنید به معادله (۱.۱۷-۱۰)) ناهمسان‌گرد و وابسته به گرادیان سرعت می‌شود. به علاوه نحوه تعمیم معادله‌های ماکسول-استفان (نگاه کنید به بخش‌های ۹.۱۷ و ۱.۲۴) در مورد مابعات پلیمری چندجزئی نشان داده شده است. پیشرفت‌های بیش‌تر در این زمینه با استفاده از شبیه‌سازی‌های مولکولی، قابل انتظار است.<sup>۷</sup>

## ۷.۱۷ انتقال جرم و انتقال مولی از طریق همرفت

در بخش ۱.۱۷، قانون (اول) نفوذ فیک برحسب واحدهای جرم بیان شد: غلظت جرمی، شار جرمی، و سرعت متوسط جرمی. در این بخش بحث قبل را به واحدهای مولی تعمیم می‌دهیم. بنابراین در قسمت اعظم این بخش با نمادگذاری‌ها و تعاریف سروکار داریم. ممکن است این پرسش منطقی مطرح شود که آیا این مجموعه دوگانه نمادگذاری ضرورت دارد یا نه. متأسفانه ضرورت دارد. وقتی با واکنش‌های شیمیایی سروکار داریم، معمولاً استفاده از واحدهای مولی ترجیح داده می‌شود. وقتی معادله‌های نفوذ را همراه با معادله‌های حرکت حل می‌کنیم، معمولاً استفاده از واحدهای جرمی را ترجیح می‌دهیم؛ بنابراین باید با هر دو آشنا شویم. در این بخش مفهوم شار همرفتی جرمی یا مولی را نیز معرفی می‌کنیم.

### غلظت‌های جرمی و مولی

قبلاً غلظت جرمی  $\rho_\alpha$  را به صورت جرم گونه  $\alpha$  در واحد حجم محلول تعریف کردیم. اکنون غلظت مولی  $c_\alpha = \rho_\alpha / M_\alpha$  را به عنوان تعداد مول‌های  $\alpha$  در واحد حجم محلول معرفی می‌کنیم. به همین ترتیب، علاوه بر کسر جرمی  $\omega_\alpha = \rho_\alpha / \rho$ ، از کسر مولی  $x_\alpha = c_\alpha / c$  استفاده خواهیم کرد. در این جا  $\rho = \sum \rho_\alpha$  عبارت است از: جرم کل همه گونه‌ها در واحد حجم محلول، و  $c = \sum c_\alpha$  تعداد کل مول‌های همه گونه‌ها در واحد حجم محلول است. منظور ما از «محلول» یک مخلوط تک‌فاز گازی، مایع، یا جامد است. در جدول ۷.۱۷-۱ این واحدهای غلظتی و روابط بین آن‌ها را، برای سیستم‌های چندجزئی خلاصه کرده‌ایم. لازم به تأکید است که  $\rho_\alpha$  غلظت جرمی گونه‌های  $\alpha$  در مخلوط است. از نماد  $\rho^{(\alpha)}$  برای نشان دادن چگالی گونه خالص  $\alpha$ ، هنگامی که ضرورت اقتضا کند، استفاده خواهیم کرد.

### سرعت متوسط جرمی و سرعت متوسط مولی

در مخلوط‌های نفوذی، گونه‌های شیمیایی مختلف با سرعت‌های مختلف حرکت می‌کنند. منظور ما از  $\mathbf{v}_\alpha$  «سرعت گونه  $\alpha$ »، سرعت یک مولکول از گونه  $\alpha$  نیست. بلکه منظور ما سرعت متوسط همه مولکول‌های گونه  $\alpha$  در حجمی کوچک است. بنابراین، برای مخلوطی از  $N$  گونه، سرعت متوسط جرمی موضعی  $\mathbf{v}$  چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{\rho} = \sum_{\alpha=1}^N \omega_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad (۷-۱۷)$$

5. P. F. Green, in *Diffusion in Polymers* (P. Neogi, ed.), Dekker, New York (1996), Chapter 6. According to T. P. Lodge, *Phys. Rev. Letters*, **86**, 3218-3221 (1999),

اندازه‌گیری‌های انجام شده روی پلیمرهای رقیق نشده نشان می‌دهد که نمای وزن مولکولی باید در حدود  $2/3$  باشد.

6. C. F. Curtiss and R. B. Bird, *Adv. Polym. Sci.*, **125**, 1-101 (1996) and *J. Chem. Phys.*, **111**, 10362-10370 (1999).

7. D. N. Theodorou, in *Diffusion in Polymers* (P. Neogi, ed.), Dekker, New York (1996), Chapter 2.



جدول ۷.۱۷-۱ نمادگذاری برای غلظت‌ها.

تعریف‌های پایه:	
$\rho_\alpha = \alpha$ غلظت جرمی گونه $\alpha$	(الف)
$\rho = \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha$ چگالی جرمی محلول	(ب)
$\omega_\alpha = \rho_\alpha / \rho = \alpha$ کسر جرمی گونه $\alpha$	(ج)
$c_\alpha = \alpha$ غلظت مولی گونه $\alpha$	(د)
$c = \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha$ چگالی مولی محلول	(ه)
$x_\alpha = c_\alpha / c = \alpha$ کسر مولی گونه $\alpha$	(و)
$M = \rho / c =$ وزن مولکولی متوسط مولی محلول	(ز)
روابط جبری:	
$c_\alpha = \rho_\alpha / M_\alpha$	(ح) (ط)
$\sum_{\alpha=1}^N x_\alpha = 1$	(ی) (ک)
$\sum_{\alpha=1}^N x_\alpha M_\alpha = M$	(ل) (م)
$x_\alpha = \frac{\omega_\alpha / M_\alpha}{\sum_{\beta=1}^N (\omega_\beta / M_\beta)}$	(ن) (س)
$\rho_\alpha = c_\alpha M_\alpha$	
$\sum_{\alpha=1}^N \omega_\alpha = 1$	
$\sum_{\alpha=1}^N \omega_\alpha / M_\alpha = 1 / M$	
$\omega_\alpha = \frac{x_\alpha M_\alpha}{\sum_{\beta=1}^N (x_\beta M_\beta)}$	

روابط دیفرانسیلی:

$$\nabla x_\alpha = -\frac{M}{M_\alpha} \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^N \left[ \frac{1}{M} + \omega_\alpha \left( \frac{1}{M_\gamma} - \frac{1}{M_\alpha} \right) \right] \nabla \omega_\gamma \quad \text{(ع) الف}$$

$$\nabla \omega_\alpha = -\frac{M}{M_\alpha} \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^N [M + x_\alpha (M_\gamma - M_\alpha)] \nabla x_\gamma \quad \text{(ف) الف}$$

معادله‌های (ع) و (ف)، که برای سیستم‌های دوتایی ساده شده‌اند، عبارت‌اند از:

$$\nabla x_A = \frac{1}{\left( \frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B} \right)^2} \nabla \omega_A \quad \text{(ع')}$$

$$\nabla \omega_A = \frac{M_A M_B \nabla x_A}{(x_A M_A + x_B M_B)^2} \quad \text{(ف')}$$

توجه داشته باشید که  $\rho \mathbf{v}$  آهنگ موضعی عبور جرم از واحد سطح مقطع عمود بر امتداد سرعت  $\mathbf{v}$  است. این سرعتی موضعی است که می‌توان با استفاده از لولهٔ پیتو، یا سرعت‌سنج لیزری دوپلر آن را اندازه‌گیری کرد و با  $\mathbf{v}$  به‌کاررفته در معادلهٔ حرکت و معادلهٔ انرژی در فصل‌های پیش، برای سیالات خالص، متناظر است. به‌همین ترتیب، می‌توان سرعت متوسط مولی موضعی  $\mathbf{v}^*$  را، به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathbf{v}^* = \frac{\sum_{\alpha=1}^N c_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^N c_\alpha} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N c_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{c} = \sum_{\alpha=1}^N x_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad (۷.۱۷-۲)$$

توجه کنید که  $cV^*$  آهنگ موضعی عبور مول‌ها از واحد مقطع عمود بر سرعت مولی  $v^*$  است. هم سرعت متوسط جرمی و هم سرعت متوسط مولی در دنباله این کتاب کاربرد گسترده‌ای دارند. گاهی از انواع دیگر سرعت متوسط، مانند سرعت متوسط حجمی (نگاه کنید به مسئله ۱۷ ج. ۱) نیز استفاده می‌شود. در جدول ۲-۷.۱۷ خلاصه‌ای از روابط بین این سرعت‌ها ارائه شده است.

جدول ۲-۷.۱۷ نمادگذاری برای سرعت‌ها در سیستم‌های چندجزئی.

تعریف‌های پایه:	
(الف)	سرعت گونه $\alpha$ نسبت به دستگاه مختصات ثابت $v_\alpha$
(ب)	سرعت متوسط جرمی $v = \sum_{\alpha=1}^N \omega_\alpha v_\alpha$
(ج)	سرعت متوسط مولی $v^* = \sum_{\alpha=1}^N x_\alpha v_\alpha$
(د)	سرعت نفوذ گونه $\alpha$ نسبت به سرعت متوسط جرمی $v$ $v_\alpha - v$
(ه)	سرعت نفوذ گونه $\alpha$ نسبت به سرعت متوسط مولی $v^*$ $v_\alpha - v^*$
روابط دیگر:	
(و)	$v^* - v = \sum_{\alpha=1}^N x_\alpha (v_\alpha - v)$
(ز)	$v - v^* = \sum_{\alpha=1}^N \omega_\alpha (v_\alpha - v^*)$

### شارهای مولی و جرمی مولکولی

در بخش ۱.۱۷ شار جرمی مولکولی  $\alpha$  را به صورت جریان جرم  $\alpha$  در واحد سطح بر واحد زمان تعریف کردیم:  $J_\alpha = \rho_\alpha (v_\alpha - v)$ . یعنی فقط سرعت گونه  $\alpha$  را نسبت به سرعت متوسط جرمی  $v$  در نظر گرفتیم. به همین ترتیب، شار مولی مولکولی گونه  $\alpha$  را به صورت تعداد مول‌های گونه  $\alpha$  که در واحد زمان از واحد سطح عبور می‌کند، تعریف می‌کنیم:  $J_\alpha^* = c_\alpha (v_\alpha - v^*)$ . در این جا فقط سرعت گونه  $\alpha$  را نسبت به سرعت متوسط مولی  $v^*$  در نظر می‌گیریم. سپس در بخش ۱.۱۷ قانون (اول) نفوذ فیک را ارائه دادیم که نحوه انتقال جرم گونه‌های  $A$  در مخلوطی دوتایی را، از طریق حرکت‌های مولکولی توصیف می‌کند. این قانون را می‌توان برحسب واحدهای مولی نیز بیان کرد. در این جا یک جفت رابطه برای سیستم‌های دوتایی داریم:

$$J_A = \rho_A (v_A - v) = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A \quad (۳-۷.۱۷) \text{ واحدهای جرمی:}$$

$$J_A^* = c_A (v_A - v^*) = -c D_{AB} \nabla x_A \quad (۴-۷.۱۷) \text{ واحدهای مولی:}$$

اختلاف‌های  $v_A - v$  و  $v_A - v^*$  را گاهی سرعت‌های نفوذ می‌نامند. با استفاده از بعضی از روابط جدول‌های ۱-۷.۱۷ و ۲، می‌توان معادله (۴-۷.۱۷) را از معادله (۳-۷.۱۷) به دست آورد.

### شارهای مولی و جرمی همرفتی

علاوه بر انتقال از طریق حرکت مولکولی، جرم را می‌توان از طریق حرکت کلی سیال نیز انتقال داد. در شکل ۱-۷.۹ سه صفحه دوه‌دو عمود برهم، به مساحت  $dS$  را در نقطه  $P$  نشان داده‌ایم که سرعت متوسط جرمی سیال در این نقطه  $v$  است. آهنگ جریان حجمی در صفحه عمود بر جزء سطح  $dS$ ، عمود بر محور  $x$ ، برابر  $v_x dS$  است. بنابراین آهنگ روپیده شدن جرم گونه  $\alpha$  روی همین جزء سطح برابر  $\rho_\alpha v_x dS$  خواهد بود. می‌توان عبارتهای مشابهی برای جریان‌های جرمی

گونه‌های  $\alpha$  روی جزء سطح‌های عمود بر محورهای  $y$  و  $z$ ، به ترتیب، به صورت  $\rho_\alpha v_y dS$  و  $\rho_\alpha v_z dS$  نوشت. اکنون اگر هریک از این عبارات‌ها را در برداریکه متناظر ضرب کنیم، آن‌ها را با هم جمع کنیم، و سپس بر  $dS$  تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\rho_\alpha \delta_x v_x + \rho_\alpha \delta_y v_y + \rho_\alpha \delta_z v_z = \rho_\alpha v \quad (5-7.17)$$

که بردار شار جرمی همرفتی با واحد  $\text{kg/m}^2 \cdot \text{s}$  است.

اگر به عقب برگردیم و پاراگراف قبل را تکرار کنیم، اما همه‌جا از واحدهای مولی و سرعت متوسط مولی  $v^*$  استفاده کنیم، آن‌گاه نتیجه می‌شود:

$$c_\alpha \delta_x v_x^* + c_\alpha \delta_y v_y^* + c_\alpha \delta_z v_z^* = c_\alpha v^* \quad (6-7.17)$$

که بردار شار مولی همرفتی با واحد  $\text{kg-mole/m}^2 \cdot \text{s}$  است.

برای به دست آوردن شارهای مولی و جرمی همرفتی روی واحد سطح با برداریکه قائم  $\mathbf{n}$ ، به ترتیب، ضرب‌های نقطه‌ای  $(\mathbf{n} \cdot \rho_\alpha \mathbf{v})$  و  $(\mathbf{n} \cdot c_\alpha \mathbf{v}^*)$  را تشکیل می‌دهیم.

### ۸.۱۷ جمع‌بندی شارهای جرمی و مولی

در فصل‌های ۱ و ۹ تانسور شار اندازه حرکت مرکب  $\phi$  و بردار شار انرژی مرکب  $e$  را معرفی کردیم و دیدیم که در نوشتن موازنه‌های لایه‌ای و معادله‌های تغییر به‌کار می‌آیند. در این‌جا تعریف‌های متناظر را برای بردارهای شار مولکولی و جرمی ارائه می‌دهیم. بردار شار جرمی مولکولی و بردار شار جرمی همرفتی را جمع می‌کنیم تا بردار شار جرمی مرکب حاصل شود؛ به همین ترتیب، بردار شار مولی مرکب را نیز به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{j}_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{v} \quad (1-8.17) \text{ شار جرمی مرکب:}$$

$$\mathbf{N}_\alpha = \mathbf{J}_\alpha^* + c_\alpha \mathbf{v}^* \quad (2-8.17) \text{ شار مولی مرکب:}$$

در سه سطر اول جدول ۱-۸.۱۷، تعریف‌های شارهای جرمی و مولی مطرح شده تا این‌جا را خلاصه کرده‌ایم. در مستطیل‌های سایه خورده، تعریف شارهای  $\mathbf{j}_\alpha^*$  (شار جرمی نسبت به سرعت متوسط مولی) و  $\mathbf{J}_\alpha$  (شار مولی نسبت به سرعت متوسط جرمی) را ارائه داده‌ایم. معمولاً نباید از این شارهای «دورگه» استفاده کرد.

در برقیه جدول ۱-۸.۱۷ خلاصه‌ای از سایر روابط سودمند، مانند مجموع شارها و روابط بین شارها ارائه شده است. با استفاده از معادله‌های (ی) و (م)، می‌توان معادله‌های (۱۷-۸.۱) و (۲) را چنین نوشت:

$$\mathbf{j}_\alpha = \mathbf{n}_\alpha - \omega_\alpha \sum_{\beta=1}^N \mathbf{n}_\beta \quad \mathbf{J}_\alpha^* = \mathbf{N}_\alpha - x_\alpha \sum_{\beta=1}^N \mathbf{N}_\beta \quad (4, 3-8.17)$$

وقتی این معادله‌ها را برای سیستم‌های دوتایی ساده کنیم، می‌توانیم آن‌ها را با معادله‌های (۱۷-۳) و (۱۷-۴) ترکیب کنیم و معادله‌های (ج) و (د) جدول ۲-۸.۱۷ را به دست آوریم که صورت‌های هم‌ارز قانون (اول) فیک‌اند. صورت‌های ارائه شده در معادله‌های (ه) و (و) جدول ۲-۸.۱۷، برحسب سرعت‌های نسبی گونه‌ها، جالب‌توجه‌اند، زیرا نه شامل  $v$  هستند و نه شامل  $v^*$ .

در فصل ۱۸ قانون فیک را منحصراً به صورت معادله (د) جدول ۲-۸.۱۷ می‌نویسیم. در مهندسی شیمی معمولاً از همین صورت استفاده می‌شود. در بسیاری از مسئله‌ها، براساس استوکیومتری یا شرایط مرزی، درباره رابطه بین  $\mathbf{N}_A$  و  $\mathbf{N}_B$  اطلاعاتی داریم. بنابراین می‌توانیم  $\mathbf{N}_B$  را از معادله (د) حذف کنیم و رابطه مستقیمی بین  $\mathbf{N}_A$  و  $\nabla x_A$ ، برای مسئله موردنظر، به دست آوریم.

در بخش ۷.۱ گفتیم که شار اندازه حرکت مولکولی کل گذرا از سطحی با جهت‌گیری  $\mathbf{n}$  بردار  $[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi}]$  است. در بخش ۷.۹ کمیتی نظیر برای شار گرمای مولکولی؛ یعنی اسکالر  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{q})$  ارائه دادیم. کمیت‌های انتقال جرم نظیر عبارت‌اند از: اسکالرهایی  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\alpha)$  و  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_\alpha^*)$ ، که شارهای مولی و جرمی کل گذرنده از سطحی با جهت‌گیری  $\mathbf{n}$  را نشان می‌دهند. به همین ترتیب، برای شارهای مرکب گذرنده از سطحی با جهت‌گیری  $\mathbf{n}$ ، برای اندازه حرکت داریم  $[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\phi}]$ ، برای انرژی داریم  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})$ ، و برای گونه‌ها داریم  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\alpha)$  و  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}_\alpha)$ .

جدول ۱۷.۸-۱ نامگذاری برای شارهای جرمی و مولی.\*

نسبت به محورهای ساکن	نسبت به سرعت متوسط جرمی $\mathbf{v}$	نسبت به سرعت متوسط مولی $\mathbf{v}^*$	کمیت
$\mathbf{v}_\alpha$ (الف)	$\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}$ (ب)	$\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}^*$ (ج)	سرعت گونه‌های $\alpha$ (cm/s)
$\mathbf{n}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ (د)	$\mathbf{j}_\alpha = \rho_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v})$ (ه)	$\mathbf{j}_\alpha^* = \rho_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}^*)$ (و)	شار جرمی گونه‌های $\alpha$ (g/cm <sup>2</sup> · s)
$\mathbf{N}_\alpha = c_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ (ز)	$\mathbf{J}_\alpha = c_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v})$ (ح)	$\mathbf{J}_\alpha^* = c_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}^*)$ (ط)	شار مولی گونه‌های $\alpha$ (g-moles/cm <sup>2</sup> · s)
$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{n}_\alpha = \rho \mathbf{v}$ (ی)	$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{j}_\alpha = \mathbf{0}$ (ک)	$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{j}_\alpha^* = \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)$ (ل)	مجموع شارهای جرمی
$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{N}_\alpha = c \mathbf{v}^*$ (م)	$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{J}_\alpha = c (\mathbf{v}^* - \mathbf{v})$ (ن)	$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{J}_\alpha^* = \mathbf{0}$ (س)	مجموع شارهای مولی
$\mathbf{n}_\alpha = M_\alpha \mathbf{N}_\alpha$ (ع)	$\mathbf{j}_\alpha = M_\alpha \mathbf{J}_\alpha$ (ف)	$\mathbf{j}_\alpha^* = M_\alpha \mathbf{J}_\alpha^*$ (ص)	روابط بین شارهای جرمی و مولی
$\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{j}_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{v}$ (ق)	$\mathbf{j}_\alpha = \mathbf{n}_\alpha - \omega_\alpha$ (ر)	$\mathbf{j}_\alpha^* = \mathbf{n}_\alpha - x_\alpha$ (ش) $\sum_{\beta=1}^N \frac{M_\alpha}{M_\beta} \mathbf{n}_\beta$	روابط متقابل بین شارهای جرمی
$\mathbf{N}_\alpha = \mathbf{J}_\alpha^* + c_\alpha \mathbf{v}^*$ (ت)	$\mathbf{J}_\alpha = \mathbf{N}_\alpha - \omega_\alpha$ (ث)	$\mathbf{J}_\alpha^* = \mathbf{N}_\alpha - x_\alpha$ (خ) $\sum_{\beta=1}^N \frac{M_\beta}{M_\alpha} \mathbf{N}_\beta$	روابط متقابل بین شارهای مولی

\* مدخل‌های داخل مستطیل‌های سایه‌خورده شامل «شارهای دورگه»  $\mathbf{j}_\alpha^*$  و  $\mathbf{J}_\alpha$  هستند و به ندرت به آن‌ها نیاز پیدا می‌کنیم؛ این روابط را فقط به خاطر کامل شدن جدول ارائه کرده‌ایم.

جدول ۱۷.۸-۲ صورت‌های هم‌ارز قانون (اول) فیک برای نفوذ دوتایی.

شار	گرادیان	صورت قانون فیک
$\mathbf{j}_A$	$\nabla \omega_A$	$\mathbf{j}_A = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A$ (الف)
$\mathbf{J}_A^*$	$\nabla x_A$	$\mathbf{J}_A^* = -c D_{AB} \nabla x_A$ (ب)
$\mathbf{n}_A$	$\nabla \omega_A$	$\mathbf{n}_A = \omega_A (\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B) - \rho D_{AB} \nabla \omega_A = \rho_A \mathbf{v} - \rho D_{AB} \nabla \omega_A$ (ج)
$\mathbf{N}_A$	$\nabla x_A$	$\mathbf{N}_A = x_A (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) - c D_{AB} \nabla x_A = c_A \mathbf{v}^* - c D_{AB} \nabla x_A$ (د)
$\rho (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B)$	$\nabla \omega_A$	$\rho (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) = -\frac{\rho D_{AB}}{\omega_A \omega_B} \nabla \omega_A$ (ه)
$c (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B)$	$\nabla x_A$	$c (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) = -\frac{c D_{AB}}{x_A x_B} \nabla x_A$ (و)

### ۹.۱۷ معادلات ماکسول-استفان برای نفوذ چندجزئی در گازها در چگالی پایین

برای نفوذ چندجزئی در گازها در چگالی پایین نشان داده شده است که، با تقریب بسیار خوب، داریم:<sup>۲،۱</sup>

$$\nabla x_{\alpha} = - \sum_{\beta=1}^N \frac{x_{\alpha} x_{\beta}}{D_{\alpha\beta}} (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta})$$

$$= - \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{cD_{\alpha\beta}} (x_{\beta} \mathbf{N}_{\alpha} - x_{\alpha} \mathbf{N}_{\beta}) \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1-9.17)$$

در این جا  $D_{\alpha\beta}$  ضرایب نفوذ دوتایی اند که با استفاده از معادله (۱۱-۳.۱۷) یا معادله (۱۲-۳.۱۷) محاسبه شده اند. بنابراین، برای سیستمی  $N$  جزئی، به  $\frac{1}{4}N(N-1)$  ضریب نفوذ دوتایی نیاز داریم.

معادله های (۱-۹.۱۷) را معادله های ماکسول-استفان می نامند، زیرا ماکسول،<sup>۳</sup> براساس نظریه سینتیکی، آن ها را برای مخلوط های دوتایی پیشنهاد کرد و استفان<sup>۴</sup> آن ها را برای توصیف نفوذ در مخلوط گازی با  $N$  گونه، تعمیم داد. بعدها کورتیس و هیرشفلدر معادله های (۱-۹.۱۷) را از تعمیم نظریه چاپمن-انسکوگ به حالت چندجزئی به دست آوردند. نشان داده اند که معادله های ماکسول-استفان برای پلیمرها، مایعات، و گازهای مترکم نیز معتبرند، اما ضرایب نفوذ به شدت وابسته به غلظتی که در این حالت پدیدار می شوند، دیگر ضرایب نفوذ دوتایی نیستند.<sup>۵</sup>

بین نفوذ دوتایی و نفوذ چندجزئی اختلاف مهمی وجود دارد.<sup>۶</sup> در نفوذ دوتایی حرکت گونه  $A$  همواره با منفی گرادیان غلظت گونه های  $A$  متناسب است. اما در نفوذ چندجزئی، ممکن است وضعیت های دیگری پدید آید: (۱) نفوذ معکوس، که در آن یک گونه در جهت مخالف گرادیان غلظت خود حرکت می کند؛ (۲) نفوذ اسمزی، که در آن یک گونه نفوذ می کند، هر چند گرادیان غلظت آن صفر است؛ (۳) سد نفوذ که هنگامی پدید می آید که گونه ای نفوذ نمی کند، اگرچه گرادیان غلظت آن غیر صفر است. به علاوه، شار یک گونه لزوماً با گرادیان غلظت آن گونه هم جهت نیست.

### پرسش های تشریحی

۱. ضریب نفوذ دوتایی را تعریف کنید. خود نفوذی را تعریف کنید. مرتبه بزرگی معمول برای ضریب نفوذ گازها، مایعات، و جامدها را بیان کنید.

۲. نمادگذاری شارهای مولکولی، همرفتی و کل را، برای سه فرایند انتقال، خلاصه کنید. شار جرم، اندازه حرکت، و انرژی گذرنده از سطحی با جهت گیری  $n$  چگونه محاسبه می شود؟

۳. اعداد پرانتل، اشمیت، و لوئیس را تعریف کنید. گستره قابل انتظار  $Sc$  و  $Pr$  برای گازها و مایعات چه قدر است؟

1. C. F. Curtiss and J. O. Hirschfelder, *J. Chem. Phys.*, **17**, 550-555 (1949).

۲. برای آشنایی با کاربردهای مهندسی، نگاه کنید به

E. L. Cussler, *Diffusion: Mass Transfer in Fluid Systems*, 2nd edition, Cambridge University Press (1997); R. Taylor and R. Krishna, *Multicomponent Mass Transfer*, Wiley, New York (1993).

3. J. C. Maxwell, *Phil. Mag.*, **XIX**, 19-32 (1860); **XX**, 21-32, 33-36 (1868).

4. J. Stefan, *Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss. Wien*, **LXIII**(2), 63-124 (1871); **LXV**(2), 323-363 (1872).

5. C. F. Curtiss and R. B. Bird, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **38**, 2515-2522 (1999); **40**, 1791 (2001); *J. Chem. Phys.*, **111**, 10362-10370 (1999).

6. H. L. Toor, *AIChE Journal*, **3**, 198-207 (1959).

۴. در صورت معلوم بودن پارامترهای دو جزء یک مخلوط دوتایی، چگونه می‌توان پتانسیل لنارد-جونز را برای آن مخلوط محاسبه کرد؟
۵. نظریه‌های هیدرودینامیکی نفوذ تا چه میزان ارزش دارند؟
۶. معادله لائون کدام است؟ چرا آن را «معادله دیفرانسیل تصادفی» می‌نامند؟ چه اطلاعاتی از آن حاصل می‌شود؟
۷. رابطه بین ضریب نفوذ دوتایی و ویسکوزیته را برای گازها و مایعات مقایسه کنید.
۸. معادله‌های ماکسول-استفان برای نفوذ چندجزئی در گازها، با معادله‌های فیک برای سیستم‌های دوتایی چه رابطه‌ای دارند؟
۹. در یک مخلوط چندجزئی، آیا از بین رفتن  $N_\alpha$  متضمن از بین رفتن  $\nabla x_\alpha$  است؟

### مسئله‌ها

۱۷ الف ۱. پیش‌بینی ضریب نفوذ دوتایی در چگالی پایین. مطلوب است برآورد  $D_{AB}$  برای سیستم متان-اتان در  $293\text{ K}$  و  $1\text{ atm}$  با استفاده از روش‌های زیر:

(الف) معادله (۱-۲.۱۷):

(ب) نمودار حالت‌های متناظر در شکل ۱-۲.۱۷، همراه با معادله (۳-۲.۱۷):

(ج) رابطه چاپمن-انسکوگ (معادله (۱۲-۳.۱۷)) با پارامترهای لنارد-جونز تخمین زده شده براساس خواص بحرانی.

جواب: (همه برحسب  $\text{cm}^2/\text{s}$ ): (الف)  $0.152$ ؛ (ب)  $0.138$ ؛ (ج)  $0.146$ ؛ (د)  $0.138$ .

۱۷ الف ۲. برون‌یابی ضریب نفوذ دوتایی تادمایی بسیار بالا. مقدار  $D_{AB} = 0.151\text{ cm}^2/\text{s}$  برای سیستم  $\text{CO}_2$ -هوا، در دمای  $293\text{ K}$  و فشار  $1\text{ atm}$  گزارش داده شده است. با استفاده از روش‌های زیر،  $D_{AB}$  را تا دمای  $150^\circ\text{ K}$  برون‌یابی کنید:

(الف) معادله (۱-۲.۱۷):

(ب) معادله (۱۰-۳.۱۷):

(ج) معادله‌های (۱۲-۳.۱۷)، (۱۴، ۱۵)، همراه با جدول ۲.۰.

از مقایسه این نتایج با مقدار تجربی  $1\text{ cm}^2/\text{s}$  چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

جواب: (همه برحسب  $\text{cm}^2/\text{s}$ ): (الف)  $2.96$ ؛ (ب)  $1.75$ ؛ (ج)  $2.51$ .

۱۷ الف ۳. خودنفوذی در جیوه مایع. ضریب نفوذ  $\text{Hg}^{2+}$  در جیوه مایع معمولی<sup>۲</sup>، همراه با ویسکوزیته و حجم واحد جرم آن اندازه‌گیری شده است. نتایج اندازه‌گیری شده  $D_{AA^*}$  را با مقادیر محاسبه شده با استفاده از معادله (۵-۴.۱۷) مقایسه کنید.

T(K)	$D_{AA^*}(\text{cm}^2/\text{s})$	$\mu(\text{cp})$	$\bar{V}(\text{cm}^3/\text{g})$
275.7	$1.52 \times 10^{-5}$	1.68	0.0736
289.6	$1.68 \times 10^{-5}$	1.56	0.0737
364.2	$2.57 \times 10^{-5}$	1.27	0.0748

1. Ts. M. Klibanova, V. V. Pomerantsev, and D. A. Frank-Kamenetskii, *J. Tech. Phys. (USSR)*, **12** 14-30 (1942), as quoted by C. R. Wilke and C. Y. Lee, *Ind. Eng. Chem.*, **47**, 1253 (1955).

2. R. E. Hoffman, *J. Chem. Phys.*, **20**, 1567-1570 (1952).

۱۷ الف ۴. اعداد اشمیت برای مخلوط‌های گازی دوتایی در چگالی پایین. با استفاده از معادله (۱۱-۳-۱۷) و داده‌های مفروض در مسئله ۱ الف ۴، مقدار  $Sc = \mu/\rho D_{AB}$  را برای مخلوط‌های دوتایی هیدروژن (A) و فرتون (B) در  $x_A = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9$  و دمای  $25^\circ C$  و فشار  $1 \text{ atm}$  محاسبه کنید.  
جواب: وقتی  $x_A \rightarrow 0.1$ ،  $Sc \rightarrow 0.057$ ؛ وقتی  $x_A \rightarrow 0.9$ ،  $Sc \rightarrow 2.44$ .

۱۷ الف ۵. برآورد ضریب نفوذ برای مخلوط دوتایی در چگالی بالا. مطلوب است پیش‌بینی  $cD_{AB}$  برای مخلوط هم‌مولکول  $N_2$  و  $C_2H_6$  در دمای  $288.2 \text{ K}$  و فشار  $4.0 \text{ atm}$ .

(الف) از مقدار  $D_{AB}$  در فشار  $1 \text{ atm}$  که در جدول ۱-۱۷ آمده است، همراه با شکل ۱۷-۲ استفاده کنید.  
(ب) از معادله (۳-۲-۱۷) و شکل ۱۷-۲ استفاده کنید.

جواب: (الف)  $5.78 \times 10^{-6} \text{ g-mole/cm} \cdot \text{s}$ ؛ (ب)  $5.73 \times 10^{-6} \text{ g-mole/cm} \cdot \text{s}$ .

۱۷ الف ۶. ضریب نفوذ و عدد اشمیت برای مخلوط‌های کلر-هوا.

(الف) مقدار  $D_{AB}$  را برای مخلوط‌های کلر (A)-هوا (B) در دمای  $75^\circ F$  و فشار  $1 \text{ atm}$  پیش‌بینی کنید. هوا را یک ماده با پارامترهای لئارد-جونز در نظر بگیرید که در پیوست (ه) ارائه شده‌اند. از نتایج نظریه چابمن-انسکوگ در بخش ۳-۱۷ استفاده کنید.

(ب) قسمت (الف) را با استفاده از معادله (۱۷-۲) تکرار کنید.

(ج) با استفاده از نتایج قسمت (الف) و مسئله ۱ الف ۵، اعداد اشمیت را برای مخلوط‌های کلر-هوا در دمای  $297 \text{ K}$  و فشار  $1 \text{ atm}$ ، برای کسرهای مولی کلر، به شرح زیر، تخمین بزنید:  
 $0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9$ .

جواب: (الف)  $0.121 \text{ cm}^2/\text{s}$ ؛ (ب)  $0.124 \text{ cm}^2/\text{s}$ ؛ (ج)  $0.372, 0.463, 0.602, 0.823, 1.27$ .  
۱۷ الف ۷. عدد اشمیت برای خودنفوذی.

(الف) با استفاده از معادله‌های (۱-۳-۱) و (۲-۲-۱۷) عدد خودنفوذی اشمیت  $Sc = \mu/\rho D_{AA^*}$  را در نقطه بحرانی سیستمی با  $MA \approx MA^*$  پیش‌بینی کنید.

(ب) با استفاده از نتایج بالا، همراه با شکل ۱-۳-۱ و شکل ۱۷-۲ عبارت  $Sc = \mu/\rho D_{AA^*}$  را در حالت‌های زیر پیش‌بینی کنید:

	گاز	گاز	مایع	گاز	گاز	گاز
$T_r$	۰.۷	۱.۰	۵.۰	۰.۷	۱.۰	۲.۰
$p_r$	۰.۱	۰.۱	۰.۱	اشباع	۱.۰	۱.۰

۱۷ الف ۸. تصحیح ضریب نفوذ در چگالی بالا برای دما. مقدار اندازه‌گیری شده  $cD_{AB}$  برای مخلوطی از  $8\%$  مول  $CH_4$  و  $20\%$  مول  $C_2H_6$  در دمای  $313 \text{ K}$  و فشار  $136 \text{ atm}$  برابر است با:  $6.7 \times 10^{-6} \text{ g-mole/cm} \cdot \text{s}$  (نگاه کنید به مثال ۳-۲-۱۷). مقدار  $cD_{AB}$  برای همین مخلوط را در  $136 \text{ atm}$  و دمای  $351 \text{ K}$ ، با استفاده از شکل ۱۷-۲ پیش‌بینی کنید.

جواب:  $6.3 \times 10^{-6} \text{ g-mole/cm} \cdot \text{s}$ .

مشاهده‌شده:  $6.33 \times 10^{-6} \text{ g-mole/cm} \cdot \text{s}$ .

۱۷ الف ۹. پیش‌بینی مقادیر بحرانی  $cD_{AB}$ . در شکل ۱۷-۲.۱۷ حد فشار پایین  $(cD_{AA^*})_r = ۱/۰۱$  در  $T_r = ۱$  و  $\rho_r \rightarrow ۰$  نشان داده شده‌است. در این حد، از معادله (۱۱-۳-۱۷) نتیجه می‌شود:

$$۱/۰۱ (cD_{AA^*})_c = ۲/۲۶۴۶ \times ۱۰^{-۵} \sqrt{T_{cA} \left( \frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_{A^*}} \right) \frac{1}{\sigma_{AA^*}^2 \Omega_{D,AA^*}}} \quad (۱۷ الف-۹)$$

در این رابطه شناسه  $KT_{cA}/\varepsilon_{AA^*}$  جمله  $\Omega_{D,AA^*}$  برای Ar، Kr، و Xe در حدود ۱/۲۲۵ گزارش<sup>۴</sup> داده شده‌است. برای بسیاری از سیال‌ها از مقدار ۱/۰/۷۷ در معادله (۱۱-۴-۱) به‌عنوان مقدار معرف متوسط استفاده می‌کنیم.

(الف) معادله (۱۷ الف-۹) را با روابط زیر:

$$\sigma_{AA^*} = ۲/۴۴ (T_{cA}/p_{cA})^{1/3} \quad \varepsilon_{AA^*}/K = ۰/۷۷ T_{cA} \quad (۱۷ الف-۹، ۳)$$

و جدول ۲۰۰ تلفیق کنید تا معادله (۲-۲۰-۱۷) را برای  $(cD_{AA^*})_c$  به‌دست آورید.  
(ب) نشان دهید که تقریب‌های:

$$\sigma_{AB} = \sqrt{\sigma_A \sigma_B} \quad \varepsilon_{AB} = \sqrt{\varepsilon_A \varepsilon_B} \quad (۱۷ الف-۹، ۵)$$

به‌ازای پارامترهای لند-جونز برای برهم‌کنش  $A-B$  نتیجه زیر را به‌بار می‌آورد:

$$\sigma_{AB} = ۲/۴۴ \left( \frac{T_{cA} T_{cB}}{p_{cA} p_{cB}} \right)^{1/6} \quad \frac{\varepsilon_{AB}}{K} = ۰/۷۷ \sqrt{T_{cA} T_{cB}} \quad (۱۷ الف-۹، ۶، ۷)$$

هرگاه پارامترهای مولکولی هرگونه طبق معادله‌های (۱۱-۴-۱) الف، ج) پیش‌بینی شود. این عبارت‌ها را با معادله (۱۷ الف-۹) ترکیب کنید ( $A^*$  را با  $B$  و  $T_{cA}$  را با  $\sqrt{T_{cA} T_{cB}}$  جایگزین کنید) تا معادله (۲-۲۰-۱۷) را برای  $(cD_{AB})_c$  به‌دست آورید. جایگزینی‌های متناظر  $T_c$  و  $p_c$  در شکل ۱۷-۲.۱۷ توسط  $\sqrt{T_{cA} T_{cB}}$  و  $\sqrt{p_{cA} p_{cB}}$  هم‌ارز است با این‌که در تعیین مقدار  $cD_{AB}$ ، برخوردهای  $A-B$  را بر برخوردهای مولکول‌های همانند غالب بدانیم.

۱۷ الف ۱۰. تخمین ضریب نفوذ مایعات.

(الف) ضریب نفوذ محلول آبی رقیق استیک اسید را در دمای  $۱۲/۵^\circ\text{C}$ ، با استفاده از معادله ویلکه-چانگ، تخمین بزنید. چگالی استیک اسید خالص در نقطه جوش،  $۰/۹۳۷ \text{ g/cm}^3$  است.

(ب) ضریب نفوذ محلول آبی رقیق متانول در دمای  $۱۵^\circ\text{C}$  در حدود  $۱۰^{-۵} \text{ cm}^2/\text{s}$  است. ضریب نفوذ همین محلول را در  $۱۰۰^\circ\text{C}$  تخمین بزنید.

جواب: (ب)  $۶/۷ \times ۱۰^{-۵} \text{ cm}^2/\text{s}$ .

۱۷ ب ۱. رابطه متقابل متغیرهای ترکیب در مخلوط.

(الف) با استفاده از تعریف‌های پایه در معادله‌های (الف) تا (ز) در جدول ۱۷-۱، درباره‌ی درستی روابط جبری معادله‌های (ح) تا (س) تحقیق کنید.

4. J. J. van Loef and E. G. D. Cohen, *Physica A*, **156**, 522-533 (1989).



(ب) نشان دهید که در جدول ۱۷-۷-۱، معادله‌های (ع) و (ف) برای مخلوط‌های دوتایی به معادله‌های (ع') و (ف') ساده می‌شوند.

(ج) معادله‌های (ع') و (ف') را از معادله‌های (ن) و (س) به دست آورید.

۱۷ب۲. روابط بین شارها در سیستم‌های چندجزئی. درباره‌ی معادله‌های (ک)، (س)، (ر) و (خ) جدول ۱۷-۸-۱، فقط با استفاده از تعریف‌های غلظت، سرعت، و شار تحقیق کنید.

۱۷ب۳. روابط بین شارها در سیستم‌های دوتایی. معادله‌ی زیر برای بیان روابط متقابل برحسب واحدهای جرمی و واحدهای مولی در سیستم‌های دوجزئی سودمند است:

$$\frac{\mathbf{j}_A}{\rho\omega_A\omega_B} = \frac{\mathbf{J}_A^*}{c x_A x_B} \quad (17.3-1)$$

درباره‌ی درستی این رابطه تحقیق کنید.

۱۷ب۴. هم‌ارزی صورت‌های مختلف قانون فیک برای مخلوط‌های دوتایی.

(الف) با استفاده از معادله‌ی (الف) جدول ۱۷-۸-۲، معادله‌های (ب)، (د)، و (و) را به دست آورید.

(ب) با استفاده از معادله‌ی (الف) جدول ۱۷-۸-۲، رابطه‌های زیر را به دست آورید:

$$\mathbf{j}_A = -\rho(M_A M_B / M^2) \mathcal{D}_{AB} \nabla x_A \quad (17.4-1)$$

$$\nabla x_A = \frac{1}{c \mathcal{D}_{AB}} (x_A \mathbf{N}_B - x_B \mathbf{N}_A) \quad (17.4-2)$$

از این دو معادله چه نتایج می‌توان گرفت؟

(ج) نشان دهید که معادله‌ی (و) جدول ۱۷-۸-۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = -\mathcal{D}_{AB} \nabla \ln \frac{x_A}{x_B} \quad (17.4-3)$$

۱۷ج۱. شار جرمی نسبت به سرعت متوسط حجمی. فرض کنید سرعت متوسط حجمی در مخلوطی  $N$  جزئی با رابطه‌ی زیر تعریف شود:

$$\mathbf{v}^\square = \sum_{\alpha=1}^N \rho_\alpha (\bar{V}_\alpha / M_\alpha) \mathbf{v}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha \bar{V}_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad (17.1-1)$$

که در آن  $\bar{V}_\alpha$  حجم مولی جزئی گونه‌ی  $\alpha$  است. سپس رابطه‌ی:

$$\mathbf{j}_\alpha^\square = \rho_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}^\square) \quad (17.1-2)$$

را به عنوان شار جرمی گونه‌ی  $\alpha$  نسبت به سرعت متوسط حجمی تعریف کنید.

(الف) نشان دهید که برای سیستم دوتایی  $A$  و  $B$ :

$$\mathbf{j}_A^\square = \rho (\bar{V}_B / M_B) \mathbf{j}_A \quad (17.1-3)$$

برای این کار باید از اتحاد  $c_A \bar{V}_A + c_B \bar{V}_B = 1$  استفاده کنید. این اتحاد از کجا آمده است؟

(ب) سپس نشان دهید که قانون اول فیک به صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{j}_A^{\square} = -D_{AB} \nabla \rho_A \quad (۱۷.ج-۱)$$

برای تحقیق درباره درستی این رابطه به عبارت  $\bar{V}_A \nabla c_A + \bar{V}_B \nabla c_B = 0$  نیاز دارید. منشأ این عبارت چیست؟

۱۷.ج۲. شار جرمی نسبت به سرعت حلال.

(الف) در سیستمی با  $N$  گونه شیمیایی، جزء  $N$  را حلال فرض کنید. سپس عبارت:

$$\mathbf{j}_\alpha^N = \rho_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_N) \quad (۱۷.ج-۲)$$

را به عنوان شار جرمی گونه  $\alpha$  نسبت به سرعت حلال تعریف کنید. نشان دهید که

$$\mathbf{j}_\alpha^N = \mathbf{j}_\alpha - (\rho_\alpha / \rho_N) \mathbf{j}_N \quad (۱۷.ج-۲)$$

(ب) در یک سیستم دوتایی ( $B$  حلال فرض می‌شود)، نشان دهید که:

$$\mathbf{j}_A^B = (\rho / \rho_B) \mathbf{j}_A = -(\rho^2 / \rho_B) D_{AB} \nabla \omega_A \quad (۱۷.ج-۲)$$

برای محلول بسیار رقیق  $A$  در حلال  $B$  این نتیجه چگونه ساده می‌شود؟

۱۷.ج۳. تعیین پارامترهای پتانسیل لئارد-جونز با استفاده از داده‌های ضریب نفوذ در مخلوط گازی دوتایی.

(الف) با استفاده از داده‌های زیر برای سیستم  $H_2O-O_2$  در فشار ۱ atm،  $\sigma_{AB}$ ،  $\varepsilon_{AB}/K$  را تعیین کنید:

$T(K)$	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰	۱۱۰۰
$D_{AB}(cm^2/s)$	۰٫۴۷	۰٫۶۹	۰٫۹۴	۱٫۲۲	۱٫۵۲	۱٫۸۵	۲٫۲۰	۲٫۵۸

یکی از راه‌های انجام این کار چنین است: (۱) نمودار داده‌ها را به صورت  $\log(T^{3/2}/D_{AB})$  بر حسب  $\log T$  روی یک برگ کاغذ نازک ترسیم کنید؛ (۲) نمودار  $\Omega_{D,AB}$  بر حسب  $KT/\varepsilon_{AB}$  را روی یک برگ کاغذ دیگر، با همان مقیاس، ترسیم کنید؛ (۳) نمودار اول را روی نمودار دوم بگذارید و از روی مقیاس دو نمودار، نسبت‌های عددی  $(T/(KT/\varepsilon_{AB}))$  و  $((T^{3/2}/D_{AB})/\Omega_{D,AB})$  را تعیین کنید؛ (۴) با استفاده از این دو نسبت و معادله (۱۷.۳-۱) پارامترهای  $\sigma_{AB}$  و  $\varepsilon_{AB}/K$  را به دست آورید.

## فصل ۱۸

### توزیع غلظت در جامدات و در جریان آرام

۱.۱۸ موازنه لایه‌ای جرم؛ شرایط مرزی

۲.۱۸ نفوذ در فیلم گاز ساکن

۳.۱۸ نفوذ با واکنش شیمیایی ناهمگن

۴.۱۸ نفوذ با واکنش شیمیایی همگن

۵.۱۸ نفوذ در فیلم مایع ریزان (جذب گاز)

۶.۱۸ نفوذ در فیلم مایع ریزان (انحلال جامد)

۷.۱۸ نفوذ و واکنش شیمیایی در کاتالیزگر متخلخل

۸.۱۸ ° نفوذ در سیستم گازی سه جزئی

در فصل ۲ با چگونگی طرح و حل تعدادی مسئله جریان ویسکوز حالت پایا، از طریق نوشتن موازنه لایه‌ای اندازه حرکت آشنا شدیم. در فصل ۹ دیدیم که چگونه می‌توان مسئله‌های رسانش گرمای حالت پایا را از طریق موازنه لایه‌ای انرژی حل کرد.

در این فصل نحوه حل مسئله‌های نفوذ حالت پایا را، از طریق موازنه لایه‌ای جرم نشان می‌دهیم. در این جا نیز از همان راهکاری استفاده می‌کنیم که قبلاً استفاده کردیم:

(الف) موازنه جرم روی لایه‌ای نازک و عمود بر جهت انتقال جرم نوشته می‌شود و این موازنه لایه‌ای به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول منتهی می‌شود که می‌توان آن را حل کرد و توزیع شار جرمی را به دست آورد.

(ب) رابطه بین شار جرمی و گرادیان غلظت را در این عبارت قرار می‌دهیم که حاصل آن یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای توزیع غلظت است. ثابت‌های انتگرال‌گیری که در عبارت حاصل ظاهر می‌شوند با استفاده از شرایط مرزی مربوط به غلظت و/یا شار جرمی در سطوح محدودکننده سیستم به دست می‌آیند.

در فصل ۱۷ اشاره کردیم که استفاده از چندین نوع شار جرمی متداول است. برای ساده‌تر شدن کار، در این فصل از شار مرکب  $N_A$  استفاده می‌کنیم؛  $N_A$  تعداد مول‌های  $A$  است که در واحد زمان از واحد سطح ثابت شده در فضا عبور می‌کنند.

با استفاده از معادله (د) در جدول ۸-۱۷ شار مولی را به گرادیان غلظت مربوط می‌کنیم.

معادلهٔ اخیر برای مؤلفهٔ  $z$  چنین نوشته می‌شود:

$$N_{Az} = -cD_{AB} \frac{\partial x_A}{\partial z} + x_A(N_{Az} + N_{Bz}) \quad (۱۸-۱)$$

شار هرفتی      شار مولکولی      شار مرکب

قبل از استفاده از معادلهٔ (۱۸-۱)، معمولاً باید  $N_{Bz}$  را حذف کنیم. فقط هنگامی می‌توان این کار را انجام داد که از قبل دربارهٔ  $N_{Bz}/N_{Az}$  اطلاعاتی داشته باشیم. در هریک از مسئله‌های نفوذ دوتایی که در این فصل مطرح می‌شود، کار را با مشخص کردن این نسبت از طریق استدلال فیزیکی یا شیمیایی شروع می‌کنیم.

در این فصل نفوذ را در هر دو نوع سیستم غیرواکنشی و واکنشی بررسی می‌کنیم. هنگامی که واکنش شیمیایی انجام می‌شود، دو نوع واکنش را از هم متمایز می‌کنیم: همگن، که در آن تغییر مادهٔ شیمیایی در کل حجم سیال رخ می‌دهد، و ناهمگن، که در آن تغییر شیمیایی فقط در ناحیهٔ محدودی، مانند سطح کاتالیزگر، اتفاق می‌افتد. بین واکنش‌های همگن و ناهمگن نه تنها اختلاف فیزیکی وجود دارد، بلکه توصیف ریاضی این دو نوع واکنش نیز متفاوت است. آهنگ تولید یک گونهٔ شیمیایی توسط واکنش همگن، در معادلهٔ دیفرانسیل حاصل از موازنهٔ لایه‌ای، به صورت یک جملهٔ منبع ظاهر می‌شود، درست همان‌طور که جملهٔ منبع گرمایی در موازنهٔ لایه‌ای انرژی پدیدار می‌شود. اما آهنگ تولید توسط واکنش ناهمگن، در معادلهٔ دیفرانسیل ظاهر نمی‌شود، بلکه در شرط مرزی مربوط به سطحی که واکنش روی آن انجام می‌گیرد، پدیدار می‌شود.

به منظور طرح مسئله‌های شامل واکنش‌های شیمیایی، باید دربارهٔ آهنگ پدیدار شدن یا ناپدید شدن گونه‌های مختلف شیمیایی در واکنش، اطلاعاتی داشته باشیم. در نتیجه به موضوع گستردهٔ سینتیک شیمیایی می‌رسیم که شاخه‌ای از شیمی فیزیک است که با مکانیسم‌های واکنش‌های شیمیایی و آهنگ انجام آن‌ها سروکار دارد.<sup>۱</sup> در این فصل فرض می‌کنیم که آهنگ‌های واکنش توسط توابع ساده‌ای از غلظت گونه‌های واکنش‌دهنده توصیف می‌شوند. در این جا باید نمادگذاری مورد استفاده برای ثابت‌های آهنگ شیمیایی را شرح دهیم. برای واکنش‌های همگن، آهنگ مولی تولید گونهٔ  $A$  را می‌توان با عبارتی به صورت زیر توصیف کرد:

$$R_A = k_n''' c_A^n \quad (۱۸-۲) \text{ واکنش همگن:}$$

که در آن  $R_A [=]$  moles/cm<sup>۳</sup> · s و  $c_A [=]$  moles/cm<sup>۳</sup>. اندیس  $n$  «مرتبهٔ» واکنش را نشان می‌دهد؛<sup>۲</sup> برای واکنش مرتبهٔ اول،  $k_n''' [=]$  ۱/s. برای واکنش‌های ناهمگن، آهنگ مولی تولید در سطح واکنش را غالباً می‌توان

1. R. J. Silbey and R. A. Alberty, *Physical Chemistry*, 3rd edition, Wiley, New York (2001), Chapter 18.

۲. همهٔ عبارات‌های آهنگ صورت سادهٔ معادلهٔ (۱۸-۲) را ندارند. آهنگ واکنش ممکن است به شیوهٔ پیچیده‌ای به غلظت همهٔ گونه‌های حاضر در واکنش وابسته باشد. نکات مشابهی در مورد معادلهٔ (۱۸-۳) نیز صادق است. برای کسب اطلاعات بیش‌تر در مورد آهنگ واکنش نگاه کنید به

*Table of Chemical Kinetics, Homogeneous Reactions*, National Bureau of Standards, Circular 510 (1951), Supplement No. 1 to Circular 510 (1956).

این منبع توسط پایگاه داده‌هایی به نشانی <http://kinetics.nist.gov/> توسط NIST تکمیل می‌شود. برای کسب اطلاع دربارهٔ واکنش‌های ناهمگن، نگاه کنید به

R. Mezaki and H. Inoue, *Rate Equations of Solid-Catalyzed Reactions*, U. of Tokyo Press, Tokyo (1991). see also C. G. Hill, *Chemical Engineering Kinetics and Reactor Design: An Introduction*, Wiley, New York (1977).

توسط رابطه‌ای به صورت زیر توصیف کرد:

$$N_{Az}|_{\text{surface}} = k_n'' c_A^n |_{\text{surface}} \quad (۱۸-۳) \text{ واکنش ناهمگن:}$$

که در آن  $N_{Az} [=] \text{ moles/cm}^2 \cdot \text{s}$  و  $c_A [=] \text{ moles/cm}^3$ . در این جا  $k_n'' [=] \text{ cm/s}$ . توجه کنید که علامت «'''» روی ثابت آهنگ نشان دهنده ماهیت حجمی است و علامت «''» ماهیت سطحی را نشان می‌دهد. در بخش ۱.۱۸ کار خود را با عبارت موازنه لایه‌ای و انواع شرایط مرزی که ممکن است در حل مسئله‌های نفوذ مطرح شوند، آغاز می‌کنیم. در بخش ۲.۱۸ نفوذ در فیلم ساکن را شرح می‌دهیم؛ این موضوع برای درک مدل‌های فیلمی عملیات نفوذ در مهندسی شیمی ضروری است. سپس، در بخش‌های ۳.۱۸ و ۴.۱۸ چند مثال مقدماتی از نفوذ همراه با واکنش شیمیایی - همگن و ناهمگن - ارائه می‌کنیم. این مثال‌ها نقش نفوذ را در سینتیک شیمیایی نشان می‌دهند و بر این نکته تأکید می‌کنند که نفوذ می‌تواند در آهنگ واکنش شیمیایی تأثیر مهمی داشته باشد. در بخش‌های ۵.۱۸ و ۶.۱۸ به سراغ انتقال جرم همرفتی واداشته می‌رویم، که عبارت است از نفوذ اضافه شده به میدان جریان. اگرچه مثالی از انتقال جرم همرفتی آزاد ارائه ندادیم، این بحث می‌تواند با بحث انتقال گرمای همرفتی آزاد در بخش ۹.۱۰ موازی باشد. سپس در بخش ۷.۱۸ نفوذ در کاتالیزگرهای متخلخل را شرح می‌دهیم. سرانجام، در آخرین بخش، مسئله تبخیر بخش ۲.۱۸ را به سیستمی سه جزئی تعمیم می‌دهیم.

### ۱.۱۸ موازنه لایه‌ای جرم؛ شرایط مرزی

مسئله‌های نفوذ در این فصل با استفاده از موازنه‌های جرم برای یک یا چند گونه شیمیایی روی لایه‌ای نازک از جامد یا سیال حل می‌شوند. با انتخاب سیستمی مناسب، قانون پایستگی جرم گونه  $A$  در سیستم دوتایی را، به صورت زیر، روی لایه‌ای حجمی می‌نویسیم:

$$\left\{ \text{آهنگ تولید جرم } A \text{ توسط واکنش همگن} \right\} + \left\{ \text{آهنگ جرمی خروجی } A \right\} - \left\{ \text{آهنگ جرمی ورود } A \right\} = 0 \quad (۱-۱.۱۸)$$

البته عبارت پایستگی را می‌توان برحسب مول بیان کرد. گونه شیمیایی  $A$  می‌تواند بر اثر نفوذ (یعنی از طریق حرکت مولکولی)، هم چنین در نتیجه حرکت کلی سیال (یعنی همرفت) به سیستم وارد یا از آن خارج شود، که هر دو پدیده در جمله  $N_A$  گنجانده شده‌اند. به علاوه، گونه  $A$  ممکن است توسط واکنش‌های شیمیایی همگن تولید یا مصرف شود. پس از نوشتن موازنه روی لایه‌ای با ضخامت متناهی، با استفاده از معادله (۱-۱.۱۸)، این ضخامت را به سمت بی‌نهایت کوچک میل می‌دهیم. در نتیجه این فرایند معادله دیفرانسیلی برای شار جرمی (یا مولی) به دست می‌آید. اگر عبارت شار جرمی (یا مولکولی) برحسب گرادیان غلظت را در این معادله قرار دهیم، معادله دیفرانسیلی برای غلظت به دست می‌آوریم.

پس از انتگرال‌گیری از این معادله، ثابت‌های انتگرال‌گیری ظاهر می‌شوند که باید با استفاده از شرایط مرزی آن‌ها را تعیین کرد. شرایط مرزی به شرایط مورد استفاده در سانس گرما شباهت بسیار دارند (نگاه کنید به بخش ۱.۱۰):

$$(الف) \text{ غلظت در سطح را می‌توان مشخص کرد؛ مثلاً } x_A = x_{A0}$$

(ب) شار جرمی در سطح را می‌توان مشخص کرد؛ مثلاً  $N_{Az} = N_{A0}$ . اگر نسبت  $N_{Bz}/N_{Az}$  معلوم باشد، معلوم بودن گرادیان غلظت هم‌ارز است؛

(ج) اگر نفوذ در جامد رخ دهد، ممکن است در سطح جامد، طبق رابطه زیر، ماده  $A$  در جریان اطراف سطح تلف شود:

$$N_{A0} = k_c(c_{A0} - c_{Ab}) \quad (۲-۱.۱۸)$$

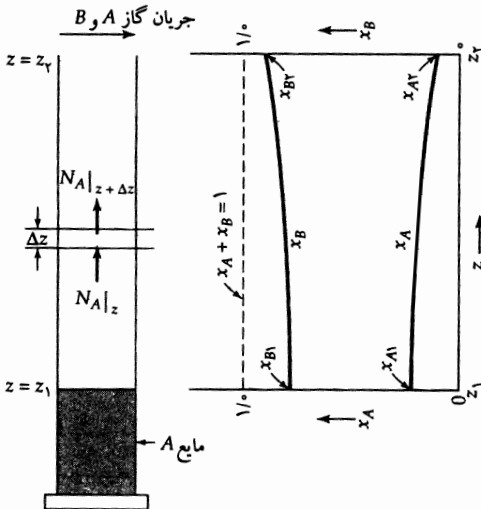
در این رابطه  $N_{A0}$  شار مولی در سطح،  $c_{A0}$  غلظت سطحی،  $c_{AB}$  غلظت در توده جریان سیال، و ثابت تناسب  $k_c$  «ضریب انتقال جرم» است. روش‌های ایجاد رابطه بین ضرایب انتقال جرم در فصل ۲۲ شرح داده شده‌است. معادله (۲-۱.۱۸) نظیر «قانون سرمایش نیوتن» است که با معادله (۲-۱.۱۰) نشان داده شد.

(د) آهنگ انجام واکنش شیمیایی در سطح را می‌توان مشخص کرد. مثلاً، اگر ماده  $A$  توسط یک واکنش شیمیایی مرتبه اول، در سطح ناپدید شود، آن‌گاه  $N_{A0} = k''_1 c_{A0}$ . یعنی آهنگ ناپدید شدن در سطح با غلظت سطحی متناسب است و ثابت تناسب  $k''_1$  ضریب آهنگ انجام واکنش شیمیایی مرتبه اول است.

## ۲.۱۸ نفوذ در فیلم گاز ساکن

حال می‌خواهیم سیستم نفوذ نشان‌داده‌شده در شکل ۲-۱۸ را تحلیل کنیم که در آن مایع  $A$  تبخیر و به گاز  $B$  تبدیل می‌شود. فرض می‌کنیم که وسیله‌ای وجود دارد که سطح مایع را در  $z = z_1$  نگه می‌دارد. در فصل مشترک مایع-گاز، غلظت فاز گازی  $A$ ، که به صورت کسر مولی بیان می‌شود،  $x_{A1}$  است. فرض می‌کنیم که این غلظت فاز گازی  $A$  در تعادل  $1$  با مایع واقع در فصل مشترک است. یعنی فشار بخار  $A$  تقسیم بر فشار کل،  $p_A^{\text{vap}}/p$  است، به شرط آن‌که  $A$  و  $B$  مخلوط گاز ایده‌آل تشکیل دهند و انحلال‌پذیری گاز  $B$  در مایع  $A$  قابل چشم‌پوشی باشد. جریانی از مخلوط گازهای  $A - B$  با غلظت  $x_{A2}$  به‌آهستگی از روی لوله عبور می‌کند تا کسر مولی  $A$  را، به‌ازای  $z = z_2$  در غلظت  $x_{A2}$  نگه دارد. کل سیستم در دما و فشار ثابت نگه داشته می‌شود. گازهای  $A$  و  $B$  ایده‌آل فرض می‌شوند.

می‌دانیم که جریان خالصی از گاز، از فصل مشترک گاز-مایع، به‌طرف بالا برقرار است و سرعت گاز در جدار استوانه کم‌تر از سرعت آن در مرکز لوله است. برای ساده شدن مسئله، این اثر را نادیده می‌گیریم و فرض می‌کنیم مولفه  $z$  سرعت به مختص شعاعی وابسته نیست.



شکل ۲-۱۸ نفوذ حالت پایایی  $A$  در  $B$  در حال سکون، درحالی که فصل مشترک مایع-بخار در وضعیت ثابتی نگه داشته می‌شود. این نمودار انحراف توزیع غلظت از خط مستقیم را، به‌سبب وجود سهم همرفتی در شار جرمی نشان می‌دهد.

1. L. J. Delaney and L. C. Eagleton [AIChE Journal, 8, 418-420 (1962)]

نتیجه می‌گیرند که، برای سیستم‌های در حال تبخیر، فرض تعادل فصل مشترکی منطقی است و می‌توان خطای ناشی از آن را به حدود ۱/۳ تا ۷/۱۰٪ محدود کرد.

هنگامی که این سیستم تبخیر به حالت پایا می‌رسد، حرکت خالص گونه  $A$  در جهت دور شدن از فصل مشترک مشاهده می‌شود و گونه  $B$  ساکن می‌ماند. در این صورت شار مولی  $A$  از معادله (۱۸-۱)، با  $N_{Bz} = 0$  به دست می‌آید. با حل کردن این معادله برای یافتن  $N_{Az}$ ، نتیجه می‌شود:

$$N_{Az} = -\frac{cD_{AB}}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} \quad (18-2)$$

موازنه جرم حالت پایا (برحسب واحدهای مولی) روی جزء  $\Delta z$  ستون، نشان می‌دهد که مقدار  $A$  ورودی در صفحه  $z$  با مقدار  $A$  خروجی از صفحه  $z + \Delta z$  برابر است:

$$SN_{Az}|_z - SN_{Az}|_{z+\Delta z} = 0 \quad (2-18)$$

در این جا  $S$  سطح مقطع ستون است. با تقسیم کردن بر  $S\Delta z$  و گرفتن حد هنگامی که  $\Delta z \rightarrow 0$ ، نتیجه می‌شود:

$$-\frac{dN_{Az}}{dz} = 0 \quad (3-2.18)$$

با قرار دادن معادله (۱۸-۲) در معادله (۳-۲.۱۸)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{cD_{AB}}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0 \quad (4-2.18)$$

برای مخلوط گاز ایده‌آل، معادله حالت عبارت است از:  $p = cRT$ ، بنابراین در دما و فشار ثابت،  $c$  باید مقداری ثابت باشد. به علاوه، برای گازها  $D_{AB}$  تقریباً از ترکیب شیمیایی مستقل است. بنابراین می‌توان  $cD_{AB}$  را به سمت چپ عملگر مشتق انتقال داد تا معادله زیر نتیجه شود:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0 \quad (5-2.18)$$

معادله بالا یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای توزیع غلظت برحسب کسر مولی  $A$  است. با انتگرال‌گیری نسبت به  $z$  نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} = C_1 \quad (6-2.18)$$

پس از یک بار دیگر انتگرال‌گیری، داریم:

$$-\ln(1-x_A) = C_1 z + C_2 \quad (7-2.18)$$

اگر  $C_1$  را با  $-\ln K_1$  و  $C_2$  را با  $-\ln K_2$  جایگزین کنیم، معادله (۷-۲.۱۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$1-x_A = K_1^z K_2 \quad (8-2.18)$$

دو ثابت انتگرال‌گیری،  $K_1$  و  $K_2$ ، را می‌توان با استفاده از شرایط مرزی تعیین کرد:

$$x_A = x_{A1} \quad \text{شرط مرزی ۱: در } z = z_1, \quad (9-2.18)$$

$$x_A = x_{A2} \quad \text{شرط مرزی ۲: در } z = z_2, \quad (10-2.18)$$

وقتی این ثابت‌ها را به دست آوردیم، سرانجام نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\left( \frac{1 - x_A}{1 - x_{A1}} \right) = \left( \frac{1 - x_{A2}}{1 - x_{A1}} \right)^{\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \quad (11-2.18)$$

توزیع گاز  $B$  با استفاده از رابطه  $x_B = 1 - x_A$  به دست می‌آید. توزیع‌های غلظت در شکل ۱۲-۲.۱۸ نشان داده شده‌است. مشاهده می‌شود که شیب  $dx_A/dz$  ثابت نیست، اگرچه  $N_{Az}$  ثابت است؛ با توجه به معادله (۱۲-۲.۱۸) نیز می‌توان این نتیجه را انتظار داشت.

وقتی توزیع‌های غلظت معلوم شدند، می‌توان مقادیر متوسط و شارهای جرمی در سطح را به دست آورد. مثلاً، غلظت متوسط  $B$  در ناحیه بین  $z_1$  و  $z_2$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{x_{B,avg}}{x_{B1}} = \frac{\int_{z_1}^{z_2} (x_B/x_{B1}) dz}{\int_{z_1}^{z_2} dz} = \frac{\int_0^1 (x_{B2}/x_{B1})^\zeta d\zeta}{\int_0^1 d\zeta} = \left. \frac{(x_{B2}/x_{B1})^\zeta}{\ln(x_{B2}/x_{B1})} \right|_0^1 \quad (12-2.18)$$

که در آن  $\zeta = (z - z_1)/(z_2 - z_1)$  متغیر طول بدون بُعد است. این مقدار متوسط را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$x_{B,avg} = \frac{x_{B2} - x_{B1}}{\ln(x_{B2}/x_{B1})} \quad (13-2.18)$$

یعنی، مقدار متوسط  $x_B$  میانگین لگاریتمی،  $(x_B)_{\ln}$ ، غلظت‌های نهایی است. آهنگ انتقال جرم در فصل مشترک مایع-گاز، یعنی آهنگ تبخیر، را می‌توان از معادله (۱۲-۲.۱۸)، به صورت زیر به دست آورد:

$$N_{Az}|_{z=z_1} = - \left. \frac{cD_{AB}}{1 - x_{A1}} \frac{dx_A}{dz} \right|_{z=z_1} = + \left. \frac{cD_{AB}}{x_{B1}} \frac{dx_B}{dz} \right|_{z=z_1} = \frac{cD_{AB}}{z_2 - z_1} \ln \left( \frac{x_{B2}}{x_{B1}} \right) \quad (14-2.18)$$

با ترکیب معادله‌های (۱۳-۲.۱۸ و ۱۴)، سرانجام نتیجه می‌شود:

$$N_{Az}|_{z=z_1} = \frac{cD_{AB}}{(z_2 - z_1)(x_B)_{\ln}} (x_{A1} - x_{A2}) \quad (15-2.18)$$

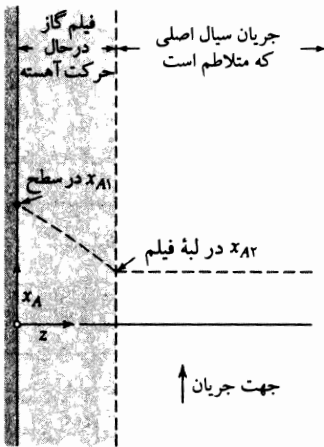
این عبارت آهنگ تبخیر را برحسب نیروی رانش مشخصه  $x_{A1} - x_{A2}$  نتیجه می‌دهد. با بسط جواب معادله (۱۵-۲.۱۸) به صورت سری تیلر، نتیجه می‌شود (نگاه کنید به بخش ج.۲ و مسئله ۱۸.ب.۱۸).

$$N_{Az}|_{z=z_1} = \frac{cD_{AB}(x_{A1} - x_{A2})}{(z_2 - z_1)} \left[ 1 + \frac{1}{4}(x_{A1} + x_{A2}) + \frac{1}{8}(x_{A1}^2 + x_{A1}x_{A2} + x_{A2}^2) + \dots \right] \quad (16-2.18)$$

عبارت واقع در جلوی بسط داخل کروشه همان نتیجه‌ای است که در صورت حذف کامل جمله همرفت در معادله (۱۵-۲.۱۸) به دست می‌آید. از بسط داخل کروشه نتیجه صحیح حاصل از گنجاندن جمله همرفت حاصل می‌شود. روش دیگر تفسیر این عبارت آن است که نتیجه ساده با اتصال نقاط انتهایی منحنی  $x_A$  برحسب  $z$  در شکل ۱۲-۲.۱۸،



توسط خطی راست متناظر است و نتیجه کامل با استفاده از منحنی  $x_A$  بر حسب  $z$  تناظر دارد. اگر کسرهای مولی نهایی کوچک باشند، جمله تصحیح داخل کروه در معادله (۲.۱۸-۱۶) فقط اندکی از واحد بزرگتر است. از نتایج این بخش برای تعیین تجربی ضرایب نفوذ گازها استفاده شده است.<sup>۲</sup> به علاوه، این نتایج در «مدل‌های فیلمی» انتقال جرم نیز کاربرد پیدا می‌کنند. در شکل ۲.۱۸-۲ یک سطح جامد یا مایع، همراه با گازی در حال جریان، نشان داده شده است. در نزدیکی سطح فیلمی به آهستگی در حرکت است که  $A$  در آن نفوذ می‌کند. این فیلم توسط سطوح  $z = z_1$  و  $z = z_2$  محدود شده است. در این «مدل» فرض می‌شود که گذار تندی از یک فیلم ساکن به یک سیال کاملاً مخلوط شده رخ می‌دهد که در آن گرادیان‌های غلظت قابل چشم‌پوشی‌اند. اگرچه این مدل از لحاظ فیزیکی غیرواقعی است، به منزله تصویر ساده‌ای برای ایجاد ارتباط بین ضرایب انتقال جرم مفید واقع شده است.



شکل ۲.۱۸-۲ مدل فیلمی انتقال جرم؛ جزء  $A$ ، از طریق یک فیلم گازی ساکن فرضی، از سطح به داخل جریان گاز نفوذ می‌کند.

### مثال ۲.۱۸-۱

نفوذ با فصل مشترک متحرک

اکنون می‌خواهیم مسئله‌ای را بررسی کنیم که با مسئله قبلی تفاوت مختصری دارد. به جای آنکه فصل مشترک مایع-گاز در ارتفاع ثابتی نگه داشته شود، به سطح مایع امکان می‌دهیم که با پیشروی فرایند تبخیر، مطابق شکل ۲.۱۸-۳، پایین بیاید. چون مایع بسیار آهسته کاهش می‌یابد، می‌توانیم با اطمینان از روش حالت شبه‌پایا استفاده کنیم.

حل

ابتدا آهنگ مولی تبخیر  $A$  از فاز مایع را با آهنگ ورود مول‌های  $A$  به فاز گازی، از طریق فصل مشترک  $S$  برابر می‌گیریم:

$$-S \frac{\rho^{(A)} dz_1}{M_A dt} = \frac{cD_{AB}}{(z_2 - z_1(t))(x_B)_{\ln}} (x_{A1} - x_{A2}) S \quad (۲.۱۸-۱۷)$$

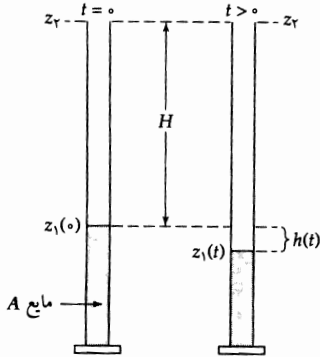
در این رابطه  $\rho^{(A)}$  چگالی مایع خالص  $A$  و  $M_A$  وزن مولکولی آن است. در سمت راست معادله (۲.۱۸-۱۷) از آهنگ تبخیر حالت پایا استفاده کرده‌ایم که به‌ازای ارتفاع فعلی ستون مایع محاسبه شده است (یعنی تقریب حالت شبه‌پایا). از این معادله می‌توان انتگرال گرفت تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\int_0^h (H + \bar{h}) d\bar{h} = \frac{cD_{AB}(x_{A1} - x_{A2})}{(\rho^{(A)}/M_A)(x_B)_{\ln}} \int_0^t dt \quad (۲.۱۸-۱۸)$$

که در آن  $h(t) = z_1(0) - z_1(t)$  مسافتی است که فصل مشترک در زمان  $t$  پایین رفته است، و  $H = z_2 - z_1(0)$  ارتفاع اولیه ستون گاز است. وقتی طرف راست معادله (۱۸-۲-۱۸) را با صورت اختصاری  $\frac{1}{4} Ct$  نشان دهیم می‌توانیم از آن انتگرال بگیریم و سپس حاصل را بر حسب  $h$  حل کنیم؛ داریم:

$$h(t) = H \left( \sqrt{1 + (Ct/H^2)} - 1 \right) \quad (19-2-18)$$

می‌توان با استفاده از این آزمایش، ضریب نفوذ را، براساس اندازه‌گیری‌های سطح مایع، به صورت تابعی از زمان به دست آورد.



شکل ۳-۲-۱۸ تبخیر همراه با نفوذ به حالت شبه پایا. با تبخیر مایع، سطح مایع بسیار آهسته پایین می‌رود. مخلوط گازی با ترکیب  $x_{A2}$  از سر لوله عبور می‌کند.

### مثال ۲-۲-۱۸

تعیین ضریب نفوذ  
می‌خواهیم ضریب نفوذ زوج گازی  $O_2-CCl_4$  را با مشاهده تبخیر حالت پایای کربن تتراکلرید در لوله حاوی اکسیژن، مطابق شکل ۱۸-۲-۱، تعیین کنیم. فاصله بین سطح مایع  $CCl_4$  و سر لوله برابر است با:  $z_2 - z_1 = 17.1 \text{ cm}$ . فشار کل وارد بر سیستم  $755 \text{ mm Hg}$ ، و دما صفر درجه سانتی‌گراد است. فشار بخار  $CCl_4$  در آن دما  $33.0 \text{ mm Hg}$  است. سطح مقطع لوله نفوذ  $0.82 \text{ cm}^2$  فرض می‌شود. مشاهده می‌کنیم که پس از برقراری حالت پایا، در یک دوره ۱۰ ساعته در حدود  $0.208 \text{ cm}^3$  از  $CCl_4$  تبخیر می‌شود. مطلوب است تعیین ضریب نفوذ زوج گازی  $O_2-CCl_4$ .

حل

$CCl_4$  را با  $A$  و  $O_2$  را با  $B$  نشان می‌دهیم. در این صورت شار مولی  $A$  برابر است با:

$$N_A = \frac{(0.208 \text{ cm}^3)(1.59 \text{ g/cm}^3)}{(154 \text{ g/g-mole})(0.82 \text{ cm}^2)(3.6 \times 10^4 \text{ s})}$$

$$= 7.26 \times 10^{-4} \text{ g-mole/cm}^2 \cdot \text{s} \quad (20-2-18)$$

سپس از معادله (۱۴-۲-۱۸)، نتیجه می‌شود:

$$D_{AB} = \frac{(N_A|_{z=z_1})(z_2 - z_1)}{c \ln(x_{B2}/x_{B1})} = \frac{(N_A|_{z=z_1})(z_2 - z_1)RT}{p \ln(p_{B2}/p_{B1})}$$

$$= \frac{(7.26 \times 10^{-4})(17.1)(82.06)(273)}{(755/760)(2.303 \log_{10}(755/722))}$$

$$= 0.0636 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (21-2-18)$$

این روش تعیین ضرایب نفوذ فاز گازی چندین عیب دارد: سرمایه‌ش مایع بر اثر تبخیر، افزایش غلظت ناخالصی‌های غیرفرار در فصل مشترک، صعود مایع از جدار لوله، و انحنای سطح هلالی مایع در لوله.

**مثال ۲-۱۸**

نفوذ از طریق فیلم کروی غیرهم‌دما

(الف) عبارت‌هایی برای نفوذ در لایه‌ای کروی به دست آورید که نظیر معادله (۲-۱۸) (توزیع غلظت) و معادله (۲-۱۸) (شار مولی) باشند. سیستم موردبررسی را در شکل ۲-۱۸ نشان داده‌ام.

(ب) این نتایج را تعمیم بدهید تا نفوذ در فیلم غیرهم‌دما را که در آن دما در راستای شعاعی، طبق رابطه زیر تغییر می‌کند، توصیف کند:

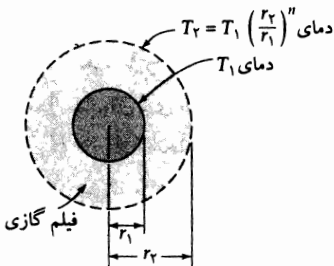
$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \quad (22-2.18)$$

در این رابطه  $T_1$  دما در  $r = r_1$  است. به عنوان تقریبی سردستی فرض کنید که  $D_{AB}$  با توان  $\frac{3}{4}$  دما تغییر می‌کند:

$$\frac{D_{AB}}{D_{AB,1}} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{3/2} \quad (23-2.18)$$

که در آن  $D_{AB,1}$  ضریب نفوذ در  $T = T_1$  است مسئله‌هایی از این نوع در ارتباط با خشک کردن قطرها و نفوذ در فیلم‌های گازی در نزدیکی تپه‌های کروی کاتالیزگر مطرح می‌شوند.

توزیع دما در معادله (۲-۱۸) صرفاً به سبب سادگی ریاضی انتخاب شده‌اند. این مثال را از آن رو مطرح کرده‌ایم که بر این نکته تأکید کنیم که، در سیستم‌های غیرهم‌دما، معادله (۱-۰) آغاز مناسب‌تری است تا رابطه  $N_{Az} = -D_{AB}(dc_A/dz) + x_A(N_{Az} + N_{Bz})$  که در بعضی کتاب‌ها ارائه شده‌است.



شکل ۲-۱۸ نفوذ در فیلم گازی ساکن کروی در اطراف قطری از مایع A.

حل

(الف) موازنه حالت پایای جرم روی لایه کروی به رابطه زیر منتهی می‌شود:

$$\frac{d}{dr}(r^2 N_{Ar}) = 0 \quad (24-2.18)$$

حال عبارت شار مولی  $N_{Ar}$  را در این معادله قرار می‌دهیم و  $N_{Br}$  را صفر می‌گیریم، زیرا در  $B$  در مایع A انحلال‌ناپذیر است. در نتیجه:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{c D_{AB}}{1 - x_A} \frac{dx_A}{dr} \right) = 0 \quad (25-2.18)$$

در دمای ثابت حاصل ضرب  $cD_{AB}$  ثابت است، و می‌توان از معادله (۲۵-۲.۱۸) انتگرال گرفت تا توزیع غلظت حاصل شود:

$$\left(\frac{1-x_A}{1-x_{A1}}\right) = \left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right) \frac{(\frac{1}{r_1}) - (\frac{1}{r})}{(\frac{1}{r_1}) - (\frac{1}{r_2})} \quad (26-2.18)$$

از معادله (۲۶-۲.۱۸) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$W_A = 4\pi r_1^2 N_{Ar}|_{r=r_1} = \frac{4\pi cD_{AB}}{(\frac{1}{r_1}) - (\frac{1}{r_2})} \ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right) \quad (27-2.18)$$

که جریان مولی  $A$  روی هر سطح کروی به شعاع  $r$  بین  $r_1$  و  $r_2$  است.

(ب) برای مسئله غیرهم‌دم، از ترکیب معادله‌های (۲۲-۲.۱۸) و (۲۳-۲.۱۸)، تغییر ضریب نفوذ با مکان به دست می‌آید:

$$\frac{D_{AB}}{D_{AB,1}} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{3\pi/2} \quad (28-2.18)$$

وقتی این عبارت را در معادله (۲۵-۲.۱۸) قرار دهیم و  $c$  را برابر  $p/RT$  بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{pD_{AB,1}/RT_1}{1-x_A} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{n/2} \frac{dx_A}{dr} \right) = 0 \quad (29-2.18)$$

پس از انتگرال‌گیری بین  $r_1$  و  $r_2$ ، نتیجه می‌شود (به‌ازای  $n \neq -2$ ):

$$W_A = 4\pi r_1^2 N_{Ar}|_{r=r_1} = \frac{4\pi(pD_{AB,1}/RT_1)[1 + (n/2)]}{[(\frac{1}{r_1})^{1+(n/2)} - (\frac{1}{r_2})^{1+(n/2)}] r_1^{n/2}} \ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right) \quad (30-2.18)$$

به‌ازای  $n = 0$ ، این نتیجه به معادله (۲۷-۲.۱۸) ساده می‌شود.

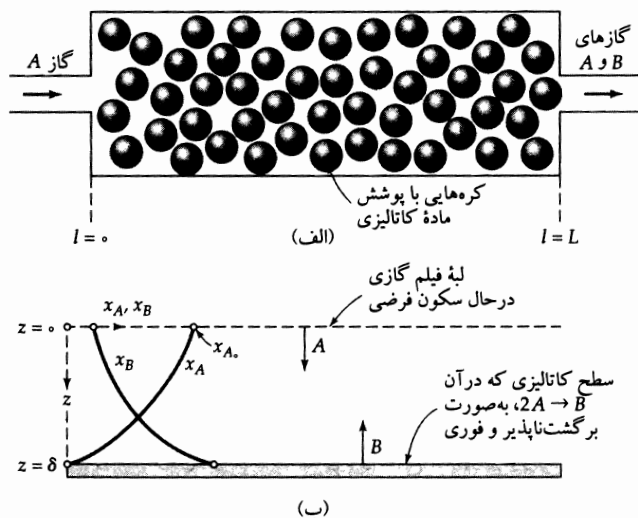
### ۳.۱۸ نفوذ با واکنش شیمیایی ناهمگن

حال مدل ساده‌ای برای یک راکتور کاتالیزی، مانند مدل نشان داده شده در شکل ۳.۱۸-الف) در نظر می‌گیریم که در آن واکنش  $A \rightarrow B$  انجام می‌شود. نمونه‌ای از این نوع واکنش دی‌مر شدن  $\text{CH}_3\text{CH} = \text{CH}_2$  با کاتالیزگر جامد است.

فرض می‌کنیم هر ذره کاتالیزگر توسط فیلمی از گاز ساکن احاطه شده است که  $A$  باید در آن نفوذ کند تا به سطح کاتالیزگر برسد (شکل ۳.۱۸-ب)). فرض می‌کنیم واکنش  $A \rightarrow B$ ، در سطح کاتالیزگر، به‌طور لحظه‌ای رخ می‌دهد و سپس فرآورده  $B$  از طریق فیلم گازی به عقب نفوذ می‌کند تا به جریان متلاطم اصلی تشکیل شده از  $A$  و  $B$  برسد. می‌خواهیم عبارتی برای آهنگ موضعی تبدیل از  $A$  به  $B$  به دست آوریم، هرگاه ضخامت مؤثر فیلم گازی و غلظت‌های  $x_{A0}$  و  $x_{B0}$  جریان اصلی معلوم باشند. فرض می‌کنیم فیلم گازی غیرهم‌دم است، اگرچه در بسیاری از واکنش‌های کاتالیزی، نمی‌توان گرمای تولیدشده توسط این واکنش را نادیده گرفت.

برای وضعیتی که در شکل ۳.۱۸-ب) نشان داده شده است، به‌ازای هردو مول  $A$  که در جهت  $z$  مثبت حرکت می‌کنند، یک مول  $B$  در جهت  $z$  منفی حرکت می‌کند. این اطلاع از استوکیومتری واکنش به دست می‌آید. بنابراین می‌دانیم که در حالت پایا:

$$N_{Bz} = -\frac{1}{2} N_{Az} \quad (1-3.18)$$



شکل ۱۰-۳-۱۸ نمودار شماتیک راکتور کاتالیزی که در آن  $A$  به  $B$  تبدیل می‌شود؛ (ب) تصویر ایده‌آل سازی شده (یا «مدل») مسئله نفوذ در نزدیکی سطح یک ذره کاتالیزر.

به ازای هر مقدار  $z$ . این رابطه را می‌توان در معادله (۱۰-۳-۱۸) قرار داد، و سپس نتیجه را بر حسب  $N_{Az}$  حل کرد؛ داریم:

$$N_{Az} = -\frac{cD_{AB}}{1 - \frac{1}{\gamma}x_A} \frac{dx_A}{dz} \quad (2-3-18)$$

به این ترتیب، معادله (۱۰-۳-۱۸) به علاوه استوکیومتری واکنش به عبارتی برای  $N_{Az}$ ، بر حسب گرادینان غلظت منتهی شده است. اکنون موازنه جرم را برای گونه  $A$  روی تیغه نازکی به ضخامت  $\Delta z$  در فیلم گازی می‌نویسیم. این راهکار دقیقاً همان است که در ارتباط با معادله‌های (۱۰-۳-۲ و ۱۰-۳-۳) از آن استفاده کردیم و بار دیگر به معادله زیر منتهی می‌شود:

$$\frac{dN_{Az}}{dz} = 0 \quad (3-3-18)$$

با قرار دادن عبارت مربوط به  $N_{Az}$ ، که در بالا به دست آمد، در این معادله، (با  $D_{AB}$  ثابت) نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma}x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0 \quad (4-3-18)$$

با دو بار انتگرال‌گیری نسبت به  $z$  نتیجه می‌شود:

$$-2 \ln \left( 1 - \frac{1}{\gamma}x_A \right) = C_1 z + C_2 = -(2 \ln K_1)z - (2 \ln K_2) \quad (5-3-18)$$

پیدا کردن ثابت‌های انتگرال‌گیری  $K_1$  و  $K_2$  آسان‌تر از یافتن  $C_1$  و  $C_2$  است. شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$x_A = x_{A0} \quad \text{در } z = 0 \quad (6-3-18)$$

$$x_A = 0 \quad \text{در } z = \delta \quad (7-3-18)$$

بنابراین نتیجه نهایی:

$$\left( 1 - \frac{1}{\gamma}x_A \right) = \left( 1 - \frac{1}{\gamma}x_{A0} \right)^{1-(z/\delta)} \quad (8-3-18)$$

برای توزیع غلظت در فیلم گازی حاصل می‌شود. اکنون می‌توان از معادله (۲-۳.۱۸) برای به دست آوردن شار مولی واکنش‌گر در فیلم استفاده کرد:

$$N_{Az} = \frac{\gamma c D_{AB}}{\delta} \ln \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma} x_{A0}} \right) \quad (۹-۳.۱۸)$$

کمیت  $N_{Az}$  را می‌توان به صورت آهنگ موضعی انجام واکنش در واحد سطح کاتالیزگر نیز تفسیر کرد. این اطلاع را می‌توان با سایر اطلاعات مربوط به رآکتور کاتالیزی که در شکل ۱۸-۳ (الف) نشان داده شده است، تلفیق کرد و آهنگ تبدیل کلی را در سرتاسر رآکتور به دست آورد.

یک نکته شایان تأکید است. اگرچه واکنش شیمیایی در سطح کاتالیزگر فوراً انجام می‌شود، تبدیل  $A$  به  $B$  با آهنگی متناهی رخ می‌دهد، زیرا فرایند نفوذ به صورت «متوالی» با فرایند واکنش انجام می‌گیرد. بنابراین تبدیل  $A$  به  $B$  را فرایندی تحت کنترل نفوذ می‌نامیم.

در مثال بالا فرض کردیم که واکنش در سطح کاتالیزگر فوراً انجام می‌شود. در مثال بعد نشان می‌دهیم که چگونه باید سینتیک واکنش متناهی در سطح کاتالیزگر را به حساب آورد.

نفوذ با واکنش ناهمگن آهسته

مسئله‌ای را که در بالا بررسی کردیم، درحالتی در نظر بگیرید که واکنش  $A \rightarrow B$  در سطح کاتالیزگر، در  $z = \delta$  فوراً انجام نشود. در عوض، فرض کنید که آهنگ ناپدید شدن  $A$  در سطح پوشیده از کاتالیزگر با غلظت  $A$  در سیال واقع در فصل مشترک، متناسب است:

$$N_{Az} = k_1'' c_A = k_1'' c x_A \quad (۱۰-۳.۱۸)$$

که در آن  $k_1''$  ثابت آهنگ برای واکنش سطحی شبه مرتبه اول است.

حل کار را درست مانند قبل دنبال می‌کنیم، با این تفاوت که شرط مرزی ۲ در معادله (۷-۳.۱۸) را باید با شرط زیر جایگزین کرد:

$$x_A = \frac{N_{Az}}{k_1'' c}, \quad z = \delta \quad (۱۱-۳.۱۸)$$

البته  $N_{Az}$  در حالت پایا مقداری ثابت است. تعیین ثابت‌های انتگرال‌گیری با استفاده از شرایط مرزی ۱ و ۲ به رابطه زیر منتهی می‌شود:

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma} x_A\right) = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \frac{N_{Az}}{k_1'' c}\right)^{z/\delta} \left(1 - \frac{1}{\gamma} x_{A0}\right)^{1-(z/\delta)} \quad (۱۲-۳.۱۸)$$

با استفاده از این رابطه  $(dx_A/dz)|_{z=0}$  را محاسبه می‌کنیم و در معادله (۲-۳.۱۸) قرار می‌دهیم تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$N_{Az} = \frac{\gamma c D_{AB}}{\delta} \ln \left( \frac{1 - \frac{1}{\gamma} (N_{Az}/k_1'' c)}{1 - \frac{1}{\gamma} x_{A0}} \right) \quad (۱۳-۳.۱۸)$$

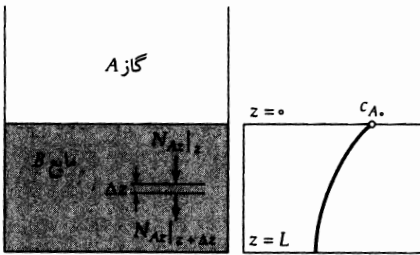
این معادله‌ای غیرجبری برای بیان  $N_{Az}$  به صورت تابعی از  $x_{A0}$ ،  $k_1''$ ،  $cD_{AB}$  و  $\delta$  است. هنگامی که  $k_1''$  بزرگ باشد، لگاریتم  $1 - \frac{1}{4}(N_{Az}/k_1''c)$  را می‌توان به صورت سری تیلر بسط داد و همه جمله‌ها، غیر از جمله نخست، را حذف کرد. در این صورت نتیجه می‌شود:

$$N_{Az} = \frac{2cD_{AB}/\delta}{1 + D_{AB}/k_1''\delta} \ln \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{4}x_{A0}} \right) \quad (k_1'' \text{ بزرگ}) \quad (۱۴-۳.۱۸)$$

باردیگر توجه شما را به این نکته جلب می‌کنیم که آهنگ مرکب واکنش و فرایند نفوذ را به دست آورده‌ایم. هم چنین توجه داشته باشید که گروه بدون بُعد  $D_{AB}/k_1''\delta$  اثر سینتیک واکنش سطحی را بر فرایند کلی نفوذ واکنش نشان می‌دهد. عکس این گروه را عدد دوم دامکوهلر<sup>۱</sup> می‌نامند و  $D_{II}a = k_1''\delta/D_{AB}$ . آشکار است که در حد، هنگامی که  $D_{II}a \rightarrow \infty$ ، معادله (۹-۳.۱۸) نتیجه می‌شود.

### ۴.۱۸ نفوذ با واکنش شیمیایی همگن

به‌منزله نمایش دیگری از نوشتن موازنه جرم، سیستم نشان داده شده در شکل ۱۴-۴.۱۸ را در نظر می‌گیریم. در این سیستم گاز  $A$  در مایع  $B$  که داخل بشر است حل می‌شود و به‌طور هم‌دما در فاز مایع نفوذ می‌کند. گاز  $A$ ، هم‌چنان که نفوذ می‌کند، در معرض واکنش همگن برگشت‌ناپذیر مرتبه اول  $A + B \rightarrow AB$  نیز قرار دارد. نمونه‌ای از چنین سیستمی جذب  $CO_2$  توسط محلول آبی غلیظ  $NaOH$  است.



شکل ۱۴-۴.۱۸ جذب  $A$  توسط  $B$  با واکنش همگن در فاز مایع.

این سیستم را به صورت محلول دوتایی  $A$  و  $B$  در نظر می‌گیریم و از مقدار اندکی  $AB$  که در سیستم موجود است، چشم‌پوشی می‌کنیم (فرض شبه‌دوتایی). سپس موازنه جرم گونه  $A$  روی ضخامت  $\Delta z$  از فاز مایع را می‌نویسیم:

$$N_{Az}|_z S - N_{Az}|_{z+\Delta z} S - k_1''' c_A S \Delta z = 0 \quad (۱-۴.۱۸)$$

که در آن  $k_1'''$  ثابت آهنگ مرتبه اول برای تجزیه شیمیایی  $A$ ، و  $S$  سطح مقطع مایع است. حاصل ضرب  $k_1''' c_A$  معرف مول‌های مصرف‌شده  $A$  توسط واکنش، در واحد حجم، بر واحد زمان است. با تقسیم معادله (۱-۴.۱۸) بر  $S\Delta z$  و گرفتن حد، وقتی  $\Delta z \rightarrow 0$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{dN_{Az}}{dz} + k_1''' c_A = 0 \quad (۲-۴.۱۸)$$

اگر غلظت  $A$  اندک باشد، آن‌گاه می‌توان معادله (۱-۴.۱۸) را با تقریب خوب، به صورت زیر نوشت:

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} \quad (۳-۴.۱۸)$$

زیرا غلظت مولی کل  $c$  در سرتاسر مایع یکنواخت است. از ترکیب دو معادله آخر نتیجه می‌شود:

$$D_{AB} \frac{d^2 c_A}{dz^2} - k_1''' c_A = 0 \quad (۴-۴.۱۸)$$

این معادله را با شرایط مرزی زیر حل می‌کنیم:

$$c_A = c_{A0} \quad \text{شرط مرزی ۱: در } z = 0, \text{ داریم} \quad (۵-۴.۱۸)$$

$$N_{Az} = 0 \quad \text{شرط مرزی ۲: در } z = L, \text{ داریم (یا } dc_A/dz = 0) \quad (۶-۴.۱۸)$$

شرط مرزی اول بر این نکته تأکید دارد که غلظت  $A$  در سطح مایع در مقدار  $c_{A0}$  ثابت می‌ماند. شرط دوم بیان می‌کند که  $A$  از طریق کف ظرف، در  $z = L$  اصلاً نفوذ انجام نمی‌دهد.

اگر معادله (۴-۴.۱۸) را در  $L^2/c_{A0} D_{AB}$  ضرب کنیم، آن‌گاه می‌توانیم آن را برحسب متغیرهای بدون بُعد به صورت معادله (ج-۱.۴) بنویسیم.

$$\frac{d^2 \Gamma}{d\zeta^2} - \phi^2 \Gamma = 0 \quad (۷-۴.۱۸)$$

که در آن  $\Gamma = c_A/c_{A0}$  غلظت بدون بُعد،  $\zeta = z/L$  طول بدون بُعد، و  $\phi = \sqrt{k_1''' L^2 / D_{AB}}$  گروهی بدون بُعد، موسوم به جدول تیلی است.<sup>۱</sup> این گروه معرف تأثیر نسبی واکنش شیمیایی  $k_1''' c_{A0}$  و نفوذ  $D_{AB}/L^2$  است. معادله (۷-۴.۱۸) را باید با این شرایط مرزی حل کرد که در  $\zeta = 0$ ، داریم  $\Gamma = 1$  و در  $\zeta = 1$ ، داریم  $d\Gamma/d\zeta = 0$ . جواب عمومی به صورت زیر است:

$$\Gamma = C_1 \cosh \phi \zeta + C_2 \sinh \phi \zeta \quad (۸-۴.۱۸)$$

وقتی ثابت‌های انتگرال‌گیری را محاسبه کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\Gamma = \frac{\cosh \phi \cosh \phi \zeta - \sinh \phi \sinh \phi \zeta}{\cosh \phi} = \frac{\cosh[\phi(1 - \zeta)]}{\cosh \phi} \quad (۹-۴.۱۸)$$

سپس با برگشت به نمادگذاری اصلی، داریم:

$$\boxed{\frac{c_A}{c_{A0}} = \frac{\cosh[\sqrt{k_1''' L^2 / D_{AB}}(1 - (z/L))]}{\cosh \sqrt{k_1''' L^2 / D_{AB}}}} \quad (۱۰-۴.۱۸)$$

توزیع غلظتی که به این ترتیب حاصل می‌شود، در شکل ۱۰-۴.۱۸ ترسیم شده است. هنگامی که توزیع کامل غلظت را به دست آوریم، می‌توانیم کمیت‌های دیگر، مانند غلظت متوسط در فاز مایع، را محاسبه کنیم:

$$\frac{c_{A, \text{avg}}}{c_{A0}} = \frac{\int_0^L (c_A/c_{A0}) dz}{\int_0^L dz} = \frac{\tanh \phi}{\phi} \quad (۱۱-۴.۱۸)$$

به علاوه، شار مولی در صفحه  $z = 0$  را می‌توان به صورت زیر یافت:

$$N_{Az}|_{z=0} = -D_{AB} \left. \frac{dc_A}{dz} \right|_{z=0} = \left( \frac{c_{A0} D_{AB}}{L} \right) \phi \tanh \phi \quad (۱۲-۴.۱۸)$$

1. E. W. Thiele, *Ind. Eng. Chem.*, **31**, 916-920 (1939).

ارنست ویلیام تیلی (۱۸۹۳-۱۸۹۵) به سبب تحقیق روی ضرایب کارایی کاتالیزگر و سهمی که در تهیه نمودار «مک کاب-تیلی» داشت، شهرت یافت. او پس از ۳۵ سال کار برای شرکت استاندارد اویل ایندیانا، یک دهه در دانشگاه نوتردام تدریس کرد.

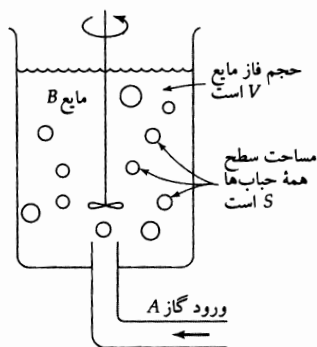


این نتیجه نشان می‌دهد که واکنش شیمیایی چه تأثیری بر آهنگ جذب گاز  $A$  توسط مایع  $B$  دارد. ممکن است این پرسش برای دانشجو مطرح شود که چگونه می‌توان انحلال‌پذیری  $c_{A0}$  و ضریب نفوذ  $D_{AB}$  را، با وجود انجام واکنش، به‌شیوه تجربی تعیین کرد. ابتدا  $k'''$  را می‌توان در آزمایشی جداگانه، در ظرفی که به‌خوبی هم‌زده می‌شود، اندازه‌گیری کرد. سپس، از لحاظ اصولی، می‌توان  $c_{A0}$  و  $D_{AB}$  را با استفاده از آهنگ‌های جذب اندازه‌گیری شده برای عمق‌های مختلف  $L$  مایع به‌دست آورد.

### مثال ۴.۱۸

جذب گاز همراه با واکنش شیمیایی در مخزن هم‌زده<sup>۲</sup>

اثر آهنگ واکنش شیمیایی را بر آهنگ جذب گاز در مخزن هم‌زده (شکل ۴.۱۸-۲) تخمین بزنید. سیستمی را در نظر بگیرید که در آن گاز حل‌شده  $A$  در معرض واکنش مرتبه اول برگشت‌ناپذیر با  $B$  قرار بگیرد؛ یعنی  $A$  با آهنگی متناسب با غلظت موضعی  $A$  در مایع ناپدید می‌شود. مثالی از این سیستم، جذب  $\text{SO}_2$  یا  $\text{H}_2\text{S}$  در محلول‌های آبی  $\text{NaOH}$  است.



شکل ۴.۱۸-۲ دستگاه جذب گاز.

حل

تحلیل دقیق این وضعیت ممکن نیست، زیرا فرایند جذب گاز پیچیده است. اما، می‌توان با تحلیل مدلی نسبتاً ساده، درکی نیمه‌کمی از این فرایند به‌دست آورد. مدلی که از آن استفاده می‌کنیم شامل فرض‌های زیر است:

(الف) هر حباب گاز با فیلمی از مایع ساکن، به‌ضخامت  $\delta$  احاطه می‌شود که در مقایسه با قطر حباب کوچک است.

(ب) پس از تشکیل حباب، به‌سرعت توزیع غلظت شبه‌پایایی در فیلم مایع تشکیل می‌شود.

(ج) گاز  $A$  فقط اندکی در مایع محلول است، به‌طوری‌که می‌توان از جمله همرفت در معادله (۴.۱۸-۱) چشم‌پوشی کرد.

(د) مایع خارج از فیلم ساکن، غلظتی برابر  $c_{Ab}$  دارد که چنان به‌آهستگی با زمان تغییر می‌کند که می‌توان آن را ثابت فرض کرد.

معادله دیفرانسیلی که نفوذ با واکنش شیمیایی را توصیف می‌کند، همانند معادله (۴.۱۸-۴) است، اما شرایط

مرزی فعلی عبارت‌اند از:

$$(۴.۱۸-۱۳) \text{ شرط مرزی ۱: در } z = 0, \text{ داریم } c_A = c_{A0}$$

$$(۴.۱۸-۱۴) \text{ شرط مرزی ۲: در } z = \delta, \text{ داریم } c_A = c_{A\delta}$$

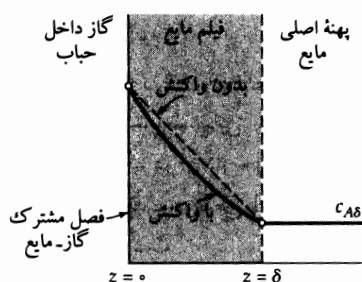
غلظت  $c_{A0}$  غلظت فصل‌مشترکی  $A$  در فاز مایع است، که فرض می‌شود با فاز گازی در فصل‌مشترک، در

2. E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, 4, 499-500 (1958), 8, 710-712 (1962).

تعداد باشد و  $c_{A\delta}$  غلظت  $A$  در پهنه اصلی مایع است. جواب معادله (۴-۱۸) با این شرایط مرزی عبارت است از:

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \frac{\sinh \phi \cosh \phi \zeta + (B - \cosh \phi) \sinh \phi \zeta}{\sinh \phi} \quad (۱۵-۴-۱۸)$$

که در آن  $\zeta = z/\delta$ ،  $B = c_{A\delta}/c_{A0}$ ، و  $\phi = \sqrt{k_1''' \delta^2 / D_{AB}}$ . این نتیجه در شکل ۳-۴-۱۸ ترسیم شده است.



شکل ۳-۴-۱۸ توزیع غلظت پیش‌بینی شده در فیلم مایع در نزدیکی حباب.

پس از فرض (د) استفاده می‌کنیم و مقدار  $A$  ورودی به پهنه اصلی مایع در  $z = \delta$  از تمام سطح حباب  $S$  در مخزن را، با مقدار  $A$  مصرفی در مایع از طریق واکنش شیمیایی، برابر می‌گیریم:

$$-SD_{AB} \frac{dc_A}{dz} \Big|_{z=\delta} = V k_1''' c_{A\delta} \quad (۱۶-۴-۱۸)$$

با قرار دادن مقدار  $c_A$  از معادله (۱۵-۴-۱۸) در معادله (۱۶-۴-۱۸)، عبارتی برای  $B$  به دست می‌آید:

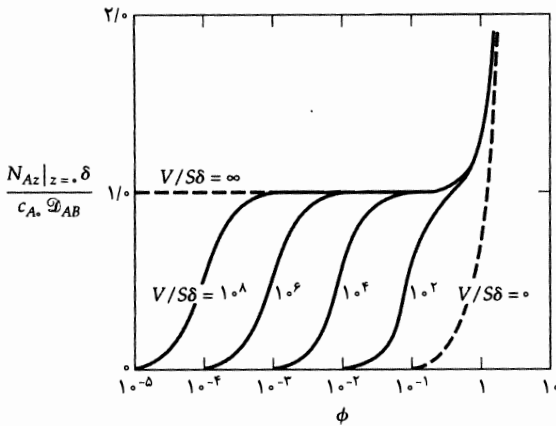
$$B = \frac{1}{\cosh \phi + (V/S\delta)\phi \sinh \phi} \quad (۱۷-۴-۱۸)$$

وقتی این نتیجه را در معادله (۱۵-۴-۱۸) جایگزین کنیم، عبارتی برای  $c_A/c_{A0}$  بر حسب  $\phi$  و  $V/S\delta$  به دست می‌آوریم. سپس از این عبارت به دست آمده برای توزیع غلظت، می‌توان آهنگ کل جذب با واکنش شیمیایی را از رابطه  $N_{Az} = -D_{AB}(dc_A/dz)$ ، که به ازای  $z = 0$  محاسبه شده است، به دست آورد؛ داریم:

$$\dot{N} = \frac{N_{Az}|_{z=0} \delta}{c_{A0} D_{AB}} = \frac{\phi}{\sinh \phi} \left( \cosh \phi - \frac{1}{\cosh \phi + (V/S\delta)\phi \sinh \phi} \right) \quad (۱۸-۴-۱۸)$$

این نتیجه در شکل ۴-۴-۱۸ ترسیم شده است.

در این جا مشاهده می‌شود که آهنگ جذب بدون بُعد در واحد سطح فصل مشترک،  $\dot{N}$ ، به ازای همه مقادیر متناهی  $V/S\delta$ ، با  $\phi$  افزایش می‌یابد. به ازای مقادیر بسیار کوچک  $\phi$  - یعنی برای واکنش‌های بسیار آهسته -  $\dot{N}$  به سمت صفر میل می‌کند. در این وضعیت حدی مایع تقریباً از گاز محلول اشباع است، و «نیروی رانش» برای جذب بسیار کوچک است. به ازای مقادیر بزرگ  $\phi$ ، شار جرمی سطحی بدون بُعد  $\dot{N}$  به سرعت با  $\phi$  افزایش می‌یابد و تقریباً از  $V/S\delta$  مستقل می‌شود. در وضعیت اخیر، واکنش با چنان سرعتی انجام می‌شود که تقریباً همه گاز محلول در داخل فیلم مصرف خواهد شد. در این حالت  $B$  بسیار نزدیک صفر است و توده مایع نقش مهمی ندارد. در حد، هنگامی که  $\phi$  بسیار بزرگ می‌شود،  $\dot{N}$  به سمت  $\phi$  میل می‌کند.



شکل ۴-۴.۱۸ جذب گاز همراه با واکنش برگشت ناپذیر مرتبه اول.

به ازای مقادیر متوسط  $\phi$  رفتار نسبتاً جالب‌تری مشاهده می‌شود. می‌توان دید که، به ازای مقادیر نسبتاً بزرگ  $V/S\delta$ ، گستره درخور اعتنایی از  $\phi$  وجود دارد که به ازای آن  $N$  بسیار نزدیک واحد است. در این ناحیه سرعت واکنش شیمیایی به اندازه‌ای زیاد هست که بتواند توده مایع را تقریباً خالی از عنصر حل شده نگه دارد، اما به اندازه کافی هم آهسته هست که اثر اندکی بر انتقال عنصر حل شده در فیلم داشته باشد. چنین وضعیتی هنگامی بروز می‌کند که نسبت  $V/S\delta$  حجم توده ماده به حجم فیلم برای جبران آهنگ حجمی بالاتر واکنش در فیلم کافی باشد. در این صورت آهنگ جذب برابر است با آهنگ جذب فیزیکی (یعنی آهنگ مربوط به  $k'' = 0$ ) برای مخزن عاری از عنصر حل شده. این رفتار غالباً در عمل مشاهده می‌شود و کار تحت چنین شرایطی، برای مشخص کردن رفتار انتقال جرمی انواع جذب‌کننده‌های گازی سودمند است.

### ۵.۱۸ نفوذ در فیلم مایع ریزان (جذب گاز)<sup>۱</sup>

در این بخش تصویری از انتقال جرم از طریق همرفت واداشته ارائه می‌دهیم که در آن، جریان ویسکوز و نفوذ، تحت شرایطی رخ می‌دهد که می‌توان نفوذ را عملاً بدون تأثیر بر میدان سرعت در نظر گرفت. مخصوصاً جذب گاز  $A$  توسط فیلم ریزان آرام مایع  $B$  را در نظر می‌گیریم. ماده  $A$  فقط اندکی در  $B$  محلول است، به طوری که نفوذ در فیلم مایع چنان به آهستگی رخ می‌دهد که  $A$  چندان در فیلم «فرو نمی‌رود»؛ یعنی فاصله نفوذ آن در مقایسه با ضخامت فیلم کم است. این سیستم در شکل ۵.۱۸-۱ ترسیم شده است. نمونه‌ای از این نوع سیستم در جذب  $O_2$  در  $H_2O$  دیده می‌شود. حال معادله دیفرانسیلی برای توصیف فرایند نفوذ پی‌ریزی می‌کنیم. ابتدا باید مسئله انتقال اندازه حرکت را حل کنیم تا توزیع سرعت  $v_z(x)$  برای فیلم به دست آید؛ این کار را قبلاً در بخش ۲.۲، در غیاب انتقال جرم در سطح سیال، انجام دادیم و اکنون می‌دانیم که نتیجه به شرح زیر است:

$$v_z(x) = v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \quad (۱-۵.۱۸)$$

به شرط آن‌که از «آثار انتهایی» چشم‌پوشی شود.

سپس باید موازنه جرم را برای جزء  $A$  تعیین کنیم. مشاهده می‌کنیم که  $c_A$  هم با  $x$  و هم با  $z$  تغییر می‌کند. بنابراین، حجم تشکیل شده توسط برخورد تیغه‌ای به ضخامت  $\Delta z$  با تیغه‌ای به ضخامت  $\Delta x$  را به عنوان جزء حجم

1. S. Lynn, J. R. Straatemeier, and H. Kramers, *Chem. Engr. Sci.*, 4, 49-67 (1955).

انتخاب می‌کنیم. در این صورت موازنه جرم  $A$  روی این بخش از فیلم با عرض  $W$  چنین نوشته می‌شود:

$$N_{Az}|_z W \Delta x - N_{Az}|_{z+\Delta z} W \Delta x + N_{Ax}|_x W \Delta z - N_{Ax}|_{x+\Delta x} W \Delta z = 0 \quad (2-5.18)$$

با تقسیم کردن این عبارت بر  $W \Delta x \Delta z$  و انجام فرایند حدگیری متداول، وقتی جزء حجم بی‌نهایت کوچک می‌شود، داریم:

$$\frac{\delta N_{Az}}{\delta z} + \frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} = 0 \quad (3-5.18)$$

اکنون عبارت مربوط به  $N_{Ax}$  و  $N_{Az}$  را در این معادله جایگزین می‌کنیم و ساده‌سازی‌های مقتضی را در معادله (۱۰-۱۸) انجام می‌دهیم. برای شار مولی در جهت  $z$ ، با فرض ثابت بودن  $c$ ، می‌نویسیم:

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial z} + x_A (N_{Az} + N_{Bz}) \approx c_A v_z(x) \quad (4-5.18)$$

جمله‌ای را که زیر آن خط چین کشیده‌ایم حذف می‌کنیم، زیرا انتقال  $A$  در جهت  $z$  اساساً از طریق همرفت انجام می‌شود. از معادله (م) در جدول ۱۷-۸ و این نکته که در محلول‌های رقیق  $v$  تقریباً همان  $v^*$  است استفاده کرده‌ایم. شار مولی در جهت  $x$  برابر است با:

$$N_{Ax} = -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x} + x_A (N_{Ax} + N_{Bx}) \approx -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x} \quad (5-5.18)$$

در این جا جمله‌ای را که زیر آن خط چین کشیده‌ایم نادیده می‌گیریم، زیرا حرکت  $A$  در جهت  $x$  عمدتاً از طریق نفوذ انجام می‌شود و تقریباً انتقال همرفتی قائم بر جدار وجود ندارد، زیرا انحلال‌پذیری  $A$  در  $B$  بسیار کم است. با ترکیب سه معادله آخر، رابطه‌ای برای ثابت  $D_{AB}$  به دست می‌آید:

$$v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \quad (6-5.18)$$

سرانجام، با جایگزین کردن معادله (۱-۵-۱۸) برای توزیع سرعت، نتیجه می‌شود:

$$v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \quad (7-5.18)$$

که معادله دیفرانسیلی برحسب  $c_A(x, z)$  است.

معادله (۷-۵-۱۸) را باید با شرایط مرزی زیر حل کرد:

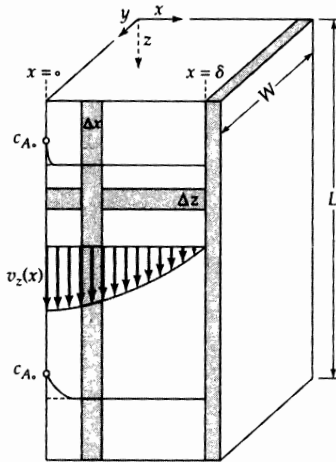
$$c_A = 0 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } z = 0 \text{، داریم } (8-5.18)$$

$$c_A = c_{A0} \quad \text{شرط مرزی ۲: در } x = 0 \text{، داریم } (9-5.18)$$

$$\frac{\partial c_A}{\partial x} = 0 \quad \text{شرط مرزی ۳: در } x = \delta \text{، داریم } (10-5.18)$$

شرط مرزی اول با این نکته متناظر است که فیلم مورد بحث در ناحیه بالایی فقط از  $B$  خالص تشکیل می‌شود و شرط دوم حاکی از آن است که در فصل مشترک مایع-گاز، غلظت  $A$  را انحلال‌پذیری  $A$  در  $B$  (یعنی  $c_{A0}$ ) تعیین می‌کند. سومین شرط مرزی بیان می‌کند که  $A$  نمی‌تواند در جدار جامد نفوذ کند. این مسئله به روش تحلیلی،

به صورت یک سری نامتناهی<sup>۲</sup> حل شده است، اما در این جا حل آن را ارائه نمی دهیم. در عوض در پی یافتن عبارتی حدی هستیم که برای «زمان های تماس کوتاه»، یعنی به ازای مقادیر کوچک  $L/v_{max}$ ، اعتبار داشته باشد.



شکل ۱۵.۱۸ جذب  $A$  در فیلم ریزان مایع  $B$ .

اگر، چنان که در شکل ۱۵.۱۸ نشان داده شده است، ماده  $A$  فقط به فاصله کوتاهی در فیلم فروبرود، آن گاه گونه  $A$  «این گمان را ایجاد می کند» که فیلم با سرعتی مساوی  $v_{max}$  در حرکت است. به علاوه، اگر  $A$  خیلی دور نرود، حضور جدار جامد در  $x = \delta$  را «حس» نمی کند. بنابراین، اگر فیلم ضخامت نامتناهی می داشت و با سرعت  $v_{max}$  حرکت می کرد، ماده نفوذکننده «متوجه تفاوت نمی شد». این استدلال فیزیکی (به درستی) نشان می دهد که اگر معادله (۷-۵.۱۸) و شرایط مرزی آن را با عبارتهای زیر جایگزین کنیم، نتیجه بسیار خوبی می گیریم:

$$v_{max} \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} \quad (۱۱-۵.۱۸)$$

۱۲-۵.۱۸) شرط مرزی ۱: در  $z = 0$ ، داریم  $c_A = 0$ .

۱۳-۵.۱۸) شرط مرزی ۲: در  $x = 0$ ، داریم  $c_A = c_{A0}$ .

۱۴-۵.۱۸) شرط مرزی ۳: در  $x = \infty$ ، داریم  $c_A = 0$ .

در مثال ۱-۱.۴ با مسئله ای دقیقاً نظیر این روبه رو شدیم و آن را با استفاده از روش ترکیب متغیرها حل کردیم. بنابراین می توان از جواب آن مسئله، فقط با تغییر نمادگذاری، استفاده کرد. جواب عبارت است از:<sup>۳</sup>

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4D_{AB}z/v_{max}}} \exp(-\xi^2) d\xi \quad (۱۵-۵.۱۸)$$

یا

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{4D_{AB}z/v_{max}}} = \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{4D_{AB}z/v_{max}}} \quad (۱۶-۵.۱۸)$$

2. R. L. Pigford, PhD thesis, University of Illinois (1941).

۳. این جواب را در مثال ۱-۱.۴، با استفاده از روش ترکیب متغیرها به طور کامل به دست آوردیم.

در این عبارت‌ها « $\operatorname{erf} x$ » و « $\operatorname{erfc} x$ »، به ترتیب، عبارت‌اند از «تابع خطا» و «تابع خطای مکمل»  $x$ . در پیوست ج. ۶ آن‌ها را شرح می‌دهیم و در منابع استاندارد جدول‌بندی شده‌اند.<sup>۴</sup> وقتی توزیع غلظت معلوم شد، می‌توان شار جرمی موضعی در فصل مشترک گاز-مایع را به صورت زیر به دست آورد:

$$N_{Ax}|_{x=0} = -D_{AB} \left. \frac{\partial c_A}{\partial x} \right|_{x=0} = c_{A^*} \sqrt{\frac{D_{AB} v_{\max}}{\pi z}} \quad (17-5.18)$$

بنابراین جریان مولی کل  $A$  از روی سطح واقع در  $x = 0$  (یعنی جریانی که توسط فیلم مایعی به طول  $L$  و عرض  $W$  جذب می‌شود) برابر است با:

$$\begin{aligned} W_A &= \int_0^W \int_0^L N_{Ax}|_{x=0} dz dy \\ &= W c_{A^*} \sqrt{\frac{D_{AB} v_{\max}}{\pi}} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{z}} dz \\ &= W L c_{A^*} \sqrt{\frac{4 D_{AB} v_{\max}}{\pi L}} \quad (18-5.18) \end{aligned}$$

همین نتیجه با انتگرال‌گیری از حاصل ضرب  $v_{\max} c_A$  روی مقطع جریان در  $z = L$  به دست می‌آید (نگاه کنید به مسئله ۱۸ ج. ۳).

معادله (۱۸-۵.۱۸) نشان می‌دهد که آهنگ انتقال جرم با ریشه دوم ضریب نفوذ تناسب مستقیم، و با ریشه دوم «زمان در معرض بودن»، یعنی  $t_{\exp} = L/v_{\max}$ ، تناسب معکوس دارد. این رهیافت برای بررسی جذب گاز، نخستین بار توسط هیگی پیشنهاد شد.<sup>۵</sup>

مسئله‌ای که در این بخش شرح داده شد، «مدل نفوذی» انتقال جرم را نشان می‌دهد. این مدل را در فصل‌های ۲۰ و ۲۲ شرح خواهیم داد.

### مثال ۱۸-۵

جذب گاز از حباب‌های بالارونده

آهنگ جذب حباب‌های گاز  $A$  توسط مایع  $B$  را، در هنگام بالارفتن حباب‌ها با سرعت حدی  $v_t$  در مایع تمیز ساکن تخمین بزنید.

حل

حباب‌های گاز با اندازه متوسط، در مایعی فاقد عوامل فعال در سطح، بالا می‌روند و گردشی چنبره‌ای (گردش ریزینسکی-هادامارد) دارند که در شکل ۲-۵.۱۸ نشان داده شده است. مایع نسبت به هر حباب بالارونده، پایین می‌آید و در نزدیکی فصل مشترک، به ترتیبی که در فیلم ریزان شکل ۱-۵.۱۸ دیدیم، از گونه  $A$  غنی می‌شود. عمق فروری گاز حل شده در مایع، برای بخش عمده حباب‌ها، ناچیز است، زیرا مایع نسبت به حباب حرکت می‌کند و زیرا

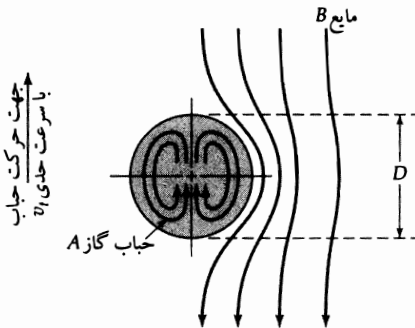
4. M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 9th printing (1973), pp. 310 et seq.

5. R. Higbie, *Trans. AIChE*, **31**, 365-389 (1935).

رالف ویلمارت هیگی (۱۹۴۱-۱۹۰۸) از دانشگاه میشیگان فارغ‌التحصیل شد و اساس «مدل نفوذی» انتقال جرم را فراهم کرد. او در شرکت‌های ای. آی. دو پون د نورس و شرکا، و ایگر-پیچر لید کار کرد؛ پس از آن به تدریس در دانشگاه آرکانزاس و دانشگاه داکوتای شمالی پرداخت.

ضریب نفوذ فاز مایع،  $D_{AB}$ ، کوچک است. بنابراین، به‌عنوان تقریبی اولیه، می‌توانیم از معادله (۱۸-۵.۱۸) استفاده کنیم و آهنگ جذب گاز را تخمین بزنیم؛ برای این منظور باید زمان در معرض بودن  $t_{exp} = L/v_{max}$  برای فیلم ریزان را با  $D/v_t$  برای حباب جایگزین کنیم؛  $D$  قطر لحظه‌ای حباب است. در نتیجه این کار، تخمینی<sup>۵</sup> از آهنگ جذب مولی حاصل می‌شود که آهنگ متوسط در سطح حباب است، و داریم:

$$(N_A)_{avg} = \sqrt{\frac{2D_{AB}v_t}{\pi D}} c_{A0} \quad (۱۹-۵.۱۸)$$



شکل ۲-۵.۱۸ جذب گاز A در مایع B.

در این جا  $c_{A0}$  انحلال‌پذیری گاز A در مایع B، در دمای فصل مشترکی و فشار جزئی گاز A است. نکته جالب این‌که نتیجه حاصل به‌صورت معادله (۱۹-۵.۱۸) برای جریان پتانسیل مایع در اطراف حباب نیز درست است (نگاه کنید به مسئله ۴.۵). این معادله برای حباب‌های گاز به قطر  $0.3$  تا  $0.75$  cm که در آب به‌دقت خالص شده بالا می‌روند، به‌طور تقریبی تأیید شده است.<sup>۷</sup> این سیستم برای جریان خزشی نیز تحلیل شده (نگاه کنید به مثال ۳.۲۰) و نتیجه، به‌جای معادله (۱۹-۵.۱۸) عبارت است از:

$$(N_A)_{avg} = \sqrt{\frac{2D_{AB}v_t}{3\pi D}} c_{A0} \quad (۲۰-۵.۱۸)$$

وجود مقدار ناچیزی از مواد فعال در سطح سبب کاهش شدید آهنگ جذب از حباب‌های کوچک می‌شود، زیرا این مواد «پوسته‌ای» در اطراف هر حباب تشکیل می‌دهند و در نتیجه به‌طور مؤثری از گردش داخلی جلوگیری می‌کنند. در این حالت آهنگ جذب مولی، در حد ضریب نفوذ کوچک، با توان  $\frac{1}{3}$  ضریب نفوذ متناسب است که در مورد کره صلب نیز چنین است (نگاه کنید به بخش‌های ۲.۲۲ و ۳.۲۲).

از رهیافتی مشابه برای پیش‌بینی آهنگ‌های انتقال جرم در حین تشکیل قطره در نوک لوله موئینه، با موفقیت استفاده شده است.<sup>۸</sup>

6. D. Hammerton and F. H. Garner, *Trans. Inst. Chem. Engrs. (London)*, **32**, S18-S24 (1954).

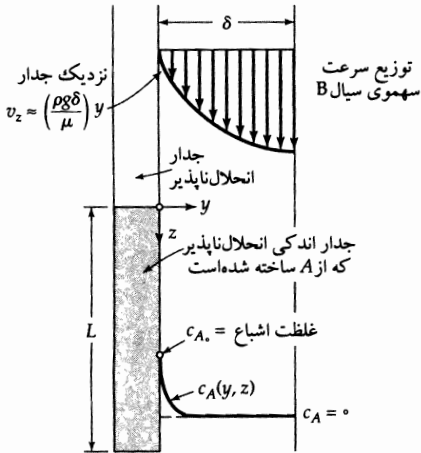
7. V. G. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962), p. 408, Eq. 72.9.

در این منبع نتایج دیگری، شامل انتقال جرم مایع-مایع و آثار مواد فعال در سطح نیز ارائه شده است.

8. H. Groothuis and H. Kramers, *Chem. Eng. Sci.*, **4**, 17-25 (1955).

### ۶.۱۸ نفوذ در فیلم مایع ریزان (انحلال جامد)<sup>۱</sup>

حال به سراغ مسئله فیلم ریزانی می‌رویم که با مسئله بخش قبل تفاوت دارد. مایع  $B$  با حرکت آرام روی جداری عمودی، مطابق شکل ۱۸-۶، فرومی‌ریزد. فیلم از فاصله کافی در بالای دیوار شروع می‌شود، به طوری که  $v_z$ ، به ازای  $z \geq 0$ ، فقط به  $y$  وابسته است. به ازای  $0 \leq z \leq L$ ، جدار از گونه‌های  $A$  تشکیل می‌شود که اندکی در  $B$  حل می‌شوند.



شکل ۱۸-۶ جامد  $A$  در فیلم ریزان مایع  $B$  حل می‌شود، که با توزیع سرعتی به شکل سهمی در حرکت است.

برای فواصل کوتاه در پایین دست، گونه‌های  $A$  تا مسافت زیادی در فیلم ریزان نفوذ نمی‌کنند. یعنی  $A$  فقط در لایه مرزی بسیار نازکی در نزدیکی سطح جامد وجود خواهد داشت. بنابراین مولکول‌های نفوذکننده  $A$  توزیع سرعتی خواهند داشت که مشخصه فیلم ریزان، درست در مجاورت جدار،  $y = 0$ ، است. توزیع سرعت با معادله (۱۸-۲.۲) نشان داده می‌شود. در وضعیت فعلی  $\cos \beta = 1$  و  $x = \delta - y$ ، و:

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu} \left[ 2 \left( \frac{y}{\delta} \right) - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (۱۸-۶.۱۸)$$

در مجاورت جدار  $(y/\delta)^2 \ll (y/\delta)$ ، به طوری که در این مسئله سرعت، با تقریب بسیار خوبی، عبارت است از:  $v_z = (\rho g \delta / \mu) y \equiv ay$ ، یعنی معادله (۱۸-۵.۶)، که در این جا قابل کاربرد است، برای فواصل کوتاه در پایین دست، به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$ay \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (۲-۶.۱۸)$$

که در آن  $a = \rho g \delta / \mu$  این معادله را باید با شرایط مرزی زیر حل کرد:

(۳-۶.۱۸) شرط مرزی ۱: در  $z = 0$ ، داریم  $c_A = 0$ .

(۴-۶.۱۸) شرط مرزی ۲: در  $y = 0$ ، داریم  $c_A = c_{A_0}$ .

(۵-۶.۱۸) شرط مرزی ۳: در  $y = \infty$ ، داریم  $c_A = 0$ .

1. H. Kramers and P. J. Kreyger, *Chem. Eng. Sci.*, **6**, 42-48 (1956); see also R. L. Pigford, *Chem. Eng. Prog. Symposium series* No. 17, Vol. 51, pp. 79-92 (1955)

در منبع دوم مسئله نظیر در انتقال گرما مطرح شده است.



در شرط مرزی دوم،  $c_{A0}$  انحلال پذیری  $A$  در  $B$  است. از شرط مرزی سوم به جای شرط مرزی صحیح ( $\partial c_A / \partial y = 0$ ) در  $y = \delta$  استفاده می‌کنیم، زیرا به‌طور شهودی احساس می‌کنیم که برای زمان‌های تماس کوتاه، در نتیجه تأثیری نخواهد گذاشت. گذشته از این، چون مولکول‌های  $A$  فقط کمی در فیلم فرومی‌روند، نمی‌توانند تا جایی جلو بروند که مرز خارجی فیلم را «ببینند» و بنابراین نمی‌توانند شرط مرزی حقیقی و شرط مرزی تقریبی را که ما از آن استفاده کرده‌ایم، از هم تمیز دهند. همین نوع استدلال در مثال ۲-۲.۱۲ و مسئله ۱۲-ب.۴ نیز به‌کار گرفته شد.

باتوجه به صورت شرایط مرزی ارائه شده با معادله‌های (۱۸-۶-۳ تا ۵) بهتر است از روش ترکیب متغیرها استفاده کرد. بنابراین  $c_A / c_{A0} = f(\eta)$  را امتحان می‌کنیم که در آن  $\eta = y(a/\sqrt{D_{AB}z})^{1/2}$  می‌توان نشان داد که این ترکیب متغیرهای مستقل بدون بُعد است، و ضریب «۹» در آن گنجانده شده است تا جواب تمیزتر به نظر برسد. وقتی این تغییر متغیر انجام شود، معادله دیفرانسیل جزئی (۱۸-۶-۲) به معادله دیفرانسیل عادی زیر:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 3\eta^2 \frac{df}{d\eta} = 0 \quad (۶-۶-۱۸)$$

با شرایط مرزی  $f(0) = 1$  و  $f(\infty) = 0$  تحویل می‌شود.

جواب این معادله مرتبه دوم، که همان صورت معادله (ج. ۱-۹) را دارد، چنین است:

$$f = C_1 \int_0^\eta \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta} + C_2 \quad (۷-۶-۱۸)$$

سپس می‌توان ثابت‌های انتگرال‌گیری را با استفاده از شرایط مرزی محاسبه کرد و نتیجه نهایی زیر را:

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \frac{\int_\eta^\infty \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta}}{\int_0^\infty \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta}} = \frac{\int_\eta^\infty \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta}}{\Gamma(\frac{4}{3})} \quad (۸-۶-۱۸)$$

برای توزیع سرعت به‌دست آورد که در آن  $\Gamma(\frac{4}{3}) = 0.8930 \dots$  تابع گامای  $\frac{4}{3}$  است (نگاه کنید به پیوست ج. ۴) اکنون می‌توان شار جرمی موضعی را به‌ترتیب زیر به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} N_{Ay}|_{y=0} &= -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial y} \Big|_{y=0} = -D_{AB} c_{A0} \left[ \frac{d}{d\eta} \left( \frac{c_A}{c_{A0}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \Big|_{y=0} \\ &= -D_{AB} c_{A0} \left[ -\frac{\exp(-\eta^3)}{\Gamma(\frac{4}{3})} \left( \frac{a}{\sqrt{D_{AB}z}} \right)^{1/2} \right] \Big|_{y=0} \\ &= + \frac{D_{AB} c_{A0}}{\Gamma(\frac{4}{3})} \left( \frac{a}{\sqrt{D_{AB}z}} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (۹-۶-۱۸)$$

جریان مولی  $A$  روی کل سطح انتقال جرم در  $y = 0$  برابر است با:

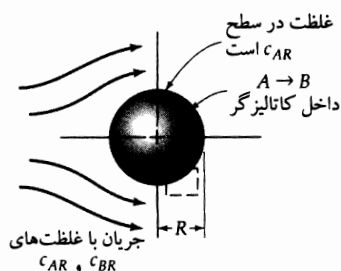
$$W_A = \int_0^W \int_0^L N_{Ay}|_{y=0} dz dx = \frac{\sqrt{2} D_{AB} c_{A0} W L}{\Gamma(\frac{4}{3})} \left( \frac{a}{\sqrt{D_{AB}L}} \right)^{1/2} \quad (۱۰-۶-۱۸)$$

که در آن  $\Gamma(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3} \Gamma(\frac{1}{3}) = 1.1907 \dots$

مسئله‌ای که در بخش ۵.۱۸ شرح داده شد و این مسئله، نمونه‌هایی از دو نوع جواب مجانبی هستند که در بخش‌های ۲.۲۰ و ۳.۲۰، و سپس در فصل ۲۲ بیش‌تر شرح داده می‌شوند. بنابراین درک کامل این دو مسئله ضروری است. توجه کنید که در بخش ۵.۱۸،  $W_A \propto (D_{ABL})^{1/2} L$ ، اما در این بخش  $W_A \propto (D_{ABL})^{2/3}$ . اختلاف در نماهای دو عبارت بازتاب ماهیت گرادیان سرعت در فصل مشترک انتقال جرم است: در بخش ۵.۱۸، گرادیان سرعت صفر بود، اما در این بخش، گرادیان سرعت غیرصفر است.

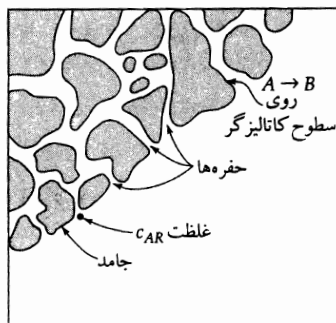
### ۷.۱۸ نفوذ و واکنش شیمیایی در کاتالیزگر متخلخل

تا این‌جا نفوذ را در گازها و مایعات و در سیستم‌هایی با شکل هندسی ساده بررسی کردیم. اکنون می‌خواهیم روش موازنه لایه‌ای جرم و قانون اول فیک را برای توصیف نفوذ در تپله کاتالیزگر متخلخل به‌کار بگیریم. برای توصیف نفوذ در داخل مجراهای پرپیچ‌وخم تپله تلاش خواهیم کرد. در عوض نفوذ «متوسط» واکنش‌گر را برحسب «ضریب نفوذ مؤثر» توصیف خواهیم کرد. ۳.۲.۱



شکل ۷.۱۸-۱ کاتالیزگر کروی متخلخل. در شکل ۲-۷.۱۸ داخل کاتالیزگر بزرگ‌نمایی شده‌است.

مخصوصاً، یک ذره کاتالیزگر کروی متخلخل به شعاع  $R$  را، مطابق شکل ۱-۷.۱۸، در نظر می‌گیریم. این ذره در یک رآکتور کاتالیزی قرار دارد و در آن‌جا در جریان گازی غوطه‌ور است که حاوی واکنش‌گر  $A$  و فراورده  $B$  است. در همسایگی سطح ذره کاتالیزگر موردنظر، فرض می‌کنیم که غلظت برابر است با:  $c_{AR}$  مول  $A$  در واحد حجم. گونه  $A$ ، چنان‌که در شکل ۲-۷.۱۸ نشان داده شده، در مجراهای پرپیچ‌وخم کاتالیزگر نفوذ می‌کند و روی سطوح کاتالیزگر به  $B$  تبدیل می‌شود.



شکل ۲-۷.۱۸ حفره‌های کاتالیزگر که در آن‌ها نفوذ و واکنش شیمیایی انجام می‌شود.

1. E. W. Thiele, *Ind. Eng. Chem.*, **31**, 916-920 (1939).
2. R. Aris, *Chem. Eng. Sci.*, **6**, 262-268 (1957).
3. A. Wheeler, *Advances in Catalysis*, Academic Press, New York (1950), Vol. 3, pp. 250-326.

کار را با نوشتن موازنه جرم برای گونه  $A$  روی لایه‌ای کروی به ضخامت  $\Delta r$  در داخل یک ذره کاتالیزگر شروع می‌کنیم:

$$N_{Ar}|_r \cdot 4\pi r^2 - N_{Ar}|_{r+\Delta r} \cdot 4\pi(r + \Delta r)^2 + R_A \cdot 4\pi r^2 \Delta r = 0 \quad (1-7.18)$$

در این جا  $N_{Ar}|_r$  تعداد مول‌های  $A$  است که در جهت  $r$  از سطح کروی فرضی به فاصله  $r$  از مرکز کره عبور می‌کنند. جمله منبع  $R_A \cdot 4\pi r^2 \Delta r$  آهنگ مولی تولید  $A$  از طریق واکنش شیمیایی در لایه‌ای به ضخامت  $\Delta r$  است. با تقسیم کردن بر  $4\pi \Delta r$  و هنگامی که  $\Delta r \rightarrow 0$ ، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(r^2 N_{Ar})|_{r+\Delta r} - (r^2 N_{Ar})|_r}{\Delta r} = r^2 R_A \quad (2-7.18)$$

یا، با استفاده از تعریف مشتق اول، داریم:

$$\frac{d}{dr}(r^2 N_{Ar}) = r^2 R_A \quad (3-7.18)$$

این فرایند حدی در تضاد آشکار با این واقعیت است که محیط متخلخل ماهیت دانه‌ای دارد، نه پیوسته. در نتیجه، در معادله (۳-۷.۱۸)، نمادهای  $N_{Ar}$  و  $R_A$  را نمی‌توان به‌عنوان کمیت‌هایی تفسیر کرد که در یک نقطه مقدار معناداری دارند. بلکه باید آن‌ها را به صورت کمیت‌های متوسط‌گیری شده در همسایگی کوچک نقطه مورد نظر تفسیر کنیم، همسایگی کوچک نسبت به بعد  $R$ ، اما بزرگ در مقایسه با ابعاد مجراهای داخل ذره متخلخل. حال یک «ضریب نفوذ مؤثر» برای گونه  $A$  در محیط پیوسته، به صورت زیر، تعریف می‌کنیم:

$$N_{Ar} = -D_A \frac{dc_A}{dr} \quad (4-7.18)$$

که در آن  $c_A$  غلظت گاز  $A$  در داخل حفره‌هاست. ضریب نفوذ مؤثر  $D_A$  را باید به شیوه تجربی اندازه‌گیری کرد. به‌طور کلی این ضریب به فشار و دما، و همچنین به ساختار حفره کاتالیزگر بستگی دارد. مکانیسم واقعی نفوذ در حفره‌ها پیچیده است، زیرا ممکن است ابعاد حفره از مسافت آزاد میانگین مولکول‌های نفوذکننده کوچک‌تر باشد. در این جا مسئله مکانیسم را مطرح نمی‌کنیم و صرفاً فرض می‌کنیم که معادله (۴-۷.۱۸) می‌تواند فرایند نفوذ را به خوبی معرفی کند (نگاه کنید به بخش ۶.۲۴).

هرگاه عبارت قبلی را در معادله (۳-۷.۱۸) قرار دهیم، برای ضریب نفوذ ثابت، نتیجه می‌گیریم:

$$D_A \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dc_A}{dr} \right) = -R_A \quad (5-7.18)$$

اکنون وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن گونه  $A$  طی یک واکنش شیمیایی مرتبه اول روی سطوح کاتالیزگری که تمام یا بخشی از «جدارها»ی مجراهای ماریچی را تشکیل می‌دهند، ناپدید می‌شود. فرض کنید  $a$  سطح کاتالیزگر موجود در واحد حجم (جامد + حفره) باشد. در این صورت  $R_A = -k_1'' a c_A$ ، و معادله (۵-۷.۱۸) به صورت زیر تبدیل می‌شود (نگاه کنید به معادله (ج-۱-۶)):

$$D_A \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dc_A}{dr} \right) = k_1'' a c_A \quad (6-7.18)$$

این معادله را باید با این شرایط مرزی حل کرد که  $c_A = c_{AR}$  در  $r = R$  و  $c_A$  در  $r = 0$  مقداری متناهی دارد.

معادله‌های حاوی عملگر  $(d/dr)[r^2(d/dr)](1/r^2)$  را غالباً می‌توان با استفاده از یک «شگرد استاندارد»: یعنی تغییر متغیر  $c_A/c_{AR} = (1/r)f(r)$  حل کرد. بنابراین معادله برحسب  $f(r)$  چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = \left( \frac{k_1'' a}{D_A} \right) f \quad (۷-۷.۱۸)$$

این یک معادله دیفرانسیل استاندارد مرتبه دوم است که می‌توان آن را برحسب توابع نمایی یا هذلولوی حل کرد. وقتی این معادله حل شود و نتیجه بر  $r$  تقسیم شود، جواب زیر برای معادله (۶-۷.۱۸) برحسب توابع هذلولوی به دست می‌آید (نگاه کنید به بخش ج.۵):

$$\frac{c_A}{c_{AR}} = \frac{C_1}{r} \cosh \sqrt{\frac{k_1'' a}{D_A}} r + \frac{C_2}{r} \sinh \sqrt{\frac{k_1'' a}{D_A}} r \quad (۸-۷.۱۸)$$

سرانجام، با کاربرد شرایط مرزی، نتیجه می‌شود:

$$\frac{c_A}{c_{AR}} = \left( \frac{R}{r} \right) \frac{\sinh \sqrt{\frac{k_1'' a}{D_A}} r}{\sinh \sqrt{\frac{k_1'' a}{D_A}} R} \quad (۹-۷.۱۸)$$

در بررسی‌های انجام شده روی سینتیک شیمیایی و کاتالیز، غالباً به شار مولی  $N_{AR}$  یا جریان مولی  $W_{AR}$  در سطح  $r = R$  علاقه‌مندیم:

$$W_{AR} = 4\pi R^2 N_{AR} = -4\pi R^2 D_A \frac{dc_A}{dr} \Big|_{r=R} \quad (۱۰-۷.۱۸)$$

وقتی در این عبارت از معادله (۹-۷.۱۸) استفاده کنیم، نتیجه می‌گیریم که:

$$W_{AR} = 4\pi R D_A c_{AR} \left( 1 - \sqrt{\frac{k_1'' a}{D_A}} R \coth \sqrt{\frac{k_1'' a}{D_A}} R \right) \quad (۱۱-۷.۱۸)$$

این نتیجه آهنگ تبدیل  $A$  به  $B$  را (برحسب مول برثانه) در یک ذره کاتالیزگر به شعاع  $R$ ، برحسب پارامترهای توصیف‌کننده فرایندهای نفوذ و واکنش، نشان می‌دهد.

اگر سطح فعال از لحاظ کاتالیزی کاملاً در معرض جریانی به غلظت  $c_{AR}$  قرار می‌گرفت، آن‌گاه گونه  $A$  ناگزیر نبود از طریق حفره‌ها نفوذ کند تا به محل واکنش برسد. در این صورت آهنگ مولی تبدیل با حاصل ضرب سطح موجود و آهنگ واکنش سطحی برابر بود:

$$W_{AR,0} = \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) (a) (-k_1'' c_{AR}) \quad (۱۲-۷.۱۸)$$

نسبت بین دو معادله را به دست می‌آوریم و داریم:

$$\eta_A = \frac{W_{AR}}{W_{AR,0}} = \frac{3}{\phi^2} (\phi \coth \phi - 1) \quad (۱۳-۷.۱۸)$$

که در آن  $\phi = \sqrt{k_1'' a / D_A} R$  مدول تیلی<sup>۱</sup> است که در بخش ۴.۱۸ با آن آشنا شدیم. کمیت  $\eta_A$  را ضریب کارایی می‌نامند.<sup>۴,۳,۲,۱</sup> این کمیتی است که باید  $W_{AR,0}$  را در آن ضرب کرد تا مقاومت در برابر نفوذ درون ذره‌ای در کل فرایند تبدیل نیز به حساب آورده شود.

4. O. A. Hougen and K.M. Watson, *Chemical Process Principles*, Wiley, New York (1947), Part III, Chapter XIX. See also *CPP Charts*, by O. A. Hougen, K. M. Watson, and R. A. Ragatz, Wiley, New York (1960), Fig. E.

برای ذرات کاتالیزگر غیرکروی، نتایج پیش گفته را می توان به طور تقریبی، از طریق تفسیر مجدد  $R$  به کار بست. مشاهده می کنیم که برای کره ای به شعاع  $R$ ، نسبت حجم به سطح خارجی برابر  $R/3$  است. برای ذرات کروی،  $R$  معادله (۷.۱۸-۱۳) را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$R_{\text{غیرکروی}} = 3 \left( \frac{V_P}{S_P} \right) \quad (۷.۱۸-۱۴)$$

که در آن  $V_P$  و  $S_P$  حجم و سطح خارجی یک ذره کاتالیزگرند. سپس مقدار مطلق آهنگ تبدیل، به طور تقریبی، از رابطه زیر به دست می آید:

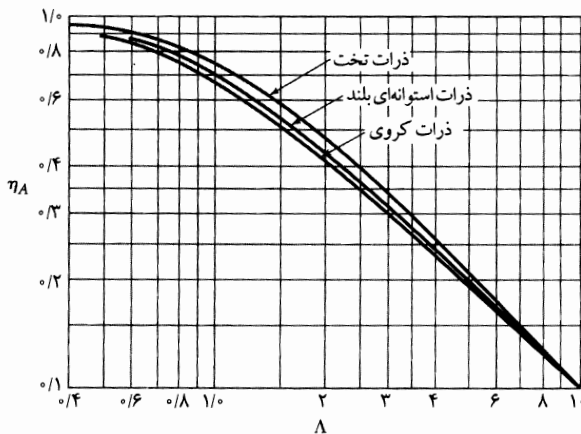
$$|W_{AR}| \approx V_P a k'' c_{AR} \eta_A \quad (۷.۱۸-۱۵)$$

که در آن:

$$\eta_A = \frac{1}{3\Lambda^2} (3\Lambda \coth 3\Lambda - 1) \quad (۷.۱۸-۱۶)$$

در این رابطه کمیت  $\Lambda = \sqrt{k'' a / D_A} (V_P / S_P)$  مدول تعمیم یافته است. ۲.۲

کاربرد خاص کمیت  $\Lambda$  را می توان در شکل ۷.۱۸-۳ مشاهده کرد. آشکار است که وقتی عبارت های نظری دقیق  $\eta_A$  به صورت توابعی از  $\Lambda$  ترسیم شوند، منحنی ها، به ازای مقادیر کوچک و بزرگ  $\Lambda$ ، مجانب های مشترک دارند و به ازای مقادیر متوسط  $\Lambda$  تفاوت چندانی باهم ندارند. بنابراین شکل ۷.۱۸-۳ توجیهی برای استفاده از معادله (۷.۱۸-۱۶) به منظور تخمین زدن  $\eta_A$  برای ذرات غیرکروی، فراهم می کند.



شکل ۷.۱۸-۳ ضرایب کارایی برای کاتالیزگرهای جامد متخلخل با شکل های مختلف.

### ۸.۱۸ نفوذ در سیستم گازی سه جزئی

تا این جا فقط سیستم های دوتایی، یا سیستم هایی که قابل تقریب زدن با سیستم های دوتایی بودند را بررسی کردیم. برای نشان دادن نحوه طرح مسئله های نفوذ چند جزئی برای گازها، مسئله تبخیر بخش ۲.۱۸ را دوباره حل می کنیم. آب مایع (گونه ۱) در هوا تبخیر می شود، که آن را مخلوطی دوتایی از نیتروژن (۲)، و اکسیژن (۳) در فشار ۱ atm و دمای ۳۵۲ K در نظر می گیریم. فصل مشترک هوا-آب را در  $z = 0$ ، و سر لوله نفوذ را در  $z = L$  فرض می کنیم. به علاوه فرض می کنیم فشار بخار آب معلوم است، به طوری که  $x_1 = 0$  در  $z = 0$  معلوم است (یعنی

$$x_{rL} = 0.75, x_{1L} = 0.10 \text{ معلومند: } z = L \text{ در هر سه گاز در } L = 11/2 \text{ cm نفوذ } x_{rL} = 0.15$$

از پایستگی جرم، چنانکه در بخش ۲.۱۸ دیدیم، عبارت‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{dN_{\alpha z}}{dz} = 0 \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1-8.18)$$

از این عبارت‌ها می‌توان نتیجه گرفت که شارهای مولی هر سه گونه، در حالت پایا، ثابت است. چون گونه‌های ۲ و ۳ حرکت نمی‌کنند، نتیجه می‌گیریم که  $N_{rz}$  و  $N_{rz}$  هر دو صفرند.

اکنون به عبارت‌های شار مولی از معادله (۱-۹.۱۷) نیاز داریم. چون  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  فقط به دو معادله از سه معادله موجود نیاز داریم و معادله‌های مربوط به گونه‌های ۲ و ۳ را انتخاب می‌کنیم. چون  $N_{rz} = 0$  و  $N_{rz} = 0$ ، این معادله‌ها بسیار ساده می‌شوند:

$$\frac{dx_r}{dz} = \frac{N_{1z}}{cD_{1r}} x_r^2; \quad \frac{dx_r}{dz} = \frac{N_{1z}}{cD_{1r}} x_r \quad (3, 2-8.18)$$

توجه کنید که ضریب نفوذ  $D_{r3}$  در این جا ظاهر نمی‌شود، زیرا گونه‌های ۲ و ۳ حرکت نسبی ندارند. می‌توان از این معادله‌ها نسبت به ارتفاع دلخواه  $z$  تا سر لوله  $L$  انتگرال گرفت تا ثابت  $cD_{\alpha\beta}$  به دست آید:

$$\int_{x_r}^{x_{rL}} \frac{d\bar{x}_r}{\bar{x}_r} = \frac{N_{1z}}{cD_{1r}} \int_z^L dz; \quad \int_{x_r}^{x_{rL}} \frac{d\bar{x}_r}{\bar{x}_r} = \frac{N_{1z}}{cD_{1r}} \int_z^L dz \quad (5, 4-8.18)$$

پس از انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود:

$$\frac{x_r}{x_{rL}} = \exp\left(-\frac{N_{1z}(L-z)}{cD_{1r}}\right); \quad \frac{x_r}{x_{rL}} = \exp\left(-\frac{N_{1z}(L-z)}{cD_{1r}}\right) \quad (7, 6-8.18)$$

و توزیع کسر مولی بخار آب در ستون نفوذ برابر خواهد بود با:

$$x_1 = 1 - x_{rL} \exp\left(-\frac{N_{1z}(L-z)}{cD_{1r}}\right) - x_{rL} \exp\left(-\frac{N_{1z}(L-z)}{cD_{1r}}\right) \quad (8-8.18)$$

وقتی شرط مرزی در  $z = 0$  را به کار ببندیم، نتیجه می‌شود:

$$x_{10} = 1 - x_{rL} \exp\left(-\frac{N_{1z}L}{cD_{1r}}\right) - x_{rL} \exp\left(-\frac{N_{1z}L}{cD_{1r}}\right) \quad (9-8.18)$$

که معادله‌ای غیرجبری برحسب  $N_{1z}$  است.

براساس نظر رید، پراسنتیز، و پولینگ<sup>۱</sup>،  $D_{1r} = 0.364 \text{ cm}^2/\text{s}$  و  $D_{1r} = 0.357 \text{ cm}^2/\text{s}$  در دمای ۳۵۲ و فشار ۱ atm. در این شرایط  $c = 3.46 \times 10^{-5} \text{ g-moles/cm}^3$  برای به دست آوردن سریع جوابی برای معادله (۹-۸.۱۸)، هر دو ضریب نفوذ را برابر  $0.36 \text{ cm}^2/\text{s}$  فرض می‌کنیم. این صورت نتیجه می‌شود:

$$0.449 = 1 - 0.90 \exp\left(-\frac{N_{1z}(11/2)}{(3.462 \times 10^{-5})(0.36)}\right) \quad (10-8.18)$$

1. R. C. Reid, J. M. Prausnitz, and B. E. Poling, *The Properties of Gases and Liquids*, 4th edition, McGraw-Hill, New York (1987), p. 591.

۲. جواب مسئله‌های نفوذ سه جزئی، که در آن‌ها دو ضریب نفوذ برابرند، در منبع زیر تشریح شده است:

H. L. Toor, *AIChE Journal*, 3, 198-207 (1957).

با استفاده از رابطه بالا می‌توان دریافت که  $N_{1z} = 5,523 \times 10^{-7} \text{ g-moles/cm}^2 \cdot \text{s}$ . در صورت لزوم می‌توان از این نتیجه به‌عنوان حدس اول برای حل دقیق‌تر معادله (۹-۸.۱۸) استفاده کرد. سپس می‌توان توزیع‌های کامل را با استفاده از معادله‌های (۶-۸.۱۸) تا (۸-۸.۱۸) محاسبه کرد.

### پرسش‌های تشریحی

۱. در این فصل، برای حذف  $N_B$  از معادله (۱-۰.۱۸) از چه استدلال‌هایی استفاده شد؟
۲. راه‌هایی برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ  $D_{AB}$  با استفاده از مثال‌های این فصل، پیشنهاد کنید. منابع احتمالی خطا را به‌اختصار مشخص کنید.
۳. منحنی‌های غلظت شکل ۱-۲.۱۸ در چه حدی به خط راست تبدیل می‌شوند؟
۴. تفاوت بین واکنش‌های همگن و ناهمگن را شرح دهید. کدام یک از آن‌ها توسط شرایط مرزی توصیف می‌شوند و کدام یک در معادله‌های دیفرانسیل تجلی می‌یابند.
۵. اصطلاح «واکنش تحت کنترل نفوذ» را شرح دهید.
۶. در جمله اول بخش ۲.۱۸، چه نوع «وسیله‌ای» را برای ثابت نگه داشتن تراز فصل مشترک پیشنهاد می‌کنید؟
۷. چرا جمله سمت چپ معادله (۱۵-۲.۱۸) را «آهنگ تبخیر» می‌نامند؟
۸. نحوه به‌دست آوردن معادله (۱۹-۲.۱۸) را به‌دقت تشریح کنید.
۹. مثال ۳-۲.۱۸ را نقد کنید. این مثال تا چه میزان صرفاً یک «مسئله کتاب درسی» است؟ از این مسئله چه می‌آموزید؟
۱۰. کمیت  $N_{Az}$  در معادله (۹-۳.۱۸) را با چه مفهومی می‌توان به‌صورت آهنگ موضعی واکنش شیمیایی تفسیر کرد؟
۱۱. اندازه حباب، در حین بالا رفتن در مایع، چگونه تغییر می‌کند؟
۱۲. قبلاً در کجا با معادله (۱۱-۵.۱۸) برخورد کرده بودید؟
۱۳. اگر سعی کنید معادله (۷-۷.۱۸) را با استفاده از توابع نمایی، به‌جای توابع هذلولوی، حل کنید، چه اتفاقی می‌افتد؟ چگونه می‌توانید انتخاب ساده‌تری انجام دهید؟
۱۴. سیستم‌های شرح داده شده در بخش‌های ۵.۱۸ و ۶.۱۸ را، از لحاظ مسائل فیزیکی، روش‌های ریاضی مورد استفاده برای حل آن‌ها، و عبارت‌های نهایی به‌دست آمده برای شارهای مولی، باهم مقایسه کنید.

### مسئله‌ها

۱۸الف. آهنگ تبخیر در سیستم نشان داده شده در شکل ۱-۲.۱۸، مطلوب است تعیین آهنگ تبخیر برحسب  $\text{g/hr}$  کلروپیکرین ( $\text{CCl}_2\text{NO}_2$ ) در هوا با دمای  $25^\circ\text{C}$ . از این فرض متداول استفاده کنید که هوا «ماده‌ای خالص» است.

$$770 \text{ mm Hg} = \text{فشار کل}$$

$$0,088 \text{ cm}^2/\text{s} = \text{ضریب نفوذ } (\text{CCl}_2\text{NO}_2\text{-هوا})$$

$$23,81 \text{ mm Hg} = \text{فشار بخار } \text{CCl}_2\text{NO}_2$$

$$11,14 \text{ cm} = \text{فاصله از سطح مایع تا سرلوله}$$

$$۱,۶۵ \text{ g/cm}^3 = \text{CCl}_3\text{NO}_2 \text{ چگالی مایع}$$

$$۲,۲۹ \text{ cm}^2 = \text{مساحت سطحی از مایع که در معرض تبخیر است}$$

جواب:  $۰,۱۰۱۳۹ \text{ g/hr}$

۱۸ الف ۲. تصعید کره‌های کوچک ید در هوای ساکن. کره‌ای از ید، به قطر ۱ cm در هوای ساکن با دمای  $۴۰^\circ\text{C}$  و فشار ۷۴۷ mm Hg قرار دارد. در این دما، فشار بخار ید در حدود ۱,۰۳ mm Hg است. می‌خواهیم ضریب نفوذ سیستم ید-هوا را از طریق اندازه‌گیری آهنگ تصعید تعیین کنیم. برای کمک به تعیین شرایط معقول برای آزمایش:

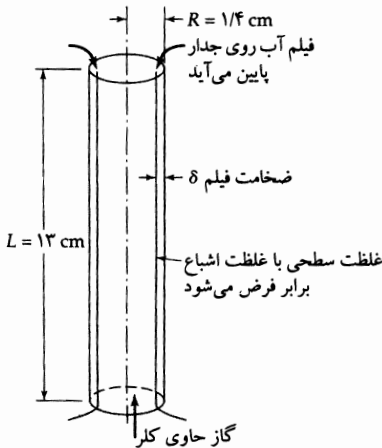
(الف) ضریب نفوذ را برای سیستم ید-هوا در دما و فشار مفروض در بالا، با استفاده از پارامترهای نیروی بین‌مولکولی جدول ۱۰.۵، تخمین بزنید.

(ب) آهنگ تصعید را تخمین بزنید و محاسبات خود را براساس معادله (۲۷-۲.۱۸) انجام دهید. (راهنمایی: فرض کنید  $r_2$  بسیار بزرگ است.)

این روش برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ استفاده شده است، اما پرسش‌هایی در مورد آن مطرح است، زیرا ممکن است نقش همرفت آزاد اهمیت داشته باشد.

جواب: (الف)  $D_{I_2} = ۰,۱۰۸۸۸ \text{ cm}^2/\text{s}$ ; (ب)  $W_{I_2} = ۱,۰۶ \times ۱۰^{-۴} \text{ g-moles/hr}$

۱۸ الف ۳. تخمین خطا در محاسبه آهنگ جذب. مطلوب است تعیین حداکثر خطای ممکن در محاسبه آهنگ جذب با استفاده از معادله (۱۸-۵.۱۸)، هرگاه انحلال‌پذیری  $A$  در  $B$  با خطای  $\pm ۰,۵\%$ ، و ضریب نفوذ  $A$  در  $B$  با خطای  $\pm ۱,۵\%$  معلوم باشد. فرض کنید کمیت‌های هندسی و سرعت با دقت زیاد معلوم‌اند.



شکل ۱۸ الف ۴. نقشه شماتیک ستون جدارخیس.

۱۸ الف ۴. جذب کلر در فیلم ریزان (شکل ۱۸ الف ۴). قرار است در یک برج آزمایشی کوچک جدارخیس، مطابق شکل، کلر از یک گاز جذب شود. سیال جذب‌کننده آب است که با سرعت متوسط  $۱۷,۷ \text{ cm/s}$  حرکت می‌کند. مطلوب است تعیین آهنگ جذب برحسب  $\text{g-moles/hr}$ ، هرگاه ضریب نفوذ فاز مایع سیستم کلر-آب برابر  $۱۰^{-۵} \text{ cm}^2/\text{s}$ ،  $۱,۲۶ \times ۱۰^{-۵}$ ، و غلظت اشباع کلر در آب  $۰,۸۲۳ \text{ g}$  کلر در هر  $۱۰۰ \text{ g}$  آب باشد



(این‌ها مقادیر تجربی‌اند که در دمای  $16^\circ\text{C}$  به دست آمده‌اند). ابعاد ستون در شکل آمده‌است. (راهنمایی: از واکنش شیمیایی بین کلر و آب چشم‌پوشی کنید).  
جواب:  $0.273 \text{ g-moles/hr}$ .

۱۸ الف. ۵. اندازه‌گیری ضریب نفوذ توسط روش منبع نقطه‌ای (شکل ۱۸ ج. ۱).<sup>۱</sup> می‌خواهیم سیستم جریانی طراحی کنیم تا بتوانیم از نتایج مسئله ۱۸ ج. ۱ برای اندازه‌گیری  $D_{AB}$  استفاده کنیم. جریان دریافتی تشکیل شده از  $B$  خالص را در راستای عمودی به طرف بالا هدایت می‌کنیم و ترکیب شیمیایی گاز را در چند نقطه در طول محور  $z$  اندازه می‌گیریم.

(الف) مطلوب است محاسبهٔ آهنگ تزریق گاز  $W_A$  بر حسب  $\text{g-moles/s}$  که برای تولید کسر مولی  $x_A \approx 0.1$  در نقطه‌ای به فاصلهٔ  $1 \text{ cm}$  در پایین دست منبع، در سیستم گازی ایده‌آل با فشار  $1 \text{ atm}$  و دمای  $80^\circ\text{C}$  لازم است، هرگاه  $v_0 = 50 \text{ cm/s}$  و  $D_{AB} \approx 5 \text{ cm}^2/\text{s}$ .

(ب) حداکثر خطای مجاز در مکان شعاعی کاوهٔ نمونه برداری از گاز چه قدر است، هرگاه بخواهیم ترکیب اندازه‌گیری شدهٔ  $x_A$  در حدود  $1\%$  مقدار اندازه‌گیری شده در محور کاوه باشد.

۱۸ الف. ۶. تعیین ضریب نفوذ برای سیستم اتر-هوا. داده‌های زیر در مورد تبخیر اتیل اتر، با چگالی مایع  $0.712 \text{ g/cm}^3$ ، توسط یوست تهیه شده‌است.<sup>۲</sup> این داده‌ها مربوط به لوله‌ای به قطر  $6.16 \text{ mm}$ ، فشار کل  $747 \text{ mm Hg}$  و دمای  $22^\circ\text{C}$  است.

پایین رفتن سطح اتر (اندازه‌گیری شده از سر باز لوله)، بر حسب mm	زمان لازم، به ثانیه، برای پایین رفتن سطح به میزان گفته شده
از ۹ تا ۱۱	۵۹۰
از ۱۴ تا ۱۶	۸۹۵
از ۱۹ تا ۲۱	۱۱۸۵
از ۲۴ تا ۲۶	۱۴۸۰
از ۳۴ تا ۳۶	۲۰۵۵
از ۴۴ تا ۴۶	۲۶۵۵

وزن مولکولی اتیل اتر  $74.12$ ، و فشار بخار آن در  $22^\circ\text{C}$  برابر  $48 \text{ mm Hg}$  است. می‌توان فرض کرد که غلظت اتر در سر باز لوله صفر است. یوست مقدار  $D_{AB}$  را برای سیستم اتر-هوا در دمای  $22^\circ\text{C}$  و فشار  $747 \text{ mm Hg}$  برابر  $0.786 \text{ cm}^2/\text{s}$  ارائه داده‌است.

(الف) با استفاده از داده‌های تبخیر، مقدار  $D_{AB}$  را در فشار  $747 \text{ mm Hg}$  و دمای  $22^\circ\text{C}$  پیدا کنید؛ فرض می‌شود که می‌توان از متوسط حسابی طول‌های ستون‌های گاز، به جای  $z_1 - z_2$  در شکل ۱۸-۲ استفاده کرد. فرض کنید که مخلوط اتر-هوا ایده‌آل است و نفوذ را می‌توان دوتایی تلقی کرد.

۱. این دقیق‌ترین روشی است که تا به حال برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ در دماهای بالا ابداع شده‌است. برای آشنایی بیشتر با این روش به منبع زیر رجوع کنید:

R. E. Walker and A. A. Westenberg, *J. Chem. Phys.*, **29**, 1139-1146. 1147-1153 (1958).

برای اطلاع از مقادیر اندازه‌گیری شده و مقایسهٔ آن‌ها با نظریهٔ چاپمن-انسکوگ به منبع زیر رجوع کنید:

R. M. Fristrom and A. A. Westenberg, *Flame Structure*, McGraw-Hill, New York (1965), Ch. XIII.

2. W. Jost, *Diffusion*, Academic Press, New York (1952), pp. 411-413.

(ب) با استفاده از معادله (۱۲-۱۷) نتیجه را به  $D_{AB}$  در  $76^\circ \text{C}$  و  $1 \text{ atm}$  تبدیل کنید.

۱۸ الف ۷. شار جرم خروجی از حباب در گردش.

(الف) با استفاده از معادله (۵-۱۸) آهنگ جذب  $\text{CO}_2$  (جزء A) از حباب کربن دیوکسید به قطر  $0.5 \text{ cm}$  را که در آب خالص (جزء B) بالا می‌رود، در دمای  $18^\circ \text{C}$  و فشار  $1 \text{ atm}$  به دست آورید. می‌توانید از داده‌های<sup>۳</sup> زیر استفاده کنید:  $D_{AB} = 1.46 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ ،  $c_{A0} = 0.41 \text{ g-mole/liter}$ ،  $v_t = 22 \text{ cm/s}$

(ب) آهنگ جذب را دوباره محاسبه کنید و این بار از نتایج تجربی هارتون و گارنر استفاده کنید<sup>۴</sup> که  $k_c$  متوسط‌گیری شده روی سطح را برابر  $117 \text{ cm/hr}$  به دست آوردند (نگاه کنید به معادله (۱۸-۱)).

جواب: (الف)  $1.17 \times 10^{-6} \text{ g-mole/cm}^2\text{s}$ ؛ (ب)  $1.33 \times 10^{-6} \text{ g-mole/cm}^2\text{s}$

۱۸ ب ۱. نفوذ در فیلم در حال سکون، روش دیگر به دست آوردن رابطه. در بخش ۲-۱۸ عبارتی برای آهنگ تبخیر (معادله (۱۴-۱۸))، با مشتق‌گیری از توزیع غلظتی به دست آمد که چند سطر قبل پیدا شده بود. نشان دهید که می‌توان همین نتایج را بدون یافتن توزیع غلظت به دست آورد. توجه کنید که در حالت پایا،  $N_{Az}$  طبق معادله (۳-۲۱۸) مقداری ثابت است. سپس می‌توانید از معادله (۱۸-۲) مستقیماً انتگرال بگیرید و معادله (۱۴-۲۱۸) را به دست بیاورید.

۱۸ ب ۲. خطای ناشی از حذف جمله همرفت در تبخیر.

(الف) مسئله بخش ۲-۱۸ را با چشم‌پوشی از جمله  $x_A(N_A + N_B)$  در معادله (۱۸-۱) دوباره حل کنید. نشان دهید که عبارت زیر نتیجه می‌شود:

$$N_{Az} = \frac{cD_{AB}}{z_2 - z_1} (x_{A1} - x_{A2}) \quad (18\text{-}2\text{-}b)$$

این تقریبی سودمند است، هرگاه غلظت A بسیار کم باشد.

(ب) با استفاده از تقریب مناسب، نتیجه قسمت (الف) را از معادله (۱۴-۲۱۸) به دست آورید.

(ج) در صورت استفاده از نتیجه قسمت (الف)، در تعیین مقدار  $D_{AB}$  در مثال ۲-۱۸ چه قدر خطا پیدا می‌شود؟

جواب:  $0.78\%$

۱۸ ب ۳. اثر آهنگ انتقال جرم بر توزیع غلظت.

(الف) نتیجه ارائه شده به صورت معادله (۱۱-۲۱۸) را با معادله (۱۴-۲۱۸) ترکیب کنید و نتیجه زیر را به دست آورید:

$$\frac{1 - x_A}{1 - x_{A1}} = \exp\left(\frac{N_{Az}(z - z_1)}{cD_{AB}}\right) \quad (18\text{-}3\text{-}b)$$

(ب) همین نتیجه را با انتگرال‌گیری مستقیم از معادله (۱۸-۲) به دست آورید؛ از این نکته استفاده کنید که  $N_{Az}$  ثابت است.

3. G. Tammann and V. Jessen, *Z. anorg. allgem. Chem.*, **179**, 125-144 (1929); F. H. Garner and D. Hammerton, *Chem. Eng. Sci.*, **3**, 1-11 (1954).

4. D. Hammerton and F. H. Garner, *Trans. Inst. Chem. Engrs. (London)*, **32**, S18-S24 (1954).

(ج) توجه کنید که وقتی آهنگ انتقال گرما کوچک می‌شود، چه اتفاقی می‌افتد. معادله (۱۸.ب.۱-۳) را به صورت سری تیلر بسط دهید و فقط دو جمله از آن را نگه دارید که برای  $N_{Az}$  کوچک مناسب است. وقتی  $N_{Az}$  خیلی کوچک شود، برای خطوط کم‌انحنای شکل ۱۸.۲-۱۸ چه اتفاقی می‌افتد؟

۱۸.۴ جذب با واکنش شیمیایی.

(الف) مسئله شرح داده شده در بخش ۱۸.۴ را دوباره حل کنید و این بار کف پشیر را در  $z = 0$  بگیرید و فصل مشترک گاز-مایع را در  $z = L$  فرض کنید.

(ب) درهنگام حل معادله (۱۸.۴-۷)، جواب را به صورت جمع دو تابع هذلولوی در نظر گرفتیم. سعی کنید این مسئله را با استفاده از جوابی با همین درجه از اعتبار، به صورت  $\Gamma = C_1 \exp(\phi\zeta) + C_2 \exp(-\phi\zeta)$  حل کنید.

(ج) وقتی  $L$  خیلی بزرگ باشد، نتایج ارائه شده به صورت معادله‌های (۱۸.۴-۱۰ و ۱۲) چگونه ساده می‌شوند؟ برای مقادیر خیلی کوچک  $L$  چگونه ساده می‌شوند؟ این نتایج را از لحاظ فیزیکی تفسیر کنید.

۱۸.۵ جذب کلر توسط سیکلوهگزان: کلر را می‌توان از مخلوط هوا- $\text{Cl}_2$  توسط اولفین‌های محلول در  $\text{CCl}_4$  جذب کرد. معلوم شده است<sup>۵</sup> که واکنش  $\text{Cl}_2$  با سیکلوهگزان ( $\text{C}_6\text{H}_{10}$ )، نسبت به  $\text{Cl}_2$  از مرتبه دوم و نسبت به  $\text{C}_6\text{H}_{10}$  از مرتبه صفر است. بنابراین آهنگ ناپدید شدن  $\text{Cl}_2$  در واحد حجم برابر است با:  $k_1'' c_A^2$  (که در آن  $A$  نشان‌دهنده  $\text{Cl}_2$  است).

مسئله بخش ۱۸.۴ را که در آن  $B$  مخلوط  $\text{C}_6\text{H}_{10} - \text{CCl}_4$  بود، با فرض این‌که می‌توان نفوذ را شبه‌دوتایی تلقی کرد، دوباره حل کنید. فرض کنید هوا اساساً در مخلوط  $\text{C}_6\text{H}_{10} - \text{CCl}_4$  انحلال‌ناپذیر است. عمق فاز مایع را کافی بگیرید، به طوری‌که بتوان  $L$  را نامتناهی فرض کرد. (الف) نشان دهید که توزیع غلظت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{c_A}{c_A^0} = \left[ 1 + \sqrt{\frac{k_1'' c_A^0}{6D_{AB}}} z \right]^2 \quad (18.5-1)$$

(ب) عبارتی برای آهنگ جذب  $\text{Cl}_2$  توسط مایع به دست آورید.

(ج) فرض کنید ماده  $A$  در ماده  $B$  حل می‌شود و با آن واکنش انجام می‌دهد، به طوری‌که آهنگ ناپدید شدن  $A$  در واحد حجم تابعی از غلظت،  $f(c_A)$ ، است. نشان دهید که آهنگ جذب  $A$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N_{Az}|_{z=0} = \sqrt{2D_{AB} \int_0^{c_A^0} f(c_A) dc_A} \quad (18.5-2)$$

از این نتیجه برای واریسی نتیجه قسمت (ب) استفاده کنید.

۱۸.۶ آزمایش دوحبابی برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ گاز، تحلیل حالت شبه‌پایا<sup>۶</sup> (شکل ۱۸.۶-۶). یکی از راه‌های اندازه‌گیری ضریب نفوذ گاز، استفاده از آزمایش دوحبابی است. حباب سمت چپ و لوله از  $z = -L$

5. G. H. Roper, *Chem. Eng. Sci.*, **2**, 18-31, 247-253 (1953).

6. S. P. S. Andrew, *Chem. Eng. Sci.*, **4**, 269-272 (1955).

تا  $z = 0$  با گاز  $A$  پر می‌شوند. حباب سمت راست و لوله از  $z = 0$  تا  $z = +L$  با گاز  $B$  پر می‌شوند. در زمان  $t = 0$  شیر بین دو حباب باز می‌شود و نفوذ آغاز می‌گردد؛ سپس غلظت‌های  $A$  در دو حباب که خوب هم‌زده شده‌اند، تغییر می‌کند.  $x_A^+$  را به صورت تابعی از زمان اندازه‌گیری، و براساس آن  $D_{AB}$  را استنتاج می‌کنند. می‌خواهیم معادله‌های توصیف‌کننده نفوذ را به دست بیاوریم.

چون حباب‌ها در مقایسه با لوله بزرگ‌اند،  $x_A^+$  و  $x_A^-$  با زمان، بسیار آهسته تغییر می‌کنند. بنابراین نفوذ در لوله را می‌توان به عنوان مسئله حالت شبه پایا، با شرایط مرزی  $x_A = x_A^-$  و  $z = -L$  و این‌که در  $z = +L$  داریم  $x_A = x_A^+$  در نظر گرفت.

(الف) موازنه مولی  $A$  را روی جزء  $\Delta z$  از لوله (با سطح مقطع  $S$ ) بنویسید، و نشان دهید که  $N_{Az} = C_1$  مقداری ثابت است.

(ب) نشان دهید که در این مسئله، معادله (۱۸.۱) به صورت زیر ساده می‌شود،

$$N_{Az} = -cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} \quad (18.6)$$

(ج) از این معادله با استفاده از جواب قسمت (الف) انتگرال بگیرید. ثابت انتگرال‌گیری را  $C_2$  بنامید.

(د) ثابت انتگرال‌گیری را، با این شرط که  $x_A = x_A^+$  در  $z = +L$  محاسبه کنید.

(ه) سپس مقدار  $x_A = x_A^-$  (یا  $1 - x_A^+$ ) را در  $z = -L$  قرار دهید و معادله را بر حسب  $N_{Az}$  حل کنید تا نتیجه نهایی زیر حاصل شود:

$$N_{Az} = \left( \frac{1}{V} - x_A^+ \right) \frac{cD_{AB}}{L} \quad (18.6)$$

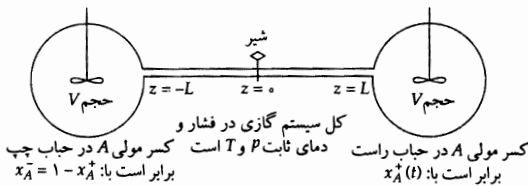
(و) موازنه جرم ماده  $A$  را روی حباب سمت راست بنویسید تا نتیجه زیر به دست آید:

$$S \left( \frac{1}{V} - x_A^+ \right) \frac{cD_{AB}}{L} = Vc \frac{dx_A^+}{dt} \quad (18.6)$$

(ز) از معادله (و) انتگرال بگیرید تا عبارتی برای  $x_A^+$  به دست آورید که حاوی  $D_{AB}$  باشد:

$$\ln \left( \frac{\frac{1}{V} - x_A^+}{\frac{1}{V}} \right) = - \frac{SD_{AB}t}{LV} \quad (18.6)$$

(ح) روشی برای ترسیم داده‌های تجربی به منظور تعیین  $D_{AB}$  پیشنهاد کنید.



شکل ۱۸.۶ دستگاه آزمایش دوحبابی برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ گاز. هم‌زن‌ها غلظت در حباب‌ها را یکنواخت نگه می‌دارند.

۱۸.۷. نفوذ از قطرکی معلق (شکل ۱۸.۲). قطرکی از مایع  $A$ ، به شعاع  $r_1$  از جریان گاز  $B$  آویزان است. فرض می‌کنیم که فیلم گاز کروی ساکنی به شعاع  $r_2$  قطرک را احاطه کرده‌است. غلظت  $A$  در فاز گاز برابر است با:  $x_{A1}$  در  $r = r_1$  و  $x_{A2}$  در لبه خارجی فیلم،  $r = r_2$ .

(الف) با استفاده از موازنه لایه‌ای، نشان دهید که برای نفوذ حالت پایا،  $r^2 N_{Ar}$  در فیلم گازی مقداری ثابت دارد و این مقدار ثابت را برابر  $r_1^2 N_{Ar1}$  بگیرید که مقدار آن در سطح قطرک است.

(ب) نشان دهید که معادله (۱۸.۷-۱) و نتیجه قسمت (الف) به معادله زیر برای  $x_A$  منتهی می‌شود:

$$r_1^2 N_{Ar1} = -\frac{cD_{AB}}{1-x_A} r^2 \frac{dx_A}{dr} \quad (۱۸.۷-۱)$$

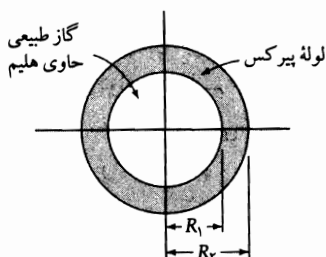
(ج) از این معادله، بین حدهای  $r_1$  و  $r_2$  انتگرال بگیرید تا نتیجه شود:

$$N_{Ar1} = \frac{cD_{AB}}{r_2 - r_1} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \ln \frac{x_{B2}}{x_{B1}} \quad (۱۸.۷-۲)$$

مطلوب است تعیین حد این عبارت، وقتی  $r_2 \rightarrow \infty$ .

۸.۱۸. روش جداسازی هلیوم از گاز طبیعی (شکل ۱۸.ب.۸). شیشه پیرکس در برابر همه گازها، به جز هلیوم، تقریباً نفوذناپذیر است. مثلاً ضریب نفوذ He در پیرکس در حدود ۲۵ برابر ضریب نفوذ  $H_2$  در همین نوع شیشه است و هیدروژن نزدیک‌ترین «رقیب» هلیوم در فرایند نفوذ به‌شمار می‌رود. براین‌اساس روشی برای جداسازی هلیوم از گاز طبیعی پیشنهاد شده‌است که مبتنی بر آهنگ‌های نفوذ نسبی در پیرکس است.<sup>۷</sup> فرض کنید مخلوطی از گاز طبیعی در لوله پیرکسی است که ابعاد آن در شکل نشان داده شده‌است. عبارتی برای آهنگ «نشت» هلیوم از لوله، برحسب ضریب نفوذ هلیوم در پیرکس، غلظت فصل‌مشرکی هلیوم در پیرکس، و ابعاد لوله به‌دست آورید.

جواب:  $W_{He} = 2\pi L \frac{D_{He-Pyrex}(c_{He,1} - c_{He,2})}{\ln(R_2/R_1)}$



شکل ۱۸.۸. نفوذ هلیوم در لوله پیرکس. طول لوله  $L$  است.

۹.۱۸. آهنگ فروشویی (شکل ۱۸.ب.۹). در بررسی آهنگ فروشویی ماده  $A$  از ذرات جامد، توسط حلال  $B$ ، می‌توان فرض کرد که گام کنترل‌شونده با آهنگ، نفوذ  $A$  از سطح ذره در فیلم مایعی به‌ضخامت  $\delta$  برای رسیدن به جریان اصلی است. انحلال‌پذیری مولی  $A$  در  $B$  برابر  $c_{A0}$  است و غلظت در جریان اصلی  $c_{A\delta}$  است.

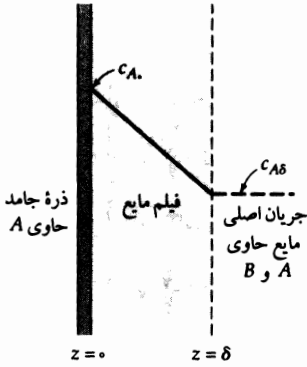
(الف) با نوشتن موازنه جرم  $A$  روی تیغه نازکی به‌ضخامت  $\Delta z$ ، معادله دیفرانسیلی برای  $c_A$  به‌صورت تابعی از  $z$  به‌دست آورید. فرض کنید  $D_{AB}$  ثابت است و  $A$  فقط اندکی در  $B$  حل می‌شود. از انحناى ذره چشم‌پوشی کنید.

(ب) نشان دهید که در غیاب واکنش شیمیایی در فاز مایع، توزیع غلظت خطی است.

(ج) نشان دهید که در این حالت آهنگ فروشویی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$N_{Az} = D_{AB}(c_{A0} - c_{A\delta}/\delta) \quad (۱۸.۹-۱)$$

۷. در این منبع روشی که توسط کی. بی. مک‌آفی از آزمایشگاه‌های تلفن بل ابداع شده، شرح داده شده‌است.



شکل ۱۸ ب. ۹. فرسویی A توسط نفوذ در فیلم مایع ساکن B.

۱۸ ب. ۱۰. مخلوط‌های تبخیرناپذیر. تولوئن (۱) و اتانول (۲) در  $z = 0$  در لوله‌ای عمودی، از یک مخلوط مایع دوتایی با ترکیب شیمیایی یکنواخت  $x_1$  تبخیر می‌شوند و در نیتروژن ساکن (۳) نفوذ می‌کنند و نیتروژن خالص در بالاست. ضرایب نفوذ نابرابر تولوئن و اتانول در نیتروژن سبب تغییر آهنگ‌های نسبی تبخیر، به سود اتانول می‌شوند. این اثر را برای سیستم هم‌دم در  $60^\circ\text{F}$  و فشار کل  $760\text{ mm Hg}$  تحلیل کنید، هرگاه ضرایب نفوذ پیش‌بینی شده<sup>۸</sup> در  $60^\circ\text{F}$  عبارت باشند از:  $cD_{12} = 1.753 \times 10^{-6}$ ،  $cD_{13} = 2.198 \times 10^{-6}$ ، و  $cD_{23} = 4.68 \times 10^{-6}\text{ g.moles/cm}\cdot\text{s}$ .

(الف) با استفاده از معادله‌های ماکسول-استفان توزیع کسر مولی حالت پایای فاز بخار،  $y_a(z)$  را برحسب شارهای مولی  $N_{\alpha z}$  در این سیستم سه‌تایی به دست آورید. با توجه به معادله‌های پیوستگی این سه گونه، می‌دانیم که شارهای مولی ثابت‌اند. چون انحلال‌پذیری نیتروژن در مایع، در شرایط مفروض قابل چشم‌پوشی است،  $N_{2z} = 0$ . به عنوان شرایط مرزی، فرض کنید  $y_1 = y_2 = 0$  در  $z = L$  و  $y_1 = y_2 = 0$  در  $z = 0$ ؛ مقادیر اخیر هنوز تعیین نشده‌اند. نشان دهید که:

$$y_2(z) = e^{-A(L-z)};$$

$$y_1(z) = \frac{D}{A-B} e^{-A(L-z)} - \left( \frac{C}{B} + \frac{D}{A-B} \right) e^{-B(L-z)} + \frac{C}{B} \quad (1-10 \text{ ب. } 18)$$

$$A = \frac{N_{1z}}{cD_{12}} + \frac{N_{2z}}{cD_{13}}; \quad B = \frac{N_{1z} + N_{2z}}{cD_{12}};$$

$$C = \frac{N_{1z}}{cD_{12}}; \quad D = \frac{N_{1z}}{cD_{12}} - \frac{N_{2z}}{cD_{13}} \quad (2-10 \text{ ب. } 18)$$

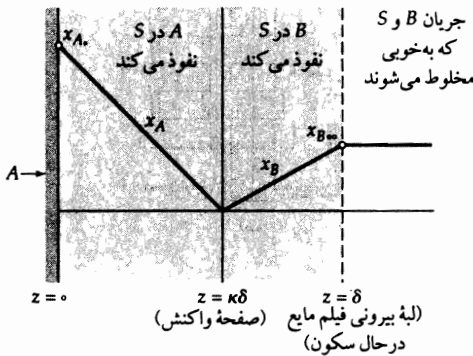
(ب) مخلوط مایع تبخیرناپذیری را در نظر بگیرید که ترکیب شیمیایی آن همانند ترکیب ماده تبخیرشده است، یعنی داریم  $x_1/(N_{1z} + N_{2z}) = x_1$ . از نتایج قسمت (الف) همراه با داده‌های تعادلی جدول زیر برای محاسبه ترکیب شیمیایی مایع تبخیرناپذیر در فشار کل  $760\text{ mm Hg}$  استفاده کنید. در این جدول، سطر اول ترکیب شیمیایی فاز مایع را نشان می‌دهد. سطر دوم ترکیب شیمیایی فاز بخار

8. L. Monchick and E. A. Mason, *J. Chem. Phys.*, **35**, 1676-1697 (1961), with  $\delta$  read as  $\delta_{\max}$  in Table IV; E. A. Mason and L. Monchick, *J. Chem. Phys.*, **36**, 2746-2757 (1962); L. S. Tee, S. Gotoh, and W. E. Stewart, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **5**, 356-362 (1966).

را در آزمایش‌های دوجزئی نشان می‌دهد؛ این‌ها به صورت مقادیر عاری از نیتروژن  $y_1/(y_1 + y_2)$  برای سیستم سه‌تایی بیان می‌شوند. سطر سوم جمع فشارهای جزئی تولوئن و اتانول را نشان می‌دهد.

I: $x_1$	۰٫۰۹۶	۰٫۱۵۵	۰٫۲۳۳	۰٫۲۷۴	۰٫۳۷۵
II: $y_1/(y_1 + y_2)$	۰٫۱۴۷	۰٫۱۹۸	۰٫۲۴۲	۰٫۲۵۶	۰٫۲۷۷
III: $p_1 + p_2$ (mm Hg)	۳۸۸	۳۹۷	۳۹۷	۳۹۵	۳۹۰

یکی از راهبردهای پیشنهادی برای محاسبه به شرح زیر است: (۱) ترکیب  $x_1$  را برای مایع حدس بزنید؛ (۲) با استفاده از سطرهای دوم و سوم جدول بالا،  $y_1$ ،  $y_2$  و  $y_3$  را حدس بزنید؛ (۳)  $LA$  را از معادله (۱۸ ب. ۱-۱)، با  $z = 0$  به دست آورید؛ (۴) از نتیجه قسمت (۳) برای محاسبه  $LN_{2z}$ ،  $LC$ ،  $LD$  و  $LB$  و سرانجام  $y_1(0)$ ، به ازای مقادیر فرضی  $LN_{1z}$  استفاده کنید؛ (۵) نتایج قسمت (۴) را تا  $y_1(0) = y_1$  برون‌یابی کنید تا مقادیر صحیح  $LN_{1z}$  و  $LN_{2z}$  را، به ازای مقدار حدسی  $x_1$  به دست آورید. مراحل ۱ تا ۵ را با حدس تصحیح‌شده  $x_1$  تکرار کنید تا  $N_{1z}/(N_{1z} + N_{2z})$  به سمت  $x_1$  همگرا شود. مقدار نهایی  $x_1$  ترکیب شیمیایی تبخیر ثابت است.



شکل ۱۱.ب.۱۸ توزیع غلظت برای نفوذ با واکنش سریع مرتبه دوم. از غلظت فرآورده  $P$  می‌توان چشم‌پوشی کرد.

۱۱.ب.۱۸ نفوذ با واکنش سریع مرتبه دوم (شکل‌های ۱۱.ب.۱۸ و ۲-۲.۱۸). جامد  $A$  در جریان جاری مایع  $S$ ، در سیستمی هم‌دم و حالت پایا، حل می‌شود. براساس مدل فیلم فرض کنید که سطح  $A$  با فیلم مایع ساکن به ضخامت  $\delta$  پوشیده شده است و مایع بیرون فیلم کاملاً مخلوط می‌شود (نگاه کنید به شکل ۲-۲.۱۸).

(الف) عبارتی برای بیان آهنگ انحلال  $A$  در مایع پیدا کنید، هرگاه غلظت  $A$  در جریان مایع اصلی قابل چشم‌پوشی باشد.

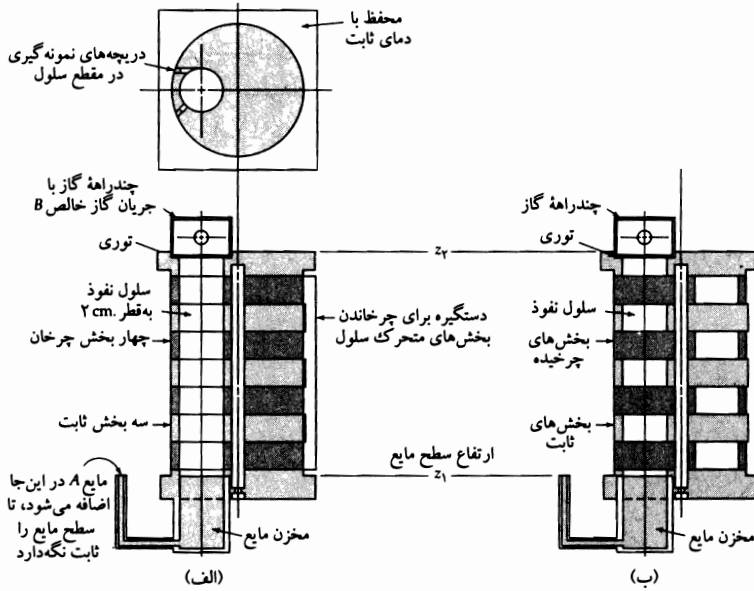
(ب) عبارت متناظری برای آهنگ انحلال به دست آورید، هرگاه مایع حاوی ماده  $B$  باشد که، در صفحه  $z = \kappa\delta$ ، به صورت فوری و برگشت‌ناپذیر با  $A$  واکنش انجام می‌دهد:  $A + B \rightarrow P$ . (مثالی از چنین سیستمی، انحلال بنزوتیک‌اسید در محلول آبی  $\text{NaOH}$  است.) جریان اصلی مایع عمده  $A$  و  $B$  و  $S$  تشکیل می‌شود و  $B$  کسر مولی  $x_{B\infty}$  را دارد.

(راهنمایی: باید این نکته را تشخیص دهید که گونه‌های  $A$  و  $B$ ، هر دو، به سمت یک منطقه نازک واکنش نفوذ می‌کنند که در شکل ۱۱.ب.۱۸ نشان داده شده است.)

جواب: (الف)  $N_{Az}|_{z=0} = \left( \frac{cD_{AS}x_A}{\delta} \right)$

(ب)  $N_{Az}|_{z=0} = \left( \frac{cD_{AS}x_A}{\delta} \right) \left( 1 + \frac{x_B \infty D_{BS}}{x_A \cdot D_{AS}} \right)$

۱۸.ب.۱۲ آزمایش سلول چندبخشی<sup>۱</sup> برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ فاز گازی (شکل ۱۸.ب.۱۲). مایع A می‌تواند در گاز B با فشار کل ۷۴۱ mm Hg و دمای ۲۵°C تبخیر شود. در این دما، فشار بخار A، ۶۰ mm Hg است.



شکل ۱۸.ب.۱۲ آزمایش برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ در سلول چندبخشی: (الف) پیکربندی سلول درحین رسیدن به حالت پایا، (ب) پیکربندی سلول برای نمونه‌برداری از گاز در پایان آزمایش.

پس از رسیدن به شرایط حالت پایا، ستون استوانه‌ای گاز، مطابق شکل، به چند بخش تقسیم می‌شود. در یک دستگاه چهاربخشی با ارتفاع کل ۴٫۲۲ cm، ترکیب شیمیایی نمونه‌های گاز حاصل به شرح جدول زیر است:

$(z - z_1)$ cm			
کسر مولی A	کف بخش	بالای بخش	بخش
۰٫۷۵۷	۱٫۱۰	۰٫۱۰	I
۰٫۶۴۱	۲٫۱۰	۱٫۱۰	II
۰٫۴۶۹	۳٫۱۰	۲٫۱۰	III
۰٫۲۱۵	۴٫۱۰	۳٫۱۰	IV

آهنگ تبخیر اندازه‌گیری شده A در حالت پایا ۰٫۲۷۴ g-moles/hr است. رفتار گاز را می‌توان ایده‌آل فرض کرد.

9. E. J. Crosby, *Experiments in Transport Phenomena*, Wiley, New York (1961), Experiment 10.a.



(الف) درستی عبارت زیر را برای توزیع غلظت در حالت پایا نشان دهید:

$$\ln \frac{x_{Bz}}{x_B} = \frac{N_{Az}(z_2 - z)}{cD_{AB}} \quad (۱۸.ب.۱۲)$$

(ب) کسر مولی  $x_B$  را در هر سلول، برحسب مقدار  $z$  در صفحهٔ میانی سلول، روی کاغذ نیمه‌لگاریتمی ترسیم کنید. آیا خطی راست حاصل می‌شود؟ نقاط تقاطع در  $z_1$  و  $z_2$  را تعیین کنید. این نتایج را تفسیر کنید.

(ج) با استفاده از توزیع غلظت، معادلهٔ (۱۸.ب.۱۲)، عبارت‌هایی تحلیلی برای غلظت‌های متوسط در هر بخش از لوله بیابید.

(د) بهترین مقدار  $D_{AB}$  را از این آزمایش به دست آورید.

جواب: (د)  $۰.۱۵۵ \text{ cm}^2/\text{s}$ .

۱۳.ب.۱۸ کدر شدن سطوح فلزی. در اکسایش اغلب فلزات (به‌استثنای فلزات قلیایی و قلیایی خاکی) حجم اکسیدی که تولید می‌شود، از حجم فلزی که مصرف می‌شود، بیش‌تر است. این اکسید فیلم تراکمی تشکیل می‌دهد که به‌طور مؤثری اکسیژن و فلز را از هم جدا می‌سازد. برای حل این مسئله می‌توان فرض کرد که:

(الف) برای تداوم اکسایش، اکسیژن باید در فیلم اکسید نفوذ کند و این نفوذ تابع قانون فیک است.

(ب) سطح آزاد فیلم اکسید با اکسیژن هوای اطراف اشباع می‌شود.

(ج) وقتی فیلم اکسید به‌اندازهٔ کافی ضخیم شد، اکسایش تحت کنترل نفوذ خواهد بود؛ یعنی غلظت اکسیژن حل‌شده در فصل مشترک اکسید-فلز اساساً صفر است.

(د) آهنگ تغییر میزان اکسیژن حل‌شده در فیلم، در مقایسه با آهنگ واکنش، پایین است؛ یعنی شرایط را می‌توان شبه‌پایا فرض کرد.

(ه) واکنشی که انجام می‌شود چنین است:  $\frac{1}{2}x\text{O}_2 + \text{M} \rightarrow \text{MO}_x$ .

می‌خواهیم عبارتی برای بیان آهنگ کدر شدن سطح فلز برحسب ضریب نفوذ اکسیژن در فیلم اکسید، چگالی فلز و اکسید آن، و استوکیومتری واکنش به دست آوریم. فرض کنید  $c$  انحلال‌پذیری  $\text{O}_2$  در فیلم،  $c_f$  چگالی مولی فیلم، و  $z_f$  ضخامت فیلم باشد. نشان دهید که ضخامت فیلم برابر است با:

$$z_f = \sqrt{\frac{4D_{\text{O}_2-\text{MO}_x} t c_0}{x c_f}} \quad (۱۸.ب.۱۳)$$

این نتیجه، که به «قانون درجهٔ دوم» مشهور است، رابطهٔ تجربی رضایت‌بخشی برای اکسایش و چند واکنش کدرساز دیگر به‌شمار می‌رود.<sup>۱۰</sup> اما اغلب این‌ها بسیار پیچیده‌تر از مکانیسمی هستند که در بالا شرح داده شد.<sup>۱۱</sup>

۱۴.ب.۱۸ ضرایب کارایی برای دیسک‌های نازک (شکل ۱۸.ب.۱۴). ذرات کاتالیزگر متخلخلی به‌شکل دیسک‌های نازک را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که مساحت سطح لبهٔ دیسک، در مقایسه با مساحت دو سطح دایره‌ای

10. G. Tammann, *Z. anorg. allgem. Chemie*, **124**, 25-35 (1922).

11. W. Jost, *Diffusion*, Academic Press, New York (1952), Chapter IX.

برای آشنایی با اکسایش سیلیسیم به منبع زیر رجوع کنید:

R. Ghez, *A Primer of Diffusion Problems*, Wiley, New York (1988), §2.3.

آن کوچک باشد. با استفاده از روش بخش ۷.۱۸ نشان دهید که توزیع غلظت حالت پایا چنین است:

$$\frac{c_A}{c_{As}} = \frac{\cosh \sqrt{k'_1 a / D_A} z}{\cosh \sqrt{k'_1 a / D_A} b} \quad (۱۸.ب.۱۴)$$

که در آن  $c_{As}$  غلظت سطحی در  $z = \pm b$ ، و  $z$  و  $b$  در شکل توصیف شده‌اند. نشان دهید که آهنگ کل انتقال جرم در سطح  $z = \pm b$  عبارت است از:

$$|W_A| = 2\pi R^2 c_{As} D_A \lambda \tanh \lambda b \quad (۲.۱۸.ب.۱۴)$$

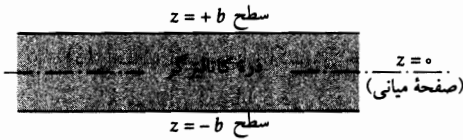
که در آن  $\lambda = \sqrt{k'_1 a / D_A}$ . نشان دهید که اگر دیسک به موازات صفحه  $xy$  بریده و به  $n$  برش تقسیم شود، آهنگ کل انتقال جرم برابر می‌شود با:

$$|W_A^{(n)}| = 2\pi R^2 c_{As} D_A \lambda n \tanh(\lambda b/n) \quad (۳.۱۸.ب.۱۴)$$

با گرفتن حد زیر، عبارتی برای ضریب کارایی به دست آورید:

$$\eta_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|W_A|}{|W_A^{(n)}|} = \frac{\tanh \lambda b}{\lambda b} \quad (۴.۱۸.ب.۱۴)$$

این نتیجه را برحسب پارامتر  $\Lambda$  که در بخش ۷.۱۸ تعریف شد، بیان کنید.



شکل ۱۸.ب.۱۴. نیم‌رخ یک ذره کاتالیزگر به شکل دیسک.

۱۵.ب.۱۸ نفوذ و واکنش ناهمگن در لوله استوانه‌ای باریک با یک سر بسته. (شکل ۱۸.ب.۱۵). سوراخ استوانه‌ای باریکی به طول  $L$ ، سطح مقطع  $S$ ، و محیط  $P$  در سر باز خود با پهنه بزرگی از سیال خوب مخلوط شده در تماس است؛ سیال از گونه‌های  $A$  و  $B$  تشکیل شده است. گونه  $A$  که تشکیل‌دهنده فرعی این سیال است در سوراخ ناپدید می‌شود، در جهت  $z$  نفوذ می‌کند و روی جدارهای سوراخ واکنش انجام می‌دهد. آهنگ این واکنش را می‌توان به صورت  $f(\omega_{A0}) = \text{سطح} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_A)$  بیان کرد؛ یعنی در محل جدار، شار جرم قائم بر سطح تابعی از کسر جرم،  $\omega_{A0}$ ، گونه  $A$  در سیال مجاور سطح جامد است. کسر جرم  $\omega_{A0}$  به  $z$ ، فاصله از مدخل سوراخ، بستگی دارد. چون غلظت  $A$  پایین است، دما و چگالی سیال را می‌توان ثابت فرض کرد، و شار نفوذی را با رابطه  $\mathbf{j}_A = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A$  به خوبی بیان کرد، که در آن ضریب نفوذ را می‌توان ثابت گرفت. چون طول سوراخ در مقایسه با بُعد عرضی آن زیاد است، می‌توان از گرادیان‌های غلظت در امتداد عرضی چشم‌پوشی کرد. به تشابه این مسئله با مسئله حل شده در بخش ۷.۱۰ توجه کنید.

(الف) با استفاده از موازنه لایه‌ای، نشان دهید که در حالت پایا:

$$-\frac{dn_{Az}}{dz} = \frac{P}{S}(\omega_{A0}) \quad (۱۸.ب.۱۵)$$

(ب) نشان دهید که سرعت متوسط جرمی حالت پایا،  $v_z$ ، برای این سیستم تقریباً صفر است.

(ج) صورت مناسب قانون فیک را در معادله (۱۵.۱۸) جایگزین کنید و از معادله دیفرانسیل حاصل، درحالت خاصی که  $f(\omega_{A0}) = k''_v \omega_{A0}$ ، انتگرال بگیرید. برای به‌دست آوردن شرط مرزی در

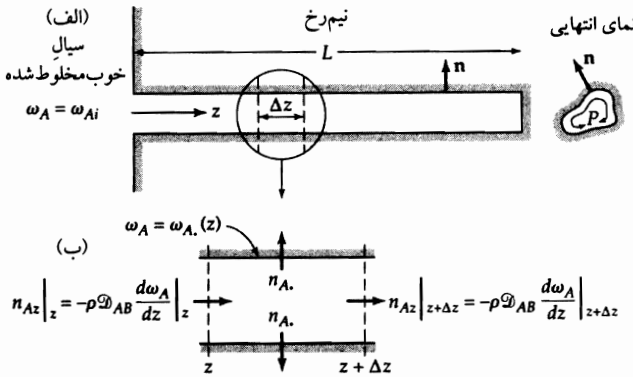
$z = L$ ، از آهنگ واکنش در سر بسته استوانه چشم‌پوشی کنید؛ چرا این تقریب معقول است؟

(د) عبارتی برای آهنگ کل ناپدید شدن گونه  $A$  در استوانه، یعنی  $\omega_A$ ، به‌دست آورید.

(ه) نتایج قسمت‌های (ج) و (د) را با نتایج بخش ۷.۱۰، هم از دیدگاه عملیات ریاضی و هم از دیدگاه ماهیت فرض‌های اختیارشده، مقایسه کنید.

جواب: (ج)  $\frac{\omega_A}{\omega_{Ai}} = \frac{\cosh N[1-(z/L)]}{\cosh N}$ ، که در آن  $N = \sqrt{\frac{PL^2 k''_v}{S\rho D_{AB}}}$

(د)  $\omega_A = (S\rho D_{AB} \omega_{Ai} / L) N \tanh N$



شکل ۱۵.ب.۱۸ (الف) نفوذ و واکنش ناهمگن در استوانه غیرممدور طولی. (ب) ناحیه‌ای به‌ضخامت  $\Delta z$  که موازنه جرم روی آن نوشته می‌شود.

۱۶.ب.۱۸ اثر دما و فشار بر آهنگ تبخیر.

(الف) در بخش ۲.۱۸، اثر تغییر دما و فشار بر کمیت  $x_{A1}$  چیست؟

(ب) اگر فشار دو برابر شود، چه تأثیری در آهنگ تبخیر، یعنی معادله (۱۴.۲.۱۸) دارد؟

(ج) وقتی دمای سیستم از  $T$  به  $T'$  افزایش یابد، آهنگ تبخیر چه تغییری می‌کند؟

۱۷.ب.۱۸ آهنگ‌های واکنش در ذرات بزرگ و کوچک.

(الف) حدهای زیر را برای معادله (۱۱.۷.۱۸) به‌دست آورید:

$W_{AR} = -(\frac{4}{3}\pi R^3)(k''_v a)C_{AR}$  :  $R \rightarrow 0$  (۱-۱۷.ب.۱۸)

$W_{AR} = -(4\pi R^2)(k''_v a D_A)^{1/2} C_{AR}$  :  $R \rightarrow \infty$  (۲-۱۷.ب.۱۸)

تفسیر فیزیکی این نتایج چیست؟

(ب) مجانب‌های متناظر را برای سیستم تشریح‌شده در مسئله ۱۸.ب.۱۴ به‌دست آورید. این مجانب‌ها را با نتایج به‌دست آمده در قسمت (الف) مقایسه کنید.

۱۸.ب.۱۸ آهنگ تبخیر برای کسر مولی کوچکی از مایع فزّار. در معادله (۱۵.۲.۱۸)، بسط سری تیلر عبارت:

$\frac{1}{(x_B)_{ln}} = \left( \frac{1}{x_{A1} - x_{A2}} \right) \left( \ln \frac{1 - x_{A2}}{1 - x_{A1}} \right)$  (۱-۱۸.ب.۱۸)

را برای کسرهای مولی کوچک  $A$  پیدا کنید. ابتدا لگاریتم تقسیم را به صورت تفاضل دو لگاریتم بنویسید. سپس  $\ln(1 - x_{A2})$  و  $\ln(1 - x_{A1})$  را، به ترتیب، حول  $x_{A1} = 0$  و  $x_{A2} = 0$  بسط دهید. دربارهٔ درستی معادله (۱۶-۲۰-۱۸) تحقیق کنید.

۱۸.ب ۱۹ جذب اکسیژن توسط یک مجموعه باکتری. تحت شرایط مناسب، آهنگ سوخت‌وساز اکسیژن توسط سلول‌های باکتریایی، نسبت به غلظت اکسیژن، از مرتبه‌ای بسیار نزدیک به صفر است. در این جا می‌خواهیم همین موضوع را بررسی کنیم و مجموعه‌ای کروی از سلول‌ها را در نظر می‌گیریم که شعاع آن  $R$  است. می‌خواهیم آهنگ کلی جذب اکسیژن توسط این مجموعه را، به صورت تابعی از اندازهٔ مجموعه، غلظت جرمی اکسیژن  $\rho_0$  در سطح مجموعه، فعالیت سوخت‌وسازی سلول‌ها، و رفتار نفوذی اکسیژن تعیین کنیم. برای سادگی کار، فرض می‌کنیم این مجموعه همگن است. سپس آهنگ سوخت‌وساز را با آهنگ حجمی مؤثر واکنش، یعنی  $r_{O_2} = -k'''$  و رفتار نفوذی را با قانون فیک، با ضریب نفوذ شبه‌داتیوی  $D_{O_2m}$  تقریب می‌زنیم. چون انحلال‌پذیری اکسیژن در این سیستم بسیار پایین است، هم انتقال همرفتی اکسیژن و هم آثار گذرا را می‌توان نادیده گرفت.<sup>۱۲</sup> (الف) با استفاده از موازنهٔ لایه‌ای جرم نشان دهید که توزیع غلظت اکسیژن در حالت شبه‌پایا با معادلهٔ دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\chi}{d\xi} \right) = N \quad (1-19-18)$$

که در آن  $N = k''' R^2 / \rho_0 D_{O_2m}$  و  $\xi = r/R$ ،  $\chi = \rho_{O_2} / \rho_0$

(ب) هرگاه  $N$  به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، ممکن است در این مجموعه هسته‌ای عاری از اکسیژن وجود داشته‌باشد، به طوری که  $\chi = 0$  وقتی  $\xi < \xi_c$  است. شرایط مرزی کافی را برای انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۱۸-۱۹-۱) در چنین وضعیتی، بنویسید. برای انجام این کار باید به این نکته توجه کنید که هم  $\chi$  و هم  $d\chi/d\xi$  در  $\xi = \xi_c$  برابر صفرند. مفهوم فیزیکی جملهٔ اخیر چیست؟

(ج) از معادلهٔ (۱۸-۱۹-۱) انتگرال بگیرید و نشان دهید که چگونه می‌توان  $\xi_c$  را تعیین کرد.

(د) نمودار آهنگ کلی جذب اکسیژن و  $\xi_c$  را به صورت تابعی از  $N$  ترسیم کنید و دربارهٔ امکان نبود هستهٔ عاری از اکسیژن بحث کنید.

جواب: (ج)  $\xi_c^3 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{N} - 1 \right) + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{N} \right)$ ، به ازای  $\chi = 0$ ،  $\xi_c \geq \xi_c$ ، که در آن  $\xi_c$  تابعی از  $N$  به صورت زیر است:

$$\xi_c^3 - \frac{3}{4} \xi_c^2 + \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{N} \right) = 0$$

۱۸.ج ۱۹ نفوذ از یک منبع نقطه‌ای در یک جریان متحرک (شکل ۱۸.ج ۱). جریانی از سیال  $B$  با حرکت آرام، سرعت یکنواختی برابر  $v_0$  دارد. در نقطه‌ای از این جریان، (که مبدأ مختصات فرض می‌شود) گونهٔ  $A$  با آهنگ پایین  $W_A$  g-moles/s تزریق می‌شود. فرض می‌کنیم این آهنگ به اندازهٔ کافی پایین هست که سرعت متوسط جرمی با سرعت  $v_0$  تفاوت چندانی پیدا نکند. گونهٔ  $A$  به طرف پایین دست (یعنی در راستای  $z$ ) روییده می‌شود، و به طور هم‌زمان در راستاهای محوری و شعاعی نفوذ می‌کند.<sup>۱۳</sup>

12. J. A. Mueller, W. C. Boyle, and E. N. Lightfoot, *Biotechnol. and Bioengr.*, **10**, 331-358 (1968).

13. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, 2nd edition (1959). pp. 266-267.

(الف) نشان دهید که موازنه جرم حالت پایای گونه  $A$  روی جزء حلقوی نشان داده شده در شکل، به معادله دیفرانسیل جزئی زیر منتهی می‌شود، هرگاه  $D_{AB}$  ثابت فرض شود:

$$v_0 \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right] \quad (۱۸-۱-۱)$$

(ب) نشان دهید که معادله (۱۸-۱-۱) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$v_0 \left( \frac{z}{s} \frac{\partial c_A}{\partial s} + \frac{\partial c_A}{\partial z} \right) = D_{AB} \left[ \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial s} \left( s^2 \frac{\partial c_A}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} + \frac{2z}{s} \frac{\partial^2 c_A}{\partial s \partial z} \right] \quad (۱۸-۱-۲)$$

$$s^2 = r^2 + z^2$$

(ج) نشان دهید که (کاری بسیار طولانی است!) جواب:

$$c_A = \frac{W_A}{4\pi D_{AB}s} \exp[-(v_0/2D_{AB})(s-z)] \quad (۱۸-۱-۳)$$

در معادله دیفرانسیل بالا صدق می‌کند.

(د) نشان دهید که شرایط مرزی زیر نیز در معادله (۱۸-۱-۳) صدق می‌کنند:

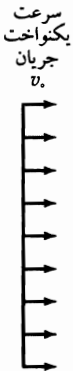
$$(۱۸-۱-۴) \text{ شرط مرزی ۱: وقتی } s \rightarrow \infty, \text{ داریم } c_A \rightarrow 0.$$

$$(۱۸-۱-۵) \text{ شرط مرزی ۲: وقتی } s \rightarrow 0, \text{ داریم } W_A \rightarrow -4\pi s^2 D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial s}$$

$$(۱۸-۱-۶) \text{ شرط مرزی ۳: وقتی } r = 0, \text{ داریم } \frac{\partial c_A}{\partial r} = 0.$$

مفهوم فیزیکی هریک از این شرط‌های مرزی را بیان کنید.

(ه) نشان دهید که هرگاه جواب قبلی درست باشد، می‌توان نمودار داده‌های  $c_A(r, z)$  به ازای  $v_0$  و  $D_{AB}$  مفروض را ترسیم کرد و خطی راست با شیب  $v_0/2D_{AB}$  و تقاطع با  $\ln D_{AB}$  به دست آورد.



شکل ۱۸-۱. نفوذ  $A$  از منبع نقطه‌ای در جریانی از  $B$  که با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند.

مبدأ مختصات در نقطه تزریق واقع است؛ در هر ثانیه  $W_A$  مول از گونه  $A$  تزریق می‌شود

۱۸-۲. نفوذ و واکنش در کاتالیزگری با آغستگی جزئی. کره‌ای از کاتالیزگر را، مانند آن چه در بخش ۱۸-۷ دیدیم، در نظر بگیرید، با این تفاوت که سازنده فعال کاتالیزگر فقط در ناحیه حلقوی بین  $r = R$  و  $r = \kappa R$  وجود دارد:

$$(۱۸-۲-۱) \text{ در ناحیه } 1 \ (0 \leq r \leq \kappa R), \text{ داریم } k''_1 a = 0.$$

(۱۸ ج. ۲-۲) در ناحیه  $2(\kappa R \leq r \leq R)$ ، داریم  $> 0$  (مقدار ثابت)  $k''a =$

چنین وضعیتی هنگامی پیش می‌آید که سازنده فعال به صورت ذرات ریز درآمده باشد؛ کاری که روی بسیاری از کاتالیزگرهای تجاری انجام می‌شود.

(الف) از معادله (۱۸-۷-۶) به‌طور جداگانه برای نواحی فعال و غیرفعال انتگرال بگیرید. سپس شرایط مرزی مقتضی را به‌کار ببندید و ثابت‌های انتگرال‌گیری را محاسبه کنید و توزیع غلظت را در هر ناحیه به‌دست آورید. نمودارهایی کیفی برای نمایش شکل توزیع ترسیم کنید.

(ب)  $W_{AR}$ ، آهنگ مولی کل تبدیل گونه  $A$  در یک ذره را محاسبه کنید.

۱۸ ج. ۳ آهنگ جذب در فیلم ریزان. نتیجه معادله (۱۸-۵-۱۸) را می‌توان با استفاده از روشی دیگر هم به‌دست آورد.

(الف) براساس موازنه جرم کلی روی فیلم، تعداد کل مول‌های  $A$  که در واحد زمان از فصل مشترک گاز-مایع عبور می‌کنند، باید با آهنگ کل جریان مولی گونه  $A$  روی صفحه  $z = L$  برابر باشد. آهنگ اخیر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W_A = \lim_{\delta \rightarrow \infty} (W \delta v_{\max}) \left( \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} c_A|_{z=L} dx \right) = W v_{\max} \int_0^{\infty} c_A|_{z=L} dx \quad (18 \text{ ج. } 3-3)$$

این راهکار را به‌دقت تشریح کنید.

(ب) جواب  $c_A$ ، در معادله (۱۸-۵-۱۵) را در نتیجه قسمت (الف) قرار دهید و نتیجه زیر را به‌دست آورید:

$$W_A = W v_{\max} c_{A0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left( \int_{x/\sqrt{4\mathcal{D}_{AB}L/v_{\max}}}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi \right) dx$$

$$= W v_{\max} c_{A0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{4\mathcal{D}_{AB}L}{v_{\max}}} \int_0^{\infty} \left( \int_u^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi \right) du \quad (18 \text{ ج. } 3-2)$$

در سطر دوم، از متغیر جدید  $u = x/\sqrt{4\mathcal{D}_{AB}L/v_{\max}}$  استفاده کرده‌ایم.

(ج) ترتیب انتگرال‌گیری در انتگرال دوگانه را تغییر دهید تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$W_A = W L c_{A0} \sqrt{\frac{4\mathcal{D}_{AB}v_{\max}}{\pi L}} \cdot 2 \int_0^{\infty} \exp(-\xi^2) \left( \int_0^{\xi} du \right) d\xi \quad (18 \text{ ج. } 3-3)$$

با استفاده از نموداری که به‌دقت ترسیم کرده‌اید، نحوه انتخاب حدهای انتگرال را تشریح کنید؛ اکنون می‌توان این کار را به‌روش تحلیلی انجام داد و معادله (۱۸-۵-۱۸) را به‌دست آورد.

۱۸ ج. ۴ تخمین طول لازم برای رآکتور هم‌دما (شکل ۱۸-۳-۱). فرض کنید  $a$  مساحت سطح کاتالیزگر در واحد حجم یک رآکتور با بستر پرشده، و  $S$  سطح مقطع رآکتور باشد. فرض کنید آهنگ جریان جرمی در رآکتور  $w$  (مثلاً برحسب  $\text{inlb}_m/\text{hr}$ ) است.

(الف) نشان دهید که موازنه جرم حالت‌پایای ماده  $A$  روی طول  $dl$  رآکتور به نتیجه زیر منتهی می‌شود:

$$\frac{dw_{A0}}{dl} = -\frac{SaN_A M_A}{w} \quad (18 \text{ ج. } 4-1)$$

(ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف) و معادله (۱۸-۳-۹)، با فرض ثابت بودن  $\delta$  و  $D_{AB}$ ، عبارتی به دست آورید که طول  $L$  رآکتور، لازم برای تبدیل جریان ورودی با ترکیب شیمیایی  $x_{A(0)}$  به جریان خروجی با ترکیب شیمیایی  $x_{A(L)}$ ، را نشان دهد.  
(راهنمایی: می‌توانید از معادله (س) جدول ۱۷-۸-۱ استفاده کنید.)

$$L = \left( \frac{w\delta M_B}{\sqrt{2} S a c D_{AB}} \right) \int_{x_{A(0)}}^{x_{A(L)}} \frac{dx_{A_0}}{[M_A x_{A_0} + M_B (1 - x_{A_0})]^2 \ln(1 - \frac{1}{\gamma} x_{A_0})} \quad \text{جواب: (ب)}$$

۱۸-۵. تبخیر حالت پایا. در بررسی تبخیر مخلوطی از متانول (۱) و استون (۲) در هوا (۳)، توزیع غلظت این سه گونه در لوله،<sup>۱۵</sup> پس از رسیدن به حالت پایا، اندازه‌گیری شد. در این وضعیت گونه ۳ حرکت نمی‌کند و گونه‌های ۱ و ۲ به سمت بالا نفوذ می‌کنند، و شارهای مولی  $N_{z1}$  و  $N_{z2}$  با آزمایش اندازه‌گیری می‌شوند. غلظت‌های فصل مشترکی این دو گونه،  $x_{10}$  و  $x_{20}$  نیز اندازه‌گیری شدند. به علاوه، سه ضریب نفوذ دوتایی معلوم بودند. فصل مشترک در  $z = 0$  قرار داشت و سر بالایی لوله نفوذ در  $L = z$  بود.

(الف) نشان دهید که معادله ماکسول-استفان برای گونه ۳ را می‌توان حل کرد و نتیجه زیر را به دست آورد:

$$x_{z3} = x_{z0} e^{A\zeta} \quad (18\text{-}5)$$

که در آن  $\nu_{113} + \nu_{223} = A$ ،  $\nu_{\alpha\beta\gamma} = N_{\alpha} L / c D_{\beta\gamma}$  و  $\zeta = z/L$ .

(ب) سپس نشان دهید که معادله گونه ۲ را می‌توان حل کرد و نتیجه گرفت که:

$$x_{z2} = x_{z0} e^{B\zeta} + \frac{\nu_{112}}{B} (1 - e^{B\zeta}) + \frac{C x_{z0}}{A - B} (e^{A\zeta} - e^{B\zeta}) \quad (18\text{-}5)$$

که در آن  $B = \nu_{112} + \nu_{212}$  و  $C = \nu_{212} - \nu_{222}$ .

(ج) معادله‌های بالا را با نتایج انتشار یافته مقایسه کنید.

(د) معادله‌های (۱۸-۵) و (۲) تا چه میزان به داده‌های تجربی قابل برآزش‌اند؟

۱۸-۱۰. ضرایب کارایی برای استوانه‌های بلند. عبارتی برای بیان  $\eta_A$  در استوانه‌های بلند، نظیر معادله (۱۸-۷-۱۶) به دست آورید. از نفوذ در سرهای استوانه چشم‌پوشی کنید.

جواب:  $\eta_A = \frac{I_1(2\lambda)}{\lambda I_0(2\lambda)}$  که در آن  $I_0$  و  $I_1$  «توابع بسل اصلاح شده» اند.

۱۸-۲. جذب گاز در فیلم ریزان با واکنش شیمیایی. مسئله تشریح شده در بخش ۱۸-۵ و نشان داده شده در شکل

۱۸-۵.۱ را در حالتی حل کنید که گاز  $A$  با مایع  $B$  واکنش شیمیایی برگشت‌ناپذیر مرتبه اول در فاز مایع انجام دهد و

ثابت آهنگ  $k'''$  باشد. مخصوصاً، عبارتی برای بیان آهنگ جذب کل به دست آورید که نظیر معادله (۱۸-۵-۱۸)

باشد. نشان دهید که نتایج جذب همراه با واکنش، به نتایج مربوط به جذب بدون واکنش ساده می‌شود.

جواب:

$$u = k''' = L/v_{\max} \quad \text{که در آن } W_A = W_{CA_0} = v_{\max} \sqrt{\frac{D_{AB}}{k'''}} \left[ \left( \frac{1}{\gamma} + u \right) \operatorname{erf} \sqrt{u} + \sqrt{\frac{u}{\pi}} e^{-u} \right]$$

## فصل ۱۹

### معادله‌های تغییر برای سیستم‌های چندجزئی

۱.۱۹ معادله‌های پیوستگی برای مخلوط چندجزئی

۲.۱۹ خلاصه معادله‌های چندجزئی تغییر

۳.۱۹ خلاصه شارهای چندجزئی

۴.۱۹ استفاده از معادله‌های تغییر برای مخلوط‌ها

۵.۱۹ تحلیل ابعادی معادله‌های تغییر برای مخلوط‌های دوتایی

در فصل ۱۸، مسئله‌های نفوذ را با نوشتن موازنه‌های لایه‌ای جرم روی یک یا چند گونه نفوذکننده فرمول‌بندی کردیم. در این فصل کار را با نوشتن موازنه جرم روی جزء سیال دیفرانسیلی اختیاری شروع می‌کنیم تا معادله پیوستگی را برای گونه‌های مختلف یک مخلوط چندجزئی تعیین کنیم.

سپس با قرار دادن عبارت‌های مختلف جریان جرمی، صورت‌های مختلف معادله‌های نفوذ را به دست می‌آوریم. از این معادله‌های نفوذ می‌توان برای حل هریک از مسئله‌های فصل ۱۸ و همچنین مسئله‌های پیچیده‌تر، استفاده کرد. سپس همه معادله‌های تغییر برای مخلوط‌ها را جمع‌بندی و خلاصه می‌کنیم: معادله‌های پیوستگی، معادله حرکت، و معادله انرژی. این معادله‌ها شامل معادله‌های تغییری است که در فصل‌های ۳ و ۱۱ ارائه شدند. سپس عبارت‌های به دست آمده برای شار مخلوط‌ها را خلاصه می‌کنیم. همه این معادله‌ها را به صورت کلی ارائه می‌کنیم، هرچند در مسئله‌هایی که حل می‌کنیم، از صورت ساده شده آن‌ها استفاده خواهیم کرد. بقیه فصل به راه‌حل‌های تحلیلی و تحلیل‌های ابعادی سیستم‌های انتقال جرم اختصاص دارد.

### ۱.۱۹ معادله‌های پیوستگی برای مخلوط چندجزئی

در این بخش قانون پایستگی جرم را در مورد هر گونه  $\alpha$  موجود در مخلوط،  $\alpha = 1, 2, 3, \dots, N$ ، به کار می‌بندیم. سیستمی که در نظر می‌گیریم جزء حجم  $\Delta x \Delta y \Delta z$  ثابت در فضا است، اگر چه مخلوط سیال جریان دارد (نگاه کنید به شکل ۱.۳-۱). در داخل این مخلوط، ممکن است بین گونه‌های شیمیایی مختلف واکنش‌هایی انجام شود و ما از نماد  $r_\alpha$  برای نشان دادن آهنگ تولید گونه  $\alpha$ ، با ابعاد  $\frac{\text{جرم}}{\text{زمان} \times \text{حجم}}$  استفاده کنیم.



سهم‌های مختلف دخیل در موازنه جرم عبارت‌اند از:

- (۱-۱.۱۹) آهنگ افزایش جرم  $\alpha$  در جزء حجم  $(\partial\rho_\alpha/\partial t)\Delta x\Delta y\Delta z$
- (۲-۱.۱۹) آهنگ اضافه شدن جرم  $\alpha$  روی سطح در  $x$   $n_{\alpha x}|_x\Delta y\Delta z$
- (۳-۱.۱۹) آهنگ حذف جرم  $\alpha$  روی سطح در  $x + \Delta x$   $n_{\alpha x}|_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z$
- (۴-۱.۱۹) آهنگ تولید جرم  $\alpha$  توسط واکنش‌های شیمیایی  $r_\alpha\Delta x\Delta y\Delta z$

شار جرم ترکیبی  $n_{\alpha x}$  هم شامل شار مولکولی و هم شامل شار همرفتی است. جمله‌های اضافه شدن و حذف شدن در جهت‌های  $y$  و  $z$  نیز وجود دارند. وقتی موازنه کامل جرم نوشته و بر  $\Delta x\Delta y\Delta z$  تقسیم شود، پس از کاهش دادن جزء حجم به سمت صفر، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t} = -\left(\frac{\partial n_{\alpha x}}{\partial x} + \frac{\partial n_{\alpha y}}{\partial y} + \frac{\partial n_{\alpha z}}{\partial z}\right) + r_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5-1.19)$$

این معادله پیوستگی برای گونه  $\alpha$  در یک مخلوط واکنش‌دهنده چندجزئی است. این معادله تغییر غلظت جرمی گونه  $\alpha$  را با زمان، در نقطه ثابتی در فضا، از طریق نفوذ و همرفت  $\alpha$ ، هم‌چنین توسط واکنش شیمیایی تولید یا مصرف  $\alpha$  توصیف می‌کند. کمیت‌های  $n_{\alpha z}$ ،  $n_{\alpha y}$ ،  $n_{\alpha x}$  مؤلفه‌های دکارتی بردار شار جرمی  $\mathbf{n}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha$  است که در جدول ۱۷-۸.۱ با معادله (د) نشان داده شد.

معادله (۵-۱.۱۹) را می‌توان با استفاده از نمادگذاری برداری، به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t} = -(\nabla \cdot \mathbf{n}_\alpha) + r_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, N \quad (6-1.19)$$

می‌توانیم از معادله (ق) در جدول ۱۷-۸.۱ استفاده کنیم و رابطه زیر را بنویسیم:

$\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t}$	$-(\Delta \cdot \rho_\alpha \mathbf{v})$	$-(\nabla \cdot \mathbf{j}_\alpha)$	$+r_\alpha$	$\alpha = 1, 2, 3, \dots, N$	(۷-۱.۱۹)
آهنگ افزایش جرم $\alpha$ در واحد حجم	آهنگ خالص اضافه شدن جرم $\alpha$ در واحد حجم از طریق واکنش	آهنگ خالص اضافه شدن جرم $\alpha$ در واحد حجم از طریق نفوذ	آهنگ تولید جرم $\alpha$ در واحد حجم از طریق واکنش		

با جمع کردن همه  $N$  معادله (۷ یا ۶-۱.۱۹) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \quad (8-1.19)$$

که معادله پیوستگی برای مخلوط است. این معادله با معادله پیوستگی برای سیالی خالص که به صورت معادله (۴-۱.۳) نشان داده شد، همانند است. برای به دست آوردن معادله (۸-۱.۱۹) ناگزیر شدیم از معادله (ی) جدول ۱۷-۸.۱، و این نکته استفاده کنیم که از قانون پایستگی جرم نتیجه می‌شود  $\sum_\alpha r_\alpha = 0$ . سرانجام، به این نکته توجه می‌کنیم که معادله (۸-۱.۱۹)، برای مخلوط سیالی با چگالی جرمی ثابت  $\rho$ ، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (9-1.19)$$

در بخش قبل از واحدهای جرمی استفاده کردیم. اما می‌توان از واحدهای مولی نیز استفاده کرد و معادله مشابهی به دست آورد. معادله پیوستگی برای گونه  $\alpha$ ، برحسب واحدهای مولی، چنین است:

$$\frac{\partial c_\alpha}{\partial t} = -(\nabla \cdot \mathbf{N}_\alpha) + R_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, N \quad (10-1.19)$$

که در آن  $R_\alpha$  آهنگ مولی تولید  $\alpha$  در واحد حجم است. با استفاده از معادله (ت) در جدول ۱۷-۸، نتیجه می‌شود:

$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = -(\Delta \cdot c_\alpha \mathbf{v})$	$-(\nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha)$	$+ R_\alpha$	$\alpha = 1, 2, 3, \dots, N$	(۱۱-۱.۱۹)
آهنگ افزایش مول‌های $\alpha$ در واحد حجم	آهنگ خالص اضافه شدن مول‌های $\alpha$ در واحد حجم	آهنگ خالص اضافه شدن مول‌های $\alpha$ در واحد حجم	آهنگ تولید مول‌های $\alpha$ در واحد حجم	
	از طریق همرفت	از طریق نفوذ		

با جمع کردن همه  $N$  معادله (۱۰-۱.۱۹ یا ۱۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -(\nabla \cdot c\mathbf{v}^*) + \sum_{\alpha=1}^N R_\alpha \quad (12-1.19)$$

که معادله پیوستگی مخلوط است. برای به دست آوردن این معادله از معادله (م) در جدول ۱۷-۸ استفاده کردیم. باید توجه داشت که جمله واکنش شیمیایی، به سبب پایسته نبودن تعداد مول‌ها در یک واکنش شیمیایی، حذف نمی‌شود. سرانجام، به این نکته توجه می‌کنیم که برای مخلوط سیال با چگالی مولی ثابت  $c$ ، داریم:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}^*) = \frac{1}{c} \sum_{\alpha=1}^N R_\alpha \quad (13-1.19)$$

به این ترتیب مشاهده کردیم که معادله پیوستگی گونه  $\alpha$  را می‌توان به دو صورت نوشت، معادله (۷-۱.۱۹) و معادله (۱۱-۱.۱۹). با استفاده از روابط پیوستگی ارائه شده به صورت معادله‌های (۸-۱.۱۹) و (۱۲-۱.۱۹) می‌توان نشان داد که معادله پیوستگی گونه  $\alpha$  را می‌توان به دو صورت دیگر نیز نشان داد که با صورت‌های قبلی هم‌ارزند:

$$\rho \left( \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \omega_\alpha) \right) = -(\nabla \cdot \mathbf{j}_\alpha) + r_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, N \quad (14-1.19)$$

$$c \left( \frac{\partial x_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla x_\alpha) \right) = -(\nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha^*) + R_\alpha - x_\alpha \sum_{\beta=1}^N R_\beta \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, N \quad (15-1.19)$$

این دو معادله محتوای فیزیکی دقیقاً همانندی دارند، اما با دو دسته نماد مختلف نوشته می‌شوند، اولی برحسب کمیت‌های جرمی و دومی برحسب کمیت‌های مولی است. برای استفاده از این دو معادله باید عبارت‌های مقتضی برای جمله‌های شار و واکنش شیمیایی قرار دهیم. در این فصل فقط نتایج مربوط به سیستم دوتایی با  $\rho D_{AB}$  ثابت، با  $cD_{AB}$  ثابت، یا با سرعت صفر را ارائه می‌دهیم.

سیستم‌های دوتایی با  $\rho D_{AB}$  ثابت

با این فرض، معادله (۱۴-۱.۱۹)، پس از قرار دادن قانون فیک از معادله (الف) جدول ۱۷-۸، به صورت زیر

نوشته می‌شود:

$$\rho \left( \frac{\partial \omega_A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \omega_A) \right) = \rho D_{AB} \nabla^2 \omega_A + r_A \quad (۱۶-۱.۱۹)$$

و معادلهٔ متناظری نیز برای گونهٔ  $B$  وجود دارد. این معادله برای توصیف نفوذ در محلول‌های مایع رقیق در دما و فشار ثابت مناسب است. سمت چپ معادله را می‌توان به صورت  $\rho D\omega_A/Dt$  نوشت. معادلهٔ (۱۶-۱.۱۹) بدون جملهٔ  $r_A$  همان صورت معادلهٔ (۸-۲.۱۱) یا (۹) را دارد. این شباهت نسبتاً مهم است، زیرا مبنای قیاسی است که غالباً بین انتقال گرما و انتقال جرم در سیالات جاری با خواص فیزیکی ثابت انجام می‌شود.

سیستم‌های دوتایی با  $cD_{AB}$  ثابت

با این فرض، معادلهٔ (۱۵-۱.۱۹)، پس از قرار دادن قانون فیک از معادلهٔ (ب) جدول ۱۷-۸، چنین نوشته می‌شود:

$$c \left( \frac{\partial x_A}{\partial t} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla x_A) \right) = cD_{AB} \nabla^2 x_A + (x_B R_A - x_A R_B) \quad (۱۷-۱.۱۹)$$

و معادلهٔ متناظری نیز برای گونهٔ  $B$  وجود دارد. این معادله برای گازهای با چگالی پایین در فشار و دمای ثابت مفید است. سمت چپ این معادله را نمی‌توان به صورت  $cDx_\alpha/Dt$  نوشت، زیرا  $\mathbf{v}^*$  ظاهر می‌شود، نه  $\mathbf{v}$ .

سیستم‌های دوتایی با سرعت صفر

اگر اصلاً واکنش شیمیایی انجام نشود، آن‌گاه جمله‌های تولید شیمیایی همگی صفر می‌شوند. اگر، علاوه بر آن، در معادلهٔ (۱۶-۱.۱۹)  $\mathbf{v}$  صفر و  $\rho$  ثابت باشد، یا در معادلهٔ (۱۷-۱.۱۹)  $\mathbf{v}^*$  صفر و  $c$  ثابت باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 c_A \quad (۱۸-۱.۱۹)$$

که قانون دوم نفوذ فیک، یا گاهی با نام ساده‌تر معادلهٔ نفوذ، نامیده می‌شود. از این معادله معمولاً برای نفوذ در جامدها یا مایعات ساکن (یعنی  $\mathbf{v} = 0$  در معادلهٔ (۱۶-۱.۱۹))، و برای نفوذ متقابل هم‌مول در گازها (یعنی  $\mathbf{v}^* = 0$  در معادلهٔ (۱۷-۱.۱۹)) استفاده می‌شود. منظور ما از نفوذ متقابل هم‌مول این است که شار مولی خالص نسبت به دستگاه مختصات ثابت، صفر است؛ به عبارت دیگر، به ازای هر مول  $A$  که مثلاً در جهت مثبت  $z$  حرکت می‌کند، یک مول  $B$  وجود دارد که در جهت منفی  $z$  در حرکت است. معادلهٔ (۱۸-۱.۱۹) صورتی همانند معادلهٔ رسانش گرما دارد که با معادلهٔ (۱۰-۲.۱۱) نشان داده شد. این تشابه اساس قیاس بین بسیاری از مسائل رسانش گرما و نفوذ در جامدات است. در نظر داشته باشید که صدها مسئلهٔ توصیف‌شده توسط قانون دوم فیک، حل شده‌اند. حل این مسائل در تک‌نگاری‌هایی به قلم کرانک و به قلم کارلسلاو و بیگر جدول‌بندی شده‌است.<sup>۲</sup>

در جدول‌های ب. ۱۰ و ب. ۱۱، معادلهٔ (۱۴-۱.۱۹) (معادلهٔ چندجزئی پیوستگی برحسب  $\eta$ ) و معادلهٔ (۱۶-۱.۱۹) (معادلهٔ نفوذ دوتایی به ازای  $\rho$  و  $D_{AB}$  ثابت) در سه دستگاه مختصات استاندارد ارائه شده‌است. صورت‌های دیگر معادلهٔ پیوستگی را می‌توان از روی این‌ها الگوبرداری کرد.

### مثال ۱۹-۱

نفوذ، هفرت و واکنش شیمیایی<sup>۳</sup>

در شکل ۱۹-۱ سیستمی را نشان دادیم که در آن مایع  $B$ ، به‌آهستگی، با عبور از توبی متخلخل  $A$ ، به طرف بالا

2. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959).

3. W. Jost, *Diffusion*, Academic Press, New York (1952), pp. 58-59.

حرکت می‌کند. سپس  $A$  از طریق یک واکنش مرتبه اول، پس از انحلال، به آهستگی ناپدید می‌شود. مطلوب است تعیین توزیع غلظت حالت پایایی  $c_A(z)$ ، که در آن  $z$  مختص روبه بالا از تویی است. فرض کنید توزیع سرعت در لوله تقریباً تخت است. هم چنین فرض کنید که  $c_{A0}$  انحلال پذیری  $A$  و واکنش نکرده در  $B$  است. از آثار دمایی مربوط به گرمای واکنش چشم‌پوشی کنید.

حل

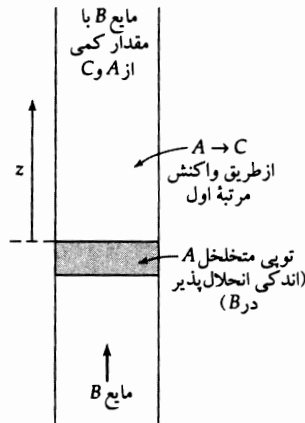
معادله (۱۶-۱.۱۹) برای محلول‌های مایع رقیق مناسب است. با تقسیم کردن این معادله بر وزن مولکولی  $M_A$  و نوشتن حالت خاص آن برای مسئله تک‌بعدی حالت پایایی مورد بحث، هرگاه  $\rho$  ثابت باشد، داریم:

$$v_0 \frac{dc_A}{dz} = D_{AB} \frac{d^2c_A}{dz^2} - k_1''' c_A \quad (19-1.19)$$

این معادله را باید با شرایط مرزی  $c_A = c_{A0}$  در  $z = 0$  و  $c_A = 0$  در  $z = \infty$  حل کرد. معادله (۱۹-۱.۱۹) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم استاندارد (معادله ج. ۱-۷) است که روش معروفی برای حل آن وجود دارد. با استفاده از تابع امتحانی  $c_A = e^{az}$  دو مقدار برای  $a$  به دست می‌آید که یکی از آن‌ها شرط مرزی در  $z = \infty$  را نقض می‌کند. بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \exp\left[-\left(\sqrt{1 + (4k_1''' D_{AB}/v_0^2)} - 1\right)(v_0 z / 2D_{AB})\right] \quad (20-1.19)$$

این مثال کاربرد معادله پیوستگی  $A$  را برای حل یک مسئله نفوذ با همرفت و واکنش شیمیایی نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱۹ نفوذ هم‌زمان، همرفت، و واکنش شیمیایی.

## ۲.۱۹ خلاصه معادله‌های چندجزئی تغییر

در سه قسمت اصلی این کتاب در مراحل مختلف قوانین پایستگی را معرفی کردیم که آن‌ها را به نام قوانین تغییر می‌شناسند. در فصل ۳ پایستگی جرم و پایستگی اندازه حرکت در سیال‌های خالص را ارائه کردیم. در فصل ۱۱ پایستگی انرژی در سیال‌های خالص را به آن افزودیم. در بخش ۱.۱۹ معادله‌های پایستگی جرم برای گونه‌های مختلف را اضافه کردیم. اکنون می‌خواهیم معادله‌های پایستگی برای سیستم‌های چندجزئی را خلاصه کنیم. در جدول ۱-۲.۱۹، کار را با ارائه معادله‌های تغییر برای مخلوطی از  $N$  گونه شیمیایی، برحسب شارهای مرکب، نسبت به محورهای ثابت شروع می‌کنیم. شماره معادله نشان می‌دهد که معادله مورد نظر اولین بار در کجای کتاب

ظاهر شده‌است. با جدول‌بندی معادله‌های تغییر به این شیوه، می‌توانیم ارزش وحدت موضوعی را درک کنیم. تنها فرضی که در این‌جا اختیار می‌شود این است که بر همه گونه‌ها نیروی خارجی یکسان  $\mathbf{g}$ ، به‌ازای واحد جرم، وارد می‌شود؛ در تذکر (ب) جدول ۱۹-۲، اصلاحات موردنیاز برای حالت‌های جز این شرح داده شده‌است.

جدول ۱۹-۲. معادله‌های تغییر برای مخلوط‌های چندجزئی برحسب شارهای مرکب.

جرم $\alpha$ :	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \omega_\alpha = -(\nabla \cdot \mathbf{n}_\alpha) + r_\alpha$	(الف)
		(معادله ۱۹-۱)
اندازه حرکت:	$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} = -[\nabla \cdot \phi] + \rho \mathbf{g}$	(ب)
		(معادله ۱۹-۲)
انرژی:	$\frac{\partial}{\partial t} \rho (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) = -(\nabla \cdot \mathbf{e}) + (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$	(ج)
		(معادله ۱۹-۳)

(الف) وقتی هر  $N$  معادله پیوستگی را باهم جمع کنیم، معادله پیوستگی مخلوط سیال:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \quad (\text{معادله } ۱۹-۴)$$

به‌دست می‌آید. در این معادله  $\mathbf{v}$  سرعت متوسط جرمی است که با معادله (۱۷-۱) تعریف شد. (ب) اگر بر گونه  $\alpha$  نیرویی بر واحد حجم وارد شود که آن را  $\mathbf{g}_\alpha$  می‌نامیم، آنگاه در معادله (ب) باید  $\rho \mathbf{g}$  را با  $\sum_\alpha (\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\alpha)$  جایگزین کرد و در معادله (ج)  $(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$  را با  $\sum_\alpha (\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\alpha)$  جایگزینی‌ها در مواردی لازم‌اند که، مثلاً، بعضی از گونه‌ها یون‌هایی با بارهای متفاوت باشند که در معرض میدانی الکتریکی قرار گرفته‌اند. این نوع مسئله‌ها را در فصل ۲۴ بررسی می‌کنیم.

خاصیت مهم این معادله‌ها آن است که همه به‌صورت زیرند:

$$\{ \text{آهنگ افزایش یک ویژگی} \} = \{ \text{آهنگ خالص اضافه شدن ویژگی} \} + \{ \text{آهنگ تولید ویژگی} \} \quad (۱۹-۲)$$

که در آن منظور از «ویژگی» به‌ترتیب جرم، اندازه حرکت، یا انرژی است. در هر معادله آهنگ خالص اضافه شدن ویژگی در واحد حجم، برابر است با منفی جمله دیورژانس. «آهنگ‌های تولید» از واکنش‌های شیمیایی در معادله نخست و از میدان نیروی خارجی در دو معادله دیگر ناشی می‌شود. هر معادله بیانی از قانون پایستگی است. معمولاً عبارات‌های پایستگی را به‌منزله قوانینی در نظر می‌گیریم که به تدریج و براساس تجربه و آزمایش تکوین یافته‌اند و بنابراین نزد جامعه علمی پذیرش عام پیدا کرده‌اند.<sup>۱</sup>

این سه «شار مرکب» را، که در معادله‌های (الف) تا (ج) در جدول ۱۹-۲ ظاهر می‌شوند، می‌توان به‌صورت شارهای همرفتی به‌علاوه شارهای مولکولی (یا نفوذی) نوشت. این شارهای مختلف در جدول ۱۹-۲ نشان داده شده‌اند که در آن‌ها شماره معادله‌ها نشان می‌دهد که اولین بار در کجای این کتاب ظاهر شده‌اند.

۱. در واقع قوانین پایستگی انرژی، اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای از صورت معادله حرکت لاگرانژ، به‌ترتیب، همراه با همگنی زمان، همگنی فضا، و همسانگردی فضا، پیروی می‌کنند (قضیه نوت). بنابراین این قوانین پایستگی حالت بسیار بنیادی دارند، اگرچه در نظر اول چنین به‌نظر نمی‌رسد. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه، نگاه کنید به

L. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1960), Chapter 2, and Emmy Noether, *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen (Math.-phys. Kl.)* (1918), pp. 235-257.

آمالی امی نوت (۱۹۳۵-۱۸۸۲)، پس از گرفتن درجه دکتري از دانشگاه ارلانگن، در گوتینگن زیر نظر هیلبرت پرورش یافت تا در پاکسازی هیلبری در سال ۱۹۳۳ ناگزیر از مهاجرت به ایالات متحده آمریکا شد و در آن‌جا به‌عنوان استاد ریاضیات در کالج برین ماور به تدریس پرداخت؛ یکی از گودال‌های ماه را به نام او نامیده‌اند.

وقتی عبارت‌های شار از جدول ۲-۲۰۱۹ را در معادله‌های پایستگی جدول ۱-۲۰۱۹ قرار دهیم و سپس با استفاده از معادله‌های (۳-۵ و ۴-۵) آن‌ها را به صورت  $D/Dt$  تبدیل کنیم، معادله‌های چندجزئی تغییر را به صورت معمول آن‌ها به دست می‌آوریم. این معادله‌ها در جدول ۳-۲۰۱۹ ارائه شده‌اند. علاوه بر این معادله‌های پایستگی، به عبارت‌هایی برای بیان شارها برحسب گرادبان‌ها و خواص انتقال (که این دومی تابع دما، چگالی، و ترکیب شیمیایی است) نیز نیاز داریم. سرانجام معادله دمایی حالت،  $p = p(\rho, T, x_\alpha)$ ، و معادله گرمایی حالت،  $\dot{U} = \dot{U}(\rho, T, x_\alpha)$ ، و اطلاعاتی در مورد آهنگ‌های هر واکنش شیمیایی همگنی که رخ می‌دهد، نیز لازم‌اند.<sup>۲</sup>

جدول ۲-۲۰۱۹ شارهای مرکب، مولکولی، و هرفتی مخلوط‌های چندجزئی (همه با یک قرارداد علامت).

ویژگی	شار هرفتی	+	شار مولکولی	=	شار مرکب
جرم:	$\rho v w_\alpha$	+	$j_\alpha$	=	$n_\alpha$ (الف) الف (۱-۸.۱۷)
اندازه حرکت:	$\rho v v$	+	$\pi$	=	$\phi$ (ب) ب (۱-۷.۱)
انرژی:	$\rho v (\dot{U} + \frac{1}{2} v^2)$	+	$q + [\pi \cdot v]$	=	$e$ (ج) ج (۵-۸.۹)

(الف) سرعت  $v$  که در همه این عبارت‌ها ظاهر می‌شود، سرعت جرمی متوسط است که با معادله (۱-۷.۱۷) تعریف شد.

(ب) شار اندازه حرکت مولکولی از دو قسمت تشکیل می‌شود:  $\pi = p\delta + \tau$ .

(ج) شار اندازه حرکت مولکولی از بردار شار گرمای  $q$  و بردار شار کار از  $[\pi \cdot v] = p v + [\tau \cdot v]$  تشکیل می‌شود که دومی فقط در سیستم‌های جریان پدیدار می‌گردد.

جدول ۳-۲۰۱۹ معادله‌های تغییر برای مخلوط‌های چندجزئی برحسب شارهای مولکولی.

جرم کل:	$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot v)$	(الف)
جرم گونه:	$\rho \frac{Dw_\alpha}{Dt} = -(\nabla \cdot j_\alpha) + r_\alpha$	(ب) الف (معادله (الف) جدول ۱-۵.۳)
اندازه حرکت:	$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$	(ج) ج (معادله (ب) جدول ۱-۵.۳)
انرژی:	$\rho \frac{D}{Dt} (\dot{U} + \frac{1}{2} v^2) = -(\nabla \cdot q) - (\nabla \cdot p v) - (\nabla \cdot [\tau \cdot v]) + (\rho v \cdot g)$	(د) د (معادله (ه) جدول ۱-۴.۱۱)

(الف) فقط  $N - 1$  از این معادله‌ها مستقل‌اند، زیرا جمع  $N$  معادله نتیجه می‌دهد  $\sum \dot{U} = 0$ .

(ب) برای اطلاع از اصلاحات لازم در هنگامی که نیروهای متفاوت بر گونه‌های مختلف وارد می‌شوند، به تذکر (ب) جدول ۱-۲۰۱۹ رجوع کنید.

۲. ممکن است این پرسش مطرح شود که آیا به معادله‌های جداگانه‌ای برای حرکت و سرعت گونه  $\alpha$  نیاز داریم یا نه. این نوع معادله‌ها را می‌توان با استدلال‌های پیوستاری به دست آورد، اما شارهای اندازه حرکت و انرژی گونه کمیت‌های قابل اندازه‌گیری نیستند و برای روشن کردن مفهوم آن‌ها به نظریه مولکولی نیاز داریم. این معادله‌های جداگانه گونه برای حل مسئله‌های انتقال لازم نیستند. اما معادله‌های حرکت گونه برای به دست آوردن عبارت‌های سینتیکی شارهای جرمی، در سیستم‌های چندجزئی مفید واقع شده‌اند. نگاه کنید به

C. F. Curtiss and R. B. Bird, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **93**, 7440-7445 (1996) and *J. Chem. Phys.*, **111**, 10362-10370 (1999).

این بحث را با بیان چند نکته در مورد صورت‌های خاص معادله‌های حرکت و انرژی به پایان می‌بریم. در بخش ۳.۱۱ خاطر نشان شد که معادله حرکت به صورت ارائه شده در فصل ۳ صورتی مناسب برای حل مسئله‌های همرفت واداشته است، اما صورت بدیل (معادله ۳-۱۱) برای نمایش صریح نیروهای شناوری ناشی از نابرابری‌های دما در سیستم لازم است. در سیستم‌های دوتایی با نابرابری‌های غلظتی و هم‌چنین نابرابری‌های دمایی، معادله حرکت را به صورت معادله (ب) جدول ۱-۵.۳ می‌نویسیم و از معادله تقریبی حالت به دست آمده از بسط سری تیلر دوگانه  $\rho(T, \omega_A)$  حول حالت  $\bar{\omega}_A, \bar{T}$  استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \rho(T, \omega_A) &= \bar{\rho} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{\bar{T}, \bar{\omega}_A} (T - \bar{T}) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial \omega_A} \right|_{\bar{T}, \bar{\omega}_A} (\omega_A - \bar{\omega}_A) + \dots \\ &\approx \bar{\rho} - \bar{\rho} \bar{\beta} (T - \bar{T}) - \bar{\rho} \bar{\zeta} (\omega_A - \bar{\omega}_A) \end{aligned} \quad (۲-۲.۱۹)$$

جدول ۴-۲.۱۹ معادله‌های انرژی برای سیستم‌های چندجزئی، که در آن‌ها گرانش تنها نیروی خارجی است. الف، ب

$$\rho \frac{D}{Dt} (\hat{U} + \hat{\phi} + \frac{1}{2} v^2) = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}]) \quad \text{ع(الف)}$$

$$\rho \frac{D}{Dt} (\hat{U} + \frac{1}{2} v^2) = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}]) + (\mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g}) \quad \text{ع(ب)}$$

$$\rho \frac{D}{Dt} (\frac{1}{2} v^2) = -(\mathbf{v} \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}]) + (\mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g}) \quad \text{ع(ج)}$$

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\pi} : \nabla \mathbf{v}) \quad \text{ع(د)}$$

$$\rho \frac{D\hat{H}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) + \frac{Dp}{Dt} \quad \text{ع(ه)}$$

$$\rho \hat{C}_p = \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) + \left( \frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T} \right)_{p, x_\alpha} \frac{Dp}{Dt} + \sum_{\alpha=1}^N \bar{H}_\alpha [(\nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha) - R_\alpha] \quad \text{ع(و)}$$

$$\rho \hat{C}_V \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\boldsymbol{\pi} : \nabla \mathbf{v}) + \left( 1 - \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right)_{p, x_\alpha} \right) p (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^N \left( \bar{U}_\alpha + \left( 1 - \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right)_{p, x_\alpha} \right) p \bar{V}_\alpha \right) [(\nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha) - R_\alpha] \quad \text{ع(ز)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha \bar{H}_\alpha + \left( \nabla \cdot \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{N}_\alpha \bar{H}_\alpha \right) = (\nabla \cdot k \nabla T) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) + \frac{Dp}{Dt} \quad \text{ع(ح)}$$

الف) برای مخلوط‌های چندجزئی  $\mathbf{q} = -k \nabla T + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{H}_\alpha}{M_\alpha} \mathbf{j}_\alpha + \mathbf{q}^{(x)}$  که در آن  $\mathbf{q}^{(x)}$  جمله‌ای معمولاً قابل چشم‌پوشی است که به اثر گرما-نفوذی مربوط است (معادله ۴-۲.۲۴).

ب) معادله‌های این جدول فقط در صورتی معتبرند که نیروی خارجی یکسان بر همه گونه‌ها وارد شود. اگر چنین نباشد، آن‌گاه  $\sum_{\alpha} (\mathbf{j}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\alpha)$  را باید به معادله (الف) و معادله‌های (د تا ح) اضافه کرد، جمله آخر معادله (ب) را باید با  $\sum_{\alpha} (\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\alpha)$  و جمله آخر معادله (ج) را باید با  $\sum_{\alpha} (\mathbf{v} \cdot \rho_\alpha \mathbf{g}_\alpha)$  جایگزین کرد.

ج) فقط در حالتی دقیق است که  $\partial \hat{\phi} / \partial t = 0$ .

د) ال. بی. راتفلد، رساله دکتری، دانشگاه ویسکانسین (۱۹۶۱) هم چنین نگاه کنید به مسئله ۲.د۱۹.

ه) در این معادله سهم  $\mathbf{q}^{(x)}$  در بردار شار گرما حذف شده است.

در این جا ضریب  $\bar{\zeta} = -(\nu/\rho)(\partial\rho/\partial\omega_A)$  که در  $\bar{T}$  و  $\bar{\omega}_A$  محاسبه شده است، چگالی را به ترکیب شیمیایی مربوط می کند. این ضریب انتقال جرم نظیر ضریب  $\bar{\beta}$  است که با معادله (۱-۳.۱۱) معرفی شد. وقتی این معادله تقریبی حالت را در جمله  $\rho g$  معادله حرکت جایگزین کنیم (نه در جمله  $\rho D\mathbf{v}/Dt$  که در آن  $\rho = \bar{\rho}$  قرار می دهیم)، معادله حرکت بوسینسک برای مخلوطی دوتایی را به دست می آوریم که در آن گرانش تنها نیروی خارجی است:

$$\bar{\rho} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = (-\nabla p + \bar{\rho} \mathbf{g}) - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] - \bar{\rho} \mathbf{g} \bar{\beta} (T - \bar{T}) - \bar{\rho} \mathbf{g} \bar{\zeta} (\omega_A - \bar{\omega}_A) \quad (۳-۲.۱۹)$$

دو جمله آخر این معادله نیروی شناوری ناشی از تغییرات دما و ترکیب شیمیایی در داخل سیال را نشان می دهند. سپس به سراغ معادله انرژی می رویم. یادآوری می کنیم که در جدول ۱-۴.۱۱، معادله انرژی برای سیالهای خالص به صورت های مختلف ارائه شد. همین کار را می توان برای مخلوطها نیز انجام داد و مجموعه ای منتخب از چندین صورت ممکن برای این معادله در جدول ۳-۲.۱۹ ارائه شده است. توجه کنید که لازم نیست برای توصیف انرژی گرمایی آزاد شده در واکنش های شیمیایی همگن جمله  $S_c$  را اضافه کنیم (کاری که در فصل ۱۰ انجام دادیم). این اطلاع به طور ضمنی در توابع  $\hat{H}$  و  $\hat{U}$  آمده است و در معادله های (و) و (ز)، به صراحت به صورت  $-\sum_{\alpha} \bar{H}_{\alpha} R_{\alpha}$  و  $-\sum_{\alpha} \bar{U}_{\alpha} R_{\alpha}$  ظاهر می شود. یادآوری می کنیم که در محاسبه  $\hat{H}$  و  $\hat{U}$ ، انرژی های تشکیل و اختلاط گونه های مختلف را باید منظور کرد (نگاه کنید به مثال ۱-۵.۲۳).

### ۳.۱۹ خلاصه شارهای چندجزئی

معادله های تغییر برحسب شارهای جرم، اندازه حرکت، و انرژی ارائه شدند. برای حل این معادله ها، باید این شارها را با عبارت های شامل خواص انتقالی و گرادیان های غلظت، سرعت، و دما جایگزین کرد. در این جا عبارت های شار را برای مخلوطها خلاصه می کنیم:

$$\mathbf{j}_A = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A \quad \text{فقط سیستم دوتایی} \quad (۱-۳.۱۹) \text{ جرم:}$$

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^{\dagger}] + \left(\frac{\nu}{3} \mu - \kappa\right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\delta} \quad (۲-۳.۱۹) \text{ اندازه حرکت:}$$

$$\mathbf{q} = -k \nabla T + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{H}_{\alpha}}{M_{\alpha}} \mathbf{j}_{\alpha} \quad (۳-۳.۱۹) \text{ انرژی:}$$

حال چند جمله هم در مقام توضیح اضافه می کنیم:

(الف) عبارت شار جرمی در این جا فقط برای مخلوط های دوتایی ارائه شد. برای مخلوط های گازی چندجزئی در فشارهای متوسط، می توان از معادله های ماکسول-استفان، یعنی معادله های (۱-۹.۱۷) استفاده کرد. سهم های دیگری هم در شار جرمی وجود دارد که با نیروهای رانشی غیر از گرادیان های غلظت متناظرند: نفوذ واداشته، که هنگامی رخ می دهد که گونه های مختلف در معرض نیروهای خارجی متفاوت قرار دارند؛ نفوذ فشاری، متناسب با  $\Delta p$ ؛ و نفوذ گرمایی، متناسب با  $\nabla T$ . این مکانیسم های دیگر نفوذ، که دوتای نخست آن ها می توانند نسبتاً مهم باشند، در فصل ۲۴ بررسی می شوند.

(ب) عبارت شار اندازه حرکت برای مخلوط های چندجزئی همانند سیال های خالص است. یک بار دیگر یادآوری می کنیم که سهم حاوی ویسکوزیته اتساعی  $\kappa$  به ندرت اهمیت پیدا می کند. البته، برای پلیمرها و سایر سیال های ویسکوکشنسان، معادله (۲-۳.۱۹) را باید با مدل های پیچیده تری، مانند مدل های تشریح شده در فصل ۸ جایگزین کرد.

(ج) عبارت شار انرژی که در این جا برای سیال های چندجزئی ارائه شد، از دو جمله تشکیل می شود: جمله نخست



انتقال گرما از طریق رسانش است که برای مواد خالص به صورت معادله (۴-۱۹) ارائه شد و جمله دوم انتقال گرما توسط هریک از گونه‌های نفوذکننده را توصیف می‌کند. کمیت  $\bar{H}_\alpha$  آنتالپی مولی جزئی گونه  $\alpha$  است. عملاً یک سهم دیگر نیز در شار انرژی وجود دارد که به نیروی رانش غلظتی - معمولاً کوچک - مربوط است و این اثر گرمدنفوذی را در فصل ۲۴ شرح خواهیم داد. رسانندگی گرمایی مخلوط  $k$  در معادله (۳-۳.۱۹) - به صورت ثابت تناسب بین شار گرما و گرادیان دما در غیاب هر نوع شار جرم تعریف می‌شود. این بحث را با چند نکته در مورد شار انرژی مرکب  $\mathbf{e}$  به پایان می‌بریم. با جایگزین کردن معادله (۳-۳.۱۹) در معادله (ج) جدول ۲-۲.۱۹، پس از مرتب کردن جمله‌ها، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \rho(\hat{U} + \frac{1}{\rho} v^2) \mathbf{v} + \mathbf{q} + p\mathbf{v} + [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}] \\ &= \rho(\hat{U} + \frac{1}{\rho} v^2) \mathbf{v} - k\nabla T + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{H}_\alpha}{M_\alpha} \mathbf{J}_\alpha + p\mathbf{v} + [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}] \\ &= -k\nabla T + \sum_{\alpha=1}^N \bar{H}_\alpha \mathbf{J}_\alpha + \rho(\hat{U} + p\hat{V}) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \rho v^2 \mathbf{v} + [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}] \quad (۴-۳.۱۹) \end{aligned}$$

در بعضی موارد، به ویژه در فیلم‌ها و لایه‌های مرزی کم‌سرعت، سهم‌های  $\frac{1}{\rho} \rho v^2 \mathbf{v}$  و  $[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]$  قابل چشم‌پوشی‌اند. در این صورت می‌توان جمله‌هایی را که زیر آن‌ها نقطه چین شده‌است، حذف کرد. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -k\nabla T + \sum_{\alpha=1}^N \bar{H}_\alpha \mathbf{J}_\alpha + \rho \hat{H} \mathbf{v} \\ &= -k\nabla T + \sum_{\alpha=1}^N \bar{H}_\alpha \mathbf{J}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha \bar{H}_\alpha \mathbf{v} \quad (۵-۳.۱۹) \end{aligned}$$

سپس با استفاده از معادله‌های (ز) و (ح) جدول ۱-۸.۱۷ نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{e} = -k\nabla T + \sum_{\alpha=1}^N \bar{H}_\alpha \mathbf{N}_\alpha \quad (۶-۳.۱۹)$$

سرانجام، برای مخلوط‌های گاز ایده‌آل، با جایگزین کردن آنتالپی‌های مولی جزئی  $\bar{H}_\alpha$  با آنتالپی‌های مولی  $\hat{H}_\alpha$  می‌توان این عبارت را بازم ساده‌تر کرد. معادله (۶-۳.۱۹) نقطه شروع استاندارد برای حل مسئله‌های تک‌بعدی انتقال هم‌زمان گرما و جرم است.<sup>۱</sup>

### مثال ۱-۳.۱۹

آنتالپی مولی جزئی

آنتالپی مولی جزئی  $\bar{H}_\alpha$ ، که در معادله‌های (۳-۳.۱۹) و (۶-۳.۱۹) ظاهر می‌شود، برای مخلوطی چندجزئی چنین

I. T. K. Sherwood, R. L. Pigford, and C. R. Wilke, *Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York (1975), Chapter 7.

توماس کیلگور شروود (۱۹۰۳-۱۹۷۶) نزدیک ۴۰ سال در MIT استاد بود و سپس به تدریس در دانشگاه کالیفرنیا در برکلی پرداخت. به پاس سهم زیادی که در پیش‌برد حوزه انتقال جرم داشت، عدد شروود (Sh) را به نام او نام‌گذاری کردند.

تعریف می‌شود:

$$\bar{H}_\alpha = \left( \frac{\partial H}{\partial n_\alpha} \right)_{T,p,n_\beta} \quad (۷-۳.۱۹)$$

که در آن  $n_\alpha$  تعداد مول‌های گونه  $\alpha$  در مخلوط، و اندیس  $n_\beta$  نشان‌دهنده این است که مشتق‌گیری را باید با ثابت گرفتن تعداد یا مول‌های هرگونه، غیر از  $\alpha$ ، انجام داد. آنتالپی  $H(n_1, n_2, n_3, \dots)$  «خاصیتی مقداری» است، زیرا هرگاه تعداد مول‌های هر جزء در  $k$  ضرب شود، خود آنتالپی در  $k$  ضرب خواهد شد:

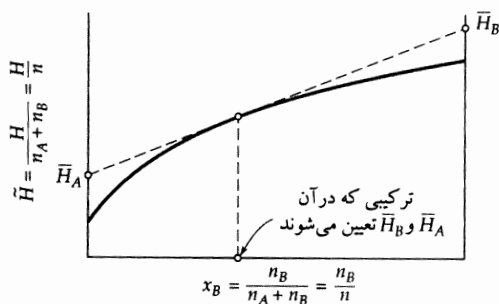
$$H(kn_1, kn_2, kn_3, \dots) = kH(n_1, n_2, n_3, \dots) \quad (۸-۳.۱۹)$$

ریاضیدان‌ها این نوع تابع را «همگن درجه ۱» می‌نامند. در مورد چنین توابعی می‌توان از قضیهٔ اویلر<sup>۲</sup> نتیجه گرفت که:

$$H = \sum_\alpha n_\alpha \bar{H}_\alpha \quad (۹-۳.۱۹)$$

(الف) اثبات کنید که، در مخلوط‌های دوتایی، آنتالپی‌های مولی جزئی به‌زای کسر مولی مفروض، را می‌توان با ترسیم آنتالپی بر مول، به صورت تابعی از کسر مولی، و سپس تعیین محل برخورد مماس ترسیم‌شده در کسر مولی موردنظر، به دست آورد (نگاه کنید به شکل ۱-۳.۱۹). این یکی از راه‌های به دست آوردن آنتالپی مولی جزئی از داده‌های آنتالپی مخلوط است.

(ب) راه دیگر تعیین آنتالپی مولی جزئی کدام است؟



شکل ۱-۳.۱۹ «روش نقاط برخورد» برای تعیین کمیت‌های مولی جزئی در مخلوط دوتایی.

حل

(الف) در سرتاسر این مثال، به منظور رعایت ایجاز، اندیس‌های  $T, p$  را حذف کرده‌ایم که حاکی از ثابت بودن این کمیت‌هاست. ابتدا عبارتی به صورت زیر، برای نقاط برخورد می‌نویسیم:

$$\bar{H}_A = \tilde{H} - x_B \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_B} \right)_n; \bar{H}_B = \tilde{H} + x_A \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_B} \right)_n \quad (۱۱-۳.۱۹)$$

که در آن  $\tilde{H} = H/(n_A + n_B) = H/n$ . برای نشان دادن درستی این معادله، عبارت را برحسب  $H$  بازنویسی می‌کنیم:

$$\bar{H}_A = \frac{H}{n} - \frac{x_B}{n} \left( \frac{\partial H}{\partial x_B} \right)_n \quad (۱۲-۳.۱۹)$$

2. M. D. Greenberg, *Foundations of Applied Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1978), p. 128; R. J. Silbey and R. A. Alberty, *Physical Chemistry*, 3rd edition, Wiley, New York (2001), §1.10, 4.9, and 6.10.

اکنون عبارت  $\bar{H}_A = (\partial H / \partial n_A)_{n_B}$  متضمن آن است که  $H$  تابع  $n_A$  و  $n_B$  باشد، اما  $(\partial H / \partial x_A)_n$  متضمن آن است که  $H$  تابع  $x_A$  و  $n$  باشد. رابطه بین این انواع مشتق توسط قانون زنجیری مشتق‌گیری جزئی ارائه می‌شود. برای به‌کارگیری این قانون به رابطه بین متغیرهای مستقل نیاز داریم که در این مسئله عبارت‌اند از:

$$n_A = (1 - x_B)n; \quad n_B = x_B n \quad (۱۴, ۱۳-۳.۱۹)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial H}{\partial x_B} \right)_n &= \left( \frac{\partial H}{\partial n_A} \right)_{n_B} \left( \frac{\partial n_A}{\partial x_B} \right)_n + \left( \frac{\partial H}{\partial n_B} \right)_{n_A} \left( \frac{\partial n_B}{\partial x_B} \right)_n \\ &= \bar{H}_A(-n) + \bar{H}_B(+n) \end{aligned} \quad (۱۵-۳.۱۹)$$

با جایگزین کردن این عبارت در معادله (۱۲-۳.۱۹) و استفاده از قضیهٔ اولر ( $H = n_A \bar{H}_A + n_B \bar{H}_B$ )، یک اتحاد نتیجه می‌شود. به این ترتیب اعتبار معادله (۱۰-۳.۱۹) اثبات می‌شود و درستی معادله (۱۱-۳.۱۹) را نیز می‌توان به همین ترتیب اثبات کرد.

(ب) می‌توان با استفاده از تعریف معادله (۷-۳.۱۹) و اندازه‌گیری شیب منحنی  $H$  برحسب  $n_A$  و ثابت نگه داشتن  $n_B$ ، مقدار  $\bar{H}_A$  را نیز به دست آورد. به علاوه با اندازه‌گیری آنتالپی اختلاط و استفاده از رابطه:

$$H = n_A \bar{H}_A + n_B \bar{H}_B = n_A \tilde{H}_A + n_B \tilde{H}_B + \Delta H_{\text{mix}} \quad (۱۶-۳.۱۹)$$

نیز می‌توان  $\tilde{H}_A$  را به دست آورد. غالباً از آنتالپی اختلاط چشم‌پوشی می‌شود و آنتالپی‌های مواد خالص به صورت  $\tilde{H}_A \approx \tilde{C}_{pA}(T - T^\circ)$ ، و عبارت مشابهی برای  $\tilde{H}_B$  ارائه می‌شود. این فرضی استاندارد برای مخلوط‌های گازی در فشارهای کم تا متوسط به‌شمار می‌رود.

روش‌های دیگر ارزیابی کمیت‌های مولی جزئی را می‌توان در کتاب‌های درسی ترمودینامیک یافت.

#### ۴.۱۹ استفاده از معادله‌های تغییر برای مخلوط‌ها

از معادله‌های تغییر در بخش ۲.۱۹، می‌توان برای حل همهٔ مسئله‌های فصل ۱۸ و مسئله‌های دشوارتر استفاده کرد. پدیده‌های انتقال مخلوط، مگر در مورد مسئله‌های ایده‌آل یا ساده‌شده، نسبتاً پیچیده‌اند و معمولاً برای حل آن‌ها به روش‌های عددی نیاز است. در این‌جا چند مسئلهٔ مقدماتی را، برای روشن کردن موضوع، حل می‌کنیم.

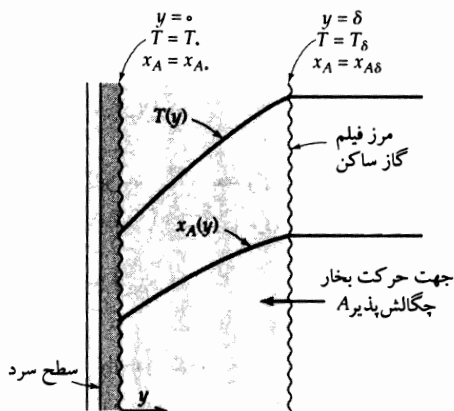
#### مثال ۱-۴.۱۹

انتقال هم‌زمان گرما و جرم<sup>۱</sup>

(الف) عبارت‌هایی برای توزیع کسر مولی  $x_A(y)$  و توزیع دما  $T(y)$  برای سیستم نشان داده‌شده در شکل ۱-۴.۱۹، به دست آورید و کسرهای مولی و دماها را در هر دو مرز فیلم ( $y = 0$  و  $y = \delta$ ) معلوم فرض کنید. در این‌جا یک بخار داغ چگالش‌پذیر،  $A$ ، به حالت‌پایا در فیلم ساکن گاز چگالش‌ناپذیر  $B$  نفوذ می‌کند تا به سطح سرد واقع در  $y = 0$  برسد که در آن  $A$  چگالش می‌یابد. رفتار گاز را ایده‌آل و فشار را یکنواخت فرض کنید. به علاوه فرض کنید خواص فیزیکی ثابت‌اند و در دما و ترکیب متوسط محاسبه شده‌اند. از انتقال گرمای تابشی چشم‌پوشی کنید.

1. A. P. Colburn and T. B. Drew, *Trans. Am. Inst. Chem. Engrs.*, **38**, 197-212 (1937).

(ب) نتیجه را به وضعیتی تعمیم دهید که در آن هردو گونه  $A$  و  $B$  روی دیوار چگالش می‌یابند و نامساوی بودن ضخامت‌های فیلم برای انتقال جرم و گرما را در نظر بگیرید.



شکل ۴-۱۹ چگالش بخار داغ  $A$  روی سطح سرد در حضور گاز چگالش‌ناپذیر  $B$ .

حل

(الف) به منظور تعیین کمیت‌های مطلوب، باید معادله‌های پیوستگی و انرژی را برای این سیستم حل کنیم. از ساده‌سازی معادله (۱۰-۱.۱۹) و معادله (ج) جدول ۲-۱۹ برای انتقال تک‌بعدی پایا، در غیاب واکنش‌های شیمیایی و نیروهای خارجی، نتیجه می‌شود:

$$\frac{dN_{Ay}}{dy} = 0 \quad (۱-۴.۱۹) \text{ پیوستگی } A:$$

$$\frac{de_y}{dy} = 0 \quad (۲-۴.۱۹) \text{ انرژی:}$$

بنابراین هم  $N_{Ay}$  و هم  $e_y$  در سرتاسر فیلم، ثابت‌اند.

برای تعیین توزیع کسر مولی، به شار مولی نفوذ  $A$  در  $B$  ساکن نیاز داریم:

$$N_{Ay} = -\frac{cD_{AB}}{1-x_A} \frac{dx_A}{dy} \quad (۳-۴.۱۹)$$

با قرار دادن معادله (۳-۴.۱۹) در معادله (۱-۴.۱۹) و انتگرال‌گیری، توزیع کسر مولی نتیجه می‌شود (نگاه کنید به بخش ۲.۱۸):

$$\left(\frac{1-x_A}{1-x_{A0}}\right) = \left(\frac{1-x_{A\delta}}{1-x_{A0}}\right)^{y/\delta} \quad (۴-۴.۱۹)$$

در این جا  $cD_{AB}$  را ثابت، و مساوی مقدار آن در دمای میانگین فیلم می‌گیریم. می‌توانیم شار ثابت  $N_{Ay}$  را از معادله‌های (۳-۴.۱۹) و (۴) محاسبه کنیم:

$$N_{Ay} = \frac{cD_{AB}}{\delta} \ln \frac{1-x_{A\delta}}{1-x_{A0}} \quad (۵-۴.۱۹)$$

توجه کنید که  $N_{Ay}$  منفی است، زیرا گونه  $A$  چگالش می‌یابد. دو عبارت آخر را می‌توان باهم ترکیب کرد تا توزیع‌های غلظت به صورتی دیگر به دست آیند:

$$\frac{x_A - x_{A0}}{x_{A\delta} - x_{A0}} = \frac{1 - \exp[(N_{Ay}/cD_{AB})y]}{1 - \exp[(N_{Ay}/cD_{AB})\delta]} \quad (۶-۴.۱۹)$$

برای به دست آوردن توزیع دما، از شار انرژی نشان داده شده با معادله (۶-۳.۱۹) برای گاز ایده آل، همراه با معادله (۸-۸.۹) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} e_y &= -k \frac{dT}{dy} + (\tilde{H}_A N_{Ay} + \tilde{H}_B N_{By}) \\ &= -k \frac{dT}{dy} + N_{Ay} [\tilde{H}_{A^0} + \tilde{C}_{pA}(T - T_0)] \end{aligned} \quad (7-4.19)$$

در این جا  $T_0$  را به عنوان دمای مرجع برای آنتالپی انتخاب کرده‌ایم. با قرار دادن این عبارت  $e_y$  در معادله (۲-۴.۱۹) و انتگرال‌گیری بین حدود  $T = T_0$  در  $y = 0$  و  $T = T_\delta$  در  $y = \delta$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} = \frac{1 - \exp[(N_{Ay} \tilde{C}_{pA}/k)y]}{1 - \exp[(N_{Ay} \tilde{C}_{pA}/k)\delta]} \quad (8-4.19)$$

می‌توان دید که توزیع دما برای این سیستم خطی نیست، مگر در حد، وقتی  $N_{Ay} \tilde{C}_{pA}/k \rightarrow 0$ . به شباهت بین معادله‌های (۶-۴.۱۹) و (۸) توجه کنید.

شار انرژی رسانشی در جدار، در این حالت بیشتر از حالتی است که انتقال جرم نداشته باشیم. بنابراین، با استفاده از اندیس صفر، نبود انتقال جرم را نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$\frac{-k(dT/dy)|_{y=0}}{-k(dT/dy)^*|_{y=0}} = \frac{-(N_{Ay} \tilde{C}_{pA}/k)\delta}{1 - \exp[(N_{Ay} \tilde{C}_{pA}/k)\delta]} \quad (9-4.19)$$

مشاهده می‌شود که آهنگ انتقال گرما مستقیماً از انتقال جرم هم‌زمان تأثیر می‌پذیرد، اما شار جرمی تحت تأثیر مستقیم انتقال گرمای هم‌زمان نیست. در کاربردهای در دماهای زیر نقطه جوش عادی گونه  $A$ ، مقدار  $N_{Ay} \tilde{C}_{pA}/k$  کوچک است و سمت راست معادله (۹-۴.۱۹) بسیار نزدیک واحد است (نگاه کنید به مسئله ۱۹ الف). در فصل ۲۲ برهم‌کنش بین انتقال گرما و جرم را عمیق‌تر بررسی می‌کنیم.

(ب) اگر هم  $A$  و هم  $B$  روی جدار چگالش پیدا کنند، آن‌گاه معادله‌های (۱-۴.۱۹) و (۲)، وقتی از آن‌ها انتگرال گرفته شود، به  $N_{Ay} = N_{A^0}$  و  $e_y = e_0$  منتهی می‌شوند که در آن‌ها اندیس «۰» حاکی از محاسبه کمیت‌ها در  $y = 0$  است. از نظیر معادله (۱-۴.۱۹) نیز برحسب  $B$  انتگرال می‌گیریم تا نتیجه شود  $N_{By} = N_{B^0}$  و داشته باشیم:

$$-cD_{AB} \frac{dx_A}{dy} + x_A(N_{A^0} + N_{B^0}) = N_{A^0} \quad (10-4.19)$$

$$-k \frac{dT}{dy} + (N_{A^0} \bar{H}_A + N_{B^0} \bar{H}_B) = e_0 \quad (11-4.19)$$

در دومین معادله،  $\bar{H}_A$  را با  $\tilde{C}_{pA}(T - T_0)$  و  $\bar{H}_B$  را با  $\tilde{C}_{pB}(T - T_0)$  جایگزین می‌کنیم و چون دمای مبنا  $T_0$  است، می‌توانیم  $e_0$  را با  $q_0$ ، یعنی شار گرمای رسانشی در جدار، جایگزین کنیم. در معادله نخست،  $x_{A^0}(N_{A^0} + N_{B^0})$  را از دو طرف تفریق می‌کنیم تا معادله‌ای به دست آوریم که صورتی شبیه معادله دما داشته باشد که در بالا به دست آوردیم. بنابراین:

$$-cD_{AB} \frac{dx_A}{dy} + (N_{A^0} + N_{B^0})(x_A - x_{A^0}) = N_{A^0} - x_{A^0}(N_{A^0} + N_{B^0}) \quad (12-4.19)$$

$$-k \frac{dT}{dy} + (N_{A^0} \tilde{C}_{pA} + N_{B^0} \tilde{C}_{pB})(T - T_0) = q_0 \quad (13-4.19)$$

با انتگرال‌گیری نسبت به  $y$  و کاربرد شرایط مرزی در  $y = 0$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{(N_{A^0} + N_{B^0})(x_A - x_{A^0})}{N_{A^0} - x_{A^0}(N_{A^0} + N_{B^0})} = 1 - \exp \left[ (N_{A^0} + N_{B^0}) \frac{y}{cD_{AB}} \right] \quad (۱۴-۴.۱۹)$$

$$\frac{(N_{A^0} \bar{C}_{pA} + N_{B^0} \bar{C}_{pB})(T - T^0)}{q} = 1 - \exp \left[ (N_{A^0} \bar{C}_{pA} + N_{B^0} \bar{C}_{pB}) \frac{y}{k} \right] \quad (۱۵-۴.۱۹)$$

این معادله‌ها توزیع‌های غلظت و دما را برحسب شارهای جرم و گرما نشان می‌دهند. کاربردهای شرایط مرزی در لبه‌های خارجی فیلم‌ها - یعنی، به ترتیب، در  $y = \delta_x$  و  $y = \delta_T$  - نتیجه می‌دهد:

$$\frac{(N_{A^0} + N_{B^0})(x_{A\delta} - x_{A^0})}{N_{A^0} - x_{A^0}(N_{A^0} + N_{B^0})} = 1 - \exp \left[ (N_{A^0} + N_{B^0}) \frac{\delta_x}{cD_{AB}} \right] \quad (۱۶-۴.۱۹)$$

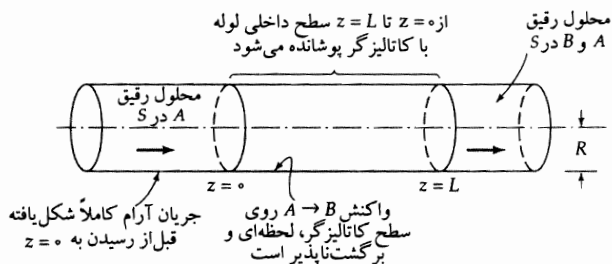
$$\frac{(N_{A^0} \bar{C}_{pA} + N_{B^0} \bar{C}_{pB})(T_\delta - T^0)}{q} = 1 - \exp \left[ (N_{A^0} \bar{C}_{pA} + N_{B^0} \bar{C}_{pB}) \frac{\delta_T}{k} \right] \quad (۱۷-۴.۱۹)$$

این معادله‌ها شارها را به ضخامت فیلم و خواص انتقالی مربوط می‌کنند. وقتی معادله (۱۴-۴.۱۹) بر معادله (۱۶-۴.۱۹)، و معادله (۱۵-۴.۱۹) بر معادله (۱۷-۴.۱۹) تقسیم شود، توزیع‌های سرعت برحسب ضرایب انتقال به دست می‌آید (نظیر معادله‌های (۴-۱۹) و (۶-۱۸)). در بخش ۸.۲۲ دوباره با معادله‌های (۱۶-۴.۱۹) و (۱۷-۴.۱۹) روبرو خواهیم شد.

### مثال ۲-۴.۱۹

توزیع غلظت در رآکتور لوله‌ای

در شکل ۲-۴.۱۹ یک رآکتور لوله‌ای کاتالیزی نشان داده شده‌است. محلول رقیق  $A$  در حلال  $S$  جریان آرام و کاملاً شکل‌یافته در ناحیه  $z < 0$  دارد. وقتی این جریان با جدار کاتالیزی در ناحیه  $0 \leq z \leq L$  برخورد می‌کند، گونه حل‌شده  $A$  فوراً و به‌طور برگشت‌ناپذیر به ایزومر (تک‌پار)  $B$  تبدیل می‌شود. معادله نفوذ مناسب برای این مسئله بنویسید و جواب را برای فواصل کوتاه در داخل رآکتور به دست بیاورید. فرض کنید جریان هم‌دماست و حضور  $B$  را نادیده بگیرید.



شکل ۲-۴.۱۹ شرایط مرزی برای رآکتور لوله‌ای.

حل

برای شرایطی که در بالا گفته شد، مایع جاری همواره بسیار نزدیک به  $S$  خالص خواهد بود. حاصل ضرب  $\rho D_{AS}$  را می‌توان ثابت فرض کرد و نفوذ  $A$  در  $S$  را با روایت حالت پایایی معادله (۱۴-۱.۱۹) توصیف کرد (و از حضور

مقدار ناچیزی محصول واکنش  $B$  چشم‌پوشی کرد). بنابراین معادله‌های مربوطه تغییر برای این سیستم عبارت‌اند از:

$$v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AS} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right] \quad \text{پیوستگی } A: \quad (۱۸-۴.۱۹)$$

$$0 = -\frac{dP}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) \quad \text{حرکت: } (۱۹-۴.۱۹)$$

این فرض معمول را اختیار می‌کنیم که می‌توان از نفوذ محوری نسبت به همرفت محوری، چشم‌پوشی کرد و بنابراین جمله‌ای را که زیر آن نقطه‌چین شده، حذف کرد (مقایسه کنید با معادله‌های (۱۰-۸، ۱۱ و ۱۲). معادله (۱۹-۴.۱۹) را می‌توان حل کرد و توزیع سرعت سهموی  $v_z(r) = v_{z,\max} [1 - (r/R)^2]$  را به دست آورد. وقتی این نتیجه را در معادله (۱۸-۴.۱۹) قرار دهیم، داریم:

$$v_{z,\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AS} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) \quad (۲۰-۴.۱۹)$$

این معادله را باید با شرایط مرزی زیر حل کرد:

$$c_A = c_{A0} \quad \text{شرط مرزی ۱: در } z = 0, \text{ داریم } (۲۱-۴.۱۹)$$

$$c_A = 0 \quad \text{شرط مرزی ۲: در } r = R, \text{ داریم } (۲۲-۴.۱۹)$$

$$c_A = 0 \quad \text{شرط مرزی ۳: در } r = 0, \text{ داریم (مقدار متناهی)} (۲۳-۴.۱۹)$$

برای فواصل کوتاه  $z$  در داخل رآکتور، غلظت  $c_A$ ، فقط در نزدیکی جدار، با  $c_{A0}$  تفاوت دارد؛ در این ناحیه توزیع سرعت عملاً خطی است. بنابراین می‌توانیم متغیر  $y = R - r$  را معرفی کنیم، جمله‌های انحنا را نادیده بگیریم، و شرط مرزی ۳ را با یک شرط مرزی کاذب در  $y = \infty$  جایگزین کنیم (برای مطالعه شرح بیشتری در مورد این روش برخورد با ناحیه ورودی لوله، به مثال ۲-۲.۱۲ رجوع کنید). بنابراین عبارت مسئله به ترتیب زیر دوباره فرمول‌بندی می‌شود:

$$2v_{z,\max} \frac{y}{R} \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AS} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (۲۴-۴.۱۹)$$

و شرایط مرزی آن عبارت‌اند از:

$$c_A = c_{A0} \quad \text{شرط مرزی ۱: در } z = 0, \text{ داریم } (۲۵-۴.۱۹)$$

$$c_A = 0 \quad \text{شرط مرزی ۲: در } y = 0, \text{ داریم } (۲۶-۴.۱۹)$$

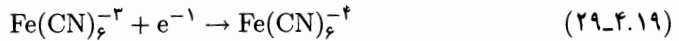
$$c_A = c_{A0} \quad \text{شرط مرزی ۳: در } y = \infty, \text{ داریم } (۲۷-۴.۱۹)$$

این مسئله را می‌توان با استفاده از روش ترکیب متغیرهای مستقل و یافتن جوابی به صورت  $c_A/c_{A0} = f(\eta)$  حل کرد؛ در رابطه اخیر  $\eta = (y/R)(2v_{z,\max}R^2/9D_{AS}z)^{1/3}$ . به این ترتیب معادله دیفرانسیل معمولی  $f'' + 3\eta^2 f' = 0$  به دست می‌آید که می‌توان از آن انتگرال‌گیری کرد تا نتیجه زیر حاصل شود (نگاه کنید به معادله (ج.۱-۹)).

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \frac{\int_0^\eta \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta}}{\int_0^\infty \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta}} = \frac{\int_0^\eta \exp(-\bar{\eta}^3) d\bar{\eta}}{\Gamma(\frac{4}{3})} \quad (۲۸-۴.۱۹)$$

این مسئله از لحاظ ریاضی نظیر مسئله گراتس (مسئله ۴.۱۲) است و  $\Theta$  در آن مسئله نظیر  $(c_A/c_{A0}) - 1$  در این جاست.

آزمایش‌هایی از نوع توصیف‌شده در این جا، برای به دست آوردن داده‌های انتقال جرم به ازای عددهای اشمیت<sup>۲</sup> بالا مفید واقع شده‌اند. یک واکنش مخصوصاً جالب، احیای یون‌های فری سیانید روی سطح فلزی، طبق واکنش زیر است:



که در آن فری سیانید و فروسیانید جای  $A$  و  $B$  را در مثال بالا می‌گیرند. این واکنش الکتروشیمیایی در شرایط مناسب، نسبتاً به سرعت انجام می‌شود. به علاوه، چون فقط شامل انتقال الکترون است، خواص فیزیکی محلول تقریباً ثابت می‌ماند. می‌توان با اضافه کردن یک الکترولیت بی‌تفاوت، آثار نفوذ واداشته را، که در این جا از آن‌ها چشم‌پوشی شد، کاهش داد.<sup>۴،۳</sup>

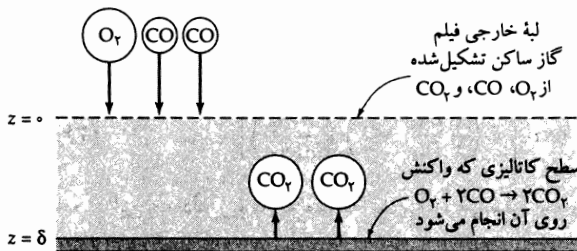
### مثال ۳-۴.۱۹

اکسایش کاتالیزی کربن مونوکسید

شکل ۳-۴.۱۹ نحوه ترکیب اکسیژن و کربن مونوکسید در سطح کاتالیزی (پالادیم) را، برای تشکیل کربن دیوکسید، طبق واکنش زیر که در فناوری اهمیت دارد، نشان می‌دهد:<sup>۵</sup>



برای این تحلیل، فرض می‌کنیم واکنش به صورت لحظه‌ای و برگشت‌ناپذیر در سطح کاتالیزگر انجام شود. ترکیب گاز در لبه خارجی فیلم (در  $z = 0$ ) معلوم فرض می‌شود، و سطح کاتالیزگر در  $z = \delta$  است. فشار و دما را از مکان اندازه‌گیری در سرتاسر فیلم، مستقل فرض می‌کنیم. گونه‌های شیمیایی را چنین نام‌گذاری می‌کنیم:  $\text{O}_2 = 1$ ،  $\text{CO} = 2$  و  $\text{CO}_2 = 3$ .



شکل ۳-۴.۱۹ سیستم سه‌جزئی با واکنش شیمیایی کاتالیزی.

حل

برای نفوذ تک‌بعدی حالت پایا، بدون انجام واکنش‌های همگن، از معادله (۱۰-۱.۱۹) نتیجه می‌شود:

$$\frac{dN_{1z}}{dz} = 0; \quad \frac{dN_{2z}}{dz} = 0; \quad \frac{dN_{3z}}{dz} = 0 \quad (31-4.19)$$

2. D. W. Hubbard and E. N. Lightfoot, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **5**, 370-379 (1966).

3. J. S. Newman, *Electrochemical Systems*, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1991), §1.10.

4. J. R. Selman and C. W. Tobias, *Advances in Chemical Engineering*, **10**, Academic Press, New York, N. Y. (1978), pp. 212-318.

5. B. C. Gates, *Catalytic Chemistry*, Wiley, New York (1992), pp. 356-362; C. N. Satterfield, *Heterogeneous Catalysis in Industrial Practice*, McGraw-Hill, New York, 2nd edition (1991), Ch. 8.



که نشان می‌دهد همه شارهای مولی در سرتاسر فیلم ثابت‌اند. با توجه به شرایط مرزی مربوط به استوکیومتری مسئله، می‌دانیم که

$$N_{1z} = \frac{1}{4} N_{2z} = -\frac{1}{4} N_{rz} \quad (۳۲-۴.۱۹)$$

از معادله‌های ماکسول-استفان، یعنی معادله‌های (۱۷-۹.۱)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{dx_r}{dz} &= -\frac{1}{cD_{1r}}(x_1 N_{rz} - x_r N_{1z}) - \frac{1}{cD_{1r}}(x_2 N_{rz} - x_r N_{2z}) \\ &= -\frac{N_{rz}}{cD_{1r}} \left(1 + \frac{1}{4} x_r\right) \end{aligned} \quad (۳۳-۴.۱۹)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dz} &= -\frac{1}{cD_{1r}}(x_2 N_{1z} - x_1 N_{2z}) - \frac{1}{cD_{1r}}(x_r N_{1z} - x_1 N_{rz}) \\ &= \frac{N_{rz}}{4cD_{1r}}(1 - 3x_1 - x_r) + \frac{N_{rz}}{2cD_{1r}}(2x_1 + x_r) \end{aligned} \quad (۳۴-۴.۱۹)$$

این معادله‌ها با استفاده از معادله (۳۲-۴.۱۹)، و با استفاده از این نکته که درگستره وسیعی از دما  $D_{1r} \approx D_{1z}$ ، ساده می‌شوند. نکته آخر را می‌توان با استفاده از پیوست (ه)، و نشان دادن این که  $\sigma_{1r} = 3,714 \text{ \AA}$  و  $\sigma_{2r} = 3,793 \text{ \AA}$ ، و این که  $\varepsilon_{1r}/K = 146$  و  $\varepsilon_{2r}/K = 145$  مشاهده کرد. چون فقط کسر مولی  $x_r$  در معادله (۳۳-۴.۱۹) ظاهر می‌شود، می‌توان از این معادله انتگرال گرفت<sup>۶</sup> تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$x_r = -2 + (x_{r0} + 2) \exp\left(-\frac{N_{rz} z}{2cD_{1r}}\right) \quad (۳۵-۴.۱۹)$$

با ترکیب دو معادله آخر، پس از انتگرال‌گیری، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \frac{1}{4}(x_{r0} + 2) \exp\left(-\frac{N_{rz} z}{2cD_{1r}}\right) - \left(\frac{1}{3} - x_{10} - \frac{1}{4} x_{r0}\right) \\ &\quad \exp\left[-\left(\frac{3}{2} \frac{D_{1r}}{D_{1z}} - 1\right) \left(\frac{N_{rz} z}{cD_{1r}}\right)\right] \end{aligned} \quad (۳۶-۴.۱۹)$$

با استفاده از این معادله و معادله مشابه برای  $x_2$ ، می‌توان  $x_r$  را در  $z = \delta$  به دست آورد. سپس از معادله (۳۵-۴.۱۹) نتیجه می‌شود:

$$N_{rz} = -\frac{2cD_{1r}}{\delta} \ln\left(\frac{x_{r\delta} + 2}{x_{r0} + 2}\right) \quad (۳۷-۴.۱۹)$$

که آهنگ تولید کربن دی‌اکسید را در سطح کاتالیزی نشان می‌دهد. سپس می‌توان این نتیجه را در معادله‌های (۳۶ و ۳۵-۴.۱۹) جایگزین کرد و سه کسر مولی را به صورت تابعی از  $z$  به دست آورد.

#### مثال ۴-۴.۱۹

رسانندگی گرمایی گاز چنداتمی

در بخش ۳.۹ نشان دادیم که رسانندگی گرمایی گازهای چنداتمی از فرمول مربوط به گازهای تک‌اتمی انحراف دارد،

۶. مسئله سه‌جزی با دو ضریب نفوذ مساوی در منبع زیر شرح داده شده‌است:

و علت آن آثار درجات آزادی داخلی در مولکول‌های کمپلکس است. وقتی فرمول اویکن برای گازهای چنداتمی (معادله ۳.۹-۱۵)) را بر فرمول مربوط به گازهای تک‌اتمی (معادله ۳.۹-۱۴)) تقسیم کنیم و قانون گاز ایده‌آل را به‌کار ببندیم، می‌توانیم نسبت رسانندگی گرمایی گاز چنداتمی به رسانندگی گرمایی گاز تک‌اتمی را، به‌صورت زیر، به‌دست آوریم:

$$\frac{k_{\text{poly}}}{k_{\text{mon}}} = \frac{3}{5} + \frac{4}{15} \frac{\bar{C}_v}{R} \quad (38-4.19)$$

با مدل‌سازی گاز چنداتمی به‌صورت مخلوط گازی برهمکنش‌کننده، که در آن «گونه»های مختلف مولکول‌های گاز چنداتمی درحالت‌های چرخشی و ارتعاشی مختلف‌اند، نتیجه‌ای با صورتی مشابه رابطه بالا به‌دست آورید.

حل شار گرمای مخلوط گازی با معادله (۳.۹-۳۱) نشان داده شده‌است. همه «گونه»ها رسانندگی گرمایی برابر دارند، زیرا فقط از لحاظ حالت‌های کوانتومی داخلی متفاوت‌اند. بنابراین انتظار داریم که هر  $k_{\alpha}$  مساوی  $k_{\text{mon}}$  باشد. به‌همین ترتیب شار جرمی هر «گونه» را باید با قانون فیک برای گازهای خالص  $\mathbf{j}_{\alpha} = -\rho D_{\alpha\alpha} \nabla \omega_{\alpha}$  نشان داد که در آن همه  $D_{\alpha\alpha}$ ها مقدار مشترک  $D_{\text{mon}}$  را دارند. در نتیجه:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\text{poly}} &= -k_{\text{mon}} \nabla T - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{H}_{\alpha}}{M_{\alpha}} \rho D_{\alpha\alpha} \nabla \omega_{\alpha} \\ &= -k_{\text{mon}} \nabla T - c D_{\text{mon}} \sum_{\alpha=1}^N \bar{H}_{\alpha} \nabla x_{\alpha} \end{aligned} \quad (39-4.19)$$

چون وزن مولکولی همه «گونه»ها برابر است.

اکنون اگر فرض کنیم توزیع روی حالت‌های کوانتومی مختلف، با دمای موضعی در تعادل است، آن‌گاه  $\nabla x_{\alpha} = (dx_{\alpha}/dT) \nabla T$ . سپس می‌توان رسانندگی گرمایی مؤثر مخلوط را، با استفاده از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{q}_{\text{poly}} = -k_{\text{mon}} \nabla T - c D_{\text{mon}} \sum_{\alpha=1}^N \bar{H}_{\alpha} (dx_{\alpha}/dT) \nabla T \equiv -k_{\text{poly}} \nabla T \quad (40-4.19)$$

و نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{k_{\text{poly}}}{k_{\text{mon}}} &= 1 + \left( \frac{c D_{\text{mon}}}{k_{\text{mon}}} \right) \left( \frac{d}{dT} \sum_{\alpha=1}^N \bar{H}_{\alpha} x_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha} \left( \frac{d\bar{H}_{\alpha}}{dT} \right) \right) \\ &= 1 + \left( \frac{c D_{\text{mon}}}{k_{\text{mon}}} \right) (\bar{C}_{p,\text{poly}} - \bar{C}_{p,\text{mon}}) \\ &= 1 + \frac{4}{5} A [(\bar{C}_{p,\text{poly}}/\bar{C}_{p,\text{mon}}) - 1] \end{aligned} \quad (41-4.19)$$

در این جا کمیت وابسته به دمای:

$$A = \frac{5}{4} (c D_{\text{mon}} \bar{C}_{p,\text{mon}}/k_{\text{mon}}) \quad (42-4.19)$$

را می‌توان با استفاده از نظریه سینتیکی گازها در چگالی پایین محاسبه کرد. این کمیت با دما بسیار آهسته تغییر می‌کند و مقدار میانگین مناسب آن  $1/106$  است. کمیت  $\bar{C}_{p,\text{poly}} = d\bar{H}/dT$  ظرفیت گرمایی برای گازی است

که در آن تعادل بین حالت‌های کوانتومی مختلف، درحین تغییر دما، برقرار است و  $\bar{C}_{p,mon}$  ظرفیت گرمایی گاز است که در آن گذار بین حالت‌های کوانتومی مختلف مجاز نیست، به طوری که  $\bar{C}_{p,mon} = \frac{5}{7}R$ . هنگامی که مقدار عددی  $A = ۱,۱۰۶$  در معادله (۴۱-۴.۱۹) قرار داده شود، نتیجه می‌شود:

$$\frac{k_{poly}}{k_{mon}} = ۰,۱۱۵ + ۰,۳۵۴ \left( \frac{\bar{C}_{p,poly}}{R} \right) = ۰,۴۶۹ + ۰,۳۵۴ \left( \frac{\bar{C}_{V,poly}}{R} \right) \quad (۴۳-۴.۱۹)$$

که فرمول توصیه شده توسط هیرشفلدر است.<sup>۷</sup> اگرچه پیش‌بینی‌های معادله (۴۳-۴.۱۹) چندان بهتر از فرمول قدیمی اویکن نیستند، معادله بالا دست‌کم سبب می‌شود که نقش درجات آزادی داخلی در رسانش گرما کم‌تر حس شود.<sup>۸</sup>

### ۵.۱۹ تحلیل ابعادی معادله‌های تغییر برای مخلوط‌های دوتایی

در این بخش معادله‌های تغییر خلاصه شده در بخش ۲.۱۹ را، با استفاده از حالت‌های خاص معادله‌های شار در بخش ۳.۱۹، از لحاظ ابعادی تحلیل می‌کنیم. این بحث موازی با بحث بخش ۵.۱۱ است و همان اهداف را نیز دنبال می‌کند: شناسایی پارامترهای بدون بُعد کنترل‌کننده مسئله‌های انتقال جرم، و ایجاد آشنایی مقدماتی با روابط همبستگی انتقال جرم فصل ۲۲.

یک بار دیگر بحث خود را اصولاً به سیستم‌هایی با خواص فیزیکی ثابت محدود می‌کنیم. در این صورت معادله پیوستگی برای مخلوط صورت آشنای زیر را پیدا می‌کند:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (۱-۵.۱۹) \text{ پیوستگی:}$$

معادله حرکت را می‌توان به شیوه بوسینسک (نگاه کنید به بخش ۳.۱۱)، با قرار دادن معادله‌های (۲-۳.۱۹) و (۱-۵.۱۹) در معادله (۳-۲.۱۹)، و جایگزینی  $-\nabla p + \bar{\rho} \mathbf{g}$  با  $-\nabla P$  نوشت. در نتیجه برای سیالی نیوتونی با ویسکوزیته ثابت، داریم:

$$\bar{\rho} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla P - \bar{\rho} \mathbf{g} \bar{\beta} (T - \bar{T}) - \bar{\rho} \mathbf{g} \bar{\zeta} (\omega_A - \bar{\omega}_A) \quad (۲-۵.۱۹) \text{ حرکت:}$$

معادله انرژی، در غیاب واکنش‌های شیمیایی، اتلاف ویسکوز، و نیروهای خارجی غیراز گرانش، از معادله (و) جدول ۲-۱۹، همراه معادله (۳-۳.۱۹) به دست می‌آید. در استفاده از معادله اخیر، از انتقال نفوذی انرژی، نسبت به سرعت جرمی متوسط، چشم‌پوشی می‌کنیم. در صورت ثابت بودن رسانندگی گرمایی، نتیجه می‌شود:

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (۳-۵.۱۹) \text{ انرژی:}$$

که در آن  $\alpha = k / \bar{\rho} \bar{C}_p$  ضریب نفوذ گرمایی است. برای مخلوط‌های دوتایی بدون واکنش، با  $\rho$  و  $D_{AB}$  ثابت،

۷. برای آشنایی با نظریه کامل‌تر، که در آن تعادل بین حالت‌های کوانتومی مختلف فرض نمی‌شود، نگاه کنید به

J. O. Hirschfelder, *J. Chem. Phys.*, **26**, 274-281 (1957); see also D. Secrest and J. O. Hirschfelder, *Physics of Fluids*, **4**, 61-73 (1961).

۸. برای مقایسه این دو فرمول با داده‌های تجربی، به منبع زیر رجوع کنید

Reid, Prausnitz, and Poling, op. cit., p. 497.

فرمول هیرشفلدر در معادله (۱۵-۳.۹) گرایش به طبقه‌بندی مقادیر مشاهده شده برای رسانندگی در یک گروه دارد.

9. J. H. Ferziger and H. G. Kaper, *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*, North Holland, Amsterdam (1977), §11.2 and 3.

معادله (۱۴-۱.۱۹) صورت زیر را پیدا می‌کند:

$$\frac{D\omega_A}{Dt} = D_{AB}\nabla^2\omega_A \quad \text{پیوستگی A: (۴-۵.۱۹)}$$

با فرض‌های اختیارشده، تشابه بین معادله‌های (۳-۵.۱۹) و (۴) آشکار است.

حال کمیت‌های مرجع  $l$ ،  $v$ ، و  $P$  را که در بخش‌های ۷.۳ و ۵.۱۱ به‌کار رفتند، دماهای مرجع  $T_1$  و  $T_0$  در بخش ۵.۱۱، و کسرهای جرمی مرجع نظیر  $\omega_{A1}$  و  $\omega_{A0}$  را معرفی می‌کنیم. کمیت‌های بدون بُعدی که از آنها استفاده خواهیم کرد عبارت‌اند از:

$$\check{x} = \frac{x}{l} \quad \check{y} = \frac{y}{l} \quad \check{z} = \frac{z}{l} \quad \check{t} = \frac{v \cdot t}{l} \quad (۵-۵.۱۹)$$

$$\check{v} = \frac{v}{v} \quad \check{\nabla} = l \cdot \nabla \quad \frac{D}{D\check{t}} = \left(\frac{l}{v}\right) \frac{D}{Dt} \quad \check{P} = \frac{P - P_0}{\rho v^2} \quad (۶-۵.۱۹)$$

$$\check{T} = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad \check{\omega}_A = \frac{\omega_A - \omega_{A0}}{\omega_{A1} - \omega_{A0}} \quad (۷-۵.۱۹)$$

می‌دانیم که  $v$  سرعت جرمی متوسط مخلوط است. تشخیص این نکته مهم است که در بعضی مسائل بهتر است از متغیرهای بدون بُعد دیگری استفاده کنیم.

معادله‌های تغییر را، برحسب متغیرهای بدون بُعد بالا، می‌توان چنین نوشت:

$$(\check{\nabla} \cdot \check{v}) = 0 \quad \text{پیوستگی: (۸-۵.۱۹)}$$

$$\frac{D\check{v}}{D\check{t}} = \frac{1}{Re} \check{\nabla}^2 \check{v} - \check{\nabla} \check{P} - \frac{Gr}{Re^2} \frac{g}{g} (\check{T} - \check{T}_0) - \frac{Gr_{\omega}}{Re^2} \frac{g}{g} (\check{\omega}_A - \check{\omega}_{A0}) \quad \text{حرکت: (۹-۵.۱۹)}$$

$$\frac{D\check{T}}{D\check{t}} = \frac{1}{RePr} \check{\nabla}^2 \check{T} \quad \text{انرژی: (۱۰-۵.۱۹)}$$

$$\frac{D\check{\omega}_A}{D\check{t}} = \frac{1}{ReSc} \check{\nabla}^2 \check{\omega}_A \quad \text{پیوستگی A: (۱۱-۵.۱۹)}$$

اعداد رینولدز، پراتنل، و گراسهوف گرمایی در جدول ۱۵.۱۱ ارائه شدند. دو عدد دیگر جدیدند:

$$Sc = \left[ \left[ \frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right] \right] = \left[ \left[ \frac{\nu}{D_{AB}} \right] \right] = \text{عدد اشمیت} \quad (۱۲-۵.۱۹)$$

$$Gr_{\omega} = \left[ \left[ \frac{g \zeta (\omega_{A1} - \omega_{A0}) l^3}{\nu^2} \right] \right] = \text{عدد نفوذی گراسهوف} \quad (۱۳-۵.۱۹)$$

عدد اشمیت نسبت ضریب نفوذ اندازه حرکت به ضریب نفوذ جرم است و سهولت نسبی انتقال جرم و اندازه حرکت مولکولی را نشان می‌دهد. این عدد نظیر عدد پراتنل است که نسبت ضریب نفوذ اندازه حرکت به ضریب نفوذ گرمایی را نشان می‌دهد. عدد نفوذی گراسهوف به علت نیروی شناوری ناشی از ناهمگنی‌های غلظتی پدیدار می‌شود. حاصل ضرب‌های  $ReSc$  و  $RePr$  در معادله‌های (۱۰-۵.۱۹) و (۱۱) را، به ترتیب، اعداد پکلت،  $Pe'$  و  $Pe'_{AB}$  می‌نامند. تحلیل ابعادی مسئله‌های انتقال جرم با تحلیل ابعادی مسئله‌های انتقال گرما موازی است. این فن را با سه مثال نشان می‌دهیم: (۱) شباهت زیاد بین معادله‌های (۱۰-۵.۱۹) و (۱۱) حل بسیاری از مسئله‌های انتقال جرم را، از طریق قیاس با مسئله‌های انتقال گرمایی که قبلاً حل کردیم، امکان‌پذیر می‌کند؛ در مثال ۱۵.۱۹ از چنین قیاسی استفاده می‌شود، (۲) غالباً انتقال جرم مستلزم مصرف انرژی است، یا انرژی آزاد می‌کند، به طوری که باید انتقال جرم و گرما را، چنان‌که در مثال ۲-۵.۱۹ نشان داده شده است، به طور هم‌زمان در نظر گرفت، (۳) گاهی، مانند بسیاری از عملیات اختلاط در صنعت، نفوذ در انتقال جرم نقشی فرعی دارد و نیازی نیست که جزئیات آن در نظر گرفته شود؛ این وضعیت را در مثال ۳-۵.۱۹ نشان می‌دهیم.

سپس خواهیم دید که، درست مانند حالت انتقال گرما، استفاده از تحلیل ابعادی برای حل مسئله‌های عملی انتقال جرم، فنی خاص است. این فن معمولاً هنگامی بیش‌تر مفید واقع می‌شود که بتوان از آثار، دست‌کم، بعضی از نسبت‌های بدون بُعد متعدد چشم‌پوشی کرد. تخمین اهمیت نسبی گروه‌های بدون بُعد مربوطه مستلزم تجربه فراوان است.

### مثال ۱۹-۵

توزیع غلظت در اطراف استوانهٔ طویل

می‌خواهیم توزیع غلظت در اطراف یک استوانهٔ هم‌دمای بلند از جنس جامد فرار  $A$  را، که در جریان گازی از گونهٔ  $B$  غوطه‌ور است، پیش‌بینی کنیم؛ گاز  $B$  در جامد  $A$  انحلال‌ناپذیر است. این سیستم شبیه سیستمی است که در شکل ۱۵-۱۱ نشان داده شد، با این تفاوت که در این جا، به‌عوض انتقال گرما، انتقال جرم را بررسی می‌کنیم. فشار بخار جامد در مقایسه با فشار کل گاز کوچک است، به‌طوری‌که سیستم انتقال جرم عملاً هم‌دماست. آیا می‌توان از نتایج مثال ۱۵-۱۱ برای پیش‌بینی موردنظر استفاده کرد؟

حل

نتایج مثال ۱۵-۱۱ در صورتی قابل‌کاربردند که بتوان نشان داد توزیع‌های غلظت بدون بُعد تعریف‌شده در سیستم انتقال جرم، با توزیع‌های دما در سیستم انتقال گرما همانندند:

$$\tilde{\omega}_A(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \quad (14-5.19)$$

این برابری تحقق می‌یابد، هرگاه معادله‌های دیفرانسیل و شرایط مرزی برای دو سیستم را بتوان به‌صورتی یکسان نوشت. بنابراین کار را با انتخاب طول، سرعت، و فشار مرجع یکسان، مانند مثال ۱۵-۱۱، و تابع ترکیب نظیر، شروع می‌کنیم:  $\tilde{\omega}_A = (\omega_A - \omega_{A0}) / (\omega_{A\infty} - \omega_{A0})$ . در این جا  $\omega_{A0}$  کسر جرمی  $A$  در گاز مجاور فصل‌مشترک، و  $\omega_{A\infty}$  مقدار آن در نواحی دور از استوانه است. هم‌چنین مشخص می‌کنیم که  $\tilde{\omega}_A = \omega_{A0}$  به‌طوری‌که  $\tilde{\omega}_A = 0$ . بنابراین معادله‌های تغییر موردنیاز در این جا عبارت‌اند از: معادله‌های (۱۹-۵-۸، ۹، ۱۱). پس معادله‌های دیفرانسیل در این جا و در مسئلهٔ ۱۵-۱۱ نظیر یکدیگرند، و فقط در جملهٔ گرمایش ویسکوز در معادلهٔ (۱۱-۵-۳) تفاوت دارند. در مورد شرایط مرزی، در مسئلهٔ فعلی داریم:

$$(15-5.19) \text{ شرط مرزی ۱: وقتی } \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \rightarrow \infty, \text{ داریم } \delta_x \rightarrow \tilde{v} \text{ و } \tilde{\omega}_A \rightarrow 1$$

$$(16-5.19) \text{ شرط مرزی ۲: در } \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \frac{1}{\tilde{r}} \text{ داریم } \tilde{\omega}_A \frac{1}{\text{ReSc}} \frac{(\omega_{A0} - \omega_{A\infty})}{(1 - \omega_{A0})} \tilde{\nabla} \tilde{\omega}_A \text{ و } \tilde{\omega}_A = 0$$

$$(17-5.19) \text{ شرط مرزی ۳: وقتی } \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \rightarrow \infty \text{ و } \tilde{y} = 0 \text{ داریم } \tilde{P} \rightarrow 0$$

شرط مرزی مربوط به  $\tilde{v}$ ، که به‌کمک قانون اول فیک به‌دست آمد، نشان می‌دهد یک سرعت شعاعی فصل‌مشترکی وجود دارد که از تصعید  $A$  ناشی می‌شود.

اگر توصیف بالا را با توصیف مربوط به انتقال گرما در مثال ۱۵-۱۱ مقایسه کنیم، مشاهده می‌کنیم که جملهٔ اتلاف ویسکوز انتقال جرم مشابهی در معادلهٔ انرژی وجود ندارد و مؤلفهٔ سرعت شعاعی فصل‌مشترکی در شرایط مرزی معادلهٔ (۱۹-۵-۱۶) نیز همتایی در انتقال گرما ندارد. اما این توصیف‌ها از جنبه‌های دیگر شبیه‌اند و در آن‌ها  $\tilde{\omega}_A$ ،  $\text{Sc}$ ، و  $\text{Gr}_\omega$  جای  $\tilde{T}$ ،  $\text{Pr}$ ، و  $\text{Gr}$  را گرفته‌اند.

وقتی عدد برینکمن به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد، اتلاف ویسکوز بی‌اهمیت می‌شود و جملهٔ معادلهٔ انرژی را می‌توان نادیده گرفت. صرف‌نظر کردن از جملهٔ عدد برینکمن مناسب است، مگر در مورد سیالات بسیار

ویسکوز با گرادیان‌های سرعت بالا، یا در لایه‌های مرزی فوق‌صوتی (بخش ۴.۱۰). به‌همین ترتیب، وقتی  $[(\omega_{A0} - \omega_{A\infty}) / (1 - \omega_{A0})] (1/\text{ReSc})$  بسیار کوچک باشد، می‌توان آن را برابر صفر گرفت، بدون این‌که خطای چشم‌گیری ایجاد شود. اگر این شرایط حدی برآورده شوند، رفتار مشابهی برای انتقال گرما و جرم مشاهده می‌شود. به بیان دقیق‌تر، غلظت بدون بُعد  $\tilde{\omega}_A$  همان وابستگی را به  $\tilde{x}$ ،  $\tilde{y}$ ،  $\tilde{z}$ ،  $\tilde{t}$ ،  $\text{Re}$ ،  $\text{Sc}$  و  $\text{Gr}_\omega$  خواهد داشت که دمای بدون بُعد  $\tilde{T}$  به  $\tilde{x}$ ،  $\tilde{y}$ ،  $\tilde{z}$ ،  $\tilde{t}$ ،  $\text{Pr}$ ،  $\text{Re}$  و  $\text{Gr}$  دارد. در این صورت توزیع‌های دما و غلظت به‌ازای  $\text{Re}$  مفروض یکسان خواهند بود، هرگاه  $\text{Gr}_\omega = \text{Gr}$  و  $\text{Sc} = \text{Pr}$ .

عدد گرمایی گراسهوف را، دست‌کم از لحاظ اصولی، می‌توان به‌دلخواه تغییر داد و لازمه آن تغییر  $T_0 - T_\infty$  است. بنابراین احتمال می‌رود که اعداد گراسهوف مطلوب را بتوان به‌دست آورد. اما با توجه به جدول‌های ۱.۹-۲ و ۱.۱۷-۱ مشاهده می‌شود که اعداد اشمیت برای گازها می‌توانند در گستره‌ای بسیار وسیع‌تر از اعداد پرانتل تغییر کنند. بنابراین به‌دست آوردن مدل گرمایی رضایت‌بخشی از فرایند انتقال جرم دشوار است، مگر در گستره محدود عدد اشمیت. مانع جدی دیگری که ممکن است در برابر رسیدن به رفتارهای مشابه برای انتقال گرما و جرم وجود داشته‌باشد، ناپیکناختی احتمالی دمای سطح است. گرمای تصعید را باید از گاز اطراف به‌دست آورد و این نیز به‌نوبه خود سبب می‌شود دمای جامد از گاز پایین‌تر بیاید. بنابراین باید انتقال گرما و انتقال جرم را به‌طور هم‌زمان در نظر گرفت. تحلیل بسیار ساده‌ای از انتقال هم‌زمان گرما و جرم در مثال بعد ارائه می‌شود.

### مثال ۵.۱۹-۲

تشکیل مه در هنگام رطوبت‌زدایی

هوای خیس را با گذراندن از لوله‌ای فزایی که توسط میرد مایع جوشان سرد می‌شود، به‌طور هم‌زمان خنک و رطوبت‌زدایی می‌کنند. دمای سطح لوله پایین‌تر از نقطه شبنم هوای ورودی است و بنابراین با فیلمی از آب پوشیده می‌شود. انتقال گرما به میرد از این لایه مایع چگالیده به‌اندازه کافی مؤثر هست که بتوان سطح آب آزاد را هم‌دما و در نقطه جوش میرد فرض کرد. این سیستم در شکل ۵.۱۹-۱ نشان داده شده‌است.

می‌خواهیم گستره دماهای میرد را طوری تعیین کنیم که خطر تشکیل مه وجود نداشته‌باشد. تشکیل مه نامطلوب است، زیرا بخش عمده قطره‌های کوچک آبی که مه را تشکیل می‌دهند، همراه هوا از لوله سرمایش بیرون می‌روند، مگر جمع‌کننده مخصوصی تعبیه شده‌باشد. مه هنگامی تشکیل می‌شود که هوا در نقطه‌ای از سیستم به‌حالت فوق‌اشباع برسد.

حل

فرض کنید گونه  $A$  هوا و گونه  $W$  آب باشد. در این‌جا بهتر است از متغیرهای بدون بُعد استفاده کنیم:

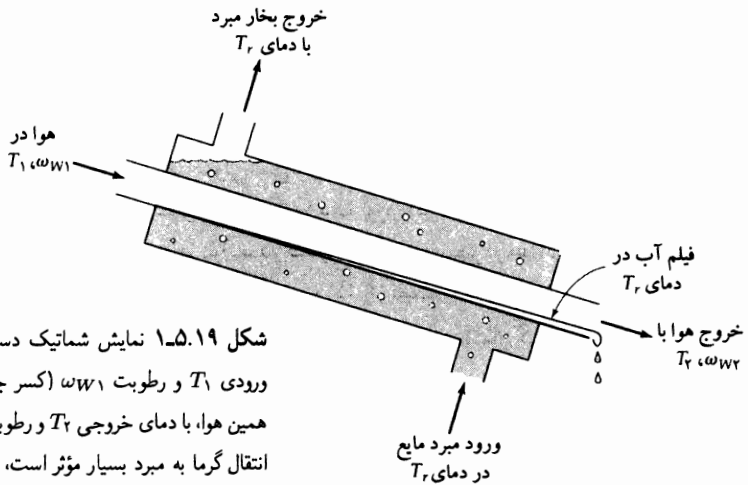
$$\tilde{T} = \frac{T - T_r}{T_1 - T_r}; \quad \tilde{\omega}_W = \frac{\omega_W - \omega_{Wr}}{\omega_{W1} - \omega_{Wr}} \quad (18-5.19)$$

اندیس‌ها را در شکل ۵.۱۹-۱ معرفی کرده‌ایم.

برای سیستم هوا-آب در دماهای معتدل، فرض ثابت بودن  $\rho$  و  $D_{AW}$  منطقی است و در آن هوا یک گونه فرض می‌شود. ظرفیت‌های گرمایی بخار آب و هوا باهم برابر نیستند، اما انتظار می‌رود انتقال نفوذی انرژی اندک باشد. بنابراین معادله‌های (۵.۱۹-۹ تا ۱۱) توصیفی قابل‌اعتماد و منطقی از فرایند رطوبت‌زدایی ارائه می‌دهند. شرایط مرزی لازم برای انتگرال‌گیری از این معادله‌ها شامل  $\tilde{T} = \tilde{\omega}_W = 1$  در ورودی لوله،  $\tilde{T} = \tilde{\omega}_W = 0$  در مرز گاز-مایع، و شرایط عدم لغزش و ورودی درمورد سرعت  $\tilde{v}$  است.

سپس می‌بینیم که توزیع‌های بدون بُعد رابطه زیر را باهم دارند:

$$\tilde{\omega}_W(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, Re, Gr_W, Gr, Sc, Pr) = \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, Re, Gr, Gr_W, Pr, Sc) \quad (19.5.19)$$



شکل ۱۹-۵-۱۹ نمایش شماتیک دستگاه رطوبت‌زدا. هوا با دمای ورودی  $T_1$  و رطوبت  $\omega_{W1}$  (کسر جرمی بخار آب) وارد می‌شود. همین هوا، با دمای خروجی  $T_2$  و رطوبت  $\omega_{W2}$  خارج می‌شود. چون انتقال گرما به مبرد بسیار مؤثر است، دما در فصل مشترک هوا-مایع چگالیده، به دمای مبرد،  $T_r$ ، بسیار نزدیک خواهد بود.

بنابراین  $\tilde{\omega}_W$  همان تابعی از شناسه خود است، که  $\tilde{T}$ ، به ترتیب دقیق گفته شده، هست. چون در حالت کلی  $Gr_W$  با  $Gr$ ، و  $Sc$  با  $Pr$  مساوی نیست، دو توزیع باهم یکی نیستند. این نتیجه کلی پیچیده‌تر از آن است که چندان به‌کار بیاید. اما، برای سیستم هوا-آب، در دماهای متوسط و فشارهای نزدیک به فشار جو،  $Sc$  تقریباً برابر  $Pr$  و حدود  $0.71$  است.

اگر فعلاً فرض کنیم که  $Pr$  و  $Sc$  مساوی‌اند، تحلیل ابعادی بسیار ساده‌تر می‌شود. در این وضعیت خاص، معادله‌های انرژی و پیوستگی گونه همانندند. چون شرایط مرزی  $\tilde{\omega}_W$  و  $\tilde{T}$  نیز همانندند، توزیع‌های دما و غلظت بدون بُعد نیز یکسان‌اند. شایان ذکر است که تساوی  $Gr$  و  $Gr_W$  لازم نیست. زیرا اعداد گراسهوف فقط از طریق سرعت  $v$  بر توزیع دما و غلظت اثر می‌گذارند که در هر دو معادله پیوستگی و انرژی به یک شیوه ظاهر می‌شود. بنابراین، با این فرض که  $Sc = Pr$ ، در هر نقطه از سیستم، داریم:

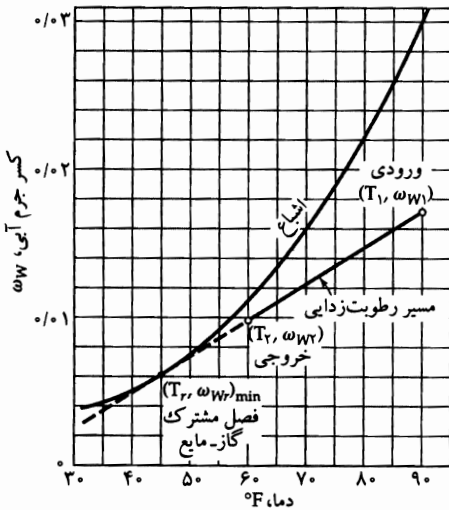
$$\tilde{\omega}_W = \tilde{T} \quad (20.5.19)$$

عبارت بالا، به نوبه خود به این معناست که هر زوج غلظت-دما در لوله، روی خطی مستقیم بین  $(\omega_{W1}, T_1)$  و  $(\omega_{W2}, T_2)$  در نمودار رطوبت-سنجی قرار دارد. این نکته به صورت ترسیمی روی شکل ۱۹-۵-۲۰، برای مجموعه‌ای از شرایط معرف نشان داده شده است. توجه کنید که  $(\omega_{W2}, T_2)$  باید روی منحنی اشباع واقع شود، زیرا تعادل بسیار خوب تقریب زده می‌شود.

نتیجه می‌شود که هرگاه خط مستقیم واصل بین  $(\omega_{W1}, T_1)$  و  $(\omega_{W2}, T_2)$  منحنی اشباع را قطع نکند، به تشکیل نمی‌شود. در این صورت پایین‌ترین دمای مبردی که نمی‌تواند به تولید کند، با نقطه تماس خط مستقیم گذرا از  $(\omega_{W1}, T_1)$  و منحنی اشباع نشان داده می‌شود.

شایان ذکر است که همه شرایط در طول خط ترسیم شده از  $(\omega_{W1}, T_1)$  ورودی تا  $(\omega_{W2}, T_2)$  حالت گازی را نشان می‌دهند، اگرچه شرایط کپه‌ای یا حجمی فقط از  $(\omega_{W1}, T_1)$  تا  $(\omega_{W2}, T_2)$  تغییر می‌کنند. بنابراین ممکن

است مقداری مه تشکیل شود، هرچند حالت اشباع در توده‌ گاز در جریان برقرار نشده باشد. برای هوای ورودی با دمای  $90^{\circ}\text{F}$  و رطوبت نسبی  $50\%$ ، حداقل دمای ایمن مبرد در حدود  $45^{\circ}\text{F}$  است. به علاوه باتوجه به شکل ۲-۵.۱۹ مشاهده می‌شود که ضرورت ندارد همه هوای خیس به نقطه شبنم خود برسد تا رطوبت‌زدایی شود. فقط کافی است هوا در سطح سرمایش به درجه اشباع برسد. شرایط توده‌ای خروجی  $(T_2, \omega_{W2})$ ، بسته به کارایی دستگاه مورد استفاده، می‌تواند در هر نقطه‌ای در طول مسیر رطوبت‌زدایی بین  $(\omega_{W1}, T_1)$  و  $(\omega_{W2}, T_2)$  باشد. محاسبات مبتنی بر تساوی فرضی Sc و Pr در سیستم هوا-آب، بسیار مفید واقع شده‌اند.



۲-۵.۱۹ مسیر معرف رطوبت‌زدایی. مسیر رطوبت‌زدایی که در این‌جا نشان داده شده با  $T_{r,min}$ ، پایین‌ترین دمای مبردی که عدم تشکیل مه را تضمین کند، متناظر است. مسیر رطوبت‌زدایی در این وضعیت با منحنی اشباع گذرا از نقطه  $(T_1, \omega_{W1})$  مماس است و شرایط مفروض هوای ورودی را نشان می‌دهد. مسیره‌ای محاسبه شده رطوبت‌زدایی برای دماهای پایین‌تر مبرد، منحنی اشباع را قطع خواهد کرد. در این صورت غلظت بخار آب از مقدار اشباع بالاتر می‌رود و تشکیل مه ممکن می‌شود.

به علاوه، با در نظر گرفتن مفهوم فیزیکی اعداد اشمیت و پرانتل، می‌توان دید که راهکار محاسبه‌ای که در بالا شرح داده شد، محتاطانه است. چون عدد اشمیت از عدد پرانتل کمی کوچک‌تر است، رطوبت‌زدایی به همین نسبت سریع‌تر از سرمایش انجام می‌شود. و زوج‌های غلظت-دما اندکی پایین‌تر از مسیر رطوبت‌زدایی نشان داده شده در شکل ۲-۵.۱۹ واقع می‌شوند. در هنگام چگالش بخارهای آلی از هوا، غالباً وضعیت برعکس روی می‌دهد. در این صورت اعداد اشمیت از اعداد پرانتل بزرگ‌تر می‌شوند و سرمایش سریع‌تر از چگالش رخ می‌دهد. در این حالت شرایط در بالای خط مستقیم شکل ۲-۵.۱۹ واقع می‌شود و خطر تشکیل مه افزایش می‌یابد.

### مثال ۲-۵.۱۹

آمیختن سیال‌های امتزاج‌پذیر

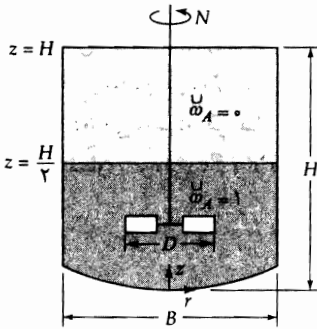
با استفاده از تحلیل ابعادی، صورت کلی رابطه همبستگی زمان لازم برای آمیختن دو سیال امتزاج‌پذیر در مخزن هم‌زده را به دست آورید. مخزنی از نوع نشان داده شده در شکل ۳-۵.۱۹ را در نظر بگیرید و فرض کنید که دو سیال و مخلوط‌های آن‌ها اساساً خواص فیزیکی یکسانی دارند.

حل

فرض می‌شود که رسیدن به «درجه آمیختگی مساوی» در هر دو عمل اختلاط به معنای رسیدن به توزیع غلظت بدون بُعد همانند در هر دو مورد است. یعنی، غلظت عنصر حل شده بدون بُعد  $n_A$  برای هر دو سیستم تابع یکسانی از  $(\tilde{x}, \theta, \tilde{z})$  خواهد بود، هرگاه درجه آمیختگی آن‌ها برابر باشد. این توزیع غلظت به گروه‌های بدون بُعدی که به تناسب



تعریف شده و در معادله‌های پایستگی مربوطه و شرایط مرزی آن‌ها، و در زمانی بدون بُعد ظاهر می‌شوند، وابسته است.



شکل ۳-۵.۱۹ آمیختن سیال‌های امتزاج‌پذیر. در زمان صفر، نیمه بالایی مخزن عاری از عنصر حل شده است و نیمه پایینی حاوی توزیع یکنواختی از عنصر حل شده با غلظت بدون بُعد واحد است و سیال بی حرکت است. پروانه را با آهنگ ثابت  $N$ ، به چرخش درمی‌آورند و این چرخش در همه زمان‌های بزرگتر از صفر ادامه دارد. مکان‌های داخل مخزن با مختصات  $r, \theta, z$  مشخص می‌شوند؛  $r$  در راستای شعاعی از محور پروانه، و  $z$  به طرف بالا، از کف مخزن، اندازه‌گیری می‌شود.

در این مسئله تعریف‌های زیر را برای متغیرهای بدون بُعد انتخاب می‌کنیم:

$$\check{r} = \frac{r}{D} \quad \check{z} = \frac{z}{D} \quad \check{v} = \frac{v}{ND} \quad \check{t} = Nt \quad \check{p} = \frac{p-p_0}{\rho N^2 D^2} \quad (21-5.19)$$

در این رابطه  $D$  قطر پروانه،  $N$  آهنگ چرخش پروانه برحسب دور در واحد زمان، و  $p_0$  فشار جو است. در این جا، به عوض کمیت  $\check{p}$  که در بخش ۷.۳ تعریف شد، از فشار بدون بُعد  $\check{P}$  استفاده می‌کنیم؛ فرمول‌بندی با  $\check{p}$  ساده‌تر است و نتایج مشابهی به بار می‌آورد. توجه کنید که  $\check{t}$  با تعداد کل چرخش‌های پروانه از آغاز اختلاط برابر است. معادله‌های پایستگی که این سیستم را توصیف می‌کنند، عبارت‌اند از: معادله‌های (۱۹-۵.۸، ۹، و ۱۱) با اعداد گراسهوف صفر. گروه‌های بدون بُعدی که در این معادله‌ها پدید می‌آیند عبارت‌اند از:  $Fr$ ،  $Re$ ، و  $Sc$ . شرایط مرزی عبارت‌اند از: صفر شدن  $v$  روی جدار مخزن و صفر شدن  $p$  روی سطح آزاد مایع. به علاوه باید شرایط اولیه را نیز مشخص کنیم:

$$(19-5.22) \text{ شرط اولیه ۱: در } \check{t} \leq 0, \check{\omega}_A = 0 \text{ به ازای } \check{z} \leq \frac{1}{\gamma} \frac{H}{D}$$

$$(19-5.23) \text{ شرط اولیه ۲: در } \check{t} \leq 0, \check{\omega}_A = 1 \text{ به ازای } \check{z} > \frac{1}{\gamma} \frac{H}{D}$$

$$(19-5.24) \text{ شرط اولیه ۳: در } \check{t} \leq 0, \check{v} = 0 \text{ به ازای } \check{z} \leq \frac{1}{\gamma} \frac{H}{D} \text{ و } \check{r} \leq \frac{1}{4} \frac{B}{D}$$

و شرط عدم لغزش روی پروانه (نگاه کنید به معادله (۳۴-۷.۳)).

سیس درمی‌یابیم که توزیع‌های غلظت توابع  $Fr$ ،  $Sc$ ،  $Re$ ، زمان بدون بُعد  $\check{t}$ ، شکل هندسی مخزن (از طریق  $H/D$  و  $B/D$ )، و نسبت‌های دو سیال است. یعنی:

$$(19-5.25) \text{ (شرایط اولیه، شکل هندسی، } \check{t}, Sc, Fr, Re) \quad \check{\omega}_A = f$$

در موارد متعدد امکان کاهش تعداد متغیرهایی که باید درباره آن‌ها تحقیق شود، وجود دارد.

مشاهده شده‌است که، اگر مخزن میانگیر مناسب داشته‌باشد، هیچ گردابه مهمی در آن پدید نمی‌آید؛ یعنی، سطح آزاد مایع عملاً تراز باقی می‌ماند. در چنین وضعیتی، یا در غیاب سطح آزاد مایع، چنان‌که در بخش ۷.۳ دیدیم، عدد فرود در توصیف سیستم ظاهر نمی‌شود.

۱. آرایش متداول و مؤثری از میانگیرها برای مخازن استوانه‌ای عمودی با پروانه‌های نصب‌شده در راستای محوری، مجموعه‌ای از چهار تسمه با فواصل مساوی است که در طول جدار مخزن نصب می‌شوند و سطوح تخت آن‌ها در صفحه‌هایی گذرا از محور مخزن قرار دارند و از بالا تا پایین مخزن و دست‌کم تا  $2/10$  فاصله از مرکز مخزن، ادامه می‌یابند.

هم‌چنین، معلوم شده‌است که در اغلب عملیات روی مایعات با ویسکوزیته پایین، مرحله محدودکننده آهنگ عبارت است از: ایجاد پراکنشی ریز از ذرات یک سیال در دیگری. در چنین پراکنشی، فرایندهای نفوذی در فواصل بسیار کوتاه انجام می‌شوند. در نتیجه، نفوذ مولکولی محدودکننده آهنگ نیست و عدد اشمیت (Sc) اهمیت چندانی ندارد. به علاوه، دریافته‌اند که اثر عدد رینولدز (Re) در اغلب موارد قابل چشم‌پوشی است. علت این است که بخش عمده عمل اختلاط در داخل مخزن انجام می‌شود که آثار ویسکوز در آن ناچیزند، نه در لایه مرزی مجاور سطوح مخزن و پروانه، که این آثار بزرگ‌اند.<sup>۲</sup>

در اغلب مجموعه‌های مخزن و پروانه متداول، عدد رینولدز (Re)، وقتی مقدار آن از حدود  $10^4$  بزرگ‌تر شود، اهمیت ندارد. تعدادی از محققان این رفتار را اثبات کرده‌اند.<sup>۳</sup>

بنابراین، پس از تجربه‌گرایی‌های گسترده، به نتیجه‌ای بسیار ساده می‌رسیم. وقتی همه فرض‌های بالا معتبر باشند، توزیع غلظت فقط به  $\tau$  بستگی خواهد داشت. بنابراین زمان بدون بُعد لازم برای ایجاد درجه اختلاط مطلوب برای سیستمی با شکل هندسی مفروض، ثابت است. به عبارت دیگر، تعداد کل چرخش‌های پروانه در حین فرایند اختلاط، مستقل از Re، Fr، Sc و اندازه مخزن، تعیین‌کننده درجه آمیختگی است، البته به این شرط که شکل هندسی مخزن‌ها و پروانه‌ها همانند باشد.

به همین دلایل، در مخزنی با میانگیرهای مناسب، توزیع سرعت بدون بُعد و بازده حجمی تلمبه‌زنی پروانه، تقریباً از عدد فرود (Fr) و عدد رینولدز (Re) مستقل‌اند، هرگاه  $Re > 10^4$ .

### پرسش‌های تشریحی

۱. معادله‌های تغییر فصل‌های ۳ و ۱۱ را چگونه باید برای مخلوط‌های واکنش‌دهنده اصلاح کرد؟
۲. در عبارت‌های شار ارائه شده در فصل‌های ۳ و ۱۱ چه اصلاحاتی باید انجام داد تا مخلوط‌های با واکنش شیمیایی را توصیف کنند؟
۳. تحت چه شرایطی  $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$  و  $(\nabla \cdot \mathbf{v}^*) = 0$ ؟
۴. معادله‌های (۱۵-۱۹، ۱۴ و ۱۵) از لحاظ فیزیکی هم‌ارزند. در کدام نوع مسائل یکی از آن‌ها بر دیگری ترجیح دارد؟
۵. هر جمله از معادله‌های جدول ۲-۳ از لحاظ فیزیکی تفسیر کنید.
۶. رسانندگی گرمایی هر مخلوط به صورت نسبت شارگرما به منفی گرادیان دما تعریف می‌شود، هرگاه همه شارهای نفوذی جرمی صفر باشند. این عبارت را برحسب معادله (۳-۱۹) تفسیر کنید.
۷. شباهت‌ها و تفاوت‌های بین انتقال گرما و انتقال جرم را تشریح کنید.
۸. همه مراحل تبدیل معادله (۴-۱۹) به معادله (۶-۱۹) را انجام دهید. چرا نتیجه دوم (تقریبی) اهمیت دارد؟

۲. حساس نبودن زمان اختلاط لازم به عدد رینولدز را می‌توان به طور شهودی از این نکته دریافت که وقتی Re بزرگ باشد، جمله  $\nabla^2 \bar{v}$  (1/Re) در معادله (۹-۱۹) در مقایسه با جمله شتاب  $D\bar{v}/Dt$  کوچک می‌شود. اما این نوع استدلال‌های شهودی خطرناک است و اثر Re همواره در همسایگی سطوح جامد اهمیت دارد. در این جا مقدار اختلاطی که در همسایگی بلافصل سطوح جامد رخ می‌دهد بسیار کم است و می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد.

حساس نبودن زمان اختلاط لازم به عدد اشمیت را می‌توان با توجه به معادله متوسط‌گیری شده پیوستگی در فصل ۲۱ مشاهده کرد. وقتی Re بزرگ باشد، شار جرمی تلاطمی بسیار بزرگ‌تر از شار جرمی ناشی از نفوذ مولکولی خواهد بود، مگر در همسایگی بلافصل سطوح جامد. 3. E. A. Fox and V. E. Gex, *AIChE Journal*, 2, 539-544 (1956); H. Kramers, G. M. Baars, and W. H. Knoll, *Chem. Eng Sci*, 2 35-42 (1953); J. G. van de Vusse, *Chem. Eng. Sci.*, 4, 178-200, 209-220 (1955).

۹. در مورد عبارت زیر معادله (۹-۴.۱۹)، مبنی بر این‌که آهنگ انتقال گرما مستقیماً از انتقال هم‌زمان جرم تأثیر می‌پذیرد، اما برعکس آن درست نیست، اظهار نظر کنید.

### مسئله‌ها

۱۹ الف. ۱. رطوبت‌زدایی هوا (شکل ۱-۴.۱۹). در سیستم مثال ۱-۴.۱۹، فرض کنید بخار  $H_2O$  و گاز ساکن هواست. شرایط زیر مفروض است (این شرایط حاکم بر تهویه مطبوع است): (۱)  $y = \delta$  در  $T = 80^\circ F$  و  $x_{H_2O} = 0.18$  در  $T = 50^\circ F$ ، داریم  $y = 0$ .

(الف) به‌ازای  $p = 1 \text{ atm}$ ، سمت راست معادله (۹-۴.۱۹) را محاسبه کنید.

(ب) شار گرمای رسانشی و نفوذی را در  $y = 0$  مقایسه کنید. مفهوم فیزیکی پاسخ شما چیست؟

جواب: (الف)  $1.7 \times 10^4$ .

۱۹ ب. ۱. تبخیر حالت‌پایا (شکل ۱-۲.۱۸). مسئله حل‌شده در بخش ۲.۱۸ را دوباره حل کنید و تبخیر مایع  $A$  در گاز  $B$  را بررسی کنید؛ کار را از معادله (۱۷-۱.۱۹) شروع کنید.

(الف) ابتدا، با استفاده از معادله (م) جدول ۱-۸.۱۷، هم‌چنین قانون فیک به‌صورت معادله (د) جدول ۱-۸.۱۷، عبارتی برای  $v^*$  به‌دست آورید.

(ب) نشان دهید که در این صورت معادله (۱۷-۱.۱۹) به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2 x_A}{dz^2} + \frac{1}{1-x_A} \left( \frac{dx_A}{dz} \right)^2 = 0 \quad (19.1-b)$$

(ج) این معادله را حل کنید و توزیع کسر مولی مفروض در معادله (۱۱-۲.۱۸) را به‌دست آورید.

۱۹ ب. ۲. جذب گاز با واکنش شیمیایی (شکل ۱-۴.۱۸). مسئله حل‌شده در بخش ۴.۱۸ را، با شروع از معادله (۱۶-۱.۱۹)، دوباره حل کنید. برای به‌دست آوردن معادله (۴-۴.۱۸) چه فرض‌هایی اختیار کردید؟

۱۹ ب. ۳. ضریب نفوذ وابسته به غلظت. لایه ساکنی از مایع  $B$  توسط صفحه‌های  $z = 0$  (جداری جامد) و  $z = b$  (فصل مشترک گاز-مایع) محدود شده‌است. غلظت  $A$  در این صفحه‌ها، به‌ترتیب،  $c_{A0}$  و  $c_{Ab}$  است. ضریب نفوذ  $D_{AB}$  تابع غلظت  $A$  است.

(الف) با شروع از معادله (۵-۱.۱۹) معادله دیفرانسیلی برای توزیع غلظت حالت‌پایا به‌دست آورید:

(ب) نشان دهید که توزیع غلظت از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\int_{c_{Ab}}^{c_{A0}} D_{AB} d\bar{c}_A}{\int_{c_{Ab}}^{c_{A0}} D_{AB} d\bar{c}_A} = \frac{z}{b} \quad (19.3-b)$$

(ج) نشان دهید که شار مولی در سطح جامد-مایع برابر است با:

$$N_{Az}|_{z=0} = \frac{1}{b} \int_{c_{Ab}}^{c_{A0}} D_{AB}(c_A) dc_A \quad (19.3-c)$$

(د) حال فرض کنید که ضریب نفوذ را می‌توان به صورت یک سری تیلر برحسب غلظت، بیان کرد:

$$D_{AB}(c_A) = \bar{D}_{AB} [1 + \beta_1(c_A - \bar{c}_A) + \beta_2(c_A - \bar{c}_A)^2 + \dots] \quad (19.3-3)$$

که در آن  $\bar{c}_A = \frac{1}{V}(c_{A0} + c_{Ab})$  و  $\bar{D}_{AB} = D_{AB}(\bar{c}_A)$  سپس نشان دهید که:

$$N_{Az}|_{z=0} = \frac{\bar{D}_{AB}}{b}(c_{A0} - c_{Ab}) [1 + \frac{1}{12}\beta_2(c_{A0} - c_{Ab})^2 + \dots] \quad (19.3-4)$$

(ه) در صورتی که ضریب نفوذ تابعی خطی از غلظت باشد، این نتیجه چگونه ساده می‌شود؟

۱۹.ب.۴ اکسایش سیلیسیم (شکل ۱۹.۴). تیغه‌ای از سیلیسیم را در معرض اکسیژن گازی (گونه A)، در فشار  $p$  قرار می‌دهند تا لایه‌ای از سیلیسیم دیوکسید (گونه B) تولید شود. این لایه از سطح  $z = 0$  که در آن اکسیژن با غلظت  $c_{A0} = Kp$  حل می‌شود، تا سطح  $z = \delta(t)$  که در آن اکسیژن و سیلیسیم واکنش مرتبه اول با ضریب آهنگ  $k''_1$  انجام می‌دهند، ادامه دارد. می‌خواهیم ضخامت  $\delta(t)$  لایه اکسید در حال رشد را پیش‌بینی کنیم. در این جا استفاده از روش حالت شبه پایا مناسب است، زیرا جهت واکنش بسیار آهسته پیش می‌رود. (الف) ابتدا معادله نفوذ، یعنی معادله (۱۸.۱۹) را با چشم‌پوشی از جمله  $\partial c_A / \partial t$  حل کنید و شرایط مرزی را به کار ببرید تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$c_A = c_{A0} - (c_{A0} - c_{A\delta}) \frac{z}{\delta} \quad (19.4-1)$$

که در آن غلظت  $c_{A\delta}$  در صفحه واکنش هنوز معلوم نیست.

(ب) سپس با استفاده از موازنه مولی حالت ناپایای  $O_2$  در ناحیه  $0 \leq z \leq \delta(t)$ ، به کمک فرمول لایب‌نیتس در بخش ج.۳، عبارت زیر را به دست آورید:

$$c_{A\delta} \frac{d\delta}{dt} = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz} - k''_1 c_{A\delta} \quad (19.4-2)$$

(ج) حال موازنه مولی حالت ناپایا را برای  $SiO_2$  در همان ناحیه بنویسید تا نتیجه شود:

$$+k''_1 c_{A\delta} = \frac{1}{V_B} \frac{d\delta}{dt} \quad (19.4-3)$$

(د) در معادله (۱۹.۴.۲)، مقدار  $d\delta/dt$  را از معادله (۱۹.۴.۳)، و مقدار  $dc_A/dz$  را از معادله (۱۹.۴.۱) محاسبه کنید. در نتیجه معادله‌ای برحسب  $c_{A\delta}$  به دست می‌آید:

$$\frac{k''_1 \delta \bar{V}_B}{D_{AB}} c_{A\delta}^2 + \left(1 + \frac{k''_1 \delta}{D_{AB}}\right) c_{A\delta} = c_{A0} \quad (19.4-4)$$

با قرار دادن مقادیر عددی در معادله (۱۹.۴.۴)، نشان دهید که جمله درجه دو را می‌توان با خیال راحت حذف کرد.<sup>۱</sup>

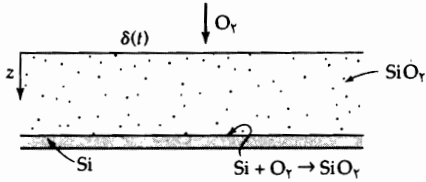
(ه) معادله‌های (۱۹.۴.۳) و (۱۹.۴.۴) را (بدون جمله درجه دو) باهم ترکیب کنید تا معادله دیفرانسیلی

۱. در این کتاب تعدادی مسئله که در حوزه میکروالکترونیک مطرح می‌شوند، تشریح شده‌است:

برحسب  $\delta(t)$  به دست آید. نشان دهید که این کار به عبارت زیر منتهی می‌شود:

$$\frac{\delta^2}{2D_{AB}} + \frac{\delta}{k_1''} = \bar{V}_{BC} c_{A0} t \quad (۱۹.۴-۵)$$

که با داده‌های تجربی در توافق است.<sup>۱</sup> این نتیجه را تفسیر کنید.



شکل ۱۹.ب.۴ اکسایش سیلیسیم.

۱۹.۵. معادله‌های ماکسول-استفان برای مخلوط‌های گازی چندجزئی. در معادله (۱۹.۱۷)، معادله‌های ماکسول-استفان برای شارهای جرمی در سیستم گازی چندجزئی ارائه شده‌است. نشان دهید که در سیستمی دوجزئی، این معادله‌ها به قانون اول فیک، معادله (۱۹.۱۷) ساده می‌شوند.

۱۹.۶. نفوذ و واکنش شیمیایی در یک مایع.

(الف) کره جامدی از ماده A در مایع B معلق است؛ A اندکی در B انحلال‌پذیر است و با آن واکنش شیمیایی مرتبه اول با ثابت آهنگ  $k_1'''$  انجام می‌دهد. در حالت پایا، نفوذ دقیقاً با واکنش شیمیایی در توازن است. نشان دهید که توزیع غلظت چنین است:

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \frac{R e^{-br/R}}{r e^{-b}} \quad (۱۹.۶-۱)$$

که در آن شعاع R،  $c_{A0}$  انحلال‌پذیری مولی A در B، و  $b^2 = k_1''' R^2 / D_{AB}$  است.

(ب) با استدلال حالت شبه‌پایا، نحوه محاسبه کاهش تدریجی قطر کره را، هم‌چنان‌که A حل می‌شود و واکنش انجام می‌دهد، نشان دهید. نشان دهید که شعاع کره از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sqrt{\frac{k_1'''}{D_{AB}}} (R - R_0) - \ln \frac{1 + \sqrt{k_1''' / D_{AB}} R}{1 + \sqrt{k_1''' / D_{AB}} R_0} = -\frac{k_1''' c_{A0} M_A}{\rho_{sph}} (t - t_0) \quad (۱۹.۶-۲)$$

که در آن  $R_0$  شعاع کره در زمان  $t_0$ ، و  $\rho_{sph}$  چگالی کره است.

۱۹.۷. صورت‌های مختلف معادله پیوستگی گونه.

(الف) در این فصل معادله پیوستگی گونه را به سه صورت مختلف ارائه دادیم: معادله (۱۹.۷-۱)، معادله (الف) در جدول ۱۹-۲، و معادله (ب) در جدول ۱۹-۳. نشان دهید که این سه معادله هم‌ارزند.

(ب) نحوه به دست آوردن معادله (۱۹.۷-۱۵) از معادله (۱۹.۷-۱۱) را نشان دهید.

۱۹.ج.۱. صورت دیگر معادله نفوذ دوتایی. در غیاب واکنش‌های شیمیایی، می‌توان با استفاده از معیار متفاوتی برای غلظت - موسوم به لگاریتم وزن مولکولی میانگین - معادله (۱۹.۷-۱۷) را، به جای  $\mathbf{v}^*$  برحسب  $\mathbf{v}$  نوشت:<sup>۲</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln M + (\mathbf{v} \cdot \nabla \ln M) = D_{AB} \nabla^2 \ln M \quad (۱۹.ج.۱-۱)$$

2. C. H. Bedingfield, Jr., and T. B. Drew, *Ind. Eng. Chem.*, **42**, 1164-1173 (1950); O. T. Hanna, *AIChE Journal*, **8** 278-279 (1962).

که در آن  $M = x_A M_A + x_B M_B$  (هشدار: حل این مسئله طولانی است).  
 حل معادله (۱۹-۱)، حتی برای فیلم گاز ساکن بخش ۲.۱۸، به علت ظاهر شدن چگالی جرمی متغیر  $\rho$  در معادله پیوستگی (معادله الف) جدول ۲.۱۹-۳، دشوار است.  
 ۱.۵۱۹ به دست آوردن معادله پیوستگی. در بخش ۱.۱۹ معادله پیوستگی گونه را، با نوشتن موازنه جرم روی حجم مستطیلی کوچک  $\Delta x \Delta y \Delta z$  ثابت در فضا، به دست آوردیم.  
 الف) این کار را برای جزء حجم کوچک  $V$  با شکل اختیاری و مرز هموار و ثابت  $S$  تکرار کنید. نشان دهید که موازنه جرم گونه را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_A dV = - \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_A) dS + \int_V r_A dV \quad (۱-۱.۵۱۹)$$

از قضیه دیورژانس گاوس استفاده کنید و معادله (۱.۱۹-۶) را به دست آورید.  
 ب) همین عملیات را با استفاده از ناحیه‌ای از سیال که در داخل سطحی محصور است که هر نقطه از آن با سرعت جرمی متوسط موضعی حرکت می‌کند، تکرار کنید.  
 ۲.۵۱۹ به دست آوردن معادله تغییر دما در سیستمی چندجزئی. معادله (و) جدول ۲.۱۹-۴ را از معادله (ه) به دست آورید. ترتیب عملیات زیر را پیشنهاد می‌کنیم:  
 الف) چون آنتالپی یک خاصیت ترمودینامیکی مقداری است، می‌توان نوشت:

$$H(m_1, m_2, m_3, \dots, m_N) = m \hat{H}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{N-1}) \quad (۱-۲.۵۱۹)$$

که در آن جرم‌های گونه‌های مختلف،  $m$  مجموع  $m_\alpha$ ،  $\omega_\alpha = m_\alpha / m$  کسرهای جرمی متناظرند. هم  $H$  و هم  $\hat{H}$  تابعی از  $T$  و  $p$ ، و هم چنین تابع ترکیب شیمیایی‌اند. از قاعده زنجیری مشتق‌گیری جزئی استفاده کنید و نشان دهید که:

$$(\alpha \neq N) \quad \left( \frac{\partial H}{\partial m_\alpha} \right)_{m_\gamma} = \sum_{\beta=1}^{N-1} \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial \omega_\beta} \right)_{\omega_\gamma} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{m_\beta}{m} \right) + \hat{H} \quad (۲-۲.۵۱۹)$$

$$(\alpha = N) \quad \left( \frac{\partial H}{\partial m_N} \right)_{m_\gamma} = \sum_{\beta=1}^{N-1} \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial \omega_\beta} \right)_{\omega_\gamma} \left( -\frac{m_\beta}{m} \right) + \hat{H} \quad (۳-۲.۵۱۹)$$

سپس از تفریق کردن، به‌ازای  $\alpha \neq N$ ، نتیجه می‌شود:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial m_\alpha} \right)_{m_\gamma} - \left( \frac{\partial H}{\partial m_N} \right)_{m_\gamma} = \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial \omega_\alpha} \right)_{\omega_\gamma} \quad (۴-۲.۵۱۹)$$

اندیس  $\omega_\gamma$  به‌معنای «ثابت نگه داشتن همه کسرهای جرمی دیگر» است.  
 ب) سمت چپ معادله (ه) را، با در نظر گرفتن آنتالپی در واحد حجم، می‌توان به‌صورت تابعی از  $T$ ،  $p$ ، و

(N - ۱) کسر جرمی نخست، بسط داد:

$$\rho \frac{D\hat{H}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial p} \right)_{T, \omega_\gamma} \frac{Dp}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right)_{p, \omega_\gamma} \frac{DT}{Dt} + \rho \sum_{\alpha=1}^{N-1} \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial \omega_\alpha} \right)_{p, T, \omega_\gamma} \frac{D\omega_\alpha}{Dt} \quad (5-2.19)$$

حال، نشان دهید که ضرایب مشتق‌های مادی را می‌توان به صورت زیر مشخص کرد:

$$\rho \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial p} \right)_{T, \omega_\gamma} = 1 - \left( \frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T} \right)_{p, \omega_\gamma} \quad (6-2.19)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right)_{p, \omega_\gamma} = \rho \hat{C}_p \quad (7-2.19)$$

ضریب  $\rho(D\omega_\alpha/Dt)$  قبلاً در معادله (۴-۲.۱۹) داده شد.

(ج) این ضرایب را در معادله (۵-۲.۱۹) جایگزین کنید و سپس از معادله (۱۴-۱.۱۹) برای حذف  $\rho(D\omega_\alpha/Dt)$  استفاده کنید و نشان دهید که  $(\partial H/\partial m_\alpha)_{p, T, m_\gamma}$  همان  $(\bar{H}_\alpha/M_\alpha)$  است. جمع روی  $\alpha$ ، که از ۱ تا  $N-1$  تغییر می‌کند، اکنون باید به صورت مناسب برای جمع زدن از ۱ تا  $N$  نوشته شود؛ برای این کار باید از معادله (ک) جدول ۱۷-۸.۱ و این نکته که  $\sum_\alpha r_\alpha = 0$ ، استفاده کنید.

(د) سپس نتایج (الف)، (ب)، و (ج) را با معادله (ه) ترکیب کنید تا معادله (و) حاصل شود.

۳.۱۹ جداسازی گاز از طریق اتمولیز یا «نفوذ روبشی». (شکل ۱۹-۳). وقتی دو گاز  $A$  و  $B$  وادار به نفوذ در گاز سوم  $C$  شوند،  $A$  و  $B$ ، به سبب اختلاف در آهنگ نفوذ، گرایش به جدا شدن دارند. این پدیده را نخستین بار هرترز<sup>۳</sup> و سپس مایر<sup>۴</sup> بررسی کردند. بندیکت و بوئاس<sup>۵</sup> جنبه‌های اقتصادی این فرایند را، مخصوصاً برای جداسازی ایزوتوپ‌ها، مطالعه کردند. کیز و پیگفورد<sup>۶</sup> هم در پی‌ریزی نظری و هم در آزمایش‌ها سهم داشتند. در آزمایش آن‌ها،  $C$  بخاری چگالش‌پذیر بود که می‌توانستند با پایین آوردن دما و مایع‌سازی، آن را از  $A$  و  $B$  جدا کنند. می‌خواهیم جزئیات نفوذ سه‌جزئی را که در لوله نفوذی به طول  $L$  انجام می‌شود، هنگامی که دستگاه در حالت پایا کار می‌کند، بررسی کنیم. عبارتی به دست آورید که غلظت‌های  $x_{A1}$  و  $x_{B1}$  را در سر ورودی لوله، به غلظت‌های  $x_{A2}$  و  $x_{B2}$  در سر خروج محصولات مربوط کند. این عبارت حاوی شارهای مولی سه‌گونه است که توسط آهنگ‌های اضافه شدن ماده در دو جریان ورودی کنترل می‌شوند.

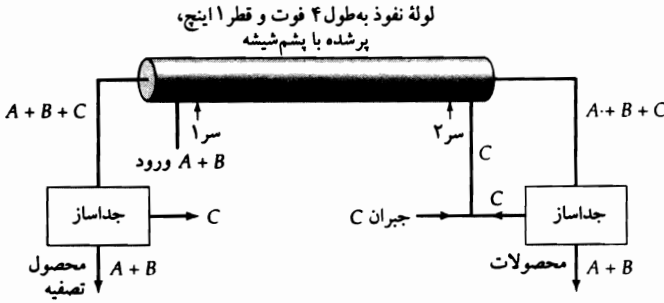
از نمادگذاری زیر برای کمیت‌های بدون بُعد استفاده کنید:  $\zeta = z/L$  برای فاصله در پایین‌دست لوله نسبت به سر ورودی؛  $r_A = D_{AB}/D_{AC}$  و  $r_B = D_{AB}/D_{BC}$  برای نسبت‌های ضرایب نفوذ؛ و  $\bar{v}_\alpha = N_{\alpha z}L/cD_{AB}$  (که در آن  $\alpha = A, B, C$ ) برای شارهای مولی

3. G. Hertz, *Zeits. f. Phys.*, **91**, 810-815 (1934).

4. G. G. Maier, *Mechanical Concentration of Gases*, U. S. Bureau of Mines Bulletin 431 (1940).

5. M. Benedict and A. Boas, *Chem. Eng. Prog.*, **47**, 51-62, 111-122 (1951).

6. J. J. Keys, Jr., and R. L. Pigford, *Chem. Eng. Sci.*, **6**, 215-226 (1957).



شکل ۱۹.د۳ آزمایش کیزبیگفورد  
برای مطالعه اتولیز.

(الف) نشان دهید که، برحسب این کمیت‌های بدون بُعد، معادله‌های ماکسول-استفان برای نفوذ عبارت‌اند از:

$$\frac{dx_A}{d\zeta} = \Upsilon_{AA}x_A + \Upsilon_{AB}x_B + \Upsilon_A \quad (۱-۳.د۱۹)$$

$$\frac{dx_B}{d\zeta} = \Upsilon_{BA}x_A + \Upsilon_{BB}x_B + \Upsilon_B \quad (۲-۳.د۱۹)$$

که در آن  $\Upsilon_{AA} = \nu_B + r_A(\nu_A + \nu_C)$ ،  $\Upsilon_{AB} = \nu_A(r_A - 1)$ ، و  $\Upsilon_A = -r_A\nu_A$  و بقیه کمیت‌ها با جابه‌جا کردن  $A$  و  $B$  به‌دست می‌آیند.

(ب) با استفاده از تبدیل‌های لاپلاس، معادله‌های (۱-۳.د۱۹ و ۲) را حل کنید و توزیع‌های غلظت  $A$  و  $B$  در لوله را به‌دست آورید.

(ج) نشان دهید که غلظت‌های پایانی باهم رابطه‌ای به‌صورت زیر دارند:

$$x_{A\pm} = \frac{X_A(x_{A1}, x_{B1}; \infty)}{p_+p_-} + \frac{X_A(x_{A1}, x_{B1}; p_+) \exp p_+ \zeta}{p_+(p_+ - p_-)} + \frac{X_A(x_{A1}, x_{B1}; p_-) \exp p_- \zeta}{p_-(p_- - p_+)} \quad (۳-۳.د۱۹)$$

که در آن:

$$p_{\pm} = \frac{1}{\nu} [(\Upsilon_{AA} + \Upsilon_{BB}) \pm \sqrt{(\Upsilon_{AA} - \Upsilon_{BB})^2 + 4\Upsilon_{AB}\Upsilon_{BA}}] \quad (۴-۳.د۱۹)$$

$$X_A(x_{A1}, x_{B1}, p) = p^{\nu} x_{A1} + p(\Upsilon_A - x_{A1}\Upsilon_{BB} + x_{B1}\Upsilon_{AB}) + (\Upsilon_{AB}\Upsilon_B - \Upsilon_{BB}\Upsilon_A) \quad (۵-۳.د۱۹)$$

می‌توان عبارت مشابهی هم برای  $x_{B\pm}$  به‌دست آورد. کیز و پیگفورد نتایج بیشتری را برای حالت‌های خاص ارائه داده‌اند.

۴.د۱۹ نفوذ حالت‌پایا از دیسک چرخان. دیسک بزرگی با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  در پهنه‌ای نامتناهی از مایع  $B$  می‌چرخد. سطح دیسک با ماده  $A$  پوشانده شده که اندکی در  $B$  انحلال‌پذیر است. مطلوب است تعیین آهنگ انحلال  $A$  در  $B$ . (جواب این مسئله را می‌توان در مورد دیسکی با شعاع متناهی  $R$  به‌کار برد و خطای حاصل قابل چشم‌پوشی است.) اصول دینامیک سیالاتی این مسئله را فون کارمان<sup>۸</sup> پی‌ریزی کرد و بعدها کوچران آن

7. V. G. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962), §11.

8. T. Von Kármán, *Zeits. f. angew. Math. u. Mech.*, 1, 244-247 (1921).



را تصحیح کرد.<sup>۹</sup> مشخص شد که مؤلفه‌های سرعت را، به جز در نزدیکی لبه، می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$v_r = \Omega r F(\zeta); \quad v_\theta = \Omega r G(\zeta); \quad v_z = \sqrt{\Omega \nu} H(\zeta) \quad (۱۹-۴-۱)$$

که در آن  $\zeta = z\sqrt{\Omega/\nu}$  توابع  $F$ ،  $G$ ، و  $H$  بسط‌هایی به صورت زیر دارند:

$$F = a\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2 - \frac{1}{3}b\zeta^3 - \frac{1}{12}b^2\zeta^4 - \dots \quad (۱۹-۴-۲)$$

$$G = 1 + b\zeta + \frac{1}{4}a\zeta^2 + \frac{1}{12}(ab - 1)\zeta^3 - \dots \quad (۱۹-۴-۳)$$

$$H = -a\zeta^2 + \frac{1}{3}\zeta^3 + \frac{1}{6}\zeta^4 + \dots \quad (۱۹-۴-۴)$$

که در آن  $a = 0.510$  و  $b = -0.616$  می‌دانیم که در حد، وقتی  $\zeta \rightarrow \infty$ ،  $\zeta \rightarrow 0$ ،  $H$  و  $F$  و  $G$ ،  $G'$  و  $F'$  به سمت صفر میل می‌کنند. به علاوه می‌دانیم که ضخامت لایه مرزی، به جز در نزدیکی لبه دیسک، با  $\sqrt{\nu/\Omega}$  متناسب است.

معادله نفوذ، یعنی معادله (۱۹-۱-۱۶) با مؤلفه‌های سرعت معلوم را باید با شرایط مرزی زیر حل کرد:  $\rho_A = \rho_{A0}$  در  $z = 0$ ؛  $\rho_A \rightarrow 0$  وقتی  $z \rightarrow \infty$ ؛ و  $\partial\rho_A/\partial r = 0$  در  $r = 0$ . چون این مسئله خطی می‌تواند بیش از یک جواب داشته باشد، مشاهده می‌شود که عبارتی به صورت  $\rho_A(z)$  می‌توان یافت که در این معادله دیفرانسیل صدق کند و همه شرایط مرزی را ارضاء کند. بنابراین، جواب  $\rho_A$ ، در ناحیه مورد نظر، به مختص شعاعی وابسته نیست.

(الف) نشان دهید که در حالت پایا، از معادله (۱۹-۱-۱۶) نتیجه می‌شود:

$$H(\zeta) \frac{d\rho_A}{d\zeta} = \frac{1}{Sc} \frac{d^2\rho_A}{d\zeta^2} \quad (۱۹-۴-۵)$$

(ب) معادله (۱۹-۴-۵) را حل کنید تا، برای عدد اشمیت بزرگ، نتیجه شود:

$$\frac{\rho_A}{\rho_{A0}} = 1 - \frac{(\frac{1}{3}aSc)^{1/2}}{\Gamma(\frac{4}{3})} \int_0^\zeta \exp(-\frac{1}{3}aSc\bar{\zeta}^2) d\bar{\zeta} \quad (۱۹-۴-۶)$$

(ج) نشان دهید که شار جرمی در سطح دیسک، برای عدد اشمیت بزرگ، برابر است با:

$$j_{Az}|_{z=0} = 0.620 \frac{\rho_{A0} D_{AB}^{1/2} \Omega^{1/2}}{\nu^{1/6}} \quad (۱۹-۴-۷)$$

بدیهی است که می‌توانستیم در بسط سری از جمله‌های مرتبه بالاتر برای  $H$  استفاده کنیم و گستره عدد اشمیت را توسعه دهیم.<sup>۱۰</sup> از این سیستم در بررسی حذف بهنیک اسید جامد از سطوح فولاد زنگ‌نزن استفاده کرده‌اند.<sup>۱۱</sup>

9. W. G. Cochran, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **30**, 365-375 (1934).

10. D. Schuhmann, *Physicochemical Hydrodynamics (V. G. Levich Festschrift)*, Vol. 1 (D. B. Spalding, ed.), Advance Publications Ltd., London (1977), pp. 445-459, see also K.-T. Liu and W. E. Stewart, *Intl. Jnl. Heat and Mass Trf.*, **15**, 187-189 (1972).

11. C. S. Grant, A. T. Perka, W. D. Thomas, and R. Caton, *AIChE Journal*, **42**, 1465-1476 (1996).

## فصل ۲۰

### توزیع غلظت با بیش از یک متغیر مستقل

۱.۲۰ نفوذ وابسته به زمان

۲.۲۰ انتقال حالت پایا در لایه‌های مرزی دوتایی

۳.۲۰ نظریه لایه مرزی دوتایی برای جریان در اطراف اجسام

۴.۲۰ انتقال جرم لایه مرزی با حرکت فصل مشترکی پیچیده

۵.۲۰ پراکنش تیلر در جریان آرام در لوله

اغلب مسئله‌های نفوذ که در دو فصل گذشته شرح داده شدند، به معادله‌های دیفرانسیل عادی برای توزیع غلظت منتهی شدند. در این فصل از معادله‌های کلی فصل ۱۹ برای طرح و حل چند مسئله نفوذ استفاده می‌کنیم که به معادله‌های دیفرانسیل جزئی منتهی می‌شوند.

بسیاری از مسئله‌های نفوذ را می‌توان صرفاً با یافتن جواب‌های معادله‌های نظیر در انتقال گرما حل کرد. وقتی معادله‌های دیفرانسیل و شرایط مرزی و اولیه برای فرایند نفوذ دقیقاً همان صورتی را داشته باشند که در فرایند انتقال گرما دارند، آن‌گاه می‌توان از جواب مسئله انتقال گرما، با تغییر نمادگذاری، استفاده کرد. در جدول ۱-۲۰ سه معادله اصلی انتقال گرما را که در فصل ۱۲ به کار رفتند، همراه با نظایر آن‌ها در انتقال جرم، نشان داده‌ایم. بسیاری از جواب‌های معادله‌های غیرجریانی را می‌توان در تک‌نگاری‌های کارلسلاو، بیگر<sup>۱</sup> و کرانک<sup>۲</sup> یافت.

چون مسئله‌های نفوذ توصیف شده توسط معادله‌های جدول ۱-۲۰ نظیر معادله‌های فصل ۱۲ هستند، آن‌ها را به تفصیل شرح نمی‌دهیم. در عوض، بیش‌تر به مسئله‌هایی توجه می‌کنیم که شامل نفوذ همراه با واکنش شیمیایی، نفوذ با فصل مشترک متحرک، و نفوذ با انتقال جرم سریع‌اند.

در بخش ۱.۲۰ چند مسئله نفوذ وابسته به زمان را بررسی می‌کنیم. در بخش ۲.۲۰ چند مسئله لایه مرزی حالت پایا را مطرح می‌کنیم که شامل مخلوط‌های دوتایی‌اند. در پی آن تحلیل دو لایه مرزی برای سیستم‌های پیچیده‌تر مطرح می‌شود: نفوذ در جریان پایا در اطراف اجسام دلخواه در بخش ۳.۲۰، و نفوذ در جریان‌هایی با حرکت فصل مشترکی پیچیده

1. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959).

2. J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*, 2nd edition, Clarendon Press, Oxford (1975).

در بخش ۴.۲۰ مطرح می‌شود. سرانجام، در بخش ۵.۲۰، جواب مجانبی مسئله «پراکنش تیلر» را به دست می‌آوریم. جدول ۱۰.۲۰ قیاس بین صورت‌های خاص معادله‌های رسانش گرما و نفوذ.

فرآیند	نایجریان حالت ناپایا	جریان حالت پایا	نایجریان حالت پایا
رسانش گرما	محل ارائه جواب	بخش ۱.۱۲؛ جواب‌های دقیق	بخش ۲.۱۲؛ جواب‌های دقیق بخش ۴.۱۲؛ جواب‌های لایه مرزی
	معادله‌ها	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$	$(\mathbf{v} \cdot \nabla T) = \alpha \nabla^2 T$
	کاربردها	رسانش گرما در جامدات	رسانش گرما در جریان آرام تراکم‌ناپذیر
نفوذ	فرض‌ها	۱. مقدار ثابت $k$ ۲. $\mathbf{v} = 0$ ۳. حالت پایا	۱. مقدارهای ثابت $k, \rho$ ۲. بدون اتلاف ویسکوز ۳. حالت پایا
	معادله‌ها	$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 c_A$	$(\mathbf{v} \cdot \nabla c_A) = D_{AB} \nabla^2 c_A$
	کاربردها	نفوذ مقادیر ناچیزی از $A$ در $B$	نفوذ در جریان آرام (محلول‌های رقیق $A$ در $B$ )
نفوذ	فرض‌ها	۱. مقدارهای ثابت $D_{AB}, \rho$ ۲. $\mathbf{v} = 0$ ۳. بدون واکنش شیمیایی	۱. مقدارهای ثابت $D_{AB}, \rho$ ۲. حالت پایا ۳. بدون واکنش شیمیایی
	معادله‌ها	$D_{AB}, c = \text{ثابت}$ ۲. $\mathbf{v}^* = 0$ ۳. بدون واکنش شیمیایی	
	کاربردها	یا نفوذ متقابل هم‌مولی در گازهای با چگالی پایین	

### ۱۰.۲۰ نفوذ وابسته به زمان

در این بخش چهار مثال از نفوذ وابسته به زمان ارائه می‌دهیم. مثال اول با تبخیر مایعی فزائر سروکار دارد و مشتقات قانون دوم فیک را نشان می‌دهد که در آهنگ‌های انتقال جرم بالا با آن روبه‌رو می‌شویم. مثال‌های دوم و سوم با نفوذ حالت ناپایا، همراه با واکنش شیمیایی سروکار دارند. در مثال آخر نقش تغییرات مساحت فصل مشترکی را در نفوذ بررسی می‌کنیم. در مثال‌های ۱-۲، ۱-۲، ۲، ۴، از روش ترکیب متغیرها و در مثال ۳-۱.۲۰ از تبدیل‌های لاپلاس استفاده می‌کنیم.

## مثال ۱-۲۰

تبخیر حالت ناپایای یک مایع «مسئله آرنولد»

می‌خواهیم آهنگ تبخیر یک مایع فرار  $A$  در  $B$  خالص موجود در لوله‌ای به طول نامتناهی را پیش‌بینی کنیم. سطح مایع همواره در  $z = 0$  ثابت نگه داشته می‌شود. دما و فشار ثابت فرض می‌شوند و بخارهای  $A$  و  $B$  مخلوط گاز ایده‌آل را تشکیل می‌دهند. بنابراین چگالی  $c$  در سرتاسر فاز گازی ثابت است و  $D_{AB}$  را می‌توان ثابت فرض کرد. به علاوه فرض می‌شود که گونه  $B$  در مایع  $A$  انحلال‌ناپذیر است و سرعت متوسط مولی در فاز گازی به مختص شعاعی وابسته نیست.

حل

برای این سیستم، معادله پیوستگی مخلوط، یعنی معادله (۱۹-۱.۱۲) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial v_z^*}{\partial z} = 0 \quad (1-1.20)$$

که در آن مؤلفه  $z$  سرعت متوسط مولی است. با انتگرال‌گیری نسبت به  $z$  نتیجه می‌شود:

$$v_z^* = v_{z^0}^*(t) \quad (2-1.20)$$

در این جا و در هر جای دیگر این مسئله، اندیس «۰» نشان‌دهنده کمیتی است که در  $z = 0$  اندازه‌گیری شده است. طبق معادله (م) جدول ۸-۱۷، این سرعت را می‌توان برحسب شارهای مولی  $A$  و  $B$  نوشت، داریم:

$$v_z^* = \frac{N_{Az^0} + N_{Bz^0}}{c} \quad (3-1.20)$$

اما  $N_{Bz^0}$  صفر است، زیرا گونه  $B$  در مایع  $A$  انحلال‌ناپذیر است. با استفاده از معادله (د) جدول ۸-۱۷، سرانجام نتیجه می‌شود:

$$v_z^* = - \left. \frac{D_{AB}}{1 - x_{A^0}} \frac{\partial x_A}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (4-1.20)$$

که در آن  $x_{A^0}$  غلظت فاز گازی فصل‌مشترکی است که در این جا با فرض تعادل در فصل‌مشترک، محاسبه شده است. برای مخلوط گازی ایده‌آل، این مخلوط صرفاً فشار بخار  $A$  تقسیم بر فشار کل است.

بنابراین معادله پیوستگی (۱۹-۱.۱۷) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial x_A}{\partial t} - \left( \left. \frac{D_{AB}}{1 - x_{A^0}} \frac{\partial x_A}{\partial z} \right|_{z=0} \right) \frac{\partial x_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 x_A}{\partial z^2} \quad (5-1.20)$$

این معادله را باید با شرایط اولیه و مرزی زیر حل کرد:

$$x_A = 0 \quad \text{در } t = 0, \quad \text{داریم} \quad (6-1.20)$$

$$x_A = x_{A^0} \quad \text{در } z = 0, \quad \text{داریم} \quad (7-1.20)$$

$$x_A = 0 \quad \text{در } z = \infty, \quad \text{داریم} \quad (8-1.20)$$

می‌توانیم همان نوع ترکیب متغیرهای مورد استفاده در مثال ۱-۱.۴ را آزمایش کنیم؛ یعنی  $X = x_A/x_{A^0}$  و  $Z = z/\sqrt{4D_{AB}t}$ . اما چون معادله (۵-۱.۲۰) حاوی پارامتر  $x_{A^0}$  است، می‌توان انتظار داشت که  $X$  نه تنها به  $Z$  وابسته است، بلکه از لحاظ پارامتری، به  $x_{A^0}$  نیز وابسته باشد.

معادله (۵-۱.۲۰) را، برحسب این متغیرهای بدون بُعد، می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{d^2 X}{dZ^2} + 2(Z - \varphi) \frac{dX}{dZ} = 0 \quad (9-1.20)$$

در این جا کمیت:

$$\varphi(x_{A0}) = -\frac{1}{2} \frac{x_{A0}}{1 - x_{A0}} \frac{dX}{dZ} \Big|_{Z=0} \quad (10-1.20)$$

سرعت متوسط مولی بدون بُعد است،  $\varphi = v_z^* \sqrt{t/D_{AB}}$ ، چنان‌که با مقایسه معادله‌های (۱۰-۱.۲۰) و (۴-۱.۲۰) مشاهده می‌شود. اکنون شرایط اولیه و مرزی معادله‌های (۶-۱.۲۰ تا ۸) چنین نوشته می‌شود:

$$X = 1 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } Z = 0 \text{، داریم } \quad (11-1.20)$$

$$X = 0 \quad \text{شرط مرزی ۲ و شرط اولیه: در } Z = \infty \text{، داریم } \quad (12-1.20)$$

برای حل معادله (۹-۱.۲۰)، ابتدا در آن قرار می‌دهیم  $dX/dZ = Y$ . در نتیجه یک معادله دیفرانسیل مرتبه اولی برحسب  $Y$  به دست می‌آید که می‌توان آن را حل کرد و نتیجه گرفت که:

$$Y = C_1 \exp[-(Z - \varphi)^2] \equiv \frac{dX}{dZ} \quad (13-1.20)$$

با انتگرال‌گیری از این معادله نتیجه می‌شود:

$$X = C_1 \int_0^Z \exp[-(\bar{Z} - \varphi)^2] d\bar{Z} + C_2 \quad (14-1.20)$$

از ترکیب این نتیجه با معادله‌های (۱۱-۱.۲۰ و ۱۲)، نتیجه می‌شود:

$$X(Z) = 1 - \frac{\int_0^Z \exp[-(\bar{Z} - \varphi)^2] d\bar{Z}}{\int_0^\infty \exp[-(\bar{Z} - \varphi)^2] d\bar{Z}} = 1 - \frac{\int_{-\varphi}^{Z-\varphi} \exp(-W^2) dW}{\int_{-\varphi}^\infty \exp(-W^2) dW} \quad (15-1.20)$$

سپس از تعریف تابع خطا و بعضی از خواص این تابع، مخصوصاً  $\text{erf}\varphi = 1 - \text{erf}(-\varphi)$ ، نگاه کنید به بخش ج. ۶. استفاده می‌کنیم. در نتیجه عبارت نهایی زیر برای توزیع کسر مولی به دست می‌آید:

$$X(Z) = 1 - \frac{\text{erf}(Z - \varphi) + \text{erf}\varphi}{\text{erf}\infty + \text{erf}\varphi} = \frac{1 - \text{erf}(Z - \varphi)}{1 + \text{erf}\varphi} \quad (16-1.20)$$

برای به دست آوردن تابع  $\varphi(x_{A0})$ ، باید این توزیع کسر مولی را در معادله (۱۰-۱.۲۰) قرار دهیم. نتیجه می‌شود:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{x_{A0}}{1 - x_{A0}} \frac{\exp(-\varphi^2)}{1 + \text{erf}\varphi} \quad (17-1.20)$$

به جای حل این معادله برای به دست آوردن  $\varphi$  به صورت تابعی از  $x_{A0}$ ، آسان‌تر این است که  $x_{A0}$  را به صورت تابعی از  $\varphi$  به دست آوریم:

$$x_{A0} = \frac{1}{1 + [\sqrt{\pi}(1 + \text{erf}\varphi)\varphi \exp\varphi^2]^{-1}} \quad (18-1.20)$$

1. J. H. Arnold, *Trans, AIChE*, **40**, 361-378 (1944).

جروم هوارد آرنولد (۱۹۷۴-۱۹۰۷) در MIT، دانشگاه مینه‌سوتا، دانشگاه داکوتای شمالی، و دانشگاه آیووا تدریس کرد؛ او در خدمت شرکت نفت استاندارد اوایل کالیفرنیا (۱۹۴۸-۱۹۴۴) و مدیر ناحیه ترانزیتی کنتراکوستا (۱۹۶۰-۱۹۵۶) بود. هم‌چنین نگاه کنید به

V.-D. Dang and W. N. Gill, *AIChE Journal*, **16**, 793-802 (1970).

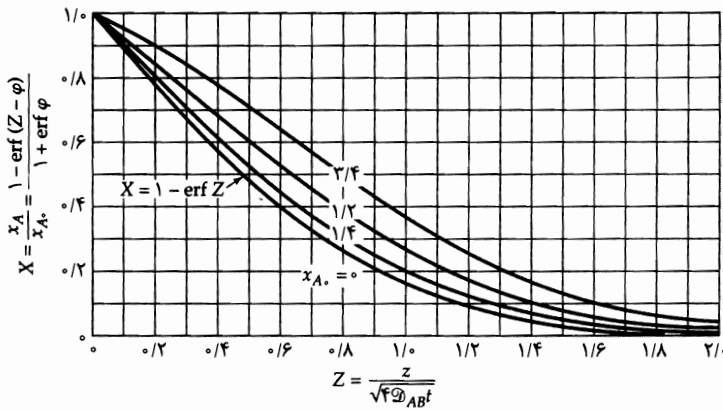
جدول کوچکی از مقادیر  $\varphi(x_{A0})$  به صورت جدول ۱-۱.۲۰ ارائه شده و توزیع های غلظت در شکل ۱-۱.۲۰ نشان داده شده است.

اکنون می توانیم آهنگ تولید بخار از سطحی به مساحت  $S$  را محاسبه کنیم. اگر  $V_A$  حجم  $A$  تولید شده بر اثر تبخیر تا زمان  $t$  باشد، آنگاه:

$$\frac{dV_A}{dt} = \frac{N_{Az0} S}{c} = S \varphi \sqrt{\frac{D_{AB}}{t}} \quad (۱۹-۱.۲۰)$$

جدول ۱-۱.۲۰ جدول  $\varphi(x_{A0})$  و  $\psi(x_{A0})$ .

$x_{A0}$	$\varphi$	$\psi = \varphi \sqrt{\pi}/x_{A0}$
۰٫۰۰	۰٫۱۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰
۰٫۲۵	۰٫۱۵۶۲	۱٫۱۰۸
۰٫۵۰	۰٫۳۵۷۸	۱٫۲۶۸
۰٫۷۵	۰٫۶۶۱۸	۱٫۵۶۴
۱٫۰۰	$\infty$	$\infty$



شکل ۱-۱.۲۰ توزیع غلظت در تبخیر وابسته به زمان، که نشان می دهد انحراف از قانون فیک، با افزایش فشاریت مایع تبخیر شونده، افزایش می یابد.

با انتگرال گیری نسبت به  $t$  نتیجه می شود:

$$V_A = S \varphi \sqrt{4 D_{AB} t} \quad (۲۰-۱.۲۰)$$

می توان از این رابطه برای محاسبه ضریب نفوذ از روی آهنگ تبخیر استفاده کرد (نگاه کنید به مسئله ۲۰ الف.۱). اکنون می توانیم اهمیت در نظر گرفتن انتقال همرفتی گونه  $A$  در لوله را ارزیابی کنیم. اگر برای تعیین  $X$  از قانون دوم فیک (معادله ۱۸-۱.۱۹) استفاده کرده بودیم، به نتیجه زیر می رسیدیم:

$$V_A^{فک} = S x_{A0} \sqrt{\frac{4 D_{AB} t}{\pi}} \quad (۲۱-۱.۲۰)$$

سپس معادله (۲۰-۱.۲۰) را چنین می نویسیم:

$$V_A = S x_{A0} \sqrt{\frac{4 D_{AB} t}{\pi}} \cdot \psi \quad (۲۲-۱.۲۰)$$

ضریب  $\psi = \varphi\sqrt{\pi}/x_{A0}$  که در جدول ۱۰-۲۰ آمده است، ضریبی برای تصحیح انحراف از نتایج قانون دوم فیک، بر اثر صفر نبودن سرعت متوسط مولی است. مشاهده می‌کنیم که این انحراف به‌ویژه هنگامی اهمیت می‌یابد که  $x_{A0}$  بزرگ باشد؛ یعنی برای مایعاتی با فشاریت بالا.

در تحلیل بالا سیستم هم‌دما فرض شد. در واقع فصل مشترک، به‌ویژه به‌ازای مقادیر بزرگ  $x_{A0}$ ، از طریق تبخیر خنک خواهد شد. با استفاده از لوله‌ای با قطر کم که از یک رسانای گرمایی خوب ساخته شده باشد، می‌توان این اثر را کاهش داد. اما برای کاربرد این تحلیل در مورد سایر سیستم‌های انتقال جرم، تحلیل حاضر را باید با گنجاندن جواب معادله انرژی تعمیم داد، به‌طوری‌که دمای فصل مشترکی و ترکیب‌ها را بتوان محاسبه کرد (نگاه کنید به مسئله ۲۰.ب.۲). این تحلیل را می‌توان تعمیم داد تا انتقال میان فازی هر دو گونه را، با هر نسبت شار مستقل از زمان  $N_{Az0}/N_{Bz0}$  و هر ترکیب گاز اولیه  $x_{A\infty}$  شامل شود. نمونه ساده‌ای از این سیستم واکنش تحت کنترل نفوذ  $A \rightarrow B$  روی سطح جامد کاتالیزی در  $z = 0$  است که در آن گرمای واکنش از طریق ماده جامد حذف می‌شود. توزیع غلظت تعمیم توزیعی است که با معادله (۱۶-۱۰-۲۰) بیان شد:

$$\Pi \equiv \frac{x_A - x_{A0}}{x_{A\infty} - x_{A0}} = \frac{\operatorname{erf}(Z - \varphi) + \operatorname{erf}\varphi}{1 + \operatorname{erf}\varphi} \quad (23-10-20)$$

اکنون شار بدون بُعد  $\varphi$  به  $x_{A0}$ ،  $x_{A\infty}$ ، و نسبت  $N_{Bz0}/N_{Az0}$  بستگی دارد:

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{(x_{A0} - x_{A\infty})(N_{Az0} + N_{Bz0})}{N_{Az0} - x_{A0}(N_{Az0} + N_{Bz0})} \frac{d\Pi}{dZ} \Big|_{Z=0} \quad (24-10-20)$$

رابطه بین شارهای فصل مشترکی و ترکیب‌های نهایی چنین است:

$$\frac{(x_{A0} - x_{A\infty})(N_{Az0} + N_{Bz0})}{N_{Az0} - x_{A0}(N_{Az0} + N_{Bz0})} = \sqrt{\pi}(1 + \operatorname{erf}\varphi)\varphi \exp\varphi^2 \quad (25-10-20)$$

معادله‌های (۱۶-۱۰-۲۰)، (۱۰)، و (۱۸) شامل حالت‌های خاص سه معادله آخرند. آخرین معادله نتیجه‌ای بسیار مهم در محاسبات انتقال جرم است (نگاه کنید به بخش ۸.۲۲).

### مثال ۲۰-۱۰-۲۰

جذب گاز با واکنش سریع<sup>۴،۳</sup>

گاز  $A$  توسط حلال مایع ساکن  $S$  جذب می‌شود که حاوی عنصر حل‌شده  $B$  است. گونه  $A$  با  $B$  واکنش فوری برگشت‌ناپذیر، (محصولات واکنش)  $aA + bB \rightarrow$  را انجام می‌دهد. می‌توان فرض کرد که قانون دوم فیک می‌تواند فرایندهای نفوذ را به خوبی توصیف کند، زیرا  $A$ ،  $B$ ، و محصولات واکنش با غلظت پایین در  $S$  موجودند. عبارت‌هایی برای بیان توزیع‌های غلظت به دست آورید.

2. W. E. Stewart, J. B. Angelo, and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **16**, 771-786 (1970),

این مثال و مثال بعد را به هرفت واداشته در جریان‌های سه‌بعدی، شامل سیستم‌های متلاطم، تعمیم داده‌اند.

3. T. K. Sherwood, R. L. Pigford, and C. R. Wilke, *Absorption and Extraction*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1975), Chapter 8. See also G. Astarita, *Mass Transfer with Chemical Reaction*, Elsevier, Amsterdam (1967), Chapter 5.

۴. برای آشنایی با مسائل مربوط به این مبحث با مرزهای متحرک و همراه با تغییر فاز نگاه کنید به

H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959). See also S. G. Bankoff, *Advances in Chemical Engineering*, Academic Press, New York (1964), Vol. 5, pp. 76-150; J. Crank, *Free and Moving Boundary Problems*, Oxford University Press (1984).

حل

به علت واکنش فوری  $A$  و  $B$ ، صفحه‌ای موازی با فصل مشترک مایع-بخار، در فاصله  $z_R$  از آن، وجود دارد که ناحیه فاقد  $A$  را از ناحیه فاقد  $B$  جدا می‌سازد. فاصله  $z_R$  تابعی از  $t$  است، زیرا با مصرف  $B$  در واکنش شیمیایی، مرز بین  $A$  و  $B$  عقب می‌رود.

بنابراین معادله‌های دیفرانسیل برحسب  $c_A$  و  $c_B$  عبارت‌اند از:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AS} \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \quad \text{به‌ازای } 0 \leq z \leq z_R(t) \quad (26-1.20)$$

$$\frac{\partial c_B}{\partial t} = D_{BS} \frac{\partial^2 c_B}{\partial z^2} \quad \text{به‌ازای } z_R(t) \leq z < \infty \quad (27-1.20)$$

این معادله‌ها را باید با شرایط اولیه و مرزی زیر حل کرد:

$$z > 0 \quad \text{شرط اولیه: در } t = 0 \text{ داریم } c_B = c_{B\infty} \quad (28-1.20)$$

$$z = 0 \quad \text{شرط مرزی ۱: در } z = 0 \text{ داریم } c_A = c_{A0} \quad (29-1.20)$$

$$z = z_R(t) \quad \text{شرط مرزی ۲، ۳: در } z = z_R(t) \text{ داریم } c_A = c_B = 0 \quad (30-1.20)$$

$$z = z_R(t) \quad \text{شرط مرزی ۴: در } z = z_R(t) \text{ داریم } -\frac{1}{a} D_{AS} \frac{\partial c_A}{\partial z} = +\frac{1}{b} D_{BS} \frac{\partial c_B}{\partial z} \quad (31-1.20)$$

$$z = \infty \quad \text{شرط مرزی ۵: در } z = \infty \text{ داریم } c_B = c_{B\infty} \quad (32-1.20)$$

در این جا  $c_{A0}$  غلظت فصل مشترکی  $A$  و  $c_{B\infty}$  غلظت اولیه  $B$  است. شرط مرزی چهارم شرط استوکیومتریکی است که براساس آن مول  $a$  از  $A$ ،  $b$  مول از  $B$  را مصرف می‌کند (نگاه کنید به مسئله ۲۰ ب.۲).

نبود طول مشخصه در این مسئله، و این که  $c_B = c_{B\infty}$  هر دو در  $t = 0$  و  $z = \infty$  امتحان کردن ترکیبی از متغیرها را مطرح می‌کند. مقایسه با مثال قبل (بدون جمله  $v_z^*$ ) جواب‌های آزمایشی زیر را به ذهن متبادر می‌کند:

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = C_1 + C_2 \operatorname{erf} \frac{z}{\sqrt{4D_{AS}t}} \quad \text{به‌ازای } 0 \leq z \leq z_R(t) \quad (33-1.20)$$

$$\frac{c_B}{c_{B\infty}} = C_3 + C_4 \operatorname{erf} \frac{z}{\sqrt{4D_{BS}t}} \quad \text{به‌ازای } z_R(t) \leq z < \infty \quad (34-1.20)$$

این توابع در معادله‌های دیفرانسیل صدق می‌کنند و اگر ثابت‌های انتگرال‌گیری  $C_1$  تا  $C_4$  را بتوان طوری انتخاب کرد که شرایط اولیه و مرزی ارضا شوند، جواب کامل مسئله به دست می‌آید.

با کاربرد شرط اولیه و سه شرط مرزی نخست، می‌توان ثابت‌های انتگرال‌گیری را برحسب  $z_R(t)$  محاسبه کرد و نوشت:

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = 1 - \frac{\operatorname{erf}(z/\sqrt{4D_{AS}t})}{\operatorname{erf}(z_R/\sqrt{4D_{AS}t})} \quad \text{به‌ازای } 0 \leq z \leq z_R(t) \quad (35-1.20)$$

$$\frac{c_B}{c_{B\infty}} = 1 - \frac{1 - \operatorname{erf}(z/\sqrt{4D_{BS}t})}{1 - \operatorname{erf}(z_R/\sqrt{4D_{BS}t})} \quad \text{به‌ازای } z_R(t) \leq z < \infty \quad (36-1.20)$$

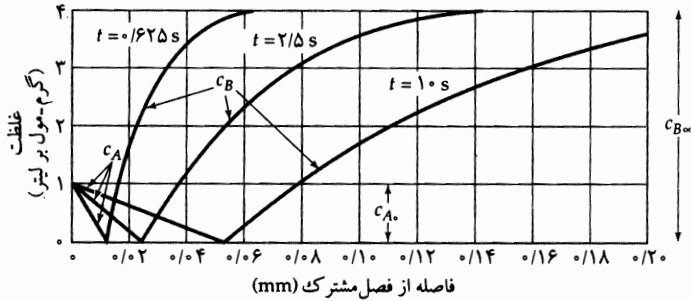
در این صورت شرط مرزی ۵ به‌طور خودکار ارضا می‌شود. سرانجام با قرار دادن این جواب‌ها در شرط مرزی ۴، معادله ضمنی زیر حاصل می‌شود که می‌توان  $z_R(t)$  را از آن به دست آورد:

$$1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\gamma}{D_{BS}}} = \frac{ac_{B\infty}}{bc_{A0}} \sqrt{\frac{D_{BS}}{D_{AS}}} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{\gamma}{D_{AS}}} \exp \left( \frac{\gamma}{D_{AS}} - \frac{\gamma}{D_{BS}} \right) \quad (37-1.20)$$



در این جا  $\gamma$  ثابتی معادل با  $z_R^2/4t$  است. بنابراین  $z_R$  با  $\sqrt{t}$  افزایش می یابد.

برای محاسبه توزیع های غلظت، ابتدا معادله (۳۷-۱.۲۰) را برای یافتن  $\sqrt{\gamma}$  حل می کنیم و سپس این مقدار را، به جای  $z_R/\sqrt{4t}$  در معادله های (۳۵-۱.۲۰ و ۳۶) قرار می دهیم. بعضی از توزیع های غلظت محاسبه شده (به ازای  $a = b$ ) در شکل ۲-۱.۲۰ ترسیم شده اند، تا آهنگ حرکت منطقه واکنش نشان داده شود.



شکل ۲-۱.۲۰ جذب گاز با واکنش شیمیایی سریع، با توزیع غلظت ارائه شده با معادله های (۳۵-۱.۲۰) تا (۳۷) (به ازای  $a = b$ ) این محاسبه برای  $D_{AS} = 3.9 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{hr}$  و  $D_{BS} = 1.95 \times 10^{-5} \text{ ft}^2/\text{hr}$  انجام شده است.

با استفاده از توزیع های غلظت می توان آهنگ انتقال جرم در فصل مشترک را محاسبه کرد:

$$N_{Az^0} = -D_{AS} \left. \frac{\partial c_A}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{c_{A^0}}{\text{erf} \sqrt{\gamma/D_{AS}}} \sqrt{\frac{D_{AS}}{\pi t}} \quad (38-1.20)$$

بنابراین آهنگ متوسط جذب تا زمان  $t$  برابر است با:

$$N_{Az^0, \text{avg}} = \frac{1}{t} \int_0^t N_{Az^0} dt = 2 \frac{c_{A^0}}{\text{erf} \sqrt{\gamma/D_{AS}}} \sqrt{\frac{D_{AS}}{\pi t}} \quad (39-1.20)$$

به این ترتیب آهنگ متوسط تا زمان  $t$  درست دو برابر آهنگ لحظه ای است.

### مثال ۳-۱.۲۰

۸.۷.۶.۵

نفوذ ناپایا با واکنش همگن مرتبه اول

هنگامی که گونه  $A$  در محیط مایع  $B$  نفوذ می کند و، طبق یک واکنش شبه مرتبه اول، با آن واکنش برگشت ناپذیر انجام می دهد ( $A + B \rightarrow C$ )، فرایند نفوذ به علاوه واکنش چنین توصیف می شود:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \omega_A) = D_{AB} \nabla^2 \omega_A - k_1''' \omega_A \quad (40-1.20)$$

5. P. V. Danckwerts, *Trans. Faraday Soc.*, **47**, 1014-1023 (1951).

پترویکتور دانکورت (۱۹۸۴-۱۹۱۶) در جریان حملات هوایی آلمان به انگلستان، مأمور انهدام بمب در لندن بود و در دوران جنگ جهانی دوم در یک میدان مین در اروپا زخمی شد؛ او در حین تدریس در امپریال کالج در لندن و دانشگاه کمبریج، روی توزیع زمان سکون، نفوذ و واکنش شیمیایی، و نقش نفوذ در جذب گاز، تحقیق کرد.

6. A. Giuliani & F. P. Foraboschi, *Atti. Acad. Sci. Inst. Bologna*, **9**, 1-16 (1962); F. P. Foraboschi, *ibid.*, **11**, 1-14 (1964); F. P. Foraboschi, *AIChE Journal*, **11**, 752-768 (1965).

7. E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **10**, 278-284 (1964).

8. W. E. Stewart, *Chem. Eng. Sci.*, **23**, 483-487 (1968); corrigenda, *ibid.*, **24**, 1189-1190 (1969).

در منبع بالا این رهیافت به جریان های وابسته به زمان با واکنش های همگن و ناهمگن مرتبه اول تعمیم داده شده است.

به شرط آنکه محلول  $A$  رقیق باشد و مقدار زیادی  $C$  تولید نشود. در این جا  $k'''$  ثابت آهنگ برای واکنش همگن است. معادله (۴۰-۱.۲۰) غالباً با شرایط اولیه و مرزی زیر:

$$\omega_A = \omega_{A1}(x, y, z) : t = 0 \quad (41-1.20)$$

$$\omega_A = \omega_{A0}(x, y, z) \quad (42-1.20)$$

و توزیع سرعت مستقل از زمان همراه است. برای چنین مسئله‌هایی نشان دهید که جواب به صورت زیر است:

$$\omega_A = g \exp(-k'''t) + \int_0^t \exp(-k'''t') \frac{\partial}{\partial t'} f(x, y, z, t') dt' \quad (43-1.20)$$

در این جا  $f$  جواب معادله‌های (۴۰-۱.۲۰) تا (۴۲)، با  $k''' = 0$  و  $\omega_{A1} = 0$  است، و  $g$  جواب با  $k''' = 0$  و  $\omega_{A0} = 0$  است.

حل

این مسئله برحسب  $\omega_A$  خطی است. بنابراین می‌توان با جمع آثار دو مسئله ساده‌تر، آن را حل کرد:

$$\omega_A = \omega_A^{(1)} + \omega_A^{(2)} \quad (44-1.20)$$

در این رابطه با معادله‌های زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{\partial \omega_A^{(1)}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \omega_A^{(1)}) = \mathcal{D}_{AB} \nabla^2 \omega_A^{(1)} - k''' \omega_A^{(1)} \quad \text{P.D.E (45-1.20)}$$

$$\omega_A^{(1)} = \omega_{A1}(x, y, z) \quad t = 0 \quad (46-1.20)$$

$$\omega_A^{(1)} = 0 \quad (47-1.20)$$

و  $\omega_A^{(2)}$  با روابط زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{\partial \omega_A^{(2)}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \omega_A^{(2)}) = \mathcal{D}_{AB} \nabla^2 \omega_A^{(2)} - k''' \omega_A^{(2)} \quad \text{P.D.E (48-1.20)}$$

$$\omega_A^{(2)} = 0 \quad t = 0 \quad (49-1.20)$$

$$\omega_A^{(2)} = \omega_{A0}(x, y, z) \quad (50-1.20)$$

حال کار خود را ادامه می‌دهیم تا این مسئله‌های فرعی را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنیم.

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله‌ها، نسبت به  $\omega_A^{(1)}$ ، نتیجه می‌شود:

$$(p + k''') \bar{\omega}_A^{(1)} - \omega_{A1}(x, y, z) + (\mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\omega}_A^{(1)}) = \mathcal{D}_{AB} \nabla^2 \bar{\omega}_A^{(1)} \quad \text{P.D.E (51-1.20)}$$

$$\bar{\omega}_A^{(1)} = 0 \quad (52-1.20)$$

حال، تابع  $g$  در معادله (۴۳-۱.۲۰) جواب به‌ازای  $\omega_A^{(1)}$  است و به‌جای  $k'''$  صفر قرار داده‌ایم. به‌همین ترتیب، تبدیل لاپلاس  $\bar{g}$  در معادله‌های (۵۱-۱.۲۰ و ۵۲)، وقتی  $p$  جایگزین  $k'''$  شود، صدق می‌کند:

$$\bar{\omega}_A^{(1)}(p, x, y, z) = \bar{g}(p + k''', x, y, z) \quad (53-1.20)$$

در نتیجه، با گرفتن تبدیل لاپلاس وارون، نتیجه می‌شود:

$$\omega_A^{(1)} = g \exp(-k'''t) \quad (54-1.20)$$

که بخش اول جواب است.

سیس، از معادله‌های (۵۵-۱.۲۰ تا ۴۸-۱.۲۰) تبدیل لاپلاس می‌گیریم، و داریم:

$$(p + k_1''')\bar{\omega}_A^{(2)} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\bar{\omega}_A^{(2)} = D_{AB}\nabla^2\bar{\omega}_A^{(2)} \quad \text{P.D.E} + \text{شرط اولیه:} \quad (55-1.20)$$

$$\bar{\omega}_A^{(2)} = \frac{1}{p}\omega_{A0}(x, y, z) \quad \text{شرط مرزی در سطوح:} \quad (56-1.20)$$

تبدیل لاپلاس  $\bar{f}$  همین دو معادله را، وقتی به جای  $k_1'''$  صفر گذاشته شود، ارضا می‌کند. یعنی، اگر اکنون به جای  $p$  از  $s$  به عنوان متغیر تبدیل استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$s\bar{f} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\bar{f} = D_{AB}\nabla^2\bar{f} \quad \text{P.D.E} + \text{شرط اولیه:} \quad (57-1.20)$$

$$\bar{f} = \frac{1}{s}\omega_{A0}(x, y, z) \quad \text{شرط مرزی در سطوح:} \quad (58-1.20)$$

مشاهده می‌کنیم که تابع  $s\bar{f}$  همان شرط مرزی را ارضا می‌کند که  $p\bar{\omega}_A^{(2)}$  ارضا می‌کرد و معادله‌های دیفرانسیل  $s\bar{f}$  و  $p\bar{\omega}_A^{(2)}$ ، وقتی  $s = p + k_1'''$  همانند می‌شوند. بنابراین:

$$p\bar{\omega}_A^{(2)}|_p = (s\bar{f})|_{s=p+k_1'''} \quad (59-1.20)$$

یا

$$\bar{\omega}_A^{(2)}(p, x, y, z) = \frac{p + k_1'''}{p}\bar{f}(p + k_1''', x, y, z) \quad (60-1.20)$$

سیس، با گرفتن تبدیل وارون، نتیجه می‌شود:

$$\omega_A^{(2)} = \int_0^t \exp(-k_1'''t') \frac{\partial}{\partial t'} f(x, y, z, t') dt' \quad (61-1.20)$$

که بخش دوم جواب است. با جمع کردن دو بخش جواب،  $\omega_A^{(1)}$  و  $\omega_A^{(2)}$ ، معادله (۴۳-۱.۲۰) مستقیماً به دست می‌آید. معادله (۴۳-۱.۲۰) وسیله‌ای برای پیش‌بینی توزیع غلظت در سیستم‌های واکنشی، با استفاده از محاسبات یا آزمایش‌های انجام‌شده روی سیستم‌های غیرواکنشی با شرایط جریان یکسان است. چندین تعمیم از این راه‌حل وجود دارد که شامل سیستم‌های<sup>۹</sup> چندجزئی جریان متلاطم،<sup>۱۰</sup> و شرایط مرزی کلی‌ترند.<sup>۹،۸،۷</sup>

### مثال ۲-۱.۲۰

تأثیر تغییر مساحت فصل‌مشرکی بر انتقال جرم در فصل‌مشرک<sup>۱۱،۱۰</sup>

در شکل ۳-۱.۲۰ توزیع غلظت برای نفوذ  $A$  از جداری کمی انحلال‌پذیر در بهنه نیمه‌نامتناهی مایع روی آن، به‌طور شماتیک نشان داده شده است. اگر چگالی و ضریب نفوذ ثابت باشد، آن‌گاه این مسئله نظیر انتقال جرمی مسئله تشریح‌شده در بخش‌های ۱.۴ و ۱.۱۲ است. نفوذ با روایت تک‌بندی قانون دوم فیک، یعنی معادله (۱۸-۱.۱۹)

9. Y.-H. Pao, *AIAA Journal*, **2**, 1550-1559 (1964); *Chem. Eng. Sci.*, **19**, 694-696 (1964); *ibid.*, **20**, 665-669 (1965).

10. D. Ilkovič, *Collec. Czechoslov. Chem. Comm.*, **6**, 498-513 (1934).

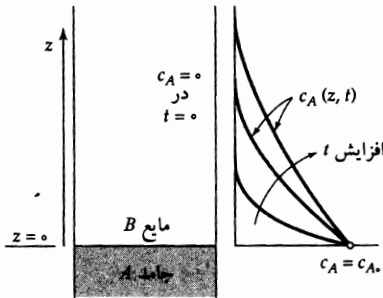
نتیجه نهایی این بخش توسط ایلکویچ و در ارتباط با کار روی الکتروود جیوه‌ای درحال سقوط به دست آمد.

11. V. G. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*, 2nd edition (English translation), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1962), 108.

این کتاب حاوی انبوهی از نتایج نظری و تجربی در مورد پدیده‌های نفوذ و جریان در مایعات و سیستم‌های دوفازی است.

توصیف می شود:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \quad (۶۲-۱.۲۰)$$



شکل ۳-۱.۲۰ نفوذ وابسته به زمان از جدار انحلال پذیر A به داخل ستونی نیمه نامتناهی از مایع B.

و شرط اولیه  $c_A = 0$  در سرتاسر مایع، و شرایط مرزی  $c_A = c_{A0}$  در فصل مشترک جامد-مایع و  $c_A = 0$  در فاصله نامتناهی از فصل مشترک نیز با آن همراه است. جواب این مسئله عبارت است از:

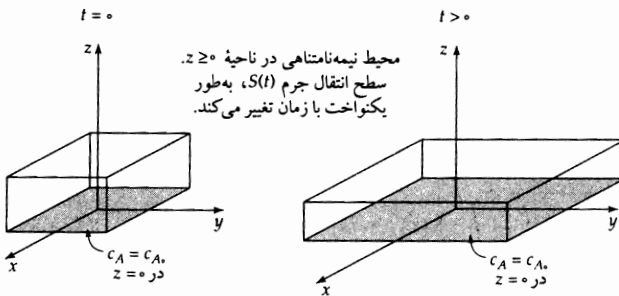
$$\frac{c_A}{c_{A0}} = 1 - \operatorname{erf} \frac{z}{\sqrt{4D_{AB}t}} \quad (۶۳-۱.۲۰)$$

که با استفاده از آن شار فصل مشترکی به دست می آید:

$$N_{Az0} = c_{A0} \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi t}} \quad (۶۴-۱.۲۰)$$

معادله (۶۳-۱.۲۰) نظیر انتقال جرمی معادله های (۱۵-۱.۴) و (۸-۱.۱۲) است.

در شکل ۴-۱.۲۰، مسئله مشابهی نشان داده شده است که در آن سطح فصل مشترک با گذشت زمان و پخش شدن مایع در جهت های  $x$  و  $y$  تغییر می کند، به طوری که سطح فصل مشترک تابعی از زمان،  $S(t)$  است. شرایط اولیه و مرزی برای غلظت ثابت نگه داشته می شوند. می خواهیم تابع  $c_A(z, t)$  را برای این سیستم به دست آوریم.



شکل ۴-۱.۲۰ نفوذ وابسته به زمان در فصل مشترک انتقال جرم  $S(t)$  که با زمان تغییر می کند. مایع B در ناحیه بالای صفحه  $z = 0$  توزیع سرعت  $v_x = +\frac{1}{4}ax$ ،  $v_y = +\frac{1}{4}ay$  و  $v_z = -az$  که در آن  $a = d \ln S/dt$

توزیع سرعت در این مسئله با سطح فصل مشترک متغیر، عبارت است از:  $v_x = +\frac{1}{4}ax$ ،  $v_y = +\frac{1}{4}ay$ ،  $v_z = -az$  که در آن  $a = d \ln S/dt$  معادله نفوذ برای این سیستم عبارت است از:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} - \left( \frac{d}{dt} \ln S \right) z \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \quad (۶۵-۱.۲۰)$$

چون معادله (۶۲-۱.۲۰) با استفاده از روش ترکیب متغیرها حل می‌شود، در این جا نیز از همین روش استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم:

$$\frac{c_A}{c_{A^0}} = g(\zeta) \quad \text{با} \quad \zeta = \frac{z}{\delta(t)} \quad (66-1.20)$$

با قرار دادن این جواب آزمایشی در معادله (۶۵-۱.۲۰)، نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2 g}{d\zeta^2} + 2 \left[ \frac{\delta^2}{2D_{AB}} \left( \frac{d}{dt} \ln(S\delta) \right) \right] \zeta \frac{dg}{d\zeta} = 0 \quad (67-1.20)$$

اگر عبارت داخل کروشه را برابر واحد بگیریم، آن‌گاه به دو هدف دست یافته‌ایم: (۱) معادله‌ای برای  $g$  به دست می‌آوریم که صورتی همانند معادله (۹-۱.۴) دارد که جواب آن معلوم است؛ (۲) معادله‌ای برای  $\delta$ ، به صورت تابعی از  $t$  به دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt} \ln(S\delta) = \frac{2D_{AB}}{\delta^2} \quad (68-1.20)$$

می‌توان از این معادله انتگرال گرفت؛ داریم:

$$\int_0^{S(t)\delta(t)} d(\overline{S\delta})^2 = 4D_{AB} \int_0^t S^2(\bar{t}) d\bar{t} \quad (69-1.20)$$

حد پایینی سمت چپ طوری انتخاب می‌شود که تضمین کند در سرتاسر سیال، ابتدا  $c_A = 0$ . این انتخاب به رابطه زیر منتهی می‌شود:

$$\delta(t) = \sqrt{4D_{AB} \int_0^t [S(\bar{t})/S(t)]^2 d\bar{t}} \quad (70-1.20)$$

و سرانجام توزیع غلظت چنین به دست می‌آید:

$$\frac{c_A}{c_{A^0}} = 1 - \operatorname{erf} \frac{z}{\sqrt{4D_{AB} \int_0^t [S(\bar{t})/S(t)]^2 d\bar{t}}} \quad (71-1.20)$$

سپس شار مولی فصل مشترکی با مشتق‌گیری از معادله (۷۱-۱.۲۰) به دست می‌آید و داریم:

$$N_{Az^0} = c_{A^0} \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi t}} \left( \frac{1}{t} \int_0^t [S(\bar{t})/S(t)]^2 d\bar{t} \right)^{-1/2} \quad (72-1.20)$$

تعداد کل مول‌های  $A$  که در زمان  $t$  از فصل مشترک و سطح  $S(t)$  عبور کرده‌اند با انتگرال‌گیری از معادله (۷۱-۱.۲۰)، چنین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} M_A(t) &= \int \int \int_0^\infty c_A dz dy dx = S(t) c_{A^0} \int_0^\infty (1 - \operatorname{erf}(z/\delta)) dz \\ &= S(t) c_{A^0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z/\delta}^\infty \int_{z/\delta}^\infty \exp(-\zeta^2) d\zeta dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= S(t)c_{A^0} \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \delta \int_0^\infty \exp(-\zeta^2) \zeta d\zeta \\
 &= S(t)c_{A^0} \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{4D_{AB}}{\pi}} \int_0^t [S(\bar{t})/S(t)]^\gamma d\bar{t} \\
 &= c_{A^0} \sqrt{\frac{4D_{AB}}{\pi}} \int_0^t [S(\bar{t})]^\gamma d\bar{t} \quad (۷۳-۱.۲۰)
 \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۷۲-۱.۲۰) می‌توان عبارتی هم‌ارز به دست آورد:

$$\begin{aligned}
 M_A(t) &= \int_0^t S(\bar{t}) N_{Az^0}(\bar{t}) d\bar{t} \\
 &= c_{A^0} \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi}} \int_0^t \frac{S(\bar{t})}{\sqrt{\int_0^{\bar{t}} [S(\bar{t})/S(\bar{t})]^\gamma d\bar{t}}} d\bar{t} \quad (۷۴-۱.۲۰)
 \end{aligned}$$

هر دو معادله (۷۳-۱.۲۱) و (۷۴-۱.۲۱) را می‌توان با تحقیق درباره درستی رابطه  $dM_A/dt = N_{Az^0}(t)S(t)$  بررسی کرد.

اگر  $S(t) = at^n$ ، که در آن  $a$  مقداری ثابت است، نتایج بالا به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$N_{Az^0}(t) = c_{A^0} \sqrt{\frac{(2n+1)D_{AB}}{\pi t}} \quad (۷۵-۱.۲۰)$$

$$M_A(t) = c_{A^0} a \sqrt{\frac{4D_{AB}t^{2n+1}}{(2n+1)\pi}} \quad (۷۶-۱.۲۰)$$

برای نفوذ از حباب گازی که حجم آن به‌طور خطی با زمان افزایش می‌یابد، در مایع اطراف، داریم  $n = \frac{1}{3}$  و  $2n+1 = \frac{5}{3}$ . البته این نتیجه‌ای تقریبی است که در آن از انحنا چشم‌پوشی شده‌است و بنابراین تنها برای زمان‌های تماس کوتاه معتبر است. برای فصل مشترک‌هایی با شکل‌های  $1/2$  اختیاری نتایج مشابهی حاصل شده‌است، و درستی این نتایج برای چندین سیستم آرام و متلاطم، با آزمایش تأیید شده‌است. <sup>۱۳،۲</sup>

## ۲.۲۰ انتقال حالت پایا در لایه‌های مرزی دوتایی

در بخش ۴.۱۲ کاربرد تحلیل لایه مرزی را برای جریان غیرهم‌دمای سیال‌های خالص شرح دادیم. معادله‌های پیوستگی، حرکت، و انرژی به صورت لایه مرزی ارائه و در بعضی وضعیت‌های ساده حل شدند. در این بخش مجموعه معادله‌های لایه مرزی را به مخلوط‌های واکنشی دوتایی تعمیم می‌دهیم و معادله پیوستگی گونه  $A$  را اضافه می‌کنیم، به طوری که بتوان توزیع غلظت را محاسبه کرد. سپس سه مثال را برای صفحه تخت حل می‌کنیم: یکی در مورد همرفت واداشته‌با واکنش همگن، یکی در مورد انتقال جرم سریع، و یکی در مورد انتقال جرم با آهنگ‌های پایین.

جریان دو بعدی پایای سیالی دوجرئی را حول جسمی غوطه‌ور، مانند جسم نشان داده شده در شکل ۱-۴.۴ در نظر بگیرید. در مجاورت سطح جامد، معادله‌های تغییر ارائه شده در بخش‌های ۲.۱۸ و ۳.۱۸ را می‌توان به صورت

12. J. B. Angelo, E. N. Lightfoot, and D. W. Howard, *AIChE Journal*, **12**, 751-760 (1966).

13. W. E. Stewart, in *Physicochemical Hydrodynamics* (D. B. Spalding, ed.), Advance Publications Ltd., London, Vol. 1 (1977), pp. 22-63.

زیر ساده کرد، به شرط آنکه  $\rho$ ،  $\mu$ ،  $k$ ،  $\hat{C}_p$ ، و  $D_{AB}$  اساساً ثابت باشند (مگر در جمله  $\rho g$ ) و از اتلاف ویسکوز چشم‌پوشی کرد:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (۱-۲.۲۰) \text{ پیوستگی.}$$

(۲-۲.۲۰) حرکت:

$$\rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \rho v_e \frac{dv_e}{dx} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \bar{\rho} g_x \bar{\beta} (T - T_\infty) + \bar{\rho} g_x \bar{\zeta} (\omega_A - \omega_{A\infty})$$

$$\rho \hat{C}_p \left( v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \left( \frac{\bar{H}_A}{M_A} - \frac{\bar{H}_B}{M_B} \right) r_A \quad (۳-۲.۲۰) \text{ انرژی:}$$

$$\rho \left( v_x \frac{\partial \omega_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega_A}{\partial y} \right) = \rho D_{AB} \frac{\partial^2 \omega_A}{\partial y^2} + r_A \quad (۴-۲.۲۰) \text{ پیوستگی } A:$$

معادله پیوستگی همانند معادله (۱-۴.۱۲) است. معادله حرکت، که از معادله (۳-۲.۱۹) به دست آمد، با معادله (۲-۴.۱۲)، تفاوت دارد، زیرا جمله نیروی شناوری دوتایی  $\bar{\rho} g_x \bar{\zeta} (\omega_A - \omega_{A\infty})$  به آن اضافه شده است. معادله انرژی، که از معادله (و) جدول ۲-۱۹ به دست آمد، با معادله (۳-۴.۱۲) تفاوت دارد زیرا جمله منبع گرمای شیمیایی  $-[(\bar{H}_A/M_A) - (\bar{H}_B/M_B)]r_A$  به آن اضافه شده است. معادله (۴-۲.۲۰) با قرار دادن  $\omega_A = \omega_A(x, y)$  و چشم‌پوشی از نفوذ در جهت  $x$ ، از معادله (۱۶-۱.۱۹) به دست می‌آید. معادله‌های کامل‌تری که برای لایه‌های مرزی با خواص متغیر و سرعت بالا معتبرند، در منابع دیگر یافت می‌شوند.<sup>۱</sup>

شرایط مرزی متداول در مورد  $v_x$  عبارت‌اند از: این که  $v_x = 0$  در سطح جامد، و  $v_x = v_e(x)$  در لبه خارجی لایه مرزی سرعتی. شرایط مرزی متداول در مورد  $T$  در معادله (۳-۲.۲۰) عبارت‌اند از این که  $T = T_0(x)$  در سطح جامد و  $T = T_\infty$  در لبه خارجی لایه مرزی گرمایی. شرایط مرزی متناظر مربوط به  $\omega_A$  در معادله (۴-۲.۲۰) عبارت‌اند از:  $\omega_A = \omega_{A0}(x)$  در سطح، و  $\omega_A = \omega_{A\infty}$  در لبه خارجی لایه مرزی نفوذی. بنابراین اکنون سه لایه مرزی را می‌توان در نظر گرفت که هر یک ضخامت خاص خود را دارد. در سیال‌هایی با خواص فیزیکی ثابت و اعداد پراتل و اشمیت بزرگ، لایه‌های مرزی گرمایی و نفوذی معمولاً در داخل لایه مرزی سرعتی واقع می‌شوند، اما به‌ازای  $Pr < 1$  و  $Sc < 1$  از آن فراتر می‌روند.

در سیستم‌های انتقال جرم، سرعت  $v_y$  در سطح معمولاً صفر نیست، اما به  $x$  بستگی دارد. بنابراین در  $y = 0$ ، قرار می‌دهیم  $v_y = v_0(x)$ . این شرط مرزی هنگامی معتبر است که شار جرمی خالصی بین سطح و جریان وجود داشته باشد، مانند عملیات ذوب کردن، خشک کردن، تصعید، احتراق جدار، یا انتقال سیال از طریق جداری متخلخل. بدیهی است که بعضی از این فرایندها فقط با سیال‌های خالص امکان‌پذیرند، اما به‌منظور ساده شدن کار، بررسی آن‌ها را به این فصل موکول کرده‌ایم (هم‌چنین برای آشنایی با تحلیل‌های مربوطه، نگاه کنید به بخش‌های ۳.۱۸ و ۸.۲۲). به‌کمک معادله پیوستگی، می‌توان از معادله‌های (۴-۲.۲۰ تا ۴) به‌طور صوری، با شرایط مرزی که گفته شد، انتگرال گرفت و مجموعه موازنه‌های لایه مرزی زیر را به دست آورد:

(۵-۲.۲۰) پیوستگی + حرکت:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho v_x (v_e - v_x) dy + \frac{dv_e}{dx} \int_0^\infty \rho (v_e - v_x) dy \\ &- \rho \int_0^\infty \rho g_x \bar{\beta} (T - T_\infty) dy - \int_0^\infty \rho g_x \bar{\zeta} (\omega_A - \omega_{A\infty}) dy + \rho v_0 v_e \end{aligned}$$

1. W. H. Dorrance, *Viscous Hypersonic Flow*, McGraw-Hill, New York (1962), and K. Stewartson, *The Theory of Laminar Boundary Layers in Compressible Fluids*, Oxford University Press (1964).

(۶-۲.۲۰) پیوستگی + انرژی:

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho v_x \hat{C}_p (T_{\infty} - T) dy - \int_0^{\infty} \left( \frac{\bar{H}_A}{M_A} - \frac{\bar{H}_B}{M_B} \right) r_A dy - \rho v_0 \hat{C}_p (T_{\infty} - T_0)$$

(۷-۲.۲۰) پیوستگی + پیوستگی A:

$$\rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho v_x (\omega_{A\infty} - \omega_A) dy + \int_0^{\infty} r_A dy - \rho v_0 (\omega_{A\infty} - \omega_{A0})$$

این معادله‌ها ادامه موازنه‌های فون کارمان در بخش‌های ۴.۴ و ۴.۱۲ شمرده می‌شوند و چنان‌که در مثال ۱-۲.۲۰ نشان داده شده‌است، می‌توان به همان ترتیب از آن‌ها استفاده کرد.

فنون لایه مرزی در پی ریزی نظریه پرواز با سرعت بالا، فرایندهای خودبه‌خودی، راکتورهای شیمیایی، و سیستم‌های انتقال جرم زیست‌شناختی ارزش به‌سزایی داشته‌اند. چند مسئله جالب که مطالعه شده‌اند، عبارت‌اند از: واکنش‌های شیمیایی در لایه‌های مرزی فوق‌صوتی<sup>۱</sup>، انتقال جرم از قطرک‌ها<sup>۲</sup>، قطبش الکتروود در همرفت واداشته<sup>۳</sup> و همرفت آزاد<sup>۴</sup>، نمک‌زدایی از آب به روش آسمز معکوس<sup>۵</sup>، و انتقال میان فازی در راکتورهای با بستر پرشده و ستون‌های تقطیر.<sup>۵</sup>

### مثال ۱-۲.۲۰

نفوذ و واکنش شیمیایی در جریان آرام هم‌دما روی صفحه تخت انحلال‌پذیر مسئله انتقال جرم نظیر مسئله تشریح‌شده در مثال ۱-۴.۱۲، جریان روی صفحه تخت حاوی گونه A است که اندکی در سیال B انحلال‌پذیر است. غلظت در سطح صفحه  $c_{A0}$ ، انحلال‌پذیری A در B و غلظت A در فواصل دور از صفحه  $c_{A\infty}$  است. در این مثال فرض می‌کنیم  $c_{A\infty} = 0$  و با فراهم آوردن امکان واکنش A با B طبق یک واکنش همگن مرتبه  $m$ ام، تناظر با مثال ۱-۴.۱۲ را نقض می‌کنیم، به طوری که  $R_A = -k_n''' c_A^n$  فرض می‌کنیم غلظت A حل شده پایین باشد. به طوری که خواص فیزیکی  $\rho$ ،  $\mu$ ، و  $D_{AB}$  عملاً در سراسر سیال ثابت بمانند. می‌خواهیم سیستم نشان‌داده‌شده در شکل ۱-۲.۲۰ را با استفاده از روش فون کارمان تحلیل کنیم.

حل

کار را با صورت‌های فرض‌شده برای توزیع‌های سرعت و غلظت آغاز می‌کنیم. برای به‌حداقل رساندن عملیات جبری و درعین حال نشان دادن روش کار، توابع ساده‌ای انتخاب می‌کنیم (بدیهی است که می‌توان از توابع واقعی‌تری نیز استفاده کرد):

$$\begin{cases} \frac{v_x}{v_{\infty}} = \frac{y}{\delta} & y \leq \delta(x) \\ \frac{v_x}{v_{\infty}} = 1 & y \geq \delta(x) \end{cases} \quad (۸-۲.۲۰)$$

2. V. G. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*, 2nd edition (English translation), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1962).

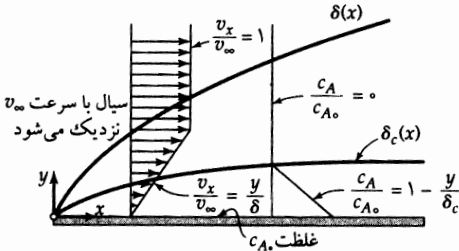
3. C. R. Wilke, C. W. Tobias, and M. Eisenberg, *Chem. Eng. Prog.*, **49**, 663-674 (1953).

4. W. N. Gill, D. Zeh, and C. Tien, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **4**, 433-439 (1965) *ibid.*, **5**, 367-370 (1966). See also P. L. T. Brian, *ibid.*, **4**, 439-445 (1965).

5. J. P. Sørensen and W. E. Stewart, *Chem. Eng. Sci.*, **29**, 833-837 (1974); W. E. Stewart and D. L. Weidman, *ibid.*, **45**, 2155-2160 (1990); T. C. Young and W. E. Stewart, *AIChE Journal*, **38**, 592-602, 1302 (1992).



$$\begin{cases} \frac{c_A}{c_{A_0}} = 1 - \frac{y}{\delta_c} & y \leq \delta_c(x) \\ \frac{c_A}{c_{A_0}} = 0 & y \geq \delta_c(x) \end{cases} \quad (۹-۲.۲۰)$$



شکل ۹-۲.۲۰ توزیع‌های فرضی سرعت و غلظت برای لایه مرزی آرام با واکنش شیمیایی همگن.

توجه کنید که برای لایه‌های مرزی سرعتی و غلظتی از ضخامت‌های مختلف  $\delta$  و  $\delta_c$  استفاده می‌کنیم. برای مربوط کردن این مسئله به مثال ۱۰-۴.۱۲، کمیت  $\Delta = \delta_c/\delta$  را معرفی می‌کنیم که در این مورد تابع  $x$  است، زیرا واکنش شیمیایی انجام می‌شود. بحث خود را به  $\Delta \leq 1$  محدود می‌کنیم، که به‌ازای آن لایه مرزی غلظتی کاملاً در داخل لایه مرزی سرعتی واقع می‌شود. به‌علاوه می‌توانیم از سرعت فصل مشترکی  $v_0 = v_y|_{y=0}$  چشم‌پوشی کنیم، زیرا در این جا، به‌علت کم بودن انحلال‌پذیری  $A$ ، کوچک است. با قرار دادن این عبارات در معادله‌های (۵-۲.۲۰ و ۷)، معادله‌های دیفرانسیل زیر:

$$\frac{\mu v_\infty}{\delta} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\rho} \rho v_\infty^2 \delta \right) \quad (۱۰-۲.۲۰)$$

$$-\frac{D_{AB} c_{A_0}}{\delta \Delta} = \frac{d}{dx} \left( -\frac{1}{\rho} c_{A_0} v_\infty \delta \Delta^2 \right) - \frac{k_n''' c_{A_0}^n \delta \Delta}{n+1} \quad (۱۱-۲.۲۰)$$

برای ضخامت‌های لایه مرزی  $\delta$  و  $\delta_c = \delta \Delta$  نتیجه می‌شود.

می‌توان به‌آسانی از معادله (۱۰-۲.۲۰) انتگرال گرفت، و داریم:

$$\delta = \sqrt{12 \frac{\nu x}{v_\infty}} \quad (۱۲-۲.۲۰)$$

با قرار دادن این نتیجه در معادله (۱۱-۲.۲۰) و ضرب کردن آن در  $-\delta \Delta / \nu c_{A_0}$ ، رابطه:

$$\frac{1}{Sc} = \frac{4}{3} x \frac{d}{dx} \Delta^2 + \Delta^2 + 12 \left[ \frac{k_n''' c_{A_0}^{n-1} x}{(n+1) v_\infty} \right] \Delta^2 \quad (۱۳-۲.۲۰)$$

به‌عنوان معادله دیفرانسیلی برحسب  $\Delta$  به‌دست می‌آید. بنابراین  $\Delta$  به عدد اشمیت،  $Sc = \mu / \rho D_{AB}$ ، و به مختص مکان بدون بُعد نشان داده‌شده در داخل کروشه، وابسته است. کمیت داخل کروشه  $1/(n+1)$  برابر عدد نخست دامکوهلر<sup>۶</sup> مبتنی بر فاصله  $x$  است.

هنگامی که واکنشی اتفاق نمی‌افتد،  $k_n''' = 0$  صفر است، و معادله (۱۳-۲.۲۰) به یک معادله خطی مرتبه اول

برحسب  $\Delta^2$  تبدیل می‌شود. وقتی از این معادله انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\Delta^2 = \frac{1}{Sc} + \frac{C}{x^{2/3}} \quad (۱۴-۲.۲۰)$$

6. G. Damköhler, *Zeits. f. Electrochemie*, **42**, 846-862 (1936); W. E. Stewart, *Chem. Eng. Prog. Symp. Series*, # 58, **61**, 16-27 (1965).

که در آن  $C$  ثابت انتگرال‌گیری است. چون وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $\Delta$  بی‌نهایت نمی‌شود، در غیاب واکنش شیمیایی (مقایسه کنید با معادله (۱۵-۴.۱۲))، داریم:

$$\Delta = Sc^{-1/3} \quad \Delta \leq 1 \quad (15-2.20)$$

یعنی، وقتی هیچ واکنشی انجام نشود و  $Sc > 1$ ، ضخامت‌های لایه مرزی غلظتی و سرعتی باهم نسبت ثابتی دارند که فقط به مقدار عدد اشمیت بستگی دارد.

وقتی واکنش آهسته‌ای رخ دهد (یا وقتی  $x$  کوچک باشد)، می‌توان یک رشته جواب برای معادله (۱۳-۲.۲۰) به‌دست آورد:

$$\Delta = Sc^{-1/3} (1 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots) \quad (16-2.20)$$

که در آن:

$$\xi = 12 \left[ \frac{k_n''' c_{A_0}^{n-1} x}{(n+1)v_\infty} \right] \quad (17-2.20)$$

با قرار دادن این عبارت در معادله (۱۳-۲.۲۰)، نتیجه می‌شود:

$$a_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{Sc}}, \quad a_2 = +\frac{3}{539} Sc^{2/3}, \quad \text{etc} \quad (18-2.20)$$

چون  $a_1$  منفی است، واکنش شیمیایی ضخامت لایه مرزی غلظتی را کاهش می‌دهد.

هنگامی که واکنشی سریع رخ می‌دهد (یا وقتی  $x$  خیلی بزرگ است)، یک رشته جواب برحسب  $1/\xi$  مناسب‌تر است. به‌ازای مقادیر بزرگ  $\xi$ ، فرض می‌کنیم که جمله غالب به‌صورت  $\xi^m$  (مقدار ثابت)  $\Delta$  است که در آن  $m < 0$ . با قرار دادن این تابع آزمایشی در معادله (۱۳-۲.۲۰)، نتیجه می‌شود:

$$\Delta = (Sc\xi)^{-1/2} \quad \xi \text{ به‌ازای مقادیر بزرگ} \quad (19-2.20)$$

با ترکیب معادله‌های (۱۹ و ۱۲-۲.۲۰)، مشاهده می‌کنیم که، در فواصل زیاد از لبه جلو، ضخامت لایه مرزی غلظتی  $\delta_c = \delta\Delta$  به مقداری ثابت و مستقل از  $v_\infty$  و  $\nu$  تبدیل می‌شود.

وقتی  $\Delta(\xi, Sc)$  معلوم باشد، می‌توان توزیع غلظت و آهنگ انتقال جرم در سطح را پیدا کرد. در منابع دیگر می‌توانید حل دقیق‌تر این مسئله را پیدا کنید.<sup>۷</sup>

### مثال ۲-۲.۲۰

همرفت واداشته از صفحه تخت با آهنگ انتقال جرم بالا

لایه مرزی روی صفحه تخت (نگاه کنید به شکل ۲-۲.۲۰) سیستمی مطلوب برای مطالعات انتقال گرما و انتقال جرم بوده‌است. در این مثال، تحلیلی از همرفت واداشته زیرصوتی با همین وضعیت هندسی و با آهنگ انتقال جرم بالا ارائه می‌دهیم و شباهت‌های موجود در آن را تشریح می‌کنیم. این مثال می‌تواند تعمیم مثال ۲-۴.۴ باشد.

7. P. L. Chambré and J. D. Young, *Physics of Fluids*, **1**, 48-54 (1958).

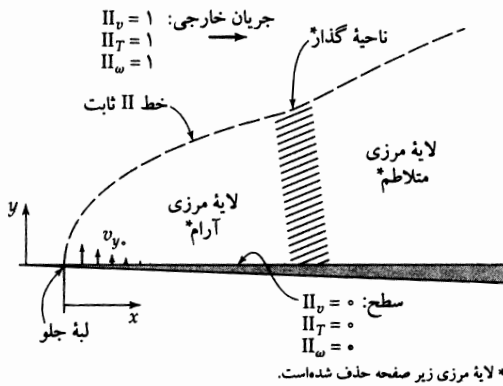
واکنش‌های سطحی کاتالیزی در لایه‌های مرزی، در منبع زیر بررسی شده‌اند:

P. L. Chambré and A. Acrivos, *J. Appl. Phys.*, **27**, 1322-1328 (1956).

حل

جریان دو بُعدی پایای غیرهمدمای سیالی دوجزئی را در سیستم شکل ۲۰-۲۰۲ در نظر بگیرید. خواص سیال  $\rho$ ،  $\mu$ ،  $C_p$ ،  $k$ ، و  $D_{AB}$  ثابت فرض می‌شوند، از اتلاف ویسکوز چشم‌پوشی می‌شود، و واکنش شیمیایی همگن رخ نمی‌دهد. معادله‌های لایه مرزی پرانتل برای ناحیه آرام عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 && \text{پیوستگی: (۲۰-۲۰۲۰)} \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} && \text{حرکت: (۲۱-۲۰۲۰)} \\ v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} && \text{انرژی: (۲۲-۲۰۲۰)} \\ v_x \frac{\partial \omega_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega_A}{\partial y} &= D_{AB} \frac{\partial^2 \omega_A}{\partial y^2} && \text{پیوستگی A: (۲۳-۲۰۲۰)} \end{aligned}$$



شکل ۲۰-۲۰۲ جریان مماسی در طول صفحه تخت نیمه‌نامتناهی لبه‌تیز، همراه با انتقال جرم به داخل جریان. گذار آرام-متلاطم معمولاً به‌ازای عددهای رینولدز  $(x v_\infty / \nu)_{crit}$  از مرتبه  $10^5$  تا  $10^6$  رخ می‌دهد.

شرایط مرزی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} v_x \rightarrow v_\infty, y \rightarrow \infty \text{ یا وقتی } x \leq 0 && \text{در} \\ T \rightarrow T_\infty && \\ \omega_A \rightarrow \omega_{A\infty} && \text{(۲۴-۲۰۲۰)} \\ v_x = 0, y = 0 && \text{در} \\ T = T_0 && \\ \omega_A = \omega_{A0} && \text{(۲۵-۲۰۲۰)} \\ v_y = v_0(x), y = 0 && \text{در} \end{aligned} \quad \text{(۲۶-۲۰۲۰)}$$

در این جا تابع  $v_0(x)$  معرف  $v_y(x, y)$  است که در  $y = 0$  محاسبه شده باشد و توزیع آهنگ انتقال جرم در طول سطح را توصیف می‌کند. این تابع را بعداً مشخص می‌کنیم.

می‌توان از معادله (۲۰-۲۰۲۰)، با شرط مرزی معادله (۲۶-۲۰۲۰) انتگرال گرفت؛ داریم:

$$v_y = v_0(x) - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y v_x d\bar{y} \quad \text{(۲۷-۲۰۲۰)}$$

این عبارت را، در معادله‌های (۲۰۲-۲۱ تا ۲۳)، به جای  $v_y$  قرار خواهیم داد. برای بهره‌گیری از صورت نظیر معادله‌های (۲۰۲-۲۱ تا ۲۳) و شش شرط مرزی نخست، توزیع‌های بدون بُعد زیر:

$$\Pi_v = \frac{v_x}{v_\infty} \quad \Pi_T = \frac{T - T_\infty}{T_\infty - T_\infty} \quad \Pi_\omega = \frac{\omega_A - \omega_{A\infty}}{\omega_{A\infty} - \omega_{A0}} \quad (28-20)$$

و نسبت‌های خواص فیزیکی بدون بُعد:

$$\Lambda_v = \frac{\nu}{\nu} = 1 \quad \Lambda_T = \frac{\nu}{\alpha} = Pr \quad \Lambda_\omega = \frac{\nu}{D_{AB}} = Sc \quad (29-20)$$

را تعریف می‌کنیم. با این تعریف‌ها، و معادله بالا برای  $v_y$ ، معادله‌های (۲۰۲-۲۱ تا ۲۳) همگی صورت زیر را به‌خود می‌گیرند:

$$\Pi_v \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \left( \frac{v_0(x)}{v_\infty} - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \Pi_v d\bar{y} \right) \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{\nu}{v_\infty \Lambda} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \quad (30-20)$$

و شرایط مرزی متغیرهای وابسته به شرایط زیر خلاصه می‌شوند:

$$\Pi \rightarrow 1, y \rightarrow \infty \text{ یا وقتی } x \leq 0 \quad (31-20)$$

$$\Pi = 0, y = 0 \quad (32-20)$$

بنابراین توزیع‌های سرعت، دما، و ترکیب شیمیایی بدون بُعد، همگی در یک معادله، اما با مقادیر  $\Lambda$  خاص خود، صدق می‌کنند.

صورت شرایط مرزی  $\Pi$ ، امتحان کردن ترکیبی از متغیرها را ایجاب می‌کند. به‌قیاس با معادله (۲۰۴-۲۰)، ترکیب زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$\eta = y \sqrt{\frac{1}{2} \frac{v_\infty}{\nu x}} \quad (33-20)$$

سپس  $\Pi$  و  $\Pi_v$  را به‌صورت توابعی از  $\eta$  در نظر می‌گیریم و معادله دیفرانسیل زیر را:

$$\left( \frac{v_0(x)}{v_\infty} \sqrt{\frac{2}{\nu} \frac{v_\infty x}{\nu}} - \int_0^\eta \Pi_v d\bar{\eta} \right) \frac{d\Pi}{d\eta} = \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Pi}{d\eta^2} \quad (34-20)$$

با شرایط مرزی:

$$\Pi \rightarrow 1, \eta \rightarrow \infty \text{ داریم } \Pi \rightarrow 1 \quad (35-20)$$

$$\Pi = 0, \eta = 0 \text{ داریم } \Pi = 0 \quad (36-20)$$

به‌دست می‌آوریم. از سه معادله آخر نتیجه می‌گیریم که توزیع‌ها برحسب مختص تنهای  $\eta$  قابل بیان‌اند، اگر و فقط اگر سرعت فصل‌مشترکی  $v_0(x)$  به‌صورت زیر باشد:

$$\frac{v_0(x)}{v_\infty} \sqrt{\frac{2}{\nu} \frac{v_\infty x}{\nu}} = K = \text{ثابت} \quad (37-20)$$

هر صورت تابعی دیگر برای  $v_0(x)$  سبب خواهد شد که سمت چپ معادله (۲۰۴-۲۰) هم به  $x$  و هم به  $\eta$  وابسته شود، به‌طوری‌که ترکیب متغیرها امکان‌پذیر نخواهد بود. در این صورت معادله‌های لایه مرزی را باید در دو بُعد

انتگرال‌گیری کرد و محاسبات دشوارتر می‌شود. معادله (۳۷-۲.۲۰) نشان می‌دهد که  $v_0(x)$  با  $1/\sqrt{x}$  تغییر می‌کند و بنابراین با تغییرات ضخامت لایه مرزی،  $\delta$  در معادله (۱۷-۴.۴)، رابطه معکوس دارد. گستره اعتبار این معادله، همانند معادله (۳۴-۲.۲۰)، عبارت است از:  $v_{\infty}x/\nu < v_{\infty}x/\nu_{crit} \ll 1$  (نگاه کنید به شکل ۲-۲.۲۰). خوش‌بختانه شرط معادله (۳۷-۲.۲۰) شرطی سودمند است. این شرط متناظر است با تناسب مستقیم  $\rho v_0$  با شارهای فصل مشترکی  $\tau_0$ ،  $q_0$  و  $j_{A0}$ . شرایطی از این نوع، به‌طور طبیعی در واکنش‌های سطحی تحت کنترل نفوذ، و هم‌چنین در موارد خاصی از خشک کردن و سرمایه‌ش تعریقی مطرح می‌شوند.  $K$  را در این وضعیت‌ها در انتهای مثال تعیین می‌کنیم و فعلاً آن را معلوم در نظر می‌گیریم.

با مشخص کردن  $v_0(x)$  طبق معادله (۳۷-۲.۲۰)، بیان مسئله کامل می‌شود و می‌توانیم محاسبه توزیع‌های مطلوب را تشریح کنیم. برای این‌کار بهتر است از انتگرال‌گیری عددی، با مقادیر مشخص شده برای پارامترهای  $\Lambda$  و  $K$  استفاده کنیم.

گام نخست در حل این مسئله، تعیین توزیع سرعت  $\Pi_v$  است. به‌این‌منظور، تابع زیر را معرفی می‌کنیم:

$$f = -K + \int_0^{\eta} \Pi_v d\bar{\eta} \quad (38-2.20)$$

این تابع تعمیمی از تابع جریان بدون بُعد  $f$  است که در مثال ۲-۴.۴ از آن استفاده کردیم. سپس با قرار دادن  $\Lambda = 1$  در معادله (۳۴-۲.۲۰) و انجام جایگزینی‌های  $\Pi_v = df/d\eta$ ،  $f' = df/d\eta = \Pi_v$ ،  $f'' = d^2f/d\eta^2 = d\Pi_v/d\eta$ ، و غیره معادله حرکت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$-ff'' = f''' \quad (39-2.20)$$

و معادله‌های (۳۵-۲.۲۰)، (۳۶، ۳۸) شرایط مرزی زیر را نتیجه می‌دهند:

$$f' \rightarrow 1 \quad \text{وقتی } \eta \rightarrow \infty, \text{ داریم}$$

$$f' = 0 \quad \text{در } \eta = 0, \text{ داریم}$$

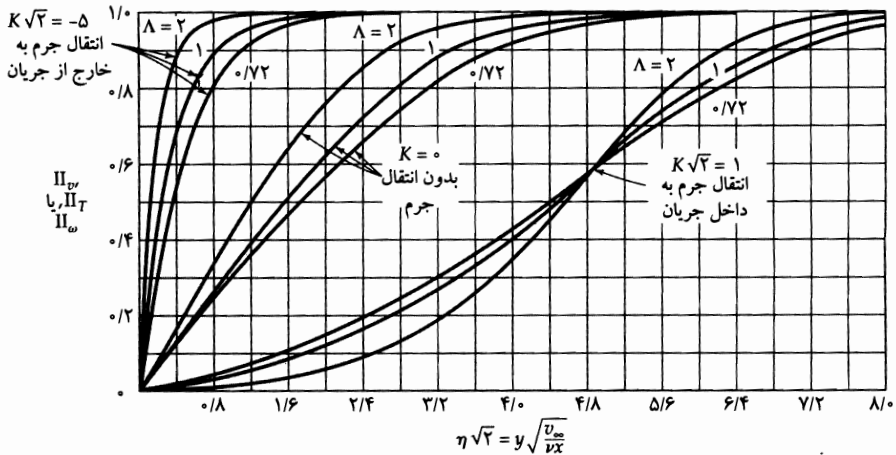
$$f = -K \quad \text{در } \eta = 0, \text{ داریم}$$

معادله (۳۹-۲.۲۰) را می‌توان به‌روش عددی و با استفاده از این شرایط مرزی حل کرد و  $f$  را به‌صورت تابعی از  $\eta$ ، به‌ازای مقادیر مختلف  $K$  به‌دست آورد.

وقتی مقدار تابع  $f(\eta, K)$  تعیین شد، می‌توان از معادله (۳۴-۲.۲۰) با شرایط مرزی معادله‌های (۳۵-۲.۲۰) و (۳۶) انتگرال گرفت؛ داریم:

$$\Pi(\eta, \Lambda, K) = \frac{\int_0^{\eta} \exp\left(-\Lambda \int_0^{\bar{\eta}} f(\bar{\eta}, K) d\bar{\eta}\right) d\bar{\eta}}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\Lambda \int_0^{\bar{\eta}} f(\bar{\eta}, K) d\bar{\eta}\right) d\bar{\eta}} \quad (43-2.20)$$

بعضی از توزیع‌های محاسبه‌شده با استفاده از این معادله و روش انتگرال‌گیری عددی، در شکل ۳-۲.۲۰ نشان داده شده‌اند. توزیع‌های سرعت با منحنی‌های  $\Lambda = 1$  نشان داده شده‌اند. توزیع‌های دما و ترکیب، به‌ازای عددهای مختلف پرانتل و اشمیت، با منحنی‌های مربوط به مقادیر متناظر  $\Lambda$  نشان داده شده‌اند. توجه شما را به این نکته جلب می‌کنیم که وقتی  $K$  مثبت است (مانند فرایند تبخیر)، لایه‌های مرزی سرعت، دما، و ترکیب شیمیایی ضخیم‌تر می‌شوند و هنگامی که  $K$  منفی است (مانند فرایند چگالش) این لایه‌ها نازک‌تر می‌شوند.



شکل ۳-۲.۲۰ توزیع‌های سرعت، دما، و ترکیب شیمیایی در لایه مرزی آرام روی صفحه‌ای تخت با انتقال جرم در جدار.

گردان‌های سرعت، دما، و ترکیب شیمیایی در جدار با استفاده از مشتق معادله (۴۳-۲.۲۰) به دست می‌آیند:

$$\Pi'(\eta, \Lambda, K) = \left. \frac{d\Pi(\eta, \Lambda, K)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \frac{1}{\int_0^\infty \exp(-\Lambda \int_0^\eta f(\bar{\eta}, K) d\bar{\eta}) d\eta} \quad (44-2.20)$$

بعضی از مقادیر محاسبه شده با استفاده از این فرمول و از طریق انتگرال‌گیری عددی در جدول ۱-۲.۲۰ آمده است.

جدول ۱-۲.۲۰ گردان‌های بدون بُعد سرعت، دما، و ترکیب شیمیایی در جریان آرام روی صفحه‌ای تخت. الف

K	$\Lambda = 0.1$	$\Lambda = 0.2$	$\Lambda = 0.4$	$\Lambda = 0.6$	$\Lambda = 0.7$	$\Lambda = 0.8$	$\Lambda = 1.0$	$\Lambda = 1.4$	$\Lambda = 2.0$	$\Lambda = 5.0$
-۳.۰	۰.۴۴۹۱	۰.۷۶۸۱	۱.۳۷۲۲	۱.۹۶۴۸	۲.۲۶۰۰	۲.۵۵۵۰	۳.۱۴۵۱	۴.۳۲۷۳	۶.۱۰۶۴	۱۵.۰۵۶۷
-۲.۰	۰.۳۶۶۴	۰.۵۹۵۶	۱.۰۱۱۴	۱.۴۱۰۰	۱.۶۰۷۰	۱.۸۰۳۲	۲.۱۹۴۵	۲.۹۷۶۴	۴.۱۵۲۴	۱۰.۰۸۶۳
-۱.۰	۰.۲۸۴۶	۰.۴۲۸۲	۰.۶۶۵۸	۰.۸۷۹۹	۰.۹۸۲۹	۱.۰۸۴۲	۱.۲۸۳۶	۱.۶۷۵۴	۲.۲۵۶۸	۵.۱۷۴۷
-۰.۵	۰.۲۴۲۷	۰.۳۴۵۲	۰.۴۹۹۹	۰.۶۲۹۱	۰.۶۸۹۰	۰.۷۴۶۸	۰.۸۵۷۹	۱.۰۶۸۸	۱.۳۷۰۷	۲.۸۱۹۴
-۰.۲	۰.۲۱۶۵	۰.۲۹۴۸	۰.۴۰۲۴	۰.۴۸۴۹	۰.۵۲۱۳	۰.۵۵۵۵	۰.۶۱۹۰	۰.۷۳۳۳	۰.۸۸۶۱	۱.۵۳۴۶
۰.۰	۰.۱۹۸۰	۰.۲۶۰۴	۰.۳۳۸۰	۰.۳۹۱۷	۰.۴۱۳۹	۰.۴۳۴۰	۰.۴۶۹۶	۰.۵۲۸۱	۰.۵۹۷۲	۰.۸۱۵۶
۰.۲	۰.۱۷۸۳	۰.۲۲۴۶	۰.۲۷۳۶	۰.۳۰۱۱	۰.۳۱۰۸	۰.۳۱۸۷	۰.۳۳۰۵	۰.۳۴۳۹	۰.۳۴۹۶	۰.۳۰۱۵
۰.۵	۰.۱۴۴۱	۰.۱۶۵۷	۰.۱۷۵۱	۰.۱۷۰۱	۰.۱۶۵۶	۰.۱۶۰۳	۰.۱۴۸۵	۰.۱۲۴۰	۰.۰۹۰۹۶	۰.۰۱۴۶۷
۰.۷۵	۰.۱۰۳۲	۰.۱۰۲۳	۰.۰۸۴۰	۰.۰۶۳۸	۰.۰۵۴۹	۰.۰۴۷۱	۰.۰۳۴۰	۰.۰۱۷۲	۰.۰۰۵۷۱	۰.۰۰۰۰۱۵۲
۰.۸۷۵۷۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

الف) برگرفته از منابع زیر:

E. Elzy and R. M. Sisson, *Engineering Experiment Station Bulletin No. 40*, Oregon State University, Corvallis, Or. (1967); H. L. Evans, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **3**, 321-339 (1961); W. E. Stewart and R. Prober, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **5**, 1149-1163 (1962) and **6**, 872 (1963).

نتایج کامل‌تر و مروری بر کارهای قدیمی‌تر در این منابع یافت می‌شوند.

ب) مقدار  $K = 0.87574$  بزرگ‌ترین آهنگ انتقال جرم مثبت قابل حصول با جریان آرام، در این وضعیت هندسی است. نگاه کنید به

H. W. Emmons and D. C. Leigh, *Interim Technical Report No. 9*, Combustion Aerodynamics Laboratory, Harvard University (1953).

شارهای مولکولی اندازه حرکت، انرژی، و جرم در جدار از عبارتهای بدون بُعد زیر:

$$\frac{\tau_0}{\rho v_\infty (v_\infty - v_0)} = \Pi'(\theta, \lambda, K) \sqrt{\frac{\nu}{2v_\infty x}} \quad (45-2.20)$$

$$\frac{q_0}{\rho \hat{C}_p v_\infty (T_0 - T_\infty)} = \frac{\Pi'(\theta, Pr, K)}{Pr} \sqrt{\frac{\nu}{2v_\infty x}} \quad (46-2.20)$$

$$\frac{j_{A_0}}{\rho v_\infty (\omega_{A_0} - \omega_{A_\infty})} = \frac{\Pi'(\theta, Sc, K)}{Sc} \sqrt{\frac{\nu}{2v_\infty x}} \quad (47-2.20)$$

با مقادیر جدول بندی شده  $\Pi'(\theta, \lambda, K)$  به دست می آیند. بنابراین وقتی  $K$  معلوم باشد، شارها را می توان مستقیماً محاسبه کرد. این عبارتهای از عبارتهای شار نیوتون، فوریه، و فیک به دست می آیند و توزیعها با معادله (۴۳-۲.۲۰) نشان داده شده اند. در این جا شار انرژی  $q_0$  با جمله رسانش  $-k \nabla T$  معادله (۳-۳.۱۹) متناظر است؛ شار نفوذی  $j_{A_0}$  با استفاده از معادله (۴۷-۲.۲۰) به دست می آید.

در حل این مثال خواص سیال، یعنی  $\rho, \mu, \hat{C}_p, k$ ، و  $D_{AB}$  را ثابت فرض کردیم. اما مشخص شده است که معادله های (۴۵-۲.۲۰ تا ۴۷) با محاسبات متناظر برای خواص متغیر، توافق خوبی دارند، به شرط آن که  $K$   $10^8$  به صورت زیر تعمیم داده شود:

$$K = \frac{\rho_0 v_0(x)}{\rho v_\infty} \sqrt{\frac{v_\infty x}{\nu}} \quad (48-2.20)$$

و سپس  $\rho, \mu, \hat{C}_p, k, D_{AB}$  در «شرایط مرجع»  $T_f = \frac{1}{2}(T_0 + T_\infty)$  و  $\omega_{Af} = \frac{1}{2}(\omega_{A_0} + \omega_{A_\infty})$  محاسبه شوند. در بسیاری از موارد، یکی از کمیت های بدون بُعد زیر:

$$R_v = \frac{(n_{A_0} + n_{B_0})(v_\infty - v_0)}{\tau_0} \quad (49-2.20)$$

$$R_T = \frac{(n_{A_0} + n_{B_0}) \hat{C}_p (T_0 - T_\infty)}{q_0} \quad (50-2.20)$$

$$R_\omega = \frac{(n_{A_0} + n_{B_0})(\omega_{A_0} - \omega_{A_\infty})}{j_{A_0}} = \frac{(\omega_{A_0} - \omega_{A_\infty})(n_{A_0} + n_{B_0})}{n_{A_0} - \omega_{A_0}(n_{A_0} + n_{B_0})} \quad (51-2.20)$$

معلوم است یا به آسانی محاسبه می شود. این نسبت های شار،  $R$ ، تحت شرایط مرزی فعلی از  $x$  مستقل اند و، طبق معادله های (۴۵-۲.۲۰ تا ۵۱)، رابطه زیر را با  $\lambda$  و  $K$  دارند:

$$R = \frac{K \lambda}{\Pi'(\theta, \lambda, K)} \quad (52-2.20)$$

۸. برای آشنایی با محاسبات انتقال اندازه حرکت و انرژی در جریان های گازی با  $K = 0$ ، نگاه کنید به

E. R. G. Eckert, *Trans. A.S.M.E.*, **78**, 1273-1283 (1956).

۹. برای آشنایی با محاسبات انتقال اندازه حرکت و جرم در مخلوط های گازی دوجزئی و چندجزئی، نگاه کنید به

W. E. Stewart and R. Prober, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **3**, 224-235 (1964);

چنانکه در بخش ۹.۲۲ گفته خواهد شد، شرایط مرجع اصلاح شده را می توان در منبع زیر یافت:

T. C. Young and W. E. Stewart, *ibid.*, **25**, 276-482 (1986).

۱۰. برای آشنایی با سایر روش های کاربرد معادله (۴۷-۲.۲۰) در مورد سیال های با خواص متغیر، نگاه کنید به

O. T. Hanna, *AIChE Journal*, **8**, 278-279 (1962); **11**, 706-712 (1965).

باتوجه به معادله (۵۲-۲۰) مشاهده می‌شود که شار جرمی بدون بُعد  $K$  را می‌توان به صورت تابعی از  $R$  و  $\Lambda$ ، با استفاده از نتایج جدول ۱-۲۰، جدول‌بندی کرد. سپس، هرگاه مقادیر  $R$  و  $\Lambda$  برای یکی از سه توزیع معلوم باشد (یعنی اگر بتوان  $R_w$ ، یا  $Pr$  و  $R_T$ ، یا  $R_w$  و  $Sc$  را مشخص کرد)، می‌توان  $K$  را با درون‌یابی به دست آورد. در شکل‌های ۵۸-۲۲ تا ۷، نمودارهای این روابط ترسیم شده‌است.

فرض کنید صفحه تخت متخلخل است و از مایع  $A$  اشباع شده‌است که تبخیر می‌شود و به جریان گازی  $A$  و  $B$  می‌پیوندد. هم‌چنین فرض کنید گاز  $B$  چگالش‌ناپذیر و در مایع  $A$  انحلال‌ناپذیر است، و  $\omega_{A\infty}$  و  $\omega_{A0}$  معلوم‌اند. در این صورت می‌توان  $R_w$  را با استفاده از معادله (۵۱-۲۰)، با  $n_B = 0$  و  $K$  را با درون‌یابی تابع  $\Pi'(\circ, \Lambda, K)$  تا  $R = R_w$  و  $\Lambda = \mu/\rho D_{AB}$  به دست آورد. برای مقادیر متوسط  $K$ ، با معرفی  $\Pi'(\circ, \Lambda, K)$  به‌عنوان سری تیلر بریده برحسب پارامتر  $K$  می‌توان محاسبات را ساده کرد:

$$\Pi'(\circ, \Lambda, K) = \Pi'(\circ, \Lambda, 0) + K \left. \frac{\partial}{\partial K} \Pi'(\circ, \Lambda, K) \right|_{K=0} \quad (53-20)$$

این عبارت را می‌توان به صورت فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\Pi'(\circ, \Lambda, K) = a\Lambda^{1/3} - bK\Lambda \quad (54-20)$$

که در آن  $a$  و  $b$  توابعی از  $\Lambda$  هستند که به‌کندی تغییر می‌کنند و در جدول ۲-۲۰ نشان داده شده‌اند. با قرار دادن معادله (۵۴-۲۰) در معادله (۵۲-۲۰) عبارتی راحت برای شار جرم فصل‌مشترکی بدون بُعد  $K$  به دست می‌آید:

$$K = a\Lambda^{-2/3} \frac{R}{1 + bR} \quad (55-20)$$

که برای محاسبات درحالت مجهول بودن پارامتر  $K$  مناسب است. استفاده از این نتیجه آسان، و حاصل کار نسبتاً دقیق است. تابع پیش‌بینی‌شده  $K(R, \Lambda)$  در حدود ۱/۶٪ مقدار به دست‌آمده از جدول ۲-۲۰ برای  $|R| < 0.25$  و  $\Lambda > 0.1$  دقت دارد.

جدول ۲-۲۰ ضرایب قابل‌استفاده برای فرمول‌های تقریبی صفحه تخت، الف معادله‌های (۵۵ و ۵۴-۲۰).

$\Lambda$	0	0.1	0.2	0.5	0.7	1.0	2	5	10	100	$\infty$
$a(\Lambda) \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}$	$\Lambda^{1/6}$	0.4266	0.4452	0.4620	0.4662	0.4696	0.4740	0.4769	0.4780	0.4789	0.4790
$b(\Lambda)$	1.308	0.948	0.874	0.783	0.752	0.723	0.676	0.632	0.610	0.577	0.566

الف) برگرفته شده از

H. J. Merk, *Appl. Sci. Res.*, **A8**, 237-277 (1959), and R. Prober and W. E. Stewart, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **6**, 221-229, 872 (1963).

این مثال آثار سرعت فصل‌مشترک  $v_0$  را بر توزیع‌های سرعت، دما، و ترکیب شیمیایی نشان می‌دهد. اثر  $v_0$  بر توزیعی مفروض،  $\Pi$ ، کوچک است هرگاه برای آن توزیع  $1 \ll R$ ، (که در اغلب فرایندهای جداسازی چنین است) و بزرگ است، هرگاه  $R \geq 1$  (که در بسیاری از فرایندهای احتراق و سرمایش تعریفی چنین است). در فصل ۲۲ چند کاربرد ارائه شده‌است.

### مثال ۳-۲۰

قیاس‌های تقریبی برای صفحه تخت در آهنگ‌های پایین انتقال گرما

پلهاوزن<sup>۱۱</sup> معادله انرژی را برای سیستم مثال ۱۲-۴ حل کرد و نتایج خود را برای آهنگ انتقال گرمای  $Q$  (نگاه

11. E. Pohlhausen, *Zeits. f. angew. Math. Mech.*, **1**, 115-121 (1921).



کنید به سطر سوم جدول ۱۲-۴ (۱-۴-۱۲) به صورت منحنی نشان داد. نتایج او را با معادله (۲۰-۲-۴۶) مقایسه کنید و نتایج متناظری برای شارهای اندازه حرکت و جرم به دست آورید.

حل  
با جایگزینی ضریب ۰٫۶۶۴ به جای  $\sqrt{148/315}$  در معادله (۱۲-۴-۱۷)، و قرار دادن  $(dQ/dL)|_{L=x} = 2Wq_0(x)$ ، نتیجه می شود:

$$\frac{q_0}{\rho \hat{C}_p v_\infty (T_0 - T_\infty)} \cong 0,332 \text{Pr}^{-2/3} \sqrt{\frac{\nu}{v_\infty x}} \quad (56-2-20)$$

این نتیجه در معرض شرط مرزی  $v_0(x) = 0$  است که با  $K = 0$  در سیستم مثال ۲۰-۲-۲۰ متناظر است. هرگاه  $K = 0$ ، معادله (۲۰-۲-۵۶)، با قرار دادن  $\text{Pr}^{1/3} \cong 0,4696 \text{Pr}^{1/3}$ ، از معادله (۲۰-۲-۴۶) به دست می آید؛ این نتیجه با جدول ۲۰-۲-۲۰ به ازای  $\Lambda = 1$  در توافق است. با جایگزینی های مشابه در معادله های (۲۰-۲-۴۵) و (۲۰-۲-۴۶)، قیاس زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0}{\rho v_\infty (v_\infty - 0)} &\cong \frac{q_0}{\rho \hat{C}_p v_\infty (T_0 - T_\infty)} \text{Pr}^{2/3} \cong \frac{j_{A0}}{\rho v_\infty (\omega_{A0} - \omega_{A\infty})} \text{Sc}^{2/3} \\ &\cong 0,332 \sqrt{\frac{\nu}{v_\infty x}} \quad (57-2-20) \end{aligned}$$

که توسط چیلتون و کولبورن<sup>۱۲</sup> برای این وضعیت. جریان توصیه شده است (مقایسه کنید با بخش های ۳-۱۴ و ۳-۲۲). عبارت به دست آمده برای  $\tau_0$  با جواب دقیق در  $K = 0$  در توافق است و نتایج  $q_0$  و  $j_{A0}$  در  $K = 0$  به ازای  $\Lambda > 0,5$ ، در حدود  $\pm 2\%$  دقت دارد.

### ۳-۲۰ نظریه لایه مرزی دوتایی برای جریان در اطراف اجسام

در بخش های ۵-۱۸ و ۶-۱۸ دو مسئله انتقال جرم از نوع لایه مرزی را تشریح کردیم که به هم مرتبط بودند. اکنون می خواهیم ایده های مطرح شده<sup>۱۰،۱۱،۱۲،۱۳،۱۴،۱۵،۱۶</sup> در آن بخش ها را بسط دهیم و جریان در اطراف اجسامی با شکل های دیگر، مانند جسم نشان داده شده در شکل ۱۲-۴ را بررسی کنیم. اگرچه مطالب این بخش را برحسب انتقال جرم ارائه می دهیم، با تغییر نمادگذاری، همین نتایج را می توان در مورد مسئله های متناظر در انتقال گرما نیز به کار بست. لایه مرزی غلظت را بسیار نازک فرض می کنیم که به این معناست که نتایج به ضریب نفوذ کوچک یا زمان کوتاه محدودند. این نتایج فقط در ناحیه بین مکان هندسی رکود جلویی (که  $x$  از روی آن اندازه گیری می شود) و ناحیه جداسازی یا تلاطم، در صورت وجود، مطابق شکل ۱۲-۴، قابل کاربردند.

12. T. H. Chilton and A. P. Colburn, *Ind. Eng. Chem.* **26**, 1183-1187 (1934).

1. A. Acrivos, *Chem. Eng. Sci.*, **17**, 457-465 (1962).

2. W. E. Stewart, *AIChE Journal*, **9**, 528-535 (1963).

3. D. W. Howard and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **14**, 458-467 (1968).

4. W. E. Stewart, J. B. Angelo, and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **16**, 771-786 (1970).

5. E. N. Lightfoot, in *Lectures in Transport Phenomena*, American Institute of Chemical Engineers, New York (1969).

6. E. Ruckenstein, *Chem. Eng. Sci.*, **23**, 363-371 (1968).

7. W. E. Stewart, in *Physicochemical Hydrodynamics*, Vol. 1 (D. B. Spalding, ed.), Advance Publications, Ltd., London (1977), pp. 23-63.

غلظت گونه نفوذکننده را  $c_A$ ، و غلظت آن در سطح جسم را  $c_{A0}$  می‌نامیم. در بیرون از لایه مرزی، غلظت  $A$  صفر است.

کار را مانند مثال ۴-۱۲ ادامه می‌دهیم و یک دستگاه مختصات متعامد را بر لایه مرزی غلظت منطبق می‌کنیم و  $x$  را در طول سطح، همه‌جا در جهت خطوط جریان، در این دستگاه اندازه‌گیری می‌کنیم. چنان‌که در معادله‌های (الف-۷ تا ۱۸)، اما با  $h_y = 1$ ،  $h_x = h_x(x, z)$ ،  $h_z = h_z(x, z)$  توصیف شده‌است، این‌ها «مختصات متعامد تعمیم‌یافته‌اند». چون جریان در نزدیکی فصل مشترک، در جهت  $z$  مؤلفه سرعت ندارد، معادله پیوستگی، بنا به معادله (الف-۷)، چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}(h_z v_x) + h_x h_z \frac{\partial}{\partial y} v_y = 0 \quad (۱-۳.۲۰)$$

در این صورت، معادله نفوذ لایه مرزی غلظت عبارت است از:

$$v_x \frac{1}{h_x} \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} = \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (۲-۳.۲۰)$$

که در آن از معادله‌های (الف-۷ تا ۱۵ و ۱۷) استفاده شده‌است. در نوشتن این معادله‌ها فرض شده‌است که: (۱) مؤلفه‌های  $x$  و  $z$  شار نفوذ قابل چشم‌پوشی‌اند؛ (۲) ضخامت لایه مرزی در مقایسه با شعاع انحنای فصل مشترکی موضعی کوچک است، و (۳) چگالی و ضریب نفوذ ثابت است. اکنون می‌خواهیم عبارتهایی برای توزیع غلظت و شار جرمی در دو حالتی به دست آوریم که تعمیم مسئله‌های حل شده در بخش‌های ۵.۱۸ و ۶.۱۸ به‌شمار می‌روند. وقتی عبارتهای مربوط به شار مولی موضعی در فصل مشترک را به دست آوردیم، درخواهیم یافت که وابستگی به ضریب نفوذ (توان  $\frac{1}{4}$  در بخش ۵.۱۸ و توان  $\frac{3}{4}$  در بخش ۶.۱۸) با حالت‌های (الف) و (ب) زیر متناظر است. چنان‌که در فصل ۲۲ خواهیم دید، این نکته در تعیین روابط همبستگی بدون بُعد برای ضرایب انتقال گرما بسیار مهم است.

### گرادیان سرعت صفر در سطح انتقال جرم

این وضعیت در جریان مایع فاقد عوامل فعال در سطح، در اطراف حباب گاز پدید می‌آید. در این جا  $v_x$  به  $y$  وابسته نیست و  $v_y$  را می‌توان از معادله پیوستگی که در بالا ارائه شد، به دست آورد. بنابراین، به‌ازای آهنگ‌های کوچک انتقال جرم، می‌توان عبارتهایی کلی برای مؤلفه‌های سرعت، به ترتیب زیر، نوشت:

$$v_x = v_s(x, z) \quad (۳-۳.۲۰)$$

$$v_y = -\frac{y}{h_x h_z} \frac{\partial}{\partial x}(h_z v_s) \equiv -\gamma y \quad (۴-۳.۲۰)$$

که در آن  $\gamma$  به  $x$  و  $z$  بستگی دارد. وقتی از این عبارت در معادله (۲-۳.۲۰) استفاده کنیم، معادله زیر برای نفوذ در فاز مایع حاصل می‌شود:

$$v_s \frac{1}{h_x} \frac{\partial c_A}{\partial x} - \gamma y \frac{\partial c_A}{\partial y} = \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (۵-۳.۲۰)$$

که باید با شرایط مرزی زیر آن را حل کرد:

$$c_A = 0 \quad \text{در } x = 0 \quad \text{در } ۱ \quad (۶-۳.۲۰)$$

$$c_A = c_{A0} \quad \text{در } y = 0 \quad \text{در } ۲ \quad (۷-۳.۲۰)$$

$$c_A \rightarrow 0 \quad \text{در } y \rightarrow \infty \quad \text{وقتی } ۳ \quad (۸-۳.۲۰)$$

ماهیت شرایط مرزی ایجاب می‌کند که از روش ترکیب متغیرها استفاده کنیم. اما نحوه ساخت ترکیبی بدون بُعد، چندان بدیهی نیست. بنابراین ترکیب زیر را امتحان می‌کنیم: فرض کنید  $f(\eta) = c_A/c_{A0}$  که در آن  $\eta = y/\delta_A(x, z)$  و  $\delta_A(x, z)$  ضخامت لایه مرزی گونه A است که باید بعداً تعیین شود. هنگامی که این ترکیب متغیرها را در معادله (۵-۳.۲۰) قرار دهیم، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{D_{AB}} \left( \frac{v_s}{h_x} \delta_A \frac{\partial \delta_A}{\partial x} + \gamma \delta_A^2 \right) \eta \frac{df}{d\eta} = 0 \quad (۹-۳.۲۰)$$

و شرایط مرزی زیر درباره آن صادق است:  $f(0) = 1$  و  $f(\infty) = 0$ . حال اگر ضریب جمله  $\eta(df/d\eta)$  ثابت بود، آن‌گاه معادله (۹-۳.۲۰) همان صورت معادله (۹-۱.۴) را پیدا می‌کرد که راه حل آن را می‌دانیم. برای سهولت کار این ثابت را به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$\frac{1}{D_{AB}} \left( \frac{v_s}{h_x} \delta_A \frac{\partial \delta_A}{\partial x} + \gamma \delta_A^2 \right) = 2 \quad (۱۰-۳.۲۰)$$

سپس عبارت  $\gamma$  را از معادله (۴-۳.۲۰) در آن قرار می‌دهیم و معادله را مرتب می‌کنیم؛ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta_A^2 + \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln(h_z v_s) \right) \delta_A^2 = \frac{2 D_{AB} h_x}{v_s} \quad (۱۱-۳.۲۰)$$

این یک معادله خطی مرتبه اول برحسب  $\delta_A^2$  است که باید با شرط مرزی  $\delta_A = 0$  در  $x = 0$  حل شود. با انتگرال‌گیری از معادله (۱۱-۳.۲۰) نتیجه می‌شود:

$$\delta_A(x, z) = 2 \sqrt{\frac{D_{AB} \int_0^x h_x h_z v_s d\bar{x}}{h_z^2 v_s^2}} \quad (۱۲-۳.۲۰)$$

که تابع ضخامت برای لایه مرزی نفوذی است. چون تنها متغیر مستقل معادله (۹-۳.۲۰) و شرایط مرزی  $\eta$  است، ترکیب متغیرهای فرض‌شده معتبر است و توزیع غلظت با جواب معادله (۹-۳.۲۰) نشان داده می‌شود:

$$f(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\bar{\eta}^2) d\bar{\eta} = 1 - \operatorname{erf} \eta \quad (۱۳-۳.۲۰)$$

معادله‌های (۱۲-۳.۲۰ و ۱۳) جواب مسئله فعلی به‌شمار می‌روند.

سپس این جواب را با قانون اول فیک ترکیب می‌کنیم تا شار مولی گونه A را در فصل مشترک به‌دست آوریم:

$$\begin{aligned} N_{Ay}|_{y=0} &= -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial y} \Big|_{y=0} = -D_{AB} c_{A0} \left( \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \\ &= +D_{AB} c_{A0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \exp(-\eta^2) \frac{1}{\delta_A} \right) \Big|_{y=0} = c_{A0} \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi} \frac{h_z^2 v_s^2}{\int_0^x h_x h_z v_s d\bar{x}}} \quad (۱۴-۳.۲۰) \end{aligned}$$

این نتیجه همان وابستگی شار جرمی به توان  $\frac{1}{4}$  ضریب نفوذ را نشان می‌دهد که در معادله (۱۷-۵.۱۸) برای مسئله بسیار ساده‌تر جذب گاز به‌دست آمد. درحقیقت، اگر ضرایب مقیاس  $h_x$  و  $h_z$  را برابر واحد بگیریم و  $v_s$  را با  $v_{\max}$  جایگزین کنیم، دقیقاً معادله (۱۷-۵.۱۸) را به‌دست می‌آوریم.

توزیع سرعت خطی در نزدیکی سطح انتقال جرم

این تابع سرعت برای انتقال جرم در سطحی جامد (نگاه کنید به مثال ۴-۱۲)، وقتی لایه مرزی غلظت بسیار نازک است، مناسب است. در این جا  $v_x$  به صورت خطی، در داخل لایه مرزی غلظت، به  $y$  بستگی دارد و  $v_y$  را می توان از معادله پیوستگی به دست آورد. در نتیجه، وقتی شار جرمی خالص در فصل مشترک کوچک باشد، مؤلفه های سرعت در لایه مرزی غلظت عبارت اند از:

$$v_x = \beta(x, z)y \quad (۱۵-۳.۲۰)$$

$$v_y = -\frac{y^2}{2h_x h_z} \frac{\partial}{\partial x}(h_z \beta) \equiv -\gamma y^2 \quad (۱۶-۳.۲۰)$$

که در آن  $\gamma$  به  $x$  و  $z$  وابسته است. با قرار دادن این عبارت ها در معادله (۲-۳.۲۰)، معادله نفوذ برای فاز مایع نتیجه می شود:

$$\frac{\beta y}{h_x} \frac{\partial c_A}{\partial x} - \gamma y^2 \frac{\partial c_A}{\partial y} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (۱۷-۳.۲۰)$$

که باید با شرایط مرزی زیر حل شود:

$$c_A = 0 \quad \text{در } x = 0, \text{ داریم } (۱۸-۳.۲۰)$$

$$c_A = c_{A0} \quad \text{در } y = 0, \text{ داریم } (۱۹-۳.۲۰)$$

$$c_A \rightarrow 0 \quad \text{در } y \rightarrow \infty, \text{ داریم } (۲۰-۳.۲۰)$$

یک بار دیگر، از روش ترکیب متغیرها استفاده می کنیم و این بار فرض می کنیم  $c_A/c_{A0} = f(\eta)$  که در آن  $\eta = y/\delta_A(x, z)$ .

پس از ترکیب متغیرها، معادله نفوذ چنین نوشته می شود:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{1}{D_{AB}} \left( \frac{\beta}{h_x} \delta_A^2 \frac{\partial \delta_A}{\partial x} + \gamma \delta_A^3 \right) \eta^2 \frac{df}{d\eta} = 0 \quad (۲۱-۳.۲۰)$$

که شرایط مرزی آن عبارت اند از:  $f(0) = 1$  و  $f(\infty) = 0$ . جوابی به صورت  $f(\eta)$  فقط هنگامی ممکن است که عامل داخل پرانتز ثابت باشد. با قرار دادن مقدار ۳ برای این ثابت، معادله (۲۱-۳.۲۰) به معادله (۶-۶.۱۸) تبدیل می شود که جواب آن معلوم است. بنابراین ضخامت لایه مرزی را با این شرط به دست می آوریم که:

$$\frac{1}{D_{AB}} \left( \frac{\beta}{h_x} \delta_A^2 \frac{\partial \delta_A}{\partial x} + \gamma \delta_A^3 \right) = 3 \quad (۲۲-۳.۲۰)$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta_A^3 + \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln(h_z \beta)^{2/3} \right) \delta_A^3 = \frac{3 D_{AB} h_x}{\beta} \quad (۲۳-۳.۲۰)$$

جواب این معادله خطی مرتبه اول برحسب  $\delta_A^3$  عبارت است از:

$$\delta_A = \frac{1}{\sqrt{h_z \beta}} \sqrt[3]{3 D_{AB} \int_0^x \sqrt{h_z \beta} h_x h_z dx} \quad (۲۴-۳.۲۰)$$

بنابراین جواب مسئله این بخش فرعی چنین است:

$$\frac{c_A}{c_{A^0}} = f(\eta) = \frac{\int_{\eta}^{\infty} \exp(-\bar{\eta}^2) d\bar{\eta}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \quad (25-3.20)$$

که برای سیستم موردنظر در این جا به معادله (۱۸-۶-۱۰) تبدیل می شود.  
سرانجام، عبارتی برای شار مولی در فصل مشترک به دست می آوریم که چنین است:

$$\begin{aligned} N_{Ay}|_{y=0} &= -D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial y} \Big|_{y=0} = -D_{AB} c_{A^0} \left( \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \\ &= \frac{D_{AB} c_{A^0}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{\sqrt{h_z \beta}}{\sqrt{1 D_{AB} \int_0^x \sqrt{h_z \beta} h_x h_z dx}} \end{aligned} \quad (26-3.20)$$

برای سطحی مسطح، با  $h_x = h_z = 1$  و  $h_x$  (مقدار ثابت)  $\beta$ ، معادله (۲۶-۳-۲۰) به معادله (۱۸-۶-۹) تبدیل می شود.

### مثال ۱۰-۲۰

انتقال جرم در جریان خزشی در اطراف حباب گاز مایع  $B$  با سرعت بسیار کم، در اطراف حبابی کروی از گاز  $A$  به شعاع  $R$  جریان دارد. مطلوب است تعیین آهنگ انتقال جرم  $A$  به داخل سیال پیرامون حباب، هرگاه انحلال پذیری گاز  $A$  در مایع  $B$  برابر  $c_{A^0}$  باشد.

(الف) نحوه استفاده از معادله (۲۰-۳-۱۴) برای به دست آوردن شار جرمی در فصل مشترک گاز-مایع را برای این سیستم نشان دهید.

(ب) سپس شار جرمی متوسط را روی کل سطح کره به دست آورید.

حل

(الف) مبدأ مختصات را نقطه رکود بالادستی انتخاب کنید و مختصات  $x$  و  $z$  را برحسب مختصات کروی معمول  $\theta$  و  $\phi$  به ترتیب زیر، تعریف کنید:  $\theta = \phi$  و  $x = z$ ، و  $h_\theta = R$  و  $h_\phi = R \sin \theta$ . در این صورت راستای  $y$  همان راستای  $r$  در مختصات کروی است. سرعت فصل مشترکی از معادله (۴-۳-۳)، به صورت  $v_s = \frac{1}{4} v_\infty \sin \theta$ ، به دست می آید که در آن  $v_\infty$  سرعت تقرب است. وقتی این کمیت ها را در معادله (۲۰-۳-۱۴) قرار دهیم، نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} N_{Ay}|_{y=0} &= c_{A^0} \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi} \frac{(R \sin \theta)^2 (\frac{1}{4} v_\infty \sin \theta)^2}{\int_0^\theta (R)(R \sin \bar{\theta})^2 (\frac{1}{4} v_\infty \sin \bar{\theta}) d\bar{\theta}}} \\ &= c_{A^0} \sin^2 \theta \sqrt{\frac{D_{AB} v_\infty}{2\pi R} \frac{1}{\int_0^\theta \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\theta}}} \\ &= c_{A^0} \sin^2 \theta \sqrt{\frac{3 D_{AB} v_\infty}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 2}}} \end{aligned} \quad (27-3.20)$$

(ب) برای به دست آوردن مقدار متوسط شار جرمی، از عبارت بالا نسبت به  $\theta$  و  $\phi$  انتگرال می‌گیریم و حاصل را بر سطح کره تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} N_{A^0, \text{avg}} &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi N_{Ay}|_{y=0} R^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{2\pi R^2 c_{A^0}}{4\pi R^2} \sqrt{\frac{3D_{AB}v_\infty}{2\pi R}} \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta - 3\cos\theta + 2}} \\ &= \frac{c_{A^0}}{2} \sqrt{\frac{3D_{AB}v_\infty}{2\pi R}} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-u^2)du}{\sqrt{u^2 - 3u + 2}} \\ &= \frac{c_{A^0}}{2} \sqrt{\frac{3D_{AB}v_\infty}{2\pi R}} \int_{-1}^{+1} \frac{(1+u)du}{\sqrt{2+u}} \\ &= \frac{c_{A^0}}{2} \sqrt{\frac{3D_{AB}v_\infty}{2\pi R}} \left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\frac{4D_{AB}v_\infty}{3\pi D}} c_{A^0} \quad (28-3.20) \end{aligned}$$

برای به دست آوردن سطر سوم از سطر دوم، تغییر متغیر  $u = \cos\theta$  را انجام دادیم و برای به دست آوردن سطر چهارم، در صورت و مخرج از  $(1-u)$  فاکتور گرفتیم. معادله (28-3.20)، به صورت معادله (5.18-20)، در ارتباط با جذب از حباب‌های گاز نقل شد.<sup>۸</sup> در فصل ۲۲، در ارتباط با موضوع ضرایب انتقال جرم، دوباره به سراغ این معادله می‌رویم.

#### ۴.۲۰ انتقال جرم لایه مرزی با حرکت فصل مشترکی پیچیده<sup>۳،۲۱</sup>

حرکت‌های فصل مشترکی وابسته به زمان و تلاطم در عملیات انتقال سیال-سیال مشترک‌اند. از نظریه لایه مرزی بینشی مفید و روابطی مجانبی برای این سیستم‌ها عاید می‌شود؛ در این نظریه از نازکی لایه مرزی غلظت به‌ازای  $D_{AB}$  کوچک (مانند مایعات)، یا برای جریان‌هایی با جدایش مکرر لایه مرزی (مانند فصل مشترک‌های موج‌دار یا نوسانی) استفاده می‌شود. انتقال جرم با حرکت‌های فصل مشترکی ساده را در بخش ۵.۱۸ برای فیلم ریزان آرام و حباب در گردش، و در مثال ۴-۱.۲۰ برای فصل مشترکی در حال انبساط یکنواخت شرح دادیم. در این‌جا انتقال جرم را با حرکت‌های کلی‌تر فصل مشترک در نظر می‌گیریم.

انتقال وابسته به زمان گونه  $A$  را بین دو فاز سیال در نظر بگیرید که ابتدا یکنواخت‌اند، اما ترکیب‌های متفاوت دارند. کار را با معادله پیوستگی دوتایی برای ثابت  $\rho$  و ضریب  $D_{AB}$  شروع می‌کنیم (معادله (۱۶-۱.۱۹)، تقسیم بر  $\rho$ ):

$$\frac{D\omega_A}{Dt} = D_{AB}\nabla^2\omega_A + \frac{1}{\rho}r_A \quad (1-4.20)$$

اکنون می‌خواهیم این معادله را به صورت لایه مرزی به‌ازای ضریب  $D_{AB}$  کوچک تحویل کنیم، و سپس جواب‌هایی برای مسئله‌های مختلف همرفت واداشته، با مقاومت کنترل‌کننده در یک فاز، ارائه کنیم.

8. V. G. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1962), p. 408, Eq. 72.9.

1. J. B. Angelo, E. N. Lightfoot, and D. W. Howard, *AIChE Journal*, **12**, 751-760 (1966).

2. W. E. Stewart, J. B. Angelo, and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **16**, 771-786 (1970).

3. W. E. Stewart, *AIChE Journal*, **33**, 2008-2016 (1987); **34**, 1030 (1988).

از تقریب‌های لایه مرزی زیر استفاده می‌کنیم:

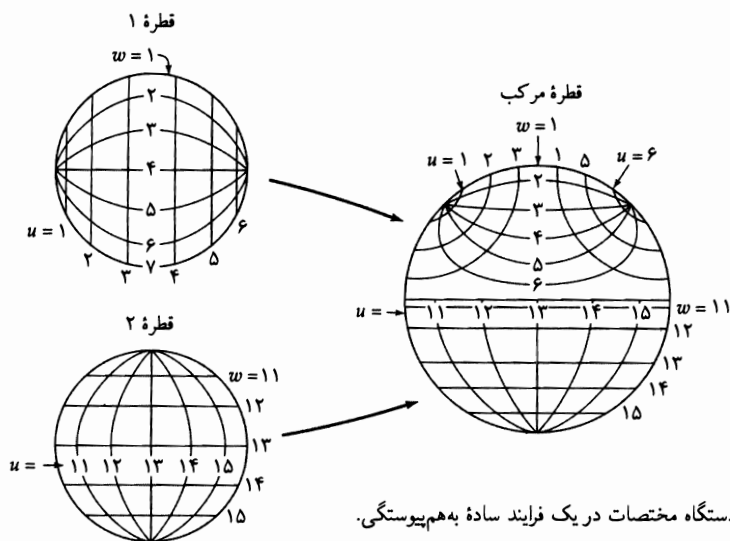
۱. شار جرمی نفوذی با بردار یکه  $\mathbf{n}$  قائم بر نزدیک‌ترین جزء فصل مشترک هم‌خط است؛ (این تقریب در سرتاسر بخش‌های مربوط به لایه مرزی در این کتاب به‌کار می‌رود. تقریب‌های مرتبه بالاتر،<sup>۴</sup> که در این جا به آن‌ها نمی‌پردازیم، برای توصیف نفوذ لایه مرزی در نزدیکی لبه‌ها، دنباله‌ها، و مکان‌های هندسی جدایش مناسب‌اند.)

۲. سرعت مماسی سیال نسبت به فصل مشترک، در داخل لایه مرزی غلظت، قابل چشم‌پوشی است؛ (این تقریب برای سیستم‌های سیال عاری از عوامل فعال در سطح، وقتی پسای فصل مشترکی چندان بزرگ نباشد، رضایت‌بخش است.)

۳. لایه مرزی غلظت در طول هر فصل مشترک، نسبت به شعاع موضعی منحنی فصل مشترک، نازک است؛

۴. لایه‌های مرزی غلظت در عناصر فصل مشترکی غیرمجاور، هم‌پوشانی ندارند.

هریک از این تقریب‌ها به‌طور مجانبی، برای  $D_{AB}$  کوچک در جریان‌های غیربازگردشی با فصل مشترک‌های غیرصلب و  $Dw_A/Dt$  غیرصفر معتبرند؛ یعنی، برای غلظت‌های وابسته به زمان از دید ناظری که همراه سیال حرکت می‌کند، اعتبار دارند. بنابراین سیستم‌هایی را که در قسمت (الف) بخش ۳.۲ در نظر گرفته شدند، شامل می‌شوند، زیرا این سیستم‌ها برای چنین ناظری وابسته به زمان‌اند (هرچند از دید ناظر ثابت، پایا شمرده می‌شوند).

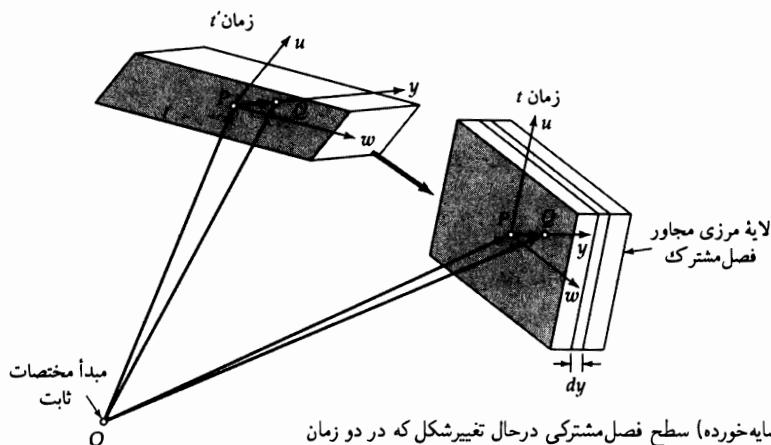


شکل ۴.۲۰ نمایش شماتیک دستگاه مختصات در یک فرایند ساده به هم‌پیوستگی.

در این بخش از دستگاه مختصات تعبیه شده در فصل مشترک استفاده می‌کنیم و یک شبکه هموار فصل مشترکی را نیز در نظر می‌گیریم که در شکل ۴.۲۰ نشان داده شده است. هر عنصر فصل مشترکی در این سیستم، همواره با مختصات سطح  $(u, w)$  و بردار مکان  $\mathbf{r}_s(u, w, t)$  نامیده می‌شود. هر نقطه در لایه مرزی با فاصله  $y$  از آن از نزدیک‌ترین نقطه فصل مشترکی، همراه با مختصات سطحی  $(u, w)$  آن نقطه شناخته می‌شود. بنابراین بردار مکان لحظه‌ای هر نقطه  $(u, w, y)$  در زمان  $t$  عبارت است از:

$$\mathbf{r}(u, w, y, t) = \mathbf{r}_s(u, w, t) + y\mathbf{n}(u, w, t) \quad (4.20)$$

نسبت به مبدأ مختصات ثابت، که در شکل ۲-۴.۲۰ نشان داده شده است. تابع  $\mathbf{r}_s(u, w, t)$  مسیر هر نقطه فصل مشترکی  $(u, w, 0)$  را نشان می‌دهد و تابع وابسته  $\mathbf{n}(u, w, t) = (\partial/\partial y)\mathbf{r}$  بردار قائم لحظه‌ای از هر جزء سطح، به طرف سمت مثبت آن، را ارائه می‌دهد. در مورد جریان‌های ساده، می‌توان این توابع را با استفاده از مکانیک سیالات محاسبه کرد و چارچوبی برای تحلیل آزمایش‌ها در جریان‌های پیچیده پدید آورد.



شکل ۲-۴.۲۰ جزء  $dS$  (سایه‌خورده) سطح فصل مشترکی در حال تغییر شکل که در دو زمان متفاوت  $t'$  و  $t$ ، همراه با لایه مرزی مجاور نشان داده شده است. بردارها (در زمان  $t$ ) عبارت‌اند از:

$$\vec{OP} = \mathbf{r}_s(u, w, t) = \text{بردار مکان نقطه‌ای روی فصل مشترک}$$

$$PQ = y\mathbf{n}(u, w, t) = \text{بردار به طول } y, \text{ قائم بر فصل مشترک واقع در نقطه‌ای در لایه مرزی}$$

$$OQ = \mathbf{r}(u, w, y, t) = \text{بردار مکان نقطه‌ای در لایه مرزی}$$

جزء سطح فصل مشترکی از همان ذرات ماده‌ای تشکیل می‌شود که در آن حرکت می‌کند. اندازه سطح با زمان تغییر می‌کند و تغییرات آن از رابطه  $dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial u} du \times \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial w} dw \right|$  به دست می‌آید. به همین ترتیب، اندازه حجم بخشی از لایه مرزی که بین  $y$  و  $y + dy$  است برابر است با:  $dV = \left| \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial u} du \times \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial w} dw \right] \cdot \mathbf{n} dy \right|$ . حجم لحظه‌ای جزء مکانی  $dudwdy$  در لایه مرزی (نگاه کنید به شکل ۲-۴.۲۰) عبارت است از:

$$dV = \sqrt{g(u, w, y, t)} dudwdy \quad (۳-۴.۲۰)$$

که در آن حاصل ضرب بردارهای پایه فصل مشترکی موضعی،  $(\partial/\partial u)\mathbf{r}_s$  و  $(\partial/\partial w)\mathbf{r}_s$ ، و بردار یکه قائم  $(\partial/\partial y)\mathbf{r} = \mathbf{n}$  است:

$$\sqrt{g} = \left| \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial w} \right] \cdot \mathbf{n} \right| = \left| \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial w} \right] \right| \quad (۴-۴.۲۰)$$

و در این بحث غیرمنفی در نظر گرفته می‌شود. تساوی دوم برقرار است، زیرا  $\mathbf{n}$  با حاصل ضرب برداری بردارهای پایه فصل مشترکی موضعی، که در صفحه فصل مشترک قرار دارد، هم خط است. به همین ترتیب، مساحت لحظه‌ای جزء فصل مشترکی  $dudw$  در شکل ۲-۴.۲۰ چنین است:

$$dS = s(u, w, t) dudw \quad (۵-۴.۲۰)$$



که در آن  $s(u, w, t)$  حاصل ضرب بردارهای پایه فصل مشترکی است و چنین نوشته می‌شود:

$$s(u, w, t) = \sqrt{g(u, w, \circ, t)} = \left| \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial w} \right] \right| \quad (۶-۴.۲۰)$$

در این دستگاه مختصات تعبیه شده در فصل مشترک، سرعت جرمی متوسط  $\mathbf{V}$  نسبت به محورهای مختصات ثابت، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{V}(u, w, y, t) = \mathbf{v}(u, w, y, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(u, w, y, t) \quad (۷-۴.۲۰)$$

در این بخش  $\mathbf{v}$  سرعت متوسط جرم سیال نسبت به ناظر واقع در  $(u, w, y)$ ، و  $(\partial/\partial t)\mathbf{r}(u, w, y, t)$  سرعت ناظر نسبت به مبدأ مختصات ثابت است. با گرفتن دیورژانس از این معادله، نتیجه می‌شود (نگاه کنید به مسئله ۵.۲۰.د):

$$(\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)) = (\nabla \cdot \mathbf{v}(u, w, y, t)) + \frac{\partial \ln \sqrt{g(u, w, y, t)}}{\partial t} \quad (۸-۴.۲۰)$$

این معادله نشان می‌دهد که دیورژانس  $\mathbf{V}$  با دیورژانس  $\mathbf{v}$ ، به اندازه آهنگ موضعی انبساط یا انقباض دستگاه مختصات تعبیه شده روی فصل مشترک، تفاوت دارد.

آخرین جمله معادله (۸-۴.۲۰) هنگامی پدید می‌آید که تغییر شکل فصل مشترکی رخ می‌دهد. حذف آن در چنین مسئله‌هایی به پیش‌بینی‌های نادقیق منتهی می‌شود، که هیگی<sup>۵</sup> و دانک‌ورتس<sup>۶</sup> با معرفی زمان سکون سطحی فرضی<sup>۶،۵</sup> یا جوان‌سازی سطح آن را اصلاح کرده‌اند.<sup>۷</sup> در تحلیل فعلی به این فرضیه‌ها نیاز نداریم. با کاربرد معادله (۸-۴.۲۰) در  $y = 0$  و استفاده از شرط ثابت بودن چگالی:

$$(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (۹-۴.۲۰)$$

همراه با شرط عدم لغزش روی بخش مماسی  $\mathbf{v}$ ، مشتق زیر به دست می‌آید:

$$\left. \frac{\partial v_y}{\partial y} \right|_{y=0} = - \frac{\partial \ln s(u, w, t)}{\partial t} \quad (۱۰-۴.۲۰)$$

بنابراین بسط سری تیلر بریده:

$$v_y = v_{y0} - y \frac{\partial \ln s(u, w, t)}{\partial t} + O(y^2) \quad (۱۱-۴.۲۰)$$

مؤلفه قائم  $\mathbf{v}$  را در سیال تراکم‌ناپذیر در نزدیکی فصل مشترک در حال تغییر شکل توصیف می‌کند. از بسط متناظر برای بخش مماسی  $\mathbf{v}$  نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{v}_{||} = y \mathbf{B}_{||}(u, w, t) + O(y^2) \quad (۱۲-۴.۲۰)$$

که در آن  $\mathbf{B}_{||}(u, w, t)$  مؤلفه  $y$  مشتق فصل مشترکی  $\mathbf{v}_{||}$  است. با این نتایج (و چشم‌پوشی از جمله‌های  $O(y^2)$ ) و تقریب (۱)، می‌توان معادله (۱-۴.۲۰) را برحسب  $\omega_A(u, w, y, t)$  به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + (y \mathbf{B}_{||} \cdot \nabla \omega_A) + \left( v_{y0} - y \frac{\partial \ln s}{\partial t} \right) \frac{\partial \omega_A}{\partial y} = D_{AB} (\nabla \cdot \mathbf{n} \nabla \omega_A) + \frac{1}{\rho} r_A$$

5. R. Higbie, *Trans. AIChE*, **31**, 365-389 (1935).

6. P. V. Danckwerts, *Ind. Eng. Chem.*, **43**, 1460-1467 (1951).

7. P. V. Danckwerts, *AIChE Journal*, **1**, 456-463 (1955).

$$= \mathcal{D}_{AB} \left[ \frac{\partial^T \omega_A}{\partial y^T} + (\nabla \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial \omega_A}{\partial y} + \dots \right] + \frac{1}{\rho} r_A \quad (۱۳-۴.۲۰)$$

در این جا  $(\nabla \cdot \mathbf{n})$  دیورژانس  $\mathbf{n}$  روی سطح، در نزدیک ترین نقطه فصل مشترکی و برابر با مجموع انحناهای اصلی سطح در آن نقطه است. علامت  $+$  نشان می دهد که جمله های از مرتبه بالاتر حذف شده اند. برای انتخاب جمله های غالب در معادله (۱۳-۴.۲۰)، مختص بدون بُعد زیر را معرفی می کنیم:

$$\Upsilon = y/\kappa(\mathcal{D}_{AB}) \quad (۱۴-۴.۲۰)$$

که در آن  $\kappa$  ضخامت متوسط لایه مرزی غلظت است. وقتی معادله (۱۴-۴.۲۰) را برحسب این متغیر جدید بنویسیم، نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_A}{\partial t} + \kappa(\Upsilon \mathbf{B}_{||} \cdot \nabla \omega_A) + \left( \frac{v_{y^0}}{\kappa} - \Upsilon \frac{\partial \ln s}{\partial t} \right) \frac{\partial \omega_A}{\partial \Upsilon} \\ = \frac{\mathcal{D}_{AB}}{\kappa^T} \left[ \frac{\partial^T \omega_A}{\partial \Upsilon^T} + \kappa(\nabla \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial \omega_A}{\partial \Upsilon} + \dots \right] + \frac{1}{\rho} r_A \end{aligned} \quad (۱۵-۴.۲۰)$$

که برای یافتن  $\omega_A$ ، برحسب  $w$ ،  $u$ ،  $t$  و  $\Upsilon$  است. چون براساس زمینه های فیزیکی،  $\kappa$  با کاهش  $\mathcal{D}_{AB}$  کاهش خواهد یافت، جمله های غالب به ازای  $\mathcal{D}_{AB}$  کوچک جمله هایی با مرتبه پایین تر  $\kappa$  هستند؛ یعنی همه جمله ها، مگر  $\mathbf{B}_{||}$  و  $(\nabla \cdot \mathbf{n})$ . فرعی بودن جمله های دیگر اعتبار مجانبی تقریب های (۲) و (۳) در جریان های غیر بازگردشی را تأیید می کند. حال، ضرایب همه جمله های غالب باید در گستره  $\mathcal{D}_{AB}$  متناسب باشند تا این جمله ها در حد  $\mathcal{D}_{AB}$  کوچک، اندازه قابل مقایسه داشته باشند. این «اصل موازنه غالب» قبلاً در بخش ۶.۱۳ به کار رفت. در این جا این اصل مرتبه های بزرگی:

$$\mathcal{D}_{AB}/\kappa^T = O(1) \quad v_{y^0}/\kappa = O(1) \quad (۱۷، ۱۶-۴.۲۰)$$

را برحسب جمله های با پایین ترین مرتبه نسبت به  $\kappa$  نشان می دهد. معادله (۱۶-۴.۲۰) با مثال های قبلی دایر بر وابستگی توان  $\frac{1}{3}$  ضخامت لایه مرزی نفوذی به  $\mathcal{D}_{AB}$  در جریان های با سطح آزاد سازگار است. صحت مجانبی فرض (۴) به ازای مقادیر کوچک  $\mathcal{D}_{AB}$  را نیز تأیید می کند. معادله (۱۷-۴.۲۰) با تناسب  $v_z^*$  با  $\sqrt{\mathcal{D}_{AB}}$  که در مسئله آرنولد با معادله (۱۰-۱.۲۰) نشان داده شد، سازگار است. بنابراین معادله لایه مرزی برحسب  $\omega_A$  در هریک از فازهای نزدیک فصل مشترکی که تغییر شکل می دهد، تا پایین ترین مرتبه برحسب  $\kappa$ ، عبارت است از:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + \left( v_{y^0} - y \frac{\partial \ln s}{\partial t} \right) \frac{\partial \omega_A}{\partial y} = \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial^T \omega_A}{\partial y^T} + \frac{1}{\rho} r_A \quad (۱۸-۴.۲۰)$$

در تقریب مرتبه بعد، جمله های متناسب با  $\kappa$  ظاهر می شوند و این جمله ها شامل سرعت مماسی  $y\mathbf{B}_{||}$  و انحنا فصل مشترکی  $(\nabla \cdot \mathbf{n})$  است. جمله اخیر در مسئله های ۱.ج ۲۰ و ۲.ج ۲۰ پدیدار می شود. با ضرب کردن معادله (۱۸-۴.۲۰) در  $\rho/M_A$  (ثابتی برای فرض اختیار شده در این جا)، و استفاده از  $z$  به عنوان مختص قائم بر فصل مشترک، مانند مثال ۱.۱۰۲، معادله متناظر برای غلظت مولی  $c_A(u, w, z, t)$  به دست می آید:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \left( v_{z^0} - z \frac{\partial \ln s}{\partial t} \right) \frac{\partial c_A}{\partial z} = \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial^T c_A}{\partial z^T} + R_A \quad (۱۹-۴.۲۰)$$

که تعمیم چندین مثال قبلی را امکان پذیر می کند. یک نتیجه فرعی مفید دیگر، معادله لایه مرزی برحسب  $x_A$  و  $v^*$  است:

$$\frac{\partial x_A}{\partial t} + \left( v_{z^0}^* - z \frac{\partial \ln s}{\partial t} \right) \frac{\partial x_A}{\partial z} = D_{AB} \frac{\partial^2 x_A}{\partial z^2} + \frac{1}{c} [R_A - x_A (R_A + R_B)] \quad (20-4.20)$$

که در آن  $c$  و  $D_{AB}$  را، مانند مثال ۱۰-۱.۲۰، ثابت گرفته ایم.

مثال ۱۰-۲.۲۰

انتقال جرم با تغییر شکل فصل مشترک غیر یکنواخت

معادله (۱۹-۴.۲۰) صورت تعمیم یافته معادله (۶۵-۱.۲۰) را نتیجه می دهد، هرگاه جمله منبع واکنش  $R_A$  را حذف کنیم و جمله سرعت قائم  $v_{z^0}$  را نادیده بگیریم (و به این ترتیب فرض کنیم که شار جرمی خالص فصل مشترکی کوچک است). معادله ای که به این ترتیب به دست می آید صورتی همانند معادله (۶۵-۱.۲۰) دارد، با این تفاوت که آهنگ رشد کلی سطح،  $d \ln S / dt$  با آهنگ رشد موضعی جایگزین می شود که آن را به صورت  $\partial \ln s(u, w, t) / \partial t$  نشان می دهند. معادله دیفرانسیل جزئی حاصل دو متغیر مکانی اضافی دارد  $(w, u)$ ، اما به همان شیوه می توان آن را حل کرد، زیرا هیچ مشتقی نسبت به متغیرهای اضافه شده ظاهر نمی شود.

حل

بازنویسی معادله (۶۶-۱.۲۰) با تابع ضخامت لایه مرزی  $\delta(u, w, t)$  به رابطه زیر:

$$\delta(u, w, t) = \sqrt{4 D_{AB} \int_0^t [s(u, w, \bar{t}) / s(u, w, t)]^2 d\bar{t}} \quad (21-4.20)$$

و تعمیم های معادله های (۷۱-۱.۲۰ و ۷۲) منتهی می شود:

$$\frac{c_A}{c_{A^0}} = 1 - \operatorname{erf} \frac{z}{\sqrt{4 D_{AB} \int_0^t [s(u, w, \bar{t}) / s(u, w, t)]^2 d\bar{t}}} \quad (22-4.20)$$

$$N_{Az^0} = c_{A^0} \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi t}} \left( \frac{1}{t} \int_0^t [s(u, w, \bar{t}) / s(u, w, t)]^2 d\bar{t} \right)^{-1/2} \quad (23-4.20)$$

این جواب ها، برخلاف معادله های (۷۱-۱.۲۰) و (۷۲-۱.۲۰)، شامل تغییرات مکانی ضخامت لایه مرزی و شار مولی فصل مشترکی  $N_{Az^0}$  هستند که در جریان های غیر یکنواخت پدیدار می شود. کشیدگی موضعی فصل مشترک (مثلاً در مکان هندسی رکود) سبب نازک شدن لایه مرزی و تقویت  $N_{Az^0}$  می شود. انقباض موضعی فصل مشترک (در مکان هندسی جدایش) سبب کاهش و محو  $N_{Az^0}$  می شود، اما سبب فوران سیال را کدمانده در لایه مرزی نیز خواهد شد و به آن امکان می دهد با سیال داخل همان فاز مخلوط شود. مشاهده تقویت انتقال جرم توسط این فرایند اختلاط توسط بعضی از پژوهشگران، به عنوان «تجدید سطح» گزارش شده است، اگرچه ایجاد جزء سطح های جدید در سطح موجود، در مکانیک سیالات پیوستاری، مجاز نیست. این نتایج، و نتایج دیگری که با چشم پوشی از  $v_{z^0}$  به دست می آیند، به آسانی و با قرار دادن متغیرهای جدید زیر در معادله (۱۹-۴.۲۰) حاصل می شوند:

$$Z = z s(u, w, t), \tau = \int_0^t s^2(u, w, \bar{t}) d\bar{t} \quad (25, 24-4.20)$$

درغیاب واکنش شیمیایی، معادله دیفرانسیل حاصل برای تابع غلظت  $c_A(u, w, Z, \tau)$  چنین نوشته می شود:

$$\frac{\partial c_A}{\partial \tau} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial Z^2} \quad (26-4.20)$$

این تعمیم قانون دوم فیک به رابطه‌ای مجانبی برای همرفت واداشته در جریان‌های با سطح آزاد است.

**مثال ۲-۴.۲۰**

جذب گاز با واکنش سریع و تغییر شکل فصل مشترک نحوه تعمیم مثال ۲-۱.۲۰ به سیستم‌های جریان، با استفاده از معادله (۲۶-۴.۲۰)، را برای دو منطقه عاری از واکنش نشان دهید.

حل

با استفاده از معادله (۲۶-۴.۲۰)، جایگزینی‌های زیر برای معادله‌های (۲۷ و ۲۶-۱.۲۰) حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial c_A}{\partial \tau} = D_{AS} \frac{\partial^2 c_A}{\partial Z^2} \quad \text{به ازای } 0 \leq Z \leq Z_R \quad (27-4.20)$$

$$\frac{\partial c_B}{\partial \tau} = D_{BS} \frac{\partial^2 c_B}{\partial Z^2} \quad \text{به ازای } Z_R \leq Z < \infty \quad (28-4.20)$$

حال، صفحه واکنش  $z = z_R$  در مثال اصلی، سطح وابسته به زمان  $Z = Z_R$ ، یا  $z_R/s(u, w, t)$  است. شرایط مرزی و اولیه تغییری نمی‌کنند و در مورد این تعمیم محل جبهه واکنش نیز به کار می‌روند. جواب‌های  $c_A$  و  $c_B$  صورتی مانند معادله‌های (۳۵-۱.۲۰ و ۳۶) خواهند داشت که در آن‌ها  $z/\sqrt{t}$  با  $Z/\sqrt{\tau}$  و  $z_R/\sqrt{4t}$  با  $\sqrt{\gamma}$  جایگزین شده است. ثابت اخیر با معادله (۳۷-۱.۲۰) نشان داده می‌شود. افزایش آهنگ جذب توسط واکنش شیمیایی به موازات عبارت‌هایی است که با معادله (۱۰-۵.۲۲) نشان داده خواهد شد و در معادله‌های (۱۱-۵.۲۲ تا ۱۳) ساده خواهد شد.

**۵.۲۰ «پراکنش تیلر» در جریان آرام در لوله**

در این بخش انتقال و پخش «پالسی» از ماده حل شده  $A$  را که از طریق لوله‌ای مستقیم و طویل به شعاع  $R$ ، مطابق شکل ۱-۵.۲۰، وارد سیال  $B$  کرده‌ایم که جریان آرام پایا دارد، تشریح می‌کنیم. پالسی به جرم  $m_A$  را در مدخل  $z = 0$ ، در فاصله زمانی بسیار کوتاه و نزدیک به  $t = 0$  وارد و پیشرفت آن را در لوله، در مدت زمان طولانی بررسی می‌کنیم. مسائلی از این نوع غالباً در کنترل فرایند (نگاه کنید به مسئله ۲-ج ۴)، روش‌های تشخیص پزشکی<sup>۱</sup>، و انواع کاربردهای زیست‌محیطی پیش می‌آیند.<sup>۲</sup>

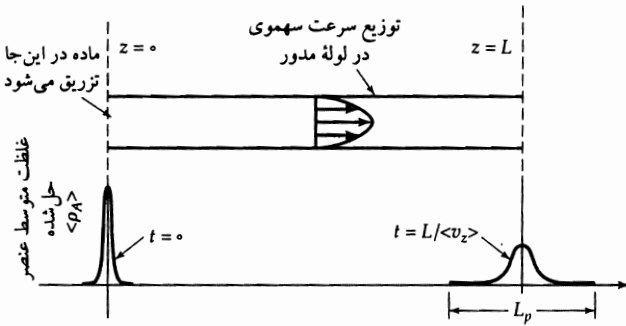
در فاصله کوتاهی در پایین دست مدخل، وابستگی توزیع کسر جرمی به  $\theta$  از بین می‌رود. سپس معادله نفوذ برای  $\omega_A(r, z, t)$  در جریان پویازوی با  $\mu$ ،  $\rho$ ، و  $D_{AB}$  ثابت، صورت زیر را پیدا می‌کند:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + v_{z, \max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial \omega_A}{\partial z} = D_{AB} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \omega_A}{\partial z^2} \right) \quad (1-5.20)$$

این معادله را باید با شرایط مرزی زیر حل کرد:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial r} = 0 \quad \text{در } r = R \text{ و در } r = 0 \text{ در } 1 \text{ و } 2$$

1. J. B. Bassingthwaight and C. A. Goresky, in Section 2, Volume 3 of *Handbook of Physiology*, 2nd edition, American Physiological Society, Bethesda, Md. (1984).  
 2. H. B. Fisher, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **5**, 59-78 (1973); B. E. Logan, *Environmental Transport Processes*, Wiley-Interscience, New York (1999), Chapters 10 and 11; J. H. Seinfeld, *Advances in Chemical Engineering*, Academic Press, New York (1983), pp. 209-299.



شکل ۱-۵.۲۰ نمودار پخش محوری پالس غلظتی در پراکنش تیلر در لولهٔ مدور.

که تقارن شعاعی توزیع کسر جرمی و نفوذناپذیری جدار لوله را نشان می‌دهد. برای این تحلیل بلندمدت نیازی نیست که شکل دقیق پالس تزریقی در  $t = 0$  را مشخص کنیم. برای توزیع کسر جرمی  $\omega_A(r, z, t)$  جواب تحلیلی دقیقی وجود ندارد - اگرچه شرط اولیه‌ای به‌وضوح بیان شد - اما تیلر<sup>۴۰۳</sup> تحلیل تقریبی مفیدی ارائه داد که در این جا آن را خلاصه می‌کنیم. این تحلیل شامل به‌دست آوردن یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی برای کسر جرمی متوسط سطح مقطعی، از معادلهٔ (۱-۵.۲۰) است؛ داریم:

$$\langle \omega_A \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \omega_A r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{2}{R^2} \int_0^R \omega_A r dr \quad (3-5.20)$$

که می‌توان آن را حل کرد تا رفتار در بلندمدت را توصیف کند.

تیلر کار خود را با چشم‌پوشی از جملهٔ نفوذ مولکولی محوری شروع کرد (جمله‌ای که در معادلهٔ (۱-۵.۲۰) زیر آن نقطه‌چین شده‌است)، و متعاقباً نشان داد<sup>۴</sup> که این کار در صورتی مجاز است که عدد پکلت  $Pe'_{AB} = R\langle v_z \rangle / D_{AB}$  از مرتبهٔ  $10^7$  یا بزرگ‌تر باشد، و طول  $L_p(t)$  ناحیهٔ اشغال‌شده توسط این پالس، که در آزمایش تیلر<sup>۴</sup> با چشم سنجیده شد، از مرتبهٔ  $10^7 R$  یا بزرگ‌تر باشد. در این جا  $\langle v_z \rangle = \frac{1}{4} v_{z, \max}$  سرعت میانگین جریان است. تیلر در پی یافتن جوابی معتبر برای زمان‌های طولانی بود. او شرط اعتبار نتیجهٔ خود را چنین برآورد کرد:

$$\frac{L_p}{v_{z, \max}} \gg \frac{R^2}{(3.18)^2 D_{AB}} \quad (4-5.20)$$

وقتی پالسی به طول  $L_p$  به این گستره دست می‌یابد، زمان کافی سپری شده‌است و دیگر شکل اولیهٔ پالس مطرح نیست. برای دنبال کردن نحوهٔ پی‌ریزی توزیع غلظت، هم‌چنان که سیال به سمت پایین دست در حرکت است، مناسب است اگر مختص محوری جابه‌جاشدهٔ زیر را معرفی کنیم:

$$\bar{z} = z - \langle v_z \rangle t \quad (5-5.20)$$

وقتی از این عبارت در معادلهٔ (۱-۵.۲۰) استفاده کنیم (بدون جمله‌ای که زیر آن نقطه‌چین شده)، معادلهٔ نفوذ زیر را برای  $\omega_A(r, \bar{z}, t)$  به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + v_{z, \max} \left( \frac{1}{2} - \xi^2 \right) \frac{\partial \omega_A}{\partial \bar{z}} = \frac{D_{AB}}{R^2} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \omega_A}{\partial \xi} \right) \quad (6-5.20)$$

3. G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc.* **A219**, 186-203 (1953).

4. G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc.*, **A225**, 473-477 (1954).

که در آن  $r/R = \xi$  مختص شعاعی بدون بُعد است. در این جا مشتق زمانی در  $\bar{z}$  گرفته می‌شود و تحت شرط معادله (۴-۵.۲۰) می‌توان از آن، نسبت به جمله نفوذ شعاعی، چشم‌پوشی کرد. در نتیجه، معادله حالت شبه‌پایای زیر را داریم:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \omega_A}{\partial \xi} \right) = \frac{R^{\nu} v_{z, \max}}{D_{AB}} \left( \frac{1}{2} - \xi^2 \right) \frac{\partial \omega_A}{\partial \bar{z}} \quad (۷-۵.۲۰)$$

برای شرط معادله (۴-۵.۲۰)، کسر جرمی را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\omega_A(\xi, \bar{z}, t) = \langle \omega_A \rangle + \omega'_A(\xi, \bar{z}, t) \quad \text{با } |\omega'_A| \ll \langle \omega_A \rangle \quad (۸-۵.۲۰)$$

که  $\langle \omega_A \rangle$  تابع  $\bar{z}$  و  $t$  است. با قرار دادن این عبارت در سمت راست معادله (۷-۵.۲۰)، و چشم‌پوشی از  $\omega'_A$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \omega_A}{\partial \xi} \right) = \frac{R^{\nu} v_{z, \max}}{D_{AB}} \left( \frac{1}{2} - \xi^2 \right) \frac{\partial \langle \omega_A \rangle}{\partial \bar{z}} \quad (۹-۵.۲۰)$$

که می‌توان با استفاده از آن وابستگی شعاعی کسر جرمی را، تحت شرایط معادله (۴-۵.۲۰) به دست آورد. سپس با انتگرال‌گیری از معادله (۹-۵.۲۰)، با شرایط مرزی معادله (۲-۵.۲۰) نتیجه می‌شود:

$$\omega_A(\xi, \bar{z}) = \frac{R^{\nu} v_{z, \max}}{\lambda D_{AB}} \frac{\partial \langle \omega_A \rangle}{\partial \bar{z}} \left( \xi^2 - \frac{1}{4} \xi^4 \right) + \omega_A(0, \bar{z}) \quad (۱۰-۵.۲۰)$$

متوسط این توزیع روی سطح مقطع عبارت است از:

$$\langle \omega_A \rangle = \frac{\int_0^1 \omega_A \xi d\xi}{\int_0^1 \xi d\xi} = \frac{R^{\nu} v_{z, \max}}{24 D_{AB}} \frac{\partial \langle \omega_A \rangle}{\partial \bar{z}} + \omega_A(0, \bar{z}) \quad (۱۱-۵.۲۰)$$

با تفریق کردن این معادله از معادله قبلی، و جایگزین کردن  $v_{z, \max}$  با  $\langle v_z \rangle$ ، سرانجام نتیجه می‌شود:

$$\omega_A - \langle \omega_A \rangle = \frac{R^{\nu} \langle v_z \rangle}{4 D_{AB}} \frac{\partial \langle \omega_A \rangle}{\partial \bar{z}} \left( -\frac{1}{3} + \xi^2 - \frac{1}{4} \xi^4 \right) \quad (۱۲-۵.۲۰)$$

که جواب تقریبی تیلر معادله (۶-۵.۲۰) است.

جریان جرمی کل  $A$  در صفحه‌ای با  $\bar{z}$  ثابت (یعنی جریان نسبت به سرعت متوسط  $\langle v_z \rangle$ ) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \pi R^{\nu} \rho \langle \omega_A (v_z - \langle v_z \rangle) \rangle &= \frac{\pi R^{\nu} \rho \langle v_z \rangle^{\nu}}{D_{AB}} \frac{\partial \langle \omega_A \rangle}{\partial \bar{z}} \int_0^1 \left( -\frac{1}{3} + \xi^2 - \frac{1}{4} \xi^4 \right) \left( \frac{1}{4} - \xi^2 \right) \xi d\xi \\ &= -\frac{\pi R^{\nu} \rho \langle v_z \rangle^{\nu}}{48 D_{AB}} \frac{\partial \langle \omega_A \rangle}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \quad (۱۳-۵.۲۰)$$

سپس به این نکته توجه می‌کنیم که با فرض (مقدار ثابت)  $\rho = \rho_A$  داریم  $\langle \rho_A \rangle \langle v_z \rangle = \rho \langle \omega_A \rangle \langle v_z \rangle$  و  $\langle \rho_A v_A z \rangle \approx \langle \rho_A v_A z \rangle = \langle n_{Az} \rangle$  (جایگزینی  $v_z$  با  $v_{Az}$  در این جا مجاز است، زیرا، با چشم‌پوشی از نفوذ مولکولی محوری، گونه‌های  $A$  و  $B$  با سرعت محوری مساوی حرکت می‌کنند). بنابراین وقتی معادله (۱۳-۵.۲۰) بر  $\pi R^{\nu}$  تقسیم می‌شود، عبارت شار جرمی متوسط:

$$\langle n_{Az} \rangle = \langle \rho_A \rangle \langle v_z \rangle - K \frac{\partial \langle \rho_A \rangle}{\partial \bar{z}} = \langle \rho_A \rangle \langle v_z \rangle - K \frac{\partial \langle \rho_A \rangle}{\partial \bar{z}} \quad (۱۴-۵.۲۰)$$

نسبت به دستگاه مختصات ثابت، حاصل می‌شود. در این جا  $K$  ضریب پراکنش محوری است، که از تحلیل تیلر به دست می‌آید:

$$K = \frac{R^2 \langle v_z \rangle^2}{4\lambda D_{AB}} = \frac{1}{4\lambda} D_{AB} \text{Pe}_{AB}'^2 \quad (15-5.20)$$

این فرمول نشان می‌دهد که پراکنش محوری (در گستره  $1 \gg \text{Pe}_{AB}'$  که تا این جا مورد نظر بود) با تغییر شعاعی  $v_z$  تقویت می‌شود و با نفوذ مولکولی شعاعی، کاهش می‌یابد.

اگرچه معادله (۱۴-۵.۲۰) همان صورت قانون فیک در معادله (ج) جدول ۱۷-۸-۲ را دارد، معادله حاضر شامل نفوذ مولکولی محوری نیست. به علاوه، باید تأکید کرد که  $K$  خاصیت مخلوط سیال نیست، بلکه به  $R$  و  $\langle v_z \rangle$ ، و همچنین به  $D_{AB}$  وابسته است.

سپس معادله پیوستگی، یعنی معادله (۱۹-۱-۶) را می‌نویسیم و آن را روی مقطع لوله متوسط‌گیری می‌کنیم، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_A \rangle = - \frac{\partial}{\partial z} \langle n_{Az} \rangle \quad (16-5.20)$$

وقتی عبارت شار جرمی  $A$  از معادله (۱۴-۵.۲۰)، در رابطه بالا قرار داده شود، معادله پراکنش محوری زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_A \rangle + \langle v_z \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle \rho_A \rangle = K \frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle \rho_A \rangle \quad (17-5.20)$$

این معادله را می‌توان حل کرد و شکل پالس متحرک ناشی از تابع  $\delta$  برای ورود جرم  $m_A$  از ماده  $A$  در جریانی که در غیر این صورت از ماده خالص  $B$  تشکیل می‌شد، را به دست آورد:

$$\langle \rho_A \rangle = \frac{m_A}{\sqrt{\pi R^2} \sqrt{\pi K t}} \exp \left( - \frac{(z - \langle v_z \rangle t)^2}{4 K t} \right) \quad (18-5.20)$$

از این رابطه، همراه با معادله (۱۵-۵.۲۰) می‌توان برای استنتاج  $D_{AB}$  از داده‌های غلظت در پالس متحرک، استفاده کرد. در حقیقت، احتمالاً این بهترین روش برای اندازه‌گیری سریع ضریب نفوذ مایعات است.

کار تیلر شالوده‌نوشته‌گان پر دامنه‌ای را در باب پراکنش همرفتی تشکیل می‌دهد. اما بررسی تقریب‌های اختیار شده و تعیین گستره اعتبار آن‌ها هنوز باقی مانده است. آریس<sup>۵</sup> مسئله پراکنش در لوله‌ها و مجراها را، در گستره کامل  $t$  و شامل نفوذ در جهت‌های  $z$  و  $\theta$ ، به تفصیل بررسی کرد. مجانب بلندمدت او:

$$K = D_{AB} + \frac{R^2 \langle v_z \rangle^2}{4\lambda D_{AB}} = D_{AB} \left( 1 + \frac{1}{4\lambda} \text{Pe}_{AB}'^2 \right) \quad (19-5.20)$$

تعمیم مهمی از معادله (۱۵-۵.۲۰) است. با توجه به این نتیجه، مشاهده می‌شود که نفوذ مولکولی، پراکنش محوری را تقویت می‌کند، هرگاه عدد پکلت  $\text{Pe}_{AB}' = R \langle v_z \rangle / D_{AB}$  از  $\sqrt{4\lambda}$  کوچک‌تر باشد، و در صورت بزرگ‌تر بودن عدد پکلت، نفوذ مولکولی مانع پراکنش محوری خواهد شد، زیرا در این حالت مود انتقال تیلر غالب است.

گستره‌های اعتبار فرمول‌های پراکنش تیلر و آریس، با استفاده از محاسبات تفاضل متناهی<sup>۶</sup> و ترکیب متعامد به‌طور کامل بررسی شده است.<sup>۷</sup> شکل ۲۵-۲۰ گستره‌های سودمند معادله‌های (۱۹ و ۱۵-۵.۲۰) را نشان می‌دهد. از فرمول اخیر برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ دوجزئی استفاده گسترده‌ای شده است و تعمیمی از آن را برای اندازه‌گیری<sup>۸</sup>

5. R. Aris, *Proc. Roy. Soc.*, **A235**, 67-77 (1956).

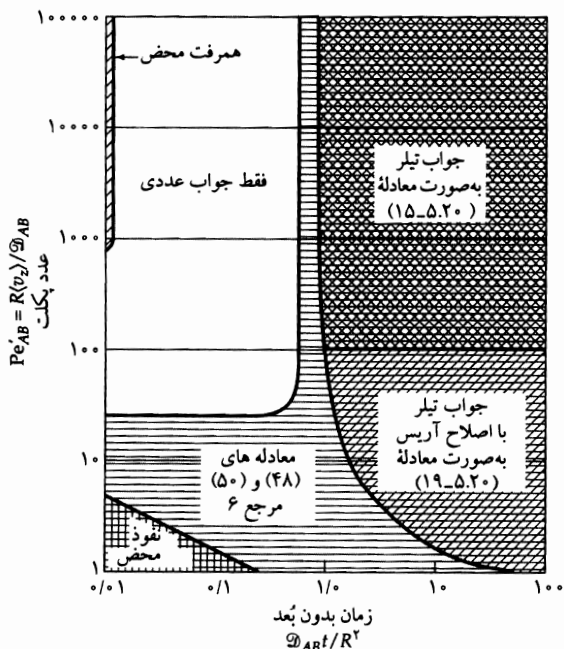
6. V. Ananthakrishnan, W. N. Gill, and A. J. Barduhn, *AIChE Journal*, **11**, 1063-1072 (1965).

7. J. C. Wang and W. E. Stewart, *AIChE Journal*, **29**, 493-497 (1983).

8. Ph. W. M. Rutten, *Diffusion in Liquids*, Delft University Press, Delft, The Netherlands (1992).

ضرایب نفوذ سه‌جزئی در مایعات به‌کار برده‌اند.

به چندین تحقیق ژرف‌تر در مورد پراکنش همرفتی نیز اشاره می‌کنیم. لوله‌های مارپیچی، چنان‌که با آزمایش‌های کوتسکی و آدلر<sup>۹</sup> نشان داده شده و نوزه، لین، و ژیل<sup>۱۰</sup> برای جریان آرام تحلیل کرده‌اند، پراکنش طولی را کاهش می‌دهند. این اثر در طراحی رآکتورهای شیمیایی و اندازه‌گیری‌های ضریب نفوذ اهمیت دارد، زیرا در این موارد می‌توان با مارپیچی کردن لوله، طول کافی را در دستگاهی جمع‌وجور جای داد.



شکل ۲-۵.۲۰ حدود عبارت‌های تیلر (معادله (۱۵-۵.۲۰)) و آریس (معادله (۱۹-۵.۲۰)) برای ضریب پراکنش محوری. این شکل براساس شکل ارائه شده در مرجع ۶، تهیه شده‌است.

شانکار و لنهاف<sup>۱۱</sup> روی پراکنش ستون اضافی، که در پمپ‌ها و لوله‌های اتصال دستگاه‌های کروماتوگرافی ایجاد می‌شود، تحقیقات گسترده‌ای انجام دادند و پیش‌بینی‌های مفصل و آزمایش‌های دقیقی به‌عمل آوردند. آزمایش‌های آن‌ها نشان داد که صورتی از متوسط‌گیری شعاعی در زمان‌های کوتاه‌تر از گستره توصیه‌شده در شکل ۲-۵.۲۰ برای فرمول‌های تیلر-آریس، مهم است. بسته به نوع تجزیه‌گر مورد استفاده، داده‌ها ممکن است توسط متوسط حاصل از اختلاط فنجانی  $\rho_{Ab}$  یا توسط متوسط سطحی  $\rho_A$  که در بالا به‌کار رفت، بهتر توصیف شوند.

هوگلند و پرودوم<sup>۱۲</sup> پراکنش طولی آرام در لوله‌هایی که شعاعشان به‌صورت سینوسی تغییر می‌کند،  $R(z) = R_0(1 + \varepsilon \sin(2\pi z/\lambda))$  را تحلیل کرده‌اند تا پراکنش در فرایندهای با بستر پر شده را مدل‌سازی کنند. نتایج آن‌ها، هنگامی که تغییرات دامنه نسبتاً کوچک  $\varepsilon$  و طول موج نسبتاً بلند  $\lambda/R_0$  دارند، با معادله (۱۹-۵.۲۰) موازی است. ممکن است تصور شود که پراکنش محوری در ستون پر شده شبیه پراکنش محوری در لوله با مارپیچ سینوسی است، اما چنین نیست. به‌جای معادله (۱۹-۵.۲۰) داریم  $K \approx 2/5 D_{AB} Pe'_{AB}$  که به‌جای توان دوم عدد پکلت، با توان اول

9. J. A. Koutsky and R. J. Adler, *Can. J. Chem. Eng.*, **42**, 239-246 (1964).

10. R. J. Nunge, T. S. Lin, and W. N. Gill, *J. Fluid Mech.*, **51**, 363-382 (1972).

11. A. Shankar and A. M. Lenhoff, *J. Chromatography*, **556**, 235-248 (1991).

12. D. A. Hoagland and R. K. Prud'homme, *AIChE Journal*, **31**, 236-244 (1985).



آن ظاهر می‌شود، و در آن  $K$  از  $D_{AB}$  مستقل است.<sup>۱۳</sup> برنز و ادواردز<sup>۱۴</sup> تحلیل‌هایی برای پراکنش همرفتی و واکنش در سیستم‌هایی با شکل‌های هندسی مختلف، شامل لوله‌ها و بستری‌های پر شده به صورت متناوب مکانی، ارائه داده‌اند. پراکنش در جریان‌های پیچیده‌تر نیز بررسی شده است. برای جریان‌های متلاطم در لوله‌های مستقیم، تیلر<sup>۱۵</sup> فرمول پراکنش محوری  $K/Rv^* = 10/1$  را به دست آورد و درستی آن را با آزمایش نشان داد؛ در این فرمول  $v^*$  سرعت اصطکاکی است که در معادله (۲-۳.۵) به کار رفت. بسینگ‌ویت و گورسکی<sup>۱</sup> روی مدل‌های تبادل عنصر حل شده و آب در سیستم‌های قلبی-عروقی تحقیق کردند و چاتوین و آلن<sup>۲</sup> مدل‌های ریاضی پراکنش تلاطمی در رودها و مصب‌های رود را ارائه دادند.

معادله‌های (۱-۵.۲۰) و (۱۸-۵.۲۰) به شرایط معادله‌های (۲-۵.۲۰) و (۴-۵.۲۰) محدودند. بنابراین، برای توصیف نواحی ورودی رآکتورهای حالت پایا، یا سیستم‌هایی با واکنش‌های ناهمگن مناسب نیستند. برای جریان‌های آرام، معادله (۱-۵.۲۰) نقطه شروع بهتری است.

### پرسش‌های تشریحی

۱. در استفاده از سیستم مثال ۱-۱.۲۰ برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ فاز گازی، با چه نوع دشواری‌هایی ممکن است روبه‌رو شویم؟
۲. در استفاده از فن پراکنش تیلر برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ فاز گازی که در بخش ۵.۲۰ شرح داده شد، بروز چه مشکلاتی را پیش‌بینی می‌کنید؟
۳. نشان دهید که معادله (۱۶-۱.۲۰) در معادله دیفرانسیل جزئی، و هم‌چنین شرایط اولیه و مرزی صدق می‌کند.
۴. از جدول ۱-۱.۲۰ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
۵. چرا تبدیل‌های لاپلاس در حل مثال ۳-۱.۲۰ به کار می‌آیند؟ آیا می‌توان از تبدیل‌های لاپلاس برای حل مثال ۱-۱.۲۰ استفاده کرد؟
۶. توزیع سرعت در مثال ۴-۱.۲۰ چگونه به دست می‌آید؟
۷. روش حل مسئله سطح متغیر در مثال ۴-۱.۲۰ را توصیف کنید.
۸. واریسی پیشنهاد شده پس از معادله (۷۴-۱.۲۰) را انجام دهید.
۹. واکنش‌های شیمیایی چه اثری بر لایه مرزی دارند؟
۱۰. عبارت‌های چیلتون-کولبورن در معادله (۵۷-۲.۲۰) را تشریح کنید. آیا انتظار دارید که همین روابط برای جریان در اطراف استوانه‌ها و کره‌ها صادق باشند؟

### مسئله‌ها

۲۰الف ۱. اندازه‌گیری ضریب نفوذ با استفاده از تبخیر حالت ناپایا. با استفاده از داده‌های زیر، ضریب نفوذ اتیل پروپیونات (گونه  $A$ ) را در مخلوطی از ۲۰٪ مولی هوا و ۸۰٪ مولی هیدروژن تعیین کنید (این مخلوط را گاز خالص  $B$  فرض کنید).<sup>۱</sup>

13. A. M. Athalye, J. Gibbs, and E. N. Lightfoot, *J. Chromatog.* **589**, 71-85 (1992).

14. H. Brenner and D. A. Edwards, *Macrotransport Processes*, Butterworth-Heinemann, Boston (1993).

15. G. I. Taylor, *Proc. Roy. Soc.*, **A223**, 446-467 (1954).

1. D. F. Fairbanks C. R. Wilke, *Ind. Eng. Chem.* **42**, 471-475 (1950).

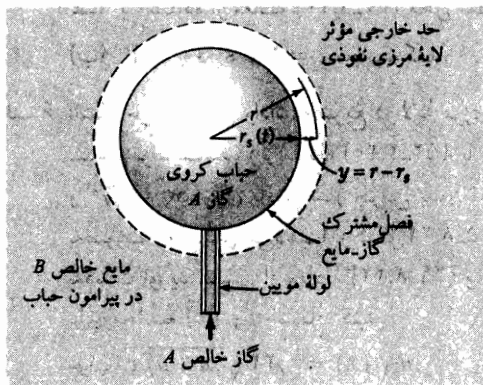
افزایش حجم بخار (cm <sup>3</sup> )	$\sqrt{t}(s^{1/2})$
۱۵٫۵	۰٫۱
۱۹٫۴	۰٫۱۱
۲۳٫۴	۰٫۲۲
۲۶٫۹	۰٫۳۱
۳۰٫۵	۰٫۴۱
۳۴٫۰	۰٫۵۰
۳۷٫۵	۰٫۶۰
۴۱٫۵	۰٫۷۰

این داده‌ها با استفاده از یک لوله شیشه‌ای<sup>۱</sup> به طول ۲۰ cm، و قطر داخلی ۱٫۴۳ cm به دست آمد؛ دما و فشار ۲۷٫۹°C و ۷۶۱٫۲ mm Hg بود. فشار بخار اتیل پروپیونات در این دما ۴۱٫۵ mm Hg است. توجه کنید که  $t$  زمان واقعی از آغاز تبخیر است، درحالی‌که افزایش حجم از زمان  $t \approx ۲۴۰$  s اندازه‌گیری می‌شود.

۲۰ الف ۲. جذب اکسیژن از حباب در حال رشد (شکل ۲۰ الف ۲). اکسیژن با استفاده از یک لوله موئین در آب خالص تزریق می‌شود. این سیستم در دمای ۲۵°C و فشار ۱ atm، عملاً هم‌دما و هم‌فشار است. انحلال‌پذیری اکسیژن در فاز مایع عبارت است از:  $\omega_{A0} = ۷٫۷۸ \times ۱۰^{-۴}$  و ضریب نفوذ فاز مایع برای زوج اکسیژن-آب عبارت است از:  $D_{AB} = ۲٫۶۰ \times ۱۰^{-۵}$  cm<sup>2</sup>/s. مطلوب است محاسبه آهنگ جذب کل لحظه‌ای بر حسب g/s، برای حبابی به قطر ۱ mm و عمر  $t = ۲$  s، با فرض:

(الف) آهنگ رشد حجمی ثابت؛

(ب) آهنگ رشد شعاعی،  $dr_s/dt$  ثابت.



شکل ۲۰ الف ۲. جذب گاز از حباب در حال رشد، که به صورت کره ایده‌آل سازی شده است.

جواب: (الف)  $۷٫۶ \times ۱۰^{-۸}$  g/s؛ (ب)  $۱٫۱۱ \times ۱۰^{-۷}$  g/s.

۲۰ الف ۳. آهنگ تبخیر  $n$ -اکتان، در دمای ۲۰°C و طی ۲۴٫۵ hr، در سیستمی مانند سیستم مثال ۱۰-۱، چند گرم  $n$ -اکتان مایع در  $N_2$  حل خواهد شد، هرگاه فشار سیستم (الف) ۱ atm و (ب) ۲ atm باشد؟ مساحت سطح مایع ۱٫۲۹ cm<sup>2</sup> و فشار بخار  $n$ -اکتان در ۲۰°C برابر ۱۰٫۴۵ mm Hg است. جواب: (الف) ۶٫۷۱ mg.

۴الف. اثر اندازه حباب بر ترکیب فصل مشترک (شکل ۲۰الف.۲). در این مسئله فرض مستقل از زمان بودن ترکیب فصل مشترک،  $\omega_{A_0}$  را برای سیستم نشان داده شده در شکل ۲الف.۲ بررسی می‌کنیم. به این نکته توجه می‌کنیم که به علت کشش فصل مشترکی، فشار گاز  $p_A$  به شعاع لحظه‌ای حباب،  $r_s$ ، وابسته است. رابطه تعادل:

$$p_A = p_\infty + \frac{2\sigma}{r_s} \quad (۱-۴الف.۲۰)$$

کافی است، مگر  $dr_s/dt$  خیلی بزرگ باشد. در این رابطه  $p_\infty$  فشار مایع در ارتفاع میانگین حباب، و  $\sigma$  کشش فصل مشترکی است.

برای ماده‌ای که به ندرت حل می‌شود، ترکیب مایع فصل مشترکی  $\omega_{A_0}$ ، طبق قانون هنری به  $p_A$  بستگی دارد:

$$\omega_{A_0} = H p_A \quad (۲-۴الف.۲۰)$$

که در آن ثابت قانون هنری،  $H$ ، به دو گونه و به دما و فشار مایع وابسته است. این عبارت را می‌توان با معادله (۱-۴الف.۲۰) ترکیب کرد و وابستگی  $\omega_{A_0}$  به  $r_s$  را به دست آورد.

برای حباب گازی که در آب مایع، در  $T = ۲۵^\circ\text{C}$  و  $p_\infty = ۱ \text{ atm}$ ، حل می‌شود اندازه حباب چه قدر باید کوچک باشد تا بتوان  $\omega_{A_0}$  را به اندازه ۱٪ نسبت به مقدار آن برای حبابی بسیار بزرگ، افزایش داد؟ فرض کنید درگستره ترکیب متداول،  $\sigma = ۷۲ \text{ dyn/cm}$ .

جواب: ۱۴/۲ میکرون.

۵الف. جذب با واکنش سریع مرتبه دوم (شکل ۲۰الف.۲). محاسبات زیر را برای سیستم واکنشی نشان داده شده در شکل انجام دهید:

(الف) با استفاده از معادله (۳۷-۱.۲۰) محل منطقه واکنش را نشان دهید.

(ب)  $N_{A_0}$  را در  $t = ۲/۵ \text{ s}$  محاسبه کنید.

۶الف. انتقال جرم همرفتی واداشته سریع در لایه مرزی آرام. مطلوب است محاسبه آهنگ تبخیر  $n_{A_0}(x)$  برای سیستم توصیف شده زیر معادله (۵۲-۲.۲۰)، با فرض این که  $\omega_{A_0} = ۰/۹$ ،  $\omega_{A_\infty} = ۰/۱$ ،  $n_{B_0}(x) = ۰$  و  $Sc = ۲/۰$  برای یافتن شار جرمی بدون بُعد  $\phi$  (که برای محاسبات نفوذ با کسرهای جرمی آن را به صورت  $\phi_\omega$  نشان می‌دهیم) از شکل ۵۸-۲۲ استفاده کنید و  $R$  را به صورت  $R_\omega$  از معادله (۵۱-۲.۲۰) به دست آورید. سپس از معادله (۲۱-۸.۲۲) و جدول ۱-۲.۲۰ برای محاسبه  $K$ ، و از معادله (۴۸-۲.۲۰) برای محاسبه  $n_{A_0}(x)$  استفاده کنید.

جواب:  $n_{A_0}(x) = ۰/۳۳ \sqrt{\rho v_\infty \mu / x}$

۷الف. انتقال جرم همرفتی واداشته کند در لایه مرزی آرام. این مسئله کاربرد معادله‌های (۵۷ و ۵۵-۲.۲۰) را نشان می‌دهد و دقت آن‌ها را در برابر دقت معادله (۴۷-۲.۲۰) می‌سنجد.

(الف) آهنگ تبخیر موضعی،  $n_{A_0}$ ، را به صورت تابعی از  $x$  برای خشک کردن تیغه متخلخل اشباع از آب، به شکلی مطابق شکل ۲-۲.۲۰ تخمین بزنید. این تیغه در جریان سریع هوا و تحت شرایطی خشک می‌شود که در آن  $\omega_{A_0} = ۰/۰۵$ ،  $\omega_{A_\infty} = ۰/۰۱$ ، و  $Sc = ۰/۶$ ، برای محاسبه از معادله (۵۵-۲.۲۰) استفاده کنید.

(ب) با استفاده از معادله (۵۷-۲.۲۰) به طریق دیگری  $n_{A_0}$  را محاسبه کنید.

(ج) برای مقایسه با نتایج تجربی قبلی،  $n_{A^0}$  را با استفاده از معادله (۲۰-۲۰) و جدول ۱-۲۰-۲۰ محاسبه کنید. مقادیر  $K$  به دست آمده در قسمت (الف) برای یافتن  $\Pi'(^\circ, Sc, K)$  دقت کافی دارند.

جواب: (الف)  $n_{A^0}(x) = 0.10188 \sqrt{\rho v_\infty \mu / x}$

(ب)  $n_{A^0}(x) = 0.10196 \sqrt{\rho v_\infty \mu / x}$

(ج)  $n_{A^0}(x) = 0.10188 \sqrt{\rho v_\infty \mu / x}$

۱.۲۰-۲۰ تعمیم مسئله آرنولد برای به حساب آوردن انتقال میان فازی هردو گونه. نحوه به دست آوردن معادله‌های (۲۰-۱.۲۰، ۲۴، ۲۵) را، با شروع از معادله‌های پیوستگی گونه‌های  $A$  و  $B$  (برحسب واحدهای مولی) و شرایط مرزی و اولیه مقتضی، نشان دهید.

۲.۲۰-۲۰ تعمیم مسئله آرنولد به نفوذ غیرهم‌دما. در وضعیت توصیف شده در مسئله ۱.۲۰-۲۰، مطلوب است نتیجه نظیر برای توزیع دمای  $T(z, t)$ .

(الف) نشان دهید که معادله انرژی [معادله (ح) جدول ۲-۱۹] به رابطه زیر خلاصه می‌شود:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_z^* \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (۲۰-۱.۲۰)$$

به شرط آنکه  $k, p, c$  و  $(p$  یا  $k)$  اساساً ثابت باشند، و  $\bar{H}_\alpha = \tilde{H}_\alpha(p, T)$  و  $\tilde{C}_{pA} = \tilde{C}_{pB} = \tilde{C}_p$  (مقدار ثابت)؛ در نتیجه  $\alpha$  مقداری ثابت است. در این جا جمله اتلاف  $(\tau : \nabla v)$  و جمله کار  $\sum_\alpha (\tilde{j}_\alpha \cdot g_\alpha)$  نادیده گرفته می‌شوند. (راهنمایی: از معادله پیوستگی گونه، یعنی معادله (۱۰-۱.۱۹) استفاده کنید.)

(ب) نشان دهید که جواب معادله (۲۰-۱.۲۰)، با این شرط اولیه که  $T = T_\infty$  در  $t = 0$ ، و این شرایط مرزی که  $T = T_0$  در  $T = T_\infty$  و  $z = 0$  در  $T = T_\infty$  عبارت است از:

$$\frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} = \Pi_T(Z_T) = \frac{\text{erf}(Z_T - \varphi_T) + \text{erf}\varphi_T}{1 + \text{erf}\varphi_T} \quad (۲۰-۲.۲۰)$$

با

$$Z_T = \frac{z}{\sqrt{4\alpha t}} \quad \text{و} \quad \varphi_T = v_z^* \sqrt{\frac{t}{\alpha}} \quad (۲۰-۳.۲۰)$$

(ج) نشان دهید که شارهای انرژی و جرم فصل مشترکی با رابطه زیر به  $T_0$  و  $T_\infty$  مربوط می‌شوند:

$$\frac{N_{A^0} + N_{B^0}}{[q_0 / \tilde{C}_p(T_0 - T_\infty)]} = \sqrt{\pi} (1 + \text{erf}\varphi_T) \varphi_T \exp\varphi_T^2 \quad (۲۰-۴.۲۰)$$

به طوری که  $N_{A^0}/q_0$  و  $N_{B^0}/q_0$  به ازای  $t > 0$ ، مقداری ثابت‌اند این نتیجه به دردیخور از آن رو حاصل می‌شود که زمان یا طول مشخصه‌ای در مدل مکانیکی سیستم وجود ندارد.

۳.۲۰-۲۰ شرط مرزی استوکیومتریکی برای واکنش برگشت‌ناپذیر سریع. شارهای واکنش‌گر در مثال ۲-۱.۲۰ باید در رابطه استوکیومتریکی صدق کنند:

$$\frac{1}{a} c_A (v_{Az} - v_R) = -\frac{1}{b} c_B (v_{Bz} - v_R) \quad \text{در } z = z_R(t) \quad (۲۰-۱.۳)$$

که در آن  $v_R = dz_R/dt$ . نشان دهید که هرگاه از قانون اول فیک استفاده کنیم، با فرض ثابت بودن  $c$  و واکنش برگشتناپذیر فوری، این رابطه به معادله (۳۱-۱.۲۰) منتهی می‌شود.

۴.ب.۲۰ پراکنش تیلر در جریان در شکاف (شکل ۳.ب.۲). نشان دهید که، برای جریان آرام در شکاف مسطحی به عرض  $2B$ ، و طول  $L$  ضریب پراکنش تیلر عبارت است از:

$$K = \frac{2B^2 \langle v_z \rangle^2}{10.5 D_{AB}} \quad (۱-۴.ب.۲۰)$$

۵.ب.۲۰ نفوذ از منبع نقطه‌ای لحظه‌ای. در زمان  $t = 0$ ، جرم  $m_A$  از گونه  $A$  به داخل پهنه بزرگی از سیال  $B$  تزریق می‌شود. نقطه تزریق را مبدأ مختصات بگیرید. ماده  $A$  در امتداد شعاعی در همه جهت‌ها پخش می‌شود. غلظت  $A$  را می‌توان در کتاب کارسلاو و بیگر پیدا کرد:<sup>۲</sup>

$$\rho_A = \frac{m_A}{(4\pi D_{AB} t)^{3/2}} \exp(-r^2/4D_{AB}t) \quad (۱-۵.ب.۲۰)$$

(الف) نشان دهید که معادله (۱-۵.ب.۲۰) در قانون دوم فیک صدق می‌کند.

(ب) نشان دهید که معادله (۱-۵.ب.۲۰) در شرایط مرزی در  $r = \infty$  صدق می‌کند.

(ج) نشان دهید که معادله (۱-۵.ب.۲۰) وقتی روی کل فضا از آن انتگرال‌گیری شود،  $m_A$  را به دست می‌دهد.

(د) وقتی  $t \rightarrow 0$ ، معادله (۱-۵.ب.۲۰) چه می‌شود؟

۶.ب.۲۰ نفوذ ناپایا با واکنش شیمیایی مرتبه اول. با استفاده از معادله (۴۳-۱.۲۰) توزیع غلظت را در وضعیت‌های زیر به دست آورید:

(الف) ذره کاتالیزگر مسئله ۱۸.ب.۱۴، در عملیات وابسته به زمان با همان شرایط مرزی قبلی، اما با این شرط اولیه که  $c_A = 0$  در  $t = 0$ . معادله دیفرانسیل  $c_A$  چنین است:

$$\varepsilon \frac{\partial c_A}{\partial t} = D_A \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} - k_1'' a c_A \quad (۱-۶.ب.۲۰)$$

که در آن  $\varepsilon$  کسر حفره داخلی ذره است. جواب لازم را می‌توان با استفاده از  $k_1''' a = 0$  و نتیجه مثال ۲-۱.۱۲ به دست آورد.

(ب) نفوذ و واکنش عنصر حل شده  $A$  که در زمان  $t = 0$  در نقطه  $r = 0$  (در دستگاه مختصات کروی) در محیط ساکن نامتناهی تزریق می‌شود. در این جا تابع  $g$  معادله (۴۳-۱.۲۰) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$g = \frac{1}{(4\pi D_{AB} t)^{3/2}} \exp(-r^2/4D_{AB}t) \quad (۲-۶.ب.۲۰)$$

و تابع  $f$  صفر می‌شود.

۷.ب.۲۰ انتقال هم‌زمان اندازه حرکت، گرما، و جرم: شرایط مرزی جایگزین (شکل ۷.ب.۲۰). توزیع‌های بدون بُعد  $\Pi(\eta, \Lambda, K)$  در معادله (۴۳-۲.۲۰) در مورد وضعیت‌های مختلف قابل کاربرد است. با استفاده از معادله‌های (۴۹-۲.۲۰ تا ۵۲)، معادله‌هایی ضمنی برای محاسبه شار جرمی خالص بدون بُعد  $K$  در

2. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959), p. 257.

عملیات حالت پایای زیر، به دست آورید:

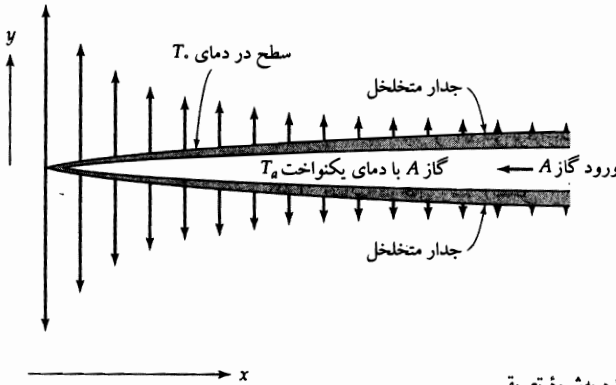
(الف) تبخیر مایع خالص  $A$  از صفحه متخلخل اشباع، در جریان گازی تشکیل شده از  $A$  و  $B$ . ماده  $B$  در مایع  $A$  انحلال ناپذیر است.

(ب) واکنش لحظه‌ای برگشت‌ناپذیر گاز  $A$  با صفحه جامد  $C$  برای تولید گاز  $B$ ، طبق واکنش  $A + C \rightarrow 2B$ . وزن‌های مولکولی  $A$  و  $B$  مساوی‌اند.

(ج) سرمایش تعریقی صفحه توخالی با جدار متخلخل، مطابق شکل. سیال در همه جا  $A$  خالص است و سیال تزریقی چنان توزیع می‌شود که تمام سطح خارجی، صفحه در دمای یکنواخت  $T_0$  بماند.

جریان نزدیک‌شونده گاز  $A$  با

دمای  $T_\infty$  و سرعت  $v_\infty$   
 سرعت تزریق  $v_0(x)$



شکل ۲۰. ب. ۷. صفحه متخلخل سرد شده به شیوه تعریقی.

جواب: (الف)  $K = \frac{1}{Sc} \left( \frac{\omega_{A0} - \omega_{A\infty}}{1 - \omega_{A0}} \right) \Pi'(\cdot, Sc, K)$

(ب)  $K = \frac{1}{Sc} \omega_{A\infty} \Pi'(\cdot, Sc, K)$

(ج)  $K = \frac{1}{Pr} \left( \frac{T_s - T_\infty}{T_a - T_s} \right) \Pi'(\cdot, Pr, K)$

۲۰. ب. ۸. جذب از حباب در حال ضربان. با استفاده از نتایج مثال (۱۰.۲۰-۴)،  $\delta(t)$  و  $N_{A0}(t)$  را برای حبابی که شعاع آن از ضربان موج مربعی زیر پیروی می‌کند، محاسبه کنید:

$$r_s = R_1 \quad 2n < \omega t < 2n + 1$$

$$r_s = R_2 \quad 2n + 1 < \omega t < 2n + 2 \quad (۱۰.۲۰-۸)$$

در این رابطه  $\omega$  بسامد مشخصه است و  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

۲۰. ب. ۹. واریسی درستی جواب معادله پراکنش تیلر. نشان دهید که جواب معادله (۱۷.۲۰-۵)، که به صورت معادله (۱۸.۲۰-۵) ارائه شد، در معادله دیفرانسیل، شرایط اولیه، و شرایط مرزی صدق می‌کند. شرایط مرزی<sup>۳</sup> عبارت‌اند

3. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Heat Conduction in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959), 10.3.

برای آشنایی با آثار طول لوله متناهی، نگاه کنید به

H. Brenner, *Chem. Eng. Sci.*, 17, 229-243 (1962).

از این که وقتی  $z \rightarrow \pm\infty$ :

$$\langle \rho_A \rangle \rightarrow 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial z} \langle \rho_A \rangle \rightarrow 0 \quad (۱-۹.۲۰)$$

شرط اولیه این است که در  $t = 0$  پالس عنصر حل شده به جرم  $m_A$  در  $z = 0$  متمرکز می شود، به طوری که در هیچ جای دیگر لوله عنصر حل شده وجود ندارد، و به ازای همه زمان ها داریم:

$$\pi R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \rho_A \rangle dz = m_A \quad (۲-۹.۲۰)$$

(الف) نشان دهید که با استفاده از تبدیل مختصات زیر، می توان معادله (۱۷-۵.۲۰) را به صورت تک بُعدی قانون دوم فیک خلاصه کرد:

$$\bar{z} = z - \langle v_z \rangle t \quad (۳-۹.۲۰)$$

(ب) نشان دهید که معادله (۱۸-۵.۲۰) در معادله به دست آمده در قسمت (الف) صدق می کند.

(ج) نشان دهید که معادله های (۱-۹.۲۰ و ۲) نیز برقرارند.

۱.۲۰ ج تحلیل مرتبه بزرگی جذب گاز از حباب در حال رشد (شکل ۲۰ الف ۲).

(الف) برای رشد حباب کروی مسئله ۲۰ الف ۲ (الف) در مایعی با چگالی ثابت، نشان دهید که در فاز مایع، طبق معادله پیوستگی، سرعت شعاعی برابر است با:  $v_r = C_0 / r^2$ . سپس با استفاده از این شرط مرزی که  $v_r = dr_s / dt$  در  $r = r_s(t)$ ، رابطه زیر را به دست آورید:

$$v_r = \frac{r_s^2}{r^2} \frac{dr_s}{dt} \quad (۱-۱.۲۰)$$

(ب) سپس، با استفاده از معادله پیوستگی گونه در مختصات کروی، درحالی که نفوذ فقط در امتداد شعاعی انجام می شود، نشان دهید که:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + \left( \frac{r_s^2}{r^2} \frac{dr_s}{dt} \right) \frac{\partial \omega_A}{\partial r} = D_{AB} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega_A}{\partial r} \right) \quad (r > r_s(t)) \quad (۲-۱.۲۰)$$

و شرایط اولیه و مرزی مناسب را مشخص کنید.

(ج) برای زمان های تماس کوتاه، منطقه نفوذ مؤثر لایه ای نسبتاً نازک است، به طوری که می توان متغیر  $y = r - r_s(t)$  را معرفی کرد. نشان دهید که این عمل به رابطه زیر منتهی می شود:

$$(۱) \quad (۲) \quad (۳)$$

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + \left( -\frac{2y}{r_s} + \frac{3y^2}{r_s^2} + \dots \right) \frac{dr_s}{dt} \frac{\partial \omega_A}{\partial y}$$

$$(۴) \quad (۵) \quad (۶) \quad (۷)$$

$$= D_{AB} \left[ \frac{\partial^2 \omega_A}{\partial y^2} + \frac{2}{r_s} \left( 1 - \frac{y}{r_s} + \frac{y^2}{r_s^2} - \dots \right) \frac{\partial \omega_A}{\partial y} \right] \quad (۳-۱.۲۰)$$

(د) با توجه به مثال ۱-۲۰-۴، مشاهده می شود که سهم های جمله های (۱)، (۲)، و (۴)، در لایه مرزی غلظت،

یعنی در  $y = O(\delta_\omega) = O(\sqrt{D_{AB}t})$  همگی مرتبه بزرگی یکسانی دارند. مرتبه بزرگی این جمله‌ها را  $O(1)$  فرض کنید و مرتبه بزرگی بقیه جمله‌های نشان داده شده در معادله (۲۰-ج.۱-۳) را تخمین بزنید. (ه) نشان دهید که جمله‌های دارای دو مرتبه بالاتر در معادله (۲۰-ج.۱-۳) نتیجه می‌دهند:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + \left[ -\frac{2y}{r_s} + \frac{3y^2}{r_s^2} \right] \frac{dr_s}{dt} \frac{\partial t}{\partial r} = D_{AB} \left[ \frac{\partial^2 \omega_A}{\partial y^2} + \frac{2}{r_s} \frac{\partial \omega_A}{\partial y} \right] \quad (۲۰-ج.۱-۴)$$

که جمله‌های مرتبه دوم با نقطه‌چین مشخص شده‌اند.

(و) این جواب به‌طور کامل در نوشتگان الکتروشیمی<sup>۴</sup> تحلیل شده‌است. نتایج مربوط به  $n_{A_0}$  در مسئله ۲۰-ج.۲. بیشتر بررسی می‌شود.

۲۰-ج.۲ اثر انحنای سطح روی جذب از حباب در حال رشد (شکل ۲۰الف.۲). گاز خالص  $A$  از یک لوله موئین کوچک، با آهنگ جریان مولی ثابت  $W_A$  به داخل مخزن بزرگی از مایع  $B$  جاری می‌شود که در ابتدا خالص است. شار مولی فصل مشترکی  $A$  به داخل مایع را می‌توان با استفاده از معادله لویج-کوئکی-نیومن پیش‌بینی کرد:

$$N_{A_0} = c_{A_0} \sqrt{\frac{\gamma D_{AB}}{3\pi t}} \left( 1 + \frac{16}{11} \sqrt{\frac{3}{\gamma}} \frac{\Gamma(\frac{15}{14})}{\Gamma(\frac{11}{14})} \frac{D_{AB}^{1/2} t^{1/6}}{\gamma} \right) \quad (۲۰-ج.۲-۱)$$

که در آن:

$$\gamma = \frac{r_s(t)}{t^{1/2}} = \left( \frac{3W_A}{4\pi c} \right)^{1/2} \quad (۲۰-ج.۲-۲)$$

برای حرکت شعاعی محض و حباب کروی. معادله (۲۰-ج.۲-۱) نتیجه معادله (۲۰-ج.۱-۴) است.

(الف) عبارتی برای تعداد مول‌های  $A$  جذب شده در دوره عمر حباب،  $t_0$ ، به‌دست آورید.

(ب) با استفاده از معادله (۲۰-ج.۲-۱) نتایج دقیق‌تری برای آهنگ‌های جذب در مسئله ۲۰الف.۲ به‌دست آورید.

۲۰-ج.۳ جذب با واکنش شیمیایی در محیط نیمه‌نامتناهی. محیطی نیمه‌نامتناهی از ماده  $B$  از مرز صفحه‌ای  $x = 0$  تا  $x = \infty$  گسترش می‌یابد. در زمان  $t = 0$ ، ماده  $A$  در صفحه  $x = 0$ ، با غلظت سطحی  $c_{A_0}$  با این محیط تماس پیدا می‌کند (مثلاً برای جذب گاز  $A$  توسط مایع  $B$ ، غلظت  $c_{A_0}$  غلظت اشباع خواهد بود). مواد  $A$  و  $B$  باهم واکنش می‌کنند تا طبق واکنش برگشت‌ناپذیر مرتبه اول  $A + B \rightarrow C$ ، ماده  $C$  تولید کنند. فرض می‌شود که غلظت  $A$  چنان کم است که معادله توصیف‌کننده فرایند نفوذ به‌علاوه واکنش شیمیایی، چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} - k_1''' c_A \quad (۲۰-ج.۳-۱)$$

که در آن  $k_1'''$  ثابت آهنگ مرتبه اول است. این معادله با این شرط اولیه که  $c_A = 0$  در  $t = 0$  و این

4. J. Koutecky', *Czech. J. Phys.*, 2 50-55 (1953). See also V. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1962).

سست راست معادله‌های (۱۷.۱۰۸) و (۱۸.۱۰۸) لویج را باید در  $t^{1/2}$  ضرب کرد. هم‌چنین نگاه کنید به

J. S. Newman, *Electrochemical Systems*, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1991).



شرایط مرزی که  $c_A = c_{A0}$  در  $x = 0$  و  $c_A = 0$  در  $x = \infty$  حل شده است. جواب عبارت است از:

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \frac{1}{4} \exp\left(-\sqrt{\frac{k_1''' x^2}{D_{AB}}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4D_{AB}t}} - \sqrt{k_1''' t}\right) + \frac{1}{4} \exp\left(\sqrt{\frac{k_1''' x^2}{D_{AB}}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4D_{AB}t}} + \sqrt{k_1''' t}\right) \quad (20-3)$$

(الف) تحقیق کنید که معادله (۲۰-۳) در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی صدق می‌کند.  
(ب) نشان دهید که شار مولی در فصل مشترک  $x = 0$  چنین است:

$$N_{Ax}|_{x=0} = c_{A0} \sqrt{D_{AB} k_1'''} \left( \operatorname{erf} \sqrt{k_1''' t} + \frac{\exp(-k_1''' t)}{\sqrt{\pi k_1''' t}} \right) \quad (3-3)$$

(ج) نشان دهید که تعداد کل مول‌های جذب‌شده روی سطح  $A$  تا زمان  $t$  برابر است با:

$$M_A = A c_{A0} \sqrt{D_{AB} t} \left[ \left( \sqrt{k_1''' t} + \frac{1}{2\sqrt{k_1''' t}} \right) \operatorname{erf} \sqrt{k_1''' t} + \frac{\exp(-k_1''' t)}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (4-3)$$

(د) نشان دهید که به ازای مقادیر بزرگ  $k_1''' t$ ، عبارت قسمت (ج) در حالت مجانبی به معادله زیر تحویل می‌شود:

$$M_A = A c_{A0} \sqrt{D_{AB} k_1'''} \left( t + \frac{1}{2k_1'''} \right) \quad (5-3)$$

این نتیجه،<sup>۶</sup> به ازای مقادیر  $k_1''' t > 4$  تا حدود ۲٪ دقت دارد.

۴-۲۰ طراحی مدارهای کنترل سیال. می‌خواهیم رآکتوری را از طریق تجزیه پیوسته یک جریان جانبی کنترل کنیم. مطلوب است محاسبه بسامد حداکثر تغییر غلظتی که می‌توان به صورت تابعی از آهنگ استخراج حجمی آشکارسازی کرد، هرگاه جریان از طریق لوله‌ای به طول ۱۰ cm و قطر داخلی ۰/۵ mm بیرون کشیده شود. پیشنهاد: از این معیار استفاده کنید که انحراف استاندارد عمر پالس بیش‌تر از ۵٪ زمان چرخه  $t_0 = 2\pi/\omega$  نباشد؛  $\omega$  بسامد مطلوب برای آشکارسازی است.

۵-۲۰ تفکیک گاز برآثر گرادیان دما. گازی در حال تفکیک (مثلاً  $2\text{Na} \leftrightarrow \text{Na}_2$ ) در لوله‌ای وجود دارد که دو سر آن را بسته‌اند و دمای دو سر آن در مقادیر متفاوتی نگه داشته می‌شود. به علت وجود گرادیان دما، جریان پیوسته‌ای از مولکول‌های  $\text{Na}_2$  از سر سرد لوله به طرف سر داغ آن برقرار است و در این سر به اتم‌های  $\text{Na}$  تفکیک می‌شود، که به نوبه خود از سر داغ لوله به طرف سر سرد آن می‌روند. معادله‌های تغییر را بنویسید تا توزیع‌های غلظت را به دست آورید. نتایج خود را با نتایج دیراک مقایسه کنید.<sup>۷</sup>

۱-۵۲ آزمایش دوحباب برای اندازه‌گیری ضریب نفوذ گاز، جواب تحلیلی (شکل ۱۸ ب-۶). این آزمایش، که در

5. P. V. Danckwerts, *Trans. Faraday Soc.*, **46**, 300-304 (1950).

6. R. A. T. O. Nijsing, *Absorptie van gassen in vloeistoffen, zonder en met chemische reactie*, Academisch Proefschrift, Technische Universiteit Delft (1957).

7. P. A. M. Dirac, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **22**, Part II, 132-137 (1924).

این نخستین اثر دیراک بود که در دوران تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد نوشت.

مسئله ۱۸ ب. ۶ توصیف شد، در آن جا با استفاده از روش حالت<sup>۱</sup> شبه پایا حل شد. روش جداسازی متغیرها جواب دقیق ترکیب‌های دو حباب را، به صورت زیر، نتیجه می‌دهد:

$$x_A^{\pm} = \frac{1}{\gamma} \left[ 1 \mp \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{\gamma N}{\gamma_n} \right) \frac{\sqrt{\gamma_n^2 + N^2}}{\gamma_n^2 + N^2 + N} \exp \left( -\frac{\gamma_n^2 D_{AB} t}{L^2} \right) \right] \quad (۱-۱-۲۰)$$

که در آن  $\gamma_n$  ریشه<sup>n</sup>  $N \tan \gamma = N$  و  $N = SL/V$  است. در این جا  $x_{\pm A}$  کسرهای مولی  $A$  در  $z = \pm L$  است. بین معادله (۱-۱-۲۰) و اندازه‌گیری‌های تجربی آندره<sup>۲</sup> مقایسه عددی انجام دهید. معادله (۱-۱-۲۰) را با نتیجه ساده‌تر معادله (۱۸ ب. ۴-۶) نیز مقایسه کنید.

۲.۲۰ نفوذ میان فازی حالت ناپایا. دو حلال امتزاج‌ناپذیر I و II در صفحه<sup>۳</sup>  $z = 0$  با هم تماس دارند. در زمان  $t = 0$ ، غلظت  $A$  برابر است با:  $c_I = c_I^0$  در فاز I و  $c_{II} = c_{II}^0$  در فاز II. به ازای  $t > 0$  نفوذ در فصل مشترک مایع-مایع رخ می‌دهد. فرض می‌کنیم ماده<sup>۴</sup> حل شده فقط با غلظت ناچیز در هر دو فاز وجود دارد، به طوری که قانون دوم نفوذ فیک برقرار است. بنابراین باید معادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\frac{\partial c_I}{\partial t} = D_I \frac{\partial^2 c_I}{\partial z^2} \quad -\infty < z < 0 \quad (۱-۲-۲۰)$$

$$\frac{\partial c_{II}}{\partial t} = D_{II} \frac{\partial^2 c_{II}}{\partial z^2} \quad 0 < z < +\infty \quad (۲-۲-۲۰)$$

که در آن‌ها  $c_I$  و  $c_{II}$  غلظت‌های  $A$  در فازهای I و II، و  $D_I$  و  $D_{II}$  ضرایب نفوذ متناظرند. شرایط اولیه و مرزی عبارت‌اند از:

$$c_I = c_I^0 \quad \text{در } t = 0, \text{ داریم} \quad (۳-۲-۲۰)$$

$$c_{II} = c_{II}^0 \quad \text{در } t = 0, \text{ داریم} \quad (۴-۲-۲۰)$$

$$c_{II} = m c_I \quad \text{در } z = 0, \text{ داریم} \quad (۵-۲-۲۰)$$

$$-D_I \frac{\partial c_I}{\partial z} = -D_{II} \frac{\partial c_{II}}{\partial z} \quad \text{در } z = 0, \text{ داریم} \quad (۶-۲-۲۰)$$

$$c_I \rightarrow c_I^0 \quad \text{شرط مرزی ۳: وقتی } z \rightarrow -\infty \quad (۷-۲-۲۰)$$

$$c_{II} \rightarrow c_{II}^0 \quad \text{شرط مرزی ۴: وقتی } z \rightarrow +\infty \quad (۸-۲-۲۰)$$

نخستین شرط مرزی در  $z = 0$  بیان تعادل در فصل مشترک است و  $m$  «ضریب توزیع» یا «ثابت قانون هنری» است. شرط مرزی دوم نشان می‌دهد که شار مولی محاسبه شده در  $z = 0^-$  با شار مولی محاسبه شده در  $z = 0^+$  برابر است؛ یعنی در فصل مشترک مایع-مایع،  $A$  تلف نمی‌شود.

(الف) این دستگاه معادله‌ها را با استفاده از تبدیل لاپلاس، یا روش مناسب دیگری حل کنید تا نتیجه<sup>۵</sup> زیر حاصل شود:

$$\frac{c_I - c_I^0}{c_{II}^0 - m c_I^0} = \frac{1 + \operatorname{erf}(z/\sqrt{4D_I t})}{m + \sqrt{D_I/D_{II}}} \quad (۹-۲-۲۰)$$

8. R. B. Bird, *Advances in Chemical Engineering*, Vol. 1, Academic Press, New York (1956), pp. 156-239;

نتیجه گفته شده در پایین صفحه ۲۰۷ نادرست است، زیرا عامل  $(-1)^{n+1}$  جا افتاده است. هم چنین نگاه کنید به

H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959), p. 129.

9. S. P. S. Andrew, *Chem. Eng. Sci.*, 4, 269-272 (1955).

$$\frac{c_{II} - c_{II}^0}{c_1^0 - (1/m)c_{II}^0} = \frac{1 - \operatorname{erf}(z/\sqrt{4D_{II}t})}{(1/m) + \sqrt{D_{II}/D_I}} \quad (۱۰-۲۰-۲۰)$$

(ب) عبارتی برای آهنگ انتقال جرم در فصل مشترک بیاید.

۳.۵۲۰ اندازه بحرانی یک سیستم خودکاتالیزی. می‌خواهیم از نتیجه مثال ۱.۲۰-۳ برای تشریح اندازه بحرانی سیستمی استفاده کنیم که در آن یک «واکنش خودکاتالیزی» انجام می‌شود. در چنین سیستمی فراورده‌های واکنش با آهنگ واکنش افزایش می‌یابند. اگر نسبت سطح سیستم به حجم آن بزرگ باشد، آن‌گاه فراورده‌های واکنش میل به گریز از مرزهای سیستم دارند. اما اگر نسبت سطح به حجم کوچک باشد، ممکن است آهنگ گریز فراورده‌ها از آهنگ تولید آن‌ها پایین‌تر باشد و آهنگ واکنش به سرعت افزایش خواهد یافت. برای سیستمی با شکل مفروض، یک اندازه بحرانی وجود دارد که در آن آهنگ تولید فراورده‌ها با آهنگ گریز آن‌ها برابر است. نمونه‌ای از این نوع سیستم، شکافت هسته‌ای است. در یک پیل هسته‌ای، آهنگ شکافت به غلظت موضعی نوترون‌ها بستگی دارد. اگر نوترون‌ها با آهنگی بالاتر از آهنگ گریز از طریق نفوذ تولید شوند، واکنش تداوم می‌یابد و انفجار هسته‌ای رخ می‌دهد. در بسیاری از سیستم‌های شیمیایی نیز رفتار مشابهی مشاهده می‌شود، اگرچه این رفتار معمولاً پیچیده‌تر است. نمونه‌ای از این رفتار تجزیه گرمایی گاز استیلن است که، طبق واکنش کلی زیر، از لحاظ ترمودینامیکی ناپایدار است:



به نظر می‌رسد که این واکنش توسط مکانیسم رادیکال آزاد زنجیری شاخه‌دار پیش می‌رود که در آن رادیکال‌های آزاد، از لحاظ کیفی، مانند نوترون‌های پاراگراف قبل رفتار می‌کنند، به طوری که تجزیه خودکاتالیزی می‌شود. اما رادیکال‌های آزاد، بر اثر تماس با سطحی آهنی، به طور مؤثری خنثی می‌شوند، به طوری که غلظت رادیکال آزاد روی چنین سطحی، نزدیک صفر خواهد بود. سپس می‌توان گاز استیلن را، در کمال ایمنی، در یک لوله آهنی با قطری کم‌تر از قطر «بحرانی» نگهداری کرد؛ هرچه فشار یا دمای گاز بالاتر باشد، این قطر بحرانی کوچک‌تر می‌شود. اگر قطر لوله خیلی زیاد باشد، حتی ممکن است تشکیل یک رادیکال آزاد سبب افزایش سریع آهنگ تجزیه شود و خطر انفجار شدید را در پی داشته باشد.

(الف) سیستمی را در نظر بگیرید که در استوانه‌ای طویل قرار دارد و در آن فرایند نفوذ و واکنش به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) + k_1''' c_A \quad (۲-۳-۲۰)$$

که در آن  $c_A = 0$  در  $r = R$  و  $c_A = f(r)$  در  $t = 0$  که در آن  $f(r)$  تابعی از  $r$  است. با استفاده از نتیجه مثال ۱.۲۰-۳، جوابی برای  $c_A(r, t)$  به دست آورید.

(ب) نشان دهید که شعاع بحرانی این سیستم عبارت است از:

$$R_{\text{crit}} = \alpha_1 \sqrt{\frac{D_{AB}}{k_1'''}} \quad (۳-۳-۲۰)$$

که در آن  $\alpha_1$  نخستین صفر از تابع مرتبه صفر بسل  $J_0$  است.

(ج) در هسته لخت یک راکتور هسته‌ای استوانه‌ای،<sup>۱۰</sup> مقدار مؤثر  $k_1'''/D_{AB}$  برابر است با:

$$9 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2} \text{ چه قدر است؟}$$

جواب:  $R_{crit} = ۲۵,۳ \text{ cm}$  (ج)

۴.۵۲۰ پراکنش یک پالس پهن در جریان محوری آرام پایا، در داخل لوله. در مسئله پراکنش تیلر، پالس گسترده‌ای از ماده حل شده  $A$  را در نظر بگیرید که وارد لوله‌ای به طول  $L$  می‌شود که حاوی سیالی با جریان آرام و پایاست. شرط مرزی ورودی چنین است

$$\frac{d}{dt} m_A = f(t), \quad t = 0, \quad (۱-۴.۵۲۰)$$

با همان محدودیت‌های نفوذ قابل چشم‌پوشی در ورودی و خروجی لوله، که در مسئله ۹.۲۰ دیدیم. اکنون توجه شما را به این نکته جلب می‌کنیم که هر جزء از ماده حل شده مستقل از بقیه عمل می‌کند. (الف) با استفاده از نتیجه مسئله ۹.۲۰، نشان دهید که غلظت خروجی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(\rho_A)|_{z=L} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 R^2 K}} \int_{-\infty}^t \frac{f(t')}{\sqrt{t-t'}} \exp\left(-\frac{[L - \langle v_z \rangle (t-t')]^2}{4K(t-t')}\right) dt' \quad (۲-۴.۵۲۰)$$

(ب) حالت خاص این نتیجه را برای پالس مربعی:

$$f = f_0 \quad 0 \leq t \leq t_0; \quad f = 0 \quad t > t_0. \quad (۳-۴.۵۲۰)$$

به دست آورید. نتیجه را برای چند مقدار  $\langle v_z \rangle t_0 / L$  ترسیم کنید.

۵.۵۲۰ دیورژانس سرعت در دستگاه مختصات متصل به فصل مشترک. دامنه بسته  $D(u, w, y)$  را در دستگاه مختصات متصل به فصل مشترک شکل ۲-۴.۲۰ در نظر بگیرید.

(الف) با انتگرال‌گیری از معادله (۷-۴.۲۰) روی سطح مرز  $D$  نتیجه زیر را به دست آورید:

$$\int_{S_D} (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}_D) = \int_{S_D} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}_D) + \int_{S_D} \left( \frac{\partial \mathbf{r}(u, w, y, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_D \right) \quad (۱-۵.۵۲۰)$$

که در آن  $d\mathbf{S}_D$  جزء برداری سطح، با اندازه  $dS_D$  است و راستای آن قائم بر مرز حوزه  $D$  و به سمت بیرون از آن است.

(ب) انتگرال ده جمله آخر سرعت جزء مرزی  $d\mathbf{S}_D$  است. بنابراین، آخرین انتگرال آهنگ تغییر حجم  $D$  خواهد بود. این انتگرال را، به کمک معادله (۳-۴.۲۰) بازنویسی کنید تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\begin{aligned} \int_{S_D} \left( \frac{\partial \mathbf{r}(u, w, y, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_D \right) &= \frac{d}{dt} \int_D \sqrt{g(u, w, y, t)} du dw dy \\ &= \int_D \frac{\partial \sqrt{g(u, w, y, t)}}{\partial t} du dw dy \quad (۲-۵.۵۲۰) \end{aligned}$$

تساوی دوم از قاعده لایب‌نیتس به دست می‌آید و  $u, w, y$  روی هر جزء سطح  $d\mathbf{S}_D$ ، از  $t$  مستقل‌اند.

(ج) با استفاده از نتیجه قسمت (ب) و قضیه دیورژانس گاوس-آستروگراتسکی در بخش الف.۵، معادله (۱-۵.۵۲۰) را، وقتی جمع سه انتگرال حجم روی  $D(u, w, y)$  صفر می‌شود، بیان کنید. نشان دهید که این نتیجه و اختیاری بودن انتخاب  $D$ ، معادله (۸-۴.۲۰) را نتیجه می‌دهد.

## فصل ۲۱

### توزیع‌های غلظت در جریان متلاطم

۱.۲۱ نوسانات غلظت و غلظت هموارشدهٔ زمانی

۲.۲۱ هموارسازی زمانی معادلهٔ پیوستگی  $A$

۳.۲۱ عبارات‌های شبه‌تجربی برای شار جرمی تلاطمی

۴.۲۱ تقویت انتقال جرم توسط واکنش مرتبهٔ اول در جریان متلاطم

۵.۲۱ اختلاط تلاطمی و جریان متلاطم با واکنش مرتبهٔ دوم

در فصل‌های گذشته معادله‌های نفوذ در سیال یا جامد را به دست آوردیم و نشان دادیم که چگونه می‌توان عبارت‌هایی برای توزیع غلظت به دست آورد، به شرط آن‌که سیال تلاطم نداشته باشد. حال به بررسی انتقال جرم در جریان متلاطم می‌پردازیم. بحث این فصل نسبتاً شبیه بحث فصل ۱۳ است و بخش عمدهٔ مطالب آن به قیاس همان فصل نقل شده است. مخصوصاً بخش‌های ۴.۱۳، ۵.۱۳، و ۶.۱۳ را می‌توان مستقیماً اقتباس کرد و فقط کافی است که کمیت‌های انتقال جرم جایگزین کمیت‌های انتقال گرما شوند. درحقیقت، مسئله‌های بررسی‌شده در این بخش‌ها، در انتقال جرم مفیدتر یافته شده‌اند، زیرا گسترهٔ اعداد اشمیتی که به شیوهٔ تجربی قابل حصول‌اند، بسیار وسیع‌تر از اعداد پرانتل است. در این فصل خود را به سیستم‌های دوتایی هم‌دما محدود می‌کنیم و چگالی جرمی و ضریب نفوذ را ثابت می‌گیریم. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل جزئی توصیف‌کنندهٔ نفوذ در سیالی جاری، (معادلهٔ ۱.۱۹-۱.۱۶) همان صورتی را دارد که معادلهٔ رسانش گرما در سیال جاری داشت (معادلهٔ ۲.۱۱-۲.۹)، با این تفاوت که در اولی جملهٔ واکنش شیمیایی هم گنجانده شده است.

۱.۲۱ نوسانات غلظت و غلظت هموارشدهٔ زمانی

بحث ارائه‌شده در بخش ۱.۱۳، دربارهٔ نوسانات دما و هموارسازی زمانی را، می‌توان براساس تناظر، برای غلظت مولی  $c_A$  تکرار کرد. در جریانی متلاطم،  $c_A$  تابعی نوسانی است که به سرعت تغییر می‌کند و می‌توان آن را به صورت مجموع مقدار هموارشدهٔ زمانی  $\bar{c}_A$  و نوسان غلظت تلاطمی  $c'_A$  نوشت:

$$c_A = \bar{c}_A + c'_A \quad (1-1.21)$$

که نظیر معادلهٔ (۱.۱۳-۱) برای دماست. براساس تعریف  $c'_A$ ، مشاهده می‌کنیم که  $\bar{c}'_A = 0$ . اما کمیت‌هایی مانند

$\overline{v'_x c'_A}$ ،  $\overline{v'_y c'_A}$  و  $\overline{v'_z c'_A}$  صفر نیستند، زیرا نوسانات موضعی غلظت و سرعت از یکدیگر مستقل نیستند. توزیع‌های غلظت هموارشدهٔ زمانی  $\bar{c}_A(x, y, z, t)$  توزیع‌هایی هستند که، برای مثال، با برداشتن نمونه از جریان سیال در نقاط مختلف و زمان‌های مختلف به دست آمده‌اند. در جریان داخل لوله با انتقال جرم در جدار، انتظار می‌رود که غلظت هموارشدهٔ زمانی  $\bar{c}_A$  فقط اندکی با مکان در هستهٔ متلاطم، جایی که انتقال توسط گرداب‌های متلاطم غلبه دارد، تغییر کند. از طرف دیگر، در ناحیهٔ نزدیک سطح مرزی که حرکت آهسته است، انتظار می‌رود که غلظت  $\bar{c}_A$  در فاصلهٔ کوتاهی، از مقدار مربوط به هستهٔ متلاطم خود، تا مقدار مربوط به جدار، تغییر کند. گرادیان غلظت تندی که با فرایند نفوذ مولکولی آهسته در زیرلایه‌های ویسکوز همراه است، با انتقال گردابی سریع در هستهٔ متلاطم، تضاد دارد.

### ۲.۲۱ هموارسازی زمانی معادلهٔ پیوستگی A

کار را با معادلهٔ پیوستگی گونهٔ A آغاز می‌کنیم که فرض می‌شود بر اثر انجام واکنش شیمیایی مرتبهٔ  $n$ م در حال ناپدید شدن است.<sup>۱</sup> سپس از معادلهٔ (۱۶-۱.۱۹)، در مختصات قائم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = - \left( \frac{\partial}{\partial x} v_x c_A + \frac{\partial}{\partial y} v_y c_A + \frac{\partial}{\partial z} v_z c_A \right) + D_{AB} \left( \frac{\partial^2 c_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right) - k_n''' c_A^n \quad (۱-۲.۲۱)$$

در این جا  $k_n'''$  ضریب آهنگ واکنش برای واکنش شیمیایی مرتبهٔ  $n$ م است و مستقل از مکان فرض می‌شود. در معادله‌های بعدی با در نظر گرفتن  $n = ۱$  و  $n = ۲$ ، باختلاف بین واکنش‌های مرتبهٔ اول و مرتبه‌های بالاتر تأکید می‌کنیم. وقتی  $c_A$  را با  $c'_A + \bar{c}_A$  و  $v_i$  را با  $v'_i + \bar{v}_i$  جایگزین کنیم، پس از متوسط‌گیری زمانی، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial \bar{c}_A}{\partial t} = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{v}_x \bar{c}_A + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v}_y \bar{c}_A + \frac{\partial}{\partial z} \bar{v}_z \bar{c}_A \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \overline{v'_x c'_A} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'_y c'_A} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'_z c'_A} \right) + D_{AB} \left( \frac{\partial^2 \bar{c}_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}_A}{\partial z^2} \right) - \left\{ \begin{array}{l} k_n''' \bar{c}_A \quad \text{یا} \\ k_n''' (\bar{c}_A + \overline{c'_A}) \end{array} \right. \quad (۲-۲.۲۱)$$

مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ (۱-۲.۲۱) نشان می‌دهد که معادلهٔ هموارشدهٔ زمانی از لحاظ وجود چند جملهٔ اضافی، که زیر آن‌ها نقطه‌چین ترسیم کرده‌ایم، تفاوت دارد. جمله‌های حاوی  $\overline{v'_i c'_A}$  انتقال جرم تلاطمی را توصیف می‌کنند و آن‌ها را با  $\bar{J}_{Ai}^{(t)}$  نشان می‌دهیم که نأمین مؤلفهٔ بردار شار مولی تلاطمی است. اکنون با سومین شار تلاطمی روبه‌رو شده‌ایم و می‌توانیم مؤلفه‌های آن‌ها را به ترتیب زیر خلاصه کنیم:

$$\bar{J}_{Ai}^{(t)} = \overline{v'_i c'_A} \quad (۳-۲.۲۱) \quad \text{شار مولی تلاطمی (بردار)}$$

$$\bar{\tau}_{ij}^{(t)} = \overline{\rho v'_i v'_j} \quad (۴-۲.۲۱) \quad \text{شار اندازه حرکت تلاطمی (تانسور)}$$

$$\bar{q}_i^{(t)} = \overline{\rho C_p v'_i T'} \quad (۵-۲.۲۱) \quad \text{شار گرمای تلاطمی (بردار)}$$

همهٔ این‌ها به صورت شار نسبت به سرعت متوسط جرمی تعریف شده‌اند.

سایان توجه است که بین رفتارهای واکنش‌های شیمیایی با مرتبه‌های متفاوت، اختلافی اساسی وجود دارد. واکنش مرتبه اول در معادله هموارشده زمانی همان صورتی را دارد که در معادله اصلی دارد. اما واکنش مرتبه دوم در صورت هموارشده زمانی یک جمله اضافی  $-k_p''' c_A'^2$  دارد که نشانه برهم‌کنش بین سینتیک شیمیایی و نوسانات تلاطمی است.

اکنون هر سه معادله تغییر هموارشده زمانی برای جریان متلاطم مخلوط سیال دوتایی هم‌دما، با  $\rho$ ،  $D_{AB}$ ، و  $\mu$  ثابت را خلاصه می‌کنیم:

$$(\nabla \cdot \bar{v}) = 0 \quad (۶-۲.۲۱) \text{ پیوستگی:}$$

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla \bar{p} - [\nabla \cdot (\bar{\tau}^{(v)} + \bar{\tau}^{(t)})] + \rho g \quad (۷-۲.۲۱) \text{ حرکت:}$$

$$\frac{D\bar{c}_A}{Dt} = -(\nabla \cdot (\bar{J}_A^{(v)} + \bar{J}_A^{(t)})) - \begin{cases} k_1''' \bar{c}_A & \text{یا} \\ k_p''' (\bar{c}_A^2 + c_A'^2) & \dots \end{cases} \quad (۸-۲.۲۱) \text{ پیوستگی } A:$$

در این جا  $\bar{J}_A^{(v)} = -D_{AB} \nabla \bar{c}_A$  و متوجه هستیم که عملگر  $D/Dt$  را باید طوری نوشت که سرعت هموارشده زمانی  $\bar{v}$  را شامل باشد.

### ۳.۲۱ عبارات‌های شبه‌تجربی برای شار جرمی تلاطمی

در بخش گذشته نشان دادیم که معادله هموارشده زمانی پیوستگی  $A$  به پیدایش شار جرمی تلاطمی، با مؤلفه‌های  $\bar{J}_{Ai}^{(t)} = \bar{v}_i' c_A'$  منتهی می‌شود. برای حل مسئله‌های انتقال جرم در جریان متلاطم، شاید فرض کردن رابطه‌ای بین  $\bar{J}_{Ai}^{(t)}$  و گرادیان غلظت هموارشده زمانی مفید باشد. در نوشتگان علمی می‌توان چندین عبارت تجربی یافت، اما در این جا فقط مقبول‌ترین آن‌ها را ارائه می‌دهیم.

#### ضریب نفوذ گردابی

در تناظر با قانون اول نفوذ فیک، می‌توان نوشت:

$$\bar{J}_{Ay}^{(t)} = -D_{AB}^{(t)} \frac{d\bar{c}_A}{dy} \quad (۱-۳.۲۱)$$

که معادله معرف ضریب نفوذ تلاطمی  $D_{AB}^{(t)}$  است که ضریب نفوذ گردابی نیز نامیده می‌شود. چنان‌که در مورد ویسکوزیته گردابی و رسانندگی گرمای گردابی مشاهده می‌شود، ضریب نفوذ گردابی خاصیت فیزیکی مشخصه سیال نیست، بلکه به مکان، جهت، و ماهیت میدان جریان بستگی دارد.

ضریب نفوذ گردابی  $D_{AB}^{(t)}$  و ویسکوزیته سینماتیکی  $\nu^{(t)} = \mu^{(t)}/\rho$  ابعاد یکسانی دارند، یعنی مجذور طول تقسیم بر زمان. نسبت آن‌ها:

$$Sc^{(t)} = \frac{\nu^{(t)}}{D_{AB}^{(t)}} \quad (۲-۳.۲۱)$$

کمیتی بدون بُعد، موسوم به عدد اشمیت تلاطمی است. چنان‌که در مورد عدد پرانتل تلاطمی دیدیم، عدد اشمیت تلاطمی از مرتبه واحد است (نگاه کنید به بخش ۳.۱۳). بنابراین با جایگزین کردن ضریب نفوذ گردابی با ویسکوزیته سینماتیکی تلاطمی، که درباره آن اطلاعات خوبی داریم، می‌توان ضریب نفوذ گردابی را تخمین زد. این کار در بخش ۴.۲۱ انجام می‌شود.

## عبارت طول اختلاط پراتنل و تیلر

طبق نظریه طول اختلاط پراتنل، اندازه حرکت، انرژی، و جرم همگی با مکانیسم یکسانی انتقال می‌یابند. بنابراین، به قیاس با معادله‌های (۴-۳.۱۳) و (۳-۳.۱۳)، می‌توان نوشت:

$$\bar{J}_{Ay}^{(t)} = -l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{c}_A}{dy} \quad (3-3.21)$$

که در آن  $l$  طول اختلاط پراتنل است که در فصل ۵ معرفی شد. کمیت  $l^2 |d\bar{v}_x/dy|$  که در این جا ظاهر می‌شود، با  $D_{AB}^{(t)}$  در معادله (۱-۳.۲۱)، و با عبارت‌های  $\nu^{(t)}$  و  $\alpha^{(t)}$  که به‌طور ضمنی در معادله‌های (۴-۴.۵) و (۳-۳.۱۳) وجود دارند، متناظر است. بنابراین، نظریه طول اختلاط در تناظر رینولدز  $D_{AB}^{(t)}$  یا  $\nu^{(t)} = \alpha^{(t)} = D_{AB}^{(t)}$  وجود دارد.  $Pr^{(t)} = Sc^{(t)} = 1$  صدق می‌کند.

۴.۲۱ تقویت انتقال جرم توسط واکنش مرتبه اول در جریان متلاطم<sup>۱</sup>

حال اثر جمله واکنش شیمیایی را در معادله نفوذ تلاطمی بررسی می‌کنیم. مخصوصاً به مطالعه اثر واکنش بر آهنگ انتقال جرم در جدار، برای جریان متلاطم با نیروی رانش پایا می‌پردازیم که در آن جدار (از جنس  $A$ ) اندکی در سیال (مایع  $B$ ) جاری در لوله انحلال‌پذیر است. به‌ویژه به رفتار با اعداد اشمیت بزرگ و آهنگ‌های واکنش بالا علاقه‌مندیم. برای جریان در لوله با تقارن محوری و در شرایطی که  $\bar{c}_A$  از زمان مستقل است، معادله (۸-۲.۲۱) چنین نوشته می‌شود:

$$\bar{v}_z \frac{\partial \bar{c}_A}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r(D_{AB} + D_{AB}^{(t)}) \frac{\partial \bar{c}_A}{\partial r} \right) - k_1''' \bar{c}_A \quad (1-4.21)$$

در این جا این فرض متداول را اختیار کرده‌ایم که می‌توان از انتقال محوری توسط نفوذ مولکولی و نفوذ تلاطمی چشم‌پوشی کرد. می‌خواهیم آهنگ انتقال جرم را در جدار به‌دست آوریم:

$$+D_{AB} \frac{\partial \bar{c}_A}{\partial r} \Big|_{r=R} = k_c (c_{A0} - \bar{c}_{A, \text{محور}}) \quad (2-4.21)$$

که در آن  $c_{A0}$  و  $\bar{c}_{A, \text{محور}}$  عبارت‌اند از: غلظت‌های  $A$  در جدار و در محور لوله. چنان‌که در بخش قبل گفته شد، ضریب نفوذ تلاطمی در جدار صفر است و در نتیجه در معادله (۲-۴.۲۱) ظاهر نمی‌شود. کمیت  $k_c$  ضریب انتقال جرم، و نظیر ضریب انتقال گرمای  $h$  است. ضریب  $h$  را در فصل ۱۴ شرح دادیم و در فصل ۹، در ارتباط با «قانون سرمایه نیوتون» به آن اشاره کردیم. به‌عنوان تقریب اول<sup>۱</sup> جمله  $\bar{c}_{A, \text{محور}}$  را صفر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که واکنش به‌اندازه کافی سریع هست که گونه نفوذکننده هرگز به محور لوله نرسد؛ سپس  $\partial \bar{c}_A / \partial r$  نیز باید در محور لوله صفر باشد. پس از تحلیل سیستم با این فرض، فرض را کنار می‌گذاریم و محاسبات را برای گستره وسیع‌تری از آهنگ‌های واکنش انجام می‌دهیم.

اکنون غلظت بدون بُعد واکنش‌گر  $C = \bar{c}_A / c_{A0}$  را تعریف می‌کنیم. سپس با این فرض دیگر<sup>۱</sup> که، به‌ازای مقادیر بزرگ  $z$ ، غلظت از  $z$  مستقل خواهد بود، معادله (۱-۴.۲۱) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r(D_{AB} + D_{AB}^{(t)}) \frac{\partial C}{\partial r} \right) = k_1''' C \quad (3-4.21)$$

I. O. T. Hanna O. C. Sandall, and C. L. Wilson, *Ind. Eng. Chem. Research*, **26**, 2286-2290 (1987).

مسئله نظیر این‌که با فیلم سرورکار دارد، در منبع زیر ارائه شده‌است:

O. T. Hanna, and F. J. Valeri, *Chem. Eng. Communications*, **16**, 135-147 (1982).



این معادله را می‌توان در  $r$  ضرب کرد و از مکانی اختیاری تا جدار لوله از آن انتگرال گرفت تا نتیجه شود:

$$k_c R - r(D_{AB} + D_{AB}^{(t)}) \frac{\partial C}{\partial r} = k_c''' \int_r^R \bar{r} C(\bar{r}) d\bar{r} \quad (۴-۴.۲۱)$$

در این‌جا از شرط مرزی در  $r = R$  و نیز تعریف ضریب انتقال جرم استفاده شده‌است. سپس با یک بار دیگر انتگرال‌گیری از  $r = 0$  تا  $r = R$  نتیجه می‌شود:

$$k_c R \int_0^R \frac{1}{r(D_{AB} + D_{AB}^{(t)})} dr - 1 = k_c''' \int_0^R \frac{1}{r(D_{AB} + D_{AB}^{(t)})} \left[ \int_r^R \bar{r} C(\bar{r}) d\bar{r} \right] dr \quad (۵-۴.۲۱)$$

در این‌جا از شرایط مرزی  $C = 0$  در  $r = 0$  و  $C = 1$  در  $r = R$  استفاده کردیم. سپس متغیر  $y = R - r$  را معرفی می‌کنیم، زیرا ناحیه موردنظر در سمت راست جدار واقع است. نتیجه می‌شود:

$$k_c R \int_0^R \frac{1}{(R-y)(D_{AB} + D_{AB}^{(t)})} dy - 1 = k_c''' \int_0^R \frac{1}{(R-y)(D_{AB} + D_{AB}^{(t)})} \left[ \int_0^y (R-\bar{y}) C(\bar{y}) d\bar{y} \right] dy \quad (۶-۴.۲۱)$$

که در آن  $C(\bar{y})$  همان تابعی از  $\bar{y}$  نیست که  $C(\bar{r})$  از  $\bar{r}$  است. وقتی  $Sc$  بزرگ باشد، انتگرال‌ده‌ها فقط در ناحیه‌ای مهم‌اند که  $y \ll R$ ، به طوری که  $R - y$  را می‌توان با  $R$  تقریب زد. به علاوه، می‌توان از این نکته استفاده کرد که ضریب نفوذ تلاطمی در همسایگی جدار با توان سوم فاصله از جدار متناسب است. وقتی انتگرال‌ده‌ها را برحسب  $\sigma = y/R$  بنویسیم، معادله بدون بُعد زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{\nu} \left( \frac{k_c D}{D_{AB}} \right) \left( \frac{D_{AB}}{\nu} \right) \int_0^1 \frac{1}{(D_{AB}/\nu) + K\sigma^2} d\sigma - 1 = \left( \frac{k_c''' R^2}{\nu} \right) \int_0^1 \frac{1}{(D_{AB}/\nu) + K\sigma^2} \left[ \int_0^\sigma C(\bar{\sigma}) d\bar{\sigma} \right] d\sigma \quad (۷-۴.۲۱)$$

این معادله حاوی چندین گروه بدون بُعد است: عدد اشمیت  $Sc = \nu/D_{AB}$ ، پارامتر آهنگ واکنش بدون بُعد  $Rx = k_c''' R^2/\nu$ ، و یک ضریب انتقال جرم بدون بُعد  $Sh = k_c D/D_{AB}$ ، موسوم به عدد شروود ( $D$  قطر لوله است). در حد، که  $Rx \rightarrow \infty$ ، جواب معادله (۳-۴.۲۱) تحت شرایط مرزی مفروض عبارت است از:  $C = \exp(-Sh\sigma/2)$ . با جایگزینی این جواب در معادله (۷-۴.۲۱)، پس از انتگرال‌گیری، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2} \frac{Sh}{Sc} I_0 - 1 = 2 \frac{Rx}{Sh} I_0 - 2 \frac{Rx}{Sh} I_1 \quad (۸-۴.۲۱)$$

که در آن:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{Sc^{-1} + K\sigma^2} d\sigma \quad (۹-۴.۲۱)$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\exp(-Sh\sigma/2)}{Sc^{-1} + K\sigma^2} d\sigma \quad (۱۰-۴.۲۱)$$

می‌توان این معادله را حل کرد<sup>۱</sup> و Sh را به صورت تابعی از Sc، Rx، و K به دست آورد. جواب قبلی معادله (۳-۴-۲۱) هنگامی معقول است که Sc، Rx، و z به اندازه کافی بزرگ باشند، و نسبت به نتیجه ارائه شده توسط ویت، پورتر، و شرود<sup>۲</sup> گامی به جلو محسوب می‌شود. اما درغیاب واکنش شیمیایی، معادله (۳-۴-۲۱) از توصیف افزایش C در پایین دست، بر اثر انتقال گونه A به داخل سیال، عاجز است. بنابراین، تقویت انتقال جرم توسط واکنش شیمیایی را نمی‌توان براساس نتایج مراجع ۱ یا ۲، به طور واقع‌گرایانه، ارزیابی کرد. برای تحلیل بهتر مسئله تقویت، از معادله (۱-۴-۲۱) استفاده می‌کنیم تا معادله دیفرانسیل کامل‌تری برحسب C به دست آوریم:

$$\bar{v}_z \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r(D_{AB} + D_{AB}^{(t)}) \frac{\partial C}{\partial r} \right) - k_1''' C \quad (۱۱-۴-۲۱)$$

در این صورت فرض  $C = 0$  در  $r = 0$  با شرط شار صفر  $\partial C / \partial r = 0$  در آن جا جایگزین می‌شود. در این وضعیت هندسی، با استفاده از طول اختلاط وابسته به مکان  $l$  مانند معادله (۳-۳-۲۱)،  $D_{AB}^{(t)}$  را به صورت  $|d\bar{v}_z/dr| l^2$  برای جریان کاملاً شکل یافته نشان می‌دهیم. با معرفی نمادهای بدون بُعد  $r^+ = rv_*/\nu$ ،  $z^+ = zv_*/\nu$ ،  $v^+ = \bar{v}_z/v_*$  بدون بُعد  $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$  براساس سرعت اصطکاکی  $l^+ = lv_*/\nu$  و  $Da = k_1''' \nu / v_*^2$  می‌توانیم معادله (۱۱-۴-۲۱) را به صورت بدون بُعد زیر بیان کنیم:

$$\begin{aligned} v^+ \frac{\partial C}{\partial z^+} &= \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left( r^+ \left( \frac{D_{AB} + D_{AB}^{(t)}}{\nu} \right) \frac{\partial C}{\partial r^+} \right) - \left[ \frac{k_1''' \nu}{v_*^2} \right] C \\ &= \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left( r^+ \left( \frac{1}{Sc} + (l^+)^2 \left| \frac{dv^+}{dr^+} \right| \right) \frac{\partial C}{\partial r^+} \right) - Da C \end{aligned} \quad (۱۲-۴-۲۱)$$

که در آن عدد دامکوهلر  $Da = k_1''' \nu / v_*^2$  معرفی شده است.

مدلی عالی برای طول اختلاط  $l$  در معادله (۷-۴-۵) مشاهده می‌شود که هانا، سندل، و مازت،<sup>۳</sup> با اصلاح مدلی که وان دریست ارائه داده بود، آن را به دست آوردند.<sup>۴</sup> این مدل توزیع‌های غلظت هموار نتیجه می‌دهد، به شرط آن‌که از تابع سرعتی با مشتق شعاعی پیوسته استفاده کنیم، نه از عبارات‌های پیوسته تکه‌ای ارائه شده در شکل ۳-۵-۵. چنین تابعی با انتگرال‌گیری از معادله دیفرانسیل زیر، برحسب متغیرهای بدون بُعد  $y^+ = yv_*/\nu$  و  $v^+ = \bar{v}_z/v_*$  در شکل ۳-۵-۵، با شرایط مرزی  $v^+ = 0$  در  $y^+ = 0$  (جدار) و  $dv^+/dy^+ = 0$  در  $y^+ = R^+$  (خط مرکزی) به دست می‌آید:

$$(l^+)^2 \left( \frac{dv^+}{dy^+} \right)^2 + \frac{dv^+}{dy^+} = 1 - \frac{y^+}{R^+} \quad 0 \leq y^+ \leq R^+ \quad (۱۳-۴-۲۱)$$

بر طبق این قوانین می‌توان به این قضیه اشاره کرد

معادله (۱۳-۴-۲۱) با ترکیب معادله‌های (۳-۵-۵) و (۴-۴-۵) در مختصات استوانه‌ای با صورت بدون بُعد:

$$l^+ = \frac{lv_*}{\nu} = 0.14 y^+ \frac{1 - \exp(-y^+/26)}{\sqrt{1 - \exp(-0.14 y^+)}} \quad 0 \leq y^+ \leq R^+ \quad (۱۴-۴-۲۱)$$

2. W. R. Vieth, J. H. Porter, and T. K. Sherwood, *Ind. Eng. Chem. Fundam.* **2**, 1-3 (1963).

3. O. T. Hanna, O. C. Sandall, and P. R. Mazet, *AIChE Journal*, **27**, 693-697 (1981)

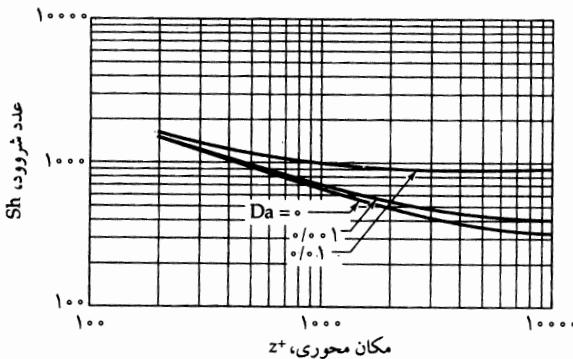
4. E. R. van Driest, *J. Aero. Sci.*, **23**, 1007-1011 (1966)

مدل طول اختلاط نشان داده شده با معادله (۷-۴.۵) به دست آمد (نگاه کنید به مسئله ۲۱.۵). معادله (۱۳-۴.۲۱) را می توان با استفاده از فرمول حل معادله درجه ۲ حل کرد و داریم:

$$\frac{dv^+}{dy^+} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(l^+)^2[1 - y^+/R^+]}}{2(l^+)^2} & \text{اگر } y^+ > 0; \\ 1 & \text{اگر } y^+ = 0 \end{cases} \quad (۱۵-۴.۲۱)$$

در این صورت می توان با استفاده از برنامه های فرعی (زیر روال) trapzd و qtrap که پرس و همکاران<sup>۵</sup> ارائه کرده اند،  $v^+$  را به دست آورد. تابع  $v^+$  حاصل به خط ترسیم شده در شکل ۳-۵.۵ شباهت زیادی دارد؛ تغییرات اندکی در نزدیکی  $y^+ = 30$ ، که خط ترسیمی ناپیوستگی در شیب دارد، و در نزدیکی خط مرکزی، که در آن جا تابع محاسبه ای  $v^+$  به مقدار ماکزیمی می رسد که به شعاع جدار بدون بُعد  $R^+$  وابسته است، مشاهده می شود؛ خط ترسیمی در شکل ۳-۵.۵ فاقد چنین ماکزیمی است.

معادله های (۱۲-۴.۲۱) تا (۱۵) را به روش عددی<sup>۶</sup> و برای جریان کاملاً شکل یافته سیالی با ویسکوزیته سینماتیکی  $\nu = 0.6581 \text{ cm}^2/\text{s}$  در لوله ای با جدار صاف به قطر داخلی ۳ cm، با عدد رینولدز  $Re = 10000$ ،  $Sc = 200$ ، و اعداد دامکوهلر Da مختلف، حل کرده اند. این محاسبات با بسته نرم افزاری آتنا ویزووال و رک بنج<sup>۷</sup> انجام شد. اعداد شروود حاصل  $Sh = k_c D / D_{AB}$ ، براساس  $k_c$ ، به صورت تعریف شده با معادله (۲-۴.۲۱)، در شکل ۱-۴.۲۱ به صورت توابعی از  $z^+$ ، به ازای مقادیر مختلف عدد دامکوهلر Da ترسیم شده اند. این نتایج به محاسبات زیر منتهی شد:



شکل ۱-۴.۲۱ اعداد شروود محاسبه شده،  $Sh = kcD/D_{AB}$ ، برای انتقال جرم تلاطمی از جدار لوله، با واکنش شیمیایی همگن مرتبه اول و بدون آن. نتایج محاسبه شده در  $Re = 10000$  و  $Sc = 200$ ، به صورت توابعی از مکان محوری  $z^+ = z\nu_*/\nu$  و عدد دامکوهلر  $Da = k'''\nu_*/v^*$

۱. در غیاب واکنش (یعنی وقتی  $Da = 0$ )، با افزایش فاصله تا ناحیه انتقال جرم، عدد شروود به سرعت کاهش می یابد. این رفتار با نتایج اسلیچر و تریبوس<sup>۸</sup> برای مسئله متناظر در انتقال گرما سازگار است و مؤید این نکته است که جمله همرفت در معادله (۱۱-۴.۲۱) برای این سیستم ضرورت اساسی دارد. در منابع ۲ و ۳، با در نظر گرفتن توزیع غلظت به صورت «کاملاً شکل یافته»، از این جمله چشم پوشی شده بود.

5. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in FORTRAN*, Cambridge University Press, 2nd edition (1992).

۶. ام. کاراکوتیسوس، ارتباط شخصی.

www.athenavisa.com

۷. اطلاعات این بسته نرم افزاری را می توانید از نشانی های زیر دریافت کنید:

stewart.associates.msn.com

8. C. A. Sleicher and M. Tribus, *Trans, ASME*, **79**, 789-797 (1957).

۲. در حضور واکنش همگن شبه مرتبه اول ماده حل شده (یعنی وقتی  $Da > 0$ )، عدد شروود در پایین دست جریان به سرعت کاهش می‌یابد و سرانجام مقدار مجانبی ثابتی پیدا می‌کند که به عدد دامکوهلر وابسته است. بنابراین، ضریب تقویت، که به صورت، (بدون واکنش)  $Sh$  / (با واکنش)  $Sh$  تعریف شد، با افزایش فاصله تا ناحیه انتقال جرم، می‌تواند به‌طور چشم‌گیری افزایش پیدا کند.

### ۵.۲۱ اختلاط تلاطمی و جریان متلاطم با واکنش مرتبه دوم

اکنون فرایندهایی را در نظر می‌گیریم که در سیستم‌های سیال متلاطم رخ می‌دهند و مخصوصاً به دو مخلوطکن نشان داده شده در شکل ۱-۵.۲۱ ارجاع می‌دهیم. در شکل ۱-۵.۲۱ (الف) یک سیستم حالت پایا نشان داده شده که در آن دو جریان ورودی، با آهنگ‌های ثابت، به سیستمی با شکل هندسی ثابت وارد می‌شوند و در شکل ۱-۵.۲۱ (ب) یک سیستم حالت ناپایا نشان داده شده است که در آن دو سیال امتزاج‌پذیر که در ابتدا ساکن‌اند، با به‌چرخش درآمدن پروانه‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت، در زمان  $t = 0$ ، باهم مخلوط می‌شوند. یک جریان [در (الف)] یا یک ناحیه اولیه [در (ب)] حاوی ماده حل شده  $A$  در حلال  $S$ ، و دیگری حاوی ماده حل شده  $B$  در حلال  $S$  است. همهٔ محلول‌ها به اندازه کافی رقیق هستند که مواد حل شده تأثیر درخور اعتنایی بر ویسکوزیته، چگالی، یا ضریب نفوذ گونه‌ها نداشته باشند. در این صورت رفتار ماده حل شده ( $A$  یا  $B$ ) در هر سیستم [(الف) یا (ب)] با معادله‌های نفوذ هموارنشدهٔ زمانی، با شرایط اولیه و مرزی مناسب، توصیف می‌شود:

$$\frac{Dc_A}{Dt} = D_{AS} \nabla^2 c_A + R_A, \quad \frac{Dc_B}{Dt} = D_{BS} \nabla^2 c_B + R_B \quad (۲, ۱-۵.۲۱)$$

برای این سیستم‌ها، می‌توان نوشت که در  $z = 0$  [در (الف)] یا  $t = 0$  [در (ب)]، داریم:

$$c_A = c_{A0}, \quad c_B = 0 \quad (۴, ۳-۵.۲۱)$$

روی درجهٔ ورود  $A$  [در (الف)] یا ناحیهٔ اولیه [در (ب)]، و:

$$c_B = c_{B0}, \quad c_A = 0 \quad (۶, ۵-۵.۲۱)$$

روی درجهٔ ورود  $B$  [در (الف)] یا ناحیهٔ اولیه [در (ب)]. به علاوه، همهٔ سطوح محدودکننده را بی‌اثر و نفوذناپذیر در نظر می‌گیریم.<sup>۱</sup>

اصلاً واکنش رخ نمی‌دهد

در این وضعیت، جمله‌های  $R_A$  و  $R_B$  متحداً صفرند. حال یک متغیر مستقل جدید تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma = \frac{c_{A0} - c_A}{c_{A0}} = \frac{c_B}{c_{B0}} \quad (۷-۵.۲۱)$$

در این صورت هر دو معادلهٔ (۱-۵.۲۱ و ۲)، روی کل سیستم، صورت جدیدی پیدا می‌کنند:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = D_{iS} \nabla^2 \Gamma \quad (۸-۵.۲۱)$$

در این جا اندیس  $i$  می‌تواند معرف هریک از مواد حل شدهٔ  $A$  یا  $B$  باشد، و:

$$\Gamma = 0 \quad (۹-۵.۲۱) \quad \text{صفر برای (الف) جریان ورودی غنی از } A, \text{ یا (ب) ناحیه‌ای که از ابتدا از } A \text{ غنی است}$$

۱. در سیستم (الف)، این شرایط مرزی صرفاً تقریبی‌اند. مقادیر نشان داده شدهٔ  $c_A$  و  $c_B$  را مقادیر مجانبی به ازای  $z \ll \delta$  در نظر بگیرد.

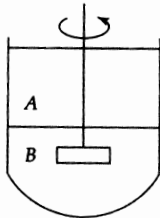
(۱۰-۵.۲۱)  $\Gamma = ۱$  برای (الف) جریان ورودی غنی از  $B$ ، یا (ب) ناحیه‌ای که از ابتدا از  $B$  غنی است نتیجه می‌شود که، در صورت مساوی بودن ضرایب نفوذ، توزیع‌های غلظت هموار شده زمانی، برای  $\bar{\Gamma}(x, y, z, t)$  برای هر دو ماده حل شده یکسان است، و در آن:

$$\bar{\Gamma} = \frac{c_{A0} - \bar{c}_A}{c_{A0}} = \frac{\bar{c}_B}{c_{B0}} \quad (۱۱-۵.۲۱)$$

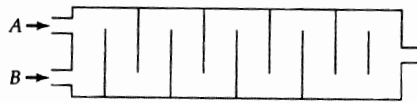
اما کمیت‌های نوسانی  $\Gamma'$  نیز مورد توجه‌اند، زیرا معیاری از «ناآمیختگی» اند. این کمیت‌ها فقط به معنای آماری می‌توانند مساوی باشند. برای نشان دادن این نکته، معادله (۱۱-۵.۲۱) را از معادله (۷-۵.۲۱) تفریق می‌کنیم و نتیجه را مجذور و هموار زمانی می‌کنیم تا رابطه زیر را به دست آوریم:

$$\overline{\left(\frac{c'_A}{c_{A0}}\right)^2} = \overline{\left(\frac{c'_B}{c_{B0}}\right)^2} = d^2 \quad (۱۲-۵.۲۱)$$

در این رابطه  $d(x, y, z, t)$  تابع واپاشی بدون بُعد است که وقتی  $z$  بزرگ شود [برای مخلوطکن بی‌حرکت شکل ۱-۵.۲۱ (الف)]، یا به ازای  $t$  بزرگ [برای مخزن مخلوطکن شکل ۱-۵.۲۱ (ب)] به سمت صفر میل می‌کند. می‌توان مقادیر متوسط این کمیت را در سطح مقطع مخلوطکن اندازه‌گیری کرد که در شکل ۲-۵.۲۱ نشان داده شده است.

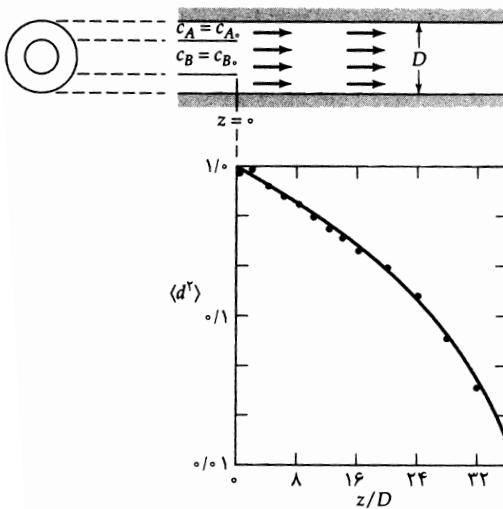


(ب)



(الف)

شکل ۱-۵.۲۱ دو نوع مخلوطکن: (الف) مخلوطکن دارای میانگیر، بدون قطعات متحرک؛ (ب) مخلوطکن پیمانه‌ای با هم‌زن.



شکل ۲-۵.۲۱ تابع واپاشی برای دستگاهی خاص که دو جریان ورودی از یک لوله و یک ناحیه حلقوی را مخلوط می‌کند. شعاع لوله خارجی  $\sqrt{2}$  برابر شعاع لوله داخلی است.

حال باید وابستگی تابعی تابع واپاشی را تعیین کنیم و به این منظور متغیرهای بدون بُعد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\check{v} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}; \quad \check{t} = \frac{v_0 t}{l_0}; \quad \check{\nabla} = l_0 \nabla \quad (۱۳-۵.۲۱)$$

بنابراین معادله (۸-۵.۲۱) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{D\Gamma}{D\check{t}} = \frac{1}{\text{ReSc}} \check{\nabla}^2 \Gamma \quad (۱۴-۵.۲۱)$$

که در آن  $\text{Re} = l_0 v_0 \rho / \mu$ .

برای آن‌که بتوانیم نتایج خاصی بگیریم، روی مخزن مخلوطکن متمرکز می‌شویم [نگاه کنید به شکل ۵.۲۱(ب)] و فرض می‌کنیم که ویسکوزیته مایعات و وزن مولکولی مواد حل شده پایین است. برای این سیستم‌ها  $l_0$  را معمولاً قطر پروانه می‌گیرند و  $v_0$  برابر  $l_0 N$  است، که  $N$  آهنگ چرخش پروانه برحسب دور در واحد زمان است. در نظر گرفتن تجربه حاصل از مطالعه این نوع سیستم‌ها و دسته‌بندی فرایند کلی اختلاط به ترتیب زیر، سودمند است:<sup>۲</sup>

۱. درشت اختلاط، که در آن حرکاتی در مقیاس بزرگ، سیال‌های غنی از  $A$  و غنی از  $B$  را در تمام مخزن پخش می‌کند و ناحیه‌هایی فرعی ایجاد می‌کند که در مقایسه با مسافتی که مولکول‌های حل شده از طریق نفوذ می‌پیمایند، بزرگ محسوب می‌شوند.

۲. ریزاختلاط، که در آن نفوذ سبب آمیختگی نهایی در مقیاس ابعاد مولکولی می‌شود.

مشاهده شده‌است که معمولاً درشت اختلاط فرایندی آهسته‌تر است و این مشاهده را می‌توان برحسب تحلیل ابعادی توضیح داد. این یافته با تجربه حاصل از اختلاط بزرگ مقیاس هم‌خوانی دارد.

برای سیستم‌های صنعتی، اعداد رینولدز معمولاً از  $10^4$  بزرگ‌ترند و اعداد اشمیت از مرتبه  $10^5$  اند. به این ترتیب جمله نفوذ در معادله (۱۴-۵.۲۱) تقریباً در همه جای سیستم کوچک خواهد شد. این جمله در مرحله درشت اختلاط قابل چشم‌پوشی است، زیرا در این مرحله نفوذ، و در نتیجه عدد اشمیت، اثر درخور اعتنایی ندارند. بنابراین برای بسیاری از مقاصد عملی می‌توان نوشت:

$$\frac{D\Gamma}{D\check{t}} \approx 0 \quad (\text{ReSc} \gg 1) \quad (۱۵-۵.۲۱)$$

سپس می‌توان شرط برابری ضرایب نفوذ را برداشت و این تجربه را به سیستمی جدید برون‌یابی کرد. نتیجه می‌شود که اعداد رینولدز، هم‌چنین اعداد اشمیت نباید اثر چندانی بر فرایند درشت اختلاط داشته باشند و میزان تأثیر ناآمیختگی،  $d^2$ ، عمدتاً به زمان بدون بُعد بستگی دارد.

برای مخازن اختلاط بزرگ مقیاس، این پیش‌بینی به خوبی تأیید می‌شود.<sup>۳</sup>

این‌گونه مخزن‌ها معمولاً با اعداد رینولدز بزرگ (بزرگ‌تر از  $10^4$ ) کار می‌کنند و در آن‌ها حرکات بزرگ مقیاس، برحسب  $(\check{x}, \check{y}, \check{z}, \check{t})$  از عدد رینولدز و اندازه سیستم مستقل‌اند. به این ترتیب در تعداد زیادی از تحقیقات مختلف که با استفاده از مخلوطکن‌هایی با شکل‌های هندسی متفاوت انجام شده، مشاهده شده که حاصل ضرب زمان اختلاط لازم  $t_{\text{mix}}$  و آهنگ چرخش  $N$  ثابتی مستقل از اندازه مخلوطکن و عدد رینولدز است:

$$N t_{\text{mix}} = K \quad (\text{شکل هندسی}) \quad \text{یا} \quad t_{\text{mix}} = K/N \quad (۱۶-۵.۲۱)$$

2. M. L. Hanks and H. L. Toor, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **34**, 3252-3256 (1995).

3. J. Y. Oldshue, *Fluid Mixing Technology*, McGraw-Hill, New York (1983); H. Benkreira, *Fluid Mixing*, Institution of Chemical Engineers, Rugby, UK, Vol. 4(1990), Vol. 6(1999); I. Bouwmans and H. E. A. van den Akker, in Vol. 4 of *Fluid Mixing*, institution of Chemical Engineers, Rugby, UK (1990), pp. 1-12.

یعنی، زمان اختلاط لازم  $t_{mix}$ ، در مخزنی با شکل هندسی مفروض، اساساً با تعداد دور لازم برای پروانه متناظر است. این انتظار با آزمایش تأیید شده است.

این یافته با مشاهدات<sup>۲</sup> مبتنی بر این که هم آهنگ جریان حجمی بدون بُعد در پروانه،  $Q/ND^3$ ، و هم ضریب اصطکاک مخزن،  $P/\rho N^3 D^5$  ثابت اند و فقط به شکل هندسی مخزن و پروانه بستگی دارند، هم خوانی دارد (نگاه کنید به مسئله ۶ ج. ۳). در این جا  $Q$  جریان حجمی در جت تولید شده توسط پروانه، و  $P$  توان لازم برای چرخاندن آن است. در مورد مخلوطکن های بی حرکت نیز نکات مشابهی صدق می کند؛ در این نوع مخلوطکن افزایش سرعت جریان، اثر چندانی بر میزان اختلاط ندارد. اما تقریب هایی مانند این را باید محک زد و چنین آزمایش هایی را باید گام های نخست یک برنامه تجربی تلقی کرد. این تقریب ها در عمل همواره برای بزرگ کردن مقیاس قابل اتکا هستند، زیرا اعداد رینولدز معمولاً با بزرگ شدن اندازه تجهیزات، افزایش می یابند.

### واکنش انجام می شود

سپس اثر انجام واکنش شیمیایی همگن برگشت ناپذیر را بررسی می کنیم و برای ساده شدن کار این واکنش را به صورت (محصولات واکنش)  $A + B \rightarrow$  می نویسیم. بازم محلول ها را رقیق فرض می کنیم، به طوری که گرمای واکنش و حضور محصولات واکنش اثر درخور اعتنایی نداشته باشد. به علاوه، ضریب نفوذ را برای هردو ماده حل شده برابر فرض می کنیم.

سپس رابطه زیر را تعریف می کنیم:

$$\Gamma_{\text{واکنش}} = \frac{c_{A0} - (c_A - c_B)}{c_{A0} + c_{B0}} \quad (17-5.21)$$

حال، وقتی معادله (۲-۵.۲۱) را از معادله (۱-۵.۲۱) تفریق کنیم، درمی یابیم که توصیف واکنش  $\Gamma$  با تعریف آن برای حالت بدون واکنش یکسان است. بنابراین

$$\left( \frac{c_{A0} - (c_A - c_B)}{c_{A0} + c_{B0}} \right)_{\text{با واکنش}} = \left( \frac{c_{A0} - c_A}{c_{A0}} \right)_{\text{بدون واکنش}} \left( \frac{c_B}{c_{B0}} \right) \quad (18-5.21)$$

با تفریق کردن همتای هموار شده زمانی از این معادله، درمی یابیم که باید معادله ای مانند معادله (۱۸-۵.۲۱) برای نوسانات برقرار باشد:

$$\left( \frac{c'_A - c'_B}{c_{A0} - c_{B0}} \right)_{\text{با واکنش}} = \left( \frac{c'_A}{c_{A0}} \right)_{\text{بدون واکنش}} \quad (19-5.21)$$

میانگین مربعی هموار شده زمانی کمیت سمت راست برابر است با:  $d^2$ ، که به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۵.۲۱ قابل اندازه گیری است، و بنابراین راهی برای پیش بینی کمیت متناظر برای سیستم های واکنش دهنده در اختیار داریم. معادله (۱۹-۵.۲۱) این نظر را مطرح می کند که نوسانات  $c_A$  و  $c_B$  در مسئله های شامل واکنش، در همان مقیاس های زمانی و فاصله ای رخ می دهند که در مسئله های فاقد واکنش شیمیایی رخ می دادند. توجه کنید که این نکته با وجود اختیاری بودن شکل هندسی، شرایط جریان، و سینتیک واکنش صادق است. اکنون برای بررسی حالت های خاص آماده ایم.

کار را با واکنش سریع آغاز می کنیم که در آن دو ماده حل شده نمی توانند درکنار هم وجود داشته باشند و آهنگ انجام واکنش را، نفوذ گونه ها به طرف هم کنترل می کند. بنابراین، در مرحله نخست (درشت اختلاط) فرایند آمیختن،

که نفوذ در مقایسه با فرایندهای همرفتی بزرگ‌مقیاس بسیار آهسته است، واکنش درخور اعتنایی رخ نمی‌دهد. در این مرحله، که معمولاً مرحله غالب فرایند آمیختن است، داریم:

$$\left(\frac{c'_A}{c_{A^0}}\right)_{\text{با واکنش}} = \left(\frac{c'_A}{c_{A^0}}\right)_{\text{بدون واکنش}} \quad (20-5.21)$$

این نظر مطرح شده است<sup>۴</sup> که معادله (۲۰-۵.۲۱) برای مرحله ریزاختلاط نیز صادق است. هرگاه بتوان چنین فرضی کرد (مثلاً در این وضعیت متداول که درشت‌اختلاط را آهنگ کنترل می‌کند)، نتیجه می‌شود که فرایندهای با واکنش و بدون واکنش به توصیف‌های یکسانی از نوسانات ماده حل شده منتهی می‌شوند.

در عمل، غالباً از واکنش‌های سریع (مثلاً خنثی‌سازی اسیدها با بازها) برای تعیین کارایی مخلوط‌کن‌ها استفاده می‌کنند، زیرا دنبال کردن این آزمایش‌ها آسان‌تر از آزمایش‌های اختلاط بدون واکنش است. غالباً می‌توان از معیارهای ماکروسکوپی، مانند افزایش دما یا تغییر رنگ شناساگر استفاده کرد. اما با اندازه‌گیری نوسان‌های غلظت درک بهتری از ماهیت و مسیر فرایند اختلاط عاید می‌شود.

واکنش‌های آهسته نیز مهم‌اند و حالت خاص سینتیک مرتبه دوم برگشت‌ناپذیر را بررسی می‌کنیم که چنین تعریف می‌شود:

$$R_A = -k''''_p c_A c_B \quad (21-5.21)$$

وقتی این رابطه را هموار زمانی کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\bar{R}_A = -k''''_p (\bar{c}_A \bar{c}_B + \overline{c'_A c'_B}) \quad (22-5.21)$$

بنابراین درمی‌یابیم که نوسانات غلظت ماده حل شده آهنگ واکنش هموار زمانی شده را، نسبت به حالتی که از حاصل ضرب ساده غلظت‌های هموار زمانی شده استفاده کنیم، افزایش می‌دهد. اما ارزیابی اهمیت عملی این اثر دشوار است.

این نکته را با تحلیل ساده مرتبه بزرگی نشان می‌دهیم و کار را با تعریف ثابت زمان واکنش  $t_A$  برای یکی از واکنش‌گرها، در این جا ماده حل شده  $A$ ، آغاز می‌کنیم:

$$t_A = c_{A^0} / R_A \quad (23-5.21)$$

با تقریب اول، می‌توان نوشت:

$$t_A \approx 1/k''''_p c_{B^0} \quad (24-5.21)$$

سپس می‌توان واکنش‌های سریع و آهسته را چنین تعریف کرد:

$$t_{\text{mix}} \gg t_A \quad \text{واکنش سریع} \quad (25-5.21)$$

$$t_{\text{mix}} \ll t_A \quad \text{واکنش آهسته} \quad (26-5.21)$$

حالت واکنش سریع را بررسی کردیم. در واکنش‌های آهسته، تلاطم اثر درخور اعتنایی ندارد، زیرا پیش از آن‌که واکنش چشم‌گیری انجام شود، نوسان‌ها قابل چشم‌پوشی می‌شوند.

4. K. T. Li and H. L. Toor, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **25**, 719-723 (1986).



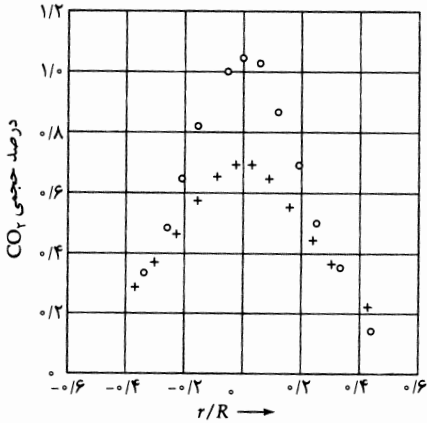
اگر مرتبه بزرگی ثابت‌های زمان اختلاط و واکنش برابر باشد، تحلیلی عمیق‌تر از تحلیل بالا لازم است. چنین تحلیلی باید شامل مدلی برای حرکت تلاطمی باشد و درحال حاضر به نظر نمی‌رسد که چنین مدلی در دسترس باشد.

پرسش‌های تشریحی

۱. شباهت‌ها و تفاوت‌های بین انتقال گرما و انتقال جرم تلاطمی را شرح دهید.
۲. رفتار واکنش‌های مرتبه اول و بالاتر را در هموارسازی زمانی معادله پیوستگی برای گونه‌ای خاص شرح دهید. پیامدهای این رفتار چیست؟
۳. شار اندازه حرکت تلاطمی، شار گرمای تلاطمی، و شار جرم تلاطمی، تا چه میزان از صورت مشابهی برخوردارند؟
۴. برای توصیف شار جرم تلاطمی از کدام روابط تجربی می‌توان استفاده کرد؟
۵. چگونه می‌توان ضرایب نفوذ گردابی را اندازه‌گیری کرد و این ضرایب به چه پارامتری وابسته‌اند؟
۶. آیا انتظار دارید برای انتقال جرم در جریان متلاطم داخل لوله، بدون واکنش شیمیایی، صرفاً با قرار دادن  $Rx = 0$  در معادله (۸-۴-۲۱)، نتیجه قابل اطمینانی به دست بیاورید؟

مسئله‌ها

۱. الف ۲۱. تعیین ضریب نفوذ گردابی (شکل‌های ۱۸ ج ۱ و ۲۱ الف ۱). در مسئله ۱۸ ج ۱ فرمول‌های توزیع غلظت در نفوذ از یک منبع نقطه‌ای واقع در جریان متحرک را ارائه دادیم. در جریان همسان‌گرد بسیار متلاطم، معادله (۱۸ ج ۱-۳) را می‌توان با جایگزین کردن  $D_{AB}$  توسط ضرایب نفوذ گردابی  $D_{AB}^{(t)}$ ، اصلاح کرد. این معادله برای تعیین ضریب نفوذ گردابی مفید است. آهنگ جریان مولی کربن دی‌اکسید  $\frac{1}{1000}$  آهنگ جریان مولی هواست.



شکل ۱. الف ۲۱. داده‌های غلظت  $CO_2$  تزریق شده در جریان متلاطم هوا، با  $Re = 119000$  در لوله‌ای به قطر  $15.24$  cm. دایره‌ها غلظت در فاصله  $z = 112.5$  cm در پایین دست نقطه تزریق، و ضربدرها غلظت در  $z = 152.7$  cm را نشان می‌دهند.

- (الف) نشان دهید که اگر  $\ln s_{CA}$  را بر حسب  $s - z$  ترسیم کنیم، شیب عبارت خواهد بود از:  $-v_0 / 2D_{AB}^{(t)}$ .
- (ب) با استفاده از داده‌های نفوذ  $CO_2$  از یک منبع نقطه‌ای در جریان متلاطم هوا، مطابق شکل ۱. الف ۲۱،  $D_{AB}^{(t)}$  را در شرایط زیر به دست آورید: قطر لوله،  $15.24$  cm؛  $v_0 = 1512$  cm/s.
- (ج) مقدار  $D_{AB}^{(t)}$  را با ضریب نفوذ مولکولی  $D_{AB}$  برای سیستم  $CO_2$ -هوا مقایسه کنید.

(د) همه فرض‌های اختیار شده در این محاسبات را نام ببرید.

$$\text{جواب: (ب) } D_{AB}^{(t)} = 19 \text{ cm}^2/\text{s}$$

۲۱.الف. تناظر انتقال گرما و انتقال جرم. نظیر معادله (۱۹-۴.۱۳) را برای انتقال جرم بنویسید. محدودیت‌های معادله حاصل را شرح دهید.

۱.ب.۲۱. شار جرمی جدار برای جریان متلاطم بدون واکنش شیمیایی. با استفاده از نظیر نفوذی معادله (۲۰-۴.۱۳) برای جریان متلاطم در لوله‌های دایره‌ای و فرمول بلازیوس برای ضریب اصطکاک، عبارت زیر را برای عدد شرود به دست آورید:

$$\text{Sh} = 0.16 \text{ Re}^{1/2} \text{ Sc}^{1/3} \quad (1-1.21)$$

این عبارت به ازای عددهای بزرگ اشویت معتبر است.<sup>۱</sup>

۲.ب.۲۱. عبارت‌های دیگر برای شار جرمی تلاطمی. عبارتی مجانبی برای بیان شار جرمی تلاطمی در لوله‌های مدور طویل با شرط مرزی شار جرمی ثابت جدار به دست آورید. فرض کنید انتقال جرم خالص در جدار اندک است. (الف) به موازات رهیافت انتقال گرما در جریان آرام در بخش ۸.۱۰، رابطه زیر را بنویسید:

$$\Pi(\xi, \zeta) = -\frac{\omega_A - \omega_{A1}}{j_{A0} D / \rho D_{AB}} = C_1 \zeta + \Pi_\infty(\xi) + C_2 \quad (1-2.21)$$

که در آن  $\xi = r/D$ ،  $\zeta = (z/D)/\text{ReSc}$ ،  $\omega_{A1}$  کسر جرمی ورودی  $A$ ، و  $j_{A0}$  شار جرمی فصل مشترکی  $A$  در سیال است.

(ب) سپس با استفاده از معادله پیوستگی گونه  $A$ ، رابطه زیر را به دست بیاورید:

$$-4 \frac{\bar{v}_z}{(\bar{v}_z)} = \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[ \left( 1 + \frac{\text{Sc}}{\text{Sc}^{(t)}} \frac{\mu^{(t)}}{\mu} \right) \xi \frac{d\Pi_\infty}{d\xi} \right] \quad (2-2.21)$$

که در آن  $\text{Sc}^{(t)} = \mu^{(t)} / \rho D_{AB}^{(t)}$ . با این شرایط مرزی که  $\Pi_\infty$  در  $\xi = 0$  مقدار متناهی دارد و  $d\Pi_\infty/d\xi$  در  $\xi = 1$  از معادله بالا انتگرال بگیرد.

(ج) یک بار نسبت به  $\xi$  انتگرال بگیرد تا رابطه زیر نتیجه شود:

$$-\frac{d\Pi_\infty}{d\xi} = \frac{\frac{1}{\xi} - 4 \int_\xi^{1/2} (\bar{v}_z / \langle \bar{v}_z \rangle) \bar{\xi} d\bar{\xi}}{\xi [1 + (\text{Sc}/\text{Sc}^{(t)}) (\mu^{(t)}/\mu)]} \quad (3-2.21)$$

۳.ب.۲۱. عبارت مجانبی برای شار جرمی تلاطمی.<sup>۲</sup> از نتیجه نهایی مسئله ۲.ب.۲۱ شروع کنید و به این نکته توجه داشته باشید که وقتی  $\text{Sc}$  به اندازه کافی بالا باشد، همه انحای توزیع غلظت در فاصله بسیار کمی از جدار ایجاد می‌شود که در آن  $\bar{v}_z / \langle \bar{v}_z \rangle \approx \frac{1}{2}$  و  $\xi \approx 1$ . فرض کنید  $\text{Sc}^{(t)} = 1$  و با استفاده از معادله (۲-۴.۵)، رابطه زیر را به دست آورید:

$$-\frac{d\Pi_\infty}{d\xi} = \frac{1}{[1 + \text{Sc}(\mu^{(t)}/\mu)]} = \frac{1}{1 + \text{Sc}(y\nu_* / 14.5\nu)^2} \quad (1-3.21)$$

1. O. T. Hanna, O. C. Sandall, and C. L. Wilson, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **28**, 2286-2290 (1987).

2. C. S. Lin, R. W. Moulton, and G. L. Putnam, *Ind. Eng. Chem.* **45**, 636 (1953).

مختص جديد  $\eta = Sc^{1/2}(y\nu^*/14,5\nu)$  را در معادله (۲۱.ب.۳-۱) معرفی کنید تا معادله‌ای برای  $d\Pi/d\eta$  به دست آورید که در زیرلایه آرام معتبر است. سپس از  $\eta = 0$  (که به ازای آن  $\bar{\omega}_A = \omega_{A0}$ ) تا  $\eta = \infty$  (که به ازای آن  $\bar{\omega}_A \approx \bar{\omega}_{Ab}$ ) انتگرال بگیرید تا رابطه‌ای صریح برای شار جرمی در جدار  $z_{A0}$  به دست آورید. این رابطه را با رابطه نظیر معادله (۱۳.۴-۲۰) که در مسئله ۲۱.ب.۱ به دست آمد مقایسه کنید.

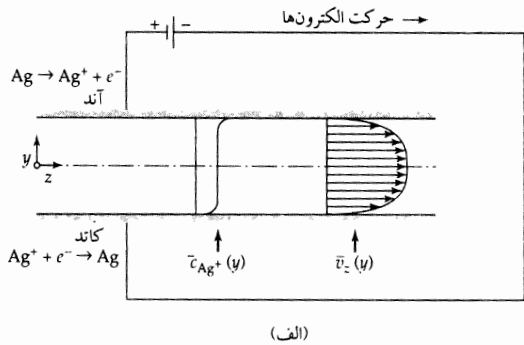
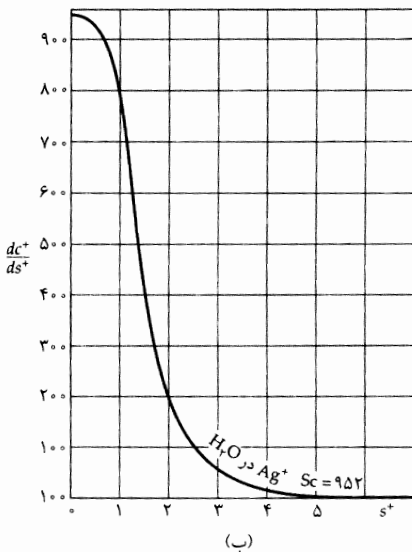
۴.ب.۲۱ رسوب دادن نقره از جریانی متلاطم. (شکل ۴.ب.۲۱). محلولی تقریباً  $0,1N$  از  $KNO_3$  حاوی  $10^{-6} \times 10^6$  اکی والان گرم  $AgNO_3$  در لیتر بین صفحه‌های نقره‌ای موازی، مطابق شکل ۴.ب.۲۱ (الف)، جریان دارد. ولتاژ کمی بین صفحه‌ها برقرار می‌شود تا نقره روی کاتد (صفحه پایینی) رسوب کند و مدار کاملاً قطبیده شود (یعنی غلظت  $Ag^+$  در کاتد بسیار نزدیک صفر بماند). می‌توان از نفوذ واداشته چشم‌پوشی کرد و حرکت  $Ag^+$  به طرف کاتد را صرفاً ناشی از نفوذ معمولی (یعنی طبق قانون فیک)، و نفوذ گردابی دانست. به علاوه، این محلول به اندازه کافی رقیق هست که آثار سایر گونه‌های یونی بر نفوذ  $Ag^+$  قابل چشم‌پوشی باشد.

(الف) مطلوب است محاسبه توزیع غلظت  $Ag^+$ ، با فرض این‌که (۱) ضریب نفوذ دوتایی مؤثر  $Ag^+$  در آب  $10^{-5} \times 1,06 \text{ cm}^2/\text{s}$  باشد؛ (۲) عبارت بریده‌لین، مولتون، و پوتنام، معادله (۴.۵-۲)، برای توزیع سرعت تلاطمی در لوله‌های مدور، برای «جریان در شکاف» نیز معتبر باشد، هرگاه چهار برابر شعاع هیدرولیکی را جایگزین قطر لوله کنیم؛ (۳) فاصله صفحه‌ها از یکدیگر  $1,27 \text{ cm}$  و  $\sqrt{\tau_0/\rho}$  برابر  $11,4 \text{ cm/s}$  باشد.

(ب) از سایر واکنش‌های الکترودی چشم‌پوشی کنید و آهنگ رسوب شدن نقره روی کاتد را تخمین بزنید.

(ج) آیا روش محاسبه قسمت (الف) شیب ناپیوسته‌ای را برای توزیع غلظت در صفحه میانی این سیستم پیش‌بینی می‌کند؟ توضیح دهید.

جواب: (الف) نگاه کنید به شکل ۴.ب.۲۱ (ب)؛ (ب)  $6,7 \times 10^{-12} \text{ equiv/cm}^2 \cdot \text{s}$



شکل ۴.ب.۲۱ (الف) رسوب دادن الکتروشیمیایی  $Ag^+$  از جریان متلاطم در جهت  $z$  مثبت، بین دو صفحه موازی؛ (ب) گرادیان‌های غلظت در آبکاری نقره روی الکتروُد.

۲۱.۵. عبارت طول اختلاط برای توزیع سرعت.

(الف) از معادله (۳-۵.۵) شروع کنید و نشان دهید که برای جریان متلاطم کاملاً شکل یافته با رانش پایا، در لوله، داریم:

$$\frac{\bar{\tau}_{rz}}{\tau_0} = \frac{r}{R} = 1 - \frac{y}{R} \quad (۱-۵.۲۱)$$

(ب) سپس فرض کنید  $\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{rz}^{(v)} + \bar{\tau}_{rz}^{(t)}$  که در آن  $\bar{\tau}_{rz}^{(v)}$  با مختصات استوانه‌ای نظیر معادله (۹-۲.۵)، و  $\bar{\tau}_{rz}^{(t)}$  با معادله (۵-۵.۵) بیان می‌شود. نشان دهید که در این صورت معادله (۱-۵.۲۱) چنین نوشته می‌شود:

$$\rho l^2 \left( \frac{d\bar{v}_z}{dy} \right)^2 + \mu \left( \frac{d\bar{v}_z}{dy} \right) = \tau_0 \left( 1 - \frac{y}{R} \right) \quad \text{به‌ازای } 0 \leq y \leq R \quad (۲-۵.۲۱)$$

(ج) با استفاده از نمادهای بدون بُعد به‌کاررفته در معادله قبل، معادله (۱۳-۴.۲۱) را از معادله (۲-۵.۲۱) به‌دست آورید.

## فصل ۲۲

### انتقال میان‌فازی در مخلوط‌های غیرهم‌دما

- ۱.۲۲ تعریف ضرایب انتقال در یک فاز
- ۲.۲۲ عبارت‌های تحلیلی برای ضرایب انتقال جرم
- ۳.۲۲ رابطه همبستگی ضرایب انتقال دوتایی در یک فاز
- ۴.۲۲ تعریف ضرایب انتقال در دو فاز
- ۵.۲۲ انتقال جرم و واکنش‌های شیمیایی
- ۶.۲۲ انتقال مرکب گرما و جرم از طریق همرفت آزاد
- ۷.۲۲ آثار نیروهای فصل‌مشترکی بر انتقال گرما و جرم
- ۸.۲۲ ضرایب انتقال در آهنگ‌های بالای انتقال جرم خالص
- ۹.۲۲ تقریب‌های ماتریسی برای انتقال جرم چندجزئی

در این فصل، براساس بحث‌های قبلی در مورد نفوذ دوتایی، راهی برای پیش‌بینی رفتار عملیات مختلف انتقال جرم، از قبیل تقطیر، جذب، جذب سطحی، استخراج، خشک کردن، فیلتر کردن با غشا، و واکنش‌های شیمیایی ناهمگن پیدا می‌کنیم. این فصل اشتراکات زیادی با فصل‌های ۶ و ۱۴ دارد. به‌ویژه با فصل ۱۴ رابطه‌ای تنگاتنگ دارد، زیرا در وضعیت‌های بسیاری می‌توان شباهت بین انتقال گرما و جرم را دقیق دانست.

اما تفاوت‌های مهمی بین انتقال گرما و انتقال جرم وجود دارد و ما بخش اعظم این فصل را به بررسی این تفاوت‌ها اختصاص می‌دهیم. چون بسیاری از عملیات انتقال جرم شامل فصل‌مشترک‌های سیال-سیال‌اند، ناگزیر با اعوجاج شکل فصل‌مشترک، بر اثر پسای ویسکوز و گرادیان‌های کشش سطحی ناشی از ناهمگنی در دما و ترکیب شیمیایی سروکار پیدا می‌کنیم. به‌علاوه، ممکن است بین انتقال گرما و جرم نیز برهم‌کنش‌هایی وجود داشته‌باشد و ممکن است واکنش‌های شیمیایی نیز انجام شود. هم‌چنین، در آهنگ‌های بالای انتقال جرم، توزیع‌های دما، و غلظت ممکن است دچار اعوجاج شوند. این آثار تناظر بین انتقال گرما و جرم را، از آن‌چه درغیراین‌صورت انتظار می‌رفت، پیچیده‌تر و گاه بی‌اعتبار می‌کنند.

در فصل ۱۴ انتقال گرمای میان‌فازی شامل حرکت گرما به‌طرف سطح جامد، یا درجهت دور شدن از آن، یا انتقال گرما بین دو سیال بود که توسط سطحی جامد ازهم جداشده بودند. در این‌جا با انتقال گرما و جرم بین دو فاز

همسایه سرورکار داریم: سیال-سیال یا سیال-جامد. در نتیجه این پرسش مطرح می‌شود که چگونه می‌توان مقاومت در برابر نفوذ ایجاد شده توسط دو سیال واقع در دو طرف فصل مشترک را به حساب آورد.

بحث خود را در این فصل با تعریف ضرایب انتقال جرم و انتقال گرما برای مخلوط‌های دوتایی در یک فاز (مایع یا گاز) در بخش ۱.۲۲ آغاز می‌کنیم. سپس در بخش ۲.۲۲ نشان می‌دهیم که چگونه راه‌حل‌های تحلیلی مسئله‌های نفوذ به عبارت‌های صریحی برای ضرایب انتقال جرم منتهی می‌شوند. در آن بخش چند عبارت تحلیلی را برای ضرایب انتقال جرم با عددهای اشمیت بالا، در مورد چند سیستم نسبتاً ساده ارائه می‌دهیم. بر رفتار متفاوت سیستم‌های دارای فصل مشترک سیال-سیال و سیستم‌های دارای فصل مشترک جامد-سیال تأکید می‌کنیم.

در بخش ۳.۲۲ نشان می‌دهیم که چگونه تحلیل ابعادی به پیش‌بینی‌های شامل عدد شرود (Sh) و عدد اشمیت (Sc) منتهی می‌شود که نظایر عدد نولت (Nu) و عدد پراوتل (Pr) به شمار می‌روند که در فصل ۱۴ تعریف شدند. در این جا تأکید روی شباهت بین انتقال گرما در سیال‌های خالص و انتقال جرم در مخلوط‌های دوتایی است. سپس در بخش ۴.۲۲ به تعریف ضرایب انتقال جرم برای سیستم‌هایی می‌پردازیم که در آن‌ها نفوذ در دو فاز مجاور روی می‌دهد. در آن بخش نحوه کاربرد اطلاعات مربوط به انتقال جرم در یک فاز، برای درک انتقال جرم بین دو فاز، را نشان می‌دهیم.

سرانجام در پنج بخش آخرین فصل، بعضی از آثار غیرعادی برای سیستم‌های انتقال جرم را مطرح می‌کنیم: انتقال جرم با واکنش‌های شیمیایی (بخش ۵.۲۲)، برهم‌کنش فرایندهای انتقال گرما و انتقال جرم در همرفت آزاد (بخش ۶.۲۲)، عوامل پیچیده‌ساز نیروهای کشش سطحی فصل مشترکی و آثار مارانگونی (بخش ۷.۲۲)، اعوجاج توزیع‌های دما و غلظت که در سیستم‌های با آهنگ انتقال جرم بالا روی فصل مشترک ایجاد می‌شوند (بخش ۸.۲۲)، و سرانجام تحلیل ماتریسی انتقال جرم در سیستم‌های چند جزئی. در این فصل بر رفتار غیرمتناظر سیستم‌های انتقال گرما و انتقال جرم تأکید می‌کنیم.

در فصل حاضر بحث خود را به چند موضوع مهم درباره همبستگی ضرایب انتقال جرم و انتقال گرما محدود کرده‌ایم. برای کسب اطلاعات بیش‌تر در این زمینه و زمینه‌های مرتبط، باید به کتاب‌های تخصصی رجوع کنید. (۴.۳.۲۱)

## ۱.۲۲ تعریف ضرایب انتقال در یک فاز

در این فصل رابطه بین آهنگ‌های انتقال جرم در مرزهای فاز با اختلاف غلظت در این ناحیه، عمدتاً در سیستم‌های دوتایی، را به دست می‌آوریم. این روابط نظیر روابط همبستگی به دست آمده برای انتقال گرما در فصل ۱۴ به شمار می‌روند و به جای ضرایب انتقال گرما در آن فصل، حاوی ضرایب انتقال جرم‌اند. سیستم ممکن است مرز فاز حقیقی داشته باشد، مانند سیستم شکل ۱-۱.۲۲، یا ۲، ۳، ۴، یا تغییری ناگهانی در خواص هیدرودینامیکی آن پدید آید، مانند سیستم شکل ۳-۱.۲۲، که حاوی جامدی متخلخل است. شکل ۱-۱.۲۲ تبخیر مایعی فزّار را نشان می‌دهد که غالباً در آزمایش‌ها، به منظور یافتن روابط همبستگی انتقال جرم، به کار می‌رود. شکل ۲-۱.۲۲ غشایی تراوایی‌گزين را نشان می‌دهد که در آن سطحی با تراوایی‌گزينی، انتقال یک حلال را، از ماده حل شده در آن که باید جدا شود،

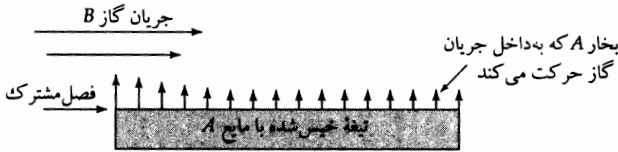
1. T. K. Sherwood, R. L. Pigford, and C. R. Wilke, *Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York (1975).

2. R. E. Treybal, *Mass Transfer Operations*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1980).

3. E. L. Cusseler, *Diffusion: Mass Transfer in Fluid Systems*, 2nd edition Cambridge University Press (1997).

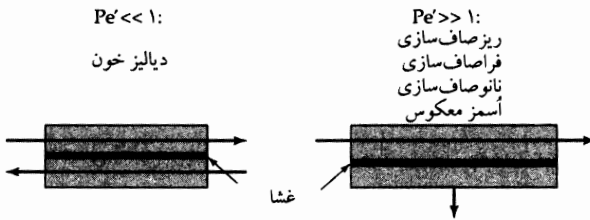
4. D. E. Rosner, *Transport Processes in Chemically Reacting Flow Systems* (Unabridged), Dover, New York (2000).

مؤثرتر انجام می‌دهد؛ مانند فراصاف‌سازی محلول‌های پروتئین و نمک‌زدایی از آب دریا. در شکل ۱-۲۲-۳ یک جامد متخلخل ماکروسکوپی نشان داده شده‌است که می‌تواند به‌عنوان سطح انتقال جرم عمل کند، یا مکان‌هایی برای جذب یا واکنش فراهم آورد. شکل ۱-۲۲-۴ یک تماس دهنده ایده‌آل‌سازی شده مایع-بخار را نشان می‌دهد که در آن فصل مشترک انتقال جرم بر اثر نیروهای ویسکوز یا کشش سطحی دچار اعوجاج می‌شود.

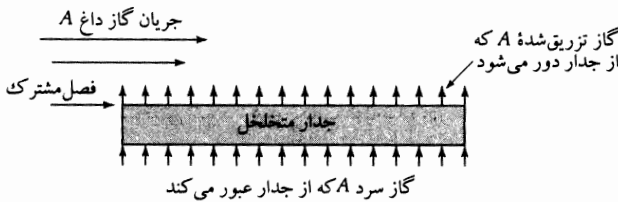


شکل ۱-۲۲-۱ مثالی از انتقال جرم روی مرز صفحه‌ای: خشک شدن یک تیغه اشباع.

فرایندهای غشایی نمونه



شکل ۱-۲۲-۲ دو نوع جداساز غشایی نسبتاً متداول، که در این جا بر طبق عدد پکلت دسته‌بندی شده‌اند،  $Pe' = \delta v / D_{eff}$ ، برای جریان در غشا، در این جا  $\delta$  ضخامت غشا،  $v$  سرعت عبور حلال از غشا،  $D_{eff}$  ضریب نفوذ مؤثر ماده حل شده در غشاست. خط ضخیم معرف غشاست و پیکان‌ها جریان در طول غشا، یا جریان عبوری از آن را نشان می‌دهند.



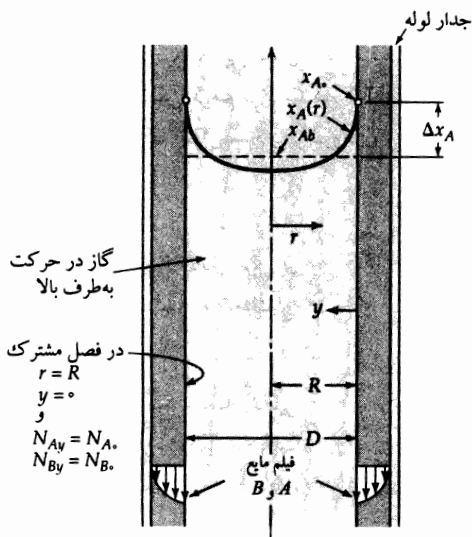
شکل ۱-۲۲-۳ مثالی از انتقال جرم از جدار متخلخل: سرمایش تعریفی.

در هریک از این سیستم‌ها، در فصل مشترک هم انتقال گرما و هم انتقال جرم انجام می‌شود، و هریک از این شارها یک جمله مولکولی (نفوذی) و یک جمله همرفتی دارند (در این جا جمله همرفتی را به سمت چپ معادله انتقال داده‌ایم):

$$N_{A_0} - x_{A_0}(N_{A_0} + N_{B_0}) = - \left( cD_{AB} \frac{\partial x_A}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (1-1.22)$$

$$e_0 - (N_{A_0} \bar{H}_{A_0} + N_{B_0} \bar{H}_{B_0}) = - \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (2-1.22)$$

این معادله‌ها همان معادله‌های (۱۸-۱) و (۱۹-۳-۶) هستند که در فصل مشترک انتقال جرم ( $y = 0$ ) نوشته شده‌اند. آن‌ها شار مولی میان‌فازی گونه  $A$  و شار میان‌فازی انرژی (به‌استثنای انرژی جنبشی و سهم ناشی از  $T \cdot v$ ) را توصیف می‌کنند. هم  $N_{A_0}$  و هم  $e_0$  برای انتقال به داخل فاز موضعی، مثبت تعریف می‌شوند، مگر در بخش ۴.۲۲ که شارهای هر فاز، برای انتقال به طرف مایع مثبت تعریف می‌شوند.



شکل ۴-۱.۲۲ مثالی از دستگاه تماس گاز-مایع: ستون با جدار خیس. دو گونهٔ شیمیایی  $A$  و  $B$  از مایعی که به طرف پایین جریان دارد، جدا می‌شوند و به جریان بالاروگاز در لولهٔ استوانه‌ای می‌پیوندند.

در فصل ۱۴ ضریب انتقال گرما را درغیاب انتقال جرم، با معادلهٔ (۱-۱.۱۴) تعریف کردیم ( $Q = hA\Delta T$ ). برای سطوحی با انتقال جرم و گرما، معادله‌های (۱-۱.۲۲) و (۲) استفاده از تعریف‌های زیر را مناسب جلوه می‌دهند:

$$W_{A0} - x_{A0}(W_{A0} + W_{B0}) = k_{xA}A\Delta x_A \quad (۳-۱.۲۲)$$

$$E_0 - (W_{A0}\bar{H}_{A0} + W_{B0}\bar{H}_{B0}) = hA\Delta T \quad (۴-۱.۲۲)$$

در این جا  $W_{A0}$  تعداد مول‌های گونهٔ  $A$  است که در واحد زمان از سطح انتقال گرما در  $y = 0$  عبور می‌کند و  $E_0$  مقدار کل انرژی عبوری از این سطح است. ضرایب انتقال  $k_{xA}$  و  $h$  را تعریف نمی‌کنیم تا سطح  $A$  و نیروهای رانش  $\Delta T$  و  $\Delta x_A$  مشخص شوند. همهٔ نکات گفته‌شده در فصل ۱۴ در مورد این تعریف‌ها، در این فصل نیز مصداق دارد و نتیجه این که یک اندیس  $1, \ln, a, m$  یا  $loc$  می‌توان اضافه کرد تا نوع نیروی رانشی مورد استفاده روشن‌تر شود. اما در این فصل بیشتر از ضرایب انتقال موضعی و گاهی از ضرایب انتقال میانگین استفاده خواهیم کرد. به علاوه، در این فصل، از شارهای مولی گونه‌ها استفاده خواهد شد، زیرا این کار در مهندسی شیمی مرسوم است.

روابط بین عبارت‌های انتقال جرم برحسب واحدهای مولی و جرمی در جدول ۱-۲.۲۲ خلاصه شده است. ضرایب انتقال موضعی را با نوشتن معادله‌های (۳-۱.۲۲) و (۴) برای یک جزء سطح تعریف می‌کنیم. چون  $dW_{A0}/dA = N_{A0}$  و  $dE_0/dA = e_0$ ، تعریف‌های زیر حاصل می‌شود:

$$N_{A0} - x_{A0}(N_{A0} + N_{B0}) = k_{xA,loc}\Delta x_A \quad (۵-۱.۲۲)$$

$$e_0 - (N_{A0}\bar{H}_{A0} + N_{B0}\bar{H}_{B0}) = h_{loc}\Delta T \quad (۶-۱.۲۲)$$

سپس، به این نکته توجه می‌کنیم که سمت چپ معادلهٔ (۵-۱.۲۲) عبارت است از  $J_{A0}^*$ ، و سمت چپ معادلهٔ مشابهی که برای گونهٔ  $B$  نوشته شود  $J_{B0}^*$  است. اما چون  $J_{A0}^* = -J_{B0}^*$  و  $\Delta x_A = -\Delta x_B$ ، درمی‌یابیم که  $k_{xA,loc} = k_{xB,loc}$  و بنابراین می‌توان هر دو ضریب انتقال جرم را به صورت  $k_{x,loc}$  نوشت که واحد آن  $\frac{(\text{مول})}{(\text{زمان})(\text{سطح})}$  است. به علاوه، اگر گرمای اختلاط صفر باشد، (که در مخلوط گاز ایده‌آل چنین است)، می‌توانیم  $\bar{H}_{A0}$



را با  $\tilde{C}_{pA,0}(T_0 - T^0)$  جایگزین کنیم که در آن  $T^0$  دمای مرجع اختیاری است، چنان‌که در مثال ۱۹-۳.۱ شرح داده شد. برای  $\bar{H}_{B,0}$  هم می‌توان جایگزین مشابهی انجام داد. با این تغییرات، نتیجه می‌شود:

$$N_{A,0} - x_{A,0}(N_{A,0} + N_{B,0}) = k_{x,loc} \Delta x_A \quad (۷-۱.۲۲)$$

$$e_0 - (N_{A,0} \tilde{C}_{pA,0} + N_{B,0} \tilde{C}_{pB,0})(T_0 - T^0) = h_{loc} \Delta T \quad (۸-۱.۲۲)$$

یادآوری می‌کنیم که انتقال جرم سریع در مرزهای فاز می‌تواند سبب اعوجاج توزیع‌های سرعت، دما، و غلظت شود که قبلاً در بخش ۲.۱۸ و در مثال ۱۹-۴.۱ مشاهده کردیم. روابط همبستگی ارائه شده در بخش ۲.۲۲، هم‌چنین روابط نظیر آن‌ها در فصل‌های ۶ و ۱۴، همگی برای آهنگ‌های پایین انتقال جرم خالص نوشته شده‌اند، یعنی برای وضعیت‌هایی نوشته شده‌اند که در آن‌ها جمله‌های همرفتی در معادله‌های (۷-۱.۲۲) و (۸) نسبت به جمله اول قابل چشم‌پوشی‌اند. چنین وضعیت‌هایی متداول‌اند و اغلب روابط همبستگی که در نوشتگان علمی یافت می‌شوند همین محدودیت را دارند. در بخش ۸.۲۲ انحرافات مرتبط با بالا بودن آهنگ انتقال جرم خالص را در نظر می‌گیریم و در چنین شرایطی ضرایب انتقال را به اندیس «●» م‌زین می‌کنیم (نگاه کنید به بخش ۸.۲۲).

در بخش عمده نوشتگان مهندسی شیمی، ضرایب انتقال جرم با رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$N_{A,0} = k_{x,loc}^* \Delta x_A \quad (۹-۱.۲۲)$$

رابطه این ضریب انتقال جرم «ظاهری» با ضریبی که با معادله (۷-۱.۲۲) تعریف شد، چنین است:

$$k_{x,loc}^* = \frac{k_{x,loc}}{[1 - x_{A,0}(1+r)]} \quad (۱۰-۱.۲۲)$$

که در آن  $r = N_{B,0}/N_{A,0}$ . سایر ضرایب پرکاربرد انتقال جرم چنین تعریف می‌شوند:

$$N_{A,0} = k_{c,loc}^* \Delta c_A \quad \text{و} \quad n_{A,0} = k_{\rho,loc}^* \Delta \rho_A \quad (۱۱-۱.۲۲)$$

برای مایعات، و:

$$N_{A,0} = k_{p,loc}^* \Delta p_A \quad (۱۲-۱.۲۲)$$

برای گازها. در حد غلظت‌های پایین ماده حل‌شده، و آهنگ‌های انتقال جرم خالص، که اغلب روابط همبستگی برای همین شرایط به‌دست آمده‌اند، داریم:

$$\lim_{x_{A,0}(1+r) \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} k_{x,loc}^* \\ ck_{c,loc}^* \\ pk_{p,loc}^* \\ \rho k_{\rho,loc}^* \end{array} \right\}^{\frac{1}{4}} = k_{x,loc} \quad (۱۳-۱.۲۲)$$

اندیس «●» نشان می‌دهد که این کمیت‌ها فقط در مورد آهنگ‌های پایین انتقال جرم و کسرهای مولی کوچک گونه A قابل‌کاربردند.

در بسیاری از تماس‌دهنده‌های صنعتی، سطح فصل‌مشرکی واقعی معلوم نیست. نمونه‌ای از چنین سیستمی

ستونی است که با ذرات جامد نامنظم، به صورت تصادفی، پر شده است. در چنین وضعیتی، می‌توان ضریب انتقال جرم حجمی  $k_x a$  را تعریف کرد و سطح فصل مشترک را برای ناحیه‌ای دیگر از ستون به کار گرفت. در این صورت آهنگ انتقال گونه  $A$  به سیال بین‌نشین در حجم  $Sdz$  از ستون، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$dW_{A^0} = (k_x a)(x_{A^0} - x_{Ab})Sdz + x_{A^0}(dW_{A^0} + dW_{B^0})$$

$$\approx (k_x^0 a)(x_{A^0} - x_{Ab})Sdz \quad (۱۴-۱.۲۲)$$

در این جا سطح فصل مشترکی،  $a$ ، در واحد حجم با ضریب انتقال جرم ترکیب می‌شود،  $S$  سطح مقطع کل ستون است، و  $z$  در جهت جریان اولیه اندازه‌گیری می‌شود. روابط همبستگی برای پیش‌بینی مقادیر این ضرایب در دسترس است، اما باید با احتیاط از آن‌ها استفاده کرد. این روابط به ندرت شامل همه پارامترهای مهم اند و در نتیجه نمی‌توان با اطمینان آن‌ها را برای سیستمی جدید برون‌یابی کرد. گذشته از این، اگرچه این روابط را معمولاً «موضعی» می‌دانند، عملاً معرف مقدار متوسطی هستند که در گستره‌ای وسیع از شرایط فصل مشترکی به دست آمده است و تعریف محکمی نیز ندارد. ۵.۴.۳.۲.۱

این بخش را با تعریف گروه بدون بعدی به پایان می‌بریم که در نوشتگان انتقال جرم و در بقیه این کتاب، کاربرد گسترده‌ای دارد:

$$Sh = \frac{k_x l^0}{c D_{AB}} \quad (۱۵-۱.۲۲)$$

این گروه را عدد شروود می‌نامند و بر طول مشخصه  $l^0$  مبتنی است. این کمیت را، چنان‌که در مورد  $h$  دیدیم، می‌توان به اندیس‌های  $1, m, a, \ln$  و  $loc$  مزین کرد.

## ۲.۲۲ عبارتهای تحلیلی برای ضرایب انتقال جرم

در فصل‌های گذشته تعدادی جواب تحلیلی برای توزیع‌های غلظت و شارهای مولی مرتبط با آن‌ها پیدا کردیم. اکنون می‌توانیم با استفاده از این جواب‌ها ضرایب متناظر انتقال جرم را به دست آوریم. این جواب‌ها معمولاً به صورت بدون بعد و برحسب اعداد شروود بیان می‌شوند. در این جا این عبارتهای تحلیلی را خلاصه می‌کنیم تا در بخش‌های بعدی این فصل از آن‌ها استفاده کنیم. همه نتایجی که در این بخش ارائه می‌شوند به سیستم‌هایی با جزء  $A$  که اندکی انحلال‌پذیر است، ضرایب نفوذ کوچک  $D_{AB}$ ، و آهنگ‌های پایین انتقال جرم خالص مربوط اند که در بخش‌های ۱.۲۲ و ۸.۲۲ تعریف می‌شوند. شاید در این نقطه، رجوع به جدول ۱-۲.۲۲، که گروه‌های بدون بعد انتقال گرما و انتقال جرم در آن خلاصه شده است، مناسب باشد.

## انتقال جرم در فیلم‌های ریزان روی سطوح مسطح

برای جذب گاز  $A$  با انحلال‌پذیری اندک، در فیلمی از مایع خالص  $B$ ، می‌توان نتیجه معادله (۱۸-۵.۱۸) را به صورت معادله (۳-۱.۲۲) نوشت (این معادله، به شیوه معادله (۱۱-۱.۲۲) برای واحدهای غلظت مولی اصلاح شده است):

1. J. Stichlmair and F. Fair, *Distillation Principles and Practice*, Wiley, New York (1998).
2. H. Z. Kister, *Distillation Design*, McGraw-Hill, New York (1992).
3. J. C. Godfrey and M. M. Slater, *Liquid-Liquid Extraction Equipment*, Wiley, New York (1994).
4. R. H. Perry, D. W. Green, and J. O. Maloney, *Chemical Engineers Handbook*, 7th edition, McGraw-Hill, New York (1997).
5. J. E. Vivian and C. J. King, in *Modern Chemical Engineering* (A. Acrivos, ed.), Reinhold, New York (1963).

بنابراین:

$$W_{A^0} = \left( \sqrt{\frac{4D_{AB}v_{\max}}{\pi L}} \right) (WL)(c_{A^0} - c^0) \equiv k_{c,m}^* A \Delta c_A \quad (۱-۲۰۲۲)$$

جدول ۱-۲۰۲۲ تناظر بین انتقال گرما و انتقال جرم در آهنگ‌های پایین انتقال جرم.

کمیت‌های انتقال جرم دوتایی (سیال‌های هم‌دما، واحدهای جرمی)	کمیت‌های انتقال جرم دوتایی (سیال‌های هم‌دما، واحدهای مولی)	کمیت‌های انتقال گرما (سیال‌های خالص)	
$\omega_A$	$x_A$	$T$	توزیع
$D_{AB}$	$D_{AB}$	$\alpha = k/\rho\hat{C}_p$	ضریب نفوذ
$\zeta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \omega_A} \right)_{p,T}$	$\xi = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_A} \right)_{p,T}$	$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$	اثر توزیع بر چگالی
$\mathbf{j}_A = \mathbf{n}_A - \omega_A(\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B)$	$\mathbf{J}_A^* = \mathbf{N}_A - x_A(\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B)$	$\mathbf{q}$	شار
$w_{A^0} - \omega_{A^0}(w_{A^0} + w_{B^0})$	$W_{A^0} - x_{A^0}(W_{A^0} + W_{B^0})$	$Q$	آهنگ انتقال
$k_\omega = \frac{w_{A^0} - \omega_{A^0}(w_{A^0} + w_{B^0})}{A\Delta\omega_A}$	$k_x = \frac{W_{A^0} - x_{A^0}(W_{A^0} + W_{B^0})}{A\Delta x_A}$	$h = \frac{Q}{A\Delta T}$	ضریب انتقال
$Re = l.v.\rho/\mu$	$Re = l.v.\rho/\mu$	$Re = l.v.\rho/\mu$	گروه‌های بدون بُعد
$Fr = v^*/gl.$	$Fr = v^*/gl.$	$Fr = v^*/gl.$	مشترک در هر سه رابطه همبستگی
$Sh = k_\omega l./\rho D_{AB}$	$Sh = k_x l.c/D_{AB}$	$Nu = hl./k$	گروه‌های بدون بُعد متفاوت
$Sc = \mu/\rho D_{AB}$	$Sc = \mu/\rho D_{AB}$	$Pr = \hat{C}_p\mu/k$	
$Gr_\omega = l^*\rho^*g\zeta\Delta\omega_A/\mu^*$	$Gr_x = l^*\rho^*g\xi\Delta x_A/\mu^*$	$Gr = l^*\rho^*g\beta\Delta T/\mu^*$	
$Pe' = ReSc = l.v./D_{AB}$	$Pe' = ReSc = l.v./D_{AB}$	$Pe' = RePr = \rho l.v.\hat{C}_p/k$	
$j_D = ShRe^{-1}Sc^{-1/2} = \frac{k_\omega}{\rho v_*} \left( \frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right)^{1/2}$	$j_D = ShRe^{-1}Sc^{-1/2} = \frac{k_x}{cv_*} \left( \frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right)^{1/2}$	$j_H = NuRe^{-1}Pr^{-1/2} = \frac{h}{\rho\hat{C}_pv_*} \left( \frac{\hat{C}_p\mu}{k} \right)^{1/2}$	ضرایب جیلتون-کولبورن

تذکر: الف) اندیس «۰» روی  $l$  و  $v$ ، به ترتیب، نشان‌دهنده طول مشخصه و سرعت است، اما اندیس «\*» روی کسر مولی (یا جرمی) و شار مولی (یا جرمی) به معنای «تعیین شده در فصل مشترک» است. ب) هر سه عدد گراسهوف را می‌توان به صورت  $Gr = l^*\rho g\Delta\rho/\mu^*$  نوشت، به شرط آنکه تغییر چگالی فقط از اختلاف دما یا ترکیب شیمیایی ناشی شود.

بنابراین وقتی سطح فصل مشترک  $WL$  به عنوان سطح مشخصه انتخاب شود، مشاهده می‌کنیم که:

$$\begin{aligned} Sh_m &= \frac{k_{c,m}^* L}{D_{AB}} = \sqrt{\frac{4Lv_{\max}}{\pi D_{AB}}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \left( \frac{Lv_{\max}\rho}{\mu} \right) \left( \frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right)} \\ &= 1.128(ReSc)^{1/2} \quad (۲-۲۰۲۲) \end{aligned}$$

این معادله عدد شروود (ضریب انتقال جرم بدون بُعد) را برحسب عدد رینولدز و عدد اشمیت بیان می‌کند و در آن Re برحسب سرعت ماکزیم  $v_{\max}$  در فیلم و طول  $L$  فیلم بیان می‌شود. عدد رینولدز را می‌توان برحسب سرعت متوسط فیلم، با استفاده از یک ضریب عددی متفاوت، نیز بیان کرد.

به‌همین ترتیب، برای انحلال ماده  $A$  که کمی انحلال‌پذیر است، از جدار به داخل فیلم مایع ریزان ماده خالص  $B$ ، می‌توانیم معادله (۶-۱۸) را به صورت معادله (۳-۱۰۲۲) بنویسیم:

$$W_{A^0} = \left( \frac{2D_{AB}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{\rho}\right)} \sqrt{\frac{a}{4D_{AB}L}} \right) (WL)(c_{A^0} - 0) \equiv k_{c,m}^* A \Delta c_A \quad (3-2.22)$$

سپس، با استفاده از تعریف  $a = \rho g \delta / \mu$  که درست پس از معادله (۶-۱۸) مطرح شد، و عبارت مربوط به سرعت ماکزیم در فیلم، یعنی معادله (۲-۱۹)، عدد شروود را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} Sh_m &= \frac{k_{c,m}^* L}{D_{AB}} = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{\rho}\right)} \sqrt{\frac{(2v_{\max}/\delta)L^2}{4D_{AB}}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{\rho}\right)} \sqrt{\frac{16}{9} \left(\frac{L}{\delta}\right) \left(\frac{Lv_{\max}\rho}{\mu}\right) \left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}}\right)} \\ &= 1.017 \sqrt{\left(\frac{L}{\delta}\right) (ReSc)^{1/2}} \end{aligned} \quad (4-2.22)$$

در این لحظه نه تنها عددهای رینولدز و اشمیت ظاهر می‌شوند، بلکه نسبت طول فیلم به ضخامت فیلم نیز پدیدار می‌شود. این دو مسئله - جذب گاز توسط فیلم ریزان و انحلال جدار جامد در فیلم ریزان - دو وضعیت مهم را نشان می‌دهند. در مسئله اول، در فصل مشترک گاز-مایع، گرادیان سرعت وجود ندارد، و کمیت  $ReSc$  با توان  $\frac{1}{4}$  در عبارت عدد شروود ظاهر می‌شود. در مسئله دوم، در فصل مشترک جامد-مایع گرادیان سرعت وجود دارد و کمیت  $ReSc$  با توان  $\frac{1}{4}$  در عبارت عدد شروود ظاهر می‌شود.

### انتقال جرم برای جریان در اطراف کره

حال فرایند نفوذی را بررسی می‌کنیم که در جریان خزشی در اطراف حباب گاز کروی و در اطراف کره‌ای جامد به قطر  $D$  رخ می‌دهد. این دو سیستم با دو سیستمی که در بخش فرعی قبلی بررسی شدند، قابل مقایسه‌اند. برای جذب گاز از حباب گاز احاطه‌شده با مایعی در حال جریان خزشی، می‌توان معادله (۳-۲۰) را به صورت معادله (۵-۱۰۲۲) نوشت، بنابراین:

$$N_{A^0, \text{avg}} = \sqrt{\frac{4}{3\pi} \frac{D_{AB} v_{\infty}}{D}} (c_{A^0} - 0) \equiv k_{c,m}^* A \Delta c_A \quad (5-2.22)$$

پس عدد شروود برابر است با:

$$\begin{aligned} Sh_m &= \frac{k_{c,m}^* D}{D_{AB}} = \sqrt{\frac{4}{3\pi} \frac{D v_{\infty}}{D_{AB}}} = \sqrt{\frac{4}{3\pi} \left(\frac{D v_{\infty} \rho}{\mu}\right) \left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}}\right)} \\ &= 0.6515 (ReSc)^{1/2} \end{aligned} \quad (6-2.22)$$

در این جا عدد رینولدز را با استفاده از سرعت تقرب سیال،  $v_{\infty}$  (یا سرعت حد حباب در حال صعود) تعریف می‌کنیم. برای جریان خزشی در اطراف کره‌ای جامد با پوششی با انحلال‌پذیری اندک که در سیال در حال تقرب حل می‌شود،

می‌توان معادله (۴.۱۲-۳۴) را اصلاح کرد و نوشت:

$$N_{A^0, \text{avg}} = \frac{(3\pi)^{1/2}}{2^{1/2}\Gamma(\frac{4}{3})} \sqrt{\frac{D_{AB}^2 v_\infty}{D^2}} (c_{A^0} - c^0) \equiv k_{c,m}^0 \Delta c_A \quad (7-2.22)$$

این نتیجه را می‌توان برحسب عدد شروود، به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \text{Sh}_m &= \frac{k_{c,m}^0 D}{D_{AB}} = \frac{(3\pi)^{1/2}}{2^{1/2}\Gamma(\frac{4}{3})} \sqrt{\frac{D v_\infty}{D_{AB}}} = \frac{(3\pi)^{1/2}}{2^{1/2}\Gamma(\frac{4}{3})} \sqrt{\left(\frac{D v_\infty \rho}{\mu}\right) \left(\frac{\mu}{\rho D_{AB}}\right)} \\ &= 0.991 (\text{ReSc})^{1/2} \end{aligned} \quad (8-2.22)$$

مانند بخش فرعی قبل، ReSc را برای سیستم گاز-مایع با توان  $\frac{1}{3}$  و برای سیستم مایع-جامد با توان  $\frac{1}{4}$  داریم. هردو معادله (۶-۲.۲۲) و (۸-۲.۲۲) فقط برای جریان خزشی معتبرند. اما در حد، وقتی Re به سمت صفر میل می‌کند، اعتبار ندارند. چنان‌که از مسئله ۱۰ ب. ۱ و معادله (۴.۱۴-۵) می‌دانیم، اگر جریانی از کره جامد یا حباب کروی عبور نکند،  $\text{Sh}_m = 2$ . مشخص شده‌است که توصیفی رضایت‌بخش از انتقال جرم تا  $\text{Re} = 0$  را می‌توان با استفاده از جمع آثاری ساده به دست آورد:  $\text{Sh}_m = 2 + 0.6515 (\text{ReSc})^{1/2}$  و  $\text{Sh}_m = 2 + 0.991 (\text{ReSc})^{1/2}$  به جای معادله‌های (۶-۲.۲۲) و (۸).

انتقال جرم در لایه‌های مرزی پایا و جدانشده روی اجسامی با شکل اختیاری برای سیستم‌هایی با فصل مشترک سیال-سیال و بدون گرادیان سرعت در فصل مشترک، دریافتیم که شار جرمی در سطح از معادله (۳.۲۰-۱۴) به دست می‌آید:

$$N_{A^0} = \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi} \frac{h_z^2 v_s^2}{\int_x^x h_x h_z^2 v_s d\bar{x}}} (c_{A^0} - c^0) \equiv k_{c,\text{loc}}^0 \Delta c_A \quad (9-2.22)$$

عدد موضعی شروود عبارت است از:

$$\text{Sh}_{\text{loc}} = \frac{k_{c,\text{loc}}^0 l}{D_{AB}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\text{ReSc})^{1/2} \sqrt{\frac{h_z^2 v_s^2 l}{\int_x^x h_x h_z^2 v_s d\bar{x} v}} \quad (10-2.22)$$

که در آن ثابت  $1/\sqrt{\pi}$ ، برابر است با:  $0.5642$  و  $\text{Re} = l \cdot v \cdot \rho / \mu$ . به همین ترتیب، برای سیستم‌هایی با فصل مشترک‌های سیال-جامد و گرادیان سرعت در فصل مشترک، عبارت شار جرمی با معادله (۳.۲۰-۲۶) چنین نوشته می‌شود:

$$N_{A^0} = \frac{D_{AB}}{\Gamma(\frac{4}{3})} \sqrt{\frac{(h_z \beta)^{2/3}}{9 D_{AB} \int_x^x \sqrt{h_z \beta} h_x h_z d\bar{x}}} (c_{A^0} - c^0) \equiv k_{c,\text{loc}}^0 \Delta c_A \quad (11-2.22)$$

عبارت نظیر برای عدد شروود چنین است:

$$\text{Sh}_{\text{loc}} = \frac{k_{c,\text{loc}}^0 l}{D_{AB}} = \frac{1}{9^{1/2}\Gamma(\frac{4}{3})} (\text{ReSc})^{1/2} \sqrt{\frac{(h_z \beta)^{2/3} l^2}{\int_x^x \sqrt{h_z \beta} h_x h_z d\bar{x} v}} \quad (12-2.22)$$

که در آن ضریب عددی مقداری برابر  $0.5384$  دارد. در این معادله‌ها،  $l$  و  $v_0$  طول مشخصه و سرعت مشخصه‌ای هستند که می‌توان پس از تعریف شکل جسم انتخاب کرد. در این‌جا مشاهده می‌کنیم که دوباره توان  $\frac{1}{3}$  روی ReSc در سیستم سیال-سیال و توان  $\frac{1}{2}$  روی ReSc در سیستم سیال-جامد، صرف‌نظر از شکل آن‌ها، ظاهر می‌شود. جمله‌های زیر رادیکال در عبارتهای مربوط به عدد شروود، بدون بُعدند.

### انتقال جرم در همسایگی دیسکی چرخان

برای دیسکی به قطر  $D$  که با ماده  $A$  پوشانده شده که کمی انحلال‌پذیر است و با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  در ناحیه وسیعی از مایع  $B$  می‌چرخد، شار جرمی در سطح دیسک از مکان مستقل است. طبق معادله (۱۹-۴-۷)، داریم:

$$N_{A_0} = 0.62 \left( \frac{D_{AB}^{1/2} \Omega^{1/2}}{\nu^{1/6}} \right) (c_{A_0} - c_0) \equiv k_{c,m}^* \Delta c_A \quad (13-2.22)$$

این رابطه را می‌توان برحسب عدد شروود بیان کرد:

$$\begin{aligned} \text{Sh}_m &= \frac{k_{c,m}^* D}{D_{AB}} = 0.62 \left( \frac{D \Omega^{1/2} \rho^{1/6}}{D_{AB}^{1/2} \mu^{1/6}} \right) = 0.62 \sqrt{\frac{D(D\Omega)\rho}{\mu}} \sqrt{\frac{\mu}{\rho D_{AB}}} \\ &= 0.62 \text{Re}^{1/2} \text{Sc}^{1/3} \end{aligned} \quad (14-2.22)$$

در این‌جا سرعت مشخصه در عدد رینولدز برابر با  $D\Omega$  انتخاب شده‌است.

### ۳.۲۲ رابطه همبستگی ضرایب انتقال دوتایی در یک فاز

در این بخش نشان می‌دهیم روابط همبستگی بین ضرایب انتقال جرم دوتایی در آهنگ‌های پایین انتقال را می‌توان مستقیماً از نظایر آن‌ها در انتقال گرما، و صرفاً با تغییر نمادگذاری، به دست آورد. این تناظرها کاملاً سودمندند و درحقیقت بسیاری از روابط همبستگی انتقال گرما از نظایر انتقال جرمی خود به دست آمده‌اند.

برای نشان دادن پس‌زمینه این تناظرهای مفید و شرایطی که در آن صدق می‌کنند، کار را با ارائه نظیر نفوذی تحلیل ابعادی ارائه شده در بخش ۳.۱۴ آغاز می‌کنیم. جریان هم‌دمای آرام یا متلاطمی با رانش پایا از محلول مایع  $A$  در  $B$  را، در لوله نشان داده شده در شکل ۱-۳-۲۲، در نظر بگیرید. سیال در  $z = 0$  با سرعتی یکنواخت تا نقطه‌ای بسیار نزدیک به جدار، و ترکیب شیمیایی ورودی یکنواخت  $x_{A1}$  وارد لوله می‌شود. از  $z = 0$  تا  $z = L$ ، جدار لوله با محلول جامد  $A$  و  $B$  پوشانده می‌شود که به آهستگی حل می‌شوند و ترکیب شیمیایی مایع فصل مشترک را در  $x_{A0}$  ثابت نگه می‌دارند. فعلاً خواص فیزیکی  $\rho$ ،  $\mu$ ،  $c$  و  $D_{AB}$  را ثابت فرض می‌کنیم.

وضعیت انتقال جرمی که در بالا توصیف شد، از لحاظ ریاضی نظیر وضعیت انتقال گرمایی است که در آغاز بخش ۳.۱۴ شرح دادیم. برای تأکید بر شباهت این دو، معادله‌های دو سیستم را باهم ارائه می‌کنیم. بنابراین آهنگ اضافه شدن گرما از طریق رسانش بین ۱ و ۲ در شکل ۱-۳-۱۴، و آهنگ مولی اضافه شدن گونه  $A$  از طریق نفوذ بین ۱ و ۲ در شکل ۱-۳-۲۲، با عبارتهای زیر نشان داده می‌شود، که برای هر دو نوع جریان آرام و متلاطم معتبرند:

$$Q(t) = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( +k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} \right) R d\theta dz \quad (1-3.22) \text{ انتقال گرما:}$$

$$(2-3.22) \text{ انتقال جرم:}$$

$$W_{A_0}(t) - x_{A_0}(W_{A_0}(t) + W_{B_0}(t)) = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( +c D_{AB} \frac{\partial x_A}{\partial r} \Big|_{r=R} \right) R d\theta dz$$



شکل ۳.۲۲-۱ انتقال جرم در لوله ای با جدار انحلال پذیر

سمت چپ این معادله ها را، به ترتیب، برابر  $h_1(\pi DL)(T_0 - T_1)$  و  $k_{x1}(\pi DL)(x_{A0} - x_{A1})$  می گیریم و ضرایب انتقال را به دست می آوریم:

$$h_1(t) = \frac{1}{\pi DL(T_0 - T_1)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( +k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} \right) R d\theta dz \quad (3-3.22) \text{ انتقال گرما:}$$

$$k_{x1}(t) = \frac{1}{\pi DL(x_{A0} - x_{A1})} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( +cD_{AB} \frac{\partial x_A}{\partial r} \Big|_{r=R} \right) R d\theta dz \quad (4-3.22) \text{ انتقال جرم:}$$

اکنون متغیرهای بدون بُعد  $\check{z} = z/D$ ،  $\check{r} = r/D$ ،  $\check{T} = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$  و  $\check{x}_A = (x_A - x_{A0})/(x_{A1} - x_{A0})$  را معرفی، و سپس معادله ها را مرتب می کنیم تا نتایج زیر حاصل شود:

$$Nu_1(t) = \frac{h_1 D}{k} = \frac{1}{\check{r} \pi L/D} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\partial \check{T}}{\partial \check{r}} \Big|_{\check{r}=1} \right) d\theta d\check{z} \quad (5-3.22) \text{ انتقال گرما:}$$

$$Sh_1(t) = \frac{k_{x1} D}{cD_{AB}} = \frac{1}{\check{r} \pi L/D} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\partial \check{x}_A}{\partial \check{r}} \Big|_{\check{r}=1} \right) d\theta d\check{z} \quad (6-3.22) \text{ انتقال جرم:}$$

در این جا  $Nu$  عدد نوسلت برای انتقال گرمای بدون انتقال جرم است، و  $Sh$  عدد شروود برای انتقال جرم هم دما در آهنگ های پایین انتقال جرم است. عدد نوسلت گرادیان دمای بدون بُعدی است که روی سطح انتگرال گیری شده، و عدد شروود گرادیان غلظت انتگرال گیری شده روی سطح است.

از لحاظ اصولی می توان این گرادیان ها را با استفاده از معادله های (۵.۱۱-۷، ۸، ۹) (برای انتقال گرما) و معادله های (۵.۱۹-۸، ۹، ۱۱) (برای انتقال جرم)، تحت شرایط مرزی زیر (با  $\check{v}$  و  $\check{P}$  به صورت تعریف شده در بخش ۳.۱۴، و با متوسط گیری زمانی محلول ها در صورت متلاطم بودن جریان) تعیین کرد:

سرعت و فشار:

$$(7-3.22) \text{ و در } \check{z} = 0 \text{ داریم } \check{v} = \delta_z \text{، به ازای } 0 \leq \check{r} < 1$$

$$(8-3.22) \text{ در } \check{r} = 1 \text{ داریم } \check{v} = 0 \text{، به ازای } \check{z} \geq 0$$

$$(9-3.22) \text{ در } \check{r} = 0 \text{ و } \check{z} = 0 \text{ داریم } \check{P} = 0$$

دما:

$$\begin{aligned} & \text{در } \check{z} = 0 \text{، داریم } \check{T} = 1 \text{، به‌ازای } \frac{1}{\check{r}} \leq \check{r} \leq 1 \text{ (۱۰-۳.۲۲)} \\ & \text{در } \check{r} = \frac{1}{\check{r}} \text{، داریم } \check{T} = 0 \text{، به‌ازای } \check{z} \leq L/D \text{ (۱۱-۳.۲۲)} \end{aligned}$$

غلظت:

$$\begin{aligned} & \text{در } \check{z} = 0 \text{، داریم } \check{x}_A = 1 \text{، به‌ازای } \frac{1}{\check{r}} \leq \check{r} \leq 1 \text{ (۱۲-۳.۲۲)} \\ & \text{در } \check{r} = \frac{1}{\check{r}} \text{، داریم } \check{x}_A = 0 \text{، به‌ازای } \check{z} \leq L/D \text{ (۱۳-۳.۲۲)} \end{aligned}$$

شرط مرزی معادله (۸-۳.۲۲)، درمورد سرعت روی جدار، برای سیستم انتقال گرما، و همچنین برای سیستم انتقال جرم دقیق است، به‌شرط آن‌که  $x_{A0} (W_{A0} + W_{B0})$  کوچک باشد؛ معیار اخیر در بخش‌های ۱.۲۲ و ۸.۲۲ شرح داده شده‌است. در صفحه خارجی،  $z = L/D$ ، وقتی به‌شیوه بخش‌های ۴.۴ و ۳.۱۴ از جمله‌های  $\partial^2/\partial z^2$  معادله‌های پایستگی چشم‌پوشی می‌کنیم، به هیچ شرط مرزی نیازی نیست.

اگر از گرمای تولیدشده بر اثر اتلاف ویسکوز در معادله (۹-۵.۱۱) چشم‌پوشی کنیم و اگر ماده  $A$  بر اثر واکنش شیمیایی تولید نشود (معادله (۱۱-۵.۱۹))، آن‌گاه معادله‌های دیفرانسیل انتقال گرما و جرم در طول شرایط مرزی باهم متناظرند. نتیجه می‌شود که توزیع‌های بدون بُعد دما و غلظت (در هنگام لزوم به‌صورت هموارشده زمانی) شبیه یکدیگرند:

$$\check{T} = F(\check{r}, \theta, \check{z}; \text{Re}, \text{Pr}); \quad \check{x}_A = F(\check{r}, \theta, \check{z}; \text{Re}, \text{Sc}) \quad (۱۵, ۱۴-۳.۲۲)$$

و صورت  $F$  در هردو سیستم یکی است. بنابراین، برای به‌دست آوردن توزیع‌های غلظت از روی توزیع‌های دما، می‌توان  $\check{T}$  را با  $\check{x}_A$  و  $\text{Pr}$  را با  $\text{Sc}$  جایگزین کرد.

سرانجام، با قرار دادن توزیع‌های سرعت در معادله‌های (۵-۳.۲۲) و (۶) و انجام عمل انتگرال‌گیری، و سپس متوسط‌گیری زمانی، برای همرفت واداشته نتیجه می‌شود:

$$\text{Nu}_\gamma = G(\text{Re}, \text{Pr}, L/D); \quad \text{Sh}_\gamma = G(\text{Re}, \text{Sc}, L/D) \quad (۱۷, ۱۶-۳.۲۲)$$

در این‌جا  $G$  در هردو معادله یک تابع است. عبارتی با همین صورت برای  $\text{Nu}_a$ ،  $\text{Nu}_{\text{In}}$ ،  $\text{Nu}_{\text{Loc}}$ ، هم‌چنین برای اعداد متناظر شروع به‌دست می‌آید. این تناظر مهم به ما امکان می‌دهد که رابطه همبستگی انتقال جرم را، صرفاً با جایگزینی  $\text{Nu}$  توسط  $\text{Sh}$ ، و  $\text{Pr}$  توسط  $\text{Sc}$ ، از روی رابطه نظیر انتقال گرما بنویسیم. همین کار را می‌توان برای هر نوع شکل هندسی، و برای هردو نوع جریان متلاطم و آرام نوشت. اما به این نکته باید توجه داشت که برای برقراری این تناظر باید فرض کرد (۱) خواص فیزیکی ثابت‌اند، (۲) آهنگ‌های انتقال جرم پایین‌اند، (۳) واکنش شیمیایی انجام نمی‌شود، (۴) گرمایش اتلافی ویسکوز رخ نمی‌دهد، (۵) گرمای تابشی جذب یا گسیل نمی‌شود، و (۶) نفوذ فشاری، گرمایی، یا واداشته وجود ندارد. بعضی از این آثار را در بخش‌های بعدی این فصل تشریح می‌کنیم؛ تشریح بقیه به فصل ۲۴ مוקول می‌شود.

برای همرفت آزاد در اطراف اجسامی با هر شکل مفروض، تحلیل مشابه نشان می‌دهد که:

$$\text{Nu}_m = H(\text{Gr}, \text{Pr}); \quad \text{Sh}_m = H(\text{Gr}_x, \text{Sc}) \quad (۱۹, ۱۸-۳.۲۲)$$

در این‌جا  $H$  در هردو مورد یک تابع است و اعداد گراسهوف برای هردو فرایند به‌تناظر تعریف می‌شوند (برای آشنایی با خلاصه‌ای از کمیت‌های نظیر در انتقال گرما و انتقال جرم، نگاه کنید به جدول ۲.۲۲-۱).

برای منظور کردن تغییر خواص فیزیکی در سیستم‌های انتقال جرم، روش‌های توصیف‌شده در فصل ۱۴ را به سیستم‌های انتقال گرما تعمیم می‌دهیم، یعنی به‌طور کلی خواص فیزیکی را در نوعی ترکیب و دمای فیلم میانگین



تعیین می‌کنیم و فقط نسبت ویسکوزیته،  $\mu_b/\mu_0$  مستثنی است.

حال سه تصویر از نحوه «برگردان» روابط همبستگی انتقال گرما به روابط همبستگی انتقال جرم ارائه می‌دهیم:

### همرفت واداشته در اطراف کره

برای همرفت واداشته در اطراف کره‌ای جامد، معادله (۴-۱۴) و نظیر آن در انتقال جرم چنین نوشته می‌شوند:

$$Nu_m = 2 + 0.6 Re^{1/2} Pr^{1/3}; Sh_m = 2 + 0.6 Re^{1/2} Sc^{1/3} \quad (21, 20-3.22)$$

معادله‌های (۲۱ و ۲۰-۳.۲۲)، به ترتیب، برای دما و ترکیب سطحی ثابت، و برای آهنگ‌های پایین انتقال جرم خالص، معتبرند. این معادله‌ها را می‌توان با رعایت محدودیت‌های (۱) تا (۶) مطرح شده پس از معادله (۱۷-۳.۲۲)، در مورد انتقال هم‌زمان گرما و جرم به کار برد.

### همرفت واداشته در طول صفحه تخت

به عنوان نمایی دیگر از کاربرد تناظر، می‌توان تعمیم معادله (۴-۱۴) را به لایه مرزی آرام در طول صفحه‌ای تخت، برای شمول انتقال جرم، بیان کرد:

$$j_{H,loc} = j_{D,loc} = \frac{1}{Pr} f_{loc} = 0.332 Re_x^{-1/2} \quad (22-3.22)$$

ضرایب  $j$  چیلتون-کولبورن، یکی برای انتقال گرما و دیگری برای نفوذ، چنین تعریف می‌شوند:

$$j_{H,loc} = \frac{Nu_{loc}}{Re Pr^{1/3}} = \frac{h_{loc}}{\rho \hat{C}_p v_{\infty}} \left( \frac{\hat{C}_p \mu}{k} \right)^{2/3} \quad (23-3.22)$$

$$j_{D,loc} = \frac{Sh_{loc}}{Re Sc^{1/3}} = \frac{k_{x,loc}}{c v_{\infty}} \left( \frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right)^{2/3} \quad (24-3.22)$$

تناظر سه‌طرفه معادله (۲۲-۳.۲۲) برای اعداد Pr و Sc نزدیک واحد، با محدودیت‌های گفته شده پس از معادله (۱۷-۳.۲۲) دقیق است (نگاه کنید به جدول ۱-۴.۱۲). برای جریان در اطراف اجسام دیگر، بخش ضریب اصطکاک این تناظر، به علت پسای شکلی، معتبر نیست و حتی تناظر با  $\frac{1}{Pr} f_{loc}$  برای لوله‌های مدور نیز صرفاً تقریبی است (نگاه کنید به بخش ۴.۱۴).

### تناظر چیلتون-کولبورن

تناظر تجربی زیر که کاربرد بیش‌تری دارد:

$$j_H = j_D = \text{تابعی از } Re, \text{ شکل هندسی، و شرایط مرزی} \quad (25-3.22)$$

برای جریان عرضی در اطراف استوانه‌ها، جریان در بسترهای پر شده، و جریان در لوله‌ها با اعداد رینولدز بالا، مفید بوده است. برای جریان در مجراها و بسترهای پر شده «سرعت تقرب»  $v_{\infty}$  را باید با سرعت بین شبکه‌ای یا سرعت سطحی جایگزین کرد. معادله (۲۵-۳.۲۲) صورت معمول تناظر چیلتون-کولبورن است. اما از معادله‌های (۲۱ و ۲۰-۳.۲۲) آشکار است که این تناظر فقط وقتی در اطراف کره‌ها اعتبار دارد که  $Sh$  با  $Nu$  و  $(Sh - 2)$  با  $(Nu - 2)$  جایگزین شوند.

نادیده گرفتن اثری که روابط همبستگی ضرایب متناظر انتقال گرما می‌توانند بر همه ضرایب انتقال جرم بگذارند، بسیار گمراه‌کننده است. در انتقال جرم با انواع بسیار متنوع‌تری از شرایط مرزی و سایر گستره‌های متغیرهای دخیل روبه‌رو می‌شویم. در بخش‌های ۵.۲۲ تا ۸.۲۲ رفتار غیرمتناظر را بررسی می‌کنیم.

### مثال ۳-۲۲

تبخیر از یک قطره در حال سقوط آزاد قطره‌ای کروی از آب، به قطر  $0.5 \text{ cm}$  با سرعت  $215 \text{ cm/s}$  در هوای خشک و ساکن، با فشار  $1 \text{ atm}$  و بدون گردش داخلی، سقوط می‌کند. آهنگ لحظه‌ای تبخیر از قطره را، وقتی سطح قطره در دمای  $T_s = 70^\circ\text{F}$  و دمای هوا (در نواحی دور از قطره)  $T_\infty = 140^\circ\text{F}$  است، تخمین بزنید. فشار بخار آب در  $70^\circ\text{F}$  برابر  $0.247 \text{ atm}$  است. شرایط را حالت شبه‌پایا فرض کنید.

حل

آب را گونه  $A$  و هوا را گونه  $B$  بنامید. انحلال‌پذیری هوا در آب را می‌توان نادیده گرفت، به طوری که  $W_{B0} = 0$ . سپس با فرض این‌که آهنگ تبخیر بسیار پایین است، می‌توان معادله (۳-۱.۲۲) را برای تمام سطح کروی نوشت:

$$W_{A0} = k_{xm}(\pi D^2) \frac{x_{A0} - x_{A\infty}}{1 - x_{A0}} \quad (26-3.22)$$

ضریب انتقال جرم میانگین،  $k_{xm}$ ، را می‌توان با استفاده از معادله (۳-۳.۲۲)، درغیاب فرضی گردش داخلی، پیش‌بینی کرد.

شرایط فیلم لازم برای تخمین زدن خواص فیزیکی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$T_f = \frac{1}{4}(T_s + T_\infty) = \frac{1}{4}(70 + 140) = 105^\circ\text{F} \quad (27-3.22)$$

$$x_{Af} = \frac{1}{4}(x_{A0} + x_{A\infty}) = \frac{1}{4}(0.247 + 0) = 0.06175 \quad (28-3.22)$$

در محاسبه  $x_{Af}$ ، فرض کرده‌ایم رفتار گاز ایده‌آل است، تعادل در فصل مشترک برقرار است، و هوا اصلاً در آب حل نمی‌شود. کسر مولی میانگین،  $x_{Af}$ ، بخار آب به اندازه کافی کوچک هست که بتوان در تعیین خواص فیزیکی در شرایط فیلم، آن را نادیده گرفت:

$$c = 3,88 \times 10^{-5} \text{ g-mole/cm}^3$$

$$\rho = 1,12 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

$$\mu = 1,91 \times 10^{-4} \text{ g/cm} \cdot \text{s} \quad (\text{از جدول ۱-۱})$$

$$D_{AB} = 0,292 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (\text{از معادله (۱-۲.۱۷)})$$

$$Sc = \left( \frac{\mu}{\rho D_{AB}} \right) = \frac{1,91 \times 10^{-4}}{(1,12 \times 10^{-3})(0,292)} = 0,58$$

$$Re = \left( \frac{Dv_\infty \rho}{\mu} \right) = \frac{(0,5)(215)(1,12 \times 10^{-3})}{1,91 \times 10^{-4}} = 63$$

وقتی در معادله (۳-۳.۲۲) از این مقادیر استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$Sh_m = 2 + 0,60(63)^{1/2}(0,58)^{1/3} = 5,96 \quad (29-3.22)$$

و در این صورت ضریب انتقال جرم میانگین برابر است با:

$$k_{xm} = \frac{cD_{AB}}{D} Sh_m = \frac{(3,88 \times 10^{-5})(0,292)}{0,05} (5,96) \\ = 1,35 \times 10^{-2} \text{ g-mole/s} \cdot \text{cm}^2 \quad (30-3.22)$$

سپس آهنگ تبخیر از معادله (۲۶-۳.۲۲) به دست می‌آید و برابر است با:

$$W_{A0} = (1,35 \times 10^{-2})(\pi)(0,05)^2 \frac{0,247 - 0}{1 - 0,0247} \\ = 2,70 \times 10^{-7} \text{ g-mole/s} \quad (31-3.22)$$

این نتیجه با کاهش  $1,23 \times 10^{-2} \text{ cm/s}$  از قطر قطره متناظر است و نشان می‌دهد که قطره‌ای با این قطر، قبل از آن‌که به طور کامل تبخیر شود، مسافت زیادی سقوط می‌کند.

در این مثال، برای ساده شدن کار، سرعت و دمای سطح قطره معلوم بود. در حالت کلی، این شرایط را باید، به صورتی که در مسئله ۲۲.ب.۱ شرح داده شده است، با استفاده از موازنه‌های اندازه حرکت و انرژی محاسبه کرد.

### مثال ۲-۳.۲۲

رطوبت سنج خیس و خشک

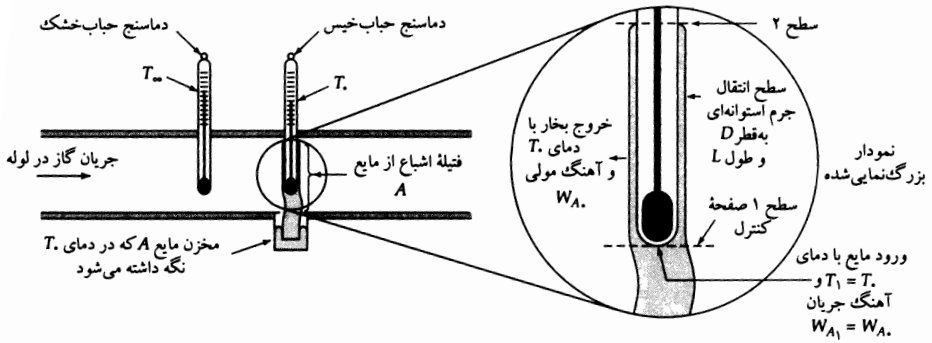
سپس به سراغ مسئله‌ای می‌رویم که برای آن، تناظر بین انتقال جرم و انتقال گرما به نتیجه‌ای بسیار ساده و مفید، هرچند تقریبی، منتهی می‌شود. این سیستم که در شکل ۲-۳.۲۲ نشان داده شده است، یک جفت دماسنج است که یکی از آن‌ها با یک فتیله استوانه‌ای اشباع از آب پوشانده شده است. این فتیله بر اثر تبخیر در جریان هوا خشک می‌شود و برای کار در حالت پایا به مقدار مجانبی میل می‌کند که آن را دمای حباب خیس می‌نامند. اما دماسنج لخت، به سوی دمای واقعی هوای در حال تقرب میل می‌کند و مقداری را نشان می‌دهد که آن را دمای حباب خشک می‌نامند. با چشم‌پوشی از تابش و با این فرض که جایگزینی آب تبخیر شده اثر درخور اعتنایی بر اندازه‌گیری دمای حباب خیس ندارد، عبارتی برای تعیین رطوبت هوا با استفاده از دماهای خشک و خیس قرائت شده به دست آورید. در مسئله ۲۲.ب.۲ با نحوه به حساب آوردن تابش آشنا خواهیم شد.

حل

برای ساده شدن کار، فرض می‌کنیم که سرعت سیال به اندازه کافی بالا هست که قرائت‌های دماسنج از تابش و رسانش گرما در طول دماسنج‌ها تأثیر نپذیرد، اما به اندازه‌ای بالا نیست که آثار گرمایش و یسکوز اهمیت پیدا کنند. این فرض‌ها معمولاً برای دماسنج‌های شیشه‌ای، و برای سرعت‌های گاز حدود  $30$  تا  $100 \text{ ft/s}$  رضایت‌بخش است. در این صورت دمای حباب خشک با دمای  $T_{\infty}$  گازی که به آن نزدیک می‌شود برابر است، و دمای حباب خیس با دمای  $T_0$  خارج فتیله برابر است.

فرض کنید گونه  $A$  آب و گونه  $B$  هوا باشد. موازنه انرژی روی سیستمی انجام می‌شود که حاوی طول  $L$  از فتیله باشد (فاصله بین صفحه‌های ۱ و ۲ در شکل). آهنگ اضافه شدن گرما به سیستم، توسط جریان گاز برابر  $h_m(\pi DL)(T_{\infty} - T_0)$  است. آنتالپی نیز از طریق صفحه ۱، با آهنگ  $W_{A1}\bar{H}_{A1}$  وارد فاز مایع می‌شود و با آهنگ  $W_{A0}\bar{H}_{A0}$ ، سطح انتقال جرم را ترک می‌کند و هردو فرایند در دمای  $T_0$  انجام می‌گیرد. بنابراین از موازنه انرژی نتیجه می‌شود:

$$h_m(\pi DL)(T_{\infty} - T_0) = W_{A0}(\bar{H}_{A0} - \bar{H}_{A1}) \quad (32-3.22)$$



شکل ۲۲-۳۲. نمودار نصب دستگاه رطوبت‌سنج حباب خیس و حباب خشک. فرض می‌شود گرما یا جرم از صفحه ۲ عبور نمی‌کند.

زیرا آب در صفحه ۱ با همان آهنگی وارد سیستم می‌شود که به صورت بخار آب، فصل مشترک انتقال جرم، یعنی سطح «۱» را ترک می‌کند. با تقریب بسیار خوب،  $\bar{H}_{A_0} - \bar{H}_{A_1}$  را می‌توان با  $\Delta \bar{H}_{\text{vap}}$ ، گرمای مولی تبخیر آب، جایگزین کرد. براساس تعریف ضریب انتقال جرم، داریم:

$$W_{A_0} - x_{A_0}(W_{A_0} + W_{B_0}) = k_{xm}(\pi DL)(x_{A_0} - x_{A_\infty}) \quad (۳۳-۳.۲۲)$$

که در آن مانند مثال قبل،  $W_{B_0} = 0$ . سپس از ترکیب معادله‌های (۳۳ و ۳۲-۳.۲۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{(x_{A_0} - x_{A_\infty})}{(T_\infty - T_0)(1 - x_{A_0})} = \frac{h_m}{k_{xm} \Delta \bar{H}_{\text{vap}}} \quad (۳۴-۳.۲۲)$$

سپس با استفاده از تعریف‌های  $Sh_m$  و  $Nu_m$ ، و با توجه به این‌که  $\rho \hat{C}_p = c \bar{C}_p$  می‌توانیم معادله (۳۴-۳.۲۲) را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\frac{(x_{A_0} - x_{A_\infty})}{(T_\infty - T_0)(1 - x_{A_0})} = \frac{Nu_m}{Sh_m} \left( \frac{Sc}{Pr} \right) \frac{\bar{C}_p}{\Delta \bar{H}_{\text{vap}}} \quad (۳۵-۳.۲۲)$$

به علت تناظر بین انتقال جرم و گرما، می‌توان انتظار داشت که اعداد میانگین نوسلت و شرود، صورت همانند داشته باشند:

$$Nu_m = F(Re)Pr^n; \quad Sh_m = F(Re)Sc^n \quad (۳۷, ۳۶-۳.۲۲)$$

که در هردو عبارت  $F$  تابع مشابهی از  $Re$  است. بنابراین، با اطلاع از دماهای حباب خشک و خیس، و کسر مولی بخار آب در مجاورت فنیله  $(x_{A_0})$ ، می‌توانیم ترکیب شیمیایی  $x_{A_\infty}$  را در بالادست جریان هوا، از رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$\frac{(x_{A_0} - x_{A_\infty})}{(T_\infty - T_0)(1 - x_{A_0})} = \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^{1-n} \frac{\bar{C}_p}{\Delta \bar{H}_{\text{vap}}} \quad (۳۸-۳.۲۲)$$

نمای  $n$  تا حدود اندکی به شکل هندسی بستگی دارد، اما از  $\frac{1}{3}$  دور نیست و کمیت  $(Sc/Pr)^{1-n}$  با واحد تفاوت چندانی ندارد.<sup>۲</sup> به علاوه، مشاهده می‌شود که دمای حباب خیس، تحت فرض‌های اختیارشده در معادله‌های

۲. معادله‌ای تا اندازه‌ای متفاوت، با  $n = 0.56$ ، برای اندازه‌گیری در هوا توصیه شده است؛ نگاه کنید به

(۳.۲۲-۳۶ و ۳۷) از عدد رینولدز مستقل است. این نتیجه با استفاده از روابط چیتون-کولبورن نیز به دست می‌آید و مستقیماً نتیجه می‌شد که  $n = \frac{1}{3}$ .

با چشم‌پوشی از مقاومت خود فصل مشترک در برابر انتقال گرما و جرم، می‌توان ترکیب شیمیایی فصل مشترکی گاز در آهنگ‌های انتقال جرم پایین را، با دقت پیش‌بینی کرد (برای کسب اطلاعات بیش‌تر به بحث ارائه‌شده در بخش ۴.۲۲ در این مورد رجوع کنید). سپس می‌توان  $x_{A0}$  را با رابطه تعادل بخار-مایع نشان داد:

$$x_{A0} = x_{A0}(T_0, p) \quad (3.22-39)$$

رابطه‌ای از این نوع برای گونه‌های مفروض  $A$  و  $B$  برقرار است، هرگاه مایع  $A$  چنان‌که در بالا فرض شد، خالص باشد. یکی از تقریب‌های متداول این رابطه چنین است:

$$x_{A0} = \frac{p_{A,\text{vap}}}{p} \quad (3.22-40)$$

که در آن  $p_{A,\text{vap}}$  فشار بخار  $A$  خالص در دمای  $T_0$  است. در این رابطه به‌طور تلویحی فرض می‌شود که حضور  $B$  فشار جزئی  $A$  در فصل مشترک را تغییر نمی‌دهد، و  $A$  و  $B$  مخلوط گاز ایده‌آل تشکیل می‌دهند. اگر مخلوط هوا-آب در فشار ۱ atm دمای حباب خیس  $70^\circ\text{F}$  و دمای حباب خشک  $140^\circ\text{F}$  را نتیجه دهد، آن‌گاه:

$$p_{A,\text{vap}} = 0.247 \text{ atm}$$

$$x_{A0} = 0.247 \quad (3.22-40) \text{ از معادله}$$

$$\bar{C}_p = 6.98 \text{ Btu/lb-mole} \cdot \text{F در } 105^\circ\text{F دمای فیلم}$$

$$\Delta \bar{H}_{\text{vap}} = 18900 \text{ Btu/lb-mole در } 70^\circ\text{F}$$

$$\text{Sc} = 0.58 \quad (3.22-1) \text{ به مثال نگاه کنید}$$

$$\text{Pr} = 0.74 \quad (3.9-16) \text{ از معادله}$$

با جایگزین کردن در معادله (۳.۲۲-۳۸)، با  $n = \frac{1}{3}$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{(0.247 - x_{A\infty})}{(140 - 70)(1 - 0.247)} = \left(\frac{0.58}{0.74}\right)^{2/3} \frac{6.98}{18900} \quad (3.22-41)$$

با استفاده از رابطه بالا کسر مولی آب در هوایی که به دماسنج نزدیک می‌شود، به دست می‌آید:

$$x_{A\infty} = 0.033 \quad (3.22-42)$$

چون به‌عنوان تقریب اول، فرض کردیم که غلظت فیلم  $x_A = 0$ ، می‌توانیم به‌عقب برگردیم و تقریب دوم را، با استفاده از غلظت متوسط فیلم  $0.140 = 0.274 + 0.033$  در محاسبات خاصیت فیزیکی، اختیار کنیم. در این‌جا از خواص فیزیکی اطلاع دقیقی نداریم تا انجام مجدد محاسبات قابل‌توجیه باشد.

نتیجه محاسبه‌شده در معادله (۳.۲۲-۴۲) با نمودارهای انتشار یافته رطوبت توافق متوسطی دارد، زیرا این نمودارها براساس دمای اشباع آدیاباتیک تهیه می‌شوند، نه دمای حباب خیس.<sup>۳</sup>

## مثال ۳-۳۲

انتقال جرم در جریان خزشی در بسترهای پرشده

بسیاری از عملیات مهم جذب سطحی، از خالص‌سازی پروتئین‌ها در فناوری زیستی مدرن، تا بازیابی بخار حلال توسط تأسیسات خشک‌شویی، در بسترهای پرشدهٔ دانه‌ای متراکم، و معمولاً در حالت جریان خزشی انجام می‌شوند؛ یعنی در  $Re = D_p v_0 \rho / \mu < 20$ . در این جا  $D_p$  قطر مؤثر ذره و  $v_0$  سرعت سطحی است که به صورت آهنگ جریان حجمی، تقسیم بر سطح مقطع کل بستر تعریف می‌شود (نگاه کنید به بخش ۴.۶). نتیجه می‌شود که سرعت بدون بُعد  $v/v_0$  توزیع مکانی مستقل از عدد رینولدز خواهد داشت. اطلاعات مشروح فقط در مورد ذرات کروی وجود دارد. با استفاده از تحلیل ابعادی شرح داده‌شده در آغاز این بخش، صورت رابطهٔ همبستگی ضریب انتقال جرم حالت پایا را، برای جریان خزشی پیش‌بینی کنید.

حل

می‌توان از روش تحلیل ابعادی بخش ۵.۱۹ استفاده کرد و  $D_p$  را طول مشخصه و  $v_0$  را سرعت مشخصه گرفت. سپس، با توجه به معادلهٔ (۱۱-۵.۱۹)، مشاهده می‌کنیم که غلظت بدون بُعد، گذشته از مختصات مکان بدون بُعد و شکل هندسی بستر، فقط به حاصل ضرب  $ReSc$  بستگی دارد.

بیش‌ترین داده‌ها برای جریان خزشی در اعداد پکلت بزرگ به دست آمده‌اند. داده‌های تجربی در مورد انحلال کره‌های بنزوئیک اسید در آب<sup>۴</sup> نتایج زیر را عاید کرده‌اند.

$$Sh_m = \frac{1}{\varepsilon} (ReSc)^{1/3} \quad ReSc \gg 1 \quad (43-3.22)$$

که در آن  $\varepsilon$  کسر حجمی بستر است که سیال آن را اشغال کرده است. معادلهٔ (۴۳-۳.۲۲) با رابطهٔ زیر سازگاری دارد:

$$Sh_m = 2 + 0.991(ReSc)^{1/3} \quad (44-3.22)$$

در این رابطه جواب جریان خزشی کره‌ای تنها<sup>۵</sup> ( $\varepsilon = 1$ ) به کار رفته است (نگاه کنید به بخش ۲.۲۲ ب). براساس این رابطه می‌توان گفت که الگوی جریان در پیرامون کره‌ای تنها با الگوی جریان در اطراف کرهٔ احاطه‌شده با کرات دیگر، به‌ویژه در نزدیکی سطح کره، که بخش عمدهٔ انتقال جرم در آن جا صورت می‌گیرد، تفاوت چندانی ندارد.

برای رفتار حدی به‌ازای مقادیر بسیار کوچک  $ReSc$  داده‌های قابل اعتمادی وجود ندارد، اما براساس محاسبات عددی برای بستری با پرشدگی منظم<sup>۶</sup> پیش‌بینی می‌شود که عدد شروود به‌طور مجانبی به سمت مقداری ثابت در نزدیکی  $4/3$  میل می‌کند، هرگاه براختلاف موضعی بین ترکیب‌های فصل‌مشرکی و کلی مبتنی باشد. رفتار در فاز جامد بسیار پیچیده‌تر است و هیچ تقریب ساده‌ای کاملاً قابل اطمینان نیست. اما آزمایش‌های انجام‌شده تا امروز<sup>۷</sup> نشان می‌دهند که هر جا انتقال جرم بین ذره‌ای توسط قانون دوم فیک توصیف شود، می‌توان از تقریب زیر استفاده کرد:

$$Sh_m = \frac{k_{c,s} D_p}{D_{As}} \approx 1.0 \quad (45-3.22)$$

4. E. J. Wilson and C. J. Geankoplis, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **5**, 9-14 (1966). see also J. R. Selman and C. W. Tobias, *Advances in Chemical Engineering*, **10**, 212-318 (1978).

در منبع اخیر خلاصه‌ای فراگیر از روابط همبستگی ضرایب انتقال جرم که با اندازه‌گیری‌های الکتروشیمیایی به دست آمده‌اند، ارائه شده است.

5. V. G. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962), §14.

6. J. P. Sorensen and W. E. Stewart, *Chem. Eng. Sci.*, **29**, 811-837 (1974).

7. A. M. Athalye, J. Gibbs, and E. N. Lightfoot, *J. Chromatography*, **589**, 71-85 (1992).

که در آن  $k_{c,s}$  ضریب انتقال جرم مؤثر در داخل فاز جامد و  $D_{As}$  ضریب نفوذ  $A$  در فاز جامد است. این معادله برای تغییرات «آهسته» در غلظت ماده حل شده اطراف ذره به دست آمده است. این جواب مجانبی تغییری خطی در غلظت سطحی با زمان است،<sup>۸</sup> و با محاسبه توجیه شده است.<sup>۹</sup> برای موج غلظت گاوسی (زنگوله‌ای)، «آهسته» به معنای این است که زمان عبور (انحراف معیار موقتی) موج نسبت به زمان پاسخ نفوذی ذره، که از مرتبه  $D_p^2/6D_{As}$  است، طولانی است. هرگاه این نامعادله برقرار نباشد، قانون دوم فیک را باید با تاریخچه تفصیلی غلظت سطحی حل کرد. در بسترهای پر شده، مانند جریان در لوله، باید این نکته را در نظر داشت که در غلظت نایک‌نواختی‌هایی وجود دارد که تابع مختصی شعاعی است. این نکته در بخش‌های ۵.۱۴ و ۳.۲۰ شرح داده شد.

### مثال ۳.۲۲-۴

انتقال جرم به قطره‌ها و حباب‌ها

در هر دو نوع تماس دهنده گاز-مایع<sup>۱۰</sup> و مایع-مایع<sup>۱۱</sup> غالباً با افشانه‌هایی از قطرات مایع یا ابرهایی از حباب سروکار داریم. رفتار انتقال جرمی این‌ها را با کره‌های جامد مقایسه کنید.

حل

با انواع مختلف رفتارها روبه‌رو می‌شویم و نیروهای سطحی می‌توانند نقش بسیار مهمی بازی کنند. در بخش ۷.۲۲ نیروهای سطحی را به تفصیل شرح می‌دهیم. در این جا فقط بعضی از حالت‌های حدی را در نظر می‌گیریم و خواننده را به مراجع گفته شده در بالا ارجاع می‌دهیم.

حباب‌ها و قطره‌های بسیار کوچک مانند کره‌های جامد رفتار می‌کنند و می‌توان با استفاده از روابط همبستگی ارائه شده در مثال ۳.۲۲-۳ و فصل ۱۴ با آن‌ها برخورد کرد. اما، اگر هر دو فاز مجاور عاری از مواد فعال در سطح و ذرات کوچک آلاینده باشند، فاز داخلی به‌گردش درمی‌آید و نواحی مجاور فاز خارجی را با خود همراه می‌کند. این «گردش هادامارد-ریبینسکی»<sup>۱۲</sup> که محرک آن تنش است، سبب افزایش چشم‌گیر آهنگ‌های انتقال جرم، غالباً به اندازه یک مرتبه بزرگی، می‌شود و این آهنگ‌ها را می‌توان با استفاده از تعمیم‌های<sup>۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶</sup> «مدل نفوذ» که در بخش ۵.۱۸ شرح داده شد، تخمین زد. بنابراین، برای حباب گاز  $A$  به شکل کره‌ای به قطر  $D$  که در مایع تمیز  $B$  صعود می‌کند، عدد شروود درست مایع، درگستره زیر است:<sup>۱۴</sup>

$$\sqrt{\frac{4}{3\pi} \frac{Dv_t}{D_{AB}}} < Sh_m < \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{Dv_t}{D_{AB}}} \quad (۴۶-۳.۲۲)$$

که در آن  $v_t$  سرعت حدی است (نگاه کنید به معادله‌های (۱۸-۵.۱۹ و ۲۰)).

8. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press (1959), §9.3, Eqs. 10 and 11.

9. J. F. Reis, E. N. Lightfoot, P. T. Noble, and A. S. Chiang, *Sep. Sci. Tech.*, **14**, 367-394 (1979).

10. J. Stichlmair and J. F. Fair, *Distillation Principles and Practice*, Wiley, New York (1998).

11. J. C. Godfrey and M. M. Slater, *Liquid-Liquid Extraction Equipment*, Wiley, New York (1994).

12. J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Martinus Nijhoff, The Hague (1983).

13. J. B. Angelo, E. N. Lightfoot, and D. W. Howard, *AIChE Journal*, **12**, 751-760 (1966).

14. J. B. Angelo, and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **14**, 531-540 (1968).

15. W. E. Stewart, J. B. Angelo, and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **16**, 771-786 (1970).

16. R. Higbie, *Trans, AIChE*, **31**, 365-389 (1935).

اندازه‌ای که گذار از رفتار جامدوار به رفتار گردشی، به‌ازای آن روی می‌دهد به درجهٔ آلودگی سطح بستگی دارد و به‌آسانی قابل‌پیش‌بینی نیست. قطرات بسیار درشت حباب نوسان می‌کنند،<sup>۱۳</sup> و هردو فاز مدل نفوذ اصلاح‌شده‌ای دارند:

$$Sh_m \approx \sqrt{\frac{4r_0 D \omega}{\pi D_{AB}}} \quad (۴۷-۳-۲۲)$$

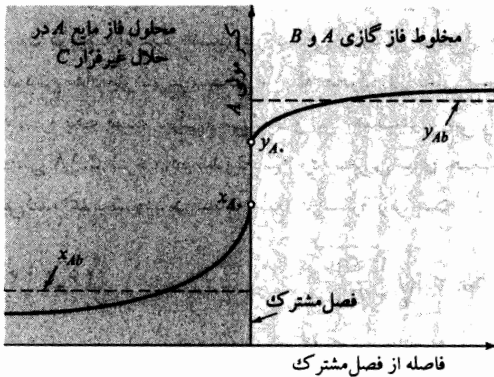
که بسامد زاویه‌ای آن چنین است:<sup>۱۷</sup>

$$\omega = \sqrt{\frac{192\sigma}{D^3(3\rho_D + 2\rho_C)}} \quad (۴۸-۳-۲۲)$$

که در آن  $\sigma$  کشش فصل‌مشرکی، و  $\rho_D$  و  $\rho_C$  چگالی‌های قطره و محیط پیوستاری است. موفقیت این مدل مستلزم آن است که پس از هر بار نوسان، لایهٔ مرزی از نو تشکیل شود، اما اثر اندکی از کشیدگی تناوبی سطح نیز وجود دارد.

#### ۴.۲۲ تعریف ضرایب انتقال در دو فاز

یادآوری می‌کنیم که در بخش ۶.۱۰ مفهوم ضریب کلی انتقال گرما،  $U$ ، را برای توصیف انتقال گرما بین دو جریان جداشده توسط یک جدار، معرفی کردیم. این ضریب کلی مقاومت گرمایی خود جدار، هم‌چنین مقاومت گرمایی سیال‌های دو طرف جدار، را نیز به‌حساب می‌آورد.



شکل ۱-۴.۲۲ توزیع‌های غلظت در همسایگی فصل‌مشرک گاز-مایع.

اکنون وضعیت نظیر را برای انتقال جرم بررسی می‌کنیم، با این تفاوت که در این‌جا دو سیال در تماس نزدیک باهم قرار دارند، به‌طوری‌که از مقاومت جدار یا مقاومت فصل‌مشرک اثری نیست. این وضعیتی است که غالباً در عمل با آن روبه‌رو می‌شویم. چون خود فصل‌مشرک حاوی جرم درخورداعتنایی نیست، می‌توانیم بررسی خود را با فرض پیوستگی شار جرمی کل در فصل‌مشرک، برای هرگونه‌ای که انتقال می‌یابد، آغاز کنیم. بنابراین، با توجه به سیستم نشان‌داده‌شده در شکل ۱-۴.۲۲:

$$N_{A0}|_{\text{گاز}} = N_{A0}|_{\text{مایع}} = N_{A0} \quad (۱-۴-۲۲)$$



عبارت زیر را برای شار فصل مشترکی  $A$  به طرف فاز مایع می‌نویسیم. سپس، با استفاده از تعریف مفروض در معادله (۹-۱.۲۲)، نتیجه می‌شود:

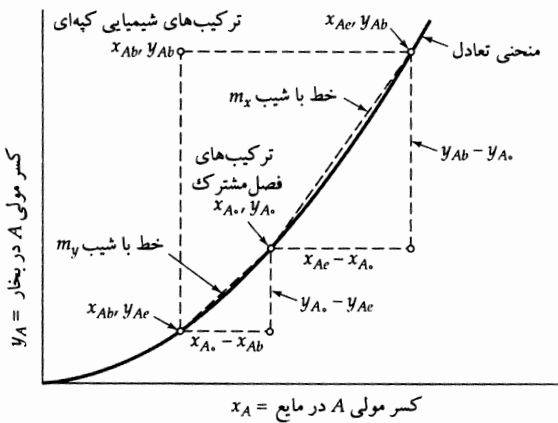
$$N_{A_0} = k_{y,\text{loc}}^*(y_{Ab} - y_{A_0}) = k_{x,\text{loc}}^*(x_{A_0} - x_{Ab}) \quad (۲-۴.۲۲)$$

که در آن از قرارداد استفاده از  $x$  برای کسرهای مولی در فاز مایع، و  $y$  برای کسرهای مولی در فاز گازی، پیروی می‌کنیم. اکنون باید رابطه بین ترکیب‌های فصل مشترکی در دو فاز را بنویسیم.

تقریباً در همهٔ وضعیت‌ها، می‌توان با فرض تعادل در دو طرف فصل مشترک، این کار را انجام داد، به طوری که ترکیب‌های گاز و مایع مجاور روی منحنی تعادل قرار می‌گیرند (نگاه کنید به شکل ۲-۴.۲۲)، که براساس داده‌های انحلال‌پذیری به دست می‌آید:

$$y_{A_0} = f(x_{A_0}) \quad (۳-۴.۲۲)$$

موارد استثنا عبارت‌اند از: (۱) آهنگ‌های انتقال جرم بسیار بالا، که در خلأ شدید برای فازهای گازی مشاهده می‌شود، و در آن  $N_{A_0}$  به سمت  $p_{A_0} / \sqrt{2\pi M_A RT}$  میل می‌کند، که آهنگ تعادلی برخورد مولکول‌های گاز به فصل مشترک است؛ (۲) فصل مشترک‌های آلوده با غلظت بالایی از ذرات جذب‌شده یا مولکول‌های عوامل فعال در سطح. وضعیت (۱) نسبتاً کمیاب است و وضعیت (۲) معمولاً به طور غیرمستقیم، با تغییر رفتار جریان عمل می‌کند، نه این که سبب انحراف از وضعیت تعادل شود. در موارد اکستریم، آلودگی سطحی می‌تواند سبب ایجاد مقاومت اضافی در برابر انتقال شود.



شکل ۲-۴.۲۲ روابط بین ترکیب‌های شیمیایی گاز و مایع، و تفسیر ترسیمی  $m_x$  و  $m_y$ .

برای توصیف آهنگ‌های انتقال میان‌فازی، می‌توان از یکی از معادله‌های (۳ و ۲-۴.۲۲) برای محاسبهٔ غلظت فصل مشترکی استفاده کرد و سپس کار را ادامه داد تا بتوان ضرایب تک‌فاز را به کار برد، یا از شرایط کلی انتقال جرم استفاده کرد:

$$N_{A_0} = K_{y,\text{loc}}^*(y_{Ab} - y_{Ae}) = K_{x,\text{loc}}^*(x_{Ae} - x_{Ab}) \quad (۴-۴.۲۲)$$

در این جا  $y_{Ae}$  ترکیب فاز گازی در تعادل با مایعی با ترکیب  $x_{Ab}$  است، و  $x_{Ae}$  ترکیب فاز مایع در تعادل با گازی با ترکیب شیمیایی  $y_{Ab}$  است. کمیت  $K_{y,\text{loc}}^*$  ضریب کلی انتقال جرم «مبتنی بر فاز گازی» و  $K_{x,\text{loc}}^*$  ضریب کلی انتقال جرم «مبتنی بر فاز مایع» است. در این جا نیز شار مولی  $N_{A_0}$  را برای انتقال به فاز مایع مثبت می‌گیریم.

با برابر قرار دادن کمیت‌های معادله‌های (۲-۴.۲۲) و (۴-۴.۲۲) دو رابطه به دست می‌آید:

$$K_{x,\text{loc}}^{\circ}(x_{Ae} - x_{Ab}) = k_{x,\text{loc}}^{\circ}(x_{A^{\circ}} - x_{Ab}) \quad (5-4.22)$$

$$K_{y,\text{loc}}^{\circ}(y_{Ab} - y_{Ae}) = k_{y,\text{loc}}^{\circ}(y_{Ab} - y_{A^{\circ}}) \quad (6-4.22)$$

که دو ضریب فاز را به ضرایب تک‌فاز مربوط می‌کند.

با استفاده از کمیت‌های  $x_{Ae}$  و  $y_{Ae}$  که در سه رابطه بالا معرفی شدند، می‌توان کمیت‌های  $m_x$  و  $m_y$  را به شرح زیر تعریف کرد:

$$m_x = \frac{y_{Ab} - y_{A^{\circ}}}{x_{Ae} - x_{A^{\circ}}}; \quad m_y = \frac{y_{A^{\circ}} - y_{Ae}}{x_{A^{\circ}} - x_{Ab}} \quad (8, 7-4.22)$$

چنان‌که در شکل ۲-۴.۲۲ دیده می‌شود،  $m_x$  شیب خط واصل بین نقاط  $(x_{Ae}, y_{Ab})$  و  $(x_{A^{\circ}}, y_{A^{\circ}})$  روی منحنی تعادل است، و  $m_y$  شیب خط واصل از  $(x_{Ab}, y_{Ae})$  به  $(x_{A^{\circ}}, y_{A^{\circ}})$  است.

سپس می‌توان غلظت‌ها را بین روابط بالا حذف کرد و روابطی بین ضرایب انتقال جرم تک‌فاز و دو فاز به دست آورد:

$$\frac{k_{x,\text{loc}}^{\circ}}{K_{x,\text{loc}}^{\circ}} = 1 + \frac{k_{x,\text{loc}}^{\circ}}{m_x k_{y,\text{loc}}^{\circ}}; \quad \frac{k_{y,\text{loc}}^{\circ}}{K_{y,\text{loc}}^{\circ}} = 1 + \frac{m_y k_{y,\text{loc}}^{\circ}}{k_{x,\text{loc}}^{\circ}} \quad (10, 9-4.22)$$

نخستین رابطه از معادله‌های (۵-۴.۲۲)، (۲، ۷) به دست آمد، و دومین رابطه از معادله‌های (۶-۴.۲۲)، (۲، ۸) حاصل شد. اگر منحنی تعادل درگستره موردنظر، تقریباً خطی باشد، آن‌گاه  $m_x = m_y = m$  که شیب موضعی منحنی در شرایط فصل‌مشرکی است. سپس، مشاهده می‌کنیم که عبارت‌های معادله‌های (۹-۴.۲۲) و (۱۰) هردو حاوی نسبتی از ضرایب تک‌فازند که با استفاده از کمیت  $m$  وزن‌دهی شده‌اند. این کمیت اهمیت چشم‌گیری دارد:

۱. اگر  $k_{x,\text{loc}}^{\circ}/mk_{y,\text{loc}}^{\circ} \ll 1$ ، مقاومت فازگازی در برابر انتقال جرم اثر اندکی دارد و گفته می‌شود که انتقال جرم را فاز مایع کنترل می‌کند. در عمل، این گفته به معنای آن است که طرح سیستم باید در جهت کمک به انتقال جرم فاز مایع باشد.

۲. اگر  $k_{x,\text{loc}}^{\circ}/mk_{y,\text{loc}}^{\circ} \gg 1$ ، آن‌گاه انتقال جرم را فازگازی کنترل می‌کند. در وضعیتی عملی، این گفته به معنای آن است که طرح سیستم باید در جهت کمک به انتقال جرم فازگازی عمل کند.

۳. اگر  $k_{x,\text{loc}}^{\circ}/mk_{y,\text{loc}}^{\circ} < 10$ ، باید برهم‌کنش‌های دو فاز را، در محاسبه ضرایب انتقال جرم دو فاز، در نظر گرفت. در خارج از این گستره، برهم‌کنش‌ها معمولاً بی‌اهمیت‌اند. در مثال زیر دوباره به سراغ این موضوع می‌رویم.

ضرایب انتقال جرم میانگین دو فاز را باید به دقت تعریف کرد و در این جا فقط حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که غلظت‌های توده‌ای در دو فاز مجاور، روی سطح کل انتقال جرم،  $S$ ، تغییرات چشم‌گیر ندارند. سپس می‌توان  $K_{xm}^{\circ}$  را چنین تعریف کرد:

$$(N_{A^{\circ}})_m = \frac{1}{S} \int_S K_{x,\text{loc}}^{\circ}(x_{Ae} - x_{Ab}) dS = K_{xm}^{\circ}(x_{Ae} - x_{Ab}) \quad (11-4.22)$$

به طوری‌که، وقتی از معادله (۹-۴.۲۲) استفاده شود، داریم:

$$K_{xm}^{\circ} = \frac{1}{S} \int_S \frac{1}{(1/k_{x,\text{loc}}^{\circ}) + (1/m_x k_{y,\text{loc}}^{\circ})} dS \quad (12-4.22)$$

غالباً ضرایب کلی انتقال جرم میانگین را با استفاده از ضرایب میانگین سطح برای دو فاز مجاور محاسبه می‌کنند:

$$K_{x,\text{approx}} = \frac{1}{(1/k_{xm}^*) + (1/m_x k_{ym}^*)} \quad (۱۳-۴.۲۲)$$

دو مقدار میانگین ارائه شده با معادله‌های (۱۲-۴.۲۲) و (۱۳-۴.۲۲) می‌توانند تفاوت چشم‌گیری داشته باشند (نگاه کنید به مثال ۳-۴.۲۲).

### مثال ۱-۴.۲۲

تعیین مقاومت کنترل‌کننده

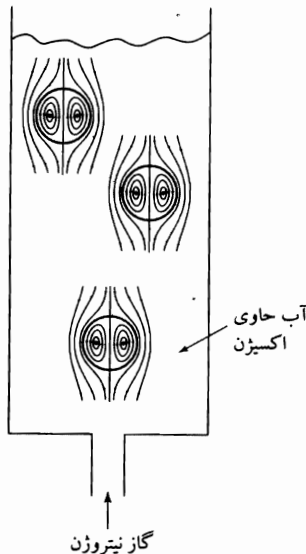
می‌خواهیم با استفاده از گاز نیتروژن با فشار جو، و دمای  $20^\circ\text{C}$ ، به شکل حباب‌هایی که گردش داخلی دارند، مطابق شکل ۳-۴.۲۲، گاز اکسیژن را از آب جدا کنیم. اهمیت نسبی دو ضریب انتقال جرم میانگین  $k_{y,\text{loc}}^*$  و  $k_{x,\text{loc}}^*$  را تخمین بزنید. فرض کنید  $A$  معرف  $\text{O}_2$ ،  $B$  معرف  $\text{H}_2\text{O}$ ، و  $C$  معرف  $\text{N}_2$  است.

حل

می‌توانیم این کار را، با فرض این‌که مدل نفوذ (نگاه کنید به بخش ۵.۱۸) در مورد هر فاز صادق است، انجام دهیم، به طوری که:

$$k_{x,\text{loc}}^* \approx k_{x,\text{loc}} = c_1 \sqrt{\frac{4D_{AB}}{\pi t_{\text{exp}}}}; \quad k_{y,\text{loc}}^* \approx k_{y,\text{loc}} = c_2 \sqrt{\frac{4D_{AC}}{\pi t_{\text{exp}}}} \quad (۱۴-۴.۲۲)$$

که در آن  $c_1$  و  $c_2$ ، به ترتیب، غلظت‌های مولی کلی در فازهای مایع و گازند. زمان تماس مؤثر،  $t_{\text{exp}}$ ، برای همه فازها برابر است.



شکل ۳-۴.۲۲ نمودار شماتیک دستگاه جداساز اکسیژن، که در آن اکسیژن آب به داخل حباب‌های گاز نیتروژن نفوذ می‌کند.

انحلال‌پذیری  $\text{O}_2$  در آب، در دمای  $20^\circ\text{C}$  برابر است با:  $1.38 \times 10^{-3}$  مول بر لیتر در فشار جزئی  $760 \text{ mm Hg}$  برای اکسیژن، فشار بخار آب  $17.535 \text{ mm Hg}$ ، و فشار کل در اندازه‌گیری‌های انحلال‌پذیری برابر است با:  $777.5 \text{ mm Hg}$ . در  $20^\circ\text{C}$ ، ضریب نفوذ  $\text{O}_2$  در آب  $D_{AB} = 2.1 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ ، و در فاز

گازی، ضریب نفوذ برای سیستم  $O_2 - N_2$  عبارت است از:  $D_{AC} = 0,2 \text{ cm}^2/\text{s}$ . سپس می‌نویسیم:

$$\frac{k_{x,loc}^*}{mk_{y,loc}^*} = \frac{c_1}{c_g} \sqrt{\frac{D_{AB}}{D_{AC}}} \cdot \frac{1}{m} \quad (15-4.22)$$

عبارت‌های زیر را باید در این معادله جایگزین کنیم:

$$\frac{c_1}{c_g} = \frac{c_1}{(p/RT)} = \frac{1000/18}{(777,5/760)/(0,08206)(293,15)} = 1308 \quad (16-4.22)$$

$$\sqrt{\frac{D_{AB}}{D_{AC}}} = \sqrt{\frac{2,1 \times 10^{-5}}{0,2}} = 0,1 \quad (17-4.22)$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1,38 \times 10^{-2}/55,5}{760/777,5} = 2,54 \times 10^{-5} \quad (18-4.22)$$

نتیجه می‌شود که:

$$\frac{k_{x,loc}^*}{mk_{y,loc}^*} = (1308)(0,1)(2,54 \times 10^{-5}) = 3,32 \times 10^{-2} \quad (19-4.22)$$

بنابراین، فقط مقاومت فاز مایع درخور اعتناست و فرض رفتار نفوذی در گاز اهمیت چندانی در تعیین کنترل فاز مایع ندارد. همچنین، می‌توان مشاهده کرد که عامل غالب، انحلال‌پذیری پایین اکسیژن در آب است. می‌توان این نتیجه را تعمیم داد و گفت که جذب یا واجذب گازهایی که به مقدار ناچیز حل می‌شوند، تقریباً همیشه تحت کنترل فاز مایع است. تصحیح ضریب فازگازی برای انتقال جرم اهمیتی ندارد، و تصحیح برای فاز مایع قابل چشم‌پوشی است.



برهم‌کنش مقاومت‌های فازی

در بعضی موارد ضرایب انتقال تک‌فاز، برای شرایط مرزی مسئله انتقال جرم دو فاز، در دسترس نیست و روش متداول استفاده از مدل‌های تک‌فازی است که در آن‌ها شرایط مرزی فصل‌مشارکتی فرض می‌شوند، بدون آن‌که برهم‌کنش فرایندهای نفوذ در دو فاز در نظر گرفته شود. این نوع ساده‌سازی می‌تواند خطاهای زیادی ایجاد کند. این روش تقریبی را در مورد فروشویی ماده حل‌شده  $A$  از کوره جامد  $B$  به شعاع  $R$ ، در سیال  $C$  که خوب هم‌زده نمی‌شود و حجم آن به‌اندازه‌ی زیاد است که می‌توان از غلظت  $A$  در توده سیال چشم‌پوشید، بیازمایید.

حل

توصیف دقیق فرایند فروشویی با حل معادله قانون دوم فیک، که برای غلظت  $A$  در جامد، در ناحیه  $0 \leq r \leq R$  نوشته شده‌است، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial c_{As}}{\partial t} = D_{AB} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c_{As}}{\partial r} \right) \quad (20-4.22)$$

شرایط مرزی و اولیه عبارت‌اند از:

(۲۱-۴.۲۲) شرط مرزی ۱: در  $r = 0$ ،  $c_{As}$  متناهی است.

(۲۲-۴.۲۲) شرط مرزی ۲: در  $r = R$ ،  $c_{As} = mc_{Al} + b$ .

(۲۳-۴.۲۲) شرط اولیه: در  $t = 0$ ،  $c_{As} = c_0$ .

فرایند نفوذی در سمت مایع فصل مشترک جامد-مایع برحسب ضریب انتقال جرم توصیف می‌شود که تعریفی به شرح زیر دارد:

$$-D_{AB} \frac{\partial c_{As}}{\partial r} \Big|_{r=R} = k_c(c_{Al} - 0) \quad (24-4.22)$$

در این رابطه  $c_{Al}(t)$  غلظت در فاز مایع مجاور فصل مشترک است. رفتار نفوذ در دو فاز، از طریق معادله (۲۲-۴.۲۲) با هم جفت می‌شود؛ این معادله تعادل در فصل مشترک را توصیف می‌کند. به علت جفت شدن، به راحتی می‌توان از روش تبدیل لاپلاس استفاده کرد. اما ابتدا مسئله را به صورت بدون بُعد، با استفاده از  $\xi = r/R$ ،  $\tau = D_{AB}t/R^2$ ،  $C_l = (mc_{Al} + b)/c_0$ ،  $C_s = c_{As}/c_0$  و  $N = k_c R/mD_{AB}$ ، دوباره بیان می‌کنیم. معادله‌های (۲۲-۴.۲۲) و (۲۴) چنین نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial C_s}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^2 \frac{\partial C_s}{\partial \xi} \right); \quad -\frac{\partial C_s}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = NC_l \quad (26, 25-4.22)$$

که در آن‌ها  $C_s$  در مرکز کره مقداری متناهی دارد، در سطح کره  $C_s = C_l$  و در ابتدا، در سرتاسر کره  $C_s = 1$  وقتی از این معادله تبدیل لاپلاس بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$p\bar{C}_s - 1 = \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\bar{C}_s}{d\xi} \right); \quad -\frac{\partial \bar{C}_s}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = N\bar{C}_l \quad (28, 27-4.22)$$

که در مرکز کره  $\bar{C}_s$  مقداری متناهی دارد و در سطح کره  $\bar{C}_s = \bar{C}_l$ . جواب معادله‌های (۲۷-۴.۲۲) (که نظیر ناهمگن معادله (ج.۱-۶الف) است) و (۲۸-۴.۲۲) چنین است:

$$\bar{C}_s = -\frac{N}{p[\sqrt{p} \cosh \sqrt{p} - (1-N) \sinh \sqrt{p}]} \frac{\sinh \sqrt{p}\xi}{\xi} + \frac{1}{p} \quad (29-4.22)$$

تبدیل لاپلاس  $M_A$ ، مقدار کل  $A$  در داخل کره، در هر زمان  $t$ ، عبارت است از:

$$\frac{\bar{M}_A}{\frac{4}{3}\pi R^3 c_0} = \int_0^1 \bar{C}_s \xi^2 d\xi = \frac{N^2}{p^2(\sqrt{p} \coth \sqrt{p} - (1-N))} - \frac{N}{p^2} + \frac{1}{3p} \quad (30-4.22)$$

با استفاده از قضیه بسط کسره‌های جزئی هوی‌ساید برای ریشه‌های تکراری<sup>۱</sup> می‌توان تابع وارون را به دست آورد:

$$\frac{M_A(t)}{\frac{4}{3}\pi R^3 c_0} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-\lambda_n^2 D_{AB}t/R^2) \quad (31-4.22)$$

ثابت‌های  $\lambda_n$  و  $B_n$ ، به ازای  $k_c$  (یا  $N$ ) متناهی، به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\lambda_n \cot \lambda_n - (1-N) = 0; \quad B_n = \frac{N^2}{\lambda_n^2} \frac{\sin^2 \lambda_n}{(\lambda_n - \sin \lambda_n \cos \lambda_n)} \quad (33, 32-4.22)$$

و به ازای  $k_c$  (یا  $N$ ) نامتناهی داریم:

$$\lambda_n = n\pi; \quad B_n = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \quad (35, 34-4.22)$$

I. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*, McGraw-Hill (1954), p. 232, Formula 21.

توجه کنید که در به‌دست آوردن  $M_A(t)$ ، مقدار کل  $A$  باقی‌مانده در کره، در زمان  $t$ ، بدون یافتن عبارتی برای توزیع غلظت در سیستم، موفق شده‌ایم. این یکی از مزایای استفاده از تبدیل لاپلاس است. اکنون می‌توانیم ضرایب کلی انتقال جرم را تعریف کنیم: (۱) ضریب انتقال کلی صحیح برای این سیستم عبارت زیر است که بر فاز جامد مبتنی است:

$$K_s = \frac{N_{Ar}|_{r=R}}{c_{Ab}} = -\frac{R}{3} \frac{1}{M_A} \frac{dM_A}{dt} \quad (۳۶-۴.۲۲)$$

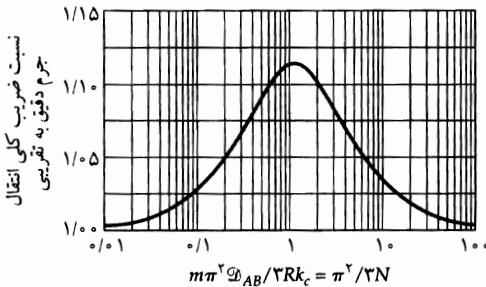
در این رابطه  $c_{Ab}$  غلظت حجمی متوسط  $A$  در فاز جامد، و (۲) یک ضریب کلی تقریبی است که بر رفتار دو فاز محاسبه شده به‌صورت جدا از هم مبتنی است و از معادله (۱۳-۴.۲۲) به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{K_{s,approx}} = -\frac{3}{R} \frac{M_A}{dM_A/dt} + \frac{m}{k_c} \quad (۳۷-۴.۲۲)$$

که در آن اندیس صفر نشان‌دهنده «مقاومت خارجی صفر» و  $k_c$  ضریب انتقال فاز مایع است. حال  $K_s$  را با  $K_{s,approx}$  مقایسه می‌کنیم. این کار را فقط به‌ازای مقادیر بزرگ  $D_{AB}t/R^2$  انجام می‌دهیم که، برای آن جمله نخست جمع در معادله (۳۱-۴.۲۲) کفایت می‌کند. در این وضعیت، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{K_{s,approx}} = \frac{3R}{\pi^2 D_{AB}} + \frac{m}{k_c} \quad \text{و} \quad \frac{K_s}{K_{s,approx}} = \frac{\lambda_1^2}{\pi^2} \left( 1 + \frac{\pi^2 m D_{AB}}{3Rk_c} \right) \quad (۳۹, ۳۸-۴.۲۲)$$

که در آن  $\lambda_1$  را باید با استفاده از مقدار واقعی  $k_c$  محاسبه کرد؛ درنظر داشته‌باشید که  $\lambda_1$  از معادله (۳۲-۴.۲۲) به‌دست می‌آید که در آن  $N = k_c R / m D_{AB}$ . نمودار معادله (۳۹-۴.۲۲) در شکل ۴-۲۲ ترسیم شده‌است. در این شکل مشاهده می‌شود که حداکثر خطا در مدل دوفیلمی، در نزدیکی  $1 = \pi^2 / 3N$  رخ می‌دهد و انحراف از نظریه دوفیلمی درخور اعتناست، اما خیلی زیاد نیست.



شکل ۴-۲۲ نسبت ضریب کلی انتقال جرم دقیق به تقریبی، در فروشویی ماده حل‌شده از کره، به‌ازای مقادیر بزرگ  $D_{AB}t/R^2$  که برحسب نسبت بدون بُعد  $m\pi^2 D_{AB}/3Rk_c$  ترسیم شده‌است.

### مثال ۳-۴.۲۲

متوسط‌گیری مساحت<sup>۲</sup>

مقطع مشخصه یک برج پرشده را درنظر بگیرید که در آن ضرایب انتقال جرم تک‌فاز اندازه‌گیری شده به‌طور جداگانه، نسبت محاسبه‌ای زیر را نتیجه می‌دهند:

$$\frac{k_{xm}^*}{mk_{ym}} = 1.0 \quad (۴۰-۴.۲۲)$$

2. C. J. King, *AIChE Journal*, 10, 671-677 (1964).

اما در این برج فاز مایع فقط نیمی از سطح پرشده را خیس می‌کند. در این جا اندیس  $m$  به مقدار میانگین روی سطح پرشده نمونه‌وار  $S$  اشاره می‌کند. از طرف دیگر، ضریب انتقال فاز گازی، در تمام سطح یکنواخت است. این مثال فرضی حالت خاصی از خیس‌شدگی نایکنواخت است. مطلوب است محاسبه مقادیر تقریبی  $k_{xm}^{\circ}/K_{xm}^{\circ}$  طبق معادله‌های (۱۲-۴.۲۲ و ۱۳).

حل

حل مسئله را با معادله (۱۲-۴.۲۲) آغاز می‌کنیم و به این نکته توجه می‌کنیم که برای نیمی از سطح  $k_{x,loc}^{\circ} = 0$  و روی نیم دیگر:

$$k_{x,loc}^{\circ} = 2k_{xm}^{\circ} \quad (41-4.22)$$

و در فاز گازی:

$$k_{y,loc}^{\circ} = k_{ym}^{\circ} \quad (42-4.22)$$

از معادله (۱۲-۴.۲۲) نتیجه می‌شود:

$$K_{xm}^{\circ} = \frac{1}{S} \left[ \frac{\frac{1}{4}S}{(1/2k_{xm}^{\circ}) + (1/mk_{ym}^{\circ})} \right] \quad (43-4.22)$$

با استفاده از این معادله و معادله‌های (۴۰-۴.۲۲) و (۹-۴.۲۲)، درمی‌یابیم که مقدار صحیح برای نسبت  $k_{xm}^{\circ}/K_{xm}^{\circ}$  عبارت است از:

$$\frac{k_{xm}^{\circ}}{K_{xm}^{\circ}} = 1 + 2 \frac{k_{xm}^{\circ}}{mk_{ym}^{\circ}} = 21 \quad (44-4.22)$$

و مقدار تقریبی از معادله (۱۳-۴.۲۲) برابر است با:

$$\frac{k_{xm}^{\circ}}{K_{xm}^{\circ}} = 1 + \frac{k_{xm}^{\circ}}{mk_{ym}^{\circ}} = 11 \quad (45-4.22)$$

بنابراین توزیع ناقص ضریب انتقال جرم فاز مایع، آهنگ انتقال جرم را نصف می‌کند، اگرچه مقاومت فاز مایع «به‌طور متوسط» بسیار کم است. دسترس‌ناپذیری کلی چنین اطلاعاتی یکی دیگر از دلایل عدم قطعیت در پیش‌بینی رفتار تماس‌دهنده‌های پیچیده است.

## ۵.۲۲ انتقال جرم و واکنش‌های شیمیایی

بسیاری از عملیات انتقال جرم با واکنش‌های شیمیایی همراه‌اند، و سینتیک واکنش می‌تواند اثر بارزی بر آهنگ‌های انتقال داشته‌باشد. مثال‌های مهم عبارت‌اند از: جذب گازهای واکنش‌پذیر و تقطیر واکنش‌پذیر. به دو وضعیت توجه خاص می‌شود:

۱. جذب ماده  $A$  با انحلال‌پذیری بسیار کم در فازی حاوی واکنشگر دوم  $B$  با غلظت بالا. جذب کربن‌دیوکسید در  $\text{NaOH}$  یا محلول‌های آمینی، یکی از مثال‌های مهم صنعتی است و در این جا واکنش را می‌توان شبه‌مرتبه اول دانست، زیرا واکنش‌گر  $B$  به‌مقداری بسیار بیش‌تر از نیاز وجود دارد:

$$R_A = -(k_1''' c_B) c_A = -k_1''' c_A \quad (1-5.22)$$

در بخش ۴.۱۸ نمونه‌ای از این نوع مسئله را حل کردیم.

۲. جذب ماده حل‌شده  $A$  که به‌سرعت واکنش می‌دهد، در محلول  $B$ . در این‌جا، می‌توان با تقریب اول فرض کرد که دوگانه چنان به‌سرعت واکنش انجام می‌دهند که نمی‌توانند باهم وجود داشته‌باشند. در مثال ۱-۲۰، نمونه‌ای از این نوع نشان دادیم.

به لایه‌های مرزی در مایعات علاقه خاصی داریم، و آثار گرمای واکنش نسبتاً کم است، زیرا نسبت  $Sc$  به  $Pr$  معمولاً بسیار بزرگ است. آثار گرمایی ماکروسکوپی پدید می‌آیند و این آثار را در فصل ۲۳ بررسی می‌کنیم. در این‌جا بحث را به چند مثال روشن‌گر محدود می‌کنیم تا نشان دهیم که چگونه می‌توان از مدل‌های جذب با واکنش شیمیایی برای پیش‌بینی عملکرد تجهیزات در دست بهره‌برداری استفاده کرد.<sup>۱</sup>

### مثال ۱-۵.۲۲

تخمین مساحت فصل‌مشرکی در ستون پرشده

از اندازه‌گیری‌های انتقال جرم با واکنش مرتبه اول غالباً برای تخمین زدن مساحت فصل‌مشرکی در تجهیزات پیچیده انتقال جرم استفاده شده‌است. نشان دهید که چگونه می‌توان این روش را توجیه کرد.

حل

سیستمی که در این‌جا بررسی می‌کنیم، جذب کربن دی‌اکسید در محلول سود سوزآور است، که طبق واکنش زیر هیدراسیون  $CO_2$  محلول آن را محدود می‌کند:



سپس کربنیک اسید با آهنگی متناسب با غلظت کربن دی‌اکسید، با  $NaOH$  واکنش انجام می‌دهد. سینتیک این واکنش به‌خوبی مشخص شده‌است.<sup>۱</sup>

جواب این مسئله نفوذ در مسئله ۲۰ ج ۳ ارائه شده‌است. از معادله (۲۰ ج ۳-۵)، درمی‌یابیم که در زمان‌های طولانی:<sup>۲،۳</sup>

$$W_{A^0} = A c_{A^0} \sqrt{D_{AB} k_1'''} \quad (3-5.22)$$

که می‌توان آن را حل کرد و مساحت کل سطح را به‌دست آورد. نتیجه می‌شود که مساحت کل سطح موردنظر  $A$  از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$A = \frac{1}{c_{A^0} \sqrt{D_{AB} k_1'''}} \frac{dM_{A,tot}}{dt} \quad (4-5.22)$$

در این‌جا  $M_{A,tot}$  تعداد مول‌های کربن دی‌اکسید جذب‌شده در زمان  $t$  است.

این معادله را می‌توان به فیلم ریزانی به طول  $L$  و سرعت سطحی  $v_s$  تعمیم داد، به شرط آن‌که  $k_1''' L / v_s \gg 1$  باشد. واکنش مرتبه اول در لایه‌های مرزی انتقال جرم را در مثال ۱۸-۴ برای مدل فیلم ساده، و در مثال ۱-۲۰، تشریح کردیم. این معادله را می‌توان بیش‌تر تعمیم داد تا تخمینی از مساحت فصل‌مشرکی در ستون‌های پرشده ارائه دهد؛ در طرح متداول این ستون‌ها، فاز مایع به‌صورت فیلمی ریزان، به سطوح جامد متکی است.

1. T. K. Sherwood, R. L. Pigford, and C. R. Wilke, *Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York (1975), Chapter 8.

2. P. V. Danckwerts, *Trans. Faraday Soc.*, **46**, 300-304 (1950).

3. R. A. T. O. Nijssing, *Absorptie van gassen in vloeistoffen, zonder en met chemische reactie*, Academisch Proefchrift, Delft (1957).



مثال ۵.۲۲

تخمین ضرایب انتقال جرم حجمی

حال جذب گاز با واکنش مرتبه اول را در مخزن هم‌زده در نظر می‌گیریم و کار خود را از واکنش زیر آغاز می‌کنیم:



که قبلاً در مثال ۴.۱۸، با استفاده از فیلم ساکن نازکی از مایع، به صورت یک مدل انتقال جرم، بررسی شد.

حل

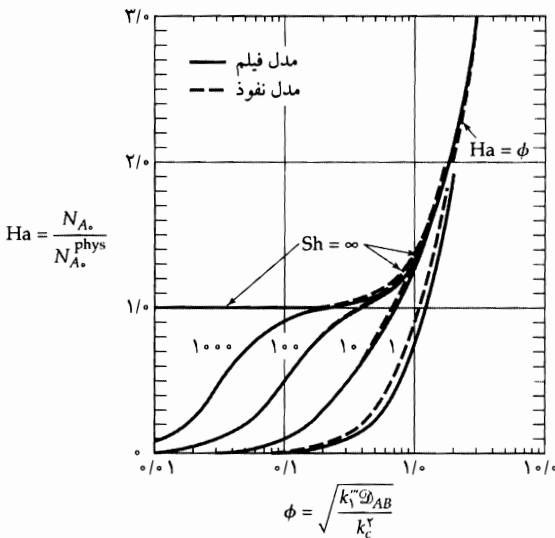
این مدلی واقع‌گرایانه نیست، اما معادله به دست آمده در مثال ۴.۱۸ را می‌توان به صورت غیرحساس به مدل بازنویسی کرد و داریم:

$$k_c = \frac{D_{AB}}{\delta} \quad (6-5.22)$$

به طوری که:

$$\phi = \sqrt{\frac{k_c'' \delta^2}{D_{AB}}} \rightarrow \sqrt{\frac{k_c''' D_{AB}}{k_c^2}} \quad \text{و} \quad \frac{V}{A\delta} \rightarrow \frac{V k_c}{A D_{AB}} = \text{Sh} \quad (7-5.22)$$

اندیس  $AB$  را باید به  $\text{O}_2\text{S}$  تغییر داد، که در آن  $S$  معرف محلول سولفیت است.



شکل ۵.۲۲ اثر واکنش مرتبه اول برگشت‌ناپذیر روی جذب حالت شبه‌پایای گازی با انحلال‌پذیری کم، در مخزن هم‌زده. مقایسه مدل‌های نفوذ و فیلم ساکن.

اکنون می‌توان حساسیت به مدل سیستم را، با مقایسه مدل فیلم و مدل نفوذ، محک زد. این کار در شکل ۵.۲۲ انجام شده است و در این شکل مشاهده می‌شود که هیچ اختلاف درخور اعتنایی بین این دو نیست.<sup>۴</sup> به علاوه، ناحیه وسیعی وجود دارد که در آن آهنگ پیش‌بینی شده برای جذب اکسیژن با آهنگ جذب فیزیکی آن در مخزن عاری از اکسیژن برابر است. بنابراین این سیستم شیمیایی وسیله‌ای مورد قبول برای تخمین زدن ضرایب انتقال جرم حجمی است. مدت‌هاست که از این وسیله برای مشخص‌سازی بازده اکسیژن‌زنی در رآکتورهای زیستی هوازی

4. E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, 8, 710-712 (1962).

استفاده می‌کنند.<sup>۵</sup>

### مثال ۳-۵.۲۲

روابط همبستگی غیرحساس به مدل برای جذب با واکنش سریع در این مثال فرایند جذب همراه با واکنش سریع برگشت‌ناپذیر را در نظر می‌گیریم؛ می‌خواهیم راهی برای ساده‌سازی و تعمیم بحث مثال ۲-۱.۲۰ بیابیم. این کار را برحسب عدد هاتا<sup>۶</sup> انجام دهید که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ha = \frac{N_{A^0}}{N_{A^0}^{phys}} \quad (۸-۵.۲۲)$$

در این جا اندیس phys نشان‌دهنده جذب ماده حل‌شده A در همان سیستم است، اما بدون انجام واکنش. این گروه بدون بعد راهی آسان برای تقویت اثر واکنش شیمیایی بر آهنگ جذب فراهم می‌کند.

حل

درغیاب ماده حل‌شده B، گونه A جذب فیزیکی (یعنی جذب بدون واکنش) می‌شود و آهنگ جذب از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$N_{A^0}^{phys} = c_{A^0} \sqrt{\frac{D_{AS}}{\pi t}} \quad (۹-۵.۲۲)$$

زیرا  $\text{erf} \sqrt{\gamma/D_{AS}}$  با کاهش نسبت  $c_{B\infty}/c_{A^0}$  به سمت واحد میل می‌کند. حال معادله (۳۸-۱.۲۰) را بر معادله (۹-۵.۲۲) تقسیم می‌کنیم تا نتیجه شود:

$$Ha = \frac{1}{\text{erf} \sqrt{\gamma/D_{AS}}} \quad (۱۰-۵.۲۲)$$

که در موارد زیر می‌توان آن را ساده کرد:<sup>۸،۷</sup>

۱. به‌ازای مقادیر کوچک  $c_{B\infty}/c_{A^0}$ ، یا به‌ازای ضرایب نفوذ مساوی:

$$Ha = 1 + \frac{ac_{B\infty}}{bc_{A^0}} \quad (۱۱-۵.۲۲)$$

۲. به‌ازای مقادیر بزرگ  $c_{B\infty}/c_{A^0}$ :

$$Ha = \left( 1 + \frac{ac_{B\infty} D_{BS}}{bc_{A^0} D_{AS}} \right) \sqrt{\frac{D_{AS}}{D_{BS}}} \quad (۱۲-۵.۲۲)$$

۳. به‌ازای همه مقادیر  $c_{B\infty}/c_{A^0}$  (تقریبی):

$$Ha \approx 1 + \frac{ac_{B\infty}}{bc_{A^0}} \sqrt{\frac{D_{BS}}{D_{AS}}} \quad (۱۳-۵.۲۲)$$

5. A. M. Friedman and E. N. Lightfoot, *Ind. Eng. Chem.*, **49**, 1227-1230 (1957); J. E. Bailey and D. F. Ollis, *Biochemical Engineering Fundamentals*, McGraw-Hill, New York (1986); V. Linek, P. Benes, and J. Sinkule, *Biotechnol. -Bioeng.*, **35**, 766-770 (1990).

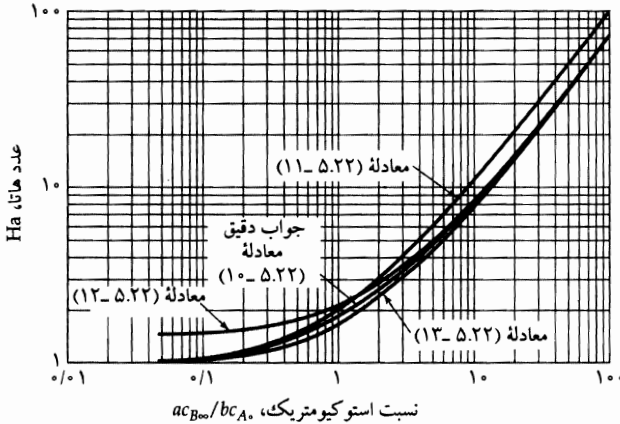
6. S. Hatta, *Technological Reports of Tôhoku University*, **10**, 613-662 (1932).

شیروجی هاتا (۱۸۹۵-۱۹۷۳) از سال ۱۹۲۵ تا سال ۱۹۵۸ در دانشگاه توهوکو تدریس کرد و به مقام رئیس مهندسی منصوب شد؛ او پس از «بازنشستگی» در شرکت ساختمانی و مهندسی شیمی چیودا به کار پرداخت. او سردبیر نشریه کاگاکو کوگادو و رئیس کاگاکو کوگاکایی نیز بود.

7. E. N. Lightfoot, *Chem. Eng. Sci.*, **17**, 1007-1011 (1962).

8. D. H. Cho and E. Ranz, *Chem. Eng. Prog. Symposium Series # 72*, **63**, 37-45, 46-58 (1967).

معادله (۱۱-۵.۲۲) بسیار مفید است، زیرا در وضعیت متداول نزدیک به هم بودن ضرایب نفوذ، هم چنین به ازای مقادیر کوچک  $c_{B\infty}/c_{A^0}$  دقیق است. معادله (۱۳-۵.۲۲) به این سبب مفید است که هم برای مقادیر بزرگ و هم برای مقادیر خیلی کوچک  $ac_{B\infty}D_{BS}/bc_{A^0}D_{AS}$  معتبر است. به علاوه، جواب دقیق همواره در فضای بین منحنی شکل ۱۳-۵.۲۲ و بخش هایی از منحنی های معادلات (۱۱-۵.۲۲) و (۱۲-۵.۲۲) واقع می شود که به آن نزدیک ترند. این نکته در شکل ۲-۵.۲۲ نشان داده شده است؛ در این شکل این تقریب های محدودکننده با جواب دقیق مقایسه شده اند.



شکل ۲-۵.۲۲ روابط همبستگی غیرحساس به مدل، برای جذب همراه با واکنش شیمیایی سریع، که از مدل نفوذ، برای حالت  $D_{AS} = 2D_{BS}$  به دست آمده اند.

سپس به این نکته توجه می کنیم که می توان نسبت ضریب نفوذ را با نسبت متناظر اعداد شروود واکنش ناپذیر جایگزین کرد:

$$\sqrt{\frac{D_{AS}}{D_{BS}}} = \frac{Sh_B^*}{Sh_A^*} \quad (14-5.22)$$

که در آن اندیس «۰» نشان دهنده عدد شروود مشاهده شده در غیاب واکنش شیمیایی است. بنابراین می توان مجموعه ای از جواب های حدی غیرحساس به مدل به دست آورد:

$$\begin{aligned} Ha &\approx 1 + \frac{ac_{B\infty}}{bc_{A^0}} \\ &\approx \left[ 1 + \left( \frac{ac_{B\infty}}{bc_{A^0}} \right) \left( \frac{D_{BS}}{D_{AS}} \right) \right] \frac{Sh_B^*}{Sh_A^*} \\ &\approx 1 + \left( \frac{ac_{B\infty}}{bc_{A^0}} \right) \frac{Sh_A^*}{Sh_B^*} \end{aligned} \quad (15-5.22)$$

نشان داده شده است که این معادله ها کران های مناسبی برای لایه های مرزی آرام و متلاطم، هم چنین مدل نفوذ مثال ۲-۱۲۰، ایجاد می کنند. بنابراین یک رابطه همبستگی کاملاً غیرحساس به مدل تشکیل می دهند و کار بردگسترده ای دارند.

## ۶.۲۲ انتقال مرکب گرما و جرم از طریق همرفت آزاد

در این بخش بعضی از برهم کنش های بین فرایندهای انتقال را، با تأکید بر همرفت آزاد، به اختصار بررسی می کنیم. این بحث تعمیم بحث قبلی انتقال گرمای همرفتی آزاد در بخش ۶.۱۴ است و بنابراین به خوبی درک می شود. انتقال مرکب گرما و جرم از طریق همرفت آزاد از جمله مثال های ساده برهم کنش بین هر سه پدیده انتقال است. معادله های بدون بعدی که آن ها را توصیف می کنند به صورت معادله های (۸-۵.۱۹) تا (۱۱) ارائه شدند. انتگرال گیری

عددی از این معادله‌ها امکان‌پذیر است<sup>۱</sup>، اما می‌توان از طریق نظریه لایه مرزی به نتایج سودمندی دست یافت. در مثال‌های زیر، دو مسئله ساده را بررسی می‌کنیم.

### مثال ۲۶-۲۱

جمع‌پذیری اعداد گراسهوف

عبارتی برای انتقال مرکب جرم و گرما از طریق همرفت آزاد، برای حالت خاص تساوی اعداد پرانتل و اشمیت به دست آورید. فرض کنید انتقال بین سطحی با دما و ترکیب ثابت، و پهنه وسیعی از سیال یکنواخت که آن را دربرگرفته است، انجام می‌شود.

حل

این مثال تعمیم مستقیم شرایط مرزی مثال ۵-۴.۱۱ است. در این صورت، اگر دما و ترکیب بدون بُعد به صورت متناظر تعریف شوند، نتیجه می‌شود که در همه جای سیستم مورد بررسی،  $\tilde{T} = \tilde{x}_A$ .

سپس نتیجه می‌شود که جواب این مسئله همرفت مختلط با جواب مسئله انتقال جرم یا گرمای تنها، یکسان است، اما در آن Gr یا  $Gr_\omega$  با جمع  $(Gr + Gr_\omega)$  جایگزین شده است. این ساده‌سازی در سیستم‌های هوا-آب کاربرد گسترده‌ای دارد؛ در این سیستم‌ها اختلاف اندک بین اعداد Sc و Pr اثر درخور اعتنایی ندارد.

بنابراین برای تبخیر از صفحه‌ای عمودی که با آب خیس می‌شود (با  $Sc = 0.61$  و  $Pr = 0.73$ )، می‌توان از معادله  $(5.4.11)$  با  $C = 0.518$  استفاده کرد و نتیجه زیر را به دست آورد:

$$Nu_m \approx 0.518 [0.73(Gr + Gr_\omega)]^{1/4} \quad (16.22)$$

$$Sh_m \approx 0.518 [0.61(Gr + Gr_\omega)]^{1/4} \quad (26.22)$$

توجه کنید که توان‌های  $\frac{1}{4}$  اعداد Pr و Sc، به ترتیب، برابر است با:  $0.92$  و  $0.88$ . به سبب عدم قطعیت‌های هر وضعیت عملی و مدل لایه مرزی که این نتایج براساس آن به دست آمده‌اند، این اختلاف اصلاً چشم‌گیر نیست. به این نکته نیز توجه کنید که عدد گراسهوف گرمایی معمولاً خیلی بزرگ‌تر است، به طوری که چشم‌پوشی از این برهم‌کنش سبب می‌شود که آهنگ‌های تبخیر بسیار پایین‌تر تخمین زده شود.

### مثال ۲۶-۲۲

انتقال گرمای همرفتی آزاد به‌عنوان منبع انتقال جرم همرفتی واداشته

وضعیت‌های زیادی وجود دارد - مثلاً تبخیر حلال‌ها با انحلال‌پذیری کم - که در آن‌ها اعداد گراسهوف گرمایی بسیار بزرگ‌تر از همتاهای انتقال جرمی خود هستند ( $Gr > Gr_\omega$ ) و اعداد اشمیت از اعداد پرانتل بزرگ‌ترند ( $Sc > Pr$ ). در چنین شرایطی، نیروهای شناوری گرمایی منبعی برای اندازه حرکت تأمین می‌کنند که به نوبه خود، جریانی همرفتی به‌عنوان محرک انتقال جرم ایجاد می‌کند. نشان داده شده است<sup>۲</sup> که گرادیان سرعت روبه بالای ناشی از گرما در سطح یک صفحه تخت عمودی به طول  $L$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial y} \right|_{y=0} \approx 1.08 \left( \frac{4z}{3L} \right)^{1/4} \left( \frac{Gr}{Pr} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{g\beta\Delta T}{L}} \quad (36.22)$$

1. W. R. Wilcox, *Chem. Eng. Sci.*, **13**, 113-119 (1961).

2. A. Acrivos, *Phys. Fluid*, **3**, 657-658 (1960).

در این رابطه  $z$  فاصله اندازه‌گیری شده به طرف بالا در طول صفحه است،  $y$  به طرف بیرون و به داخل سیال اندازه‌گیری می‌شود، و  $\Delta T$  اختلاف بین دمای صفحه و دمای محیط اطراف است. به‌ازای اعداد پرانتل بزرگ، این عبارتی مجانبی است، اما برای گازها نیز سودمند است. عبارتی برای بیان اعداد شروود موضعی و میانگین به‌دست آورید.

همرفت آزاد گرمایی، میدان سرعتی ایجاد می‌کند که لایه مرزی انتقال جرم در داخل آن تشکیل می‌شود. در صورت معلوم بودن این میدان سرعت، می‌توان از نظیر انتقال جرمی معادله‌های (۴.۱۲-۳۰ و ۲۹) همراه با تعریف  $Nu_{loc} = D/\Gamma(\frac{4}{3})\delta T$  برای ارائه توصیفی از آهنگ انتقال جرم در جریان دو بُعدی استفاده کرد:

$$Sh_{loc} = \frac{(Re Sc)^{1/2} \sqrt{\Gamma_0}}{9^{1/2} \Gamma(\frac{4}{3}) \left( \int_0^{z/L} \sqrt{\Gamma_0(u)} du \right)^{1/2}} \quad (۴-۶.۲۲)$$

در این‌جا:

$$\Gamma_0 = \frac{l_0}{v_0} \frac{\partial v_z}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (۵-۶.۲۲)$$

گرادیان سرعت بدون بُعد در جدار است ( $l_0$  و  $v_0$  کمیت‌های مرجع اختیاری‌اند که در تعریف عدد رینولدز به‌کار رفتند). برای همرفت آزاد، راحت‌ترین است که از ارتفاع  $L$  صفحه به‌عنوان  $l_0$  و از نسبت  $\nu/L$  به‌عنوان  $v_0$  استفاده کنیم. در این صورت عدد رینولدز برابر واحد است و کمیت  $\Gamma_0$  عبارت است از:  $\Gamma_0 = (L^2/\nu)(\partial v_z/\partial y)|_{y=0}$ . در این صورت معادله (۴-۶.۲۲) چنین نوشته می‌شود:

$$Sh_{loc} = \left( \frac{1/0.8}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{(\frac{4}{3})^{1/2}}{\Gamma(\frac{4}{3})} (GrSc)^{1/4} \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^{1/2} \left( \frac{L}{z} \right)^{1/4} \\ \approx 0.59 (GrSc)^{1/4} \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^{1/2} \left( \frac{L}{z} \right)^{1/4} \quad (۶-۶.۲۲)$$

عدد شروود میانگین، که با متوسط‌گیری روی سطح صفحه به‌دست می‌آید، عبارت است از:

$$Sh_m \approx 0.79 (GrSc)^{1/4} \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^{1/2} \quad (۷-۶.۲۲)$$

توجه داشته‌باشید که دو معادله آخر ویژگی‌های هر دو نوع همرفت آزاد و واداشته را در لایه‌های مرزی آرام نشان می‌دهند: توان  $\frac{1}{4}$  عدد گراسهوف برای همرفت آزاد و توان  $\frac{1}{2}$  عدد اشمیت برای همرفت واداشته. به‌علاوه، اکنون می‌توان اثر  $Sc/Pr$  را آزمود، زیرا از مثال قبل و جدول ۶.۱۴ می‌دانیم که، به‌ازای  $Pr = Sc$ :

$$Sh_m = 0.67 (GrSc)^{1/4} \quad (۸-۶.۲۲)$$

که در آن ضریب به‌اندازه  $0.85$  کوچک‌تر از ضریب معادله (۷-۶.۲۲) است. عدد شروود  $Sh_m$  بین پیش‌بینی‌های معادله‌های (۷-۶.۲۲ و ۸) برای  $Sc \geq Pr$  و  $Pr \gg 1$  خواهد بود.

استدلال‌هایی شبیه استدلال‌های به‌کاررفته برای معادله (۶-۶.۱۴)، اکنون تعمیم زیر را برای معادله‌های (۷-۶.۲۲ و ۸) ایجاد می‌کنند:

$$Sh_m \approx 0.73 (1 \pm 0.1) \frac{(GrSc)^{1/4} (Sc/Pr)^{1/2}}{[1 + (0.492/Pr)^{0.16}]^{2/8}} \quad (۹-۶.۲۲)$$

بازای  $Sc \geq Pr$  و  $Pr \geq 0.73$ . این نتیجه برای حدود  $Pr = 0.73$  و  $Pr = \infty$  اعتبار دارد و بنابراین می‌تواند شامل تبخیر حلال‌ها در هوا هم باشد. اکنون می‌توان این تحلیل را به شکل‌های دیگر نیز تعمیم داد.

### ۷.۲۲ آثار نیروهای فصل‌مشارکی بر انتقال گرما و جرم

در این بخش بعضی از برهم‌کنش‌های بین سه فرایند انتقال را، با تأکید بر آثار کشش فصل‌مشارکی متغیر (آثار مارانگونی) به‌اختصار بررسی می‌کنیم. اهمیت موضوع از غلبه تماس مستقیم سیال-سیال در سیستم‌های انتقال جرم ناشی می‌شود، اما می‌تواند در عملیات انتقال گرمای مشابه نیز اهمیت داشته‌باشد. فرایندهای نفوذی که هنوز به‌خوبی درک نشده‌اند، نقض شرط عدم لغزش در جریان سیال روی سطوح جامد، درهمسایگی سطوح هلالی در حال پیشروی را روا می‌دارند.<sup>۱</sup> چنان‌که در مورد آثار اعوجاجی گرادبان‌های کشش سطحی در انتقال جرم و گرما در هنگام تماس گاز-مایع دیدیم، این آثار از طریق توصیف شرایط مرزی وارد می‌شوند.

طبق معادله (۱۱ ج. ۴-۶)، هرگاه تنش در گاز (فاز II) نادیده گرفته شود، تنش‌های فصل‌مشارکی مماسی که با بردار یکه قائم  $\mathbf{n}$  در فصل‌مشارک اثر می‌کنند از رابطه زیر به‌دست می‌آیند:<sup>۲</sup>

$$[(\delta - \mathbf{nn}) \cdot [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}]] = \nabla^s \sigma \quad (۱-۷.۲۲)$$

که در آن  $\sigma$  کشش سطحی،  $\nabla^s$  عملگر گرادبان دو بُعدی در فصل‌مشارک، و  $(\delta - \mathbf{nn})$  «عملگر تصویر» است که آن دسته از مؤلفه‌های  $[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}]$  را برمی‌گزیند که در صفحه مماسی فصل‌مشارکی قرار دارند. مثلاً اگر  $\mathbf{n}$  بردار یکه قائم در راستای  $z$  فرض شود، از معادله (۱-۷.۲۲) نتیجه می‌شود:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}; \quad \tau_{zy} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} \quad (۳، ۲-۷.۲۲)$$

که نیروهای کشش فصل‌مشارکی در راستاهای  $x$  و  $y$  یاند که بر صفحه  $xy$  وارد می‌شوند.

تنش‌های ناشی از کشش سطحی معمولاً همان مرتبه بزرگی هم‌تاهای هیدرودینامیکی خود را دارند، و پدیده‌های جریانی که ممکن است از آن‌ها نتیجه شوند، مجموعاً آثار مارانگونی نامیده می‌شوند.<sup>۳</sup> نشان داده شده‌است<sup>۴</sup> که با آثار مارانگونی می‌توان آهنگ‌های انتقال جرم را تا سه برابر افزایش داد، اما در موارد دیگر نیز می‌توان آن‌ها را کاهش داد.

1. V. Ludviksson and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **14**, 674-677 (1968); P. A. Thompson and S. M. Troian, *Phys. Rev. Letters*, **63**, 766-769 (1997); A. Marmur, in *Modern Approach to Wettability: Theory and Applications* (M. E. Schrader and G. Loeb, eds.), Plenum Press (1992); D. Schaeffer and P. -Z. Wong, *Phys. Rev. Letters*, **80**, 3069-3072 (1998).

۲. در معادله (۲-۳) در

D. A. Edwards, H. Brenner, and D. T. Wasan, *Interfacial Transport Processes and Rheology*, Butterworth-Heinemann, Boston (1991).

عملگر  $(\delta - \mathbf{nn})$  «خودعامل سطحی دوتایی» نامیده شده‌است؛ همین کمیت در منبع زیر «تانسور تصویر» نامیده شده‌است.

J. C. Slattery, *Interfacial Transport Phenomena*, Springer Verlag, New York (1990), p. 1086

3. C. G. M. Marangoni, *Tipographia dei fratelli Fusi*, Pavia (1865); *Ann. Phys.* (Poggendorf), **143**, 337-354 (1871). and L. E. Scriven and C. V. Sternling, *Nature*, **187**, 186-188 (1960), and S. Ross and P. Becher, *J. Coll. Interfac. Sci.*, **149**, 575-579 (1992).

۴. در منبع زیر مروری بر آثار مارانگونی و پدیده‌های مرتبط با تأکید بر سیستم‌های مایع-مایع یافت می‌شود:

J. C. Godfrey and M. J. Slater, *Liquid-Liquid Extraction Equipment*, Wiley, New York (1994), pp. 68-75. and C. V. Sternling and L. E. Scriven, *AIChE Journal*, **5**, 514-523 (1959),

ماهیت و دامنه آثار مارانگونی بر شکل هندسی و خواص انتقالی تأثیر شدیدی دارد و در این جا چهار مثال خاص را بررسی می‌کنیم:

۱. قطره‌ها و حباب‌هایی که پیوستار مایعی آن‌ها را احاطه کرده‌است؛

۲. افشانه‌هایی از قطره‌ها در پیوستاری گازی؛

۳. فیلم‌های مایع دارای تکیه‌گاه در پیوستاری گازی یا مایع؛

۴. اسفنج‌های حباب‌های گاز در پیوستاری مایع.

این سیستم‌ها، که هریک در عمل اهمیت دارد، رفتاری بسیار متفاوت باهم دارند.

برای حباب‌ها و قطره‌هایی که در پیوستاری مایع حرکت می‌کنند، مسائل مهم عبارت‌اند از: عوامل فعال در سطح یا ذرات میکروسکوپی که می‌توانند سبب کاهش یا حذف «گردش هادامارد-ریزینسکی» شوند و هم چنین اختلاط تناوبی همراه با نوسان در قطره‌ها یا حباب‌های بزرگ‌تر را به تأخیر بیندازند.<sup>۵</sup> این پدیده‌ها در مثال ۳-۲۲-۴ به اختصار بررسی شدند. چنین وضعیت‌هایی در جذب‌کننده‌های گاز و استخراج‌کننده‌های مایع اهمیت دارند. برای افشانه‌های قطرات در گاز، که در ستون‌های بزرگ تقطیر مهم‌اند، نیروهای مارانگونی نقش درخور اعتنائی ندارند.<sup>۶</sup> بسترهای اسفنجی، که در ستون‌های تقطیر کوچک‌تر اهمیت دارند، و فیلم‌های دارای تکیه‌گاه که در انواع مختلفی از ستون‌های پر شده مهم‌اند، از نمونه‌های درخور توجه خاص‌اند. هردو از گرادیان‌های کشش سطحی ناشی از تغییرات در کشش سطحی با تغییر ترکیب شیمیایی جریان‌های مجاور، به شدت تأثیر می‌پذیرند.

بسترهای اسفنجی هنگامی پایدار می‌شوند که کشش سطحی توده مایع از کشش سطحی مایع در تعادل با توده گاز پایین‌تر باشد؛ چنین سیستمی را «سیستم مثبت» می‌نامند. در چنین وضعیتی، کشش فصل مشترکی گرایش دارد که در جایی که حباب‌ها به هم نزدیک‌ترند، در مقایسه با جایی که از هم دورند، بالاتر باشد و به این ترتیب اسفنج پایدار می‌شود. در مواردی که اختلاف اندکی در کشش سطحی وجود دارد، یا در جایی که جهت معکوس می‌شود، «سیستم منفی»، اثر پایدارسازی وجود ندارد و اسفنجی شدن ناچیز است. تقلب اتانول از آب درخور توجه است، زیرا در مواردی که فرآینت نسبی بالاست، سیستم گرادیان‌های کشش سطحی مثبت بزرگی دارد، اما وقتی به نقطه آزنوتروپ (هم‌جوشی) نزدیک می‌شویم، سیستم تقریباً به حالت خنثی می‌رسد. بنابراین، برای ستون حباب-فنجانک، بازده مرحله‌ای، در جایی که کم‌ترین نیاز به آن هست، بالاتر است و با رسیدن به ترکیب آزنوتروپ، پایین می‌آید.

در ستون‌های پر شده، که مایع در حال نزول به سطوحی جامد، از قبیل فیلم‌های نازک، تکیه دارد، وضعیت کاملاً متفاوت است. در این جا کشش سطحی مایع در حال نزول، برای سیستمی مثبت، به طرف پایین کاهش می‌یابد و در معرض ناپایداری هیدرودینامیکی است تا جویبارهای باریک تشکیل دهد. در نتیجه مساحت فصل مشترک و کارایی انتقال جرم به شدت کاهش می‌یابد. اما در سیستم‌های منفی، فیلم‌ها پایدار می‌شوند و انتقال جرم از سیستم‌های خنثی مؤثرتر است. به نظر می‌رسد که تحلیلی کمی از این وضعیت در دسترس نباشد، اما نشان داده شده‌است که ناپایداری‌هایی که زویدروگ و هارمنس در ستون‌های جدارخیس مشاهده کرده‌اند، با تحلیل پایداری خطی شده قابل پیش‌بینی باشد.<sup>۷</sup> تحلیل پایداری این نکته را نیز مطرح می‌کند که حضور گرادیان کشش سطحی مثبت باید بازده چگالنده (کندانسور) را نیز افزایش دهد. در بررسی دیگری روی پایداری فیلم‌های بسیار کوچک، امکانات جدیدی

5. J. B. Angelo and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **12**, 751-760 (1966).

6. F. J. Zuiderweg and A. Harmens, *Chem. Eng. Sci.*, **9**, 89-103 (1958).

7. K. H. Wang, V. Ludviksson, and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **17**, 1402-1408 (1971).

برای پردازنده‌های خردسیالی پدیدار شد.<sup>۸</sup>

### مثال ۱-۷.۲۲

حذف گردش در حباب گاز در حال صعود

حضور عوامل فعال در سطح می‌تواند سبب توقف گردش هادامارد-ریزنسکی در حباب گاز در حال صعود شود. این پدیده را توضیح دهید (نگاه کنید به شکل ۱-۷.۲۲).

حل

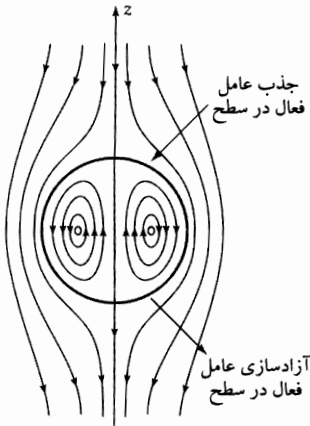
گردش، به کشیده شدن سطح در بالای حباب در حال صعود و انقباض سطح در پایین آن منتهی می‌شود. در نتیجه، عوامل فعال در سطح در پایین جمع می‌شوند و در آن‌جا غلظتی بالاتر از مقدار متوسط ایجاد می‌کنند، در حالی که در بالا، غلظت از مقدار متوسط پایین‌تر است. چون عوامل فعال در سطح، کشش سطحی را کاهش می‌دهند، در نتیجه تنش ناشی از کشش سطحی (در مختصات کروی) پدید می‌آید:

$$\tau_{r\theta,s}|_{r=R} = \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \quad (۴-۷.۲۲)$$

که گرایش به مقابله با تغییر شکل فصل مشترکی دارد (نگاه کنید به معادله ۱-۷.۲۲). اگر اندازه این تنش به مقداری برسد که روی کره جامد در حال صعود مشاهده می‌شود (نگاه کنید به معادله ۱-۶.۲)، آن‌گاه:

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = \frac{3}{2} \frac{\mu v_{\infty}}{R} \sin \theta \quad (۵-۷.۲۲)$$

و گردش متوقف می‌شود.



شکل ۱-۷.۲۲ انتقال عامل فعال در سطح، در حین

گردش هادامارد-ریزنسکی.

در عمل، حتی مقادیر اندک عامل فعال در سطح، گردش را متوقف می‌کند. غلظت‌های اندک ذرات معلق میکروسکوپی تأثیر مشابهی دارد؛ در این حالت این ذرات به پشت حباب‌ها روییده می‌شوند و سطحی صلب تشکیل می‌دهند.

### مثال ۲-۷.۲۲

ناپایداری مارانگونی در فیلم ریزان

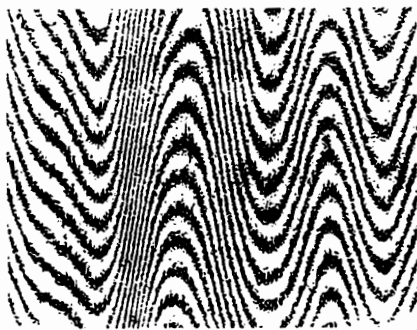
یکی از ساده‌ترین آثار مارانگونی ناشی از انتقال جرم، ناپایداری در فیلم ریزان در نتیجه جذب سطحی جریان متقابل بخارها و محلولی داغ است. نمونه‌ای مهم از این پدیده جذب بخار HCl در آب است، که چنان مؤثر است که جریان هم‌سو ترجیح داده می‌شود. این اثر را توضیح دهید.



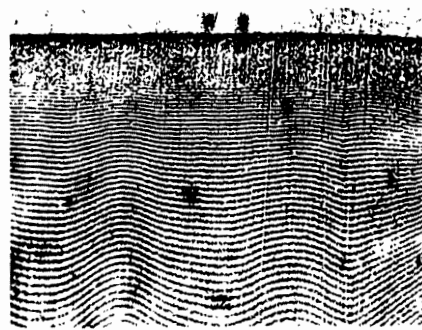
حل

این وضعیت را می‌توان با جریان پایین رو آب روی صفحه‌ای که در بالا سردتر از پایین است، شبیه‌سازی کرد. اگر به اندازه کافی دقت شود، می‌توان ضخامت فیلمی با تغییرات سینوسی به دست آورد، که در شکل ۷.۲۲-الف با استفاده از روش تداخل سنجی نشان داده شده است. در این شکل هر خط تیره نماینده خطی با ضخامت ثابت است که به اندازه نصف طول موج نور در آب با همسایگانش اختلاف دارد. این وضعیت با یک رشته سلول غلتکی موازی از نوع نشان داده شده در شکل ۷.۲۲-ب) متناظر است که محرک آن‌ها گرادیان‌های کشش سطحی جانبی است. این گرادیان‌ها، به نوبه خود، از تغییرات اندک ضخامت فیلم، بر اثر تغییر مکان‌های جزئی اجتناب‌ناپذیر سرعت سطحی ناشی می‌شوند: هرچه ناحیه ضخیم‌تر باشد، سریع‌تر حرکت می‌کند و بنابراین نواحی نازک‌تر سردتر می‌شوند. تحلیل ساده آشفتگی<sup>۱</sup> نشان می‌دهد که آشفتگی‌هایی که عرض درخور اعتنا داشته باشند، سریع‌تر از دیگران رشد می‌کنند و آن‌ها که سریع‌تر رشد می‌کنند، غالب‌اند. دوره تناوب خطوط سینوسی در شکل ۷.۲۲-الف) با آشفتگی‌هایی متناظرند که سریع‌تر از همه رشد می‌کنند.

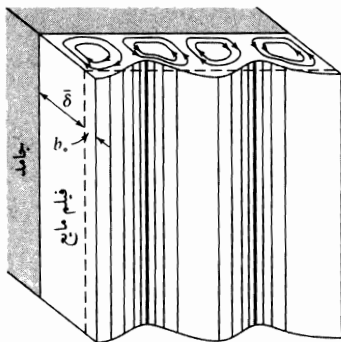
اما در عمل به ندرت با چنین نظمی روبه‌رو می‌شویم. در بیش‌تر موارد جویبارهای ضخیم مشاهده می‌شوند که نواحی نازک و وسیع آن‌ها را احاطه کرده‌اند. این نواحی نازک، که بخش عمده سطح دسترس‌پذیر را فرامی‌گیرند، هم آهسته حرکت می‌کنند و هم به سرعت اشباع می‌شوند و بنابراین در انتقال جرم تأثیر ندارند. فقط جویبارها مؤثرند و مساحت کل سطح آن‌ها بسیار کوچک است. رفتار مشابهی برای گرادیان‌های کشش سطحی ناشی از تغییرات عمودی در ترکیب شیمیایی مشاهده می‌شود. اما در این مورد رفتار پیچیده‌تر است و مستلزم تحلیل انتقال جرم میان‌فازی است.<sup>۷</sup>



(ب)



(الف)



(ج)

شکل ۷.۲۲-الف) شروع ناپایداری مارانگونی در فیلم مایع در حال تخلیه، (ب) ناپایداری مارانگونی کاملاً شکل‌یافته، (ج) تصویر کیفی اختلافات سلول غلتکی.

## ۸.۲۲ ضرایب انتقال در آهنگ‌های بالای انتقال جرم خالص

آهنگ‌های بالای انتقال جرم خالص در مرزهای فاز، سبب اعوجاج توزیع‌های سرعت و دما در لایهٔ مرزی و هم‌چنین غلظت‌گونه می‌شود و این آهنگ‌ها ضخامت لایهٔ مرزی را نیز تغییر می‌دهند. هردو اثر گرایش به افزایش ضرایب اصطکاک و ضرایب انتقال جرم و گرما دارند، هرگاه انتقال جرم به‌سوی مرز باشد، و در وضعیت عکس، گرایش به کاهش آن‌ها دارند. اما این روندهای معمول، در همرفت آزاد، و در جریان‌هایی که سطحی چرخان محرک آن‌هاست، معکوس می‌شوند. بزرگی چنین تغییراتی به‌شکل هندسی سیستم، شرایط مرزی، و بزرگی پارامترهای حاکم بر سیستم، مانند اعداد رینولدز، پرانتل، و اشمیت وابسته است و با آثار تغییر در خواص فیزیکی همراه است. این تغییرات می‌توانند پایداری هیدرودینامیکی را نیز کاهش یا افزایش دهند. به‌این‌ترتیب تعیین دقیق میزان مجاز آثار انتقال جرم خالص مستلزم محاسبه و / یا آزمایش گسترده است، اما بعضی از ویژگی‌های برجسته‌تر را می‌توان با استفاده از مدل‌های فیزیکی ایده‌آل‌سازی شده نشان داد و در این‌جا همین رویکرد را دنبال می‌کنیم.

کار را با مدل فیلم ساکن شروع می‌کنیم که تخمین ساده‌ای از اعوجاج توزیع را در اختیار ما قرار می‌دهد، اما نمی‌تواند تغییرات ضخامت مؤثر فیلم را پیش‌بینی کند. سپس مدل نفوذ و مدل لایهٔ مرزی آرام صفحهٔ تخت را تشریح می‌کنیم. با ارائهٔ چند مثال روشن‌گر، که آخرین آن‌ها یک مثال عددی کامل از لایهٔ مرزی روی دیسک چرخان است، نتیجه‌گیری می‌کنیم. این مثال حساسیت مدل را ارزیابی می‌کند.

چنان‌که در بخش ۱.۲۲ خاطر نشان شد، وقتی آهنگ‌های بالای انتقال جرم خالص را در نظر می‌گیریم، از نمادگذاری اصلاح‌شدهٔ ضرایب انتقال استفاده می‌کنیم:

$$N_{A^{\circ}} - x_{A^{\circ}}(N_{A^{\circ}} + N_{B^{\circ}}) = k_{x,\text{loc}}^{\circ} \Delta x_A \quad (\text{الف } ۱\text{-}۸\text{-}۲۲)$$

$$e_{\circ} - (N_{A^{\circ}} \bar{C}_{pA,\circ} + N_{B^{\circ}} \bar{C}_{pB,\circ})(T^{\circ} - T^{\circ}) = h_{\text{loc}}^{\circ} \Delta T \quad (\text{ب } ۱\text{-}۸\text{-}۲۲)$$

نقطه‌های سیاه در جمله‌های  $k_{x,\text{loc}}^{\circ}$  و  $h_{\text{loc}}^{\circ}$  به‌طور ضمنی نشان می‌دهند که اعوجاج توزیع‌های غلظت و دما، بر اثر آهنگ‌های انتقال جرم خالص، در نظر گرفته شده‌اند.

روابط بین این ضرایب انتقال و ضرایب تعریف‌شده با معادله‌های (۱.۲۲-۷ و ۸) عبارت‌اند از:

$$k_{x,\text{loc}} = \lim_{N_{A^{\circ}} + N_{B^{\circ}} \rightarrow \circ} k_{x,\text{loc}}^{\circ} \quad (\text{الف } ۲\text{-}۸\text{-}۲۲)$$

$$h_{\text{loc}} = \lim_{N_{A^{\circ}} \bar{C}_{pA,\circ} + N_{B^{\circ}} \bar{C}_{pB,\circ} \rightarrow \circ} h_{\text{loc}}^{\circ} \quad (\text{ب } ۲\text{-}۸\text{-}۲۲)$$

این نتیجه فرایند محدودکننده‌ای را که این دو نوع ضریب انتقال را به هم مربوط می‌کند، به‌صراحت نشان می‌دهد.

## مدل فیلم ساکن ۴.۳.۲.۱

این مدل را قبلاً در بخش ۲.۱۸ به‌اختصار، و در مثال ۱۹-۴.۱ با تفصیل بیشتر، بررسی کردیم. از ترکیب معادله‌های (۱۹-۴.۱۶ و ۱۷) با تعریف‌های معادله‌های (۱.۲۲-الف و ب)، برای سیستم نشان‌داده‌شده در شکل ۱.۲۲-۸،

1. W. K. Lewis and K. C. Chang, *Trans, AIChE*, **21**, 127-136 (1928).

2. G. Ackerman, *Forschungsheft*, **328**, 1-16 (1937).

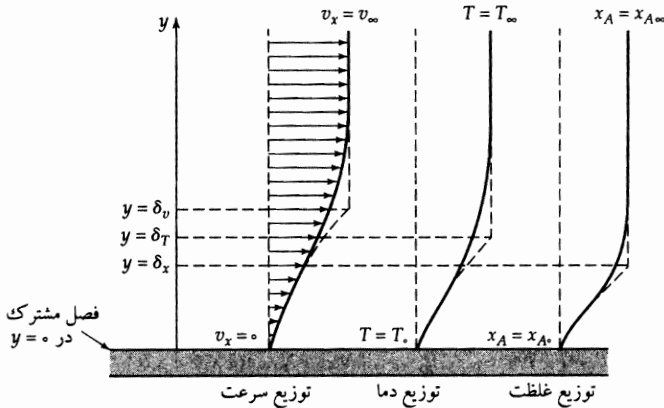
3. A. P. Colburn and T. B. Drew, *Trans. AIChE*, **33**, 197-212 (1937).

4. H. S. Mickley, R. C. Ross, A. L. Stuyers and W. E. Stewart, *NACA Tech. Note 3208* (1954).

نتیجه می‌شود:

$$1 + \frac{(N_{A^*} + N_{B^*})}{k_{x,loc}^*} = \exp \left[ (N_{A^*} + N_{B^*}) \frac{\delta_x}{cD_{AB}} \right] \quad (3-8.22)$$

$$1 + \frac{(N_{A^*} \tilde{C}_{pA} + N_{B^*} \tilde{C}_{pB})}{h_{loc}^*} = \exp \left[ (N_{A^*} \tilde{C}_{pA} + N_{B^*} \tilde{C}_{pB}) \frac{\delta_T}{k} \right] \quad (4-8.22)$$



شکل ۱-۸.۲۲ جریان پایا در طول سطحی تخت با انتقال جرم سریع به داخل جریان. منحنی‌های معمولی معرف توزیع‌های واقعی، و منحنی‌های خط چین پیش‌بینی‌های انجام شده با استفاده از مدل فیلم‌اند.

با دنبال کردن فرایندهای حدی نشان داده شده در معادله‌های (۲-۸.۲۲) الف و ب، عبارت‌هایی برای ضرایب انتقال در حد پایینی انتقال جرم خالص به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{k_{x,loc}} = \frac{\delta_x}{cD_{AB}} \quad \frac{1}{h_{loc}} = \frac{\delta_T}{k} \quad (5, 6-8.22)$$

این مقادیر حدی با بسط دادن طرف‌های راست معادله‌های (۳-۸.۲۲) و (۴) به صورت سری تیلر و نگاه داشتن دو جمله به دست می‌آیند. با قرار دادن معادله‌های (۵-۸.۲۲) و (۶) در معادله‌های (۱۶-۴.۱۹) و (۱۷) می‌توانیم ضخامت‌های فیلم را (که هیچ‌یک خوش‌تعریف نیستند)، به سود ضرایب انتقال در آهنگ‌های پایین انتقال جرم (که قابل اندازه‌گیری‌اند) حذف کنیم:

$$1 + \frac{(N_{A^*} + N_{B^*})(x_{A^*} - x_{A\infty})}{N_{A^*} - x_{A^*}(N_{A^*} + N_{B^*})} = \exp \left( \frac{N_{A^*} + N_{B^*}}{k_{x,loc}} \right) \quad (7-8.22)$$

$$1 + \frac{(N_{A^*} \tilde{C}_{pA} + N_{B^*} \tilde{C}_{pB})(T_s - T_{\infty})}{q} = \exp \left( \frac{N_{A^*} \tilde{C}_{pA} + N_{B^*} \tilde{C}_{pB}}{h_{loc}} \right) \quad (8-8.22)$$

این معادله‌ها نتایج اصلی مدل فیلم‌اند و وابستگی شار انرژی همرفتی و شار نفوذ در جدار را، به  $N_{B^*}$  و  $N_{A^*}$  نشان می‌دهند. در این مدل، آثار انتقال جرم خالص بر شارهای فصل مشترکی همرفتی و نفوذی، آشکارا نظیر یکدیگرند. اگرچه این روابط برای جریان آرام و خواص فیزیکی ثابت به دست آمدند، برای جریان متلاطم و خواص فیزیکی متغیر نیز سودمندند (نگاه کنید به مسئله ۲۲ ب.۳). نتایج به دست آمده برای انتقال جرم و گرما را می‌توان در دو معادله خلاصه کرد:

$$\theta = \frac{\phi}{R} = \frac{\phi}{e^{\phi} - 1} = \frac{\ln(1 + R)}{R} \quad (9-8.22)$$

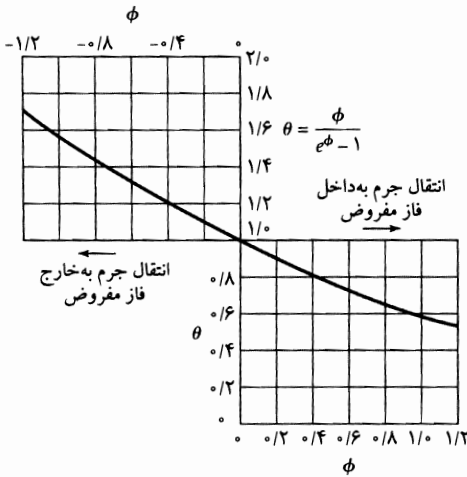
$$\Pi = \frac{e^{\phi\eta} - 1}{e^{\phi} - 1} = \frac{(1 + R)^{\eta} - 1}{R} \quad (\eta \leq 1) \quad (10-8.22)$$

معادله (۹-۸.۲۲) ضرایب تصحیح  $\theta_x$  و  $\theta_T$  را به دست می‌دهد که باید ضرایب  $k_{x,loc}$  و  $h_{loc}$  را در آن‌ها ضرب کرد تا ضرایب مربوط به آهنگ‌های بالای انتقال جرم خالص حاصل شوند. معادله (۱۰-۸.۲۲) توزیع غلظت و دما را نشان می‌دهد. مفهوم نمادهای به‌کاررفته را در جدول ۱-۸.۲۲ خلاصه کرده‌ایم.

جدول ۱-۸.۲۲ خلاصه کمیت‌های بدون بعدی که باید برای همه مدل‌های تشریح شده در بخش ۸.۲۲ به‌کار برد. روایت‌های مبتنی بر جرم در بخش‌های ۲.۲۰ و ۹.۲۲ پدیدار می‌شوند.

انتقال گرما		انتقال جرم	
$\theta =$ نسبت‌های شار		$R =$ ضرایب تصحیح	
$\phi =$ توزیع‌ها		$\Pi =$ ضرایب آهنگ	
$\eta =$ فاصله بدون بعد از جدار			
$\theta_T = \frac{h_{loc}^{\bullet}}{h_{loc}}$	$\theta_x = \frac{k_{x,loc}^{\bullet}}{k_{x,loc}}$	$\theta$	
$\phi_T = \frac{N_{A^{\bullet}} \bar{C}_{pA} + N_{B^{\bullet}} \bar{C}_{pB}}{h_{loc}}$	$\phi_x = \frac{N_{A^{\bullet}} + N_{B^{\bullet}}}{k_{x,loc}}$	$\phi$	
$R_T = \frac{(N_{A^{\bullet}} \bar{C}_{pA} + N_{B^{\bullet}} \bar{C}_{pB})(T_{\infty} - T)}{q}$	$R_x = \frac{(N_{A^{\bullet}} + N_{B^{\bullet}})(x_{A^{\bullet}} - x_{A\infty})}{N_{A^{\bullet}} - x_{A^{\bullet}}(N_{A^{\bullet}} + N_{B^{\bullet}})}$	$R$	
$\Pi_T = \frac{T - T_{\infty}}{T_{\infty} - T}$	$\Pi_x = \frac{x_A - x_{A^{\bullet}}}{x_{A\infty} - x_{A^{\bullet}}}$	$\Pi$	
$\eta_T = \frac{y}{\delta_T} = \frac{y}{k/h_{loc}}$	$\eta_x = \frac{y}{\delta_x} = \frac{y}{cD_{AB}/k_{x,loc}}$	$\eta$	

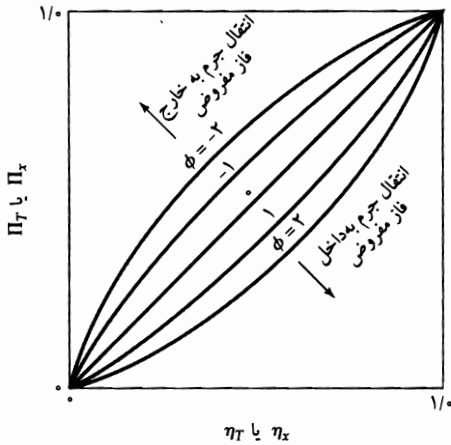
معادله (۹-۸.۲۲) به صورت ترسیمی در شکل ۲-۸.۲۲ نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که برای انتقال خالص  $A$  و  $B$  به داخل جریان ( $\phi$  مثبت)، ضریب انتقال کاهش می‌یابد، اما انتقال خالص  $A$  و  $B$  به خارج از جریان ( $\phi$  منفی) سبب افزایش ضرایب انتقال می‌شود.



شکل ۲-۸.۲۲ تغییر ضرایب انتقال با آهنگ انتقال جرم، به صورت حاصل از مدل فیلم (نگاه کنید به معادله (۹-۸.۲۲)).

بعضی از توزیع‌های نمونه حاصل از معادله (۱۰-۸.۲۲) را در شکل ۳-۸.۲۲ نشان داده‌ایم. در حد آهنگ‌های پایین انتقال جرم (یعنی  $\phi \rightarrow 0$  یا  $R \rightarrow 0$ )، معادله (۱۰-۸.۲۲) به صورت ساده  $\Pi = \eta$  درمی‌آید. مدل فیلم

ناحیه بیرون فیلم را به صورت کاملاً مخلوط تلقی می‌کند، اما توزیعی نتیجه می‌دهد که پس از  $\eta = 1$ ، تخت است.

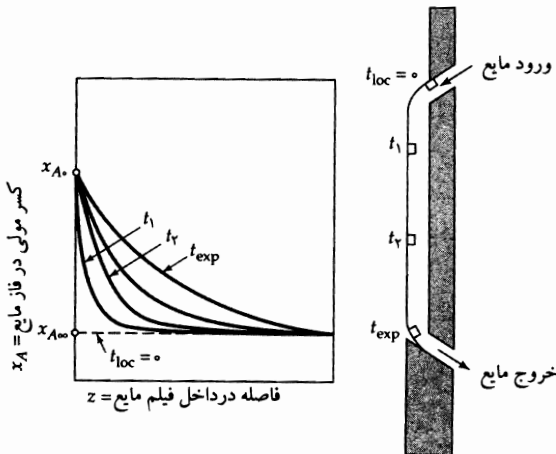


شکل ۳-۸.۲۲ توزیع‌های دما و غلظت در فیلم آرام، که با استفاده از مدل فیلم محاسبه شده‌اند (نگاه کنید به معادله (۳-۸.۲۲)).

### مدل نفوذ

سپس به سراغ ضریب انتقال در آهنگ‌های بالای انتقال جرم خالص در سیستم‌هایی می‌رویم که در آن‌ها پسای درخور اعتنایی در فصل مشترک وجود ندارد. قبلاً چندین سیستم از این نوع را بررسی کرده‌ایم: جذب گاز در فیلم مایع ریزان و از حباب بالارونده (بخش ۵.۱۸)، و تبخیر حالت ناپایا (بخش ۱.۲۰). این سیستم‌ها معمولاً باهم و تحت عنوان نظریه نفوذ بررسی می‌شوند.

در شکل ۴-۸.۲۲ یک سیستم فیلم ریزان نشان داده شده است. زمان حرکت از محل ورود مایع تا محل خروج مایع («زمان قرارگیری در معرض» انتقال) به اندازه کافی کوتاه هست که گونه نفوذکننده نتواند خیلی در مایع جلو برود. در چنین وضعیتی، می‌توان ضخامت فیلم ریزان را (از دیدگاه ریاضی) نامتناهی فرض کرد. سپس می‌توان از نتایج مثال ۱-۱.۲۰ استفاده کرد.



شکل ۴-۸.۲۲ نفوذ در فیلم مایع ریزان. در این شکل  $t_{exp}$  زمان کل در معرض قرارگیری جزء حجمی نمونه‌وار در نزدیکی سطح است.

معادله (۲۳-۱.۲۰) توزیع‌های غلظت را برای سیستم حالت ناپایای متناظر با آهنگ انتقال جرم بالا، نشان

می‌دهد، و معادله نظیر را می‌توان از روی توزیع‌های دما نوشت:

$$\Pi_x \equiv \frac{x_A - x_{A^*}}{x_{A\infty} - x_{A^*}} = \frac{\operatorname{erf}(\eta_x - \varphi_x) + \operatorname{erf}\varphi_x}{1 + \operatorname{erf}\varphi_x} \quad (۱۱-۸.۲۲)$$

$$\Pi_T \equiv \frac{T - T^*}{T_{\infty} - T^*} = \frac{\operatorname{erf}(\eta_T - \varphi_T) + \operatorname{erf}\varphi_T}{1 + \operatorname{erf}\varphi_T} \quad (۱۲-۸.۲۲)$$

در این جا  $\eta_T = y/\sqrt{4\alpha t}$  و  $\eta_x = y/\sqrt{4D_{AB}t}$  فواصل بدون بُعد از فصل مشترک‌اند، و  $\varphi$  در هر فرمول سرعت متوسط مولی بدون بُعد در فصل مشترک است:

$$\varphi_x = \frac{N_{A^*} + N_{B^*}}{c} \sqrt{\frac{t}{D_{AB}}} \quad \varphi_T = \frac{N_{A^*} + N_{B^*}}{c} \sqrt{\frac{t}{\alpha}} \quad (\text{ب، } ۱۳-۸.۲۲)$$

از این نتایج، و از تعریف‌های ضرایب انتقال در معادله‌های (۱-۸.۲۲) و (۲)، می‌توان ضرایب آهنگ  $\phi$ ، نسبت‌های شار  $R$  و ضرایب تصحیح  $\theta$  را، که در بخش فرعی قبل تعریف شدند، به دست آورد:

$$\phi = \sqrt{\pi}\varphi \quad (۱۴-۸.۲۲)$$

$$R = \left(1 + \operatorname{erf}\frac{\phi}{\sqrt{\pi}}\right) \phi \exp\left(\frac{\phi^2}{\pi}\right) \quad \theta = \frac{\exp(-\phi^2/\pi)}{1 + \operatorname{erf}(\phi/\sqrt{\pi})} \quad (۱۶، ۱۵-۸.۲۲)$$

با استفاده از تعریف‌های معادله‌های (۱-۸.۲۲) و (۲)، و توزیع‌های ارائه شده به صورت معادله‌های (۱۱-۸.۲۲) و (۱۲)، می‌توان عبارتهایی نیز برای بیان ضرایب انتقال در آهنگ‌های پایین انتقال جرم خالص به دست آورد:

$$k_{x,\text{loc}} = c\sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi t}}; \quad h_{\text{loc}} = \rho\hat{C}_p\sqrt{\frac{\alpha}{\pi t}} \quad (۱۸، ۱۷-۸.۲۲)$$

ضرایب متناظر در آهنگ‌های بالای انتقال جرم خالص را می‌توان با ضرب کردن در ضریب تصحیح معادله (۱۶-۸.۲۲) به دست آورد. از دو معادله اخیر، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$h_{\text{loc}} = k_{x,\text{loc}}\tilde{C}_p\left(\frac{\alpha}{D_{AB}}\right)^{1/2} \quad (۱۹-۸.۲۲)$$

رابطه‌ای مشابه، با نمای  $\frac{2}{3}$  (به جای  $\frac{1}{2}$ ) از روابط چیلتون-کولبورن به دست می‌آید که با معادله‌های (۲۲-۳ تا ۲۵) نشان داده شده‌اند. این معادله‌ها برای جریان در مجاورت مرزهای صلب معتبرند، حال آن‌که معادله (۱۹-۸.۲۲) به سیستم‌های سیال-سیال مربوط است که در فصل مشترک آن‌ها گرادیان سرعت وجود ندارد.

تناسب  $k_{x,\text{loc}}$  با ریشه دوم ضریب نفوذ، که به صورت معادله (۱۷-۸.۲۲) داده شد، برای فاز مایع در چندین سیستم انتقال جرم گاز-مایع، از جمله ستون‌های جدار خیس کوتاه، ستون‌های پر شده، و مایعات در اطراف حباب‌های گاز در موارد خاص، به تجربه تأیید شده‌است. مدل نفوذ در مورد جذب همراه با واکنش‌های شیمیایی نیز به کار بسته شده‌است (نگاه کنید به مثال ۲-۱.۲۰).

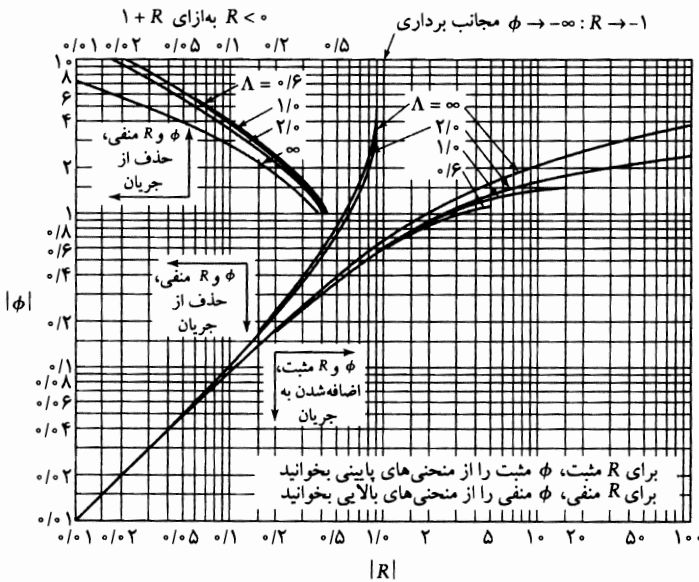
#### مدل لایه مرزی صفحه تخت

انتقال حالت‌پایا در لایه مرزی در طول صفحه‌ای تخت برای سیالی با خواص فیزیکی ثابت در بخش ۲.۲۰ شرح داده شد. عبارت کلی برای توزیع‌ها،  $\Pi(\eta, \Lambda, K)$  به صورت معادله (۲۰-۴۳) ارائه شد. در آن معادله

$\eta = y\sqrt{v_{\infty}/2\nu x}$  مختص مکان بدون بُعد است که نسبت به صفحه اندازه‌گیری می‌شود،  $\Lambda$  گروه خاصیت فیزیکی است (یعنی ۱، Pr، یا Sc)، و  $K = (v_{y_0}/v_{\infty})\sqrt{2v_{\infty}x/\nu}$  شار جرمی خالص بدون بُعد از صفحه است. یک بار دیگر نمادگذاری تعریف شده در جدول ۸.۲۲-۱ را به کار می‌گیریم. با استفاده از محاسبه لایه مرزی داریم:

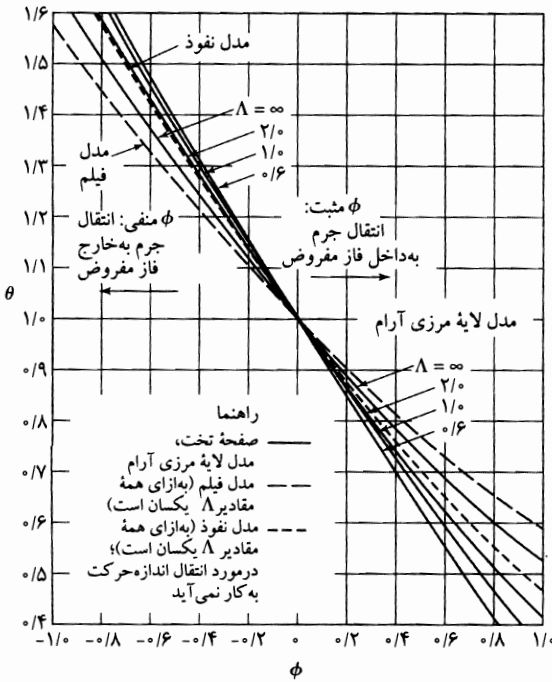
$$R = \frac{K\Lambda}{\Pi'(\circ, \Lambda, K)} \quad \phi = \frac{K\Lambda}{\Pi'(\circ, \Lambda, \circ)} \quad \theta = \frac{\Pi'(\circ, \Lambda, K)}{\Pi'(\circ, \Lambda, \circ)} \quad (۲۲-۲۱, ۲۰-۸.۲۲)$$

در محاسبه لایه مرزی فرض شد که ظرفیت‌های گرمایی دو گونه برابر است. شارهای جرم، گرما، و اندازه حرکت، برای صفحه تخت، در شکل ۵.۸.۲۲ نشان داده شده‌اند. در دو شکل زیر، یعنی شکل‌های ۶-۸.۲۲ و ۷، دو نمودار ترسیم شده است، که ضرایب تصحیح  $\theta$  را برای مدل فیلم، مدل نفوذ، و مدل لایه مرزی باهم مقایسه می‌کنند. مدل لایه مرزی نوعی وابستگی به  $\Lambda$  دارد که در مدل‌های دیگر مشاهده نمی‌شود، زیرا این مدل شامل اثر توزیع سرعت مماسی بر توزیع‌های غلظت و دماست. مدل فیلم کم‌ترین وابستگی ضرایب انتقال به آهنگ انتقال جرم خالص را پیش‌بینی می‌کند.

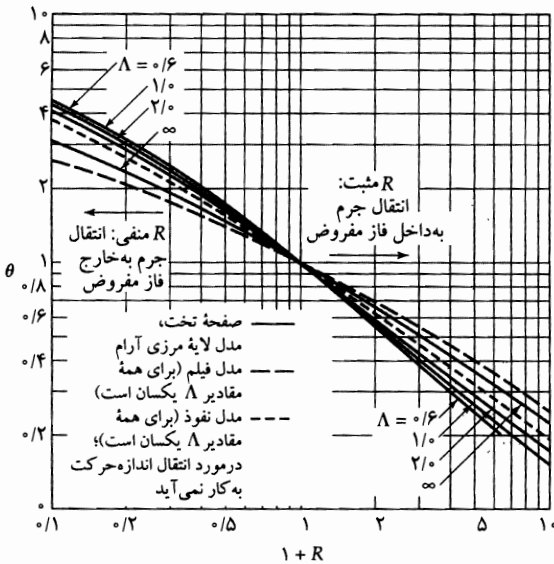


شکل ۵.۸.۲۲ شارهای گرما و جرم بین صفحه‌های تخت و لایه مرزی آرام.

ضرایب تصحیحی که با  $\Lambda$  تفاوت چشم‌گیری دارند، معمولاً هنگامی پدیدار می‌شوند که  $\phi$  یا  $R$  برحسب  $T$  یا از مرتبه بزرگی  $\Lambda$  یا بیش‌تر باشند؛ نگاه کنید به شکل‌های ۶-۸.۲۲ و ۷، و رابطه  $\theta = \phi/R$ . با این معیارها، شارهای جرمی فصل مشترکی خالص بزرگ، وقتی انتقال جرم به‌شیوه مکانیکی تقویت می‌شود، مانند فراسازگی (مثال ۵.۸.۲۲)، و سرمایش تعریفی (مسئله ۲۰ ب.ج)، متداول‌اند. این شارهای جرمی خالص بزرگ در تخییر، چگالش، ذوب، و سایر تغییرحالت‌ها، و در واکنش‌های شیمیایی ناهمگن، وقتی با اختلاف فاحش دما یا شدت تابش متناظر برای انتقال گرمای نهان یا انرژی واکنش همراه باشند، نیز مشاهده می‌شود. شارهای خالص متعادل‌تر، و ضرایب تصحیح نزدیک به واحد، در فرایندهای جداسازی چندمرحله‌ای و ستون‌های پر شده مشاهده می‌شوند، که در آن‌ها اختلاف دما و ترکیب شیمیایی در یک مرحله از جداسازی یا یک مقطع جریان معمولاً کم است. نسبت شار انرژی  $R_T$ ، چنان‌که در مثال‌های ۲-۸.۲۲ و ۳ نشان داده می‌شود، معیاری مهم برای ارزیابی تصحیحات شار خالص است.



شکل ۸.۲۲-۶ تغییر ضرایب انتقال جرم با آهنگ انتقال، طبق پیش‌بینی مدل‌های مختلف. خط  $\Lambda \rightarrow \infty$  درمورد نواحی لایه مرزی جدانشده حالت پایا، روی سطوح صلب، صرف نظر از شکل هندسی آن‌ها، صادق است.



شکل ۸.۲۲-۷ تغییر ضرایب انتقال با نسبت شار  $R$  طبق پیش‌بینی مدل‌ها، مختلف. خط  $\Lambda \rightarrow \infty$  درمورد نواحی لایه مرزی جدانشده حالت پایا، روی سطوح صلب هموار، صرف نظر از شکل هندسی آن‌ها، صادق است.

**مثال ۸.۲۲-۱**

تبخیر سریع مایع از سطحی مسطح حلال  $A$  از پوشش لاک روی سطحی مسطح که در معرض جریان می‌باشد، قرار دارد، تیخیر می‌شود. در نقطه‌ای مفروض روی سطح، ضریب انتقال جرم در فاز گازی  $k_{x,loc}$ ، به ازای خواص متوسط سیال،



به صورت  $1 \text{ lb-mole/hr} \cdot \text{ft}^2$  داده شده است؛ عدد اشمیت  $Sc = 2.0$ . ترکیب فصل مشترکی گاز عبارت است از:  $x_{A_0} = 0.8$ . آهنگ موضعی تبخیر را با استفاده از (الف) مدل فیلم ساکن، (ب) مدل لایه مرزی صفحه تخت، و (ج) ضریب انتقال جرم تصحیح نشده  $k_{x,loc}$  تخمین برزید.

حل

(الف) چون  $B$  چگالش‌ناپذیر است،  $N_{B_0} = 0$ . با کاربرد معادله (۷-۸.۲۲) (که همانند  $1 + R_x = \exp \phi_x$  است)، در مورد فاز گازی، نتیجه می‌شود:

$$1 + \frac{(N_{A_0} + 0)(0.8 - 0)}{N_{A_0} - 0.8(N_{A_0} + 0)} = \exp\left(\frac{N_{A_0} + 0}{0.1}\right) \quad (23-8.22)$$

از این معادله، پس از گرفتن لگاریتم، نتیجه می‌شود:

$$N_{A_0} = 0.1 \ln(1 + 4.0) = 0.161 \text{ lb-mole/hr} \cdot \text{ft}^2 \quad (24-8.22)$$

که نتیجه مربوط به مدل فیلم ساکن است. این نتیجه متناظر است با ضریب تصحیح  $\theta_x = 0.4$ .

(ب) مانند قسمت (الف)،  $R_x = 4.0$ . سپس از شکل ۵-۸.۲۲، به ازای  $R_x = 4.0$  و  $\Lambda_x = 2.0$ ، نتیجه می‌شود که  $\phi_x = 1.3$  با قرار دادن  $N_{B_0} = 0$  در فرمول  $\phi_x$  در جدول ۱-۸.۲۲، نتیجه می‌شود:

$$N_{A_0} = k_{x,loc} \phi_x = (0.1)(1.3) = 0.13 \text{ lb-mole/hr} \cdot \text{ft}^2 \quad (25-8.22)$$

که نتیجه حاصل از مدل لایه مرزی صفحه تخت است. ضریب تصحیح متناظر  $\theta_x$  برابر  $0.33$  است.

(ج) اگر از ضریب انتقال جرم  $k_{x,loc}$  بدون تصحیح شار فصل مشترکی خالص استفاده شود، از معادله (۵-۱.۲۲)، با  $N_{B_0} = 0$  نتیجه می‌شود:

$$N_{A_0} - 0.8(N_{A_0} + 0) = (0.1)(0.8 - 0) \quad (26-8.22)$$

که در آن  $N_{A_0} = 0.4 \text{ lb-mole/hr} \cdot \text{ft}^2$ . این نتیجه بسیار بالاست و گویای این نکته است که در چنین شرایطی ضریب تصحیح برای شار مولی خالص اهمیت دارد. جواب لایه مرزی که در قسمت (ب) به دست آمد باید دقیق باشد، هرگاه جریان آرام باشد و تغییر خواص فیزیکی چندان شدید نباشد.

### مثال ۸.۲۲

ضرایب تصحیح در تبخیر قطره

با استفاده از ضرایب تصحیح  $\theta_x$  و  $\theta_T$  از مدل فیلم، و از مدل لایه مرزی صفحه تخت، نتایج مثال ۱-۳.۲۲ را برای شار مولی خالص تنظیم کنید.

حل

در مثال ۱-۳.۲۲، نسبت شار مولی  $R_x$  در هر نقطه از سطح قطره برابر است با:

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{(N_{A_0} + N_{B_0})(x_{A_0} - x_{A_{\infty}})}{N_{A_0} - x_{A_0}(N_{A_0} + N_{B_0})} \\ &= \frac{(N_{A_0} + 0)(0.247 + 0)}{N_{A_0} - 0.247(N_{A_0} + 0)} = \frac{0.247}{1 - 0.247} = 0.253 \end{aligned} \quad (27-8.22)$$

از معادله (۹-۸.۲۲) (مدل فیلم) یا شکل ۷-۸.۲۲ (مدل لایه مرزی صفحه تخت)، ضریب تصحیح پیش‌بینی شده  $\theta_x$  در همه نقاط روی قطره، برابر  $0.99$  به دست می‌آید. بنابراین آهنگ انتقال جرم تصحیح شده (از طریق تنظیم معادله (۳۱-۳.۲۲)) عبارت است از:

$$\begin{aligned} W_{A^0} &= \theta_x k_{xm} \pi D^2 \frac{x_{A^0} - x_{A\infty}}{1 - x_{A^0}} = (0.987)(2.70 \times 10^{-7}) \\ &= 2.66 \times 10^{-7} \text{ g-mole/s} \cdot \text{cm}^2 \end{aligned} \quad (28-8.22)$$

این نتیجه، با نتیجه حاصل از مثال ۱-۳.۲۲، فقط اندکی تفاوت دارد. بنابراین فرض آهنگ انتقال جرم کوچک، تحت شرایط مفروض رضایت‌بخش است.

### مثال ۳-۸.۲۲

عملکرد جاب‌خیس تصحیح‌شده برای آهنگ انتقال جرم با استفاده از مدل فیلم ساکن، تحلیل مثال ۲-۳.۲۲ را تعمیم دهید تا ضرایب تصحیح آهنگ انتقال جرم خالص را نیز شامل شود.

حل

با بازنویسی موازنه انرژی، معادله (۳۲-۳.۲۲)، برای هر نقطه روی فتیله، در صورت متناهی بودن آهنگ انتقال جرم، نتیجه می‌شود:

$$N_{A^0} \Delta \tilde{H}_{A,\text{vap}} = h_{1,\text{loc}}^{\bullet} (T_{\infty} - T_0) \quad (29-8.22)$$

با ضرب کردن هردو طرف در  $(\Delta \tilde{H}_{A,\text{vap}} h_{1,\text{loc}}^{\bullet}) / \tilde{C}_{pA}$ ، و با توجه به این که  $N_{B^0} = 0$ ، نتیجه می‌شود:

$$R_T = \frac{N_{A^0} \tilde{C}_{pA}}{h_{1,\text{loc}}^{\bullet}} = \frac{\tilde{C}_{pA} (T_{\infty} - T_0)}{\Delta \tilde{H}_{A,\text{vap}}} \quad (30-8.22)$$

هرگاه  $T_0$ ،  $T_{\infty}$  و  $p$  معلوم باشند، عضو سمت راست این معادله را می‌توان به آسانی محاسبه کرد. سپس عبارت  $\phi = \ln(1 + R)$  را برای انتقال جرم و انتقال گرما می‌نویسیم و این نکته را نیز در نظر می‌گیریم که  $N_{B^0} = 0$ :

$$\frac{N_{A^0} \tilde{C}_{pA}}{h_{1,\text{loc}}^{\bullet}} = \ln(1 + R_T); \quad \frac{N_{A^0}}{k_{x,\text{loc}}} = \ln(1 + R_x) \quad (32, 31-8.22)$$

با حل هردو معادله برحسب  $N_{A^0}$  و برابر گرفتن عبارت‌های حاصل، نتیجه می‌شود:

$$\ln(1 + R_x) = \frac{h_{1,\text{loc}}}{k_{x,\text{loc}} \tilde{C}_{pA}} \ln(1 + R_T) \quad (33-8.22)$$

سپس با جایگزین کردن عبارت‌هایی به جای  $R_x$  و  $R_T$  از جدول ۱-۸.۲۲، نتیجه می‌شود:

$$\ln\left(1 + \frac{x_{A^0} - x_{A\infty}}{1 - x_{A^0}}\right) = \frac{h_{1,\text{loc}}}{k_{x,\text{loc}} \tilde{C}_{pA}} \ln\left(1 + \frac{\tilde{C}_{pA} (T_{\infty} - T_0)}{\Delta \tilde{H}_{A,\text{vap}}}\right) \quad (34-8.22)$$

این معادله نشان می‌دهد که  $x_{A^0}$  و  $T_0$  روی سطح فتیله ثابت خواهند بود، هرگاه  $h_{1,\text{loc}} / (k_{x,\text{loc}} \tilde{C}_{pA})$  ثابت و در نتیجه برابر با  $h_m / (k_{xm} \tilde{C}_{pA})$  باشد. فرض می‌کنیم این عبارت ثابت است تا کار ساده‌تر شود. چنین فرضی،

به‌ویژه برای سیستم آب-هوا که در آن Pr و Sc تقریباً برابرند، رضایت‌بخش است. با این جایگزینی، معادله (۳۴-۸.۲۲) چنین نوشته می‌شود:

$$\ln \left( 1 + \frac{x_{A^0} - x_{A\infty}}{1 - x_{A^0}} \right) = \frac{h_m}{k_{xm} \tilde{C}_{pA}} \ln \left( 1 + \frac{\tilde{C}_{pA}(T_\infty - T_0)}{\Delta \tilde{H}_{A,vap}} \right) \quad (35-8.22)$$

در آهنگ‌های پایین انتقال جرم، این جواب دقیقاً به معادله (۳۵-۳.۲۲) ساده می‌شود. مقادیر زیر در مورد مسئله عددی مثال ۲-۳.۲۲ صادق‌اند:

$$x_{A^0} = 0.0247$$

$$\tilde{C}_{pA} = 1.03 \text{ Btu/lb-mole} \cdot \text{F} \quad 105^\circ\text{F} \text{ برای بخار آب در دمای } 105^\circ\text{F}$$

$$h_m/k_{xm} = 0.93 \text{ Btu/lb-mole} \cdot \text{F} \quad ((25-3.22) \text{ معادله})$$

$$\frac{\tilde{C}_{pA}(T_\infty - T_0)}{\Delta \tilde{H}_{A,vap}} = \frac{(1.03)(140 - 70)}{18900} = 0.0297$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله (۳۵-۸.۲۲)، نتیجه می‌شود:

$$\ln \left( 1 + \frac{0.0247 - x_{A\infty}}{1 - 0.0247} \right) = \frac{0.93}{1.03} \ln(1.0297) = 0.0216 \quad (36-8.22)$$

پس از حل این معادله، داریم:

$$x_{A\infty} = 0.0034 \quad (37-8.22)$$

این نتیجه، با نتیجه حاصل از مقدار  $0.0033$  که در مثال ۲-۳.۲۲ به‌دست آمد، فقط تفاوت اندکی دارد و حذف ضرایب تصحیح در شرایط مفروض را توجیه می‌کند.

بررسی‌های عددی نشان می‌دهد که معادله ساده (۳۴-۳.۲۲) تقریب خوبی از معادله (۳۵-۸.۲۲) برای سیستم هوا-آب، تحت همه شرایط ممکن حباب‌خیز، ارائه می‌دهد. معادله‌های (۳۲-۳.۲۲) و (۳۳)، تقریباً به یک اندازه، آهنگ انتقال جرم را بالا تخمین می‌زنند و هنگامی که این معادله‌ها باهم ترکیب شوند، خطاها تا حدود زیادی جبران می‌شوند.

### مثال ۴-۸.۲۲

مقایسه مدل‌های فیلم و نفوذ برای تبخیر ناپایا در لوله طویل آثار انتقال جرم خالص را برای سیستم تبخیر توصیف‌شده در مثال ۱-۱.۲۰، با پیش‌بینی‌های (الف) مدل نفوذ تعمیم‌یافته، و (ب) مدل فیلم ساکن معرفی‌شده در بالا، مقایسه کنید. محاسبه دومی به حل حالت شبه‌پایای این سیستم وابسته به زمان منتهی می‌شود.

حل

کار را با توجه به این نکته آغاز می‌کنیم که برای این سیستم  $x_{A\infty} = 0$  و  $N_{B^0} = 0$ . از معادله (۱-۸.۲۲) (الف) و جدول ۱-۸.۲۲ نتیجه می‌شود که:

$$N_{A^0} = \theta_x k_x \frac{x_{A^0} - 0}{1 - x_{A^0}} \quad (38-8.22)$$

بنابراین ضریب تصحیح  $\theta_x$  نسبت شار تصحیح‌شده برای انتقال جرم خالص، به شار تصحیح‌نشده است.

(الف) مدل نفوذ. مشاهده می‌کنیم که با مشتق‌گیری از معادله (۱۶-۱.۲۰) و بازنویسی نتیجه برحسب  $x_A$  و  $z$  می‌توان گرادینان غلظت در سطح مایع را به دست آورد. نتیجه چنین است:

$$\left. \frac{\partial x_A}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-\varphi^2)}{1 + \operatorname{erf} \varphi} \frac{x_{A0}}{\sqrt{4D_{AB}t}} \quad (۳۹-۸.۲۲)$$

در صورتی که انتقال جرم خالص قابل چشم‌پوشی باشد،  $\varphi = 0$ . بنابراین نسبت شار جرمی در حضور انتقال جرم خالص، به شار جرمی در نبود انتقال جرم خالص، برابر است با:

$$\theta_x = \frac{\exp(-\varphi^2)}{1 + \operatorname{erf} \varphi} \quad (۴۰-۸.۲۲)$$

جدول ۸.۲۲-۱ مقایسه مدل‌های فیلم و نفوذ.

$x_{A0}$	$\theta_x$ حاصل از مدل نفوذ (معادله ۴۱-۸.۲۲)	مدل فیلم (معادله ۴۲-۸.۲۲)
۰٫۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰
۰٫۲۵	۰٫۸۳۱	۰٫۸۶۳
۰٫۵۰	۰٫۶۳۴	۰٫۶۹۳
۰٫۷۵	۰٫۳۹۱	۰٫۴۶۲
۱٫۰۰	۰٫۱۰۰	۰٫۱۰۰

که با معادله‌های (۱۴-۸.۲۲) و (۱۶) در توافق است. برای به دست آوردن  $\theta_x$  به صورت تابعی از  $x_{A0}$ ، می‌توان از معادله (۷-۸.۲۲)، یا معادله (۱۷-۱.۲۰) استفاده کرد و نوشت:

$$\theta_x = (1 - x_{A0})\psi(x_{A0}) \quad (\text{مدل نفوذ}) \quad (۴۱-۸.۲۲)$$

که در آن  $\psi(x_{A0})$  کمیتی است که بلافاصله پس از معادله (۲۲-۱.۲۰) تعریف شد و در جدول ۱-۱.۲۰ آمده است.

(ب) مدل فیلم ساکن. نتیجه مدل فیلم را می‌توان از معادله (۹-۸.۲۲)، به صورت  $\theta = (1/R) \ln(1 + R)$  به دست آورد تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\theta_x = \frac{1 - x_{A0}}{x_{A0}} \ln \left( \frac{1}{1 - x_{A0}} \right) \quad (\text{مدل فیلم}) \quad (۴۲-۸.۲۲)$$

مقادیر عددی برای هر دو مدل در جدول ۲-۸.۲۲ و هم‌چنین در شکل ۷-۸.۲۲ آمده است.

مشاهده می‌شود که مدل نفوذ، در مقایسه با مدل فیلم، ضریب تصحیح  $\theta_x$  بزرگ‌تری را برای انتقال جرم خالص نتیجه می‌دهد. علت این است که جریان خالص لایه مرزی را ضخیم می‌کند، و این اثری است که مدل فیلم آن را در نظر نمی‌گیرد. هم‌چنین می‌توان به این نکته توجه کرد که این مثال کاربرد واقع‌گرایانه مدل نفوذ است، زیرا غلظت ماده حل‌شده بر خواص فیزیکی این سیستم هم‌دمای ساده، اثر اندکی دارد. در مثال بعد با وضعیتی بسیار متفاوت روبه‌رو می‌شویم.

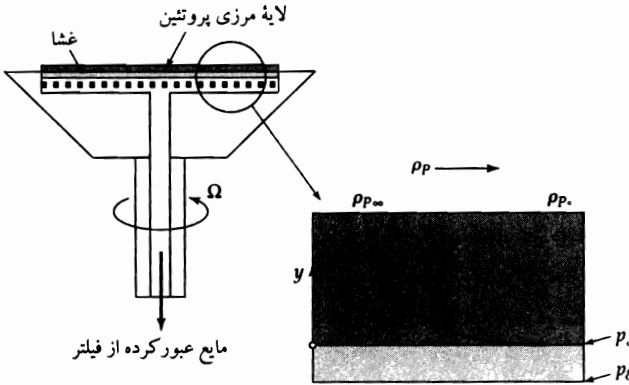
مثال ۸.۲۲

قطبش غلظتی در فراصاف‌سازی

فراصاف‌سازی پروتئین‌ها فرایند غلظتی است، که در آن آب یک محلول پروتئین آبی با فشار از غشایی ناتراوا نسبت به پروتئین، اما تراوا نسبت به آب و مواد محلول کوچکی از قبیل نمک‌های غیرآلی، بیرون رانده می‌شود. سپس پروتئین در یک لایهٔ قطبش، یا ناحیه‌ای با غلظت پروتئین بالا در مجاورت سطح غشا، مطابق شکل ۸-۸.۲۲ انباشته می‌شود. مطلوب است تعیین رابطهٔ بین سرعت تراوش و اختلاف فشار در دو سوی غشا. اثر انتقال جرم خالص بر ضریب انتقال جرم برای پروتئین را توصیف کنید. فرض کنید که غشا در برابر پروتئین کاملاً ناتراواست، به طوری که انتقال خالص پروتئین در سطح غشا صفر است.

حل

برای ساده‌تر شدن کار، دیسک چرخانی مطابق شکل ۸-۸.۲۲ را در نظر می‌گیریم که غلظت پروتئین برای آن فقط تابع فاصله  $y$  از سطح دیسک است و به مکان شعاعی وابسته نیست<sup>۵</sup> (نگاه کنید به مسئله ۱۹ د.۴). اما باید وابستگی چگالی، ویسکوزیته، و ضریب نفوذ پروتئین-آب را به غلظت پروتئین در نظر بگیریم و به مفهوم فشار اسمزی هم نیاز خواهیم داشت.<sup>۶</sup>



شکل ۸-۸.۲۲ فراصاف‌ساز دیسک چرخان

اساس راه‌حل ما را مفهوم تراوایی هیدرولیکی غشای صاف‌ساز تشکیل می‌دهد:

$$v_{\delta} = K_H(p_0 - p_{\delta} - \pi) \quad (۴۳-۸.۲۲)$$

در این رابطه  $v_{\delta}$  سرعت یا شار حجمی حلالی است که سطح پایین دستی غشا را ترک می‌کند. معادله (۴۳-۸.۲۲)  $K_H$  را تعریف می‌کند که تراوایی هیدرولیکی غشاست. کمیت‌های  $p_{\delta}$  و  $p_0$  فشارهای هیدرودینامیکی وارد به غشا، مطابق شکل ۸-۸.۲۲، هستند و  $\pi$  فشار اسمزی در سطح بالادستی غشاست. گنجاندن  $\pi$  به معنای به رسمیت شناختن این نکته است که در واقع پتانسیل ترمودینامیکی کل محرک انتقال و عبور از غشاست (در فصل ۲۴ این نکته را به تفصیل شرح می‌دهیم). در چنین وضعیتی، سرعت فصل مشترکی پروتئین صفر است، به طوری که موازنهٔ جرم حلال در لایهٔ مرزی پروتئین نتیجه می‌دهد:

$$\rho^{(S)} v_{\delta} = -(\rho_S v_{Sy})|_{y=0} \quad (۴۴-۸.۲۲)$$

5. D. R. Olander, *J. Heat Transfer*, **84**, 185 (1972).

6. R. J. Silbey and R. A. Alberty, *Physical Chemistry*, 3rd edition, Wiley, New York (2001), P. 206.

که در آن  $y$  فاصله از سطح بالادستی غشا در داخل لایه مرزی پروتئین است. کمیت  $\rho^{(S)}$  چگالی حلال خالص، و  $\rho_S = \rho_S|_{y=0}$  و  $v_{S0} = v_{S0}|_{y=0}$  غلظت جرمی و سرعت حلال در سطح بالادستی غشاست.

فشار اسمزی  $\pi$  تابعی از غلظت پروتئین  $\rho_P$  است و در مسئله ۲۲ ج ۱ نمونه‌ای از آن را ارائه می‌دهیم. سپس می‌بینیم که شار آب عبوری از غشا به غلظت پروتئین در سطح غشا و هم‌چنین به افت فشار هیدرودینامیکی در غشا وابسته است. این غلظت را، به‌نوبه خود، با استفاده از شرط ناتراوایی غشا برای پروتئین و تعریف ضریب انتقال جرم، می‌توان به  $v_\delta$  مربوط کرد. در این صورت در  $y = 0$ ، ناتراوایی غشا در برابر پروتئین را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$n_{Py} = 0 = K_\rho^{\circ}(\rho_{P0} - \rho_{P\infty}) + \omega_{P0}(\theta + \rho_{S0}v_{S0}) \quad (45-8.22)$$

که در آن  $K_\rho^{\circ}$  به تناظر با  $k_c^{\circ}$  تعریف شده است. سپس از ترکیب با معادله (۴۴-۸.۲۲) نتیجه می‌شود:

$$\rho^{(S)}v_\delta = k_\rho^{\circ}(\rho_{P0} - \rho_{P\infty})/\omega_{P0} \quad (46-8.22)$$

اکنون می‌توان این معادله را حل کرد و سرعت عبور مایع از فیلتر را به‌دست آورد:

$$v_\delta = k_\rho\theta \left( \frac{\rho_0}{\rho^{(S)}} \right) \left( 1 - \frac{\rho_{P\infty}}{\rho_{P0}} \right) \quad (47-8.22)$$

در این رابطه  $\theta = k_\rho^{\circ}/k_\rho$  و  $\rho_0 = \rho_{P0} + \rho_{S0}$  ضریب تصحیح انتقال جرم، نظیر  $\theta_x$  است که اینک باید آثار تغییر خاصیت، هم‌چنین تصحیح سرعت خالص ارائه شده در جدول ۱-۸.۲۲ را نیز شامل باشد. در دنباله مطلب این کمیت را تشریح خواهیم کرد (نگاه کنید به معادله (۴۸-۸.۲۲)). جمله  $\rho_0$  چگالی محلول در سطح بالادستی غشاست. حال می‌توانیم کمیت‌های مطلوب،  $v_\delta$  و اختلاف فشار در دو طرف غشا را محاسبه کنیم، هرگاه درباره خواص تعادلی و انتقالی اطلاعات کافی داشته باشیم. غلظت پروتئین در حال تقرب به غشا،  $\rho_{P\infty}$  را معلوم می‌گیریم، و برای راحتی، کار خود را با انتخاب مقادیری برای غلظت پروتئین  $\rho_P$  در سطح غشا، درگستره بین  $\rho_{P\infty}$  و حد انحلال‌پذیری پروتئین آغاز می‌کنیم:

۱. به‌ازای هر مقدار انتخاب شده برای  $\rho_{P0}$ ، می‌توان مقدار متناظر  $v_\delta$  را از معادله (۴۷-۸.۲۲)، با قراردادن مقادیر مناسب به‌جای  $k_\rho$  و  $\theta$ ، محاسبه کرد. این مقادیر محاسبه فشار اسمزی  $\pi$  با استفاده از رابطه تعادل مناسب را نیز امکان‌پذیر می‌کنند.

۲. سپس می‌توان اختلاف فشار در دو طرف غشا را، که برای ایجاد این جریان لازم است، از معادله (۴۳-۸.۲۲) و مقداری مناسب برای  $K_H$  به‌دست آورد.

تأثیر شدید غلظت پروتئین بر خواص سیستم به‌این‌معناست که جواب را باید به‌شیوه عددی به‌دست آورد. در این‌جا به خلاصه کردن نتایج کوزینسکی و لایت فوت<sup>۷</sup> در مورد آلومین سرم گاوی اکتفا می‌کنیم؛ آن‌ها نخستین کسانی بودند که چنین محاسباتی را انجام دادند و به‌نظر می‌رسد هنوز هم بهترین سند را ارائه داده‌اند. در نوشته آن‌ها نشان داده شده است که ضریب انتقال جرم مؤثر را می‌توان به‌صورت حاصل ضرب دو عامل، یکی برای منظور کردن آثار غلظت و دیگری برای به‌حساب آوردن اثر اضافی تغییرات خواص، بیان کرد:

$$\theta = \theta_c\theta_p \quad (48-8.22)$$

7. A. A. Kozinski, PhD thesis, University of Wisconsin (1971); A. A. Kozinski and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **18**, 1030-1040 (1972).

که در آن، روی فضای پارامتری مورد بررسی، داریم:

$$\theta_c = 1/6 \left( \frac{\rho P_0}{\rho P_\infty} \right)^{1/3}; \quad \theta_p = D_{rel}^{2/3} \left( \frac{1}{\nu} \right)_{rel}^{1/3} \quad (50, 49-8.22)$$

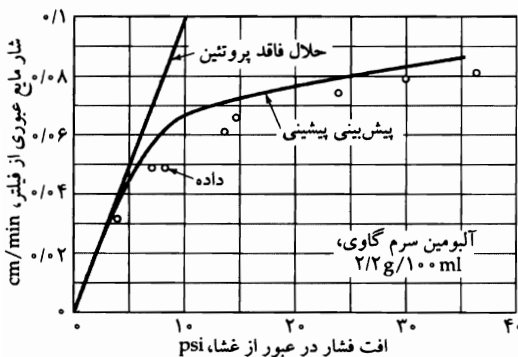
$$D_{rel} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{D_{PS_0}}{D_{PS_\infty}} \right); \quad \left( \frac{1}{\nu} \right)_{rel} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{\nu_\infty}{\nu} \right) \quad (52, 51-8.22)$$

معادله‌های (۴۹-۸.۲۲ تا ۵۲) را باید معادله‌های تجربی تلقی کرد. معادله (۴۷-۸.۲۲)  $v_8$  را، به‌ازای ترازهای قطبش کم، بالا پیش‌بینی می‌کند، اما در چنین وضعیتی اثر فشار اسمزی بر جریان اندک است. اندیس «rel» نشان‌دهنده «مقدار خاصیت موردنظر در سطح بالادستی غشا» ( $y = 0$ ) نسبت به مقدار آن در جریان آزاد ( $y \rightarrow \infty$ ) است. ضریب انتقال جرم در حد انتقال جرم آهسته و تغییرات اندک خاصیت، به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$Sh_m = Sh_{loc} = \frac{k_p L}{D_{PS_\infty}} = 0.6205 \left( \frac{L^2 \Omega}{\nu_\infty} \right)^{1/2} \left( \frac{\nu_\infty}{D_{PS_\infty}} \right)^{1/3} \quad (53-8.22)$$

که در آن  $L$  قطر دیسک و  $\Omega$  آهنگ چرخش برحسب رادیان بر واحد زمان است. عدم وابستگی آهنگ انتقال جرم به‌اندازه دیسک علت مطلوبیت این شکل هندسی برای بررسی‌های دقیق انتقال جرم است. کوزینسکی ولایت‌فوت<sup>۷</sup> سایر شکل‌های هندسی را نیز به‌اختصار بررسی کرده‌اند.

مقایسه پیش‌بینی‌های پیشینی با استفاده از مدل بالا، با داده‌های تجربی در شکل ۹-۸.۲۲ نشان داده شده‌است؛ در این شکل مشاهده می‌شود که این دو توافق خوبی دارند. این توافق خوب تاحدودی از آن‌جا ناشی می‌شود که مولکول‌های آلومین رفتاری شبیه ذرات تراکم‌ناپذیر در قدرت یونی حلال بالا دارند که داده‌ها مربوط به آن‌هاست. به‌علاوه، می‌توان مشاهده کرد که آثار اسمزی در زیر افت فشارهایی در حدود ۵ psi قابل‌چشم‌پوشی‌اند؛ در این‌جا رفتار پیش‌بینی‌شده از رفتار حلال عاری از پروتئین، اساساً آب، قابل‌تشخیص است. فقط در این ناحیه بی‌اهمیت است که معادله (۴۸-۸.۲۲) قابل‌اعتماد نیست. جزئیات محاسبات در مسئله ۲۲-ج ۱ مطرح می‌شود.



شکل ۹-۸.۲۲ فراساف‌سازی پروتئین با استفاده از دیسکی که با سرعت ۲۷۳ rpm می‌چرخد.

اثر افزایش اختلاف فشار در لایه مرزی پروتئین، با اثر آن در مورد غشایی غیرگزیننده، نسبتاً متفاوت است. ابتدا لایه مرزی، چنان‌که انتظار می‌رود، نازک‌تر می‌شود و ضریب انتقال جرم،  $k_p^*$ ، افزایش می‌یابد. اما با افزایش بیش‌تر اختلاف فشار، ضخامت لایه مرزی،  $k_p^*$  و  $\theta_c$ ، هر سه به‌سمت حدهای مجانبی میل می‌کنند. در عمل، پیش‌از آن‌که اثر قطبش،

نسبت به مقاومت غشا در برابر جریان، درخور اعتنا شود، مقادیر یادشده به این مجانب‌ها بسیار نزدیک می‌شوند و در نتیجه این مجانب‌ها برای پیش‌بینی رابطه بین اختلاف فشار دوطرف غشا و جریان عبوری از غشا مناسب‌اند. با قرار دادن معادله‌های (۴۸-۸.۲۲) و (۴۹) فرمول تقریبی:

$$1/6 \left( \frac{\rho P^*}{\rho P_\infty} \right)^{1/3} \left( 1 - \frac{\rho P_\infty}{\rho P^*} \right) \approx 1/39 \ln \frac{\rho P^*}{\rho P_\infty} \quad (54-8.22)$$

در معادله (۴۷-۸.۲۲)، این رفتار را با وضوح بیش‌تری می‌توان مشاهده کرد. سپس، با تقریبی که به‌طور شگفت‌انگیزی خوب است، معادله (۴۷-۸.۲۲) صورت زیر را پیدا می‌کند:

$$v_\delta = \left( 1/39 k_\rho \ln \frac{\rho P^*}{\rho P_\infty} \right) \left( \frac{\rho^*}{\rho^{(S)}} \right) \theta_p \quad (55-8.22)$$

کمیت داخل اولین پرانتز صورت مدل فیلم ساده را دارد، اما در آن  $k_\rho$  در ضریب  $1/39$  ضرب می‌شود. احتمال می‌رود که معادله (۵۵-۸.۲۲) مدل فیلم ساده را در نظر بسیاری از پژوهش‌گران، برای ایجاد ارتباط بین داده‌های فراصاف‌سازی و اسمز معکوس، جذاب جلوه داده‌است. اما چشم‌پوشی از ضریب  $1/39$ ، سبب پایین تخمین زدن  $v_\delta$ ، حتی قبل از توجه به آثار تغییرات خاصیت شده‌است.

#### ۹.۲۲ تقریب‌های ماتریسی برای انتقال جرم چندجزئی

انتقال جرم چندجزئی در فرایندهای شیمیایی، فیزیولوژیکی، زیست‌شناختی، و زیست‌محیطی، به‌صورت گسترده‌ای روی می‌دهد و با استفاده از روش‌های مختلف ریاضی تحلیل می‌شود. در این جا چند روش تقریبی ماتریسی را برای انتقال جرم از طریق همرفت و نفوذ معمولی در گازهای چندجزئی مرور می‌کنیم. بحث کامل‌تر، شامل انتقال جرم در مایعات، در کتابی به قلم تیلر و کریشنا آمده‌است.<sup>۱</sup>

مسئله‌های انتقال جرم چندجزئی را معمولاً با خطی‌سازی -یعنی با جایگزین کردن خواص متغیر در معادلات حاکم، با مقادیر مرجع ثابت- تقریب می‌زنند. این رهیافت، به‌ویژه در مورد جریان‌های پیچیده، مکمل سودمندی برای روش‌های عددی محض است و وقتی متغیرهای خاصیت موردنظر خیلی بزرگ نباشند، پیش‌بینی‌های خوبی از آن نتیجه می‌شود. این نوع تحلیل چندجزئی را بسیاری از پژوهش‌گران، برای محیط‌های ساکن<sup>۲</sup> و سیستم‌های همرفت- واداشته<sup>۳</sup> ۶۰۵،۴۰۳ در بسیاری ارائه داده‌اند.

کار خود را با معادله‌های پیوستگی گونه، به‌صورت ارائه‌شده در معادله (۱۹-۱۵) شروع می‌کنیم و این معادله‌ها را در مورد یک سیستم گاز  $N$  جزئی با  $1 - N$  کسر مولی مستقل  $x_\alpha$  و به همین تعداد شار نفوذ مستقل  $J_\alpha^*$  به‌کار

1. R. Taylor and R. Krishna, *Multicomponent Mass Transfer*, Wiley, New York (1993).
2. L. Onsager, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **46**, 241-265 (1948); P. J. Dunlop and L. J. Gosting, *J. Phys. Chem.*, **63**, 86-93 (1959); J. S. Kirkaldy, *Can. J. Phys.*, **37**, 30-34 (1959); S. R. de Groot and P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam (1961); J. S. Kirkaldy, D. Weichert, and Zia-Ul-Haq, *Can. J. Phys.*, **41**, 2166-2173 (1963); E. L. Cussler, Jr., and E. N. Lightfoot, *AIChE Journal*, **9**, 702-703, 783-785 (1963); H. T. Cullinan, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **4**, 133-139 (1965).
3. R. Prober, PhD thesis, Univ. of Wisconsin (1961).
4. H. L. Toor, *AIChE Journal*, **10**, 460-465 (1964).
5. W. E. Stewart and R. Prober, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **3**, 224-235 (1964).
6. V. Tambour and B. Gal-Or, *Physics of Fluid*, **19**, 219-225 (1976).



می‌بندیم. فرض کنید  $[x]$  و  $[J^*]$ ، به ترتیب، نشان‌دهنده آرایه‌های ستونی کسرهای مولی مستقل  $x_1, \dots, x_{N-1}$  و شارهای نفوذ مستقل  $J^*, \dots, J^*_{N-1}$  باشند؛ در این صورت از تقریب زدن چگالی مولی  $c$  در معادله (۱۵-۱.۱۹) با مقدار مرجع  $c_{ref}$ ، دستگاه معادلات خطی زیر:

$$c_{ref} \left( \frac{\partial}{\partial t} [x] + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla [x]) \right) = -(\nabla \cdot [J^*]) \quad (۱-۹.۲۲)$$

برای جریان‌های آرام یا متلاطم، بدون واکنش‌های شیمیایی همگن، نتیجه می‌شود. برای نفوذ چندجزئی عادی، عبارت شار را می‌توان به صورت تعمیم ماتریسی<sup>۴۲</sup> قانون اول فیک (معادله (ب) در جدول ۲-۸.۱۷):

$$[J^*] = -c[D]\nabla[x] \quad (۲-۹.۲۲)$$

یا به صورت بیان ماتریسی<sup>۵۳</sup> معادله ماکسول-استفان (معادله (۱-۹.۱۷)) نوشت:

$$c\nabla[x] = -[A][J^*] \quad (۳-۹.۲۲)$$

ماتریس‌های  $[D]$  و  $[A]$  باید  $(N-1) \times (N-1)$  و ناتکین باشند تا شارهای مستقل به تعداد اعلام‌شده (در معادله (۲-۹.۲۲))، و کسرهای مولی مستقل به تعداد اعلام‌شده (در معادله (۳-۹.۲۲)) از آن‌ها نتیجه شود. سازگاری این دو معادله مستلزم این است که در هر حالت مفروض،  $[D] = [A]^{-1}$ . در ناحیه گاز با چگالی متوسط، عناصر ماتریس  $[A]$  را می‌توان با استفاده از معادله (۱-۹.۱۷) با دقت پیش‌بینی کرد و داریم:

$$\left. \begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \frac{x_\alpha}{D_{\alpha N}} - \frac{x_\alpha}{D_{\alpha\beta}} \quad \text{به ازای } \beta \neq \alpha \\ A_{\alpha\alpha} &= \frac{x_\alpha}{D_{\alpha N}} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_\alpha}{D_{\alpha\beta}} \end{aligned} \right\} \quad (۴-۹.۲۲)$$

که در آن مقسوم‌علیه‌های  $D_{\alpha\beta}$  ضرایب نفوذ دوتایی زوج‌های متناظرگونه‌ها هستند. در تقریب اول نظریه سینتیک گازهای چاپمن-انسکوگ، ضریب یک زوج مفروض  $\alpha, \beta$  فقط به  $c$  و  $T$  بستگی دارد که در معادله (۱۱-۳.۱۷) نیز چنین بود. این عبارت‌های ساده سبب می‌شوند که معادله (۳-۹.۲۲) را به معادله (۲-۹.۲۲) ترجیح دهیم، مگر درحالتی که اندازه‌گیری‌های  $[D]$  در شرایط مطلوب دسترس‌پذیر باشد. از لحاظ صوری، پس از انجام تبدیل لازم در مورد ماتریس ضریب  $[A]$  یا  $[D]$  می‌توان معادله‌های مشابهی برای ترکیب‌های شیمیایی و شارهای مبتنی بر جرم یا حجم نوشت. در صورتی که معادله حرکت در فرمول‌بندی مسئله گنجانده شده باشد، استفاده از واحدهای جرمی ترجیح داده می‌شود، زیرا در این صورت سرعت جرمی متوسط اساساً همان است که در بخش ۲.۱۹ نشان داده شد. برای سیستم‌های چندجزئی ( $N \geq 3$ )، هریک از این عبارت‌های شار معمولاً یک ماتریس ضریب غیرقطری دارد و یک دستگاه معادلات نفوذ از آن نتیجه می‌شود. معادله (۳-۹.۲۲) را می‌توان با استفاده از تبدیل زیر، مجزا کرد:

$$[P]^{-1}[A][P] = \begin{bmatrix} \check{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \check{A}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (۵-۹.۲۲)$$

که در آن  $[P]$  ماتریس بردارهای ویژه ستونی  $[A]$  است و  $\check{A}_1, \dots, \check{A}_{N-1}$  مقادیر ویژه متناظر با آن‌اند. این مقادیر ویژه، که ریشه‌های معادله  $\det[A - \lambda I] = 0$  هستند در هر حالت پایدار مکانی ماتریس، مثبت‌اند؛ این ریشه‌ها در برابر تبدیل‌های تشابهی  $[A]$  به سایر واحدهای ترکیبی نیز ناورد هستند. در این جا  $I$  ماتریس یک‌ای از مرتبه  $N - 1$  است. وقتی از ماتریس  $[D]$  استفاده کنیم، به شیوه‌ای مشابه ماتریس  $[P]$  تحویل‌پذیر است و مقادیر ویژه آن  $\check{D}_1, \dots, \check{D}_{N-1}$  معکوس‌های  $\check{A}_1, \dots, \check{A}_{N-1}$  هستند. برای صرفه‌جویی در کار،  $[A]$  یا  $[D]$  و آرایه‌های مشتق‌شده از آن‌ها را همواره در مقادیر مرجع خاصیت موردنظر محاسبه می‌کنیم، بنابراین به اندیس «ref» نیاز نخواهد بود. اما هرگاه این آرایه‌ها بر کمیت‌های جرمی مبتنی باشند اندیس  $\omega$  را به  $[A]$ ،  $[D]$ ،  $[P]$ ، و  $[P]^{-1}$  اضافه خواهیم کرد. باتوجه به معادله (۵-۹.۲۲)، به نظر می‌رسد که شارهای نفوذی و ترکیبی تبدیل‌یافته زیر سودمند باشند:

$$[\check{x}] = [P]^{-1}[x] = \begin{bmatrix} \check{x}_1 \\ \vdots \\ \check{x}_{N-1} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = [P][\check{x}] \quad (۷, ۶-۹.۲۲)$$

$$[\check{J}^*] = [P]^{-1}[J^*] = \begin{bmatrix} \check{J}_1^* \\ \vdots \\ \check{J}_{N-1}^* \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} J_1^* \\ \vdots \\ J_{N-1}^* \end{bmatrix} = [P][\check{J}^*] \quad (۹, ۸-۹.۲۲)$$

از این جا به بعد، علامت  $(v)$  را روی این نوع متغیرهای تبدیل‌یافته و روی عناصر ماتریس قطری نظیر، شامل مقادیر ویژه  $\check{D}_\alpha$  و  $\check{A}_\alpha$  قرار می‌دهیم. هرگاه ابتدا معادله (۳-۹.۲۲) را در  $[P]^{-1}$  ضرب کنیم و از معادله‌های (۵-۹.۲۲) تا (۹) استفاده کنیم، معادله‌های مجزای شار حاصل می‌شوند:

$$c_{ref} \nabla \check{x}_\alpha = -\check{A}_\alpha \check{J}_\alpha^* \quad (\alpha = 1, \dots, N - 1) \quad (۱۰-۹.۲۲)$$

که از لحاظ صوری با قانون اول فیک برای  $N - 1$  سیستم دوتایی هم‌ارزند. معادله پیوستگی چندجزئی (۱-۹.۲۲)، متناظر به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$c_{ref} \frac{\partial \check{x}_\alpha}{\partial t} + c_{ref} (\mathbf{v}^* \cdot \nabla \check{x}_\alpha) = -(\nabla \cdot \check{J}_\alpha^*) \quad (\alpha = 1, \dots, N - 1) \quad (۱۱-۹.۲۲)$$

بنابراین، ترکیب‌های تبدیل‌یافته  $\check{x}_\alpha$  و شارهای  $\check{J}_\alpha^*$ ، به‌ازای هر مقدار  $\alpha$ ، در معادله‌های پیوستگی و شار برای هر سیستم دوتایی با همان تابع  $\mathbf{v}^*$  (آرام یا متلاطم) مربوط به سیستم چندجزئی، و با ضریب نفوذ  $D_{AB}$  مساوی با مقدار ویژه  $\check{D}_\alpha = 1/\check{A}_\alpha$  صدق می‌کنند.

شرایط مرزی و اولیه  $[\check{x}]$  و  $[\check{J}^*]$  از شرایط مربوط به  $[x]$  و  $[J^*]$ ، با استفاده از معادله‌های (۶-۹.۲۲) و (۸) به‌دست می‌آیند. در این صورت مسئله‌های شبه‌دوتایی حاصل را می‌توان با استفاده از نظریه، یا روابط همبستگی آزمایش‌ها حل کرد و نتایج حاصل را با استفاده از معادله‌های (۷-۹.۲۲) و (۹) ترکیب کرد<sup>۵</sup> تا جواب چندجزئی برحسب  $[x]$  و  $[J^*]$  به‌دست آید.

آهنگ‌های موضعی انتقال جرم در سیستم‌های دوتایی را می‌توان به‌صورت:

$$N_{A_0} - x_{A_0}(N_{A_0} + N_{B_0}) = \dot{k}_{x,loc}^*(D_{AB}, \dots)(x_{A_0} - x_{Ab}) \quad (۱۲-۹.۲۲)$$

بیان کرد که در معادله (۷-۱.۲۲) و بخش ۸.۲۲ نشان داده شد. نماد ... پس از  $\mathcal{D}_{AB}$  نشان‌دهنده هر متغیر اضافی (مانند  $\phi_x$  در بخش ۸.۲۲) است که ضریب انتقال جرم دوتایی  $k_x^\bullet$  ممکن است به آن وابسته باشد. مجموعه معادله‌های متناظر با معادله‌های (۱۰-۹.۲۲) و (۱۱) عبارت است از:

$$\check{J}_{\alpha^\bullet}^* = \check{k}_{x,\text{loc}}^\bullet(\check{D}_{\alpha^\bullet}, \dots)(\check{x}_{\alpha^\bullet} - \check{x}_{\alpha b}) \quad (\alpha = 1, \dots, N-1) \quad (۱۳-۹.۲۲)$$

یا به صورت ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} \check{J}_{1^\bullet}^* \\ \vdots \\ \check{J}_{N-1^\bullet}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{k}_x^\bullet(\check{D}_{1^\bullet}, \dots) & & \\ & \ddots & \\ & & \check{k}_x^\bullet(\check{D}_{N-1^\bullet}, \dots) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{x}_{1^\bullet} - \check{x}_{1b} \\ \vdots \\ \check{x}_{N-1^\bullet} - \check{x}_{N-1,b} \end{bmatrix} \quad (۱۴-۹.۲۲)$$

با تبدیل این نتیجه به متغیرهای اولیه، شارهای نفوذ فصل مشترکی  $J_{1^\bullet}^*, \dots, J_{N-1^\bullet}^*$  به داخل فازگازی به دست می‌آید و داریم:

$$[J^*] = [\mathbf{P}][\check{k}_x^\bullet][\mathbf{P}]^{-1}[x_\bullet - x_b] \quad (۱۵-۹.۲۲)$$

یا اختلاف ترکیب شیمیایی به‌ازای شارهای مفروض  $J^*$  حاصل می‌شود و داریم:

$$[x_\bullet - x_b] = [\mathbf{P}][\check{k}_x^\bullet]^{-1}[\mathbf{P}]^{-1}[J^*] \quad (۱۶-۹.۲۲)$$

در این جا  $[\check{k}_x^\bullet]$  ماتریس قطری نشان‌داده‌شده در معادله (۱۴-۹.۲۲) است، و  $[\check{k}_x^\bullet]^{-1}$  از معکوس‌های همان عناصر قطری تشکیل می‌شود.

در مورد سیستم‌های دوتایی، برای محاسبه شارهای گونه  $N_{\alpha^\bullet}$  نسبت به فصل مشترک، که آهنگ‌های انتقال موضعی را نتیجه می‌دهند، به اطلاعات بیش‌تری نیاز است. نسبت شار  $r = N_{B^\bullet}/N_{A^\bullet}$  در معادله (۱۰-۱.۲۲) برای حل برحسب  $N_{A^\bullet}$  مشخص شد؛ برای سیستم‌های چندجزئی به مشخصات نظیر نیاز داریم. محاسبه شارهای  $N_{\alpha^\bullet}$  از شارهای نفوذی  $J_{\alpha^\bullet}^*$  و آهنگ‌های انتقال نسبی را «مسئله بند پوتین» می‌نامند<sup>۷</sup> و در مرجع ۱ به خوبی انجام شده‌است. این مسئله ساده‌تر می‌شود، هرگاه معادله (۱۵-۹.۲۲) را به صورت زیر، با استفاده از آرایه  $[N_\bullet]$  شارهای مولی فصل مشترکی  $N_{1^\bullet}, \dots, N_{N-1^\bullet}$  نسبت به فصل مشترک، بازنویسی کنیم:

$$\left[ N_\bullet - x_\bullet \sum_{\alpha=1}^N N_{\alpha^\bullet} \right] = [\mathbf{P}][\check{k}_x^\bullet][\mathbf{P}]^{-1}[x_\bullet - x_b] \quad (۱۷-۹.۲۲)$$

تا جایگزینی مستقیم در روابط بین آهنگ‌های انتقال امکان‌پذیر شود. نتیجه متناظر برای آرایه  $[n_\bullet]$  شارهای جرمی فصل مشترکی  $n_{1^\bullet}, \dots, n_{N-1^\bullet}$  نسبت به فصل مشترک، چنین است:

$$\left[ n_\bullet - \omega_\bullet \sum_{\alpha=1}^N n_{\alpha^\bullet} \right] = [\mathbf{P}_\omega][\check{k}_\omega^\bullet][\mathbf{P}_\omega]^{-1}[\omega_\bullet - \omega_\infty] \quad (۱۸-۹.۲۲)$$

اکنون چند صورت خاص از این نتایج را ارائه می‌دهیم.

برای سیستم‌های بدون شار مولی فصل‌مشارکی خالص، جمع  $N$  جمله‌ای معادله (۱۷-۹.۲۲) صفر می‌شود و این معادله صورت ساده‌ی زیر را پیدا می‌کند:

$$[N_0] = [\mathbf{P}][\check{\mathbf{k}}_x][\mathbf{P}]^{-1}[x_0 - x_b] \quad (۱۹-۹.۲۲)$$

که در آن آرایه قطری  $[\check{\mathbf{k}}_x]$  به تصحیح برای شار خالص نیاز ندارد. با تقریب زدن هر ضریب انتقال  $\check{k}_{x\alpha}^*(\check{D}_{\alpha}, \check{\phi}_{x\alpha})$  در معادله (۱۴-۹.۲۲) با یک تابع خطی از شار فصل‌مشارکی مولی خالص، با استفاده از خط مماس در  $\phi = 0$  در منحنی  $\theta$  در شکل ۸-۲۲، برای مدل انتقال جرم انتخابی، می‌توان این نتیجه را به شار فصل‌مشارکی مولی خالص متوسط تعمیم داد. در نتیجه دستگاه معادلات خطی زیر<sup>۸</sup>:

$$\left[ N_0 - 0.15(x_0 + x_b) \sum_{\alpha=1}^N N_{\alpha 0} \right] = [\mathbf{P}][\check{\mathbf{k}}_x][\mathbf{P}]^{-1}[x_0 - x_b] \quad (۲۰-۹.۲۲)$$

برای مدل فیلم ساکن مطرح‌شده در بخش ۸.۲۲ حاصل می‌شود. به‌همین ترتیب، رابطه زیر:

$$\left[ N_0 - (0.363x_0 + 0.637x_b) \sum_{\alpha=1}^N N_{\alpha 0} \right] = [\mathbf{P}][\check{\mathbf{k}}_x][\mathbf{P}]^{-1}[x_0 - x_b] \quad (۲۱-۹.۲۲)$$

برای مدل نفوذ مطرح‌شده در بخش‌های ۴.۲۰ و ۸.۲۲ به‌دست می‌آید، و رابطه زیر:

$$\left[ N_0 - (0.434x_0 + 0.566x_b) \sum_{\alpha=1}^N N_{\alpha 0} \right] = [\mathbf{P}][\check{\mathbf{k}}_x][\mathbf{P}]^{-1}[x_0 - x_b] \quad (۲۲-۹.۲۲)$$

وقتی  $\Lambda \rightarrow \infty$ ، برای لایه‌های مرزی آرام که در شکل‌های ۵-۸.۲۲ و ۶، نشان داده شدند، به‌دست می‌آید و برای لایه‌های مرزی جدانشده در جریان‌های پایای سه‌بعدی معتبر است.<sup>۹</sup>

در سیستم‌های بدون شار فصل‌مشارکی جرمی خالص، مانند واکنش‌های حالت‌پایا با کاتالیزگر جامد، معادله (۱۸-۹.۲۲) به‌صورت زیر تحویل می‌شود:

$$[n_0] = [\mathbf{P}_\omega][\check{\mathbf{k}}_\omega][\mathbf{P}_\omega]^{-1}[\omega_0 - \omega_b] \quad (۲۳-۹.۲۲)$$

عناصر ماتریس  $[\check{\mathbf{k}}_\omega]$  را می‌توان از روی عبارات‌های مربوط به عدد شروود دوتایی یا ضریب  $j_D$  به‌صورت تعریف‌شده برای واحدهای مبتنی بر جرم در جدول ۱-۲۲، با قرار دادن مقادیر ویژه  $\check{D}_\alpha$  به‌جای ضرایب نفوذ دوتایی  $\mathcal{D}_{AB}$ ، پیش‌بینی کرد.

برای میدان جریان مفروض، حاصل ضرب  $[\mathbf{P}][\check{\mathbf{k}}_x][\mathbf{P}]^{-1}$  در معادله‌های (۱۹-۹.۲۲ تا ۲۲) تابعی از ماتریس  $[\mathbf{A}]$  است. این ضرب سه‌گانه ماتریسی، که در این جا  $[\mathbf{k}_x]$  نامیده می‌شود، به‌ازای  $N \geq 3$  غیرقطری است، اما  $[\check{\mathbf{k}}_x]$ ، چنان‌که در بالا گفته شد، قطری است. روشی ساده و مؤثر برای تقریب زدن چنین توابعی را آلویوس و نوردن پی‌ریزی کرده‌اند.<sup>۱۰</sup> فرض کنید  $f$  تابعی عددی با مقدار حقیقی باشد که روی مقادیر ویژه ماتریس  $[\mathbf{A}]$  تعریف

8. W. E. Stewart, *AIChE Journal*, **19**, 398-400 (1973); Erratum, **25**, 208 (1979).

9. W. E. Stewart, *AIChE Journal*, **9**, 528-535 (1963).

10. V. Alopaeus and H. V. Nordén *Computers & Chemical Engineering*, **23**, 1177-1182 (1992).

شده‌است که در آن عناصر قطری، هم‌چون در معادله (۴-۹.۲۲)، غالب‌اند. در این صورت تقریب‌های پیشنهادی برای عناصر ماتریس  $[B] = f[A]$  به شرح زیرند:

$$B_{ii} = f(A_{ii}) \quad \text{برای عناصر قطری} \quad (۲۴-۹.۲۲)$$

$$B_{ij} = \begin{cases} A_{ii} \frac{df(A_{ii})}{dA_{ii}} & \text{اگر } A_{ii} \approx A_{jj} \\ A_{ij} \frac{f(A_{ii}) - f(A_{jj})}{A_{ii} - A_{jj}} & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{برای عناصر غیر قطری} \quad (۲۵-۹.۲۲)$$

آلوپوس و نوردن این تقریب‌ها را روی ماتریس‌های ضریب انتقال جرم  $[k_x]$  با صورت  $b[D]^{1-p}$ ، یا با صورت  $b[A]^{p-1}$ ، و روی شارهای متناظر  $N_{\alpha}$  در سیستم‌های تشکیل‌شده از ۳ تا ۲۵ گونه‌گازی آزمایش کردند. از نماهای  $p$  بین ۰٫۲۵ تا ۰٫۶۶ استفاده شد؛ در عبارت‌های انتقال جرم این فصل مقادیری از صفر تا ۰٫۵ پدیدار می‌شود. مقایسه‌هایی با مقادیر دقیق محاسبه‌شده برای عناصر  $k_{x\alpha\beta}$  و  $N_{\alpha}$  با استفاده از معادله (۱۹-۹.۲۲)، و با مدل فیلم ارائه‌شده توسط کریشنا و استاندارد<sup>۱۱</sup> که در آن هر عنصر  $k_{x\alpha\beta}$  مستقلاً با ضریب نفوذ دوتایی متناظر  $D_{\alpha\beta}$  محاسبه‌شده، انجام شده‌است. محاسبه‌های انجام‌شده با استفاده از معادله‌های (۲۴-۹.۲۲ و ۲۵)، ۳ تا ۵ برابر سریع‌تر از آن‌هایی بود که با استفاده از معادله (۱۹-۹.۲۲) محاسبه شد و نتایجی دقیق‌تر (با خطای نسبی نمونه‌وار کم‌تر از ۱٪ و به‌ندرت بیش از ۱۰٪) عاید کرد، به‌ویژه هنگامی که مستقیماً با استفاده از ماتریس قطری غالب استغفان-ماکسول  $[A]$  انجام شد، و نه با وارون آن، یعنی  $[D]$ . محاسبات انجام‌شده با استفاده از مدل فیلم کریشنا-استاندارت، از محاسبات انجام‌شده با استفاده از معادله‌های (۲۴-۹.۲۲ و ۲۵) آهسته‌تر بودند و خطاهای نمونه‌وار در آن‌ها چندین برابر بود. بنابراین، معادله‌های (۲۴-۹.۲۲ و ۲۵) به‌عنوان تقریب‌های عملی برای عناصر ماتریس حاصل ضرب  $[B] = [P][k_x][P]^{-1}$  در معادله‌های (۱۹-۹.۲۲ تا ۲۲)، در هنگام استفاده از معادله (۴-۹.۲۲)، توصیه می‌شوند. این تقریب را می‌توان در معادله (۲۳-۹.۲۲) نیز به‌کار برد، که در آن  $[B]$ ، در پایان، به واحدهای مبتنی بر جرم تبدیل می‌شود؛ اما استفاده از معادله (۲۰-۹.۲۲) یا (۲۲) راحت‌تر است و به‌ازای شارهای مولی خالص متوسطی که معمولاً در کاتالیز ناهمگن با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم، دقت قابل‌قبولی دارد.

دقت جواب‌های خطی به انتخاب مقادیر خاصیت مرجع وابسته است، به‌ویژه اگر تغییرات خاصیت چشم‌گیر باشد. در بحث زیر، همهٔ خواص در حالت مرجع مشترکی محاسبه می‌شوند، و ترکیب به‌صورت کسر مولی:

$$[x_{\text{ref}}] = a_x [x_b] + (1 - a_x) [x_0] \quad (۲۶-۹.۲۲)$$

یا کسر جرمی:

$$[\omega_{\text{ref}}] = a_w [\omega_b] + (1 - a_w) [\omega_0] \quad (۲۷-۹.۲۲)$$

ارائه خواهد شد. توجه داشته‌باشید که هنوز می‌توان  $[x_{\text{ref}}]$  را، حتی برای معادله (۲۰-۹.۲۲)، ۲۱، یا (۲۲) انتخاب کرد، زیرا ترکیب متوسط نشان‌داده‌شده در آن‌جا مقادیر خاصیت فیزیکی را ارائه نمی‌دهد، بلکه تصحیحات شار خالص را ارائه می‌دهد.

معادله‌های (۱۷-۹.۲۲، ۱۸) و چندین تقریب دیگر برای انتقال جرم چندجزئی آزمایش‌شده و با انتگرال‌گیری‌های خاصیت متغیر تفصیلی برای سیستم‌های هم‌دما مقایسه شده‌اند.

11. R. Krishna and G. L. Standart, *AIChE Journal*, **22**, 383-389 (1976).

نتایج این بررسی به شرح زیر است:

۱. برای بیست مسئلهٔ نفوذگازی حالت ناپایا، که گسترهٔ وسیعی از آهنگ‌های انتقال جرم خالص را در برمی‌گیرد، خطی‌سازی برحسب واحدهای مولی، جواب‌های دقیق را به‌بهترین وجه تقریب زد. آهنگ‌های تبخیر و چگالش ایزوبوتان، برای سیستم  $C_2H_{10}-N_2-H_2$  با وضعیت هندسی نشان‌داده‌شده در شکل ۱-۱۰، با انحراف معیار ۱/۶٪، با استفاده از معادله (۹-۲۲) و  $a_x = 0/5$  تقریب زده شد. خطی‌سازی برحسب واحدهای مبتنی بر جرم، از طریق معادله (۹-۲۲)، و  $a_x = 0/5$  تقریب زده شد. خطی‌سازی برحسب واحدهای مبتنی بر جرم، از طریق معادله (۹-۲۲)، نتایج ضعیف‌تری داشت، زیرا تغییرات  $\rho$  و  $[A_\omega]$  زیاد بود. این روش، با مقدار  $a_\omega$  ترجیحی ۰/۸، انحراف معیاری برابر ۳/۸٪ برای شارهای فصل‌مشرکی  $N_{\alpha 0}$  گونهٔ قابل‌انتقال (ایزوبوتان) داشت. تقریب‌های فیلم حالت شبه‌پایا دقت کم‌تری داشت؛ استفاده از ضرایب تصحیح  $\theta_{x\alpha} = \dot{\phi}_{x\alpha} / (\exp \dot{\phi}_{x\alpha} - 1)$  (به‌صورت ارائه‌شده توسط استوارت و پروبر<sup>۵</sup> برای مدل فیلم بخش ۸-۲۲) انحراف معیاری برابر ۷/۸۸٪ داشت و  $a_x$  به  $1/0$  بهینه شد. مدل فیلم کریشنا و استاندارت<sup>۱۱</sup>، که در آن از خطی‌سازی استفاده نمی‌شود، مستقل از  $a_x$  و  $a_\omega$ ، انحراف معیاری برابر با ۱۴/۳٪ نتیجه داد. این نتایج ما را به استفاده از معادله (۹-۲۲) (یا برای آهنگ‌های انتقال معتدل‌تر، معادله (۹-۲۲)) با  $a_x = 0/5$  برای فازگازی در عملیات انتقال توصیف‌شده توسط مدل نفوذ، تشویق می‌کنند.

۲. برای بیست مسئلهٔ انتقال جرم و انتقال اندازه‌حرکت در لایه‌های مرزی گازی آرام  $N_2$ ،  $H_2$ ، و  $CO_2$  روی صفحهٔ تخت متخلخل، که پروبر<sup>۳</sup> آن‌ها را به‌طور دقیق حل کرده است، خطی‌سازی برحسب واحدهای جرمی، جواب‌های دقیق را به بهترین نحو تقریب زد. جواب‌های خاصیت‌متغیر تفصیلی به‌ازای  $n_{\alpha 0}$ ، برای هر سه گونه با انحراف معیار ۵/۵٪، توسط معادله (۹-۲۲)، با استفاده از ضرایب انتقال جرم  $k_{\alpha}^*$  پیش‌بینی‌شده از طریق معادله‌های (۲۰-۴۷) و (۲۲-۲۷)، با  $a_\omega$  بهینه‌سازی‌شده به ۰/۴ تقریب زده شد. مدل‌های فیلم استوارت، پروبر، استاندارت، و کریشنا، به‌ترتیب، انحراف معیارهای ۴/۷۸٪ (با  $a_x = 1/0$ ) و ۸/۲۵٪، برای آهنگ‌های انتقال گونهٔ شیمیایی ارائه دادند.

روش‌های معرفی‌شده در این‌جا، در مهندسی فرایندهای جداسازی چندجزئی کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند. پیشرفت در فناوری محاسبات استفاده از این روش‌ها را آسان کرده و انگیزه‌ای در جهت جستجو برای یافتن روش‌های بهتر فراهم آورده است تا بتوان پدیده‌های خطی شامل واکنش‌های شیمیایی پیچیده را بررسی کرد.

### پرسش‌های تشریحی

۱. تناظرهای جدول ۲-۲۲ را تحت چه شرایطی می‌توان به‌کار بست؟ آیا می‌توان از آن‌ها در مورد سیستم‌های شامل واکنش شیمیایی استفاده کرد؟
۲. چرا ضریب انتقال گرما در معادله (۱-۲۲) به‌صورتی متفاوت با ضریب مشابه در معادله (۱-۱۴) تعریف شد؟ آیا واقعاً این دو متفاوت‌اند؟
۳. بعضی از ضرایب انتقال جرم در این فصل اندیس بالایی «۰» دارند و بعضی اندیس بالایی «۰» این اندیس‌ها چه چیزی را نشان می‌دهند؟ به‌دقت شرح دهید.
۴. از محاسبات تحلیلی ضرایب انتقال جرم در بخش ۲-۲۲ چه نتایجی استنتاج می‌کنید؟
۵. مفهوم ۲ در معادله‌های (۲۲-۲۰ و ۲۱) چیست؟

۶. معنای اندیس‌های «°»،  $e$ ،  $b$  در بخش ۴.۲۲ چیست؟

۷. معنای اصطلاح «حساس به مدل» چیست؟

۸. کشش سطحی از چه طریق بر انتقال جرم میان‌فازی تأثیر می‌گذارد؟ تعریف کشش سطحی چیست؟ کشش سطحی به دما چه وابستگی‌ای دارد؟

۹. اساس فیزیکی مدل فیلم، مدل نفوذ، و مدل لایه مرزی را برای انتقال جرم و گرما تشریح کنید.

۱۰. آهنگ‌های بالای انتقال جرم در فصل مشترک، چه تأثیری در ضرایب انتقال گرما و جرم دارند؟

### مسئله

۱. الف ۲۲. پیش‌بینی ضرایب انتقال جرم در کانال‌های بسته. ضرایب انتقال جرم فازگازی را برای بخار آب در هوا، تحت فشار ۲ atm و در دمای  $25^\circ\text{C}$ ، و آهنگ جریان جرمی  $157^\circ\text{ lb}_m/\text{hr}$ ، در سیستم‌های زیر تخمین بزنید. فرض کنید  $D_{AB} = 0.13\text{ cm}^2/\text{s}$ .

(الف) لوله‌ای عمودی به قطر داخلی ۶ in. با فیلمی ریزان از آب روی جدار آن. از رابطه همبستگی زیر<sup>۱</sup> در ستون جدارخیس استفاده کنید:

$$\text{Sh}_{\text{loc}} = 0.723 \text{Re}^{1/4} \text{Sc}^{1/4} \quad (\text{Re} > 2000) \quad (1-1.22 \text{ الف})$$

(ب) بستری پرشده به قطر ۶ in. از کره‌های اشباع از آب، با  $a = 100\text{ ft}^{-1}$ .

۲. الف ۲۲. محاسبه ترکیب شیمیایی گاز با استفاده از داده‌های رطوبت‌سنجی. جریان‌های از هوای مرطوب با دمای حباب خیس  $80^\circ\text{F}$  و دمای حباب خشک  $13^\circ\text{F}$ ، در فشار کل  $800\text{ mm Hg}$  و سرعت هوای بالا، اندازه‌گیری می‌شود. مطلوب است محاسبه کسر مولی بخار آب در جریان هوا. برای سادگی، درهنگام تخمین زدن خواص فیلم، آب را جزء ناچیز در نظر بگیرید.

جواب:  $x_{w\infty} = 0.172$  (با استفاده از  $n = 0.44$  در معادله (۳۸-۳.۲۲)).

۳. الف ۲۲. محاسبه دمای هوای ورودی برای خشک کردن در بستر ثابت. می‌خواهیم بستری کم‌عمق از دانه‌های جامد اشباع از آب را با دمیدن هوا با فشار ۱/۱ atm و سرعت سطحی  $15\text{ ft/s}$  خشک کنیم. دمای هوا در ابتدا چه قدر باشد تا دمای سطح دانه‌های جامد را در  $60^\circ\text{F}$  ثابت نگه دارد؟ از تابش چشم‌پوشی کنید. برای اطلاع از ضرایب انتقال گرمای همرفتی واداشته در بسترهای ثابت به بخش ۵.۱۴ رجوع کنید.

۴. الف ۲۲. آهنگ خشک کردن جامدات دانه‌ای در بستر ثابت. مطلوب است محاسبه آهنگ اولیه حذف آب در عملیات خشکاندن توصیف‌شده در مسئله ۳. الف ۲۲، هرگاه دانه‌های جامد استوانه‌هایی با  $a = 180\text{ ft}^{-1}$  باشند.

۲۲. ب ۱. تبخیر از قطره در حال سقوط آزاد. قطره‌ای آب، به قطر  $1700\text{ mm}$ ، در هوای خشک ساکن با فشار ۱ atm و دمای  $100^\circ\text{F}$ ، بدون گردش داخلی، آزادانه سقوط می‌کند. رفتار را با حالت شبه‌پایا و آهنگ انتقال جرم را کوچک فرض کنید؛ مطلوب است محاسبه (الف) سرعت قطره در حال سقوط، (ب) دمای سطح قطره، و (ج) آهنگ تغییر قطر قطره برحسب  $\text{cm/s}$ . فرض کنید خواص فیلم همان خواص هوای خشک در دمای  $80^\circ\text{F}$  است.

جواب: (الف)  $390\text{ cm/s}$ ؛ (ب)  $54^\circ\text{F}$ ؛ (ج)  $10^{-2}\text{ cm/s}$   $\times 0.576$ .

1. E. R. Gilliland and T. K. Sherwood, *Ind. Eng. Chem.*, **26**, 516-523 (1934).

۲۲.ب.۲ اثر تابش بر اندازه‌گیری رطوبت. فرض کنید یک دماسنج حباب‌خیس و حباب‌خشک در مجرای طویل با دمای سطحی داخلی ثابت  $T_s$  نصب شده‌است و سرعت گاز کم است. دمای حباب‌خشک  $T_{db}$  و دمای حباب‌خیس  $T_{wb}$  را باید تصحیح کرد تا اثر تابش در آن‌ها منظور شود. مانند مثال ۲۲-۳-۲، فرض می‌کنیم که دماسنج‌ها طوری نصب شده‌اند که بتوان از رسانش گرما در طول ساقهٔ شیشه‌ای دماسنج چشم‌پوشی کرد. (الف) موازنهٔ انرژی را روی واحد سطح حباب‌خشک بنویسید تا معادله‌ای برای دمای گاز  $T_\infty$  برحسب  $T_{db}$ ،  $T_s$ ،  $h_{db}$ ،  $e_{db}$  و  $a_{db}$  به‌دست آید (دو جملهٔ آخر عبارت‌اند از: ضریب گسیل و ضریب جذب حباب‌خشک).

(ب) موازنهٔ انرژی را روی واحد سطح حباب‌خیس بنویسید و عبارتی برای آهنگ تبخیر به‌دست آورید.  
(ج)  $x_{A\infty}$  را به‌ازای فشار و دمای قرائت‌شده در مثال ۲۲-۳-۲، با این اطلاعات اضافی که  $v_\infty = 15 \text{ ft/s}$ ،  $T_s = 130^\circ\text{F}$ ،  $e_{db} = a_{db} = e_{wb} = a_{wb} = 0.93$ ، قطر حباب‌خشک مساوی  $0.1 \text{ in.}$  و قطر حباب‌خیس مساوی  $0.15 \text{ in.}$  (شامل فتیله)، محاسبه کنید.

جواب: (ج)  $x_{A\infty} = 0.021$

۲۲.ب.۳ نظریهٔ فیلم با خواص انتقال متغیر.

(الف) نشان دهید که برای سیستم‌هایی که در آن‌ها خواص انتقال تابع  $y$  هستند، می‌توان از معادله‌های (۱۹-۴-۱۲ و ۱۳) انتگرال گرفت تا به‌ازای  $y \leq \delta_x$  یا  $y \leq \delta_T$ ، به‌ترتیب، نتیجه شود:

$$1 - \frac{(N_{A0} + N_{B0})(x_A - x_{A0})}{N_{A0} - x_{A0}(N_{A0} + N_{B0})} = \exp \left[ (N_{A0} + N_{B0}) \int_0^y \frac{dy}{cD_{AB}} \right] \quad (22\text{-}3\text{-}1)$$

$$1 - \frac{(N_{A0}\tilde{C}_{pA} + N_{B0}\tilde{C}_{pB})(T - T_0)}{q_0} = \exp \left[ (N_{A0}\tilde{C}_{pA} + N_{B0}\tilde{C}_{pB}) \int_0^y \frac{dy}{k} \right] \quad (22\text{-}3\text{-}2)$$

(ب) تغییرات متناظر را در معادله‌های (۱۹-۴-۱۶ و ۱۷)، هم‌چنین در معادله‌های (۲۲-۸-۵ و ۶) انجام دهید. سپس نشان دهید که معادله‌های (۲۲-۸-۷ و ۸) اعتبار خود را حفظ می‌کنند. به‌این‌ترتیب، اگر بتوان  $h_{loc}$  و  $k_{x,loc}$  را پیش‌بینی کرد، نیازی نیست که در محاسبهٔ آهنگ‌های انتقال از انتگرال‌گیری استفاده کرد. (ج) نشان دهید که  $h_{loc}$  و  $k_{x,loc}$  را باید برحسب خواص فیزیکی و نوع جریان (آرام یا متلاطم) غالب در شرایطی که  $h_{loc}$  و  $k_{x,loc}$  در آن شرایط مطلوب‌اند، محاسبه کرد.

۲۲.ب.۴ یخ‌ساز تبخیری. یک ظرف کم‌عمق دایره‌ای به قطر  $0.5 \text{ m}$  را در نظر بگیرید که تا لبه با آب پر شده‌است و روی لایه‌ای عایق، مانند بستری از کاه، در ناحیه‌ای بدون‌باد، قرار دارد. هرگاه رطوبت نسبی هوا  $30\%$  باشد، دمای هوا چه‌قدر باید باشد تا آب به‌اندازه‌ای سرد شود که یخ بزند؟ فرض‌های زیر را اختیار کنید: (۱) از تابش چشم‌پوشی کنید، (۲) تابش به آسمان شب با دمای  $15^\circ\text{K}$  را در نظر بگیرید، و (۳) فرض کنید ظرف آب لبه‌ای به‌ارتفاع  $2 \text{ mm}$  دارد.

۲۲.ب.۵ جداسازی اکسیژن. مطلوب است محاسبهٔ آهنگ انتقال اکسیژن از آب ساکن اشباع از اکسیژن در دمای  $20^\circ\text{C}$  به داخل حبابی از نیتروژن خالص به قطر  $1 \text{ mm}$ ، هرگاه حباب به‌صورت کره‌ای صلب عمل کند. توجه داشته‌باشید که ابتدا باید سرعت صعود حباب در آب را تعیین کرد.

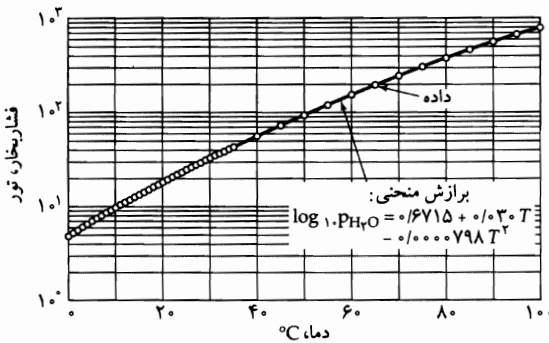


۶.۲۲ کنترل مقاومت نفوذی. قطره‌های آب به قطر ۲ mm با سقوط آزاد در اکسیژن خالص در دمای  $20^{\circ}\text{C}$  و فشار ۱ atm اکسیژن دار می‌شوند. آیا برای محاسبه آهنگ انتقال اکسیژن به دانستن ضریب نفوذ فازگازی نیاز دارید؟ چرا؟ انحلال‌پذیری اکسیژن در این شرایط ۱/۳۹ mols/liter و ضریب نفوذ آن در فاز مایع در حدود  $10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$  است.

۷.۲۲ تعیین ضریب نفوذ (شکل ۷.۲۲ ب.۷). می‌خواهیم ضریب نفوذ بخار آب در نیتروژن را در فشار ۱ atm درگستره دمای از  $0^{\circ}\text{C}$  تا  $100^{\circ}\text{C}$ ، با استفاده از «آزمایش آرنولد» در مثال ۱-۱.۲۰، تعیین کنیم. بنابراین باید از ضریب تصحیح  $\theta_{AB}$  برای مدل نفوذ استفاده کنیم. این ضریب را به صورت تابعی از دما محاسبه کنید. فشار بخار آب در این گستره را می‌توان از شکل ۷.۲۲ ب.۷ به دست آورد یا با استفاده از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\log_{10} p_{\text{H}_2\text{O}} = 0.6715 + 0.30T - 0.00008T^2 \quad (7.22\text{b})$$

در این رابطه  $p_{\text{H}_2\text{O}}$  فشار بخار برحسب mm Hg، و  $T$  دما برحسب درجه سانتی‌گراد است.



شکل ۷.۲۲ داده‌های فشار بخار آب به نقل از

Langés Handbook of Chemistry (J. Dean, ed.), 15th edition, McGraw-Hill, New York (1999).

۸.۲۲ آثار مارانگونی در چگالش بخارها. در بسیاری از موارد ضریب انتقال گرما برای چگالش بخارها به صورت  $h = k/\delta$  بیان می‌شود که در آن  $k$  رسانندگی گرمایی فیلم چگالش‌یافته، و  $\delta$  ضخامت فیلم است. روابط همبستگی دسترس‌پذیر در نوشتگان معمولاً بر این فرض مبتنی‌اند که تنش برشی در سطح آزاد فیلم صفر است، اما اگر دمای سطح روبه پایین کاهش یابد، تنش برشی  $\tau_s = \partial\sigma/\partial z$  وجود خواهد داشت که  $\sigma$  کشش سطحی است، و  $z$  روبه پایین، یعنی درجهت جریان، اندازه‌گیری می‌شود. این اثر تا چه میزان ضریب انتقال گرمای  $5000 \text{ kcal/hr} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}$  را برای فیلم آب تغییر خواهد داد؟ ویسکوزیته سینماتیکی آب را می‌توان برابر  $0.029 \text{ cm}^2/\text{s}$  فرض کرد، و در این مسئله چگالی  $0.96 \text{ g/cm}^3$ ، رسانندگی گرمایی  $0.713 \text{ kcal/hr} \cdot \text{m} \cdot \text{C}$  و  $d\sigma/dT = -0.2 \text{ dynes/cm} \cdot \text{C}$  است.

جواب جزئی: 
$$\rho \langle v_z \rangle = \left( \frac{\rho^2 g \delta^2}{3\mu} \right) \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\tau_s}{\rho g \delta} \right)$$

جمله حاوی  $\tau_s$  معرف اثر گرادیان‌های کشش سطحی است و وقتی این جمله کوچک باشد، مخرج کسر به مقدار مربوط به نبود گرادیان نزدیک می‌شود. در شرایط این مسئله،  $\rho g \delta = 14.3 \text{ dyn/cm}^2$ . بنابراین آثار کشش سطحی برای سیستم‌هایی مانند سیستم موردنظر اندک است، اما، حتی گرادیان‌های کوچک نیز می‌توانند سبب ناپایداری‌های هیدرودینامیکی شوند و بنابراین آثار درخور توجهی دارند.

۹.ب.۲۲ مدل فیلم برای کره‌ها. نتایج متناظر با معادله‌های (۳-۸.۲۲) را برای سیستمی با تقارن استوانه‌ای به دست آورید. یعنی یک سطح انتقال جرم استوانه‌ای فرض کنید و فرض کنید که  $T$  و  $x_A$  فقط به  $r$  وابسته‌اند. نشان دهید که نیازی به تغییر دادن معادله‌های (۸-۸.۲۲) نیست.

۱.ج.۲۲ محاسبه آهنگ‌های فراصاف‌سازی. دقت پیش‌بینی‌های نشان داده‌شده در شکل ۹-۸.۲۲ را به‌ازای داده‌ها و خواص فیزیکی زیر بررسی کنید:

سیستم فیزیکی:

$$\text{آهنگ چرخش فیلتر دیسکی} = 273 \text{ rpm}$$

$$\text{آلبومین سرم گاوی در } \rho_{P\infty} = 2.2 \text{ g/100 ml}$$

$$D_{PS}(\circ) = 7.1 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s} = (6.7 \text{ مساوی pH در } \rho_{P\infty})$$

$$\mu(\circ)/\rho^{(S)} = 0.1 \text{ cm}^2/\text{s} = \text{ویسکوزیته سینماتیکی در میانگیر}$$

$$\text{حجم‌های مخصوص جزئی پروتئین و میانگیر، به ترتیب، عبارت‌اند از: } 0.75 \text{ ml/g و } 1.00 \text{ ml/g}$$

$$\text{تراوایی هیدرولیکی، } K_H = 0.0098 (\text{cm/min})/\text{psi}$$

اثر غلظت پروتئین:

$$\text{چگالی محلول } \rho = 0.997 + 0.224\rho_P \text{ که } \rho \text{ و } \rho_P \text{ برحسب g/ml هستند}$$

$$\text{نسبت ضریب نفوذ میانگیر پروتئین } \phi_P = \omega_P \hat{V}_P / (\omega_P \hat{V}_P + \omega_S \hat{V}_S) \text{ که در آن } D_{PS}(\circ) / D_{PS}(\rho_P) = 2.13 \phi_P / \tanh(2.13 \phi_P)$$

$$\text{نسبت ویسکوزیته میانگیر پروتئین } \mu(\circ) / \mu(\rho_P) = 1.11 - 0.054\rho_P + 0.00067\rho_P^2 \text{ که در آن } \phi_P = \omega_P \hat{V}_P / (\omega_P \hat{V}_P + \omega_S \hat{V}_S)$$

پروتئین و حلال‌اند.

$$\text{فشار اسمزی } \pi = 0.1013\rho_P^2 \text{ که در آن } \pi \text{ برحسب psi و } \rho_P \text{ برحسب g/100 ml است}$$

$$\text{داده‌های عملیاتی عبارت‌اند از:}$$

اختلاف فشار دو طرف غشا  $(p_0 - p_\delta)$ , psi

سرعت عبور از فیلتر  $v_\delta$ , cm/min

سرعت عبور از فیلتر $v_\delta$ , cm/min	اختلاف فشار دو طرف غشا $(p_0 - p_\delta)$ , psi
0.32	4.0
0.49	7.1
0.49	8.4
0.61	13.6
0.66	14.7
0.74	23.9
0.78	29.7
0.79	30.0
0.81	36.4
0.82	47.0

## فصل ۲۳

### موازنه‌های ماکروسکوپی برای سیستم‌های چندجزئی

۱.۲۳ موازنه‌های ماکروسکوپی جرم

۲.۲۳° موازنه‌های ماکروسکوپی اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای

۳.۲۳ موازنه ماکروسکوپی انرژی

۴.۲۳ موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی

۵.۲۳ استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت پایا

۶.۲۳° استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت ناپایا

کاربردهای قوانین پایستگی جرم، اندازه حرکت، و انرژی در سیستم‌های جریان مهندسی را در فصل ۷ (سیستم‌های هم‌دما) و فصل ۱۵ (سیستم‌های غیرهم‌دما) شرح دادیم. در این فصل بحث خود را با معرفی سه عامل دیگر که در فصل‌های قبل دخالت نداشتند، ادامه می‌دهیم: (الف) سیال موجود در سیستم از بیش از یک گونه شیمیایی تشکیل می‌شود؛ (ب) ممکن است واکنش‌های شیمیایی، همراه با تغییر ترکیب شیمیایی و تولید یا مصرف گرما رخ دهد؛ و (ج) ممکن است جرم از طریق سطوح کرانی سیستم (یعنی سطوحی غیراز صفحه‌های ۱ و ۲) وارد سیستم شود. در شکل ۱-۰.۲۳ مکانیسم‌های مختلف ورود یا خروج جرم از طریق سطوح کرانی سیستم نشان داده شده است.

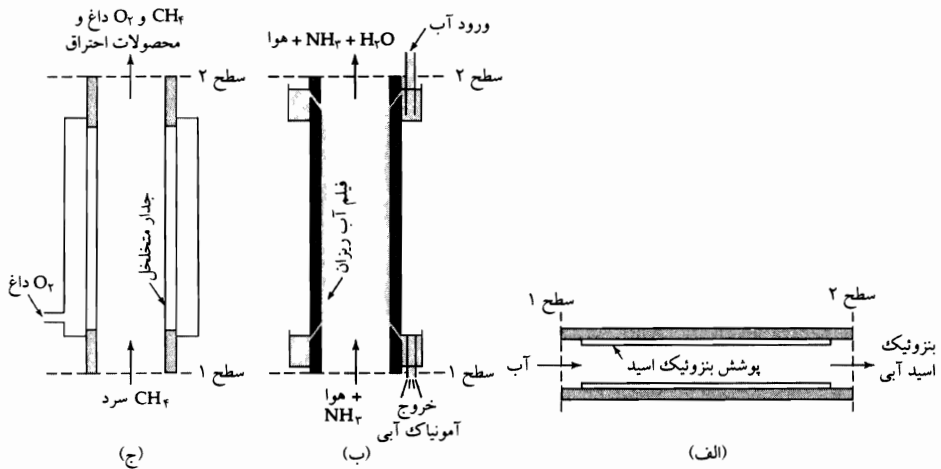
در این فصل موازنه‌های ماکروسکوپی مربوط به وضعیت‌های کلی تر توصیف شده در بالا را خلاصه می‌کنیم. هریک از این موازنه‌ها حاوی یک جمله اضافی است تا انتقال جرم، اندازه حرکت، یا انرژی از طریق سطوح مرزی را منظور کند. موازنه‌هایی که به این ترتیب به دست می‌آیند می‌توانند فرایندهای صنعتی انتقال جرم، مانند جذب، استخراج، تبادل یون، و جذب سطحی گزینشی را توصیف کنند. از آن‌جا که رساله‌های کاملی به شرح این موضوعات اختصاص یافته است،<sup>۳،۲،۱</sup> در این جا صرفاً سعی می‌کنیم نشان دهیم که چگونه مطالب عرضه شده در فصل‌های گذشته، راه را برای بررسی عملیات انتقال جرم هموار می‌کند. خواننده‌ای که علاقه مند است این موضوعات را با عمق بیشتری

1. W. L. McCabe, J. C. Smith, and P. Harriot, *Unit Operations of Chemical Engineering*, McGraw-Hill, New York, 6th edition (2000).

2. T. K. Sherwood, R. L. Pigford and C. R. Wilke, *Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York (1975).

3. R. E. Treybal, *Mass Transfer Operations*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1980).

مطالعه کند، می‌تواند به کتاب‌ها و رساله‌های موجود رجوع کند. ۸۰۷۰۶۰۵۰۴



شکل ۱-۵۰.۲۳ راه‌های ورود یا خروج جرم از طریق سطح مرزی: (الف) بنزولیک اسید از طریق حل کردن جدار وارد سیستم می‌شود؛ (ب) بخار آب از طریق تبخیر وارد سیستم می‌شود، که به صورت فازگازی تعریف شده‌است، و بخار آمونیاک از طریق جذب از سیستم بیرون می‌رود؛ (ج) اکسیژن از طریق تعریق از جدار متخلخل می‌گذرد و وارد سیستم می‌شود.

در این فصل تأکید اصلی بر موازنه‌های جرم برای مخلوط‌هاست. به همین سبب، در بخش ۱.۲۳ پنج مثال ارائه می‌شود که مسائل مطرح در علوم زیست‌محیطی، جداسازی ایزوتوپ‌ها، ارزیابی اقتصادی، و علوم زیست‌پزشکی را نشان می‌دهند. در بخش‌های ۲.۲۳ تا ۴.۲۳ سایر موازنه‌های ماکروسکوپی ارائه می‌شوند. در جدول ۱-۵.۲۳ این موازنه‌ها برای سیستم‌هایی با چند ورودی و خروجی جمع‌بندی شده‌اند. دو بخش آخرین فصل به نشان دادن کاربردهای موازنه‌های ماکروسکوپی در مورد سیستم‌های پیچیده‌تر اختصاص دارد.

### ۱.۲۳ موازنه‌های ماکروسکوپی جرم

قانون پایستگی جرم گونه شیمیایی  $\alpha$  در یک سیستم جریان ماکروسکوپی چندجزئی، چنین بیان می‌شود:

$$\frac{dm_{\alpha,tot}}{dt} = -\Delta w_{\alpha} + w_{\alpha,0} + r_{\alpha,tot} \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1-1.23)$$

رابطه بالا تعمیمی از معادله (۱-۷) است. در این رابطه  $m_{\alpha,tot}$  جرم کل لحظه‌ای  $\alpha$  در سیستم، و  $-\Delta w_{\alpha} = w_{\alpha 1} - w_{\alpha 2} = \rho_{\alpha 1}(v_1)S_1 - \rho_{\alpha 2}(v_2)S_2$  اختلاف بین آهنگ‌های جریان جرمی گونه  $\alpha$  در صفحه‌های ۱ و ۲ است. کمیت  $w_{\alpha,0}$  آهنگ اضافه شدن جرم گونه  $\alpha$  به سیستم، از طریق انتقال جرم در سطح

4. C. J. King, *Separation Processes*, McGraw-Hill, New York (1971).
5. C. D. Holland, *Multicomponent Distillation*, McGraw-Hill, New York (1963).
6. T. C. Lo, M. H. I. Baird, and C. Hanson, eds., *Handbook of Solvent Extraction*, Wiley-Interscience, New York (1983).
7. R. T. Yang. *Gas Separation by Adsorption Processes*, Butter worth, Boston (1987).
8. J. D. Seader and E. J. Hanley, *Separation Process Principles*, Wiley, New York (1998).

مرزی است. توجه کنید که وقتی جرم به سیستم اضافه می‌شود،  $w_{\alpha,0}$  مثبت است، درست همان‌طور که در موازنه انرژی کل، وقتی گرما به سیستم اضافه می‌شود، یا قطعات متحرک روی سیستم کار انجام می‌دهند،  $Q$  و  $W_m$  مثبت تلقی می‌شوند. سرانجام، نماد  $r_{\alpha,tot}$  آهنگ خالص تولید گونه  $\alpha$  از طریق واکنش‌های همگن و ناهمگن در داخل سیستم را نشان می‌دهد.<sup>۱</sup>

یادآوری می‌کنیم که در جدول ۱-۵.۱۵، انتقال مولکولی و گردابی اندازه حرکت و انرژی از طریق سطوح ۱ و ۲ در جهت جریان، در مقابل انتقال همرفتی، نادیده گرفته شد. در این فصل نیز همین کار را انجام می‌دهیم؛ در معادله (۱-۱.۲۳) و در سایر موازنه‌های ماکروسکوپی ارائه شده در این جا.

اگر همه  $N$  معادله (۱-۱.۲۳) را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{dm_{tot}}{dt} = -\Delta w + w_0. \quad (2-1.23)$$

که در آن  $w_0 = \sum_{\alpha} w_{\alpha,0}$  و از قانون پایستگی جرم به صورت  $\sum_{\alpha} r_{\alpha,tot} = 0$  استفاده شده است. نوشتن معادله (۱-۱.۲۳) با واحدهای مولی، غالباً راحت‌تر است:

$$\boxed{\frac{dM_{\alpha,tot}}{dt} = -\Delta W_{\alpha} + W_{\alpha,0} + R_{\alpha,tot} \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, N} \quad (3-1.23)$$

در این جا حروف بزرگ معرف همتهای مولی حروف کوچک در معادله (۱-۱.۲۳) هستند. وقتی معادله (۳-۱.۲۳) را روی همه گونه‌ها جمع ببندیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{dM_{tot}}{dt} = -\Delta W + W_0 + \sum_{\alpha=1}^N R_{\alpha,tot} \quad (4-1.23)$$

جملة آخر در حالت کلی صفر نیست، زیرا در بسیاری از سیستم‌های واکنشی مول‌ها تولید یا مصرف می‌شوند. در بعضی کاربردها، مانند عملیات انتقال جرم پیوسته از لحاظ مکانی، مرسوم است که معادله (۳-۱.۲۳) یا (۳) را برای جزء کوچکی از سیستم بنویسند (یعنی «به صورت  $d$ » که در فصل ۴.۱۵ شرح داده شد). در این صورت دیفرانسیل‌های  $dw_{\alpha,0}$  یا  $dW_{\alpha,0}$  را می‌توان برحسب ضرایب موضعی انتقال جرم بیان کرد.

### مثال ۱-۱.۲۳

دفع فرآورده زاید ناپایدار  
جریانی از سیال، با آهنگ جریان جرمی  $w$ ، از یک واحد شیمیایی بیرون می‌آید و در رودخانه تخلیه می‌شود (شکل ۱-۱.۲۳ الف)). این جریان حاوی ماده زاید  $A$  با کسر جرمی  $\omega_{A,0}$  است که پایدار نیست و با آهنگی متناسب با غلظت آن، طبق رابطه  $r_A = -k'''_{\rho A}$ ، یعنی از طریق یک واکنش مرتبه اول، تجزیه می‌شود.

۱. کمیت‌های  $m_{\alpha,tot}$ ،  $w_{\alpha,0}$  و  $r_{\alpha,tot}$  را می‌توان به صورت انتگرالی بیان کرد:

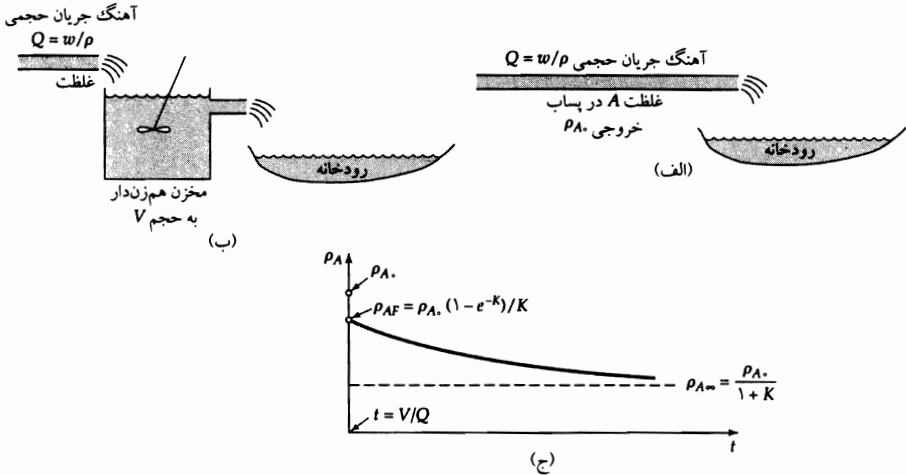
$$m_{\alpha,tot} = \int_V \rho_{\alpha} dV;$$

$$\omega_{\alpha,0} = - \int_{S_0} (\mathbf{n} \cdot \rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) dS;$$

$$r_{\alpha,tot} = \int_V r_{\alpha} dV + \int_{S_0} r_{\alpha}^{(s)} dS \quad (\text{ج، الف، ب، ۱-۱.۲۳})$$

که در آن  $\mathbf{n}$  بردار یکه قائم روبه بیرون است، و  $S_0$  بخشی از سطح کرانی است که انتقال جرم در آن رخ می‌دهد. انتگرال‌دهای  $r_{\alpha,tot}$  آهنگ‌های خالص تولید گونه  $\alpha$ ، به ترتیب، توسط واکنش‌های همگن و ناهمگن‌اند.

برای کاهش آلودگی تصمیم می‌گیرند این جریان را، قبل از تخلیه در رودخانه، از مخزنی به حجم  $V$  عبور دهند (شکل ۱-۱.۲۳ الف). مخزن به هم‌زنی مجهز است که ترکیب شیمیایی سیال داخل مخزن را بسیار نزدیک به حالت یکنواخت نگه می‌دارد. در زمان  $t = 0$ ، سیال ورود به مخزن خالی را آغاز می‌کند. قبل از این که مخزن تا حجم  $V$  پر شود، اصلاً سیال از آن بیرون نمی‌رود. رابطه‌ای برای بیان غلظت سیال داخل مخزن، به صورت تابعی از زمان، هم در حین پر شدن مخزن، و هم پس از آن که مخزن کاملاً پر شد، به دست آورید.



شکل ۱-۱.۲۳ الف) جریان پسماند حاوی آلاینده ناپایدار که مستقیماً در رودخانه تخلیه می‌شود؛ (ب) جریان پسماند با مخزن نگهدارنده که به آلاینده ناپایدار فرصت می‌دهد قبل از ورود به رودخانه تجزیه شود؛ (ج) نمودار غلظت آلاینده تخلیه‌شده در رودخانه پس از پر شدن مخزن (کمیت بدون بُعد  $K$  عبارت است از:  $k'''V/Q$ )

حل

الف) کار را با در نظر گرفتن دوره‌ای آغاز می‌کنیم که مخزن در حال پر شدن است؛ یعنی دوره  $t \leq \rho V/w$  که در آن  $\rho$  جگالی مخلوط سیال است. موازنه ماکروسکوپی جرم، یعنی معادله (۱-۱.۲۳) را در مورد مخزن نگهدارنده به کار می‌بندیم. کمیت  $m_{A,tot}$  در سمت چپ عبارت است از:  $wt\omega_A$  در زمان  $t$ . آهنگ جریان جرمی ورودی به مخزن  $w\omega_A$  است و در این مرحله سیال از مخزن خارج نمی‌شود. گونه  $A$  از فصل مشترک انتقال جرم وارد یا خارج نمی‌شود. آهنگ جرمی تولید گونه  $A$  برابر است با:  $-k'''m_{A,tot}$ ؛  $r_{A,tot} = (wt/\rho)(-k''' \rho_A) = -k'''m_{A,tot}$  بنابراین موازنه ماکروسکوپی جرم برای گونه  $A$  در دوره پر شدن مخزن چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}m_{A,tot} = w\omega_{A0} - k'''m_{A,tot} \quad (5-1.23)$$

این معادله دیفرانسیل مرتبه اول را می‌توان با این شرط اولیه حل کرد که  $m_{A,tot} = 0$  در  $t = 0$ ، نتیجه می‌شود:

$$m_{A,tot} = \frac{w\omega_{A0}}{k'''}(1 - \exp(-k'''t)) \quad (6-1.23)$$

با استفاده از رابطه  $m_{A,tot} = wt\omega_A$  می‌توان این معادله را بر حسب کسر جرمی لحظه‌ای  $A$  در مخزن نوشت:

$$\frac{\omega_A}{\omega_{A0}} = \frac{1 - \exp(-k'''t)}{k'''t} \quad \left(t \leq \frac{\rho V}{w}\right) \quad (7-1.23)$$

کسر جرمی  $A$  در لحظه‌ای که مخزن پر است،  $\omega_{AF}$ ، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\omega_{AF}}{\omega_{A_0}} = \frac{1 - e^{-K}}{K} \quad (۸-۱.۲۳)$$

که در آن  $K = k''' \rho V / w = k''' V / Q$ .

(ب) موازنه جرم در مخزن، پس از پر شدن آن چنین است:

$$\frac{d}{dt}(\rho_A V) = w \omega_{A_0} - w \omega_A - k''' \rho_A V \quad (۹-۱.۲۳)$$

یا، به صورت بدون بُعد، با  $\tau = (w / \rho V) t$ :

$$\frac{d\omega_A}{d\tau} + (1 + K)\omega_A = \omega_{A_0} \quad (۱۰-۱.۲۳)$$

این معادله دیفرانسیل مرتبه اول را می‌توان با این شرط اولیه حل کرد که  $\omega_A = \omega_{AF}$  در  $\tau = 1$  و نتیجه گرفت:

$$\frac{\omega_A - [\omega_{A_0} / (1 + K)]}{\omega_{AF} - [\omega_{A_0} / (1 + K)]} = e^{-(1+K)(\tau-1)} \quad \left(t \geq \frac{\rho V}{w}\right) \quad (۱۱-۱.۲۳)$$

این معادله نشان می‌دهد که با گذشت زمان، کسر جرمی آلاینده‌ای که در رودخانه تخلیه می‌شود، به صورت نمایی کاهش می‌یابد، و یک مقدار حدی به شرح زیر دارد:

$$\omega_{A\infty} = \frac{\omega_{A_0}}{1 + K} = \frac{\omega_{A_0}}{1 + (k''' \rho V / w)} \quad (۱۲-۱.۲۳)$$

منحنی غلظت جرمی به صورت تابعی از زمان، پس از پر شدن مخزن در شکل ۱-۲۳ (ج) نشان داده شده است. می‌توان از این منحنی برای تعیین شرایطی از قبیل گستره مجاز برای غلظت پسماند استفاده کرد. با استفاده از معادله (۱۲-۱.۲۳) می‌توان در مورد ظرفیت مخزن نگهدارنده لازم تصمیم گرفت.

### مثال ۱-۲۳-۲

جداساز دوتایی

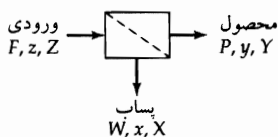
طرز کار یک جداساز دوتایی را توصیف کنید که یکی از متداول‌ترین و ساده‌ترین دستگاه‌های جداساز است (نگاه کنید به شکل ۱-۲۳-۲). در این جا مخلوطی دوتایی از  $A$  و  $B$  به صورت جریان ورودی با آهنگ مولی  $F$  وارد دستگاه می‌شود، و توسط مکانیسم جداسازی به یک جریان محصول با آهنگ مولی  $P$  و یک جریان پسماند با آهنگ مولی  $W$  تقسیم می‌شود. کسر مولی  $A$  (جزء مطلوب) در جریان ورودی  $z$  است و کسرهای مولی در جریان‌های محصول و پسماند، به ترتیب،  $y$  و  $x$  است.

حل

حل مسئله را با نوشتن موازنه‌های ماکروسکوپی حالت پایای جرم برای جزء  $A$  و کل سیال، شروع می‌کنیم:

$$zF = yP + xW \quad (۱۳-۱.۲۳)$$

$$F = P + W \quad (۱۴-۱.۲۳)$$



شکل ۱۰-۲۳-۲ جداساز دوتایی، که در آن جریان ورودی به یک جریان محصول و یک جریان پسماند تقسیم می‌شود.

مرسوم است که نسبت  $\theta = P/F$  آهنگ‌های مولی جریان‌های محصول و ورودی را به صورت برش تعریف کنند. معادله (۱۰-۲۳-۱۳)، پس از حذف  $W$  با استفاده از معادله (۱۰-۲۳-۱۴)، چنین نوشته می‌شود:

$$z = \theta y + (1 - \theta)x \quad (10-23-15)$$

معمولاً برش  $\theta$  و ترکیب شیمیایی ورودی  $z$  معلوم‌اند.

اکنون به رابطه‌ای بین ترکیب‌های شیمیایی ورودی و پسماند نیاز داریم و معمولاً معادله‌ای می‌نویسند که ترکیب‌های دو جریان خروجی را به هم مربوط می‌کند:

$$\Upsilon = \alpha X \quad (10-23-16)$$

در این رابطه  $\alpha$  را ضریب جداسازی می‌نامند که آن هم معمولاً معلوم است، و توانایی جداسازی دستگاه را مشخص می‌کند. در این جا  $\Upsilon$  و  $X$  نسبت‌های مولی‌اند که با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\Upsilon = \frac{y}{1-y}; \quad X = \frac{x}{1-x} \quad (10-23-17, 18)$$

معادله (۱۰-۲۳-۱۶)، برحسب کسرهای مولی، چنین نوشته می‌شود:

$$y = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x} \quad \text{یا} \quad x = \frac{y}{\alpha - (\alpha - 1)y} \quad (10-23-19, 20)$$

معادله‌های (۱۰-۲۳-۱۵) و (۱۰-۲۳-۱۹) (یا ۲۰) طرز کار دستگاه جداساز را به طور کامل توصیف می‌کنند. برای جداسازی بخار-مایع، یعنی تقطیر تعادلی- معمولاً جداساز ایده‌آل را برحسب عملیاتی تعریف می‌کنند که در آن عملیات جریان‌های محصول و پسماند در تعادل باشند. در چنین وضعیتی  $\alpha$  فزاینده‌تری است، و برای سیستم‌های ایده‌آل از لحاظ ترمودینامیکی، صرفاً نسبت فشارهای بخار اجزاست. حتی در سیستم‌های غیرایده‌آل،  $\alpha$  با تغییر ترکیب شیمیایی، نسبتاً به آهستگی تغییر می‌کند. برای جداسازهای واقعی می‌توان  $\alpha$  را برحسب یک عامل تصحیح تجربی- مثلاً بازده تعریف کرد، و داریم:

$$\alpha = E\alpha^* \quad (10-23-21)$$

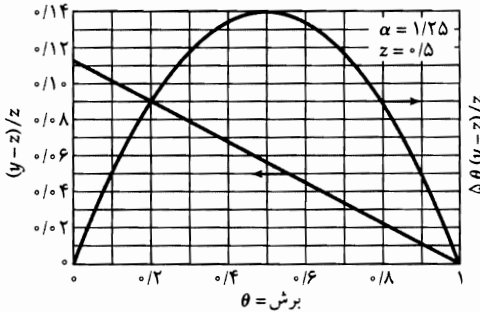
در این رابطه  $\alpha^*$  ضریب جداسازی برای مدل ایده‌آل، و  $E$  عامل تصحیحی است که ناتوانی سیستم واقعی در رسیدن به رفتار ایده‌آل را به حساب می‌آورد.

بنابراین درمی‌یابیم که، به ازای ترکیب شیمیایی ورودی مفروض، غنی‌سازی  $(y - z)/z$  که توسط دستگاه جداساز انجام می‌شود، تابعی از برش  $\theta$  و ضریب جداسازی  $\alpha$  است. غنی‌سازی را می‌توان با استفاده از معادله زیر محاسبه کرد؛ این معادله از ترکیب معادله‌های (۱۰-۲۳-۱۵ و ۲۰) به دست می‌آید:

$$z = \theta y + (1 - \theta) \frac{y}{\alpha(\alpha - 1)y} \quad (10-23-22)$$



معادله بالا معادله‌ای درجه ۲ بر حسب  $y$  است که هرگاه  $z$  معلوم باشد، می‌توان آن را حل کرد و سپس غنی‌سازی  $(y-z)/z$  را به دست آورد. در شکل ۳-۱.۲۳ مثالی نشان داده شده که در آن هم  $(y-z)/z$  و هم  $\Delta\theta(y-z)/z$  به صورت توابعی از  $\theta$  به ازای  $z = \frac{1}{3}$  و  $\alpha = 1/25$  (مقداری معقول برای بسیاری از فرایندها) ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که اگرچه ماکزیمم غنی‌سازی  $(y-z)/z$  به ازای برش‌های نزدیک به صفر حاصل می‌شود، محصول غنی‌سازی و آهنگ تولید آن به ازای مقادیر متوسط  $\theta$  بیش‌ترین مقدار را دارد. یافتن مقدار بهینه  $\theta$  مسئله‌ای است که باید با توجه به عامل‌های اقتصادی آن را حل کرد.



شکل ۳-۱.۲۳ رفتار جداساز دوتایی.

دستگاه‌های جداساز ساده از نوع کلی نشان داده شده در شکل ۲-۱.۲۳ در فرایندهای جداسازی چندمرحله‌ای، به‌عنوان واحد ساختمانی، کاربرد گسترده‌ای دارند. این دستگاه‌ها شامل تبخیرکننده‌ها (اوپراتور) و متبلورکننده‌ها می‌شوند که معمولاً در هر مرحله ضریب جداسازی  $\alpha$  بزرگی دارند، و سیستم‌های تقطیر، جذب گاز، و استخراج مایع که در آن‌ها  $\alpha$  درگستره وسیعی تغییر می‌کند. همه این کاربردها در متن‌های استاندارد که در باب عملیات واحد نوشته شده‌اند، به تفصیل بررسی شده‌اند.

اهمیت فرایندهای غشایی به سرعت روبه افزایش است و بسیاری از اصول طراحی برای صنعت جدا کردن ایزوتوپ‌ها پی‌ریزی شدند.<sup>۲</sup> شرح کاربردهای مدرن این فرایندها نیز در دسترس است.<sup>۳</sup>

### مثال ۳-۱.۲۳

موازنه‌های ماکروسکوپی و «ظرفیت جداسازی» و «تابع مقدار» دیراک در پروژه مانهاتان در دوران جنگ جهانی دوم، دیراک، فیزیک‌دان انگلیسی<sup>۵،۴،۲</sup> از موازنه‌های ماکروسکوپی جرم

2. E. Von Halle and J. Schacter, *Diffusion Separation Methods*, in Volume 8 of *Kirk-Othmer Encyclopedia of Chemical Technology* (M. Howe-Grant, ed.), 4th edition, Wiley, New York (1993), pp. 149-203.

3. W. S. W. Ho & K. K. Sirkar, *Membrane Handbook*, Van Nostrand Reinhold, New York (1992), p. 954; R. D. Noble & S. A. Stern, *Membrane Separations Technology*, Elsevier, Amsterdam (1995), p. 718.

4. P. A. M. Dirac, British Ministry of Supply (1941); this is reprinted in *The Collected Works of P. A. M. Dirac (1924-1948)*; (R. H. Dalitz, ed.) Cambridge University Press (1995).

پل آدریان موریس دیراک (۱۹۰۲-۱۹۸۴)، برنده جایزه نوبل، یکی از پیشگامان پی‌ریزی مکانیک کوانتومی، معادله موج نسبیتی را ابداع و وجود پوزیترون را پیش‌بینی کرد.

5. K. Cohen, *Theory of Isotope Separation*, McGraw-Hill, New York (1951).

معادله (۳-۱.۲۳)، با استفاده از استدلال‌های ترمودینامیکی و ایده‌آل فرض کردن مخلوط‌ها، در منبع زیر نیز به دست آمده است. J. B. Opfell, *AIChE Journal*, **24**, 726-728 (1978).

در یک جداساز دوتایی، جهت ابداع معیاری برای مقایسهٔ بازده فرایندهای مختلف جداسازی - مثلاً نفوذ گرمایی و گریزازمرکز - استفاده کرد. همین معیار در محاسبهٔ جداسازی زیستی نیز مفید واقع شده‌است. همان سیستم جداسازی سادهٔ نشان‌داده‌شده در شکل ۱-۲۳ را در نظر می‌گیریم که در آن  $F$  آهنگ جریان مولی ورودی است که شامل مخلوطی دوتایی از گونه‌های  $A$  و  $B$  است، و  $P$  و  $W$  آهنگ‌های جریان مولی محصول و پسماندند. کسرهای مولی گونهٔ  $A$  در سه جریان، به ترتیب، عبارت‌اند از:  $z$ ،  $y$ ، و  $x$ . در این سیستم مکانیسمی (مثلاً یک غشا) برای افزایش غلظت  $A$  در جریان محصول، و کاهش آن در جریان پسماند وجود دارد. بنابراین ضریب جداسازی  $\alpha$  را، به صورت ارائه‌شده در معادله‌های (۱-۲۳ تا ۱۸) تعریف می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{y/(1-y)}{x/(1-x)} = 1 + \frac{y-x}{x(1-y)} \quad (۱-۲۳، ۲۳)$$

این معادله را به صورت دومی نوشته‌ایم، زیرا فقط جریان‌هایی را در نظر خواهیم گرفت که در آن‌ها گونهٔ  $A$  فقط اندکی غنی‌سازی شده‌است، به طوری که  $\alpha - 1$  کمیتی بسیار کوچک است. وقتی معادلهٔ (۱-۲۳ تا ۲۳) برای یافتن  $y$  به صورت تابعی از  $x$  حل شود، نتیجه می‌شود:

$$y = \frac{x + (\alpha - 1)x}{1 + (\alpha - 1)x} \approx x + (\alpha - 1)x(1 - x) \quad (۱-۲۳، ۲۴)$$

سپس ظرفیت جداسازی دیراک،  $\Delta$ ، را برای این سیستم، به صورت افزایش خالص در «مقدار» (این مقدار می‌تواند، مثلاً، مقدار بولی باشد) جریان‌های دخیل در سیستم تعریف می‌کنیم:

$$\Delta = Pv(y) + Wv(x) - Fv(z) \quad (۱-۲۳، ۲۵)$$

که در آن  $v(x)$  تابع مقدار دیراک است. (در نوشته‌های علمی مربوط به جداسازی، معمولاً ظرفیت جداسازی را با نماد  $\delta U$  نشان می‌دهند.)

نشان دهید که چگونه می‌توان ظرفیت جداسازی و تابع مقدار را با استفاده از تعریف معادلهٔ (۱-۲۳ تا ۲۵)، همراه با موازنه‌های جرم سیستم، به دست آورد.

حل

موازنهٔ جرم کل و موازنهٔ جرم گونهٔ  $A$  عبارت است از:

$$F = P + W; \quad Fz = Py + Wx \quad (۱-۲۳، ۲۶، ۲۷)$$

حال معادلهٔ (۱-۲۳ تا ۲۷) را بر  $F$  تقسیم می‌کنیم و سپس معادلهٔ (۱-۲۳ تا ۲۶) را برای حذف  $W$  به کار می‌گیریم. پس از آن، با معرفی کمیت  $\theta = P/F$  (موسوم به «برش»)، نتیجه می‌شود:

$$z = \theta y + (1 - \theta)x \quad \text{یا} \quad z - x = \theta(y - x) \quad (۱-۲۳، ۲۸)$$

سپس معادلهٔ (۱-۲۳ تا ۲۵) را بر  $F$  تقسیم می‌کنیم و با معرفی  $\theta$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\Delta}{F} = \theta v(y) + (1 - \theta)v(x) - v(z) \quad (۱-۲۳، ۲۹)$$

از آن‌جا که اختلاف بین غلظت‌های جریان‌ها نسبتاً کم است، می‌توان  $v(y)$  و  $v(z)$  را حول  $x$  بسط داد و نتیجه گرفت:

$$v(y) = v(x) + (y - x)v'(x) + \frac{1}{2}(y - x)^2 v''(x) + \dots \quad (۱-۲۳، ۳۰)$$

$$v(z) = v(x) + (z - x)v'(x) + \frac{1}{2}(z - x)^2 v''(x) + \dots \quad (۱-۲۳، ۳۱)$$

که در آن علامت‌های پریم نشانه مشتق‌گیری نسبت به  $x$  است. وقتی این عبارت‌ها را در معادله‌های (۱.۲۳-۲۹) قرار دهیم و از معادله (۱.۲۳-۲۸) استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\Delta}{F} = \frac{1}{\gamma} \theta (1 - \theta) (y - x)^2 v''(x) \quad (۱.۲۳-۳۲)$$

با استفاده از معادله (۱.۲۳-۲۴)، این معادله آخر چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\Delta}{F} = \frac{1}{\gamma} \theta (1 - \theta) (\alpha - 1)^2 x^2 (1 - x)^2 v''(x) \quad (۱.۲۳-۳۳)$$

حال فرض می‌کنیم که ظرفیت جداسازی سیستم از غلظت مستقل است. بنابراین عامل وابستگی به غلظت در معادله (۱.۲۳-۳۳) را برابر واحد می‌گیریم، به طوری‌که:

$$\frac{\Delta}{F} = \frac{1}{\gamma} \theta (1 - \theta) (\alpha - 1)^2 \quad (۱.۲۳-۳۴)$$

عبارت نهایی برای ظرفیت جداسازی است. طبق این عبارت، وقتی سیستم در  $\theta = \frac{1}{\gamma}$  کار می‌کند، ظرفیت جداسازی ماکزیم می‌شود.

حال تابع مقدار دیراک را به دست می‌آوریم، که باید در معادله دیفرانسیل زیر صدق کند:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{x^2 (1 - x)^2} \quad (۱.۲۳-۳۵)$$

با انتگرال‌گیری از این معادله نتیجه می‌شود:

$$v = (2x - 1) \ln \left( \frac{x}{1 - x} \right) - 2 + C_1 x + C_2 \quad (۱.۲۳-۳۶)$$

دو ثابت انتگرال‌گیری را می‌توان به دلخواه تعیین کرد و از چندین انتخاب مختلف استفاده شده‌است. اما، متداول‌ترین انتخاب عبارت است از:  $v\left(\frac{1}{\gamma}\right) = 0$  و  $v'\left(\frac{1}{\gamma}\right) = 0$ . در نتیجه، داریم:

$$v = (2x - 1) \ln \left( \frac{x}{1 - x} \right) \quad (۱.۲۳-۳۷)$$

که جواب مقارن است، به این معنا که  $v(1 - x) = v(x)$  و  $v'(1 - x) = -v'(x)$ .

تابع مقدار  $v(x)$  و ظرفیت جداسازی  $\Delta$  در مقایسه جداسازی‌های انجام‌شده در انواع مختلف تجهیزات، هم‌چنین گستره‌های مختلف غلظت، مفید واقع شده‌است. از دیدگاه اقتصادی  $v(x)$ ، به صورت ارائه‌شده توسط معادله (۱.۲۳-۳۷)، برای تعیین اختلاف قیمت مخلوط‌های ایزوتوپ با درجات خلوص متفاوت، به کار آمده‌است.

### مثال ۱.۲۳-۴

تحلیل بخشی

یکی از ساده‌ترین و سودمندترین کاربردهای موازنه ماکروسکوپی جرم گونه، تحلیل بخشی است که در آن سیستمی پیچیده را به صورت شبکه‌ای از مخلوط‌کن‌های کامل درنظر می‌گیرند که هر یک حجم ثابت دارند و توسط کانال‌هایی با حجم قابل چشم‌پوشی به هم متصل می‌شوند و در کانال‌های اتصال‌دهنده اصلاً پراکنش رخ نمی‌دهد. واحدهای مخلوط‌کنی را درنظر بگیرید که با ۱، ۲، ۳، ...،  $n$ ، ...،  $N$  مشخص می‌شوند و حاوی گونه‌های مختلف‌اند (که با

اندیس‌های  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  مشخص می‌شوند. در این صورت غلظت جرمی  $\rho_{\alpha n}$  گونه  $\alpha$  در واحد  $n$ ، طبق رابطه زیر، با زمان تغییر می‌کند:

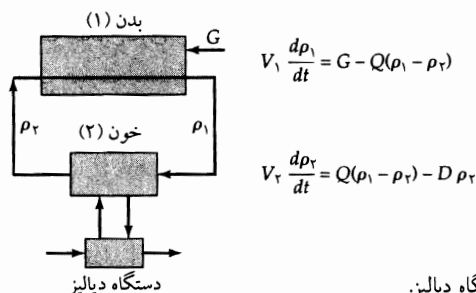
$$V_n \frac{d\rho_{\alpha n}}{dt} = \sum_{m=1}^N Q_{mn}(\rho_{\alpha m} - \rho_{\alpha n}) + V_n r_{\alpha n} \quad (۱.۲۳-۳۸)$$

در این جا  $V_n$  حجم واحد  $n$ ،  $Q_{mn}$  آهنگ جریان حجمی حلال جاری از واحد  $m$  به واحد  $n$ ، و  $r_{\alpha n}$  آهنگ تشکیل گونه  $\alpha$  در واحد حجم در واحد  $n$  است.

نشان دهید که چگونه می‌توان چنین مدلی را تخصصی کرد تا فرآورده‌های متابولیک سمی (یعنی مواد سمی حاصل از سوخت‌وساز در بدن انسان) را، از طریق همودیالیز از بدن بیمار خارج کند. همودیالیز حذف ادواری مواد سمی حاصل از سوخت‌وساز، از طریق ایجاد تماس بین خون و سیال دیالیز، با جریان متقابل، است؛ این دو توسط غشایی سلوفانی از هم جدا می‌شوند که نسبت به مواد حاصل از سوخت‌وساز تراواست.

حل

مدل ساده دوبخشی شکل ۴-۱.۲۳، برای نمایش سیستم همودیالیز کفایت می‌کند. در این جا (مستطیل بزرگ، یا بخش ۱) (که بدن نامیده شده) معرف سیالات مرکب بدن، به‌استثنای سیالات موجود در خون است، و سیالات موجود در خون به‌صورت بخش ۲ معرفی شده‌اند. خون از طریق سیستمی از رگ‌ها، با آهنگ حجمی  $Q$  در بدن گردش می‌کند و در این فرایند مواد حل شده را از جدار رگ‌ها استخراج می‌نماید. بازده این فرایند بسیار بالاست و فرض می‌شود یک ماده حل شده با غلظت  $\rho_1$ ، مساوی با غلظت در سرتاسر بخش، از بخش ۱ خارج شود. به‌طور هم‌زمان، ماده حل شده با آهنگ ثابت  $G$  در داخل سیالات بدن تشکیل می‌شود و در حین دیالیز، توسط دستگاه، با آهنگ  $D\rho_2$  از خون جدا می‌شود. ثابت تناسب  $D$  را «ضریب تصفیه دستگاه دیالیز» می‌نامند و براساس طرح دستگاه و شرایط بهره‌برداری از آن ثابت است.



شکل ۴-۱.۲۳ مدل دوبخشی مورد استفاده برای تحلیل کارکرد دستگاه دیالیز.

این فرایند بسیار پیچیده را که در عمل رخ می‌دهد، با دو معادله مدل‌سازی می‌کنند:

$$V_1 \frac{d\rho_1}{dt} = -Q(\rho_1 - \rho_2) + G \quad V_2 \frac{d\rho_2}{dt} = Q(\rho_1 - \rho_2) - D\rho_2 \quad (۱.۲۳-۳۹, ۴۰)$$

که بین دوره‌های دیالیز  $D = 0$ ، چون فقط یک ماده حل شده را در نظر می‌گیریم، غلظت‌ها فقط یک اندیس دارند که نشان‌دهنده بخش است. زمان  $t$  را از آغاز فرایند دیالیز، وقتی خون و سیالات بدن به‌حالت تعادل باهم بسیار نزدیک‌اند، اندازه‌گیری می‌کنیم، به‌طوری‌که می‌توان شرایط اولیه را چنین نوشت:

$$(۱.۲۳-۴۱) \quad \text{شرط اولیه: در } t = 0, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_0$$

در رابطهٔ بالا  $\rho_0$  ثابت است. اکنون می‌خواهیم عبارت صریحی برای غلظت مواد سمی خون، به صورت تابعی از زمان به دست آوریم.

کار را با جمع کردن معادله‌های (۱.۲۳-۳۹ و ۴۰)، و حل معادلهٔ حاصل برای یافتن  $d\rho_1/dt$  آغاز می‌کنیم. سپس عبارت حاصل را در مشتق معادلهٔ (۱.۲۳-۴۰) نسبت به زمان قرار می‌دهیم تا معادلهٔ دیفرانسیلی برای غلظت مواد سمی در خون به دست آوریم:

$$\frac{d^2 \rho_2}{dt^2} + \left( dQV_1 + \frac{Q}{V_2} + \frac{D}{V_1} \right) \frac{d\rho_2}{dt} + \frac{QD}{V_1 V_2} \rho_2 = \frac{QG}{V_1 V_2} \quad (۱.۲۳-۴۲)$$

با

$$\frac{d\rho_2}{dt} = -\frac{D\rho_0}{V_2} \text{ و } \rho_2 = \rho_0 \text{ در } t = 0, \text{ داریم}$$

شرط اولیهٔ دوم با استفاده از معادله‌های (۱.۲۳-۴۰ و ۴۱) به دست آمد.

اکنون باید این معادله را با مقادیر پارامتری خاصی حل کرد که برای حذف کریستینین از خون یک انسان بالغ ۷۰ کیلوگرمی متداول است:

$\rho_0$	$G$	$D$	$Q$	$V_2$	$V_1$
کمیت (گرم در لیتر)	(گرم در دقیقه)	(لیتر در دقیقه)	(لیتر در دقیقه)	(لیتر)	(لیتر)
۰٫۱۴۰	۰٫۰۰۲۴	۰٫۳	۵٫۴	۴٫۵	۴۳
اندازه					

اکنون معادلهٔ دیفرانسیل و شرایط اولیه به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{d^2 \rho_2}{dt^2} + (۱٫۳۹۲۲) \frac{d\rho_2}{dt} + (۰٫۰۰۸۳۷) \rho_2 = ۶٫۷۰ \times ۱۰^{-۵} \quad (۱.۲۳-۴۴)$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} = -۰٫۰۰۹۳ \text{ و } \rho_2 = \rho_0 \text{ در زمان } t = 0, \text{ داریم}$$

که در آن غلظت برحسب گرم در لیتر و زمان برحسب دقیقه است. تابع مکملی که در معادلهٔ همگن مربوطه صدق می‌کند، عبارت است از:

$$\rho_{2,cf} = C_1 \exp(-۰٫۰۰۶۰۴۳t) + C_2 \exp(-۱٫۳۸۶t) \quad (۱.۲۳-۴۶)$$

و انتگرال خصوصی چنین است:

$$\rho_{2,pi} = ۰٫۰۰۸۰ \quad (۱.۲۳-۴۷)$$

جواب کامل معادلهٔ ناهمگن با جمع کردن تابع مکمل و انتگرال خصوصی به دست می‌آید. وقتی ثابت‌های انتگرال‌گیری با استفاده از شرایط اولیه تعیین شوند، نتیجه می‌شود:

$$\rho_2 = ۰٫۱۲۵۸ \exp(-۰٫۰۰۶۰۴۳t) + ۰٫۰۰۶۲۱ \exp(-۱٫۳۸۶t) + ۰٫۰۰۸۰ \quad (۱.۲۳-۴۸)$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} = -۰٫۰۰۰۷۶۰ \exp(-۰٫۰۰۶۰۴۳t) - ۰٫۰۰۸۶ \exp(-۱٫۳۸۶t) \quad (۱.۲۳-۴۹)$$

این نتیجه برای دورهٔ دیالیز معتبر است.

در دورهٔ بهبودی پس از دیالیز، فرض می‌کنیم کلیهٔ بیمار اصلاً کار نمی‌کند، به طوری که معادلهٔ (۱.۲۳-۴۲) صورت ساده‌تر زیر را پیدا می‌کند.

$$\frac{d^2 \rho_2'}{dt'^2} + Q \left( \frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2} \right) \frac{d\rho_2'}{dt'} = \frac{QG}{V_1 V_2} \quad (۱.۲۳-۵۰)$$

که در آن  $\rho'_f$  غلظت در دوره بهبودی است. تابع مکمل و انتگرال خصوصی عبارت‌اند از:

$$\rho'_{f,cf} = C_f \exp \left[ -Q \left( \frac{V_1 + V_f}{V_1 V_f} \right) t' \right] + C_f \quad (۵۱-۱.۲۳)$$

$$\rho'_{f,pi} = \frac{G t'}{V_1 + V_f} \quad (۵۲-۱.۲۳)$$

که در آن  $t'$  زمان اندازه‌گیری شده از آغاز دوره بهبودی است. با قرار دادن مقادیر عددی، غلظت در دوره بهبودی و مشتق آن نسبت به زمان، به دست می‌آید:

$$\rho'_f = C_f \exp(-۱,۳۲۵ t') + (۵,۰۵ \times ۱۰^{-۵}) t' + C_f \quad (۵۳-۱.۲۳)$$

$$\frac{d\rho'_f}{dt'} = -۱,۳۲۵ C_f \exp(-۱,۳۲۵ t') + (۵,۰۵ \times ۱۰^{-۵}) \quad (۵۴-۱.۲۳)$$

ثابت‌های انتگرال‌گیری را باید از روی شرایط نظیر در  $t' = 0$  تعیین کرد:

$$\rho'_f = \rho_1 \text{ و } \rho'_f = \rho_2 \text{ در } t' = 0 \quad (۵۶, ۵۵-۱.۲۳)$$

برای تعیین ثابت‌های انتگرال‌گیری در معادله (۵۳-۱.۲۳) به شرط اولیه دومی نیاز داریم. این شرط را می‌توان از معادله (۴۰-۱.۲۳) و معادله متناظر برای  $\rho'_f$  (یعنی با  $D = 0$ )، در ترکیب با دو معادله (۵۵-۱.۲۳) و (۵۶) به دست آورد. این شرط چنین است:

$$\frac{d\rho'_f}{dt'} = \frac{d\rho_f}{dt} + \frac{D\rho_f}{V_f} \text{ در } t = 0 \quad (۵۷-۱.۲۳)$$

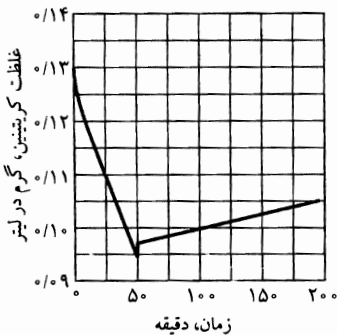
به منظور نشان دادن نتیجه، فرض می‌کنیم عمل دیالیز طی ۵۰ دقیقه به پایان خواهد رسید، و به ازای آن:

$$\rho_2(t = 50) = 0,۰۹۹۲۳۹ = \rho'_f \quad (۵۸-۱.۲۳)$$

اکنون اطلاعات کافی برای تعیین ثابت‌های انتگرال‌گیری در اختیار داریم و بنابراین غلظت آلاینده‌ها در خون، در دوره بهبودی را به دست می‌آوریم:

$$\rho'_f = 0,۱۰۵۶ - 0,۰۰۴۶۲ \exp(-۱,۳۲۶ t') + (۵,۰۵ \times ۱۰^{-۵}) t' \quad (۵۹-۱.۲۳)$$

معادله‌های (۴۸-۱.۲۳) و (۵۹) در شکل ۵-۱.۲۳ ترسیم شده‌اند.

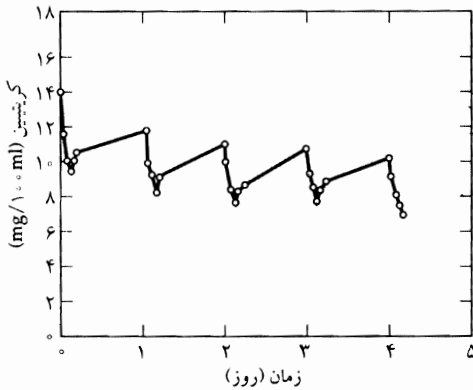


شکل ۵-۱.۲۳ فارماکوکینتیک دیالیز: پیش‌بینی مدل.

شکل ۶-۱.۲۳ احتمالاً جالب‌تر است، زیرا این شکل کاربرد معادله‌های (۳۹-۱.۲۳) و (۴۰) را در مورد یک بیمار

واقعی نشان می‌دهد. در این شکل نقطه‌ها معرف داده‌ها و خطوط پیش‌بینی‌های مدل‌اند. در این‌جا فقط ضریب تصفیه دستگاه دیالیز و غلظت کریتینین معلوم است و از داده‌های چرخه اول برای تخمین زدن پارامترهای باقی‌مانده استفاده می‌شود. سپس می‌توان از مدل حاصل برای پیش‌بینی سه چرخه بعدی استفاده کرد. مشاهده می‌کنیم که این رهیافت داده‌ها را بسیار خوب به هم مربوط می‌کند و از لحاظ پیش‌بینی ارزشمند است. توجه کنید که افزایش ناگهانی غلظت کریتینین در ۵۰ دقیقه از این واقعیت ناشی می‌شود که دستگاه دیالیز دیگر نمی‌تواند آن را از خون جدا کند. در نتیجه، عدم تعادل بین خون و بقیه بدن کاهش می‌یابد.

مدل‌های بخشی مشابه در پزشکی کاربرد گسترده‌ای دارند و در این حوزه آن‌ها را مدل‌های فارماکوسینتیکی می‌نامند.<sup>۶</sup> بیشاف و ددریک<sup>۷</sup> پیشگامان مدل‌سازی فارماکوسینتیکی پیشینی به‌شمار می‌روند، که در آن پارامترهای مدل به‌طور جداگانه، از روی فرایندهایی که مدل‌سازی می‌شوند، به‌دست می‌آیند.



شکل ۱-۲۳-۶ داده‌های تجربی (نقاط) و شبیه‌سازی شده کریتینین (منحنی‌های خط‌پر) برای یک بیمار دیالیزی.

### مثال ۱-۲۳-۵

ثابت‌های زمانی و عدم حساسیت به مدل

در مثال قبل آشکار است که، حتی در بررسی سطحی، نه سیالات بدن و نه خون در گردش، با مخازن اختلاط ایده‌آل وجه اشتراک زیادی ندارند و بنابراین بررسی انتقادی موفقیت یک مدل بخشی ساده جالب است. برای شروع این بررسی، پاسخ (یعنی غلظت خروجی) دو سیستم نسبتاً متفاوت شکل ۱-۲۳-۷ را، در برابر ورودی ماده حل‌شده‌ای که به‌طور نمایی تجزیه می‌شود، مقایسه کنید: یکی که در آن سیال ورودی جریان فالبی دارد (راکتور با جریان فالبی، PFR)، و دیگری که به‌صورت مخلوط‌کنی کامل (یا راکتور مخزنی با هم‌زنی پیوسته، CSTR) عمل می‌کند. مطابق شکل ۱-۲۳-۷، پاسخ‌های PFR و CSTR به ورودی پالسی، کاملاً متفاوت است. جریان در هر سیستم را حالت پایا و با آهنگ جریان حجمی  $Q$  فرض کنید، و به‌علاوه فرض کنید که ماده کم‌مقداری که ردگیری می‌شود رقیق‌تر از آن است که بر رفتار جریان حلال حامل اثر بگذارد. فرض کنید هیچ واکنشی انجام نمی‌شود.

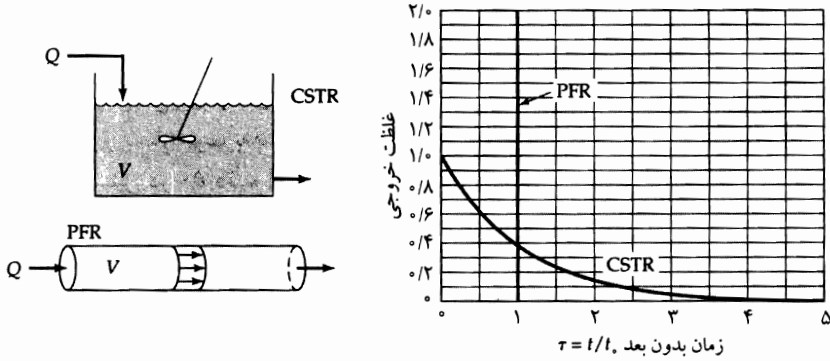
حل

فرض می‌کنیم که در سرتاسر هردو سیستم، غلظت ابتدا صفر است و غلظت گونه  $\alpha$  در جریان ورودی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho_{\alpha} = \rho_0 \exp(-t/t_0) \quad (60-1.23)$$

6. P. G. Welling, *Pharmacokinetics*, American Chemical Society (1997).

7. K. B. Bischoff and R. L. Dedrick, *J. Pharm. Sci.*, **87**, 1347-1357 (1968); *AIChE Symposium Series*, **64**, 32-44 (1968).



شکل ۱.۲۳-۷ پاسخ‌های PFR و CSTR به ورودی پالسی.

که در آن  $\rho_0$  و  $t_0$  ثابت‌های خاص این مسئله‌اند.

برای PFR، غلظت جریان خروجی، فقط تأخیر زمانی و کاهش را نشان می‌دهد و می‌توان فوراً نوشت که به‌ازای

$$X = \rho_0 / \rho$$

$$X = 0 \quad \text{به‌ازای } t < t_{res} \quad (61-1.23)$$

که در آن  $t_{res} = V/Q$  زمان میانگین اقامت ماده حل‌شده یا؛ ثابت زمانی دومی است که بر سیستم اعمال می‌کنیم. نتیجه برای زمان طولانی‌تر چنین است:

$$X = \exp[-(t - t_{res})/t_0] \quad \text{به‌ازای } t > t_{res} \quad (62-1.23)$$

که در این جا بیش‌تر مورد علاقه ماست.

برای CSTR، کار را با معادله دیفرانسیل پایه:

$$V \frac{dX}{dt} = Q(\exp(-t/t_0) - X) \quad (63-1.23)$$

با شرط اولیه  $X = 0$  در  $t = 0$  آغاز می‌کنیم. این معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول، جوابی به‌صورت زیر دارد:

$$X = \left( \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right) (e^{-\tau} - e^{-\alpha\tau}) \quad (\alpha \neq 1) \quad (64-1.23)$$

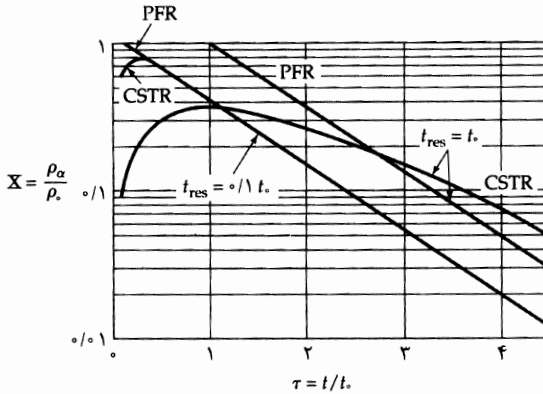
$$X = \tau e^{-\tau} \quad (\alpha = 1) \quad (65-1.23)$$

که در آن  $\alpha = t_0/t_{res}$  و  $\tau = t/t_0$ . در شکل ۱.۲۳-۸ غلظت‌های خروجی به‌صورت توابعی از زمان بدون بُعد  $\tau = t/t_0$  برای هر رآکتور، و به‌ازای  $t_{res}/t_0 = 1/\alpha$  مساوی ۱ و ۱/۱۰ ترسیم شده‌است.

مشاهده می‌شود که به‌ازای  $1/\alpha = t_{res}/t_0 = 1/10$ ، دو رآکتور غلظت‌های خروجی بسیار متفاوتی را تولید می‌کنند که قابل‌انتظار نیز هست. اما به‌ازای  $1 \ll t_{res}/t_0$  و در صورتی که  $t$  از  $t_{res}$  بسیار بزرگ‌تر باشد، منحنی‌های مربوط به خروجی دو رآکتور را عملاً نمی‌توان از هم تشخیص داد. این ناحیه معتبر بودن تحلیل بخشی است و می‌بینیم که علاوه بر ثابت‌های زمانی که خود سیستم اعمال می‌کند، یک ثابت زمانی دیگر  $t_{obs}$  نیز وجود دارد که زمانی است که در آن مشاهده غلظت خروجی آغاز می‌شود. بنابراین می‌توان گستره اعتبار تحلیل بخشی را با نامعادله‌های زیر تعریف کرد:

$$t_0 \gg t_{res} \quad \text{و} \quad t_{obs} \geq t_{res} \quad (66-1.23)$$





شکل ۲.۲۳-۸ پاسخ PFR و CSTR به ورودی با کاهش نمایی.

پس، تحلیل بخشی به منزله توصیف تقریبی درازمدت سیستمی که نسبت به زمان‌های اقامت ماده حل شده در واحدهای تشکیل دهنده آن به آهستگی پاسخ می‌دهد، بیش‌ترین سودمندی را دارد. فوراً مشاهده می‌شود که چنین شرایطی در مثال ۲.۲۳-۴ برآورده می‌شود که در آن غلظت‌های درازمدت ماده سمی بیش‌ترین اهمیت را دارند.

معادله (۲.۲۳-۶) شرایط لازم برای فارماکوسینتیک را، که در انواع مختلفی از مسائل انتقال-واکنش زیست‌شناختی با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم، جمع‌بندی می‌کند. این شرایط در بسیاری از وضعیت‌های زیست‌محیطی نیز برآورده می‌شوند.<sup>۸</sup>

### ۲.۲۳ موازنه‌های ماکروسکوپی اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای

بیان‌های ماکروسکوپی قوانین پایستگی اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای برای مخلوط سیال، در صورتی که گرانش تنها نیروی خارجی باشد، عبارت‌اند از:

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{tot}}}{dt} = -\Delta \left( \frac{\langle v' \rangle}{\langle v \rangle} w + pS \right) \mathbf{u} + \mathbf{F}_{s \rightarrow f} + \mathbf{F}_e + m_{\text{tot}} \mathbf{g} \quad (1-2.23)$$

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{tot}}}{dt} = -\Delta \left( \frac{\langle v' \rangle}{\langle v \rangle} w + pS \right) [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] + \mathbf{T}_{s \rightarrow f} + \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_{\text{ext}} \quad (2-2.23)$$

این معادله‌ها (که به ندرت به کار می‌روند) همان معادله‌های (۲-۲.۷) و (۲-۳.۷) هستند، با این تفاوت که جمله‌های  $\mathbf{F}_e$  و  $\mathbf{T}_e$  به آن‌ها اضافه شده است که شارهای خالص<sup>۱</sup>

اندازه حرکت و اندازه حرکت زاویه‌ای به داخل سیستم، از طریق انتقال جرم‌اند. در اغلب فرایندهای انتقال جرم، این جمله‌ها چنان کوچک‌اند که می‌توان آن‌ها را نادیده گرفت.

8. F. H. Shair and K. L. Heitner, *Envir. Sci. and Tech.*, 8, 444-451 (1974).

۱. این جمله‌ها را می‌توان به صورت انتگرال‌های زیر نوشت،

$$\mathbf{F}_e = - \int_{S_e} [\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] dS; \quad \mathbf{T}_e = - \int_{S_e} [\mathbf{n} \cdot \{ \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \}] dS \quad (1-2.23 \text{ الف، ب})$$

که در آن  $\mathbf{n}$  بردار یکه قائم روبه بیرون است.

## ۳.۲۳ موازنه ماکروسکوپی انرژی

برای مخلوطی سیال، بیان ماکروسکوپی قانون پایستگی انرژی چنین است:

$$\frac{d}{dt}(U_{\text{tot}} + K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}) = -\Delta \left[ \left( \hat{U} + p\hat{V} + \frac{1}{2} \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} + \hat{\Phi} \right) w \right] + Q_0 + Q + W_m \quad (۱-۳.۲۳)$$

این معادله همان معادله (۲-۱.۱۵) است، با این تفاوت که یک جمله  $Q_0$  به آن اضافه شده است.<sup>۱</sup> این جمله اضافه شدن انرژی به سیستم، در نتیجه انتقال جرم، را منظور می‌کند. ممکن است این جمله اهمیت خاصی داشته باشد، به ویژه اگر ماده‌ای که از سطح مرزی وارد می‌شود دمایی بسیار بالاتر یا پایین‌تر از سیال داخل سیستم داشته باشد، یا در سیستم واکنش شیمیایی انجام دهد.

وقتی واکنش‌های شیمیایی رخ می‌دهد، ممکن است گرمای زیادی آزاد یا جذب شود. در محاسبه آنتالپی جریان‌های ورودی و خروجی، این گرمای واکنش به‌طور خودکار به حساب می‌آید (نگاه کنید به مثال ۵.۲۳-۱). در بعضی کاربردها، که در آن‌ها آهنگ‌های انتقال انرژی در سطح تابع مکان‌اند، راحت‌تر این است که معادله (۱-۳.۲۳) را چنان‌که در بخش ۴.۱۵ توصیف شد، به صورت  $d$ ؛ یعنی روی جزء کوچکی از سیستم جریان، بازنویسی کنیم. سپس گرمای جزئی اضافه شده،  $dQ$ ، را می‌توان برحسب ضریب انتقال گرمای موضعی بیان کرد.

## ۴.۲۳ موازنه ماکروسکوپی انرژی مکانیکی

بررسی دقیق اشتقاق موازنه انرژی مکانیکی در بخش ۸.۷ نشان می‌دهد که نتیجه به دست آمده در آن‌جا در مورد مخلوط‌ها، هم چنین سیال‌های خالص، صادق است. اکنون اگر سطح  $S_0$  را نیز مشمول کنیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{d}{dt}(K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}) = -\Delta \left[ \left( \frac{1}{2} \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} + \hat{\Phi} + \frac{p}{\rho} \right) w \right] + B_0 + W_m - E_c - E_v \quad (۱-۴.۲۳)$$

این همان معادله (۲-۴.۷) است، با این تفاوت که جمله  $B_0$  به آن افزوده شده است که انتقال انرژی مکانیکی در مرز انتقال جرم را به حساب می‌آورد.<sup>۱</sup> کاربرد این معادله در مثال ۳-۵.۲۲ نشان داده شد.

## ۵.۴۴ استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت پایا

موازنه‌های ماکروسکوپی در جدول ۵-۵.۲۳ برای سیستم‌هایی با بیش از یک صفحه ورود و خروج خلاصه شده‌اند. جمله‌هایی که اندیس «۰» دارند، اضافه شدن یا کم شدن جرم، اندازه حرکت، اندازه حرکت زاویه‌ای، انرژی، و انرژی مکانیکی را در سطوح انتقال جرم توصیف می‌کنند. این موازنه‌ها معمولاً به صورت کامل به کار نمی‌روند، اما بهتر است در هنگام حل مسئله فهرست کاملی از آن‌ها را در اختیار داشت. برای مسئله‌های حالت پایا، سمت چپ معادله‌ها را

۱. این جمله را می‌توان به صورت انتگرال نوشت،

$$Q_0 = - \int_{S_0} \left( \mathbf{n} \cdot \left\{ \frac{1}{\rho} \rho v^2 \mathbf{v} + \rho \hat{\Phi} \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha} \bar{H} \mathbf{v}_{\alpha} \right\} \right) dS \quad (۱۱-۳.۲۳)$$

که در آن  $\mathbf{n}$  برداریکه قائم رویه بیرون است. منشأ این جمله را می‌توان با رجوع به معادله (۵-۳.۱۹) و معادله (ح) جدول ۱-۸.۱۷ مشاهده کرد. ۱. این جمله برحسب انتگرال سطح چنین نوشته می‌شود:

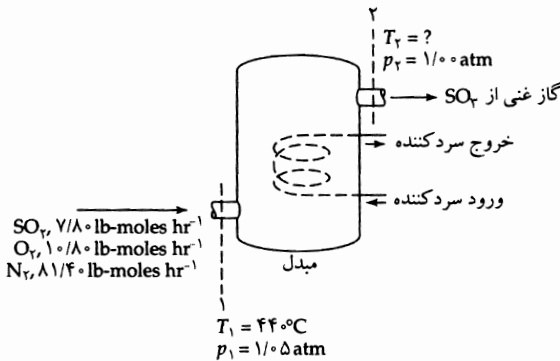
$$B_0 = - \int_{S_0} (\mathbf{n} \cdot \left\{ \frac{1}{\rho} \rho v^2 + \rho \hat{\Phi} + p \right\} \mathbf{v}) dS \quad (۱۱-۴.۲۳)$$

می‌توان حذف کرد. چنان‌که در فصل‌های ۷ و ۱۵ دیدیم، برای استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی به قوه‌ی شهودی نیرومندی نیاز است و گاهی باید این معادله‌ها را با مشاهدات تجربی تکمیل کرد.

**مثال ۱-۵.۲۳**

موازنه‌های انرژی برای مبدل گوگرد دیوکسید گازهای داغ خروجی از یک مشعل گوگرد وارد مبدل می‌شود که در آن گوگرد دیوکسید موجود است تا به صورت کاتالیزی اکسید و به گوگرد تریوکسید تبدیل شود؛ این تبدیل طبق واکنش  $SO_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightleftharpoons SO_3$  انجام می‌شود. مطلوب است تعیین مقدار گرمایی که باید در هر ساعت از مبدل دفع شود تا ۹۵٪  $SO_2$ ، در شرایط مفروض در شکل ۱-۵.۲۳، به تریوکسید تبدیل شود. فرض کنید مبدل به اندازه‌ی کافی بزرگ هست که بتوان اجزای گاز خروجی را در تعادل ترمودینامیکی باهم فرض کرد. یعنی، فشارهای جزئی گازهای خروجی با قید تعادل زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$K_p = \frac{p_{SO_3}}{p_{SO_2} p_{O_2}^{1/2}} \quad (1-5.23)$$



شکل ۱-۵.۲۳ اکسایش کاتالیزی گوگرد دیوکسید.

مقادیر تقریبی  $K_p$  برای این واکنش عبارت‌اند از:

$T(K)$	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰
$K_p(\text{atm}^{-1/2})$	۹۵۰۰	۸۸۰	۶۹٫۵	۹٫۸

حل

بهر است این مسئله را به دو بخش تقسیم کنیم: (الف) ابتدا از موازنه جرم و معادله تعادل برای یافتن دمای خروجی مطلوب استفاده می‌کنیم، و سپس (ب) از موازنه انرژی برای تعیین آهنگ حذف گرما استفاده خواهیم کرد.

(الف) تعیین  $T_2$ . حل مسئله را با نوشتن موازنه ماکروسکوپی حالت‌پایای جرم، معادله (۱-۲۳)، برای تشکیل دهنده‌های مختلف دو جریان، به صورت زیر آغاز می‌کنیم:

$$W_{\alpha 2} = W_{\alpha 1} + R_{\alpha, \text{tot}} \quad (2-5.23)$$

جدول ۱-۵.۲۳ موازنه‌های ماکروسکوپی حالت ناپایا برای سیستم‌های چندجزئی غیرهم‌دم.

(الف)	$\frac{d}{dt} m_{\text{tot}} = \sum w_1 - \sum w_r + w_o = \sum \rho_1 \langle v_1 \rangle S_1 - \sum \rho_r \langle v_r \rangle S_r + w_o$	جرم
(ب)	$\frac{d}{dt} m_{\alpha, \text{tot}} = \sum w_{\alpha 1} - \sum w_{\alpha r} + w_{\alpha o} + r_{\alpha, \text{tot}} \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, N$	جرم گونه $\alpha$
(ج)	$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_{\text{tot}} = \sum \left( \frac{\langle v_1^x \rangle}{\langle v_1 \rangle} w_1 + P_1 S_1 \right) \mathbf{u}_1 - \sum \left( \frac{\langle v_r^x \rangle}{\langle v_r \rangle} w_r + p_r S_r \right) \mathbf{u}_r + m_{\text{tot}} \mathbf{g} + \mathbf{F}_o - \mathbf{F}_{f \rightarrow s}$	اندازه حرکت
(د)	$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{\text{tot}} = \sum \left( \frac{\langle v_1^x \rangle}{\langle v_1 \rangle} w_1 + P_1 S_1 \right) [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1] - \sum \left( \frac{\langle v_r^x \rangle}{\langle v_r \rangle} w_r + p_r S_r \right) [\mathbf{r}^r \times \mathbf{u}^r] + \mathbf{T}_{\text{ext}} + \mathbf{T}_o - \mathbf{T}_{f \rightarrow s}$	اندازه حرکت زاویه‌ای
(ه)	$\frac{d}{dt} (K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}}) = \sum \left( \frac{1}{\bar{v}} \frac{\langle v_1^x \rangle}{\langle v_1 \rangle} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) w_1 - \sum \left( \frac{1}{\bar{v}} \frac{\langle v_r^x \rangle}{\langle v_r \rangle} + gh_r + \frac{p_r}{\rho_r} \right) w_r + W_m + B_o - E_c - E_v$	انرژی مکانیکی
(و)	$\frac{d}{dt} (K_{\text{tot}} + \Phi_{\text{tot}} + U_{\text{tot}}) = \sum \left( \frac{1}{\bar{v}} \frac{\langle v_1^x \rangle}{\langle v_1 \rangle} + gh_1 + \hat{H}_1 \right) w_1 - \sum \left( \frac{1}{\bar{v}} \frac{\langle v_r^x \rangle}{\langle v_r \rangle} + gh_r + \hat{H}_r \right) w_r + W_m + Q_o + Q$	انرژی کل

تذکر:

- (الف)  $\sum w_{a1} = w_{a1a} + w_{a1b} + w_{a1c} + \dots$  که در آن  $w_{a1a} = \rho_{a1a} v_{1a} S_{1a}$  و غیره؛ با جایگزینی نمادهای نوشته شده با حروف کوچک، توسط حروف بزرگ و اضافه کردن جمله  $\sum_a R_{a, \text{tot}}$ ، برای منظور کردن این نکته در واکنش شیمیایی نیازی به پایستگی مول‌ها نیست و می‌توان معادله‌های (الف) و (ب) را برحسب واحدهای مولی نوشت.
- (ب)  $h_1$  و  $h_r$  ارتفاع نسبت به صفحه مبناى اختیاری‌اند.
- (ج)  $H_1$  و  $H_r$  آنتالپی در واحد جرم (برای مخلوط) نسبت به حالت مرجع انتخابی دلخواه‌اند؛ نگاه کنید به مثال ۱۹-۳-۱.
- (د) همه معادله‌ها برای جریان تراکم‌پذیر نوشته می‌شوند؛ برای جریان تراکم‌ناپذیر،  $E_c = 0$ . کمیت‌های  $E_v$  و  $E_c$  در معادله‌های (۴-۳-۷) تعریف شدند.
- (ه)  $u_1$  و  $u_r$  بردارهای یکه در جهت جریان‌اند.

به‌علاوه، از دو رابطه استوکومیتری استفاده می‌کنیم:

$$R_{\text{SO}_r, \text{tot}} = -R_{\text{SO}_r, \text{tot}} \quad R_{\text{O}_r, \text{tot}} = \frac{1}{\bar{v}} R_{\text{SO}_r, \text{tot}} \quad (۴-۳-۵.۲۳)$$

اکنون می‌توان آهنگ‌های جریان مولی در سطح ۲ را به‌دست آورد:

$$W_{\text{SO}_r, 2} = 7,80 - (0,95)(7,80) = 0,38 \text{ lb-mole/hr} \quad (۵-۵.۲۳)$$

$$W_{\text{SO}_r, 2} = 0 + (0,95)(7,80) = 7,42 \text{ lb-mole/hr} \quad (۶-۵.۲۳)$$

$$W_{\text{O}_r, 2} = 10,80 - \frac{1}{\bar{v}} (0,95)(7,80) = 7,09 \text{ lb-mole/hr} \quad (۷-۵.۲۳)$$

$$W_{N_2,2} = W_{N_2,1} = 81,40 \text{ lb-mole/hr} \quad (8-5.23)$$

$$W_2 = 0,38 + 7,42 + 7,09 + 81,40 = 96,29 \text{ lb-mole/hr} \quad (9-5.23)$$

سپس با قرار دادن مقادیر عددی در معادله تعادل (۱-۵.۲۳)، نتیجه می‌شود:

$$K_p = \frac{(7,42/96,29)}{(0,38/96,29)(7,09/96,29)^{1/2}} = 72,0 \text{ atm}^{-1/2} \quad (10-5.23)$$

طبق داده‌های تعادلی گفته شده در بالا، این مقدار  $K_p$  با دمای خروجی  $T_2$  حدود  $510^\circ\text{C}$  متناظر است. (ب) محاسبه میزان دفع گرمای لازم. چنانکه نتایج مثال ۱۵-۳ نشان می‌دهد، در این جا می‌توان از تغییر در انرژی جنبشی و پتانسیل، در مقایسه با تغییر آنتالپی، چشم‌پوشی کرد. به علاوه، برای شرایط این مثال، می‌توان رفتار گاز را ایده‌آل فرض کرد. بنابراین، برای هر جزء سازنده،  $\bar{H}_\alpha = \bar{H}_\alpha(T)$  سپس می‌توان موازنه ماکروسکوپی انرژی، یعنی معادله (۱-۳.۲۳) را به صورت زیر نوشت:

$$-Q = \sum_{\alpha=1}^N (W_\alpha \bar{H}_\alpha)_1 - \sum_{\alpha=1}^N (W_\alpha \bar{H}_\alpha)_2 \quad (11-5.23)$$

برای هر جزء مستقل می‌توان نوشت:

$$\bar{H}_\alpha = \bar{H}_\alpha^\circ + (\bar{C}_{p\alpha})_{\text{avg}}(T - T^\circ) \quad (12-5.23)$$

در این جا  $\bar{H}_\alpha^\circ$  آنتالپی استاندارد تشکیل<sup>۲</sup> گونه<sup>۲</sup>  $\alpha$  از عناصر سازنده‌اش، در دمای مرجع آنتالپی  $T^\circ$ ، و  $(\bar{C}_{p\alpha})_{\text{avg}}$  ظرفیت گرمایی میانگین<sup>۲</sup> گونه<sup>۲</sup> بین  $T$  و  $T^\circ$  است. در شرایط این مسئله، می‌توان از مقادیر عددی زیر<sup>۲</sup> برای این خواص فیزیکی استفاده کرد (دو ستون آخر از معادله (۱۲-۵.۲۳) به دست آمده‌اند):

		$(\bar{C}_{p\alpha})_{\text{avg}}$ [cal/g-mole · C] از $25^\circ\text{C}$ تا		$\bar{H}_\alpha^\circ$ cal/g-mole	
$(W_\alpha \bar{H}_\alpha)_2$	$(W_\alpha \bar{H}_\alpha)_1$	$510^\circ\text{C}$	$440^\circ\text{C}$	در $25^\circ\text{C}$	گونه
-۴۴۸۰۰	-۹۳۱۹۰۰	۱۱,۲۴	۱۱,۰۵	-۷۰۹۶۰	SO <sub>۲</sub>
-۱۱۵۸۷۰۰	۰	۱۵,۸۷	-	-۹۴۴۵۰	SO <sub>۲</sub>
۴۶۶۰۰	۶۰۱۰۰	۷,۵۳	۷,۴۵	۰	O <sub>۲</sub>
۵۰۹۵۰۰	۴۳۳۰۰۰	۷,۱۷	۷,۱۲	۰	N <sub>۲</sub>
-۶۴۷۴۰۰	-۴۳۸۸۰۰	جمع			

با قرار دادن مقادیر بالا در معادله (۱۱-۵.۲۳)، آهنگ دفع گرما به دست می‌آید:

$$-Q = (-۴۳۸,۸۰۰) - (-۶۴۷,۴۰۰) = ۲۰۸,۶۰۰ \text{ Btu/hr} \quad (13-5.23)$$

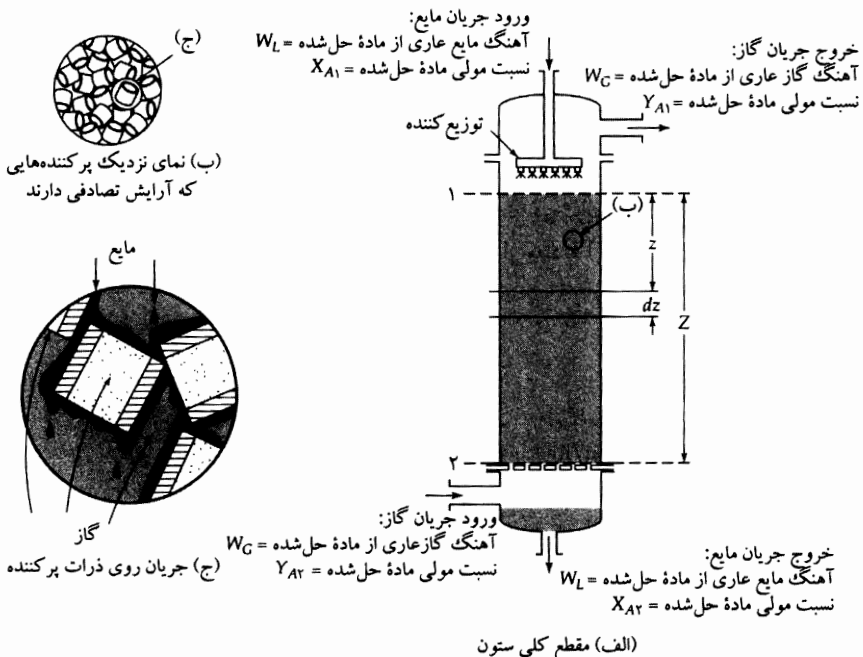
۲. مثلاً نگاه کنید به

مثال ۲۳-۵

ارتفاع برج جذب پر شده<sup>۳</sup>

می‌خواهیم گاز انحلال‌پذیر  $A$  را از مخلوط  $A$  و گاز انحلال‌ناپذیر  $B$  جدا کنیم و به‌این‌منظور در دستگاهی مطابق شکل ۲۳-۵، مخلوط گازی را با حلال مایع غیرقزاز  $L$  در تماس قرار می‌دهیم. این دستگاه اساساً از یک لوله عمودی تشکیل می‌شود که با حلقه‌های کوچکی از یک ماده شیمیایی بی‌اثر، با آرایش تصادفی، پر شده‌است. مایع  $L$  به‌طور یکنواخت روی حلقه‌ها پاشیده می‌شود و روی سطح این حلقه‌های کوچک می‌چکد. در انجام این کار، مایع با گازی که به‌سمت بالای برج می‌رود، کاملاً تماس پیدا می‌کند. این تماس مستقیم بین دو جریان، انتقال  $A$  از گاز به مایع را امکان‌پذیر می‌کند.

جریان‌های گاز و مایع، به‌ترتیب، با آهنگ‌های مولی  $-W_G$  و  $W_L$ ، براساسی عاری از  $A$ ، وارد دستگاه می‌شوند. توجه کنید که آهنگ مولی گاز منفی است، زیرا در این مسئله جریان گاز از صفحه ۲ به‌طرف صفحه ۱ است. نسبت مولی  $A$  به  $G$  در جریان گاز ورودی برابر است با:  $Y_{A2} = y_{A2}/(1 - y_{A2})$  و نسبت مولی  $A$  به  $L$  در جریان مایع ورودی برابر است با:  $X_{A1} = x_{A1}/(1 - x_{A1})$ . عبارتی برای ارتفاع برج،  $Z$ ، لازم برای کاهش نسبت مولی  $A$  در جریان گاز، از  $Y_{A2}$  به  $Y_{A1}$ ، برحسب ضرایب انتقال جرم در دو جریان و آهنگ‌های جریان و ترکیب‌های شیمیایی پیدا کنید.

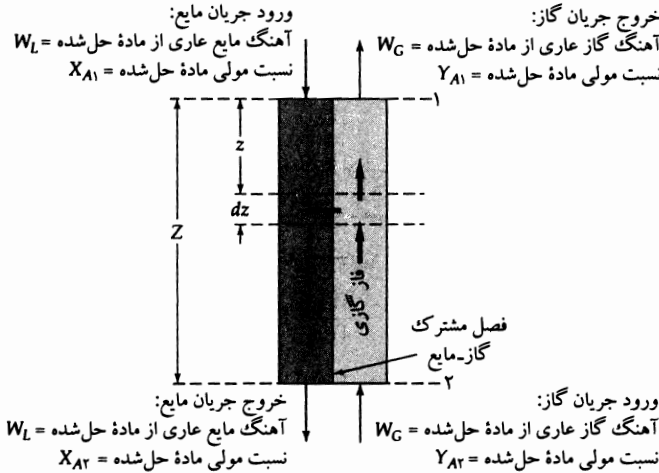


شکل ۲۳-۵ دستگاه انتقال جرم از نوع ستون پر شده که در آن فاز در حال نزول پاشیده می‌شود. توجه کنید که در این نمودار،  $W_G$  منفی است؛ یعنی گاز از ۲ به‌سمت ۱ می‌رود.

فرض کنید که غلظت  $A$  در هر دو جریان، همواره کوچک است، به‌طوری‌که عملیات را می‌توان هم‌دما فرض کرد و بنابراین به تصحیح‌های آهنگ بالای انتقال جرم، در مورد ضرایب انتقال جرم نیازی نیست، و از ضرایب انتقال جرم ۳. J. D. Seader and E. J. Henley, *Separation Process Principles*, Wiley, New York (1998).

جرم،  $k_x^o$  و  $k_y^o$ ، تعریف شده در سطر دوم معادله (۱۴-۱.۲۲) می‌توان استفاده کرد.  
حل

چون رفتار برج پر شده نسبتاً پیچیده است، سیستم واقعی را با یک مدل فرضی جایگزین می‌کنیم. فرض می‌کنیم این سیستم معادل با دو جریان باشد که در کنار هم حرکت می‌کنند و مطابق شکل ۳-۵.۲۳، اصلاً پس اختلاط ندارند و در سطح فصل مشترکی  $a$  بر واحد حجم ستون پر شده، باهم تماس دارند (نگاه کنید به معادله (۱۴-۱.۲۲)).



شکل ۳-۵.۲۳ طرح ستون جذب پر شده که در آن جزء دیفرانسیلی نشان داده شده است که موازنه جرم روی آن انجام می‌شود.

هم چنین فرض می‌کنیم که سرعت سیال و ترکیب شیمیایی هر جریان در مقطع برج یکنواخت است و از انتقال مولکولی و گردابی در جهت جریان چشم‌پوشی می‌کنیم. به علاوه توزیع‌های غلظت در جهت جریان را منحنی‌های پیوسته فرض می‌کنیم که از نحوه استقرار ذرات پرکننده تأثیر نمی‌پذیرند.

مدل حاصل از این فرض‌های ساده‌ساز، احتمالاً توصیفی بسیار مطلوب از برج پر شده نیست. چشم‌پوشی از پس اختلاط و ناپیکنواختی سرعت سیال احتمالاً اهمیت زیادی دارد. اما روابط همبستگی که در حال حاضر برای ضرایب انتقال جرم در دسترس است، بر اساس همین مدل محاسبه شده‌اند، و بنابراین در هنگام استفاده از این روابط همبستگی، باید آن را به‌کار گرفت.

اکنون در وضعیتی هستیم که عبارتی برای ارتفاع ستون به دست بیاوریم و این کار را در دو مرحله انجام می‌دهیم: (الف) ابتدا از موازنه ماکروسکوپی کلی جرم برای تعیین ترکیب شیمیایی فاز مایع خروجی و رابطه بین ترکیب‌های شیمیایی دو فاز در هر نقطه از برج استفاده می‌کنیم؛ (ب) سپس از این نتایج، همراه با صورت دیفرانسیلی موازنه ماکروسکوپی جرم، برای تعیین شرایط فصل مشترکی و ارتفاع لازم برای برج استفاده می‌کنیم.

(الف) موازنه‌های ماکروسکوپی کلی جرم. برای ماده حل شده  $A$  موازنه ماکروسکوپی جرم را، طبق معادله (۳-۱.۲۳) برای هریک از جریان‌ها، بین صفحه‌های ۱ و ۲ می‌نویسیم؛ داریم:

$$W_{A12} - W_{A11} = W_{A1,0} \quad \text{جریان مایع (۱۴-۵.۲۳)}$$

$$W_{Ag2} - W_{Ag1} = W_{Ag,0} \quad \text{جریان گاز (۱۵-۵.۲۳)}$$

در این روابط، اندیس‌های  $Al$  و  $Ag$ ، به ترتیب، به ماده حل شده  $A$  در جریان‌های گاز و مایع اشاره می‌کنند. چون مول‌هایی که جریان مایع را ترک می‌کنند، باید در فصل مشترک وارد جریان گاز شوند،  $W_{Al,0} = W_{Ag,0}$  و معادله‌های (۱۴-۵.۲۳) و (۱۵) را می‌توان باهم ترکیب کرد تا نتیجه شود:

$$W_{Al2} - W_{Al1} = -(W_{Ag2} - W_{Ag1}) \quad (۱۶-۵.۲۳)$$

اکنون می‌توان با قرار دادن  $W_{Al2} = W_L X_{A2}$ ، و غیره، این رابطه را برحسب ترکیب‌های شیمیایی جریان‌های ورودی و خروجی نوشت؛ پس از مرتب کردن جمله‌ها، نتیجه می‌شود:

$$X_{A2} = X_{A1} - \frac{W_G}{W_L} (\Upsilon_{A2} - \Upsilon_{A1}) \quad (۱۷-۵.۲۳)$$

بنابراین غلظت  $A$  را در جریان مایع خروجی به دست آوردیم.

با جایگزین کردن صفحه ۲ با صفحه‌ای به فاصله  $z$  به سمت پایین ستون، می‌توان از معادله (۱۷-۵.۲۳) برای به دست آوردن عبارتی استفاده کرد که ترکیب‌های شیمیایی جریان را در هر نقطه از برج به هم مربوط می‌کند:

$$X_A = X_{A1} - \frac{W_G}{W_L} (\Upsilon_A - \Upsilon_{A1}) \quad (۱۸-۵.۲۳)$$

معادله (۱۸-۵.۲۳) («خط کارکرد») در شکل ۴-۵.۲۳، همراه با توزیع تعادلی برای شرایط مسئله ۲۳ الف، ۲، نشان داده شده است.

(ب) کاربرد موازنه‌های ماکروسکوپی در صورت  $d$ . اکنون معادله (۳-۱.۲۳) را در مورد جزء  $dz$  از برج به کار می‌بندیم تا ابتدا شرایط فصل مشترکی را تخمین بزنیم و سپس ارتفاع برج برای جداسازی به میزان مفروض را تعیین کنیم. ۱. تعیین شرایط فصل مشترکی. چون فقط  $A$  در فصل مشترک منتقل می‌شود، طبق سطر دوم معادله (۱۴-۱.۲۲) (که در آن فرض می‌شود غلظت  $A$  کم و آهنگ انتقال جرم پایین است)، می‌توان نوشت:

$$dW_{Al,0} = (k_x^* a)(x_{A0} - x_A) S dz \quad (۱۹-۵.۲۳)$$

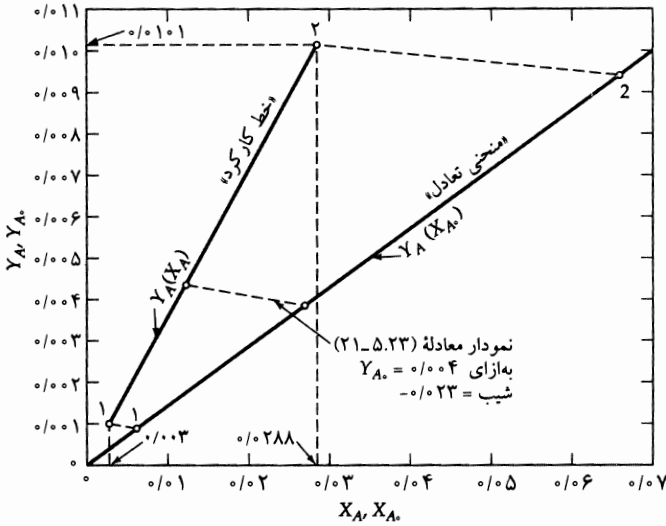
$$dW_{Ag,0} = (k_y^* a)(y_{A0} - y_A) S dz \quad (۲۰-۵.۲۳)$$

در این روابط  $a$  مساحت فصل مشترکی در واحد حجم بستر پر شده،  $S$  سطح مقطع برج،  $x_{A0}$  و  $y_{A0}$  به ترتیب، کسرهای مولی فصل مشترکی  $A$  در فازهای مایع و گاز، و  $x_A$  و  $y_A$  غلظت‌های توده‌ای متناظرند (در این جا اندیس  $b$  حذف شده است، و  $x_A$ ،  $y_A$ ،  $X_A$  و  $\Upsilon_A$  همگی غلظت‌های توده‌ای هستند). آن جا که (برای محلول‌های رقیقی که در این جا مورد نظرند)، داریم  $X_A \approx x_A / (X_A + 1)$  و  $\Upsilon_A \approx \Upsilon_A / (\Upsilon_A + 1)$ ، معادله‌های (۱۹-۵.۲۳) و (۲۰) را می‌توان باهم ترکیب کرد تا نتیجه شود:

$$\frac{\Upsilon_A - \Upsilon_{A0}}{X_A - X_{A0}} = -\frac{(k_x^* a)}{(k_y^* a)} \quad (۲۱-۵.۲۳)$$

این معادله به ما امکان می‌دهد که  $\Upsilon_{A0}$  را به صورت تابعی از  $\Upsilon_A$  تعیین کنیم. به ازای هر  $\Upsilon_A$  می‌توان محل  $X_A$  را روی خط کارکرد (موازنه جرم) پیدا کرد. سپس می‌توان، مطابق شکل ۴-۵.۲۳، خطی مستقیم با شیب  $-(k_x^* a)/(k_y^* a)$  از نقطه  $(\Upsilon_A, X_A)$  گذراند. نقطه تقاطع این خط با منحنی تعادل، ترکیب فصل مشترکی موضعی  $(\Upsilon_{A0}, X_{A0})$  را نشان می‌دهد.





شکل ۴-۵.۲۳ محاسبه شرایط فصل‌مشارکی در فرایند جذب سیکلوهگزان از هوا در ستون پرشده (نگاه کنید به مسئله ۲۳ الف ۲).

۲. تعیین ارتفاع ستون. با کاربرد معادله (۱-۱.۲۳) در مورد جریان گاز در حجم  $Sdz$  از برج، نتیجه می‌شود:

$$W_G dY_A = dW_{Ag,0} \quad (22-5.23)$$

این عبارت را می‌توان با معادله (۲-۵.۲۳) برای محلول‌های رقیق موردنظر در این‌جا ترکیب کرد و نوشت:

$$-W_G dY_A = (k_y^0 a)(Y_A - Y_{A0})Sdz \quad (23-5.23)$$

حال می‌توان معادله بالا را مرتب کرد و از آن، از  $z = 0$  تا  $z = Z$  انتگرال گرفت:

$$Z = -\frac{W_G}{S(k_y^0 a)} \int_{Y_{A1}}^{Y_{A2}} \frac{dY_A}{Y_A - Y_{A0}} \quad (24-5.23)$$

معادله (۲۴-۵.۲۳) عبارت مطلوب برای ارتفاع ستون لازم برای جداسازی موردنظر است. در نوشتن معادله (۲۴-۵.۲۳) از تغییر ضریب انتقال جرم  $k_y^0$  با ترکیب شیمیایی چشم‌پوشی کردیم. این کار فقط برای محلول‌های رقیق مجاز است.

به‌طورکلی، باید از معادله (۲۴-۵.۲۳) با استفاده از روش‌های عددی یا ترسیمی انتگرال گرفت. اما، در مورد محلول‌های رقیق، غالباً می‌توان فرض کرد که خطوط کارکرد و تعادل شکل ۴-۵.۲۳ خطوطی مستقیم‌اند. به‌علاوه، اگر نسبت  $k_x^0/k_y^0$  ثابت باشد، آن‌گاه  $Y_A - Y_{A0}$  به‌طور خطی با  $Y_A$  تغییر می‌کند. سپس می‌توان از معادله (۲۴-۵.۲۳) انتگرال گرفت تا نتیجه شود (نگاه کنید به مسئله ۲۳ ب ۱):

$$Z = \frac{W_G}{S(k_y^0 a)} \frac{Y_{A2} - Y_{A1}}{(Y_{A0} - Y_A)_{\ln}} \quad (25-5.23)$$

که در آن:

$$(Y_{A0} - Y_A)_{\ln} = \frac{(Y_{A0} - Y_A)_2 - (Y_{A0} - Y_A)_1}{\ln[(Y_{A0} - Y_A)_2 / (Y_{A0} - Y_A)_1]} \quad (26-5.23)$$

معادله (۲۵-۵.۲۳) را می‌توان مرتب کرد و به صورت زیر نوشت:

$$W_{Ag,0} = W_G(\Upsilon_{A2} - \Upsilon_{A1}) = (k_y^* a) ZS(\Upsilon_{A0} - \Upsilon_A) \ln \quad (27-5.23)$$

مقایسه معادله‌های (۲۷-۵.۲۳) و (۱۵-۴.۱۵) تناظر نزدیک بین برج‌های پرشده و مبادله‌کن‌های ساده گرما را نشان می‌دهد. عبارت‌هایی نظیر معادله (۲۴-۵.۲۳) اما حاوی ضریب انتقال جرم کلی  $k_y^*$  را نیز می‌توان به دست آورد (نگاه کنید به مسئله ۲۳.ب.۱). بازم می‌توان از نتایج نهایی، معادله‌های (۲۵-۵.۲۳) یا (۲۷)، برای هریک از جریان‌های هم‌سو یا متقابل استفاده کرد. اما درنظر داشته باشید که مدل ساده‌شده‌ای که برای توصیف برج پرشده به کار رفت، به اندازه مدل نظیر برای مبادله‌کن گرما، قابل اعتماد نیست.

### مثال ۲۳-۱

#### زنجیره‌های خطی

در مثال ۲-۱.۲۳ دیدیم که درجه جداسازی ممکن در یک جداساز دوتایی ساده، می‌تواند نسبتاً محدود باشد و بنابراین غالباً چندین جداساز را به صورت زنجیره‌ای با جریان متقابل، مانند شکل ۵-۵.۲۳، باهم ترکیب می‌کنند. در این شکل، ورودی هر مرحله از جداساز را مجموع جریان پسماند جداساز بالایی و محصول جداساز پایینی تشکیل می‌دهد. نشان دهید که چگونه چنین ترکیبی می‌تواند درجه جداسازی را، نسبت به جداسازی در یک جداساز، افزایش دهد.

حل

برای این سیستم، به صورت کلی، می‌توان موازنه جرم را برای کل محصول مطلوب، و کل محلول نوشت؛ یعنی کل سیستم را به صورت یک جداساز تنها درنظر می‌گیریم و می‌نویسیم:

$$z_F F = y_P P + x_W W \quad F = P + W \quad (29, 28-5.23)$$

در این جا فرض می‌شود که همه کمیت‌های این معادله معلوم‌اند، به طوری که از لحاظ موازنه‌های کلی جرم، مسئله کاملاً مشخص است. کاری که باقی می‌ماند تعیین تعداد مراحل لازم برای برآورده کردن این شرایط است. کار خود را با نوشتن موازنه‌های جرم روی بخش بالایی ستون آغاز می‌کنیم که در این جا دو مرحله بالایی نشان داده شده در شکل ۵-۵.۲۳ است:

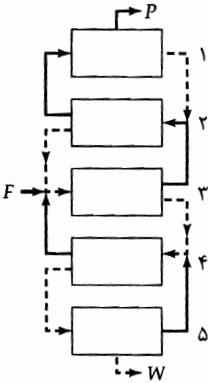
$$y_2 U_2 - x_2 D_2 = y_P P \quad U_2 - D_2 = P \quad (31, 30-5.23)$$

در این رابطه  $U_n$  و  $D_n$  جریان‌های بالارو و پایین‌رو از مرحله  $n$ ، و  $y_n$  و  $x_n$  کسرهای مولی متناظر ماده حل‌شده مطلوب‌اند. وقتی بین معادله‌های (۳۱) و (۳۰-۵.۲۳)،  $P$  را حذف کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{y_2 - y_P}{x_2 - y_P} = \frac{D_2}{U_2} \quad (32-5.23)$$

این معادله رابطه بین ترکیب‌های شیمیایی جریان‌های پایین‌رو و بالارو را، برحسب آهنگ‌های جریان متناظر نشان می‌دهد که در هریک از مقاطع ستون، در بالای مرحله ورودی، از کنار هم عبور می‌کنند. این رابطه، وقتی در دستگاه مختصات  $x-y$  ترسیم شود (که در این صورت نمودار مک‌کیب-تیلی<sup>۴,۲</sup> نامیده می‌شود) خط کارکرد سیستم خواهد بود. در حال حاضر روی ترکیب‌های شیمیایی تمرکز می‌کنیم و بعد دوباره به سراغ مسئله تعیین نسبت‌های جریان می‌رویم.

4. W. L. McCabe and E. W. Thiele, *Ind. Eng. Chem.*; **17**, 605-611 (1925).



شکل ۵.۲۳-۵ یک زنجیره خطی. جریان‌های بالارو با خطوط پر و جریان‌های پایین‌رو با خط‌چین نشان داده شده‌اند.

فرض می‌کنیم ترکیب‌های فازی در هر مرحله، در یک رابطه تعادل مانند رابطه زیر صدق می‌کنند (نگاه کنید به معادله (۱۹-۱.۲۳)):

$$y_n = \frac{\alpha x_n}{1 + (\alpha - 1)x_n} \quad (۳۳-۵.۲۳)$$

یا، به عبارت کلی‌تر،  $y_n = f(x_n)$  که در آن  $f(x)$  تابعی معلوم فرض می‌شود. اکنون معادله‌های (۳۳ و ۳۲-۵.۲۳) (یا تعمیم آن‌ها) تعیین همه ترکیب‌های شیمیایی در بخشی از ستون را که در بالای نقطه ورودی قرار دارد، و معمولاً آن را بخش یکسوساز می‌نامند، امکان‌پذیر می‌کند؛ محاسبات مشابهی را نیز می‌توان برای بخش عریان‌ساز، یعنی بخشی که زیر نقطه ورودی واقع است، انجام داد. سپس می‌توان تعداد مراحل لازم برای جداسازی موردنظر، و محل مناسب برای مرحله ورودی را تعیین کرد.

اما ابتدا باید نسبت‌های آهنگ جریان لازم در معادله (۳۲-۵.۲۳) را تعیین کرد؛ سه حالت خاص را در نظر می‌گیریم: (الف) بازروانی کل. این حالت خاص عملیات، که در آن  $P$  و  $W$  هردو صفرند، بسیار اهمیت دارد، زیرا کم‌ترین تعداد مراحل ممکن را نتیجه می‌دهد که می‌تواند ترکیب شیمیایی خروجی موردنظر را تولید کند. در این جا:

$$U_n = D_{n-1} \quad (۳۴-۵.۲۳)$$

به‌ازای همه مقادیر  $n$ ، و خط کارکرد از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$y_n = x_{n-1} \quad (۳۵-۵.۲۳)$$

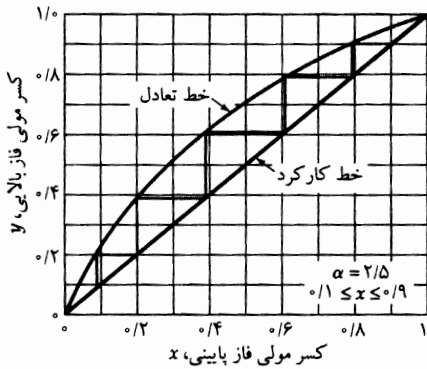
این رابطه ساده در مورد همه سیستم‌های فیزیکی صادق است. در شکل ۶-۵.۲۳ ترکیب‌های مرحله‌ای (برای کسر مولی محصول ۰/۹ و کسر مولی پسماند ۰/۱)، همراه با منحنی تعادل به‌صورت معادله (۳۵-۵.۲۳) با  $\alpha = ۲/۵$  ترسیم شده‌است.

در این شکل، خطوط پله‌مانند بین خطوط تعادل و کارکرد، روشی ترسیمی برای تعیین ترکیب‌های شیمیایی را مطرح می‌کنند: هر «پله» بین خطوط کارکرد و تعادل معرف یک مرحله یا جداساز یک‌جزئی است. براساس این نمودار می‌توان گفت که به‌جای این جداسازی ساده، به شش مرحله جداسازی نیاز است. اما، در وضعیت بازروانی کلی و فزاریت نسبی ثابت  $\alpha$ ، به‌سادگی می‌توان تشخیص داد که:

$$\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_{n-1}/\alpha \quad ((الف) ۳۶-۵.۲۳)$$

به طوری که:

$$\mathcal{V}_N = \mathcal{V}_1 / \alpha^{N-1} \quad ((ب) ۳۶-۵.۲۳)$$



شکل ۶-۵.۲۳ نمودار مک‌کیب-تیلی برای باززوانی، با  $\alpha = 2/5$  و  $0.1 \leq x \leq 0.9$

بنابراین، برای وضعیت نشان داده شده در شکل ۶-۵.۲۳، داریم:

$$\log \left( \frac{0.9/0.1}{0.1/0.9} \right) = (N - 1) \log 2/5 \quad (۳۷-۵.۲۳)$$

یا

$$N = 1 + \frac{\log 81}{\log 2/5} = 5,796 \quad (۳۸-۵.۲۳)$$

که دقیق‌تر است، اما عملاً با تخمین ترسیمی معادل است.

اگر قرار باشد محصولات از سیستم بیرون کشیده شوند، باید نسبت‌های آهنگ جریان را محاسبه کرد، و روش‌های انجام این کار، بسته به عملیات مورد نظر، تغییر می‌کنند.

(ب) قیدهای ترمودینامیکی: زنجیره‌های آدیاباتیک و باززوانی مینیمم. در اغلب عملیات پله‌ای، نسبت‌های جریان براساس قیده‌های ترمودینامیکی تعیین می‌شوند، و این قیده‌ها در انواع مختلف کتاب‌هایی که در مورد عملیات واحد انتشار یافته، تشریح شده‌اند. در این جا به تکرار این اطلاعات، که به آسانی دسترس پذیرند، نیازی نمی‌بینیم، اما به عنوان مثال، تقطیر را به اختصار بررسی می‌کنیم که کاربرد آن از همه بیش تر است. از لحاظ اصولی، نسبت‌های جریان در تقطیر، با فرض آدیاباتیک بودن ستون و مجموعه‌ای از «موازنه‌های آنتالپی» (نگاه کنید به پاراگراف آخر بخش ۱.۱۵) متناظر با موازنه‌های جرمی که در بالا معرفی شدند، تعیین می‌شوند.

اما غالباً می‌توان گرمای مولی تبخیر گونه‌های مختلف را مساوی فرض کرد و «گرماهای محسوس» (یعنی سهم‌های  $\Delta \bar{H}$  در  $\bar{C}_p \Delta T$ ) را نادیده گرفت. با این مشخصات، آهنگ‌های جریان  $U_n$  و  $D_n$  ثابت‌اند. سپس می‌توان برای هر نقطه در بالای صفحه ورودی نوشت:

$$U = D + P \quad \text{و} \quad y_{n+1}U = x_n D + y_P P \quad (۴۰, ۳۹-۵.۲۳)$$

و زیر این صفحه، داریم:

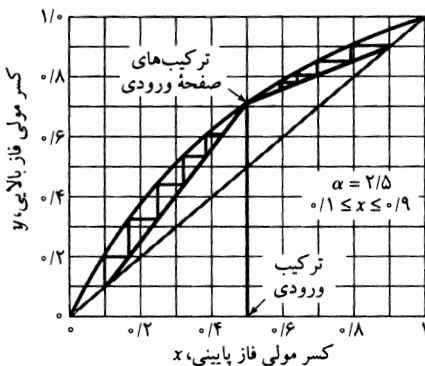
$$D = U + W \quad \text{و} \quad x_m D = y_{m+1}U + x_W W \quad (۴۲, ۴۱-۵.۲۳)$$

در این جا اندیس‌های مرحله  $n$  و  $m$ ، به ترتیب، به بخش بالایی یا یکسوساز (بالتر از نقطه ورود) و بخش پایینی یا عریان‌ساز ستون (زیر نقطه ورود) اشاره می‌کنند.

مثلاً سیستم قسمت (الف) را برای مایع اشباع ورودی هم‌مول که از دو گونه تشکیل شده است، و در بازروانی مینیم عمل می‌کند، در نظر می‌گیریم: کم‌ترین مقدار مایع برگشتی از صفحه بالایی که می‌تواند جداسازی مطلوب را انجام دهد. این وضعیت هنگامی پیش می‌آید که خط کارکرد با منحنی تعادل تماس پیدا کند و در سیستم مورد نظر، این «تماس» ابتدا در صفحه ورودی ایجاد می‌شود. ترکیب شیمیایی بخار در صفحه ورودی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Y_F = 2.5 X_F = 2.5 \quad \text{یا} \quad y_F = \frac{Y_F}{1 + Y_F} = 0.7143 \quad (44, 43-5.23)$$

در این صورت خط کارکرد، مطابق شکل ۷-۵.۲۳، دو شاخه دارد، یکی در بالای صفحه ورودی و دیگری در زیر آن.



شکل ۷-۵.۲۳ نمودار مک‌کیب-تیلی برای بازروانی مینیم، با  $\alpha = 2.5$  و  $0.1 \leq x \leq 0.9$

هر ستون واقعی باید بین حدود بازروانی کل و بازروانی مینیم کار کند، اما بهره‌برداری عادی فقط چند درصد بالاتر از مقدار مینیم انجام می‌شود. علت این است که قیمت هر صفحه بسیار کم‌تر از هزینه‌های مربوط به افزایش بازروانی (بازگرداندن مایع به ستون، از طریق چگالش بخار در صفحه بالایی) است: افزایش بار بخار لازم برای بازگرداندن بخار از مایعی که صفحه پایینی را ترک می‌کند، بار چگالنده برای بازگرداندن بخار سرستون، و هزینه‌های سرمایه‌ای برای ساخت ستونی با قطر بیشتر، کمک‌گرمن بزرگ‌تر، بازگرداندن بخار موجود در کف، و چگالنده، به منظور بازگرداندن مایع موجود در بالا.

(ج) قیده‌های انتقال و زنجیره‌های ایده‌آل. برای جداسازی از طریق غشاهای تراوی گزیننده، نسبت جریان‌های محصول به پسماند را فشار وارد بر غشا کنترل می‌کنند، و انرژی لازم برای ایجاد این فشار را باید برای هر مرحله از زنجیره، تجدید کرد. در نتیجه طراح یک درجه آزادی بیش‌تر دارد و همین امر سبب پیدایش پیکربندی‌های مختلف برای زنجیره‌ها شده است. غشاهای زنجیره‌ای، که ابتدا برای ایزوتوپ‌ها<sup>۵</sup> ابداع شوند، اینک برای جداسازی‌های صنعتی گازها تکامل یافته‌اند<sup>۶</sup> و نوید بسیاری کاربردهای دیگر را نیز می‌دهند.

5. E. von Halle and J. Schacter, *Diffusion Separation Methods*, in *Kirk-Othmer Encyclopedia of Chemical Technology*, Volume 8, Wiley, New York (1993), pp.149-203.

6. R. Agrawal, *Ind. Eng. Chem. Research*, **35**, 3607-3617 (1996); R. Agrawal and J. Xu, *AIChE Journal*, **42**, 2141-2154 (1996).

در این جا مثال زنجیره‌های ایده‌آل را در نظر می‌گیریم که در آن فقط جریان‌هایی با ترکیب یکسان مخلوط می‌شوند. در شرایط این مثال، گفته‌ی بالا به این معنی است که:

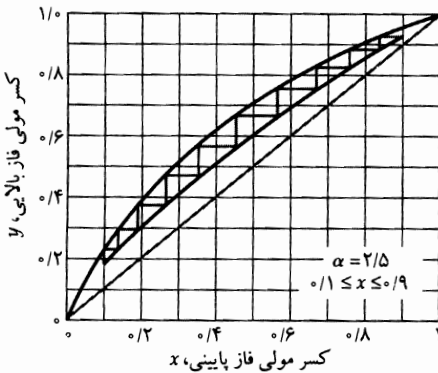
$$\Upsilon_{n+1} = X_{n-1} = \frac{\Upsilon_{n-1}}{\alpha} \quad (۴۵-۵.۲۳)$$

می‌توان این رابطه را به صورت زیر نوشت:

$$\Upsilon_{n+1} = \frac{\Upsilon_n}{\sqrt{\alpha}} \quad (۴۶-۵.۲۳)$$

نتیجه می‌شود که تعداد مراحل لازم در بازروانی کل، فقط دو برابر می‌شود، و خط کارکرد در نیمه‌راه بین «منحنی تعادل» و خط  $45^\circ$  است. مطابق شکل ۸-۵.۲۳، خط کارکرد روی مرحله‌ی ورودی مشتق پیوسته دارد.

زنجیره‌های ایده‌آل استفاده از کوچک‌ترین جریان‌های مرحله‌ای را ممکن می‌کنند، اما در این حالت جریان، بسته به مکان، تغییر می‌کند: جریان در مرحله‌ی ورودی بیش‌ترین مقدار را دارد و به سمت انتهای زنجیره، کاهش می‌یابد. به همین سبب این سیستم‌ها را زنجیره‌های باریک‌شونده می‌نامند (نگاه کنید به مسئله ۲۳.ب.۶).



شکل ۸-۵.۲۵ نمودار مکعب-تیلی برای

زنجیره‌های ایده‌آل، با  $\alpha = 2/5$  و  $0.1 \leq x \leq 0.9$ .

### مثال ۴-۵.۲۳

انبساط مخلوط گاز واکنش‌پذیر در گذر از نازل بدون اصطکاک آدیاباتیک مخلوطی هم‌مول از  $\text{CO}_2$  و  $\text{H}_2$  در دمای  $1000 \text{ K}$  و فشار  $1.5 \text{ atm}$  در مخزن تحت فشار عایق‌کاری شده و بزرگی مطابق شکل ۶-۵.۱۵ محبوس است. در چنین شرایطی ممکن است واکنش:



انجام شود. پس از آن‌که این مخلوط به مدت کافی برای رسیدن واکنش به حالت تعادل در مخزن نگهداری شد، به گاز امکان می‌دهند تا از یک نازل کوچک همگرا، مطابق شکل، به محیط بیرون با فشار  $1 \text{ atm}$  فرار کند.

دما و سرعت گاز خروجی از گلوبی نازل را (الف) با این فرض که واکنش در خور اعتنایی در حین عبور گاز از نازل رخ نمی‌دهد، و (ب) با این فرض که تعادل ترمودینامیکی در همه‌ی نقاط نازل فوراً برقرار می‌شود، تخمین بزنید. در هر مورد، فرض کنید انبساط آدیاباتیک و بدون اصطکاک است.

حل

حل مسئله را با فرض عملیات حالت شبه‌پایا، توزیع‌های سرعت تخت، و تغییرات قابل چشم‌پوشی در انرژی پتانسیل آغاز می‌کنیم. هم‌چنین فرض می‌کنیم ظرفیت‌های گرمایی ثابت، و رفتار گاز ایده‌آل است، و از نفوذ در جهت جریان چشم‌پوشی می‌کنیم. حال می‌توان موازنه ماکروسکوپی انرژی، معادله (۱-۳.۲۳) را، به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{\rho} v_2^2 = \hat{H}_1 - \hat{H}_2 \quad (۴۸-۵.۲۳)$$

در این جا اندیس‌های ۱ و ۲، به ترتیب، به شرایط در مخزن و گلویی نازل اشاره می‌کنند و، مانند مثال ۴-۵.۱۵، سرعت سیال در مخزن صفر فرض می‌شود.

برای تعیین تغییر آنتالپی، جمله  $d(\frac{1}{\rho} v^2)$  از صورت دیفرانسیلی موازنه حالت پایای انرژی (معادله ۱-۳.۲۳) را با جمله  $d(\frac{1}{\rho} v^2)$  از صورت دیفرانسیلی موازنه حالت پایای انرژی مکانیکی (معادله ۱-۴.۲۳) برابر قرار می‌دهیم تا نتیجه شود:

$$\frac{1}{\rho} dp = d\hat{H} \quad (۴۹-۵.۲۳)$$

این نتیجه از معادله (ه) جدول ۴-۲.۱۹ نیز به دست می‌آید. علاوه بر معادله (۴۹-۵.۲۳)، از قانون گاز ایده‌آل و عبارتی برای  $\hat{H}(T)$ ، که به کمک جدول ۱-۱.۱۷ به دست آمد، معادله (۱۶-۳.۱۹)، و رابطه  $\rho \hat{H} = c \bar{H}$  نیز استفاده می‌کنیم، تا نتایج زیر حاصل شود:

$$p = cRT = \frac{\rho RT}{M} = \frac{\rho RT}{\sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha} M_{\alpha}} \quad (۵۰-۵.۲۳)$$

$$\hat{H} = \frac{\bar{H}}{\rho/c} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha} \bar{H}_{\alpha}}{M} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha} [\bar{H}_{\alpha}^{\circ} + \bar{C}_{p\alpha}(T - T^{\circ})]}{\sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha} M_{\alpha}} \quad (۵۱-۵.۲۳)$$

در این جا  $x_{\alpha}$  کسر مولی گونه  $\alpha$  در دمای  $T$ ، و  $\bar{H}_{\alpha}^{\circ}$  آنتالپی مولی گونه  $\alpha$  در دمای مرجع  $T^{\circ}$  است. محاسبه  $\hat{H}$  را به طور جداگانه، برای دو تقریب، شرح می‌دهیم.

تقریب (الف): فرض بسیار کند بودن واکنش شیمیایی. در این جا  $x_{\alpha}$  در مقدارهای تعادلی به ازای دمای  $1000 \text{ K}$  مقداری ثابت است و می‌توان معادله (۵۱-۵.۲۳) را چنین نوشت:

$$d\hat{H} = \left( \frac{\sum_{\alpha} x_{\alpha} \bar{C}_{p\alpha}}{\sum_{\alpha} x_{\alpha} M_{\alpha}} \right) dT \quad (۵۲-۵.۲۳)$$

بنابراین می‌توان معادله (۴۹-۵.۲۳) را به صورت زیر نوشت:

$$d \ln p = \left( \frac{\sum_{\alpha} x_{\alpha} \bar{C}_{p\alpha}}{R} \right) d \ln T \quad (۵۳-۵.۲۳)$$

چون  $x_{\alpha}$  و  $\bar{C}_{p\alpha}$  ثابت فرض می‌شوند، می‌توان از این معادله، از  $(p_1, T_1)$  تا  $(p_2, T_2)$  انتگرال گرفت تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{R / \sum_{\alpha} x_{\alpha} \bar{C}_{p\alpha}} \quad (۵۴-۵.۲۳)$$

اکنون می‌توان این عبارت را با معادله‌های (۵۱ و ۴۸-۵.۲۳) ترکیب کرد تا عبارت مطلوب برای سرعت گاز در صفحه ۲ به دست آید:

$$v_2 = \left\{ 2T_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{R/\sum_{\alpha} x_{\alpha} \bar{C}_{p\alpha}} \right] \frac{\sum_{\alpha} x_{\alpha} \bar{C}_{p\alpha}}{\sum_{\alpha} x_{\alpha} M_{\alpha}} \right\}^{1/2} \quad (55-5.23)$$

با قرار دادن مقدارهای عددی در معادله‌های (۵۵ و ۵۴-۵.۲۳)، نتیجه می‌شود (نگاه کنید به مسئله ۲۳ الف.۱) که  $v_2 = 1726 \text{ ft/s}$  و  $T_2 = 920 \text{ K}$  است. به علاوه، در معرض این محدودیت نیز هست که سرعت در گلولی نازل باید زیر صوتی باشد؛ یعنی فشار در گلولی نازل نمی‌تواند از کسر فشار  $p_1$  لازم برای تولید سرعت صوتی در گلولی پایین‌تر بیاید (نگاه کنید به معادله (۱۵ ب.۲-۶)). اگر فشار محیط از این مقدار بحرانی  $p_2$  پایین‌تر بیاید، فشار گلولی در مقدار بحرانی ثابت خواهد ماند، و یک موج شوکی پشت خروجی نازل وجود خواهد داشت.

تقریب (ب): فرض واکنش بسیار سریع. در این جا می‌توان مانند قسمت (الف)، عمل کرد، با این تفاوت که اکنون باید کسرهای مولی  $x_{\alpha}$  را تابعی از دما در نظر گرفت که با رابطه تعادلی زیر:

$$\frac{(x_{H_2O})(x_{CO})}{(x_{H_2})(x_{CO_2})} = K_x(T) \quad (56-5.23)$$

و روابط استوکیومتری:

$$x_{H_2O} = x_{CO} \quad x_{H_2} = x_{CO_2} \quad \sum_{\alpha=1}^4 x_{\alpha} = 1 \quad (57-5.23, 58, 59)$$

تعریف می‌شوند. کمیت  $K_x(T)$  در معادله (۵۶-۵.۲۳) ثابت تعادل واکنش است. می‌توان آن را صرفاً تابعی از دما دانست، زیرا رفتار گاز ایده‌آل فرض شده، تعداد مول‌های موجود از واکنش شیمیایی تأثیر نمی‌پذیرد. معادله‌های (۵۷-۵.۲۳ و ۵۸) از استوکیومتری واکنش و ترکیب شیمیایی اولیه گاز درون مخزن نتیجه می‌شوند. اکنون عبارت دمای نهایی بسیار پیچیده‌تر شده است. برای این واکنش، در جایی که  $\sum_{\alpha} x_{\alpha} M_{\alpha}$  ثابت است، می‌توان معادله‌های (۵۰ و ۴۹-۵.۲۳) را ترکیب کرد تا نتیجه شود:

$$R \ln \frac{p_2}{p_1} = \int_{T_1}^{T_2} \left( \frac{d\bar{H}}{dT} \right) d \ln T \quad (60-5.23)$$

که در آن، وقتی ظرفیت‌های گرمایی با مقادیر ثابت تقریب زده شوند:

$$\frac{d\bar{H}}{dT} = \sum_{\alpha=1}^4 [\bar{H}_{\alpha}^{\circ} + \bar{C}_{p\alpha}(T - T^{\circ})] \frac{dx_{\alpha}}{dT} + \sum_{\alpha=1}^4 x_{\alpha} \bar{C}_{p\alpha} \quad (61-5.23)$$

به‌طور کلی، انتگرال معادله (۶۰-۵.۲۳) را باید به شیوه عددی محاسبه کرد، زیرا  $x_{\alpha}$  و  $dx_{\alpha}/dT$  همگی توابع پیچیده‌ای از دما هستند که معادله‌های (۵۶-۵.۲۳ تا ۵۹) بر آن‌ها حاکم‌اند. اما وقتی  $T_2$  با استفاده از معادله (۶۱-۵.۲۳) تعیین شد، می‌توان  $v_2$  را با استفاده از معادله‌های (۴۸-۵.۲۳ و ۵۱) به دست آورد. با قرار دادن مقادیر عددی در این عبارت‌ها، نتیجه می‌شود (نگاه کنید به مسئله ۲۳ ب.۲) که  $T_2 = 937 \text{ K}$  و  $v_2 = 1752 \text{ ft/s}$ .



سپس درمی‌یابیم که هم دمای خروجی و هم سرعت خروج از نازل، در صورت برقراری تعادل شیمیایی در حین انبساط، بالاتر خواهند بود. علت آن است که با کاهش دما، تعادل طوری تغییر می‌کند که گرمای واکنش در سیستم آزاد شود. این نوع آزاد شدن انرژی با کاهش دما، در هر سیستم دارای تعادل شیمیایی، صرف‌نظر از نوع واکنش‌های دخیل، رخ می‌دهد. این یکی از پیامدهای قانون معروف لوشاتلیه است. در این مورد، واکنش گرماگیر است و ثابت تعادل با کاهش دما، کاهش می‌یابد. در نتیجه بخشی از  $\text{CO}$  و  $\text{H}_2\text{O}$  در هنگام انبساط دوباره به  $\text{H}_2$  و  $\text{CO}_2$  تبدیل می‌شوند و انرژی آزاد می‌شود. نکته جالب این است که در موتور موشک نیز، در صورت رسیدن سریع به حالت تعادل، سرعت گازهای خروجی، و بنابراین نیروی پیشرانی موتور، افزایش می‌یابد، هرچند واکنش‌های احتراق به شدت گرم‌زاینده. علت این است که ثابت‌های تعادل این واکنش‌ها، با کاهش دما افزایش می‌یابند، به طوری که باز هم در حین انبساط، گرمای واکنش آزاد می‌شود. براساس این اصل روشی برای افزایش پیشرانش موتورهای موشکی پیشنهاد شده است. افزایش بالقوه پیشرانش قابل حصول با استفاده از این شیوه، نسبتاً زیاد است.

این مثال را به سبب سادگی انتخاب کردیم. به ویژه توجه کنید که اگر تغییر در تعداد مول‌ها با واکنش شیمیایی همراه باشد، آن‌گاه ثابت تعادل، و بنابراین آنتالپی، تابع فشار است. در این مورد، که نسبتاً متداول است، متغیرهای  $T$  و  $p$  که به طور ضمنی در معادله (۶.۲۳-۵) وجود دارند، قابل جداسازی نیستند و از این معادله باید به صورت گام‌به‌گام انتگرال‌گیری کرد. این نوع انتگرال‌گیری، مثلاً، برای پیش‌بینی رفتار تونل‌های باد فوق‌صوتی و موتورهای موشکی، انجام شده است، اما محاسبات آن طولانی‌تر از آن است که در این جا مطرح شود.

### ۶.۲۳ استفاده از موازنه‌های ماکروسکوپی برای حل مسئله‌های حالت‌ناپایا

در بخش ۵.۲۳ بحث خود را به حالت‌پایا محدود کردیم. در این جا به رفتار گذرای سیستم‌های چندجزئی می‌پردازیم. چنین رفتاری در تعداد زیادی از عملیات مهندسی، مانند فروشویی و خشک کردن مواد جامد، جداسازی به روش کروماتوگرافی، و عملیات راکتور شیمیایی اهمیت دارد. در بسیاری از این فرایندها گرمای واکنش، هم‌چنین انتقال جرم را باید در نظر گرفت. بحث مفصل در مورد این موضوعات از حیطة کار این کتاب خارج است، و ما به بررسی چند مثال ساده اکتفا می‌کنیم. بحث‌های مفصل را می‌توان در منابع دیگر یافت.<sup>۱</sup>

#### مثال ۶.۲۳-۱

راه‌اندازی یک راکتور شیمیایی

می‌خواهیم ماده  $B$  را از ماده خام  $A$ ، در یک راکتور شیمیایی به حجم  $V$ ، مجهز به هم‌زنی که می‌تواند کل محتوای راکتور را کاملاً همگن نگه دارد، تولید کنیم. واکنش تشکیل  $B$  برگشت‌پذیر است و واکنش‌های رفت‌وبرگشت را می‌توان از مرتبه اول فرض کرد، و ثابت‌های آهنگ واکنش، به ترتیب، عبارت‌اند از:  $k_{\text{A}}'''$  و  $k_{\text{B}}'''$ . به علاوه  $B$  در معرض واکنش تجزیه برگشت‌ناپذیر مرتبه اول، با ثابت آهنگ  $k_{\text{C}}'''$ ، و تبدیل به جزء سومی به نام  $C$  قرار دارد. واکنش‌های شیمیایی موردنظر را می‌توان چنین نشان داد:



در زمان صفر، محلولی از  $A$  با غلظت  $c_{\text{A}0}$  با آهنگ جریان جرمی ثابت  $w$  وارد راکتور خالی می‌شود.

1. W. R. Marshall, Jr. and R. L. Pigford, *The Application of Differential Equations to Chemical Engineering Problems*, University of Delaware Press, Newark, Del, (1947); B. A. Ogunnaike and W. H. Ray, *Process Dynamics, Modeling, and Control*, Oxford University Press (1994).

عبارتی برای بیان مقدار  $B$  در راکتور، هنگامی که تازه تا ظرفیت  $V$  خود پر شده‌است، پیدا کنید. فرض کنید که در محلول ورودی اصلاً  $B$  وجود ندارد و از تغییرات خواص سیال چشم‌پوشی کنید.

حل

کار را با نوشتن موازنه‌های ماکروسکوپی حالت پایای جرم برای گونه‌های  $A$  و  $B$  شروع می‌کنیم. این موازنه‌ها، برحسب واحدهای مولی، چنین نوشته می‌شوند:

$$\frac{dM_{A,tot}}{dt} = \frac{w_{CA^*}}{\rho} - k_{VB}''' M_{A,tot} + k_{VA}''' M_{B,tot} \quad (۲-۶.۲۳)$$

$$\frac{dM_{B,tot}}{dt} = -(k_{VA}''' + k_{VC}''') M_{B,tot} + k_{VB}''' M_{A,tot} \quad (۳-۶.۲۳)$$

سپس  $M_{A,tot}$  را از معادله (۳-۶.۲۳) حذف می‌کنیم. ابتدا از این معادله نسبت به  $t$  مشتق می‌گیریم تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\frac{d^2 M_{B,tot}}{dt^2} = -(k_{VA}''' + k_{VC}''') \frac{dM_{B,tot}}{dt} + k_{VB}''' \frac{dM_{A,tot}}{dt} \quad (۴-۶.۲۳)$$

در این معادله،  $dM_{A,tot}/dt$  را با سمت راست معادله (۲-۶.۲۳) جایگزین می‌کنیم و سپس از معادله (۳-۶.۲۳) برای حذف  $M_{A,tot}$  استفاده می‌کنیم. به این ترتیب یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم برحسب  $M_{B,tot}$ ، و به صورت تابعی از زمان نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2 M_{B,tot}}{dt^2} + (k_{VA}''' + k_{VB}''' + k_{VC}''') \frac{dM_{B,tot}}{dt} + k_{VB}''' k_{VC}''' M_{B,tot} = \frac{k_{VB}''' w_{CA^*}}{\rho} \quad (۵-۶.۲۳)$$

این معادله را باید با شرایط اولیه زیر حل کرد:

$$M_{B,tot} = 0 \text{ در } t = 0 \text{ داریم} \quad (۶-۶.۲۳)$$

$$\frac{dM_{B,tot}}{dt} = 0 \text{ در } t = 0 \text{ داریم} \quad (۷-۶.۲۳)$$

از این معادله می‌توان انتگرال گرفت و نوشت:

$$M_{B,tot} = \frac{w_{CA^*}}{\rho k_{VC}'''} \left( \frac{s_-}{s_+ - s_-} \exp(s_+ t) - \frac{s_+}{s_+ - s_-} \exp(s_- t) + 1 \right) \quad (۸-۶.۲۳)$$

که در آن:

$$2s_{\pm} = -(k_{VA}''' + k_{VB}''' + k_{VC}''') \pm \sqrt{(k_{VA}''' + k_{VB}''' + k_{VC}''')^2 - 4k_{VB}''' k_{VC}'''} \quad (۹-۶.۲۳)$$

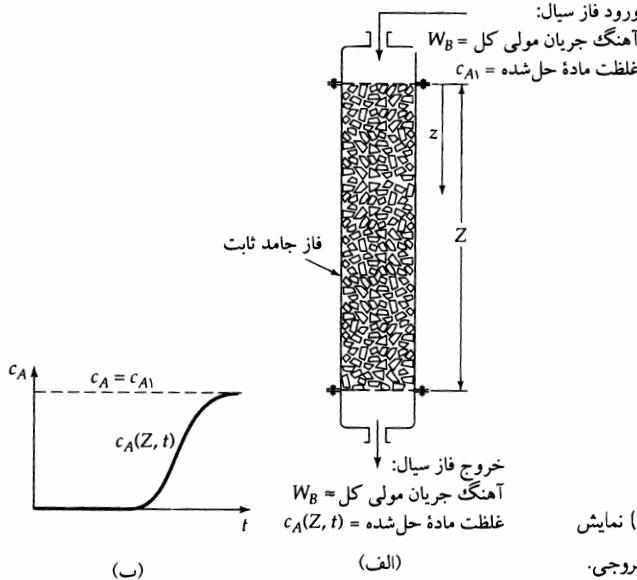
معادله‌های (۸-۶.۲۳) و (۹-۶.۲۳) موجود در راکتور را به صورت تابعی از زمان، تا زمان پر شدن کامل راکتور، به دست می‌دهند. این عبارات‌ها به معادله‌های به دست آمده برای فشارسنج مرطوب مثال ۷-۷.۷ و کنترلگر دمای مثال ۵-۱۵ شباهت بسیار دارند. اما می‌توان نشان داد که  $s_+$  و  $s_-$  هر دو حقیقی و منفی‌اند، و بنابراین  $M_{B,tot}$  نمی‌تواند نوسان کند (نگاه کنید به مسئله ۲۳ ب.۳).

### مثال ۲-۶.۲۳

عملیات حالت‌ناپایای ستون پرشده

تعداد بسیاری فرایند صنعتی مهم وجود دارد که در آن‌ها انتقال جرم بین یک سیال و یک جامد متخلخل دانه‌ای

رخ می‌دهد: مثلاً بازایی بخارهای آلی از طریق جذب سطحی روی زغال چوب، استخراج کافئین از دانه‌های قهوه، و جداسازی هیدروکربن‌های آروماتیک و آلیفاتیک از طریق جذب سطحی گزینشی روی سیلیکاژل. معمولاً، چنان‌که در شکل ۶.۲۳-۱ نشان داده شده است، ماده جامد را ثابت نگه می‌دارند و به سیال امکان می‌دهند از آن عبور کند. بنابراین چنین عملی ذاتاً ناپایدار است و ماده جامد را باید به‌طور ادواری تعویض یا «باززایی» کرد؛ منظور از «باززایی» اعاده وضعیت اولیه ماده از طریق گرما دادن یا کارهای دیگر است. برای نشان دادن رفتار این نوع عملیات انتقال جرم بستر ثابت، موردی ساده از لحاظ فیزیکی را در نظر می‌گیریم، که حذف ماده حل شده از محلول، از طریق عبور دادن آن از یک بستر جاذب است.



شکل ۶.۲۳-۱ جذب‌کننده با بستر ثابت: (الف) نمایش تصویری دستگاه؛ (ب) منحنی نمونه‌وار سیال خروجی.

در این عمل، محلولی حاوی ماده حل شده  $A$  با کسر مولی  $x_{A1}$  در حلال  $B$ ، با آهنگ جریان حجمی ثابت  $w/\rho$  از برج پر شده می‌گذرد. برج با نوعی ماده جامد دانه‌ای پر شده که می‌تواند  $A$  را از محلول جذب کند. در آغاز عبور، فضاهای درون شبکه‌ای بستر با مایع خالص  $B$  پر می‌شوند و ماده جامد فاقد  $A$  است. سیالی که از بستر عبور می‌کند، این حلال را به‌طور یکنواخت جابه‌جا می‌کند، به طوری که غلظت محلول  $A$  همیشه در هر مقطع ستون یکنواخت است. برای ساده شدن کار، فرض می‌شود که غلظت تعادلی  $A$  جذب شده روی ماده جامد با غلظت موضعی  $A$  در محلول متناسب است. به علاوه فرض می‌شود که غلظت  $A$  در محلول عبوری همیشه کم است و مقاومت جامد متخلخل در برابر انتقال جرم بین ذره‌ای قابل چشم‌پوشی است. عبارتی برای بیان غلظت  $A$  در ستون، به صورت تابعی از زمان و فاصله در طول ستون به دست آورید.

حل

به شیوه‌ای موازی با روش برخورد با جذب‌کننده گاز در مثال ۵.۲۳-۲، دو فاز را به صورت پیوسته و موجود در کنار هم، مطابق شکل ۶.۲۳-۲، در نظر می‌گیریم. باردیگر سطح تماس بر واحد حجم ستون پر شده را  $a$  می‌نامیم. اما این باریکی از فازها ساکن و شرایط حالت‌ناپایا حاکم است. به علت این رفتار ناپایای موضعی، موازنه‌های ماکروسکوپی جرم، به صورت موضعی و برای جزء کوچکی از ستون به ارتفاع  $\Delta z$  نوشته می‌شوند. می‌توان از معادله (۳-۱.۲۳) و

فرض رقیق بودن محلول‌ها استفاده کرد و گفت که آهنگ مولی جریان حلال،  $W_B$ ، اساساً در طول ستون و در مدت انجام عملیات ثابت است. اکنون از معادله (۳-۱.۲۳) برای نوشتن روابط پایستگی جرم برای گونه  $A$  در هر فاز، برای جزء ستونی به ارتفاع  $\Delta z$  استفاده می‌کنیم.

برای فاز جامد موجود در این جزء ستون، می‌توانیم معادله (۳-۱.۲۳) را به‌طور موضعی به‌کار ببندیم، و در نظر داشته‌باشیم که اکنون  $M_{A,tot}$  هم به  $z$  و هم به  $t$  بستگی دارد:

$$\frac{dM_{A,tot}}{dt} = W_A \quad (۱۰-۶.۲۳)$$

یا

$$(1 - \varepsilon)S\Delta z \frac{\partial c_{As}}{\partial t} = (k_x^{\circ} a)(x_A - x_{A0})S\Delta z \quad (۱۱-۶.۲۳)$$

در این‌جا از معادله (۱۴-۱.۲۲) استفاده شده و معنای نمادها به‌شرح زیر است:

$\varepsilon$  = کسر حجمی ستون که مایع آن را اشغال کرده‌است.

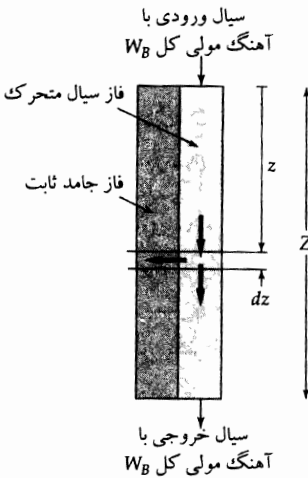
$S$  = سطح مقطع ستون (خالی).

$c_{As}$  = مول‌های جذب‌شده  $A$  در واحد حجم فاز جامد.

$x_A$  = کسر مولی توده‌ای  $A$  در فاز مایع.

$x_{A0}$  = کسر مولی فصل‌مشرکی  $A$  در فاز سیال، که در تعادل با  $c_{As}$  فرض می‌شود.

$k_x^{\circ}$  = ضریب انتقال جرم فاز سیال، که برای آهنگ‌های پایین انتقال جرم، با معادله (۱۴-۱.۲۲) تعریف شد.



شکل ۶-۲۳ مدل شماتیک جذب‌کننده بستر ثابت، که جزء دیفرانسیلی را نشان می‌دهد که موازنه جرم روی آن نوشته شده‌است.

توجه کنید که در نوشتن معادله (۱۱-۶.۲۳)، از انتقال جرم همرفتی در فصل‌مشرک جامد-سیال چشم‌پوشی کردیم. این کار در صورتی معقول است که  $x_{A0}$  بسیار کوچک‌تر از واحد باشد. هم‌چنین فرض کردیم که ذرات به‌اندازه کافی کوچک هستند که غلظت محلول در اطراف هر ذره، روی سطح ذره اساساً ثابت باشد. برای فاز مایع، در جزء ستون موردبررسی، معادله (۳-۱.۲۳) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{dM_{A,tot}}{dt} = -\Delta W_A + W_A \quad (۱۲-۶.۲۳)$$

یا

$$\varepsilon c S \Delta z \frac{\partial x_A}{\partial t} = -W_B \Delta z \frac{\partial x_A}{\partial z} - (k_x^* a)(x_A - x_{A^0}) S \Delta z \quad (۱۳-۶.۲۳)$$

در این رابطه  $c$  غلظت مولی کل مایع است. معادله (۱۳-۶.۲۳) را می‌توان با معرفی متغیر زمان اصلاح‌شده‌ای که به صورت زیر تعریف می‌شود، بازنویسی کرد:

$$t' = t - \left( \frac{\varepsilon c S}{W_B} \right) z \quad (۱۴-۶.۲۳)$$

مشاهده می‌شود که، برای هر مکان در داخل ستون،  $t$  زمان اندازه‌گیری شده از لحظه رسیدن «جبهه» حلال عبوری به مکان موردنظر است. با بازنویسی معادله‌های (۱۳-۶.۲۳) و (۱۱) برحسب  $t'$ ، نتیجه می‌شود:

$$\left( \frac{\partial x_A}{\partial z} \right)_{t'} = - \frac{(k_x^* a) S}{W_B} (x_A - x_{A^0}) \quad \left( \frac{\partial c_{As}}{\partial t'} \right)_z = \frac{(k_x^* a)}{(1 - \varepsilon)} (x_A - x_{A^0}) \quad (۱۶, ۱۵-۶.۲۳)$$

معادله‌های (۱۶ و ۱۵-۶.۲۳) ترکیب معادله‌های پایستگی جرم برای هر فاز، با عبارت‌های فرض شده برای آهنگ انتقال جرم‌اند. این دو معادله را باید به‌طور هم‌زمان، همراه با توزیع تعادلی میان فازی،  $x_{A^0} = m c_{As}$  حل کرد؛ در عبارت اخیر  $m$  مقداری ثابت است. شرایط مرزی عبارت‌اند از:

$$(۱۷-۶.۲۳) \text{ شرط مرزی ۱: در } t' = 0, \text{ داریم } c_{As} = 0, \text{ به‌ازای همه } z > 0.$$

$$(۱۸-۶.۲۳) \text{ شرط مرزی ۲: در } z = 0, \text{ داریم } x_A = x_{A1}, \text{ به‌ازای همه } t' > 0.$$

قبل از حل این معادله‌ها، بهتر است آن‌ها را برحسب متغیرهای بدون بعد زیر بازنویسی کنیم:

$$X(\zeta, \tau) = \frac{x_A}{x_{A1}} \quad \Upsilon(\zeta, \tau) = \frac{\Upsilon_{As}}{x_{A1}} \quad (۲۰, ۱۹-۶.۲۳)$$

$$\zeta = \frac{(k_x^* a) S}{W_B} z \quad \tau = \frac{(k_x^* a) m}{(1 - \varepsilon)} t' \quad (۲۲, ۲۱-۶.۲۳)$$

برحسب این متغیرها، معادله‌های دیفرانسیل و شرایط مرزی به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{\partial X}{\partial \zeta} = -(X - \Upsilon); \quad \frac{\partial \Upsilon}{\partial \tau} = +(X - \Upsilon) \quad (۲۴, ۲۳-۶.۲۳)$$

و شرایط مرزی آن عبارت‌اند از:  $X(0, \tau) = 1$  و  $\Upsilon(\zeta, 0) = 0$ .

جواب<sup>۲</sup> معادله‌های (۲۳-۶.۲۳ و ۲۴) با این شرایط مرزی عبارت است از:

$$X = 1 - \int_0^\zeta e^{-(\tau + \bar{\zeta})} J_0(i\sqrt{4\tau\bar{\zeta}}) d\bar{\zeta} \quad (۲۵-۶.۲۳)$$

در این رابطه  $J_0(ix)$  تابع بسل مرتبه صفر از نوع اول است. این جواب به صورت ترسیمی در چندین منبع آمده است.<sup>۳</sup>

۲. این نتیجه نخستین بار در منبع زیر برای مسئله نظیر در انتقال گرما ارائه شد:

A. Anzelius, *Z. angew. Math. u. Mech.*, **6**, 291-294 (1926).

یکی از روش‌های به دست آوردن این نتیجه در مسئله ۱.۳۲۳ مطرح شده است. هم چنین نگاه کنید به:

H. Bateman, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Dover, New York (1944), pp. 123-125.

3. O. A. Hougen and K. M. Watson, *Chemical Process Principles*, Part III, Wiley, New York (1947), p. 1086.

$aZ$  و  $bT$  آن‌ها با  $\chi$  و  $\zeta$  ما متناظر است.

## مثال ۳-۶.۲۳

سودمندی گشتاورهای مرتبه پایین

در بسیاری از سیستم‌های پیچیده، توصیف کامل یا نشدنی است و یا غیرضروری؛ کافی است که فقط چند مشخصه اساسی را به دست بیاوریم. به طور خاص، ممکن است از ما بپرسند که چگونه می‌توان حجم سیستم،  $V$ ، و آهنگ جریان حجمی  $\dot{Q}$  در سیستم را، از روی مشاهدات پالس‌های کوتاه ماده ردیابی به جرم  $m$  که در ورودی تزریق و در خروجی اندازه‌گیری می‌شود، تعیین کرد. برای این منظور جریان پایای ماکروسکوپی در سیستمی بسته با شکل هندسی دلخواه را در نظر بگیرید که، مانند سیستم نشان داده شده در شکل ۱-۷ فقط یک ورودی و یک خروجی داشته باشد، با این تفاوت که در مورد فعلی سطوح متحرک وجود ندارند. جریان و رفتار نفوذی اختیاری‌اند، با این استثنا که توزیع ماده ردیاب را باید با استفاده از معادله نفوذ (معادله (۱۹-۱-۷)) که معادله (۱۷-۳-۷) برای شار جرم در آن قرار داده شده است) توصیف کرد:

$$\frac{\partial \rho_T}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho_T \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathcal{D}_{TS} \nabla \rho_T) \quad (26-6.23)$$

که در آن  $\rho_T$  غلظت موضعی ماده ردیاب و  $\mathcal{D}_{TS}$  ضریب نفوذ شبه‌دوتایی برای ماده ردیابی است که در داخل محلولی که سیستم را پر کرده است، حرکت می‌کند. با استفاده از کمیت‌های هموارشده زمانی و ضریب نفوذ تلاطمی مؤثر، می‌توان سیستم‌های متلاطم را نیز مشمول این تحلیل کرد. برای به دست آوردن موازنه‌های ماکروسکوپی به استفاده از این شرط نیاز داریم که جریان یا نفوذ در جدارهای محفظه رخ ندهد:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad \text{و} \quad (\mathbf{n} \cdot \nabla \rho_T) = 0 \quad (28, 27-6.23)$$

و شار نفوذی ماده ردیاب، در مقایسه با شار همرفتی در ورودی و خروجی سیستم، کوچک باشد:

$$\mathcal{D}_{TS}(\mathbf{n} \cdot \nabla \rho_T) \ll \rho_T(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \quad (29-6.23)$$

در این جا  $\mathbf{n}$  بردار یکه قائم روبه بیرون است. غلظت ماده ردیاب ورودی را تا زمان  $t = 0$ ، و هم‌چنین بعد از گذشت زمان متناهی  $t = t_0$  برابر صفر می‌گیریم. در عمل عمر پالس غلظت باید نسبتاً کوتاه باشد.

حل

این تحلیل<sup>۴</sup> بر گشتاورهای  $I^{(n)}$  غلظت ماده ردیاب نسبت به زمان مبتنی است، که چنین تعریف می‌شوند:

$$I^{(n)}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(\mathbf{r}, t) t^n dt \quad (30-6.23)$$

اکنون معادله (۲۶-۶-۲۳) را در  $t^n$  ضرب می‌کنیم و درگستره غلظت خروجی غیرصفر ماده ردیاب، نسبت به زمان انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{\cdot}^{\infty} \frac{\partial \rho_T}{\partial t} t^n dt + \left( \nabla \cdot \mathbf{v} \int_{\cdot}^{\infty} \rho_T t^n dt \right) = \left( \nabla \cdot \mathcal{D}_{TS} \nabla \int_{\cdot}^{\infty} \rho_T t^n dt \right) \quad (31-6.23)$$

وقتی از نخستین جمله انتگرال بگیریم و از نمادگذاری معرفی شده در معادله (۳۰-۶-۲۳) استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} -nI^{(n-1)} = -(\nabla \cdot \mathbf{v} I^{(n)}) + (\nabla \cdot \mathcal{D}_{TS} \nabla I^{(n)}) & (n \geq 1) \\ 0 = -(\nabla \cdot \mathbf{v} I^{(n)}) + (\nabla \cdot \mathcal{D}_{TS} \nabla I^{(n)}) & (n = 0) \end{cases} \quad (33, 32-6.23)$$

4. E. N. Lightfoot, A. M. Lenhoff, and R. I. Rodrigues, *Chem. Eng. Sci.*, **37**, 954-956 (1982).

که برای همه سیستم‌هایی که گشتاورهای متناهی ایجاد می‌کنند صادق است. اکنون سلسله‌مراتبی از معادله‌ها برای  $I^{(n)}$  برحسب گشتاورهای مرتبه پایین‌تر داریم، و ساختار این معادله‌ها بسیار ساده و راحت است.

از لحاظ فیزیکی، نخستین بار اسپالدینگ<sup>۵</sup> متوجه شد که معادله (۳۲-۶.۲۳) صورتی همانند با معادله نفوذ همراه با واکنش شیمیایی، یعنی معادله (۱۶-۱.۱۹) دارد، اما در آن غلظت با  $I^{(n)}$  و جمله مربوط به واکنش با  $nI^{(n-1)}$  جایگزین شده است. بنابراین می‌توان از این معادله‌ها روی کل حجم سیستم جریان انتگرال گرفت و مجموعه جدیدی از موازنه‌های ماکروسکوپی به دست آورد.

با انتگرال‌گیری از معادله (۳۳-۶.۲۳)، به ازای  $n = 0$ ، روی کل حجم سیستم جریان بین صفحه‌های ۱ و ۲ شروع می‌کنیم:

$$0 = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{v} I^{(0)}) dV + \int_V (\nabla \cdot D_{TS} \nabla I^{(0)}) dV \quad (34-6.23)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس گاوس می‌توان انتگرال‌های حجم را به انتگرال‌های سطح تبدیل کرد؛ داریم:

$$0 = - \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} I^{(0)}) dS + \int_S (\mathbf{n} \cdot D_{TS} \nabla I^{(0)}) dS \quad (35-6.23)$$

که در آن  $S = S_f + S_1 + S_2$ . انتگرال روی سطح ثابت  $S_f$ ، طبق معادله‌های (۲۷-۶.۲۳ و ۲۸) صفر است، و انتگرال‌های روی صفحه‌های ورودی و خروجی  $S_1$  و  $S_2$  را می‌توان ساده کرد، به طوری که نتیجه می‌شود:

$$0 = \int_{S_1} v I^{(0)} dS - \int_{S_2} v I^{(0)} dS \quad (36-6.23)$$

در این جا از معادله (۲۹-۶.۲۳) برای حذف جمله‌های نفوذی در صفحه‌های ۱ و ۲ استفاده کرده‌ایم. اگر فرض کنیم که  $I^{(0)}$  در سرتاسر هر مقطع ثابت است، می‌توان آن را از زیر علامت انتگرال بیرون آورد؛ نتیجه می‌شود:

$$0 = \langle v_1 \rangle S_1 I_1^{(0)} - \langle v_2 \rangle S_2 I_2^{(0)} \quad (37-6.23)$$

برای سیالی تراکم‌ناپذیر، آهنگ جریان حجمی،  $Q$ ، ثابت است، به طوری که  $\langle v_1 \rangle S_1 = \langle v_2 \rangle S_2$ ، و:

$$I_1^{(0)} = I_2^{(0)} \quad (38-6.23)$$

یعنی،  $I^{(0)}$  تعیین شده در صفحه ۱ با  $I^{(0)}$  تعیین شده در صفحه ۲، و در هر نقطه از سیستم، همانند است. روش استاندارد نمادگذاری این است که این کمیت را به صورت اختصاری  $M$  نشان دهیم که گشتاور صفرم (مطلق) است. معادله (۳۸-۶.۲۳) نظیر معادله (۲-۱.۲۳) برای سیستم حالت‌ناپایا، بدون انتقال جرم در جدارهاست. سپس  $I_1^{(0)}$  را برای وارد کردن ماده ردیابی به جرم  $m$  در یک فاصله زمانی بسیار کوتاه در مقایسه با زمان میانگین اقامت ماده ردیاب،  $t_{res} = V/Q$ ، تعیین می‌کنیم:

$$I_1^{(0)} = \int_0^\infty \rho_T(\mathbf{r}, t)|_{S_1} dt = \left( \frac{Q}{V} \int_0^{V/Q} \rho_T(\mathbf{r}, t)|_{S_1} dt \right) \frac{V}{Q} = \left( \frac{m}{V} \right) \frac{V}{Q} = \frac{m}{Q} \quad (39-6.23)$$

5. D. B. Spalding, *Chem. Eng. Sci.*, **9**, 74-77 (1958).

جایگزینی حد بالایی با  $V/Q$  در گام دوم، به سبب متناهی بودن عمر پالس مادهٔ ردیاب مجاز است. سپس از دو معادلهٔ اخیر، نتیجه می‌شود:

$$Q = \frac{m}{I_{\dot{\gamma}}^{(0)}} = \frac{m}{M}. \quad (۴۰-۶.۲۳)$$

با استفاده از این معادله می‌توان آهنگ جریان خون را، به کمک ردیاب تزریق شده و مقدار  $I_{\dot{\gamma}}^{(0)} = M$  اندازه‌گیری کرد. مقدار اخیر را می‌توان با فرو بردن سوند در رگ خونی، یا با استفاده از فنون NMR به دست آورد. این فرمول ساده<sup>۶</sup> نخستین بار در سال ۱۸۲۹ معرفی شد و از سال ۱۸۹۷ کاربرد گسترده‌ای در اندازه‌گیری آهنگ‌های جریان خون<sup>۷</sup>، شامل برون‌داد قلبی<sup>۸</sup> داشته‌است. این معادله در بسیاری از سیستم‌های زیست‌محیطی، مانند رودها، و هم‌چنین برای سیستم‌های مورد استفاده در صنایع فراوری نیز کاربرد گسترده‌ای دارد. سپس به سراغ معادلهٔ (۳۲-۶.۲۳) می‌رویم و از این معادله، روی حجم سیستم جریان انتگرال می‌گیریم و یک بار دیگر از این نکته استفاده می‌کنیم که در ورودی و خروجی، جملهٔ نفوذی از جملهٔ همرفتی بسیار کوچک‌تر است. نتیجه می‌شود:

$$-n \int_V I^{(n-1)}(\mathbf{r}, t) dV = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{v} I^{(n)}) dV \quad (۴۱-۶.۲۳)$$

یا، اگر  $I^{(n)}$  در یک مقطع ثابت فرض شود:

$$-n \left( \frac{1}{V} \int_V I^{(n-1)}(\mathbf{r}, t) dV \right) = \frac{1}{V} (\langle v_1 \rangle S_1 I_1^{(n)} - \langle v_2 \rangle S_2 I_2^{(n)}) \quad (۴۲-۶.۲۳)$$

سپس، با تعریف کمیت داخل پرانتز سمت چپ به صورت متوسط حجمی، سرانجام نتیجه می‌شود:

$$-n [I^{(n-1)}]_{\text{متوسط حجمی}} = \frac{Q}{V} (I_1^{(n)} - I_2^{(n)}) \quad (۴۳-۶.۲۳)$$

حال اگر  $n = 1$  نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$-I^{(0)} = \frac{Q}{V} (I_1^{(1)} - I_2^{(1)}) = \frac{1}{t_{\text{res}}} (I_1^{(1)} - I_2^{(1)}) \quad (۴۴-۶.۲۳)$$

اگر مادهٔ ردیاب به صورت ورودی تابع دلتا تزریق شود، به طوری که  $I_1^{(1)} = 0$ ، می‌توان از نمادگذاری  $I_2^{(1)} = M_1$  (گشتاور اول) استفاده کرد، و آخرین معادله چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{I_2^{(1)}}{I^{(0)}} = t_{\text{res}} \quad \text{یا} \quad \frac{M_1}{M_0} = t_{\text{res}} \quad (۴۵-۶.۲۳)$$

این نتیجه، که در ارتباط با معادلهٔ (۴۰-۶.۲۳) به کار می‌رود، مدت‌هاست که توسط متخصصان قلب، برای تعیین حجم خون به کار می‌رود. این نتیجه در بسیاری از محاسبات دیگر زیست‌محیطی و صنعت فراوری نیز کاربرد پیدا کرده‌است. گشتاورهای مرتبهٔ بالاتر، به ویژه گشتاورهای مرکزی، نیز سودمندند:

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_T(t - t_{\text{res}})^n dt \quad (۴۶-۶.۲۳)$$

6. E. Hering, *Zeits. f. Physik*, **3**, 85-126 (1829).

7. G. N. Stewart, *J. Physiol. (London)*, **22**, 159-183 (1897).

8. K. Zierler, *Ann. Biomed. Eng.*, **28**, 836-848 (2000).



این گشتاورها در مورد خاص ورودی ردیاب ضربه‌ای به‌کار می‌روند. حالت گشتاور مرکزی دوم به‌نحی دیگر شده، یا واریانس، عبارت است از:

$$\sigma^2 = \frac{\mu_2}{M_1^2} \quad (47-6.23)$$

این مجدداً انحراف معیار است، وقتی توزیع ردیاب خروجی از نوع توزیع گاوسی باشد. سومین گشتاور مرکزی معیاری از بی‌تقارنی حول  $t_{res}$  است، و گشتاور چهارم معیاری از کشیدگی است. در عمل، تعیین دقیق گشتاور چهارم با استفاده از داده‌های تجربی، تقریباً غیرممکن است، و حتی به‌دست آوردن گشتاور سوم هم بسیار دشوار است. استفاده از گشتاور دوم کاربردهای بسیار مهمی در بررسی دینامیک ردیاب بافت زیست‌شناختی<sup>۹</sup> دارد و نوشته‌های زیادی در حوزه پزشکی به کاربردهای دیگر تعمیم یافته‌اند. توجه به روابط جمع‌پذیری در سیستم‌های با ارتباط زنجیری نیز جالب است. بنابراین  $M_0$  نسبت به تعداد سیستم‌های فرعی ناورداست و  $M_1$ ،  $M_2$  و  $M_3$  جمع‌پذیرند، اما گشتاورهای مرتبه بالاتر چنین نیستند.

### پرسش‌های تشریحی

۱. موازنه‌های ماکروسکوپی برای مخلوط‌های چندجزئی چگونه به‌دست می‌آیند؟ این معادله‌ها با معادله‌های تغییر چه رابطه‌ای دارند؟
۲. در معادله (۱-۱.۲۳)، واکنش‌های همگن و ناهمگن چگونه به‌حساب می‌آیند؟ مفهوم فیزیکی  $w_{\alpha,0}$  چیست؟
۳. مثالی مشخص از سیستمی ارائه دهید که در آن جمله آخر معادله (۴-۱.۲۳) صفر است.
۴. در استفاده از جدول ۱-۵.۲۳، معمولاً جهت‌های جریان (یعنی ورودی یا خروجی بودن جریان) را مشخص می‌کنند. اگر جهت جریان با زمان تغییر کند، چه باید کرد؟
۵. محاسبات انجام‌شده برای تعیین آنتالپی در واحد جرم،  $\hat{H} = \hat{U} + p\hat{V}$ ، در معادله (۱-۳.۲۳)، و آنتالپی مولی جزئی در معادله (۱-۳.۲۳ الف)) را خلاصه کنید. این کمیت‌ها را برای مخلوط‌های گاز ایده‌آل مشخص کنید.
۶. روش به‌دست آوردن موازنه انرژی مکانیکی در بخش ۸.۷ را مرور کنید. اگر بخواهیم این موازنه را در مورد مخلوط غیرهم‌دمای واکنش‌پذیر در سیستم جریانی بدون سطح انتقال جرم به‌کار ببریم، چه تغییری باید در آن بدسیم؟
۷. این فصل تا چه میزان زمینه لازم برای بررسی عملیات واحدی از قبیل جذب، استخراج، تقطیر، و تبلور را فراهم می‌کند؟
۸. در این فصل چه تغییراتی باید ایجاد کرد تا فرایندهایی را که در داخل فضاپیما، یا روی سطح کره ماه انجام می‌شوند، توصیف کند؟

### مسئله‌ها

۱۲۳.۱. انبساط مخلوط گاز: آهنگ واکنش بسیار آهسته. دما و سرعت مخلوط آب‌گاز را در سر خروجی نازل مثال ۴-۵.۲۳ تخمین بزنید، هرگاه آهنگ واکنش بسیار آهسته باشد. از داده‌های زیر استفاده کنید:  $\log_{10} K_x = -0.15$ ،  $\tilde{C}_{p,H_2} = 7.217$ ،  $\tilde{C}_{p,H_2O} = 12.995$ ،  $\tilde{C}_{p,CO} = 9.861$ ،  $\tilde{C}_{p,CO_2} = 9.861$ ، و  $\tilde{C}_{p,CO} = 7.932$  (همه ظرفیت‌های گرمایی بر حسب  $\text{Btu/lb-mole} \cdot ^\circ\text{F}$ ). آیا فشار خروجی نازل با فشار محیط برابر است؟

جواب:  $920 \text{ K}$ ،  $1726 \text{ ft/s}$ ؛ بلی، جریان نازل زیرصوتی است.

9. F. Chinard, *Ann. Biomed Eng.*, **28**, 849-859 (2000).

۲. الف ۲۳ ارتفاع برج جذب پرشده. برج پرشده‌ای از نوع توصیف‌شده در مثال ۲۳-۵، برای حذف ۹۰٪ سیکلوهگزان از مخلوط سیکلوهگزان-هوا، از طریق جذب در نوعی روغن سبک غیرفرار به‌کار می‌رود. جریان گاز از کف برج، با آهنگ حجمی  $363 \text{ ft}^3/\text{min}$ ، با دمای  $30^\circ\text{C}$  و فشار  $1.05 \text{ atm}$  وارد می‌شود. این مخلوط حاوی ۱٪ حجمی سیکلوهگزان است. روغن از بالای برج با آهنگ  $20 \text{ lb-moles/hr}$ ، با دمای  $30^\circ\text{C}$  وارد می‌شود و تقریباً ۳٪ مولی سیکلوهگزان دارد. فشار بخار سیکلوهگزان در دمای  $30^\circ\text{C}$  برابر  $121 \text{ mm Hg}$  است و محلول‌های آن در روغن از قانون راول پیروی می‌کنند.

(الف) خط کارکرد این ستون را ترسیم کنید.

(ب) منحنی تعادل را درگستره عملیات موردنظر در این جا ترسیم کنید. فرض کنید عملیات هم‌دما و هم‌فشار باشد.

(ج) شرایط فصل‌مشرکی را در هر سر ستون تعیین کنید.

(د) ارتفاع لازم برای برج را، با استفاده از معادله (۲۳-۵) تعیین کنید، هرگاه  $k_x^*a = 0.32 \text{ lb-moles/hr} \cdot \text{ft}^2$  و  $k_y^*a = 14.2 \text{ lb-moles/hr} \cdot \text{ft}^2$ ، و سطح مقطع برج،  $S$ ، برابر  $2700 \text{ ft}^2$  باشد.

(ه) قسمت (د) را با استفاده از معادله (۲۳-۵) تکرار کنید.

جواب: (د) در حدود  $62 \text{ ft}$ ؛ (ه)  $60 \text{ ft}$ .

۱. ب ۲۳ نیروهای رانش مؤثر متوسط در جذب‌کننده گاز. برج جذب گاز پرشده‌ای از نوع تشریح‌شده در مثال ۲۳-۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید غلظت ماده حل‌شده همواره پایین است و خطوط تعادل و کارکرد هردو تقریباً مستقیم‌اند. تحت این شرایط، می‌توان  $k_x^*a$  و  $k_y^*a$  را در سطح انتقال جرم ثابت در نظر گرفت.

(الف) نشان دهید که  $(Y_A - Y_{Ae})$  با  $Y_A$  به‌طور خطی تغییر می‌کند. توجه کنید که  $Y_A$  نسبت مولی توده‌ای  $A$  در فاز گاز و  $Y_{Ae}$  نسبت مولی فاز گازی در مایعی با ترکیب کلی  $X_A$  است (نگاه کنید به شکل ۲-۴-۲۲).

(ب) قسمت (الف) را برای  $(Y_A - Y_{A0})$  تکرار کنید.

(ج) از نتایج قسمت‌های (الف) و (ب) استفاده کنید و نشان دهید که:

$$W_{Ag,0} = (k_y^*a)ZS(Y_{A0} - Y_A) \ln \quad (1-1.23)$$

$$W_{Ag,0} = (K_y^*a)ZS(Y_{Ae} - Y_A) \ln \quad (2-1.23)$$

ضریب کلی انتقال جرم  $K_y^*$  با معادله (۴-۴-۲۲) تعریف می‌شود. توجه کنید که این قسمت از مسئله را می‌توان به تناظر با مثال ۱-۴-۱۵ حل کرد.

۲. ب ۲۳ انبساط مخلوط گاز: آهنگ واکنش بسیار سریع. دما و سرعت مخلوط آب-گاز را در سر خروجی نازل مثال ۲۳-۵ تخمین بزنید، هرگاه بتوان آهنگ واکنش را بی‌نهایت سریع فرض کرد. از داده‌های مسئله ۲۳ الف ۱، به‌علاوه داده‌های زیر استفاده کنید: در  $900 \text{ K}$  داریم  $\log_{10} K_x = -0.34$ ؛  $\bar{H}_{H_2} = 6340 + 49378 \text{ cal/g-mole}$ ؛  $\bar{H}_{H_2O}(g) = -16636$ ؛  $\bar{H}_{CO} = -83242$ ؛  $\bar{H}_{CO_2} = -110510$  (همه آنتالپی‌ها برحسب  $\text{cal/g-mole}$ ). برای ساده شدن کار، از اثر دما بر ظرفیت گرمایی چشم‌پوشی کنید و فرض کنید  $\log_{10} K_x$  با دما، بین  $900 \text{ K}$  و  $1000 \text{ K}$ ، به‌طور خطی تغییر می‌کند. استفاده از راهکار ساده‌شده زیر توصیه می‌شود:

(الف) پیشاپیش مشاهده می‌شود که  $T_2$  بالاتر از مقداری است که در مورد واکنش آهسته دیدیم، و بنابراین از

$920\text{ K}$  بیش‌تر است (نگاه کنید به مسئله ۲۳ الف.۱). نشان دهید که، درگستره دمایی که با آن سروکار پیدا می‌کنیم، تغییرات  $\bar{H}$  با دما بسیار نزدیک به حالت خطی است و از رابطه  $(d\bar{H}/dT)_{\text{avg}} \approx 12,400\text{ cal/g-mole} \cdot \text{K}$  پیروی می‌کند.

(ب) نتیجه قسمت (الف) را در معادله (۵.۲۳-۶) قرار دهید و نشان دهید که  $T_2 \approx 937\text{ K}$ .

(ج)  $\bar{H}_1$  و  $\bar{H}_2$  را محاسبه کنید و با استفاده از معادله (۴۸.۵.۲۳) نشان دهید که  $v_2 = 1750\text{ ft/s}$ .

۳.۲۳ راه‌اندازی رآکتور شیمیایی.

(الف) از معادله (۵.۲۳-۶)، با شرایط اولیه گفته‌شده، انتگرال بگیرید و نشان دهید که معادله (۸.۲۳-۱) می‌تواند  $M_{B,\text{tot}}$  را به صورت تابعی از زمان، به درستی توصیف کند.

(ب) نشان دهید که  $s_+$  و  $s_-$  در معادله (۹.۲۳-۶) حقیقی و منفی‌اند. راهنمایی: نشان دهید که:

$$(k'''_{1A} + k'''_{1B} + k'''_{1C})^2 - 4k'''_{1B}k'''_{1C} = (k'''_{1A} - k'''_{1B} + k'''_{1C})^2 + 4k'''_{1A}k'''_{1B} \quad (23.b.3-1)$$

(ج) عبارتهایی برای بیان  $M_{C,\text{tot}}$  و  $M_{A,\text{tot}}$  به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

۴.۲۳ واکنش مرتبه اول برگشت‌پذیر در رآکتور پیوسته. رآکتوری به حجم  $V$  که خوب هم‌زده می‌شود، ابتدا با محلولی تشکیل شده از ماده حل‌شده  $A$  در حلال  $S$  با غلظت  $c_{A0}$  کاملاً پر شده است. در زمان  $t = 0$ ، محلول همانندی از  $A$  در  $S$  را با آهنگ جریان جرمی ثابت  $w$  وارد رآکتور می‌کنیم. جریان ثابت کوچکی از کاتالیزگر حل‌شده نیز به‌طور هم‌زمان وارد می‌شود و سبب می‌شود گونه  $A$  طبق واکنش مرتبه اول برگشت‌پذیری با ثابت آهنگ  $k''''S^{-1}$  ناپدید شود. ثابت آهنگ واکنش را می‌توان از ترکیب و زمان مستقل فرض کرد. نشان دهید که غلظت  $A$  در رآکتور (هم‌دما فرض می‌شود) در هر لحظه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{c_A}{c_{A0}} = \left(1 - \frac{wt_0}{\rho V}\right) e^{-t/t_0} + \frac{wt_0}{\rho V} \quad (23.b.4-1)$$

که در آن  $t_0^{-1} = [(w/\rho V) + k'''']$

۵.۲۳ موازنه‌های جرم و آنتالپی در جداساز آدیاباتیک. می‌خواهیم صد پوند آمونیاک آبی فوق‌داغ با  $40\%$  جرمی و آنتالپی مخصوص  $420\text{ Btu/lb}_m$  را به‌طور آدیاباتیک تبخیر آبی کنیم تا فشار آن به  $10\text{ atm}$  برسد. مطلوب است محاسبه ترکیب شیمیایی و جرم مایع و بخار تولیدشده. در این مسئله می‌توانید فرض کنید که درحالت تعادل ترمودینامیکی:

$$\log_{10} Y_{\text{NH}_3} = 1/4 + 1/53 \log_{10} X_{\text{NH}_3} \quad (23.b.5-1)$$

که در آن  $X_{\text{NH}_3}$  و  $Y_{\text{NH}_3}$  نسبت‌های جرمی آمونیاک به آب‌اند. آنتالپی‌های مایع و بخار اشباع در فشار  $10\text{ atm}$  را می‌توان چنین فرض کرد:

$$\hat{H} = 1210 - 465y_{\text{NH}_3} - 115y_{\text{NH}_3}^2 \quad (23.b.5-2)$$

$\text{Btu/lb}_m$  بخار اشباع، و:

$$\hat{h} = 330 - 95x_{\text{NH}_3} + 74x_{\text{NH}_3}^2 \quad (23.b.5-3)$$

Btu/lb<sub>m</sub> مایع اشباع. در این جا  $x_{NH_3}$  و  $y_{NH_3}$  کسرهای جرمی آمونیاک‌اند.

جواب:  $x_W = 0.22$ ,  $W = 63.6 \text{ lb}_m$ ,  $\dot{H}_p = 877 \text{ Btu/lb}_m$ ,  $y_P = 0.713$ ,  $P = 36.5 \text{ lb}_m$ ,  $\dot{h}_W = 157 \text{ Btu/lb}_m$ .

۶.ب.۲۳ توزیع جریان در زنجیرهٔ ایده‌آل. مطلوب است تعیین جریان‌های بالا و پایین‌رو در مراحل مختلف زنجیرهٔ ایده‌آل توصیف شده در مثال ۳-۵.۲۳. نتایج را به صورت کسرهایی از آهنگ تغذیه بیان کنید و کار را از پایین زنجیره ( $n = 0$ ) آغاز کنید. تعداد مراحل را ۱۲ بگیرید، زیرا این نزدیک‌ترین عدد صحیح به تعداد مراحل لازم برای جداسازی مطلوب است. کار را با محاسبهٔ ترکیب‌های جریان بالا و پایین‌رو شروع کنید و سپس از موازنه‌های جرم:

$$D_{n+1} = U_n + W; \quad x_{n+1}D_{n+1} = y_nU_n + x_WW \quad (1-6.23)$$

زیر صفحهٔ ورودی (تغذیه) و موازنه‌های متناظر در بالای آن شروع کنید. ترکیب ته‌مانده ( $W$ ) با کسرهای مولی  $x_0 = x_W = 0.1$  متناظر است.

۷.ب.۲۳ جداسازی ایزوتوپ و تابع مقدار. می‌خواهیم یک دستگاه جداساز ایزوتوپ را که جریان ورودی  $50 \text{ moles/hr}$  حاوی  $10\%$  مولی از ایزوتوپ مطلوب را به محصولی با خلوص  $90\%$  و پسماندی با غلظت  $1\%$  تبدیل می‌کند، با جداساز دیگری که  $50 \text{ moles/hr}$  با غلظت  $10\%$  مولی از مادهٔ مطلوب را به محصول و پسماندی، به ترتیب، با غلظت  $95\%$  و  $2\%$  تبدیل می‌کند، مقایسه کنیم. بازه کدام جداساز بالاتر است؟ فرض کنید ظرفیت جداسازی دیراک معیار دقیقی برای تعیین بازه باشد.

۱۰.ج.۲۳ واکنش مرتبهٔ دوم برگشت‌ناپذیر در مخزن هم‌زده. سیستمی شبیه سیستم تشریح شده در مسئلهٔ ۴.ب.۲۳ را در نظر بگیرید، با این تفاوت که مادهٔ حل شده طبق یک واکنش مرتبهٔ دوم ناپدید می‌شود؛ یعنی  $R_{A,tot} = -k_2'''Vc_A^2$ . با استفاده از روش زیر، عبارتی برای  $c_A$  به صورت تابعی از زمان بنویسید:

(الف) از موازنهٔ ماکروسکوپی جرم مادهٔ حل شدهٔ  $A$  در مخزن، برای به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیلی که تشکیل  $c_A$  در طول زمان را توصیف می‌کند، استفاده کنید.

(ب) معادلهٔ دیفرانسیل و شرط اولیه را برحسب متغیر زیر بازنویسی کنید:

$$u = c_A + \frac{w}{2\rho V k_2'''} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4\rho V k_2''' c_{A0}}{w}} \right) \quad (1-1.23)$$

معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی که به این ترتیب به دست می‌آید معادلهٔ دیفرانسیل برنولی است.

(ج) حال فرض کنید  $v = 1/u$  و انتگرال‌گیری را انجام دهید. سپس نتیجه را برحسب متغیر اولیهٔ  $c_A$  بازنویسی کنید.

۲۰.ج.۲۳ تصفیهٔ پروتئین (شکل ۲۳.۲). می‌خواهیم یک مخلوط پروتئین دوتایی را با استفاده از زنجیرهٔ ایده‌آل مراحل مجزای فراصاف‌سازی از نوع نشان داده شده در شکل، تصفیه کنیم. واحد غشای بزرگ‌تر محل جداسازی است و شار هر پروتئین در غشا با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$N_i = c_i v S_i \quad (1-2.23)$$

که در آن  $N_i$  شار پروتئین  $i$  عبوری از غشا،  $c_i$  غلظت آن در محلول بالا رو (که فرض می‌کنیم خوب هم‌زده

می‌شود)،  $v$  سرعت سطحی در عبور از غشا، و  $S_i$  ضریب غربال‌گری خاص پروتئین است. از واحد غشای کوچک‌تر صرفاً برای حفظ موازنه سیال استفاده می‌کنند و می‌توان در این مسئله آن را نادیده گرفت.

(الف) نشان دهید که غنی‌سازی پروتئین ۱ نسبت به ۲ از رابطه زیر به دست می‌آید:

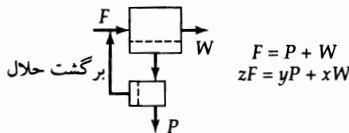
$$\Upsilon_1 = \alpha_{12} X_1 \quad (2-23)$$

که در آن  $X_1$  و  $\Delta_1$  نسبت‌های مولی پروتئین ۱ به ۲، به ترتیب، در جریان‌های محصول و پسماند است و  $\alpha_{12} = S_1/S_2$ .

(ب) مطلوب است تعیین تعداد مراحل لازم در زنجیره‌ای ایده‌آل برای تولید پروتئین ۱ با خلوص ۹۹٪ از جریان ورودی ۹۰٪ با بازده ۹۵٪. به صورت تابعی از  $\alpha_{12}$  پیشنهاد می‌شود که  $\alpha_{12}$  را از ۲ تا ۲۰۰ تغییر دهید.

(ج) مطلوب است محاسبه غلظت‌های برون‌داد، بازده، و آهنگ‌های جریان در زنجیره‌ای سه‌مرحله‌ای، با  $\alpha_{12} = 40$  و ورودی با خلوص ۹۰٪ به مرحله میانی.

(د) ظرفیت جداسازی دیراک با این زنجیره را، با ظرفیت جداسازی حاصل از فقط یک واحد با همین نسبت مولی محصول به ورودی، مقایسه کنید.



شکل ۲۰-۲۳. جداساز دوتایی غشایی.

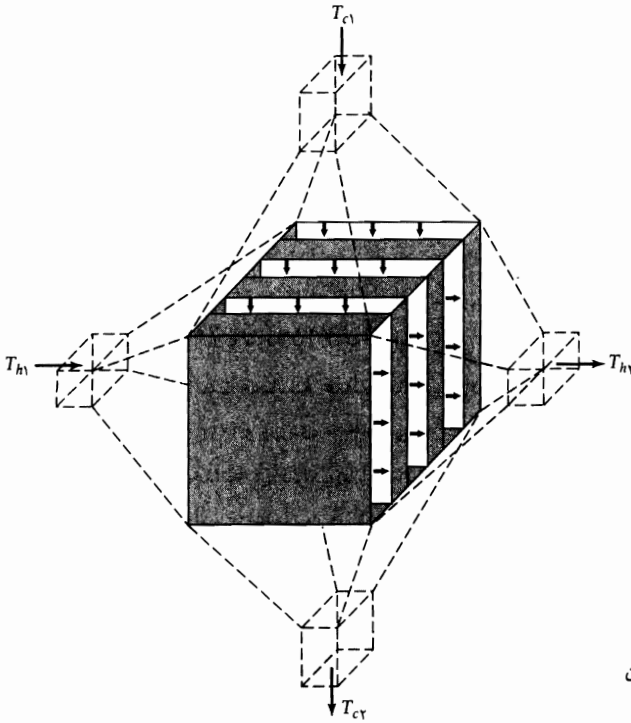
۳-۲۳ مفهوم فیزیکی گشتاورهای صفرم و اول. چند سیستم جریان ساده، مانند جریان قالبی و مخزن خوب هم‌زده را، به صورت انفرادی و با آرایش‌های متوالی یا موازی در نظر بگیرید. نشان دهید که آهنگ‌های جریان و حجم‌ها را می‌توان از گشتاورهای تعریف شده در مثال ۳-۶-۲۳ به دست آورد.

۴-۲۳ تناظر بین عملیات ناپایای ستون جذب و مبادله‌کن گرما با جریان عرضی. (شکل ۴-۲۳ ج ۴). در مبادله‌کن گرمای نشان داده شده در شکل، از دو جریان سیال عمود بر هم، و شار گرمای موازی با جدار چشم‌پوشی می‌شود. در این دستگاه، تبادل گرما آشکارا کم‌تر از مبادله‌کن با جریان متقابل با سطح مساوی و ضریب کلی انتقال گرمای مساوی، تحت شرایط مساوی، است. در این مبادله‌کن‌ها، با فرض ثابت بودن  $U_{loc}$ ، جریان گرما را می‌توان با رابطه زیر بیان کرد:

$$Q = U_{loc} A \Delta T_{ln} \Upsilon \quad (1-4-23)$$

در این رابطه  $Q$  آهنگ کل انتقال گرما،  $A$  مساحت سطح انتقال گرما، و  $\Delta T_{ln}$  میانگین لگاریتمی  $(T_{h1} - T_{c1})$  و  $(T_{h2} - T_{c2})$  است که در شکل نیز مشاهده می‌شود. توجه کنید که  $T_{h2}$  و  $T_{c2}$  دماهای متوسط‌گیری شده دو جریان خروجی است. می‌توان  $\Upsilon$  را نسبت گرمای انتقال یافته در جریان عرضی، به گرمای انتقال یافته در جریان متقابل دانست.

با استفاده از معادله (۲۵-۶-۲۳) عبارتی برای بیان  $\Upsilon$  به صورت تابعی از آهنگ جریان، خواص فیزیکی، سطح انتقال گرما، و ضریب کلی انتقال گرمای موضعی بنویسید. نتیجه را برحسب انتگرال‌های معین بیان کنید؛  $\hat{C}_{ph}$ ،  $\hat{C}_{pc}$ ، و  $U_{loc}$  ثابت فرض می‌شوند.



شکل ۲۳-۴. نمایش شماتیک مبادله‌کن گرمای جریان عرضی «ساندویچی».

۱.۵۲۳ عملیات حالت‌ناپایای ستون پرشده. نشان دهید که معادله (۲۳-۶.۲۵) جوابی معتبر برای معادله‌های (۲۳-۶.۲۳ و ۲۴) است. استفاده از رهیافت زیر توصیه می‌شود:

(الف) تبدیل لاپلاس معادله‌های (۲۳-۶.۲۳ و ۲۴) را نسبت به  $\tau$  به دست آورید. تبدیل  $\Upsilon$  را از عبارتهای حاصل حذف کنید. نشان دهید که تبدیل  $X$  برای شرایط مرزی مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\bar{X} = \frac{1}{s} e^{-[s/(s+1)]\zeta} \quad (۱-۱.۵۲۳)$$

که در آن  $\bar{X}$  تبدیل لاپلاس  $X$  است.

(ب) این عبارت را به صورت زیر بازنویسی کنید:

$$\bar{X} = \frac{1}{s} - \int_0^\zeta e^{-\bar{\zeta}} \left( \frac{1}{s+1} \right) e^{[\bar{\zeta}/(s+1)]} d\bar{\zeta} \quad (۲-۱.۵۲۳)$$

این عبارت را وارون کنید تا با استفاده از اتحاد:

$$\mathcal{L}\{e^{a\tau} F(\tau)\} = \bar{F}(s-a) \quad (۳-۱.۵۲۳)$$

معادله (۲۵-۲۳۶) به دست آید؛ در اتحاد بالا  $\bar{F}(s)$  را

۲.۵۲۳ جمع‌پذیری گشتاورهای مرتبه پایین. یک جفت سیستم جریان را در نظر بگیرید که شرایط مثال ۳-۶.۲۳ را برآورده می‌کنند و به صورت متوالی قرار گرفته‌اند. نشان دهید که (۱) گشتاور صفرم در ورودی‌ها و خروجی‌های

سیستم‌های اول و دوم برابر است، و (۲) گشتاور مطلق اول و گشتاورهای مرکزی دوم و سوم، اما نه گشتاور مرکزی چهارم، جمع‌پذیرند. پیشنهاد: درمورد گشتاورهای دوم و بالاتر، به این نکته توجه کنید که خروجی واحد دوم، در پی پالس ورودی به واحد اول، را می‌توان با استفاده از انتگرال پیچش (کانولوشن) به‌دست آورد:

$$c(t) = \int_0^t h_1(t - \tau)h_2(\tau)d\tau \equiv h_1^*h_2 \quad (۱-۲.۲۲۳)$$

که در آن  $h$  پاسخ سیستم به ورودی پالسی است. راه ساده‌ای برای ادامه کار، توجه به این نکته است که تبدیل لاپلاس  $c(t)$  را می‌توان چنین نوشت:

$$\mathcal{L}\{c(t)\} \equiv F(s) = h_1(s)h_2(s) \quad (۲-۲.۲۲۳)$$

سیس نتیجه می‌شود که:

$$F'(s) = h_1'(s)h_2(s) + h_1(s)h_2'(s) \quad (۳-۲.۲۲۳)$$

و به‌همین ترتیب برای مشتق‌های مرتبه بالاتر. اکنون می‌توان نشان داد که:

$$M_0 = F(0); \quad M_1 = -\frac{F'(0)}{F(0)} \quad (۵, ۴-۲.۲۲۳)$$

$$\mu_2 = \frac{F''(0)}{F(0)} - \frac{[F'(0)]^2}{[F(0)]^2} \quad (۶-۲.۲۲۳)$$

$$\mu_3 = -\frac{F'''(0)}{F(0)} + 3\frac{F'(0)F''(0)}{[F(0)]^2} - 2\frac{[F'(0)]^2}{[F(0)]^2} \quad (۷-۲.۲۲۳)$$

$$\mu_4 = \frac{F^{(iv)}(0)}{F(0)} - 4\frac{F''(0)F'''(0)}{[F(0)]^2} + 6\frac{F''(0)[F'(0)]^2}{[F(0)]^3} - 3\frac{[F'(0)]^3}{[F(0)]^3} \quad (۸-۲.۲۲۳)$$

۳.۲۲۳ راه‌اندازی یک راکتور شیمیایی. مثال ۱-۶.۲۳ را، با استفاده از تبدیل‌های لاپلاس معادله‌های (۲۳-۲-۶) و (۳) دوباره حل کنید.

۴. رفتار گذرای  $N$  راکتور متوالی.  $N$  راکتور شیمیایی یکسان به حجم  $V$  را به‌صورت متوالی متصل کرده‌اند؛ هر راکتور به یک هم‌زن کامل مجهز است. در ابتدا، هر مخزن با حلال خالص  $S$  پر شده‌است. در زمان صفر، محلولی از  $A$  در  $S$ ، با آهنگ جریان حجمی ثابت  $Q$  و غلظت ثابت  $C_A(0)$  وارد مخزن اول می‌شود. این محلول حاوی مقدار کمی کاتالیزگر حل‌شده نیز هست که درست قبل از تخلیه در مخزن اول به آن اضافه کرده‌اند و سبب می‌شود واکنش‌های مرتبه اول زیر انجام شوند:



ثابت‌های آهنگ این واکنش‌ها در سرتاسر سیستم ثابت فرض می‌شوند. فرض کنید  $h = Q/V$ ، عکس «زمان اقامت مؤثر» در هر مخزن باشد. عبارتی برای بیان  $C_A(n)$ ، غلظت گونه شیمیایی  $\alpha$  در مخزن  $n$ ام در هر زمان  $t$  به‌دست بیاورید.

## فصل ۲۴

### سایر مکانیسم‌های انتقال جرم

۰۱.۲۴ معادله تغییر آنتروپی

۰۲.۲۴ عبارت‌های شار برای گرما و جرم

۰۳.۲۴ نفوذ غلظتی و نیروهای رانش

۰۴.۲۴ کاربردهای معادلات تعمیم‌یافتهٔ ماکسول-استفان

۰۵.۲۴ انتقال جرم در غشاهای تراوای گزینشی

۰۶.۲۴ نفوذ در محیط‌های متخلخل

در فصل ۱ گفتیم که انتقال مولکولی اندازه حرکت، توسط قانون ویسکوزیته نیوتون، به گرادیان سرعت مربوط می‌شود. در فصل ۸ قانون فوریه را ارائه دادیم که بنا به آن، انتقال مولکولی گرما به سبب گرادیان دما رخ می‌دهد. اما، وقتی در فصل ۱۹ دربارهٔ مخلوط‌ها بحث می‌کردیم، به یک سهم دیگر در شارگرمای مولکولی اشاره کردیم که مقدار آنبالی انتقالی از طریق نفوذگونه‌های مختلف درهم را به حساب می‌آورد. در فصل ۱۷ قانون (اول) فیک برای نفوذ را ارائه دادیم که بنا به آن انتقال مولکولی جرم در نتیجهٔ گرادیان غلظت رخ می‌دهد. در آن جا نشان دادیم که سایر نیروهای محرک نیز می‌توانند در شارجرمی سهم داشته باشند. هدف از این فصل، توصیف مهم‌ترین نیروهای محرک و نشان دادن چند کاربرد است. در میان این نیروها، مهم‌تر از همه گرادیان‌های پتانسیل الکتریکی و فشارند، که بر رفتار سیستم‌های یونی و غشاهای تراوای گزینشی، هم چنین دستگاه‌های فراگریزازمرکز، حاکم‌اند. پدیده‌های الکتروسینتیکی اهمیت روزافزونی دارند. دوقطبی‌های القایی که می‌توانند جداسازی انجام دهند، مانند دی‌الکتروفورز و مگنتوفورز، در کاربردهای تخصصی مفید واقع می‌شوند. به علاوه، گرادیان‌های دمایی را خواهیم یافت که می‌توانند با استفاده از فرایندی موسوم به نفوذ گرمایی<sup>۱</sup> یا اثر سوره، سبب ایجاد شارهای جرمی شوند و این که گرادیان‌های غلظت می‌توانند از طریق

۱. برای نخستین بار، مشاهدهٔ این اثر در مایعات در منبع زیر گزارش داده شد:

C. Ludwig, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien* **20**, 539 (1856), but is named after Ch. Soret, *Arch. Sci. Phys. Nat., Genève*, **2**, 48-61 (1879); **4**, 209-213 (1880); *Comptes Rendus Acad. Sci., Paris*, **91**, 289-291 (1880).

برای نخستین بار، مشاهدهٔ این اثر در گازها در منبع زیر گزارش داده شده است.

S. Chapman and F. W. Dootson, *Phil. Mag.*, **33**, 248-253 (1917).



گرم‌نفوذ<sup>۲</sup> یا اثر دوفو، گرما انتقال دهند. سرانجام درک این نکته مهم است که در سیستم‌های حاوی سه جزء یا بیشتر، رفتار هرگونه تحت تأثیر گرادیان‌های غلظت همه گونه‌های موجود در سیستم است.

خوش‌بختانه گستره وسیع رفتار ناشی از این نیروهای محرک مختلف را می‌توان با استفاده از چارچوبی که ترمودینامیک عدم تعادل فراهم آورده است، به صورت موجز توصیف کرد؛<sup>۳</sup> این موضوع در بخش‌های ۱.۲۴ و ۲.۲۴ خلاصه شده است. این بحث با معادلات تعمیم‌یافته ماکسول-استفان به پایان می‌رسد. در بخش‌های باقی‌مانده نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان از حالت‌های خاص این معادله‌ها، برای ارائه توصیف راحتی از بعضی فرایندهای برگزیده نفوذ استفاده کرد.

دانشجویانی که نمی‌خواهند دو بخش نخست را مطالعه کنند، می‌توانند مستقیماً به سراغ بخش‌های بعدی بروند، که در آن‌ها نتایج اساسی ترمودینامیک عدم تعادل خلاصه شده است.

### ۱.۲۴ معادله تغییر آنتروپی

در ترمودینامیک عدم تعادل از چهار فرض، علاوه بر فرض‌های اختیار شده در ترمودینامیک تعادل، استفاده می‌شود:

۱. روابط ترمودینامیک عدم تعادل در مورد سیستم‌هایی صادق است که در تعادل نیستند، به شرط آن‌که گرادیان‌ها چندان بزرگ نباشند (فرض شبه تعادل).

۲. همه شارهای سیستم را می‌توان به صورت روابطی خطی، شامل همه نیروها، نوشت (فرض خطی بودن).

۳. هرگاه مرتبه تانسوری شار و نیرو عددی فرد باشد، شارها و نیروها باهم جفت نمی‌شوند (فرض کوری).<sup>۲</sup>

۴. درغیاب میدان‌های مغناطیسی، ماتریس ضرایب در روابط شار-نیرو، متقارن است (روابط متقابل اونساگر).<sup>۳</sup>

در این بخش و در بخش بعد، از این فرض‌ها استفاده خواهیم کرد؛ این فرض‌ها از نیاز به توصیف پدیده‌های مختلف مشاهده شده، و هم چنین از پیشرفت‌های نظریه سینتیکی ناشی شده‌اند. توجه کنید که نظریه عدم تعادلی که ما از

2. L. Dufour, *Arch. Sci. Phys. Nat. Genève*, **45**, 9-12 (1872); *Ann. Phys.* (5) **28**, 490-492 (1873).

۳. بحثی که در این جا مطرح می‌شود به سیستم‌های چند جزئی مربوط است. بحث در مورد سیستم‌های دوتایی را می‌توان در منابع زیر یافت.

L. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd edition, Pergamon Press (1987), Chapter VI.

هم چنین نگاه کنید به

R. B. Bird, *Korean J. Chem. Eng.*, **15**, 105-123 (1998).

I. S. R. de Groot and P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam (1962).

هم چنین نگاه کنید به

H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, Wiley, New York (1985), Chapter 14.

2. P. Curie, *Oeuvres*, Paris (1903), P. 129

۳. لارس اونساگر (۱۹۷۶-۱۹۰۳)، برنده جایزه نوبل در دانشگاه فنی ترونهیم در رشته مهندسی شیمی تحصیل کرد؛ پس از آن که دو سال در زوریخ با پتر دپیه کار کرد، قبل از شروع به کار در دانشگاه ییل، در چند دانشگاه مختلف به تدریس پرداخت. سهم او در ترمودینامیک فرایندهای برگشت‌ناپذیر در منبع زیر شرح داده شده است.

L. Onsager, *Phys. Rev.*, **37**, 405-426 (1931); **38**, 2265-2279 (1931).

خلاصه‌ای از واری‌های تجربی انجام‌شده روی روابط متقابل اونساگر در منبع زیر ارائه شده است.

D. G. Miller, in *Transport Phenomena in Fluids* (H. J. M. Hanley, ed.), Marcel Dekker, New York (1969), Chapter 11.

آن استفاده می‌کنیم، شامل سیالات غیرنیوتونی نمی‌شود.<sup>۴</sup>  
در مسئله ۱.۵۱۱، نحوه به‌دست آوردن معادله موازنه آنتروپی یامان:

$$\rho \frac{D\hat{S}}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{s}) + g_S \quad (۱-۱.۲۴)$$

را مشاهده کردیم که در آن  $\hat{S}$  آنتروپی در واحد جرم سیال چندجزئی،  $\mathbf{s}$  بردار شار آنتروپی، و  $g_S$  آهنگ تولید آنتروپی در واحد حجم است. فعلاً نمی‌دانیم که  $\mathbf{s}$  و  $g_S$  چه هستند و بنابراین نخستین وظیفه ما یافتن عبارت‌هایی برای بیان این کمیت‌ها برحسب شارها و گرادیان‌های سیستم است. برای انجام این کار باید از این فرض استفاده کرد که معادله‌های ترمودینامیک تعادل به‌طور موضعی معتبرند (فرض شبه‌تعادل)، که به این معناست که معادله‌هایی مانند:

$$d\hat{U} = T d\hat{S} - p d\hat{V} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{G}_\alpha}{M_\alpha} d\omega_\alpha \quad (۲-۱.۲۴)$$

را می‌توان در سیستمی به‌کار برد که چندان از تعادل دور نباشد. در این معادله  $\bar{G}_\alpha$  انرژی آزاد گیبس مولی جزئی و  $M_\alpha$  وزن مولکولی گونه  $\alpha$  است. اکنون این رابطه را در مورد جزء سیالی که با سرعت جرمی میانگین  $\mathbf{v}$  حرکت می‌کند، به‌کار می‌بندیم. سپس می‌توانیم عملگرهای دیفرانسیل را با عملگرهای مشتق مادی جایگزین کنیم. با استفاده از این صورت، معادله (۲-۱.۲۴) به ما امکان می‌دهد که  $D\hat{S}/Dt$  را برحسب  $D(\hat{U}/Dt)$ ،  $D(\hat{V}/Dt)$ ، و  $D\omega_\alpha/Dt$  بیان کنیم.

سپس از معادله تغییر برای انرژی داخلی [معادله (د) در جدول ۲.۱۹-۴]، معادله کلی پیوستگی [معادله (الف) در جدول ۲.۱۹-۳] و معادله پیوستگی گونه  $\alpha$  [معادله (ب) در جدول ۲.۱۹-۳] می‌توان برای سه مشتق مادی معرفی شده استفاده کرد. بنابراین، پس از مرتب کردن، نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{T} \left( \mathbf{q} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{G}_\alpha}{M_\alpha} \mathbf{j}_\alpha \right) \quad (۳-۱.۲۴)$$

$$g_S = - \left( \mathbf{q} \cdot \frac{1}{T^2} \nabla T \right) - \sum_{\alpha=1}^N \left( \mathbf{j}_\alpha \cdot \left[ \nabla \left( \frac{1}{T} \frac{\bar{G}_\alpha}{M_\alpha} \right) - \frac{1}{T} \mathbf{g}_\alpha \right] \right) - \left( \boldsymbol{\tau} : \frac{1}{T} \nabla \mathbf{v} \right) - \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{T} \frac{\bar{G}_\alpha}{M_\alpha} r_\alpha \quad (۴-۱.۲۴)$$

حاصل ضرب آنتروپی به‌صورت مجموع حاصل ضرب‌های شارها و نیروها نوشته شده‌است. اما فقط  $N - 1$  شار جرمی مستقل  $\mathbf{j}_\alpha$  وجود دارد، و به‌سبب معادله گیبس-دوهم، فقط  $N - 1$  نیروی مستقل نیز وجود دارد. وقتی این

۴. برای توصیف سیالات ویسکوکشان، باید نظریه ترمودینامیک را، به شرحی که در منابع زیر آمده‌است، تعمیم داد.

A. N. Beris and B. J. Edwards, *Thermodynamics of Flowing Systems with Internal Microstructure*, Oxford University Press (1994); M. Grmela and H. C. Öttinger, *Phys. Rev.*, **E56**, 6620-6632 (1997); H. C. Öttinger and M. Grmela, *Phys. Rev.*, **E56**, 6633-6655 (1997); B. J. Edwards, H. C. Öttinger, and R. J. J. Jongschaap, *J. Non-Equilibrium Thermodynamics*, **27**, 356-373 (1997); H. C. Öttinger, *Phys. Rev.*, **E57**, 1416-1420 (1998); H. C. Öttinger, *Applied Rheology*, **9**, 17-26 (1999).

عدم استقلال<sup>۵</sup> را به حساب بیاوریم، می‌توانیم شار آنتروپی و حاصل ضرب آنتروپی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{T} \mathbf{q}^{(h)} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{S}_{\alpha}}{M_{\alpha}} \mathbf{j}_{\alpha} \quad (5-1.24)$$

$$Tg_s = -(\mathbf{q}^{(h)} \cdot \nabla \ln T) - \sum_{\alpha=1}^N \left( \mathbf{j}_{\alpha} \cdot \frac{cRT}{\rho_{\alpha}} \mathbf{d}_{\alpha} \right) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{G}_{\alpha}}{M_{\alpha}} r_{\alpha} \quad (6-1.24)$$

که در آن  $\mathbf{q}^{(h)}$  شار گرماست که شار آنتالپی نفوذی از آن کم شده‌است:

$$\mathbf{q}^{(h)} = \mathbf{q} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{H}_{\alpha}}{M_{\alpha}} \mathbf{j}_{\alpha} \quad (7-1.24)$$

و

$$\begin{aligned} cRT \mathbf{d}_{\alpha} &= c_{\alpha} T \nabla \left( \frac{\bar{G}_{\alpha}}{T} \right) + c_{\alpha} \bar{H}_{\alpha} \nabla \ln T - \omega_{\alpha} \nabla p - \rho_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} + \omega_{\alpha} \sum_{\beta=1}^N \rho_{\beta} \mathbf{g}_{\beta} \\ &= c_{\alpha} RT \nabla \ln a_{\alpha} + (\phi_{\alpha} - \omega_{\alpha}) \nabla p - \rho_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} + \omega_{\alpha} \sum_{\beta=1}^N \rho_{\beta} \mathbf{g}_{\beta} \end{aligned} \quad (8-1.24)$$

صورت دوم معادله (۸-۱.۲۴) با استفاده از رابطه  $d\bar{G}_{\alpha} = RT d \ln a_{\alpha}$  به دست آمد که در آن  $a_{\alpha}$  فعالیت است. در عمل  $\nabla \ln a_{\alpha}$  مشتق‌ها را باید در  $T$  ثابت و  $p$  ثابت گرفت و کمیت  $\phi_{\alpha} = c_{\alpha} \bar{V}_{\alpha}$  کسر حجمی گونه  $\alpha$  است.  $\mathbf{d}_{\alpha}$  که در این جا معرفی شده، نیروهای رانش نفوذی نامیده می‌شود و این نیروها نفوذ غلظتی (جمله دارای  $\nabla \ln a_{\alpha}$ )، نفوذ فشاری (جمله دارای  $\nabla p$ )، و نفوذ واداشته (جمله دارای  $\mathbf{g}_{\alpha}$ ) را منظور می‌کنند.  $\mathbf{d}_{\alpha}$  را به صورت  $\sum_{\alpha} \mathbf{d}_{\alpha} = 0$  نیز تعریف می‌کنند.

حاصل ضرب آنتروپی در معادله (۶-۱.۲۴)، که مجموع حاصل ضرب‌های شارها و نیروهاست، نقطه آغاز برای به دست آوردن روابط ترمودینامیک عدم تعادل است.

طبق «فرض خطی بودن»، هر شار در معادله (۶-۱.۲۴)  $(\mathbf{q}^{(h)}, \mathbf{j}_{\alpha}, \boldsymbol{\tau}, \bar{G}_{\alpha}/M_{\alpha})$  را می‌توان به صورت تابعی خطی از همه نیروها  $(r_{\alpha}, \nabla \mathbf{v}, \mathbf{d}_{\alpha}, \nabla T)$  نوشت. اما بنابه «فرض کوری»، هر یک از  $\mathbf{j}_{\alpha}$ ها باید به همه  $\mathbf{d}_{\alpha}$ ها، و هم‌چنین به  $\nabla T$  وابستگی خطی داشته‌باشد، و  $\mathbf{q}^{(h)}$  باید به  $\nabla T$  و هم‌چنین به همه  $\mathbf{d}_{\alpha}$ ها وابستگی خطی داشته‌باشد، اما نه  $\mathbf{j}_{\alpha}$  و نه  $\mathbf{q}^{(h)}$  نمی‌توانند به  $\nabla \mathbf{v}$  یا  $r_{\alpha}$  وابسته باشند. به همین ترتیب، تانسور تنش  $\boldsymbol{\tau}$  به تانسور  $\nabla \mathbf{v}$  و هم‌چنین به نیروهای رانش اسکالر  $r_{\alpha}$  ضرب در تانسور یکه، وابسته است.

چون «تزیوج» بین  $\boldsymbol{\tau}$  و واکنش‌های شیمیایی بررسی نشده‌است، این موضوع را دیگر در نظر نمی‌گیریم. در بخش بعد، تزیوج بین همه نیروهای برداری و شارهای برداری و پیامدهای کاربرد «روابط متقابل اونساگر» را شرح می‌دهیم.

۵. برای اطلاع از گام‌های میانی، نگاه کنید به

۲.۲۴ عبارت‌های شار برای گرما و جرم

اکنون «فرض خطی بودن» را، برای به‌دست آوردن شارهای برداری به‌کار می‌گیریم:

$$\mathbf{q}^{(h)} = -a_{\alpha\alpha} \nabla \ln T - \sum_{\beta=1}^N \frac{cRT a_{\alpha\beta}}{\rho_{\alpha}\rho_{\beta}} \mathbf{d}_{\beta} \quad (۱-۲.۲۴)$$

$$\mathbf{j}_{\alpha} = -a_{\alpha\alpha} \nabla \ln T - \rho_{\alpha} \sum_{\beta=1}^N \frac{cRT a_{\alpha\beta}}{\rho_{\alpha}\rho_{\beta}} \mathbf{d}_{\beta} \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (۲-۲.۲۴)$$

در این معادله‌ها کمیت‌های  $a_{\alpha\alpha}$ ,  $a_{\alpha\beta}$  و «ضرایب پدیده‌شناختی» (یعنی خواص انتقال) اند. چون  $\mathbf{j}_{\alpha}$  و  $\mathbf{d}_{\alpha}$  همگی مستقل نیستند، لازم می‌شود که  $a_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma} a_{\alpha\gamma} = 0$  که در آن عمل جمع روی همه  $\gamma$ ‌ها (مگر  $\gamma = \beta$ ) از ۱ تا  $N$  انجام می‌شود. حال طبق روابط متقابل اونسگر،  $a_{\alpha\alpha} = a_{\alpha\alpha}$  و  $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$  به‌ازای همه مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  از ۱ تا  $N$ . سپس ضرایب پدیده‌شناختی را به ضرایب انتقال مربوط می‌کنیم. ابتدا  $a_{\alpha\alpha}$  و  $a_{\alpha\alpha}$  را با نام جدید  $D_{\alpha}^T$ ، ضرایب نفوذ گرمایی چندجزئی نام‌گذاری می‌کنیم. این‌ها این خاصیت را دارند که  $\sum_{\alpha} D_{\alpha}^T = 0$ . سپس ضرایب نفوذ فیک چندجزئی،  $\mathbb{D}_{\alpha\beta}$  را با رابطه  $\mathbb{D}_{\alpha\beta} = -cRT a_{\alpha\beta} / \rho_{\alpha}\rho_{\beta}$  تعریف می‌کنیم. این ضرایب نفوذ متقارن اند ( $\mathbb{D}_{\alpha\beta} = \mathbb{D}_{\beta\alpha}$ ) و از روابط  $\sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \mathbb{D}_{\alpha\beta} = 0$  پیروی می‌کنند. در این صورت معادله (۲-۲.۲۴) برای شارهای جرمی چندجزئی چنین نوشته می‌شود:

$$\mathbf{j}_{\alpha} - D_{\alpha}^T \nabla \ln T + \rho_{\alpha} \sum_{\beta=1}^N \mathbb{D}_{\alpha\beta} \mathbf{d}_{\beta} \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (۳-۲.۲۴)$$

این‌ها معادله‌های تعمیم‌یافته فیک‌اند. وقتی صورت دوم معادله (۱-۲.۲۴) را در معادله (۳-۲.۲۴) قرار دهیم، مشاهده می‌کنیم که چهار سهم برای بردار شار جرمی  $\mathbf{j}_{\alpha}$  وجود دارد: جمله نفوذ غلظتی (حاوی گرادیان فعالیت)، جمله نفوذ فشاری (حاوی گرادیان فشار)، جمله نفوذ واداشته حاوی نیروهای خارجی)، و جمله نفوذ گرمایی (متناسب با گرادیان دما).

معادله (۳-۲.۲۴) را می‌توان «برگردان کرد»<sup>۲۱</sup> و نیروهای رانش  $\mathbf{d}_{\alpha}$  را به‌دست آورد:

$$\mathbf{d}_{\alpha} = - \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{x_{\alpha} x_{\beta}}{\mathbf{B}_{\alpha\beta}} \left( \frac{D_{\alpha}^T}{\rho_{\alpha}} - \frac{D_{\beta}^T}{\rho_{\beta}} \right) (\nabla \ln T) - \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{x_{\alpha} x_{\beta}}{\mathbf{B}_{\alpha\beta}} \left( \frac{\mathbf{j}_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} - \frac{\mathbf{j}_{\beta}}{\rho_{\beta}} \right) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (۴-۲.۲۴)$$

1. C. F. Curtiss, *J. Chem. Phys.*, **49**, 2917-2919 (1968); see also D. W. Condiff, *J. Chem. Phys.*, **51**, 4209-4212 (1969), and C. F. Curtiss and R. B. Bird, *Ind. Eng. Chem. Research*, **38**, 2515-2522 (1999); errata **40**, 1791 (2001).

$\mathbb{D}_{\alpha\beta}$  مورد استفاده در این‌جا منفی  $\bar{D}_{\alpha\beta}$  کورتیس است، که به‌نوبه خود، با  $D_{\alpha\beta}$  مورد استفاده در منبع زیر تفاوت دارد: J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, New York (1954), second corrected printing (1964), Chapter 11.

2. H. J. Merk, *Appl. Sci. Res.*, **A8**, 73-99 (1959); E. Helfand, *J. Chem. Phys.*, **33**, 319-322 (1960). هندریک یا کوبوس مرک (۱۹۸۸-۱۹۲۰) هنگامی که در دوره کارشناسی ارشد فیزیک مهندسی در دانشگاه فنی دلتا تحصیل می‌کرد، عمل وارون کردن روابط جرم-شار را انجام داد؛ از ۱۹۵۳ تا ۱۹۸۷ در همان مؤسسه استاد بود.

این‌ها معادله‌های تعمیم‌یافتهٔ ماکسول-استفان‌اند، که حالت خاصی از آن‌ها را به صورت معادله (۱-۹.۱۷) دیدیم. جمله‌های  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$  را ضرایب نفوذ چندجزئی ماکسول-استفان می‌نامند، و ثابت شده‌است که متقارن‌اند؛<sup>۳</sup> حال به معرفی رابطهٔ آن‌ها با  $\mathbb{D}_{\alpha\beta}$  می‌پردازیم.

وقتی عبارت  $d_{\alpha}$  را از معادله (۴-۲.۲۴) در معادله (۱-۲.۲۴) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{q}^{(h)} = - \left[ a_{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{cRT x_{\alpha} x_{\beta}}{\rho_{\alpha}} \frac{D_{\alpha}^T}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}} \left( \frac{D_{\beta}^T}{\rho_{\beta}} - \frac{D_{\alpha}^T}{\rho_{\alpha}} \right) \right] \nabla \ln T + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{cRT x_{\alpha} x_{\beta}}{\rho_{\alpha}} \frac{D_{\alpha}^T}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}} \left( \frac{\mathbf{j}_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} - \frac{\mathbf{j}_{\beta}}{\rho_{\beta}} \right) \quad (5-2.24)$$

رسانندگی گرمایی هر مخلوط به صورت ضریب تناسب بین بردار شار گرما و گرادیان دما تعریف می‌شود، هرگاه در سیستم شار جرم نداشته باشیم. بنابراین کمیت داخل کروشه، براساس توافق عمومی، رسانندگی گرمایی  $k$  ضرب در دمای مطلق  $T$  است. اگر این نتیجه را با تعریف معادله (۷-۱.۲۴) ترکیب کنیم، عبارت نهایی شار گرما را به دست می‌آوریم:<sup>۳</sup>

$$\mathbf{q} = -k \nabla T + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{H}_{\alpha}}{M_{\alpha}} \mathbf{j}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{cRT x_{\alpha} x_{\beta}}{\rho_{\alpha}} \frac{D_{\alpha}^T}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}} \left( \frac{\mathbf{j}_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} - \frac{\mathbf{j}_{\beta}}{\rho_{\beta}} \right) \quad (6-2.24)$$

مشاهده می‌کنیم که بردار شار گرمای  $\mathbf{q}$  از سه جمله تشکیل می‌شود: جملهٔ رسانش گرما (شامل رسانندگی گرمایی)، جملهٔ نفوذ گرما (شامل آنتالپی‌های مولی جزئی و شارهای جرم)، و سرانجام جملهٔ دوفور (شامل ضرایب نفوذ گرمایی و شارهای جرم). جملهٔ نفوذ گرما، که قبلاً در معادله (۳-۳.۱۹) با آن روبه‌رو شدیم، معمولاً در سیستم‌های نفوذی اهمیت دارد. جملهٔ دوفور معمولاً کوچک است و غالباً از آن چشم‌پوشی می‌کنند.

معادله‌های (۴-۲.۲۴)، (۴)، (۶) و نتایج اصلی ترمودینامیک عدم تعادل‌اند. اکنون بردارهای شار گرما و شار جرم را برحسب خواص انتقال و شارها به دست آورده‌ایم.

سپس رابطهٔ بین ماتریس ضرایب نفوذ فیک  $\mathbb{D}_{\alpha\beta}$  و ماتریس ضرایب نفوذ ماکسول-استفان  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$  را شرح می‌دهیم. هر دو ماتریس متقارن و از مرتبهٔ  $N \times N$  هستند و هر دو  $\frac{1}{2}N(N-1)$  عنصر مستقل دارند. بنابراین  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$  به صورت زیر به دست می‌آید:<sup>۳</sup>

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{\gamma \neq \alpha} \mathbb{D}_{\alpha\gamma} (\text{adj} B_{\alpha})_{\gamma\beta}}{\omega_{\alpha} \omega_{\beta} \sum_{\gamma \neq \alpha} (\text{adj} B_{\alpha})_{\gamma\beta}} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, N \quad (7-2.24)$$

که در آن  $(B_{\alpha})_{\beta\gamma} = \mathbb{D}_{\beta\gamma} + \mathbb{D}_{\alpha\gamma}$  - یعنی مؤلفهٔ  $\beta\gamma$  ماتریس را  $B_{\alpha}$  می‌نامند که از مرتبهٔ  $(N-1) \times (N-1)$  است. و  $\text{adj} B_{\alpha}$  ماتریس الحاقی به  $B_{\alpha}$  است. روابط صریح برای سیستم‌های دوتایی و سه‌تایی، در جدول‌های ۲-۲.۲۴ و ۲ آمده‌است. در معادله (ج) از جدول ۱-۲.۲۴، مشاهده می‌شود که برای مخلوط دوتایی،  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$  و  $\mathbb{D}_{\alpha\beta}$

3. C. F. Curtiss and R. B. Bird, *Ind. Eng. Chem. Research*, **38**, 2515-2522 (1999); errata, **40**, 1791(2001).

با ضریبی از هم متمایز می‌شوند که تابعی از غلظت است. اما این دو علامت یکسانی دارند که نشان می‌دهد چرا در معادله (۲.۲۴-۳) به جای علامت منها، علامت به اضافه را انتخاب کردیم.

اکنون در وضعیتی هستیم که سه نتیجه نهایی این بخش را ارائه دهیم؛ نتایجی که به عنوان نقطه شروع برای حل مسئله‌های نفوذ مفیدند. برای نفوذ چندجزئی در گازها یا مایعات، از ترکیب معادله‌های (۱.۲۴-۸) و (۲.۲۴-۴) نتیجه می‌شود:

$$\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_\alpha x_\beta}{\bar{B}_{\alpha\beta}} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta) = -x_\alpha (\nabla \ln a_\alpha)_{T,p} - \frac{1}{cRT} \left[ (\phi_\alpha - \omega_\alpha) \nabla p - \rho_\alpha \mathbf{g}_\alpha + \omega_\alpha \sum_{\beta=1}^N \rho_\beta \mathbf{g}_\beta \right] - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_\alpha x_\beta}{\bar{B}_{\alpha\beta}} \left( \frac{D_\alpha^T}{\rho_\alpha} - \frac{D_\beta^T}{\rho_\beta} \right) (\nabla \ln T) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (۲.۲۴-۸)$$

این معادله را برحسب اختلاف سرعت‌های مولکولی،  $\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$  نوشتیم. برای نوشتن این معادله برحسب هر شار مولی یا جرمی دلخواه، می‌توان از معادله‌های (د) تا (ط) جدول ۱۸.۱۷ استفاده کرد.

جدول ۲.۲۴-۱ جمع‌بندی عبارتهای ارائه شده برای  $\mathbb{D}_{\alpha\beta}$  برحسب  $D_{\alpha\beta}$  [تذکر: با جایگشت دوره‌ای اندیس‌ها، می‌توان درایه‌های دیگر را تولید کرد. فرمول‌های مربوط به سیستم‌های چهارجزئی در منابع آمده است.]

$$\text{دوتایی} \quad \mathbb{D}_{11} = -\frac{\omega_2^2}{x_1 x_2} \mathcal{D}_{12} \quad (\text{الف})$$

$$\mathbb{D}_{22} = -\frac{\omega_1^2}{x_1 x_2} \mathcal{D}_{12} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbb{D}_{12} = \mathbb{D}_{21} = -\frac{\omega_1 \omega_2}{x_1 x_2} \mathcal{D}_{12} \quad (\text{ج})$$

$$\text{سه‌تایی} \quad \mathbb{D}_{11} = -\frac{\frac{(\omega_2 + \omega_3)^2}{x_1 \bar{B}_{23}} + \frac{\omega_2^2}{x_2 \bar{B}_{12}} + \frac{\omega_3^2}{x_3 \bar{B}_{12}}}{\bar{B}_{12} \bar{B}_{13} + \bar{B}_{12} \bar{B}_{23} + \bar{B}_{13} \bar{B}_{23}} \quad (\text{د})$$

$$\mathbb{D}_{12} = -\frac{\frac{\omega_1(\omega_2 + \omega_3)}{x_1 D_{23}} + \frac{\omega_2(\omega_1 + \omega_3)}{x_2 \bar{B}_{12}} - \frac{\omega_3^2}{x_3 \bar{B}_{12}}}{\bar{B}_{12} \bar{B}_{13} + \bar{B}_{12} \bar{B}_{23} + \bar{B}_{13} \bar{B}_{23}} \quad (\text{ه})$$

جدول ۲.۲۴-۲ جمع‌بندی عبارتهای ارائه شده برای  $D_{\alpha\beta}$  برحسب  $\mathbb{D}_{\alpha\beta}$  [تذکر: با جایگشت دوره‌ای اندیس‌ها، می‌توان درایه‌های دیگر را تولید کرد. برای اطلاع از فرمول‌های مربوط به سیستم‌های چهارجزئی به منابع اصلی رجوع کنید.]

$$\text{دوتایی} \quad \mathcal{D}_{12} = \frac{x_1 x_2}{\omega_1 \omega_2} \mathbb{D}_{12} = -\frac{x_1 x_2}{\omega_1^2} \mathbb{D}_{11} = -\frac{x_1 x_2}{\omega_2^2} \mathbb{D}_{22} \quad (\text{الف})$$

$$\text{سه‌تایی} \quad \mathcal{D}_{12} = \frac{x_1 x_2}{\omega_1 \omega_2} \frac{\mathbb{D}_{12} \mathcal{D}_{23} - \mathbb{D}_{13} \mathcal{D}_{22}}{\omega_1 \omega_2 \mathbb{D}_{12} + \mathbb{D}_{23} - \mathbb{D}_{13} - \mathbb{D}_{22}} \quad (\text{ب})$$

اگر بخواهیم گونه  $\gamma$  را به صورتی خاص مشخص کنیم (مثلاً، حلال) آن‌گاه معادله (۸-۲.۲۴) را می‌توان چنین بازنویسی کرد (نگاه کنید به مسئله ۲۴ ج.۱):

$$\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_\alpha x_\beta}{D_{\alpha\beta}} (\mathbf{v}_\gamma - \mathbf{v}_\beta) = -x_\alpha (\nabla \ln a_\alpha)_{T,p} - \frac{1}{cRT} \left[ (\phi_\alpha - \omega_\alpha) \nabla p - \rho_\alpha \mathbf{g}_\alpha + \omega_\alpha \sum_{\beta=1}^N \rho_\beta \mathbf{g}_\beta \right] \\ - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_\alpha x_\beta}{D_{\alpha\beta}} \left( \frac{D_\gamma^T}{\rho_\gamma} - \frac{D_\beta^T}{\rho_\beta} \right) (\nabla \ln T) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N) \quad (۹-۲.۲۴)$$

توجه کنید که در معادله (۸-۲.۲۴)،  $N(N-1)/2$  ضریب نفوذ متقارن،  $D_{\alpha\beta}$  وجود دارند و  $D_{\alpha\alpha}$ ها ظاهر نمی‌شوند و بنابراین تعریف نمی‌شوند. در معادله (۹-۲.۲۴)،  $N(N+1)/2$  ضریب نفوذ متقارن وجود دارند، اما در این حالت  $D_{\alpha\alpha}$ ها ( $N$  تا از آن‌ها) ظاهر می‌شوند و بنابراین باید  $N$  رابطه کمکی  $\sum (x_\alpha/D_{\alpha\beta}) = 0$  پیدا کنیم؛ در این روابط عمل جمع روی همه  $\alpha$  انجام می‌شود. معادله (۹-۲.۲۴)، با روابط کمکی، با معادله (۸-۲.۲۴) هم‌ارز است و هر دو این معادله‌های تعمیم‌یافته ماکسول-استفان با معادله‌های تعمیم‌یافته فیک، یعنی معادله‌های (۳-۲.۲۴)، همراه با روابط کمکی آن‌ها، هم‌ارزند.

برای نفوذ چندجزئی در گازهای با چگالی پایین می‌توان کسر مولی را جایگزین فعالیت کرد، و به علاوه، با تقریب بسیار خوب،  $D_{\alpha\beta}$  را می‌توان جایگزین  $D_{\alpha\beta}$  کرد. این‌ها ضرایب نفوذ دوتایی برای همه زوج‌های موجود در سیستم‌اند. چون  $D_{\alpha\beta}$  با غلظت تغییرات ناچیزی دارد، درحالی‌که  $D_{\alpha\beta}$  به شدت وابسته به غلظت است، استفاده از صورت ماکسول-استفان (معادله (۴-۲.۲۴)) به استفاده از صورت فیک (معادله (۳-۲.۲۴)) ترجیح داده می‌شود. برای نفوذ دوتایی در گازها یا مایعات، می‌توان جهت ساده کردن معادله (۸-۲.۲۴)، از معادله (ج) جدول ۱-۲.۲۴، و معادله (۱۷ ب.۳-۱) استفاده کرد:

$$\mathbf{J}_A^* = -cD_{AB} \left[ x_A (\nabla \ln a_A)_{T,p} + \frac{1}{cRT} [(\phi_A - \omega_A) \nabla p - \rho \omega_A \omega_B (\mathbf{g}_A - \mathbf{g}_B)] + k_T \nabla \ln T \right] \quad (۱۰-۲.۲۴)$$

در این معادله، نسبت نفوذ گرمایی را معرفی کرده‌ایم که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$k_T = -D_A^T / \rho \tilde{D}_{AB} = + (D_A^T / \rho D_{AB}) (x_A x_B / \omega_A \omega_B)$$

کمیت‌های دیگری که در این معادله وارد شدند عبارت‌اند از: ضریب نفوذ گرمایی  $\alpha_T$  و ضریب سوره  $\sigma_T$ ، که با رابطه  $k_T = \alpha_T x_A x_B = \sigma_T x_A x_B T$  تعریف می‌شوند. برای گازها،  $\alpha_T$  تقریباً از ترکیب شیمیایی مستقل است و  $\sigma_T$  کمیتی است که استفاده از آن در مورد مایعات ترجیح دارد. وقتی  $k_T$  مثبت باشد، گونه  $A$  به طرف ناحیه سردتر حرکت می‌کند و وقتی منفی باشد، گونه  $A$  به طرف ناحیه گرم‌تر می‌رود. بعضی از مقادیر نمونه  $k_T$  برای گازها و مایعات در جدول ۳-۲.۲۴ آمده‌است.

برای مخلوط‌های دوتایی گازهای رقیق، با آزمایش معلوم می‌شود که گونه‌هایی با وزن مولکولی بیش‌تر معمولاً به طرف ناحیه سردتر می‌روند. اگر وزن‌های مولکولی تقریباً مساوی باشند، آن‌گاه معمولاً گونه‌هایی با قطر بیش‌تر به طرف ناحیه سردتر می‌روند. در بعضی موارد، با پایین آمدن دما، علامت نسبت نفوذ گرمایی تغییر می‌کند.<sup>۴</sup> در ادامه این فصل، بعضی از پیامدهای عبارت‌های شار جرمی، یعنی معادله‌های (۸-۲.۲۴)، ۹، و (۱۰) را بررسی می‌کنیم.

4. S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, 3rd edition, Cambridge University Press (1970), p. 274.

جدول ۳-۲۰۲۴ نسبت‌های نفوذ گرمایی تجربی برای مایعات و مخلوط‌های گازی با چگالی پایین.

مایعات الف:			
A-B اجزای	T(K)	$x_A$	$k_T$
$C_2H_2Cl_4-n-C_6H_{14}$	۲۹۸	۰٫۵	۱٫۰۸
$C_2H_2Br_2-C_2H_2Cl_2$	۲۹۸	۰٫۵	۰٫۲۲۵
$C_2H_2Cl_4-CCl_4$	۲۹۸	۰٫۵	۰٫۰۶۰
$CBBr_2-CCl_4$	۲۹۸	۰٫۰۹	۰٫۱۲۹
$CCl_4-CH_3OH$	۳۱۳	۰٫۵	۱٫۲۳
$CH_3OH-H_2O$	۳۱۳	۰٫۵	-۰٫۳۱۷
cyclo- $C_6H_{12}-C_6H_6$	۳۱۳	۰٫۵	۰٫۱۰۰
گازها:			
A-B اجزای	T(K)	$x_A$	$k_T$
$^3Ne-He$	۳۳۰	۰٫۸۰	۰٫۰۵۳۱
		۰٫۴۰	۰٫۱۰۰۴
$^3N_2-H_2$	۲۶۴	۰٫۷۰۶	۰٫۰۵۴۸
		۰٫۲۲۵	۰٫۰۶۶۳
$^2D_2-H_2$	۳۲۷	۰٫۹۰	۰٫۰۱۴۵
		۰٫۵۰	۰٫۰۴۳۲
		۰٫۱۰	۰٫۰۱۶۶

<sup>a</sup> R. L. Saxton, E. L. Dougherty, and H. G. Drickamer, *J. Chem. Phys.*, **22**, 1166-1168 (1954); R. L. Saxton and H. G. Drickamer, *J. Chem. Phys.*, **22**, 1287-1288 (1954); L. J. Tichacek, W. S. Kmak, and H. G. Drickamer, *J. Phys. Chem.*, **60**, 660-665 (1956).

<sup>b</sup> B. E. Atkins, R. E. Bastick, and T. L. Ibbs, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A172**, 142-158 (1939).

<sup>c</sup> T. L. Ibbs, K. E. Grew, and A. A. Hirts, *Proc. Ray. Soc. (London)*, **A173**, 543-554 (1939).

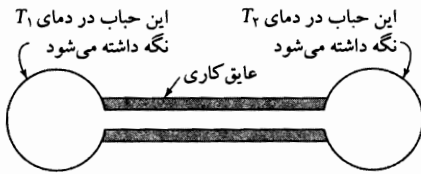
<sup>d</sup> H. R. Heath, T. L. Ibbs, and N.E. Wild, *Proc. Ray. Soc. (London)*, **A178**, 380-389 (1941).

### مثال ۱-۲۰۲۴

نفوذ گرمایی و ستون کلاوسیوس-دیگل

در این مثال نفوذ گونه را تحت تأثیر گرادیان دما شرح می‌دهیم. برای نشان دادن این پدیده، سیستمی مطابق شکل ۱-۲۰۲۴ را در نظر می‌گیریم که از دو حباب تشکیل شده و توسط لوله‌ای عایق‌کاری شده با قطر کم به هم متصل‌اند و با مخلوطی از گازهای ایده‌آل A و B پر شده‌اند. دمای حباب‌ها، به ترتیب، در  $T_1$  و  $T_2$  ثابت نگه داشته می‌شود، و قطر لوله عایق‌کاری شده به اندازه کافی کوچک هست که جریان‌های همرفتی را حذف کند. سرانجام این سیستم به حالت پایا می‌رسد و یک انتهای لوله از گاز A غنی و سمت دیگر از آن تهی می‌شود. عبارتی برای بیان  $x_{A2} - x_{A1}$ ، اختلاف کسرهای مولی در دو سر لوله پیدا کنید.





شکل ۲-۲۴. نفوذ گرمایی دوتایی حالت پایا در دستگاه دوحبابی. مخلوط گازهای  $A$  و  $B$  تحت تأثیر گرادیان گرمایی، گرایش به جدایی دارد.

حل

پس از این که سیستم به حالت پایا رسید، هیچ حرکت خالصی از  $A$  یا  $B$  دیده نمی‌شود، به طوری که  $J_A^* = 0$ . اگر محور لوله را در راستای  $z$  فرض کنیم، آن‌گاه از معادله (۲-۲۴) نتیجه می‌شود:

$$\frac{dx_A}{dz} + \frac{k_T}{T} \frac{dT}{dz} = 0 \quad (۱۱-۲-۲۴)$$

در این معادله فعالیت  $a_A$  با کسر مولی  $x_A$  جایگزین شده است که برای مخلوط‌گازی مناسب است. معمولاً میزان جداسازی در دستگاهی از این نوع اندک است. بنابراین می‌توان از اثر ترکیب بر  $k_T$  چشم‌پوشی کرد و این معادله را چنین نوشت:

$$x_{A2} - x_{A1} = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{k_T}{T} dT \quad (۱۲-۲-۲۴)$$

چون وابستگی  $k_T$  به  $T$  نسبتاً پیچیده است، معمولاً  $k_T$  را در مقداری به‌ازای دمای میانگین  $T_m$ ، ثابت فرض می‌کنند. در این صورت از معادله (۱۲-۲-۲۴) نتیجه تقریبی زیر حاصل می‌شود:

$$x_{A2} - x_{A1} = -k_T(T_m) \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (۱۳-۲-۲۴)$$

دمای میانگین توصیه‌شده<sup>۵</sup> عبارت است از:

$$T_m = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (۱۴-۲-۲۴)$$

معادله‌های (۱۳-۲-۲۴) و (۱۴) برای تخمین زدن مرتبه بزرگی آثار نفوذ گرمایی به‌کار می‌آیند. جداسازی کاملاً ناچیز خواهد بود، مگر گرادیان دما بسیار بزرگ باشد. بنابراین بهتر است اثر نفوذ گرمایی را با همرفت آزاد بین دو جدار عمودی، که یکی گرم و دیگری سرد می‌شود، ترکیب کنیم. در این صورت جریان گرم شده بالا می‌رود و جریان سرد شده پایین می‌آید. جریان بالا از یکی از اجزا، مثلاً  $A$ ، و جریان پایین‌رو از جزء دیگر، مثلاً  $B$  غنی‌تر خواهد بود. ستون کلاوسوس-دیکل<sup>۸،۷،۶</sup> بر همین اساس کار می‌کند. با اتصال تعداد زیادی از این ستون‌ها به صورت زنجیره‌ای، می‌توان عمل جداسازی را انجام داد. در حین جنگ جهانی دوم، یکی از روش‌های جداسازی ایزوتوپ‌های اورانیم با استفاده از گاز اورانیم هگزا فلورئورید، به‌کارگیری همین ستون‌ها بود. استفاده از این روش برای جداسازی بعضی مخلوط‌های آلی نیز تا حدودی موفقیت‌آمیز بوده است؛ این روش را در مورد مخلوط‌هایی به‌کار می‌گیرند که نقطه جوش اجزای آن‌ها بسیار به هم نزدیک است و نمی‌توان از روش تقطیر برای جداسازی آن‌ها استفاده کرد.

5. H. Brown, *Phys. Rev.*, **58**, 661-662 (1940).

6. K. Clusius and G. Dickel, *Z. Phys. Chem.*, **B44**, 397-450, 451-473 (1939).

7. K. E. Grew and T. L. Ibbs, *Thermal Diffusion in Gases*, Cambridge University Press (1952); K. E. Grew, in *Transport Phenomena in Fluids* (H. J. M. Hanley, ed.), Marcel Dekker, New York (1969), Chapter 10.

8. R. B. Bird, *Advances in Chemical Engineering*, **1**, 155-239 (1956), §4. D.2; *errata*, **2**, 325 (1958).

نسبت نفوذ گرمایی را می‌توان از اثر دوفور (نفوذگرما) نیز به دست آورد، اما تحلیل این آزمایش سخت، و اجتناب از مشکلات و خطاهای آن دشوار است.<sup>۹</sup>

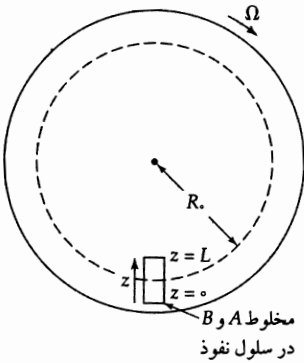
**مثال ۲-۲۴**

نفوذ فشاری و دستگاه فراگیرازمرکز

حال به بررسی نفوذ در حضور گرادیان فشار می‌پردازیم. اگر گرادیان فشار به اندازه کافی بزرگ باشد، آن‌گاه می‌توان جداسازی قابل‌اندازه‌گیری انجام داد. یکی از نمونه‌های این فرایند، فراگیرازمرکز است که برای جداسازی آنزیم‌ها و پروتئین‌ها به کار رفته است. در شکل ۲-۲۴ سلول استوانه‌ای کوچکی را در یک دستگاه گیرازمرکز پرسرعت نشان داده‌ایم. طول این سلول،  $L$ ، در مقایسه با شعاع چرخش  $R_0$  کوتاه است و چگالی محلول را می‌توان فقط تابع ترکیب شیمیایی دانست. مطلوب است تعیین توزیع دو جزء در حالت پایا، برحسب حجم‌های مولی جزئی آن‌ها و گرادیان فشار. عامل اخیر از معادله حرکت به دست می‌آید و چنین است:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Omega \approx -\rho \Omega^2 R_0 \quad (۱۵-۲.۲۴)$$

برای سادگی کار، فرض می‌کنیم که حجم‌های مولی جزئی و ضرایب فعالیت درگستره شرایط موجود در سلول ثابت‌اند.



شکل ۲-۲۴ نفوذ فشاری حالت پایا در دستگاه گیرازمرکز. مخلوط موجود در سلول نفوذ گرایش به جدا شدن تحت تأثیر گرادیان فشار ایجادشده در دستگاه گیرازمرکز دارد.

حل

در حالت پایا،  $\dot{z}_A = 0$ ، و از جمله‌های مربوطه در معادله (۱۰-۲.۲۴) برای گونه  $A$  نتیجه می‌شود:

$$\frac{dx_A}{dz} \frac{M_A x_A}{RT} \left( \frac{\bar{V}_A}{M_A} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{dp}{dz} = 0 \quad (۱۶-۲.۲۴)$$

با قرار دادن عبارت مناسب به جای گرادیان فشار و سپس ضرب کردن در  $(\bar{V}_B/x_A) dz$ ، برای گونه  $A$  نتیجه می‌شود:

$$\bar{V}_B \frac{dx_A}{x_A} = \bar{V}_B \frac{g \Omega}{RT} (\rho \bar{V}_A - M_A) dz \quad (۱۷-۲.۲۴)$$

سپس معادله مشابهی برای گونه  $B$  می‌نویسیم که عبارت است از:

$$\bar{V}_A \frac{dx_B}{x_B} = \bar{V}_A \frac{g \Omega}{RT} (\rho \bar{V}_B - M_B) dz \quad (۱۸-۲.۲۴)$$

9. S. Chapman and T. G. Cowling *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*, 3rd edition, Cambridge University Press (1970), pp. 268-271.

با تفریق کردن معادله (۱۸-۲.۲۴) از معادله (۱۷-۲.۲۴)، نتیجه می‌شود:

$$\bar{V}_B \frac{dx_A}{x_A} - \bar{V}_A \frac{dx_B}{x_B} = \frac{g\Omega}{RT} (M_B \bar{V}_A - M_A \bar{V}_B) dz \quad (19-2.24)$$

اکنون از این معادله از  $z = 0$  تا مقداری اختیاری برای  $z$  انتگرال می‌گیریم و این نکته را نیز به حساب می‌آوریم که کسرهای مولی  $A$  و  $B$  در  $z = 0$ ، به ترتیب، عبارت‌اند از:  $x_{A0}$  و  $x_{B0}$ . در نتیجه:

$$\bar{V}_B \int_{x_{A0}}^{x_A} \frac{d\bar{x}_A}{\bar{x}_A} - \bar{V}_A \int_{x_{B0}}^{x_B} \frac{d\bar{x}_B}{\bar{x}_B} = \frac{M_B \bar{V}_A - M_A \bar{V}_B}{RT} \int_0^z g\Omega d\bar{z} \quad (20-2.24)$$

اگر  $g\Omega$  را درگستره انتگرال‌گیری ثابت فرض کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\bar{V}_B \ln \frac{x_A}{x_{A0}} - \bar{V}_A \ln \frac{x_B}{x_{B0}} = \frac{M_B \bar{V}_A - M_A \bar{V}_B}{RT} g\Omega z \quad (21-2.24)$$

سپس تابع نمایی دو طرف را به دست می‌آوریم، و داریم:

$$\left(\frac{x_A}{x_{A0}}\right)^{\bar{V}_B} \left(\frac{x_{B0}}{x_B}\right)^{\bar{V}_A} = \exp \left[ (M_B \bar{V}_A - M_A \bar{V}_B) \left(\frac{g\Omega z}{RT}\right) \right] \quad (22-2.24)$$

این معادله توزیع غلظت حالت‌پایا را برای سیستمی دوتایی، در میدان نیروی گریزمرکز ثابت، توصیف می‌کند. توجه داشته باشید که چون این نتیجه حاوی هیچ‌یک از ضرایب انتقال نیست، با استفاده از تحلیل ترمودینامیک تعادل نیز می‌توانستیم آن را به دست بیاوریم.<sup>۱۰</sup> اما اگر بخواهیم رفتار وابسته به زمان عمل گریزمرکز را تحلیل کنیم، آنگاه ضریب نفوذ مخلوط  $A-B$  در نتیجه ظاهر می‌شود و دیگر نمی‌توان مسئله را با استفاده از ترمودینامیک تعادل حل کرد.

### ۳.۲۴ نفوذ غلظتی و نیروهای رانش

در فصل ۱۷ قانون اول فیک را با بیان متناسب بودن شار جرمی (یا مولی) با گرادیان کسر جرمی (یا مولی)، به صورت خلاصه شده در جدول ۱۷-۸، نوشتیم.

از طرف دیگر، در معادله (۱۰-۲.۲۴)، به نظر می‌رسد که ترمودینامیک فرایندهای برگشت‌ناپذیر، استفاده از گرادیان فعالیت را به منزله نیروی رانش برای نفوذ غلظتی، تحمیل می‌کند. در این بخش نشان می‌دهیم که می‌توان از نیروی رانش گرادیان فعالیت، یا گرادیان کسر جرمی (یا مولی) استفاده کرد، اما هر انتخاب مستلزم استفاده از ضریب نفوذ متفاوتی است. این دو ضریب نفوذ به هم مربوط‌اند و این نکته را برای سیستمی دوتایی نشان می‌دهیم. وقتی جمله‌های نفوذ فشاری، گرمایی، و واداشته را از معادله (۱۰-۲.۲۴) حذف کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{J}_A^* = -c\mathcal{D}_{AB}x_A(\nabla \ln a_A)_{T,p} \quad (1-3.24)$$

با استفاده از این نکته که ضریب فعالیت تابعی از  $x_A$  است، می‌توان این معادله را بازنویسی کرد و نتیجه زیر را به دست آورد:

$$\mathbf{J}_A^* = -c\mathcal{D}_{AB} \left( \frac{\partial \ln a_A}{\partial \ln x_A} \right)_{T,p} \nabla x_A \quad (2-3.24)$$

10. E. A. Guggenheim, *Thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam (1950), pp. 356-360.

فعالیت را می‌توان به صورت حاصل ضرب ضریب فعالیت و کسر مولی ( $a_A = \gamma_A x_A$ ) نوشت، به طوری که:

$$\mathbf{J}_A^* = -cD_{AB} \left[ 1 + \left( \frac{\partial \ln r_A}{\partial \ln x_A} \right)_{T,p} \right] \nabla x_A \quad (۳-۳.۲۴)$$

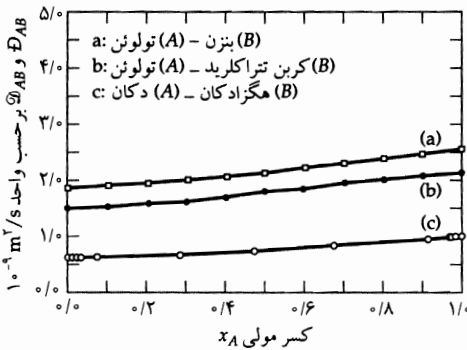
اگر مخلوط «ایده‌آل» باشد، آن‌گاه ضریب فعالیت با واحد برابر است و معادله (۳-۳.۲۴) به معادله (ب) جدول ۲-۸.۱۷ تبدیل می‌شود و داریم  $\mathcal{D}_{AB} = D_{AB}$ . اگر مخلوط «غیرایده‌آل» باشد، می‌توان ضریب نفوذ دوتایی  $D_{AB}$  را به صورت زیر تعریف کرد:

$$D_{AB} = \mathcal{D}_{AB} \left( \frac{\partial \ln a_A}{\partial \ln x_A} \right)_{T,p} = \mathcal{D}_{AB} \left( 1 + \left( \frac{\partial \ln \gamma_A}{\partial \ln x_A} \right)_{T,p} \right) \quad (۴-۳.۲۴)$$

در این صورت معادله (۲-۳.۲۴) چنین نوشته می‌شود:

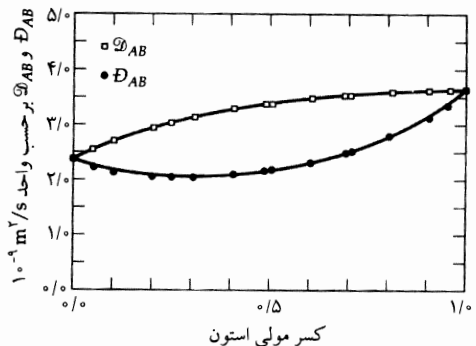
$$\mathbf{J}_A^* = -cD_{AB} \nabla x_A \quad (۵-۳.۲۴)$$

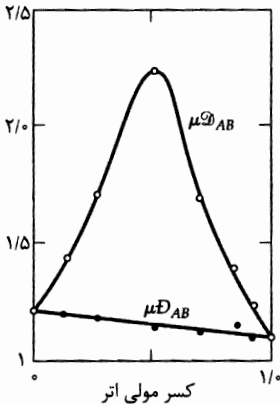
که یکی از صورت‌های قانون فیک است (نگاه کنید به معادله (ب) در جدول ۲-۸.۱۷). برای اندازه‌گیری  $\mathcal{D}_{AB}$  باید اندازه‌های فعالیت را به صورت تابعی از غلظت در اختیار داشت و به همین دلیل  $\mathcal{D}_{AB}$  مطلوبیت نیافته‌است. برای مخلوط‌های ایده‌آل،  $D_{AB}$  و  $\mathcal{D}_{AB}$  همانندند و مطابق شکل ۱-۳.۲۴، توابعی تقریباً خطی از کسر مولی اند. برای مخلوط‌های غیرایده‌آل،  $D_{AB}$  و  $\mathcal{D}_{AB}$  توابع خطی متفاوتی از کسر مولی اند؛ نمونه‌ای از این حالت در شکل ۲-۳.۲۴ نشان داده شده‌است. اما حاصل ضرب  $\mu D_{AB}$  در مورد بعضی از مخلوط‌های غیرایده‌آل تابعی بسیار نزدیک به خطی کسر مولی است، درحالی‌که  $\mu D_{AB}$  چنین نیست (نگاه کنید به شکل ۳-۳.۲۴). هیچ دلیل قانع‌کننده‌ای برای ترجیح یک ضریب نفوذ بر دیگری وجود ندارد. اغلب ضرایب نفوذ گزارش داده شده در نوشتگان  $D_{AB}$  هستند، نه  $\mathcal{D}_{AB}$ .



شکل ۱-۳.۲۴ ضریب نفوذ در مخلوط‌های مایع ایده‌آل در  $۲۵^\circ\text{C}$ .

شکل ۲-۳.۲۴ ضریب نفوذ در یک مخلوط مایع غیرایده‌آل (استون-کلروفرم در  $۲۵^\circ\text{C}$ ).





شکل ۳-۳.۲۴ اثر فعالیت بر حاصل ضرب ویسکوزیته و ضریب نفوذ برای مخلوط‌های مایع کلروفرم و دی‌اتیل اتر.

#### ۴.۲۴ کاربردهای معادلات تعمیم‌یافتهٔ ماکسول-استفان

معادله‌های تعمیم‌یافتهٔ ماکسول-استفان به صورت معادلهٔ (۴-۲.۲۴) برحسب نیروهای رانش نفوذی  $\mathbf{d}_\alpha$  ارائه شدند و عبارت  $\mathbf{d}_\alpha$  به صورت معادلهٔ (۸-۱.۲۴) نشان داده شد. وقتی این معادله‌ها باهم ترکیب شوند، معادله‌های ماکسول-استفان برحسب گرادیان فعالیت، گرادیان فشار، و نیروهای خارجی وارد بر گونه‌های مختلف، به صورت تعریف‌شده با معادله‌های (۹ یا ۸-۲.۲۴) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} -\mathbf{d}_\alpha &= \sum_{\substack{\beta=1 \\ \text{همه } \beta}}^N \frac{x_\alpha x_\beta}{D_{\alpha\beta}} (\mathbf{v}_\gamma - \mathbf{v}_\beta) + \text{جمله‌های نفوذ گرمایی} \\ &= -x_\alpha (\nabla \ln a_\alpha)_{T,p} - \frac{1}{cRT} \left[ (\phi_\alpha - \omega_\alpha) \nabla p - \rho_\alpha \mathbf{g}_\alpha + \omega_\alpha \sum_{\beta=1}^N \rho_\beta \mathbf{g}_\beta \right] \\ \alpha &= 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (۱-۴.۲۴)$$

جمله‌های نفوذ گرمایی را در این جا نشان نداده‌ایم، زیرا در این بخش به آن‌ها نیاز نداریم. نمادهای  $\phi_\alpha = c_\alpha \bar{V}_\alpha$  و  $\omega_\alpha$ ، به ترتیب، کسر حجمی و کسر جرمی گونهٔ  $\alpha$  را مشخص می‌کنند. چنان‌که در بخش‌های ۱.۲۴ و ۲.۲۴ شرح داده شد، چندین رابطهٔ کمکی را باید به خاطر سپرد:

$$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{d}_\alpha = 0; \quad D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}; \quad \sum_{\alpha=1}^N \frac{x_\alpha}{D_{\alpha\beta}} = 0 \quad (۴ و ۳، ۲-۴.۲۴)$$

نخستین رابطه از تعریف  $\mathbf{d}_\alpha$  بدست می‌آید، رابطهٔ دوم نتیجهٔ روابط متقابل اونساگر است، و سومین رابطه را برای معرفی گونهٔ خاص  $\gamma$  نیاز داریم. انتخاب هریک از گونه‌ها به عنوان  $\gamma$  اختیاری است؛ غالباً  $\gamma$  را برابر  $\alpha$  می‌گیرند، زیرا این انتخاب راحت‌تر است. انتخاب گونهٔ  $\gamma$  به ماهیت سیستم موردبررسی بستگی دارد و این نکته را در مثال‌های آینده نشان خواهیم داد.

در فصل‌های قبل، تنها نیروی خارجی که در نظر گرفته شد، نیروی گرانش بود. در این بخش نیروی خارجی در واحد جرم  $\mathbf{g}_\alpha$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم که معادل با جمع نیروهاست:

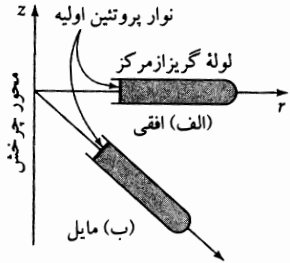
$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{g} - \left( \frac{z_\alpha F}{M_\alpha} \right) \nabla \phi + \delta_{\alpha m} \frac{1}{\rho_m} \nabla p \quad (۵-۴.۲۴)$$

در این رابطه،  $g$  شتاب گرانش،  $z_\alpha$  بار اولیه گونه  $\alpha$  (مثلاً  $-1$  برای یون کلر  $Cl^-$ )،  $F = 96485 \text{ abs. coulombs/g.equivalent}$  ثابت فاراده،  $\phi$  پتانسیل الکتروستاتیکی، و اندیس  $m$  دلتای کرونگر،  $\delta_{\alpha m}$ ، به هر زمینه مقید مکانیکی، مانند غشای تراوی گزینشی، اشاره دارد. خلاصه این‌که برای حل مسئله‌های نفوذ چندجزئی در سیستم‌های هم‌دما، اکنون  $N$  معادله شار جرم (که  $N-1$  از آن‌ها مستقل است)، معادله‌های پیوستگی گونه و معادله حرکت را داریم. این مجموعه معادلات برای حل انواع مسئله‌های انتقال جرم مفید بوده‌اند و در مثال‌های آینده بعضی از آن‌ها را شرح می‌دهیم.

البته، برای حل مسئله‌های نفوذ چندجزئی، به ضرایب نفوذ ماکسول-استفان،  $D_{\alpha\beta}$  که در معادله (۱-۴.۲۴) ظاهر می‌شوند، نیاز داریم. این کمیت‌ها به‌ندرت اندازه‌گیری شده‌اند و در نتیجه باید به‌طور هم‌زمان فعالیت را نیز به‌صورت تابعی از غلظت اندازه‌گیری کرد. در میان چند مورد معدود از این اندازه‌گیری‌ها، باید به اندازه‌گیری‌های روتن اشاره کرد.<sup>۱</sup>

**مثال ۱-۴.۲۴**

جداسازی پروتئین‌ها به‌روش گریزازمرکز مولکول‌های پروتئین به‌اندازه کافی بزرگ هستند که بتوان آن‌ها را با استفاده از روش گریزازمرکز، درمقابل گرانش‌های پراکنشی حرکت براونی، تغلیظ کرد و این فرایند برای تعیین وزن مولکولی، هم‌چنین جداسازی‌های مقدماتی کوچک‌مقیاس مناسب است. نشان دهید که چگونه می‌توان رفتار مولکول‌ها را در یک میدان گریزازمرکز پیش‌بینی کرد، و چه نوع اطلاعاتی را می‌توان از رفتار آن‌ها در لوله گریزازمرکز به‌دست آورد (نگاه کنید به شکل ۱-۴.۲۴). چنان‌که در مثال ۳-۴.۲۴ خواهیم دید، می‌توان پروتئین و یون‌های مخالف همراه آن را به‌صورت یک مولکول بزرگ با بار الکتریکی خنثی در نظر گرفت. پروتئین را به‌عنوان گونه  $\gamma$  انتخاب کنید و کار را با معادله شار جرم برای آن شروع کنید. گونه یونی کوچکی که برای پایداری پروتئین لازم است، نقش درخور اعتنایی در حل این مسئله ندارد و می‌توان آن را نادیده گرفت.



شکل ۱-۴.۲۴ فراگریزازمرکز پروتئین‌ها، با دو جهت‌گیری ممکن برای لوله گریزازمرکز.

حل در این‌جا سیستم شبه‌دوتایی یک مولکول گویچه‌ای پروتئین،  $P$ ، را در حلال  $W$  در نظر می‌گیریم که عمدتاً آب است، و ابتدا بحث خود را به محلول رقیقی که با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$ ، در لوله‌ای عمود بر محور چرخش می‌چرخد (شکل ۱-۴.۲۴ الف)) محدود می‌کنیم. در چنین سیستمی  $x_w \approx 1$  و میدان جریان ماده حل‌شده، نسبت به محورهای ثابت، از نوع چرخش جسم صلب خواهد بود؛ یعنی  $v_w = \delta_\theta \Omega r$ . سپس نفوذ شعاعی پروتئین را با مؤلفه  $r$  معادله ساده‌شده ماکسول-استفان توصیف می‌کنیم:

$$\frac{x_P}{D_{PW}} v_{Pr} = - \left( 1 + \frac{\partial \ln \gamma_P}{\partial \ln x_P} \right)_{T,P} \frac{\partial x_P}{\partial r} - \frac{1}{cRT} (\phi_P - \omega_P) \frac{\partial p}{\partial r} \quad (۶-۴.۲۴)$$

1. Ph. W. M. Rutten, *Diffusion in Liquids*, Delft University Press, Delft, The Netherlands (1992).

بلافاصله مشاهده می‌کنیم که پروتئین در راستای شعاعی مثبت حرکت خواهد کرد، اگر کسر جرمی آن از کسر حجمی آن بزرگ‌تر باشد - یعنی اگر از حلال چگال‌تر باشد. اگر معادله (۶-۴.۲۴) را در  $cD_{PW}$  ضرب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$N_P = -cD_{PW} \left[ \left( 1 + \frac{\partial \ln \gamma_P}{\partial \ln x_P} \right)_{T,P} \frac{\partial x_P}{\partial r} + \frac{1}{cRT} (\phi_P - \omega_P) \frac{\partial p}{\partial r} \right]$$

$$= -cD_{PW} \frac{\partial x_P}{\partial r} - \frac{D_{PW}}{RT} (\phi_P - \omega_P) \frac{\partial p}{\partial r} \quad (۷-۴.۲۴)$$

که در آن ضریب نفوذ فیزیکی شبه‌دوتایی  $D_{PW}$  وارد می‌شود. ضریب نفوذ در معادله (۷-۴.۲۴) را می‌توان با استفاده از معادله (۳-۴.۱۷) به صورت زیر تخمین زد:

$$D_{PW} = \frac{KT}{f \pi \mu_W R_P f_P} \quad (۸-۴.۲۴)$$

که در آن  $R_P$  شعاع کره‌ای است که حجمی برابر با حجم مولکول پروتئین دارد،  $\mu_W$  ویسکوزیته حلال (آب) است، و  $f_P$  ضریب شکل هیدرودینامیکی (یعنی ضریب تصحیحی برای منظور کردن شکل غیرکروی مولکول پروتئین) است. از معادله حرکت محلول، گرادیان فشار را برحسب سرعت زاویه‌ای فراگراییازمرکز به دست می‌آوریم، و داریم:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2}{r} = \rho \Omega^2 r \quad (۹-۴.۲۴)$$

جمله  $\rho \Omega^2 r$  در طول لوله‌گریزازمرکز، که در مقایسه با شعاع روتور فراگراییازمرکز کوچک است، تغییر چندانی نخواهد داشت. اکنون می‌خواهیم از وابستگی جمله گرادیان فشار به وزن مولکولی در معادله (۷-۴.۲۴) شناختی کسب کنیم. برای این کار تقریب‌های زیر را به کار می‌گیریم که در حد محلول‌های رقیق مورد استفاده در فراوری پروتئین معتبرند:

$$\phi_P = c_P \bar{V}_P = x_P c \bar{V}_P \approx x_P \frac{\bar{V}_P}{\bar{V}_W} = x_P \frac{M_P}{M_W} \frac{\hat{V}_P}{\hat{V}_W} \quad ((الف) ۱۰-۴.۲۴)$$

$$\omega_P = \frac{\rho_P}{\rho} = \frac{c_P M_P}{c M} = x_P \frac{M_P}{(x_P M_P + x_W M_W)} \approx x_P \frac{M_P}{M_W} \quad ((ب) ۱۰-۴.۲۴)$$

در این روابط  $\hat{V}_P = \bar{V}_P / M_P$  حجم مخصوص جزئی پروتئین است. حجم مخصوص جزئی حلال را می‌توان  $1 \text{ ml/g}$  گرفت، بدون این که خطای درخور اعتنایی ایجاد شود، و  $\hat{V}_P$  برای پروتئین‌های گویچه‌ای معمولاً در همسایگی  $0.75 \text{ ml/g}$  است. سپس مشاهده می‌کنیم که ضریب تعیین‌کننده در بازده عمل گریزازمرکز، نسبت وزن‌های مولکولی است، نه حجم‌های مولکولی، زیرا حجم‌های مولکولی دو گونه مختلف تفاوت چندانی با هم ندارند. وقتی معادله‌های (۹-۴.۲۴)، (۱۰-الف)، و (۱۰-ب) را با هم ترکیب کنیم، شار پروتئین به صورت زیر درمی‌آید:

$$N_P = -cD_{PW} \frac{\partial x_P}{\partial r} + x_P (N_P + N_W)$$

$$= -cD_{PW} \frac{\partial x_P}{\partial r} + c_P v_{\text{migr}} \quad (۱۰-۴.۲۴)$$

که تاحدودی به قانون اول فیک شبیه است. در این رابطه «سرعت مهاجرت» برای پروتئین عبارت است از:

$$v_{\text{migr}} = -\frac{D_{PW}}{cRT} \left[ \frac{M_P}{M_W} \left( \frac{\hat{V}_P}{\hat{V}_W} - 1 \right) \right] \rho \Omega^2 r \quad (۱۱-۴.۲۴)$$

توجه داشته‌باشید که شار مولی شعاعی آب از پروتئین بسیار بیش‌تر است، و شار همرفتی پروتئین  $CPv_{migr}$  بسیار کوچک است.

سپس شار مولی معادله (۱۱-۴.۲۴) را در معادله پیوستگی گونه جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{\partial c_P}{\partial t} = -\frac{\partial N_P}{\partial r} \quad (12-4.24)$$

یا، به‌ازای  $D_{PW}$  ثابت:

$$\frac{\partial c_P}{\partial t} = D_{PW} \frac{\partial^2 c_P}{\partial r^2} - v_{migr} \frac{\partial c_P}{\partial r} \quad (13-4.24)$$

که معادله‌ای است که می‌خواهیم برای چند وضعیت خاص آن را حل کنیم.

(الف) رفتار گذرا. ابتدا مهاجرت یک نوار نازک از پروتئین را، تحت شرایطی که تغییرات کسری  $r$  اندک است و مقدار درخور اعتنایی از پروتئین به انتهای لوله نمی‌رسد، در نظر می‌گیریم. سپس متغیر مستقل جدید  $u = r - v_{migr}t$  را معرفی می‌کنیم که به ما امکان می‌دهد  $c_P(r, t)$  را به  $c_P(u, t)$  تبدیل کنیم. معادله نفوذ چنین نوشته می‌شود:

$$\left( \frac{\partial c_P}{\partial t} \right)_u = D_{PW} \left( \frac{\partial^2 c_P}{\partial u^2} \right)_t \quad (14-4.24)$$

و با این شرط اولیه همراه است:

$$c_P = C\delta(u) \quad \text{در } t = 0 \quad (16-4.24)$$

در این رابطه  $C$  مقداری ثابت است که مقدار پروتئین موجود در نوار را نشان می‌دهد؛ شرط مرزی معادله (۱۵-۴.۲۴) چنین است:

$$c_P \rightarrow 0 \quad \text{وقتی } u \rightarrow \pm\infty \quad (17-4.24)$$

معادله (۱۷-۴.۲۴) تقریب لولهٔ طویل است که در این کاربرد بسیار از آن استفاده می‌کنند.

معادله‌های (۱۵-۴.۲۴ تا ۱۷) توزیع گاوسی پروتئین حول مرکز جرم آن را توصیف می‌کنند و از نفوذ و حرکت با سرعت  $v_{migr}$  نتیجه می‌شوند. سرعت مهاجرت را می‌توان اندازه‌گیری کرد و این اندازه‌گیری حاصل ضرب ضریب نفوذ پروتئین و وزن مولکولی را نتیجه می‌دهد. پهنای نوار نیز به‌نوبهٔ خود معیاری مستقل از ضریب نفوذ ارائه می‌دهد و بنابراین، در ترکیب با اطلاعاتی که از سرعت مهاجرت و حجم‌های مخصوص داریم، معیاری از وزن مولکولی نیز هست.<sup>۲</sup> اگر وزن مولکولی، مثلاً با استفاده از طیف‌سنجی جرمی، معلوم شود، ضریب شکل  $f_P$  را می‌توان تعیین کرد. این نیز، به‌نوبهٔ خود، معیاری مناسب برای شکل پروتئین است.

(ب) قطبش پایا. سپس رفتار بلندمدت را در نظر می‌گیریم، یعنی وقتی که غلظت پروتئین در انتهای لوله افزایش یافته و به حالت پایا رسیده‌است. تحت این شرایط، هیچ حرکت شعاعی وجود ندارد و از معادله‌های (۱۰-۴.۲۴)، (الف)، و (ب) نتیجه می‌شود:

$$-\left(1 + \frac{\partial \ln \gamma_P}{\partial \ln x_P}\right)_{T,P} \frac{d \ln x_P}{dr} = \frac{1}{cRT} \left( \frac{M_P}{M_W} \right) \left( \frac{\hat{V}_P}{\hat{V}_W} - 1 \right) \frac{dp}{dr} \quad (18-4.24)$$



گرادیان غلظت را می‌توان اندازه‌گیری کرد، و بقیه کمیت‌ها، به‌استثنای  $M_P$  را می‌توان مستقل از فرایند گریزازمرکز تعیین کرد. مثلاً ضرایب فعالیت پروتئین را می‌توان از روی داده‌های فشار اسمزی به‌دست آورد. بنابراین وزن مولکولی پروتئین را می‌توان بدون ابهام تعیین کرد. فقط طیف‌سنجی جرمی می‌تواند دقت بیش‌تری را تأمین کند و این فرایند برای همه پروتئین‌ها مناسب نیست.

(ج) عملیات مقدماتی. با کج کردن لوله، مطابق شکل ۱۴-۲۴ (ب)، سرعت جداسازی گریزازمرکز را می‌توان به‌شدت افزایش داد. در این‌جا پروتئین بر اثر نیروی گریزازمرکز به‌سمت مرز خارجی لوله رانده می‌شود و گرادیان چگالی حاصل سبب انتقال توده‌ای محوری از طریق همرفت آزاد خواهد شد؛ فرایندی شبیه به فرایند مورد‌استفاده برای ذرات درشت‌تر در دستگاه گریزازمرکز دیسکی.<sup>۳</sup>

**مثال ۲۴-۲۴**

پروتئین‌ها به‌منزله ذرات هیدرودینامیکی نشان دهید که نتایج مثال قبل هم‌ارز با این است که پروتئین‌ها را ذرات هیدرودینامیکی کوچک فرض کنیم.

حل  
اگر، در مثال قبل، از ساده‌سازی‌های معادله‌های (۱۰-۴-۲۴) استفاده نکرده بودیم، سرعت مهاجرت در عملیات حالت‌پایا به‌صورت زیر به‌دست می‌آمد:

$$v_{\text{migr}} = - \left( \bar{V}_P - \frac{\omega_P}{c_P} \right) \frac{dp \mathcal{D}_{PW}}{dr RT} \quad (19-4-24)$$

اگر اکنون خود را به محلول‌های رقیق محدود کنیم، به‌طوری‌که ضریب فعالیت بسیار نزدیک به واحد باشد، می‌توانیم  $\mathcal{D}_{PW}$  را به  $D_{PW}$  تغییر دهیم و از معادله (۸-۴-۲۴) برای ضریب نفوذ، و معادله (۹-۴-۲۴) برای گرادیان فشار استفاده کنیم. در این‌صورت، سرعت مهاجرت عبارت است از:

$$v_{\text{migr}} = - \left( \bar{V}_P - \frac{\omega_P}{c_P} \right) (\rho_W \Omega^2 r) \frac{1}{RT} \left( \frac{KT}{6\pi\mu_W R_P f_P} \right) \quad (20-4-24)$$

سپس به این نکته توجه می‌کنیم که  $\Omega^2 r = g_{\text{eff}}$  (نیروی حجمی مؤثر در واحد جرم، که از میدان نیروی گریزازمرکز ناشی می‌شود) و  $R/K = N$  (عدد آوگادرو)، و نتیجه می‌شود:

$$v_{\text{migr}} = - \left( \bar{V}_P \rho_W - \frac{\rho_P}{c_P} \right) \frac{g_{\text{eff}}}{N} \left( \frac{1}{6\pi\mu_W R_P f_P} \right) \quad (21-4-24)$$

که در آن از تقریب  $\omega_P = \rho_P / (\rho_P + \rho_W) \approx \rho_P / \rho_W$  برای محلول پروتئین رقیق استفاده کرده‌ایم. سپس فرض می‌کنیم  $\bar{V}_P \approx \left( \frac{4}{3} \pi R_P^3 \right) \tilde{N}$ ، حجم پروتئین در واحد مول، و  $\rho_P / c_P \approx \left( \frac{4}{3} \pi R_P^3 \right) (\rho^{(P)}) \tilde{N}$ ، جرم پروتئین در واحد مول؛ در این‌جا  $\rho^{(P)}$  چگالی پروتئین خالص است. وقتی این کمیت‌ها را در معادله (۲۱-۴-۲۴) قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$v_{\text{migr}} = \frac{2R_P^3 (\rho^{(P)} - \rho_W) g_{\text{eff}}}{9\mu_W f_P} \quad (22-4-24)$$

مقایسه با معادله (۱۷-۶-۲) نشان می‌دهد که سرعت مهاجرت برای پروتئین غیرکروی در میدان نیروی گریزازمرکز با سرعت حدی کره در میدان نیروی گرانش متناظر (تقسیم بر ضریب  $f_P$  برای منظور کردن انحراف از کرویّت) برابر است.

3. See, for example, *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, McGraw-Hill, New York, 7th edition (1997), p. 18-113.

هم‌چنین می‌توان حل مسئله را از معادله حرکت ذره  $P$  آغاز کرد که ابتدا در سوسپانسیون به اندازه کافی رقیق، به طوری که برهم‌کنش ذره-ذره قابل چشم‌پوشی باشد، در حالت سکون است. در این صورت سرعت ذره نسبت به پهنه‌ای بزرگ از سیال در حال سکون  $F$  عبارت است از:

$$\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_F = -D_{PF} \left( \nabla \ln n_P + \frac{1}{KT} \left[ V_P \left( 1 - \frac{\rho^{(P)}}{\rho} \right) (\nabla p)_\infty - \mathbf{F}_{em} + \left( \rho^{(P)} + \frac{1}{\nu} \rho \right) V_P \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} + \epsilon \sqrt{\pi \mu \rho} R_P \int_0^t \frac{d\mathbf{v}_P}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right] \right) \quad (۲۳-۴.۲۴)$$

در این جا  $n_P$  غلظت عددی ذرات، و  $V_P$  و  $R_P$  حجم و شعاع ذره است، و اندیس  $\infty$  به شرایطی اشاره دارد که «دور» از ذره (یعنی خارج از لایه مرزی هیدرودینامیکی) باشد. معادله (۲۳-۴.۲۴) معادله حرکت با یک جمله افزوده برای حرکت براونی است که، مثلاً، در جمع‌آوری آئروسول اهمیت دارد.<sup>۴</sup> نماد  $\mathbf{F}_{em}$  نشانگر نیروی الکترومغناطیسی به‌ازای هر ذره است.

ضریب نفوذ  $D_{PF}$  در این مثال، با  $D_{PW}$  در مثال ۱-۴.۲۴ متناظر است و مشاهده می‌شود که تناظر بسیار نزدیکی بین توصیف‌های مولکولی و ذره‌ای وجود دارد. درحقیقت فقط سه تفاوت درخور اعتنا وجود دارد:

۱. ضریب فعالیت ترمودینامیکی برای ذره واحد در نظر گرفته می‌شود.
۲. از شتاب لحظه‌ای مولکول چشم‌پوشی می‌شود.
۳. آثار تاریخی گذشته (یعنی نیروی باسه که با انتگرال معادله (۲۳-۴.۲۴) نشان داده می‌شود) برای مولکول نادیده گرفته می‌شود.

در عمل، در محلول‌های رقیق ضرایب فعالیت به‌سوی واحد میل می‌کنند و نیروهای باسه، حتی برای ذره‌های بزرگ، کوچک‌اند. اما در مورد ذرات با قطری بیش‌تر از حدود ۱ میکرون، آثار لحظه‌ای شتاب می‌تواند درخور اعتنا باشد.

#### مثال ۲-۴.۲۴

نفوذ نمک‌ها در محلول آبی

اکنون برای سادگی کاریک الکترولیت  $1-1 M^+X^-$ ، مانند سدیم کلرید، را در نظر بگیرید که در سیستمی مانند سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۴.۲۴ نفوذ می‌کند. در این جا مخازنی که به‌خوبی هم‌زده می‌شوند و غلظت نمک در آن‌ها متفاوت است، توسط مجرای باریک که در آن انتقال نفوذی بین دو مخزن رخ می‌دهد، به هم متصل می‌شوند. پتانسیومتر نشان داده شده در شکل اختلاف پتانسیل  $\Delta\phi$  بین الکترودها را اندازه‌گیری می‌کند، بدون این‌که جریانی از سیستم بکشد. نشان دهید که چگونه می‌توان از معادله‌های تعمیم‌یافته ماکسول-استفان برای توصیف رفتار نفوذی استفاده کرد.

حل

نمک ( $S$ ) کاملاً تفکیک شده فرض می‌شود، به طوری که سیستم را سه تایی در نظر می‌گیریم  $M^+$ ،  $X^-$ ، و آب، سه گونه مختلف‌اند. از جمله نفوذ فشاری چشم‌پوشی می‌کنیم: فشار مرجع  $cRT$  در معادله (۱-۴.۲۴)، تحت شرایط معمول در محیط، تقریباً  $135^\circ$  اتمسفر است و اختلاف فشارهایی که در سیستم ایجاد می‌شود، به اندازه‌ای است که می‌توان آن‌ها را نادیده گرفت.

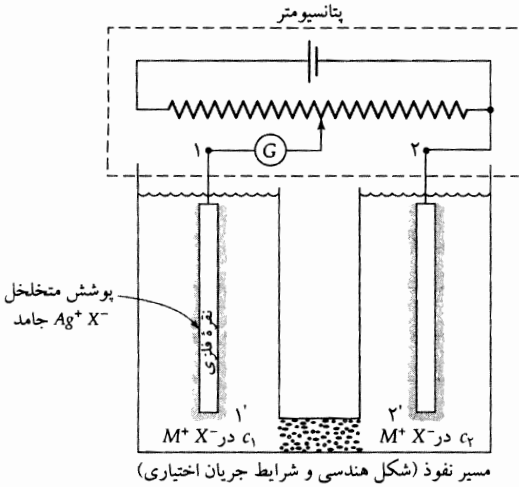
4. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1987), pp. 90-91, Problem 7.

فرض‌های خنثی بودن الکتریکی و عدم عبور جریان الکتریکی قیدهای زیر را ایجاد می‌کنند:

$$x_{M^+} = x_{X^-} = x_S = 1 - x_W \quad (۲۴-۴-۲۴)$$

$$N_{M^+} = N_{X^-} = N_S \quad (۲۵-۴-۲۴)$$

در این جا کسرهای مولی کاتیون  $M^+$  و آنیون  $X^-$  با کسر مولی نمک  $S$  که معمولاً برحسب غلظت مولی نمک و آب، به صورت  $c_S/(c_S + c_W)$  تعریف می‌شود، برابرند.



شکل ۲۴-۴-۲۴ نفوذ نمک و پتانسیل‌های نفوذ. نماد  $G$  گالوانومتر را نشان می‌دهد.

سیس می‌توان گونه  $\gamma$  در معادله (۱-۴-۲۴) را گونه  $\alpha$  گرفت و از معادله‌های (۲۴-۴-۲۴) و (۲۵) برای به دست آوردن کاتیون و آنیون استفاده کرد:

$$\frac{1}{c \mathcal{D}_{M+W}} (x_W N_{M^+} - x_{M^+} N_W) = -x_{M^+} (\nabla \ln a_{M^+})_{T,p} + \frac{1}{cRT} \left( \rho_{M^+} \mathbf{g}_{M^+} - \omega_{M^+} \sum_{\beta} \rho_{\beta} \mathbf{g}_{\beta} \right) \quad (۲۶-۴-۲۴)$$

$$\frac{1}{c \mathcal{D}_{X^-W}} (x_W N_{X^-} - x_{X^-} N_W) = -x_{X^-} (\nabla \ln a_{X^-})_{T,p} + \frac{1}{cRT} \left( \rho_{X^-} \mathbf{g}_{X^-} - \omega_{X^-} \sum_{\beta} \rho_{\beta} \mathbf{g}_{\beta} \right) \quad (۲۷-۴-۲۴)$$

سیس از عبارت  $\mathbf{g}_{\alpha}$  در معادله (۵-۴-۲۴)، هم‌چنین معادله‌های (۲۴-۴-۲۴) و (۲۵) استفاده می‌کنیم تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\frac{1}{\mathcal{D}_{M+W}} (x_W N_S - x_S N_W) = - \left( \frac{\partial \ln a_{M^+}}{\partial \ln x_S} \right)_{T,p} \nabla x_S - \left( \frac{x_S}{RT} \right) F \nabla \phi \quad (۲۸-۴-۲۴)$$

$$\frac{1}{\mathcal{D}_{X^-W}} (x_W N_S - x_S N_W) = - \left( \frac{\partial \ln a_{X^-}}{\partial \ln x_S} \right)_{T,p} \nabla x_S + \left( \frac{x_S}{RT} \right) F \nabla \phi \quad (۲۹-۴-۲۴)$$

توجه کنید که ضریب نفوذ یون-یون ظاهر نمی شود، زیرا هنگامی که جریان الکتریکی وجود نداشته باشد، اختلاف سرعتی بین دو یون وجود ندارد.

با جمع کردن این دو معادله باهم، می توان پتانسیل الکتروستاتیکی  $\phi$  را بین آن ها حذف کرد. عبارت:

$$\mathbf{N}_S = - \left( \frac{1}{D_{M+W}} + \frac{1}{D_{X-W}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \ln(a_{M+} a_{X-})}{\partial \ln x_S} \right)_{T,p} \quad (30-4.24)$$

$$\nabla x_S + x_S(\mathbf{N}_S + \mathbf{N}_W)$$

برای شار حاصل می شود که می توان آن را به صورت قانون فیک نوشت:

$$\mathbf{N}_S = -c D_{SW} \nabla x_S + x_S(\mathbf{N}_S + \mathbf{N}_W) \quad (31-4.24)$$

برای این کار باید ضریب نفوذ مثبتی بر غلظت را، به صورت زیر، تعریف کرد:

$$D_{SW} = 2 \left( \frac{D_{M+W} D_{X-W}}{D_{M+W} + D_{X-W}} \right) \left( 1 + \frac{\partial \ln \gamma_S}{\partial \ln x_S} \right)_{T,p} \quad (32-4.24)$$

و چون  $\gamma_{\pm} = \sqrt{\gamma_{M+} \gamma_{X-}}$  و  $a_S = a_{M+} a_{X-} = x_S^2 \gamma_{\pm}^2$

$$\gamma_S = \gamma_{\pm} \quad (33-4.24)$$

که ضریب فعالیت یونی میانگین است.

ضرایب نفوذ یون-آب را نیز می توان با استفاده از رسانایی های حدی معادل به صورت:

$$\lambda_{\alpha\infty} = \lim_{x_{\alpha} \rightarrow 0} \frac{|z_{\alpha}| D_{\alpha W} F^2}{RT} \quad (34-4.24)$$

تخمین زد. در عمل، تغییرات ضریب نفوذ با غلظت بسیار کم تر از تغییرات رسانایی است، و ضریب نفوذ نمک را می توان با استفاده از رسانایی های حدی، با دقت خوبی تا حدود غلظت های  $1 \text{ N}$  تقریب زد. علت اصلی این است که برهم کنش های نفوذی یون-یون، که همواره در هنگام برقراری جریان الکتریکی رخ می دهند، حتی در غلظت های پایین نمک نیز چشم گیرند (نگاه کنید به مسئله ۲۴ ج ۳).

معادله (۳۲-۴.۲۴) نشان می دهد که در تعیین ضریب نفوذ نمک، غلبه با یون کندتر است، و به همین دلیل است که در مثال ۴.۲۴-۱ می توان پروتئین را یک مولکول بزرگ خنثی در نظر گرفت. پروتئین های انحلال پذیر تقریباً همیشه بار دارند، اما این پروتئین ها و یون های مخالف همراه آن ها مانند نمکی خنثی رفتار می کنند و ضریب نفوذ تحت تأثیر نیمه بودن پروتئین است که به نوبه خود بسیار شبیه به ذره هیدرودینامیکی رفتار می کند. در حضور گرادیان غلظت، یون سریع تر گرایش به جلو افتادن از یون کندتر دارد. اما این پدیده سبب تشکیل گرادیان پتانسیلی می شود که گرایش به افزایش سرعت یون کندتر، و کاهش سرعت یون سریع تر دارد. می توان نشان داد (نگاه کنید به مسئله ۲۴ ب ۲) که این پتانسیل پیوند با رابطه زیر توصیف می شود:

$$\frac{d\phi}{dx_S} = - \frac{RT}{F} \frac{1}{x_S} \left[ \frac{(\partial \ln a_{M+} / \partial \ln x_S)_{T,p} D_{M+W} - (\partial \ln a_{X-} / \partial \ln x_S)_{T,p} D_{X-W}}{D_{M+W} + D_{X-W}} \right] \quad (35-4.24)$$

اما نمی‌توان این پتانسیل‌ها را مستقیماً اندازه‌گیری کرد، زیرا الکترودهای لازم برای کامل کردن مدار الکتریکی، در اندازه‌گیری تأثیر می‌گذارند (نگاه کنید به مسئله ۲۴-ج.۳). با استفاده از پل‌های نمک پتاسیم کلرید می‌توان مقداری تقریبی به دست آورد.<sup>۵</sup> این مثال مقدماتی صرفاً برای آشنایی اولیه با موضوعی پیچیده و مهم است. دانشجوی علاقه‌مند می‌تواند به انبوه نوشته‌های در باب الکتروشیمی رجوع کند.<sup>۶</sup>

### مثال ۴-۲۴

انحراف از خنثایی الکتریکی موضعی: الکترواسمز<sup>۶</sup>  
در بحث قبل در مورد پتانسیل نفوذ، معلوم شد که در الکترولیت‌های نفوذی، انحراف‌های موضعی از خنثایی الکتریکی وجود دارد، و این انحراف‌ها همیشه قابل چشم‌پوشی نیستند. برای بررسی این وضعیت، لوله‌ی طویلی با مقطع دایره‌ای را در نظر بگیرید که حاوی الکترولیتی است که دست‌کم یک جزء از آن جذب جدار لوله می‌شود. این جذب سبب ایجاد بار سطحی ثابت و ناحیه‌ای از بار خالص در محلول مجاور جدار لوله می‌شود که لایه‌ی مضاعف نفوذ نام دارد. این بار خالص در داخل لوله یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند که در راستای شعاعی تغییر می‌کند، اما در راستای محوری تغییراتی ندارد. اگر بین دو سر لوله اختلاف پتانسیل برقرار شود، جریان سیالی ایجاد می‌شود که الکترواسمز نام دارد. برعکس، اگر از فشار هیدروستاتیکی برای ایجاد جریان استفاده شود، به ایجاد اختلاف پتانسیلی منجر می‌شود که پتانسیل جاری شدن نام دارد و بین دو سر لوله برقرار می‌شود. این پدیده‌ها معرف دسته‌ای از پدیده‌ها، موسوم به پدیده‌های الکتروسینتیکی‌اند. عبارتی برای جریان الکترواسمز ایجاد شده در غیاب گرادیان فشار محوری به دست آورید.

حل

اکنون مسئله اول ما به دست آوردن عبارتی برای توزیع پتانسیل الکتروستاتیکی است، و پس از آن می‌توانیم جریان الکترواسمز را محاسبه کنیم. نقطه شروع برای محاسبه پتانسیل الکتروستاتیکی، معادله پواسون است:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (36-4.24)$$

در این رابطه،  $\rho_e$  چگالی بار الکتریکی است:

$$\rho_e = F \sum_{\alpha=1}^N z_{\alpha} c_{\alpha} \quad (37-4.24)$$

و  $\epsilon$  تراوایی دی‌الکتریکی محلول است. در این مسئله، معادله (۳۶-۴.۲۴) به رابطه زیر تحویل می‌شود:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{\rho_e}{\epsilon} \quad (38-4.24)$$

اکنون، به پیروی از نیومن، فرض می‌کنیم غلظت بار از توزیع بولتزمن پیروی می‌کند:

$$\frac{c_{\alpha}}{c_{\alpha\infty}} = \exp \left( -\frac{z_{\alpha} F \phi}{RT} \right) \approx 1 - \frac{z_{\alpha} F \phi}{RT} \quad (39-4.24)$$

5. R. A. Robinson and R. H. Stokes, *Electrolyte Solutions*, revised edition, Butterworth, London (1965), p. 571.

این مرجع ارزشمند حاوی مقدار زیادی داده سودمند است.

۶. مثلاً نگاه کنید به

J. S. Newman, *Electrochemical Systems*, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1991).

مثال ۴-۲۴ از صفحه ۲۱۵ این منبع برگرفته شده است.

و از بسط بریده تیلر، موسوم به تقریب دیپه-هوکل استفاده می‌کنیم، تا بتوانیم جوابی صریح به دست آوریم. در این جا اندیس  $\infty$  نشانگر خط مرکزی لوله است، زیرا چنان‌که خواهیم دید، چگالی بار، با فاصله از جدار لوله، به سرعت کاهش می‌یابد. به همین دلیل می‌توان از انحنای جدار لوله چشم‌پوشی کرد و فرض کرد که بار خالص در خط مرکزی صفر است، به طوری که:

$$\lambda = \left( \frac{F^2}{\epsilon RT} \sum_{\alpha=1}^N z_{\alpha}^2 c_{\alpha\infty} \right)^{-1/2} \quad \text{که در آن} \quad \frac{d^2\phi}{dy^2} = \frac{\phi}{\lambda^2} \quad (۴۱-۴.۲۴)$$

در این جا  $y = R - r$  فاصله اندازه‌گیری شده در سیال، از جدار لوله است، و  $\lambda$  طول دیپه است که بسیار کوچک است. بنابراین برای الکترولیت ۱-۱، داریم:

$$\lambda \approx \frac{31^{\circ}}{\sqrt{cS}} \quad (۴۲-۴.۲۴)$$

که در آن واحدهای طول دیپه  $\lambda$  و غلظت نمک  $cS$ ، به ترتیب، آنگستروم و مولاریته است. بنابراین برای محلول  $N/1$ ، طول دیپه فقط در حدود  $10^{\circ} \text{Å}$  است. در نتیجه، در سیستم‌های ماکروسکوپی همواره می‌توان انحراف از خنثایی را نادیده گرفت. به همین ترتیب عدم موازنه غلظت به‌ازای پتانسیل‌های پیوند ناچیز است، زیرا این پتانسیل‌ها معمولاً از چند ده میلی‌ولت تجاوز نمی‌کنند (هم‌چنین نگاه کنید به مسئله ۴.۲۴ ج.۴).

اکنون برای انتگرال‌گیری از معادله (۴۰-۴.۲۴) به شرایط مرزی نیاز داریم و شرط مرزی اول همان فرض خنثایی الکتريکی در فواصل دور از جدار لوله است:

$$\phi \rightarrow 0 \quad \text{درواقع} \quad \frac{y}{\lambda} \rightarrow \infty \quad (۴۳-۴.۲۴)$$

شرط مرزی دوم از قانون گاوس به دست می‌آید (نگاه کنید به نیومن، صفحه ۷۵)، با این فرض که در داخل سطح جامد‌گرادیان پتانسیل وجود ندارد:

$$\frac{d\phi}{dy} = -\frac{q_e}{\epsilon} \quad \text{درواقع} \quad y = 0 \quad (۴۴-۴.۲۴)$$

که در آن  $q_e$  بار سطحی در واحد سطح است. حال با انتگرال‌گیری از معادله (۴۰-۴.۲۴) نتیجه می‌شود:

$$\phi = -\frac{q_e \lambda}{\epsilon} e^{-y/\lambda} \quad (۴۵-۴.۲۴)$$

نیومن رابطه دقیق‌تری را ارائه می‌دهد که در آن انحنای سطح نیز در نظر گرفته شده است، اما برای لوله‌هایی به قطر بیش‌تر از ده‌ها نانومتر، نیازی به این کار نیست.

اکنون می‌توانیم این نتایج را در معادله حرکت قرار دهیم، و در این جا فرض می‌کنیم که جریان آرام و پایاست، به طوری که:

$$0 = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) - \frac{dp}{dz} + \rho_e E_z \quad (۴۶-۴.۲۴)$$

که در آن قدرت میدان الکتريکی محوری برابر است با:

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (۴۷-۴.۲۴)$$

با چشم‌پوشی از گرادیان فشار و استفاده از معادله (۳۸-۴.۲۴) برای حذف  $\rho_e$ ، نتیجه می‌شود:

$$0 = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_z}{dr} \right) - \epsilon \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\phi}{dr} \right) E_z \quad (۴۸-۴.۲۴)$$

اکنون اگر دوباره از انحنای چشم‌پوشی کنیم، می‌توانیم از این معادله انتگرال بگیریم، و داریم:

$$v_z = - \left( \frac{\lambda q_e}{\mu} \right) E_z (1 - e^{-y/\lambda}) \quad (۴۹-۴.۲۴)$$

کمیت داخل پرانتز اول را می‌توان خاصیتی از سیستم تلقی کرد که به‌طور تجربی تعیین می‌شود، و  $\exp(-y/\lambda)$  در کل سطح مقطع لوله، اساساً برای همه لوله‌ها، قابل چشم‌پوشی است. بنابراین سرعت یکنواخت است، مگر در نقاط بسیار نزدیک به جدار لوله.

این نوع جریان‌های الکترواستاز در رآکتورها و جداسازهای با جریان میکروسکوپی - مثلاً در وسایل تشخیص پزشکی - کاربرد گسترده‌ای دارند و قابل چشم‌پوشی بودن پراکنش همرفتی، مزیت آن‌هاست. توجه کنید که سرعت از شعاع لوله مستقل است. بنابراین الکترواستاز، به‌ویژه در لوله‌های با شعاع کوچک، بسیار سودمند است، زیرا درگیر این صورت برای ایجاد سرعت جریان یکسان، به‌گرا دیان‌های فشار بالایی نیاز است.

### مثال ۵-۴.۲۴

سایر نیروهای رانش مؤثر در انتقال جرم

تا این‌جا همه مکانیسم‌های انتقال جرمی را که معمولاً در چارچوب ترمودینامیک عدم تعادل در نظر گرفته می‌شوند، بررسی کردیم، اما امکان‌های دیگر نیز وجود دارد که اهمیت آن‌ها به‌اثبات رسیده‌است. در این‌جا به سه مورد از آن‌ها اشاره می‌کنیم: نیروی وارد بر ذره بارداری که در میدان مغناطیسی حرکت می‌کند، و نیروهای القای الکتریکی یا مغناطیسی. این پدیده‌ها شامل جمله‌های غیرخطی - یعنی حاصل ضرب‌های سرعت‌های گونه و میدان‌های نیرو - نیز هستند و بنابراین، به بیان دقیق، از حوزه ترمودینامیک برگشت‌ناپذیر خارج‌اند. اما اضافه کردن آن‌ها به نیروهای حجمی پدیدار شده در معادله (۱-۴.۲۴) مجاز است. صورتی خاص از معادله حاصل را به‌دست بیاورید و نشان دهید که چگونه می‌توان از این معادله برای توصیف فرایندهای انتقال جرم تحت تأثیر یک یا چند مورد از این نیروهای اضافی استفاده کرد.

حل

کار را با تعریف نیروی رانش تعمیم‌یافته برای انتقال جرم،  $\mathbf{d}_{\alpha, \text{ext}}$ ، شروع می‌کنیم تا این نیروهای اضافی را نیز در نظر بگیریم:

$$\mathbf{d}_{\alpha, \text{ext}} = \mathbf{d}_{\alpha} + \frac{x_{\alpha} z_{\alpha} F}{RT} [\mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{B}] + \frac{x_{\alpha}}{RT} \{ \Gamma_{\alpha}^{\text{el}} [\mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E}] + \Gamma_{\alpha}^{\text{mag}} [\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}] \} \quad (۵۰-۴.۲۴)$$

در این‌جا  $\mathbf{B}$  القای مغناطیسی است،  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  میدان الکتریکی،  $\Gamma_{\alpha}^{\text{el}}$  پذیرفتاری الکتریکی، و  $\Gamma_{\alpha}^{\text{mag}}$  پذیرفتاری مغناطیسی است.

منشأ جمله‌های حاوی  $[\mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{B}]$  و  $[\mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E}]$  در معادله (۵۰-۴.۲۴)، رابطه لورنتس است:

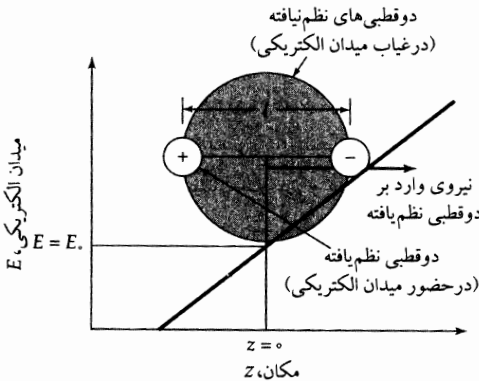
$$\mathbf{F} = q_0 (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]) \quad (۵۱-۴.۲۴)$$

که در آن  $q_0$  بار الکتریکی است. این نکته در معادله (۵۱-۴.۲۴) برای ذره بارداری که در یک میدان مغناطیسی حرکت می‌کند، به‌صراحت نشان داده شده‌است (نگاه کنید به مسئله ۲۴ ب.۱)، اما برای القای الکتریکی  $[\mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E}]$ ، که بر برهم‌کنش میدان غیریکنواخت با دوقطبی الکتریکی مبتنی است، به‌طور ضمنی نشان داده شده‌است. برای نشان دادن منشأ جمله  $[\mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E}]$  در معادله (۵۰-۴.۲۴)، به‌عنوان مثال، وضعیتی تک‌بعدی را در نظر بگیرید که در شکل ۳-۴.۲۴ نشان داده شده‌است. میدان الکتریکی گرایش به نظم دادن به دوقطبی‌هایی دارد که

در حالت عادی بر اثر حرکت براونی، آرایش تصادفی دارند، و اگر میدان غیریکنواخت باشد، نیروی خالصی بر یک دوقطبی نظم یافته با اندازه:

$$F_z = q_0 \left[ \left( E_0 + \frac{l}{2} \frac{\partial E}{\partial z} \right) - \left( E_0 - \frac{l}{2} \frac{\partial E}{\partial z} \right) \right] = q_0 l \frac{\partial E}{\partial z} \quad (52-4.24)$$

وجود خواهد داشت، که در آن  $q_0$  اندازه بار در هر یک از سرهای دوقطبی، و  $l$  فاصله بین دو مرکز بار است.



شکل ۴-۲۴ منشأ نیروی دی الکتروفورز تعریف شده با معادله (۵۲-۴.۲۴).

در بعضی موارد -مثلاً، صورت یون دوقطبی آمینواسیدها- می توان هم  $q_0$  و هم  $l$  را با استفاده از نظریه مولکولی تعیین کرد. اما، برای ذرات و اغلب مولکولها، فقط دوقطبی های القایی پیدا می شود: جدایش بار جزئی ناشی از حضور میدان. تحت شرایطی که در این جا مورد نظر است، فقط کسر کوچکی از دوقطبی های ذاتی با میدان هم راستا می شوند، و هم راستایی جزئی این دوقطبی ها و هم چنین قدرت دوقطبی های القایی را معمولاً متناسب با قدرت میدان فرض می کنند. همه این عوامل در کمیتی موسوم به پذیرفتاری الکتریکی جمع می شوند که معمولاً به روش تجربی تعیین می شود. منشأ جمله مگتوفورز، تناظر است. اکنون به بحث مختصری درباره کاربردهای این مکانیسم های جدید جداسازی می پردازیم.

رفتار یون هایی که در یک میدان مغناطیسی حرکت می کنند بر طیف سنجی جرمی کلاسیک مبتنی است، اگرچه طیف سنج های زمان پروازی نیز کار بردگسترده ای دارند. هر دو نوع طیف سنج بسیار تکامل یافته اند و برای تجزیه مخلوط های تشکیل شده از گازهای ساده غیرآلی تا مولکول های زیستی غیرفزار پیچیده، مانند پروتئین ها، کاربردهای زیادی پیدا کرده اند. درحقیقت، هر جا بتوان از این دستگاه ها استفاده کرد، دقیق ترین وسیله برای تعیین وزن مولکولی پروتئین به شمار می روند و وقت آن ها غالباً در حدود یک دالتون برای مولکول هایی است که وزن آن ها از مرتبه ده ها هزار دالتون است. از هر دو پدیده دی الکتروفورز و مگتوفورز در مقیاس وسیع برای حذف ذرات کوچک معلق در سیال ها استفاده کرده اند. در دی الکتروفورز، میدان های غیریکنواخت با پر کردن فاصله بین الکترودها، با استفاده از ذرات دی الکتریک کوچک، مانند مهره های شیشه ای، ایجاد می شوند (مثلاً نگاه کنید به مسئله ۲۴ ب.۱). چون ذرات همیشه به سمت میدان قوی تر حرکت می کنند، می توان از جریان متناوب، معمولاً با ولتاژ ده ها کیلوولت، استفاده کرد و به این ترتیب از واکنش های الکترودها جلوگیری کرد. جریان های الکتریکی بسیار ناچیزند و می توان از آن ها چشم پوشی کرد. در مگتوفورز، میدان یکنواخت را با استقرار توری های فرومغناطیسی بین قطب های یک آهن ربای الکتریکی ایجاد می کنند، که البته فقط می تواند با مواد پارامغناطیسی یا فرومغناطیسی کار کند. مثال کلاسیک کاربرد این پدیده، حذف ذرات رنگی تشکیل شده از آهن اکسیدها، برای سفیدسازی خاک رس است.



کاربردهای جدید دی‌الکتروفورز با سرعت زیاد در حوزه‌های زیست‌شناسی<sup>۷</sup> مواد پیشرفته<sup>۸</sup> شامل فناوری نانو، و پایش‌های زیست‌محیطی توسعه یافته‌اند.<sup>۹</sup> این کاربردها شامل دسته‌بندی، تجزیه کمی، و دستکاری، از جمله تشکیل آرایه‌های منظم، می‌شوند.

بسیاری از این کاربردها مستلزم تعمیم معادله (۴.۲۴-۵) برای شامل شدن بر نیروهای چهارقطبی و حتی هشت قطبی است.<sup>۱۰</sup> به علاوه، برهم‌کنش‌های نیرومندی بین نیروهای الکتریکی و هیدرودینامیک وجود دارد و شکل دستگاه و ذره می‌توانند آثار درخور اعتنایی داشته باشند.<sup>۱۱</sup>

#### ۵.۲۴ انتقال جرم در غشاهای تراوای گزینشی

از لحاظ فیزیکی، غشاها ورق‌های نازکی شمرده می‌شوند که معمولاً دو فاز را از هم جدا، و انتقال جرم بین آن‌ها را کنترل می‌کنند. به علاوه، معمولاً با استفاده از نوعی وسیله مکانیکی، توری سیمی یا سازه‌ای شبیه به آن، از حرکت غشا بر اثر گرادیان‌های فشار خارجی و پسای ویسکوز داخلی جلوگیری می‌کنند. غشاها از یک غشای انحلال‌ناپذیر تراوای گزینشی  $M$  و یک یا چند گونه متحرک تراوش‌کننده مانند  $\alpha$ ،  $\beta$ ، ... تشکیل می‌شوند. از لحاظ ریاضی، غشاها با سه شرط تعریف می‌شوند:

۱. انحنای قابل چشم‌پوشی

$$\delta \ll R_{\text{curv}} \quad (۱-۵.۲۴)$$

که در آن  $\delta$  ضخامت غشا، و  $R_{\text{curv}}$  شعاع انحنای سطح غشاست. نتیجه می‌شود که انتقال جرم تک‌جهتی و عمود بر سطح غشاست.

۲. عدم تحرک غشا یعنی «ماتریس»  $m$  در معادله (۴.۲۴-۵):

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{0} \quad (۲-۵.۲۴)$$

که در آن  $\mathbf{v}_M$  سرعت غشاست، که به عنوان مبدأ مختصات عمل می‌کند.

7. C. Polk, *IEEE Transactions on Plasma Science*, **28**, 6-14 (2000); J. Suehiro et al., *J. Physics D: Applied Physics*, **32**, 2814-2320 (1999); J. P. H. Bert, R. Pethig, & M. S. Talary, *Trans. Inst. Meas. Control*, **20**, 82-91 (1998); A. P. Brown, W. B. Betts, A. B. Harrison, & J. G. ÓNeill, *Biosensors & Bioelectronics*, **14**, 341-351 (1999); O. D. Velev & E. W. Kaler, *Langmuir*, **15**, 3693-3698 (1999); T. Yamamoto, et al., *Conference Record, IAS Annual Meeting (IEEE Industry Applications Society)*, **3**, 1933-1940 (1998); M. S. Talary, et al., *Med. and Bio. Eng. & Computing*, **33**, 235-237 (1995); H. Morgan & N. G. Green, *J. Electrostatics*, **42**, 279-293 (1997).

8. L. Cui and H. Morgan, *J. Micromech. Microeng.*, **10**, 72-79 (2000); M. Hase et al., *Proc. Intl. Soc. Optical Eng.*, **3673**, 133-140 (1999); C. A. Randall, *IEEE Intl. Symp. on Applications of Ferroelectrics*, Piscataway, N.J. (1996).

9. P. Baron, *ASTM Special Technical Publication*, 147-155 (1999); R. J. Han, O. R. Moss, and B. A. Wong, *Aerosol Sci. Tech.*, **21**, 241-258 (1994).

10. C. Reichle et al., *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **32**, 2128-2135 (1999); A. Ramos et al., *J. Electrostatics*, **47**, 71-81 (1999); M. Washizu and T. B. Jones, *J. Electrostatics*, **33**, 187-198 (1994); B. Khusid and A. Acrivos, *Phys. Rev. E*, **54**, 5428-5435 (1996).

11. S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics*, Butterworth-Heinemann, Boston (1991); D. W. Howard, E. N. Lightfoot, and J. O. Hirschfelder, *AIChE Journal*, **22**, 794-798 (1976).

۳. رفتار شبه‌پایا:

$$\frac{\partial c_{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad (3-5.24)$$

که در آن  $\alpha$  هرگونه موجود در سیستم، شامل غشای  $M$  است. معنای این شرط کوتاه بودن زمان پاسخ نفوذی در داخل غشا، در مقایسه با زمان پاسخ در محلول‌های مجاور است.

حال می‌خواهیم نحوه استفاده از این قیدها را برای اختصاصی کردن معادله‌های ماکسول-استفان و به دست آوردن توصیف‌هایی موجز اما قابل‌اعتماد برای انتقال در غشا، نشان دهیم.

کار خود را با توجه به این نکته آغاز می‌کنیم که غشا را باید به‌عنوان یکی از گونه‌های درحال نفوذ در نظر گرفت؛ از معادله‌های ماکسول-استفان فقط در مورد گونه‌های متحرک استفاده می‌کنیم. سپس با استفاده از معادله‌های (۴-۲۴) و (۵)، برای مخلوطی از  $N$  گونه متحرک، می‌نویسیم:

$$\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \frac{x_{\alpha} x_{\beta}}{\bar{D}_{\alpha\beta}} (\mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\beta}) = -x_{\alpha} (\nabla \ln a_{\alpha})_{T,p} - x_{\alpha} \left( \frac{\bar{V}_{\alpha}}{RT} \right) \nabla p - x_{\alpha} z_{\alpha} \left( \frac{F}{RT} \right) \nabla \phi \quad (4-5.24)$$

توجه داشته‌باشید که در این معادله  $\alpha$  را به‌عنوان گونه مرجع برای هر  $\alpha$  انتخاب کردیم و نیرویی که غشا را ثابت نگه می‌دارد - یعنی آخرین جمله در معادله (۵-۴۲۴) - از حذف جمله کسر جرمی در عبارت مربوط به نفوذ فشاری به‌دست آمده‌است.<sup>۱</sup>

سپس به این نکته توجه می‌کنیم که، از دیدگاه ترمودینامیکی، تعداد اجزا با تعداد گونه‌های متحرک در محلول پیرامون غشا برابر است، زیرا این محلول خارجی است که حالت غشا را در وضعیت تعادل تعیین می‌کند. به‌علاوه به این نکته توجه می‌کنیم که، در اغلب موارد، نمی‌توان وزن مولکولی مؤثر غشا را تعیین کرد. بنابراین سیستم داخلی را فقط شامل گونه‌های متحرک در نظر می‌گیریم و کسرهای مولی این گونه‌ها را طوری تعریف می‌کنیم که مجموع آن‌ها برابر واحد شود. اما، چون برهم‌کنش هرگونه با غشا نسبتاً درخور اعتناست، جمله  $\bar{D}'_{\alpha M}$  را نیز به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{x_M}{\bar{D}_{\alpha M}} = \frac{1}{\bar{D}'_{\alpha M}} \quad (5-5.24)$$

معادله (۵-۵.۲۴) اختصاصی‌سازی معادله‌های ماکسول-استفان برای انتقال غشایی را کامل می‌کند، اما هنوز باید مجموعه‌ای از شرایط مرزی عمومی نیز انتخاب کنیم.

این شرایط با توجه به لزوم پیوسته بودن «پتانسیل» کل هرگونه در دو طرف مرز، به‌دست می‌آید:

$$\ln \frac{a_{\alpha M}}{a_{\alpha e}} + \left( \frac{\bar{V}_{\alpha, \text{avg}}}{RT} \right) (p_M - p_e) + z_{\alpha} \left( \frac{F}{RT} \right) (\phi_M - \phi_e) = 0 \quad (6-5.24)$$

در این‌جا اندیس‌های  $M$  و  $e$ ، به ترتیب، به شرایط در داخل غشا و در محلول خارجی اشاره می‌کنند. فعالیت  $a_{\alpha}$  را باید با توجه به ترکیب شیمیایی در فاز غشا، اما در محلول خارجی، محاسبه کرد، و داریم:

$$\bar{V}_{\alpha, \text{avg}} = \frac{1}{p_M - p_e} \int_{p_e}^{p_M} \bar{V}_{\alpha} dp \quad (7-5.24)$$

در عمل، مواد حل‌شده را معمولاً تراکم‌ناپذیر و  $\bar{V}_{\alpha}$  را در فصل مشترک ثابت در نظر می‌گیرند.

تعیین شرایط در داخل غشا غالباً بسیار دشوار یا حتی غیرممکن است، و اصولاً در چنین شرایطی معادله (۶-۵.۲۴) برای درک کیفی رفتار غشا مفید است. توصیف کامل انتقال از طریق غشا، تاحدودی به همین دلیل، نسبتاً نادر است (اما نگاه کنید به کتاب اسکاگرود و لایت‌فوت).<sup>۱</sup> در بسیاری از منابع می‌توانید اطلاعات مقدماتی بسیار ساده‌سازی شده، اما غالباً مفید، در مورد انتقال در غشا پیدا کنید.<sup>۲،۳،۴</sup> تقریبی بسیار ارزشمند، که به‌ویژه زیست‌شناسان آن را مفید یافته‌اند، تقریب کِدم و کاجالسکی است.<sup>۵</sup>

اما پیشرفت سریعی در به‌دست آوردن داده‌های بنیادی حاصل شده، و بخش عمده این پیشرفت در *Journal of Membrane Science* گزارش داده شده است. یکی از حوزه‌های مهم، حوزه غشاهای ریزمتخلخل است.<sup>۶</sup> به‌علاوه می‌توان پیشرفت‌هایی را نیز در رفتار مدل‌سازی انتظار داشت. مدت‌هاست که معلوم شده است<sup>۷</sup> قضیه دوگان تعمیم‌یافته لورنتس برای جریان‌های خزشی،<sup>۸</sup> مبنای محکمی برای تعمیم نظریه نفوذ هیدرودینامیکی بخش ۴.۱۷ به نفوذ چندجزئی در غشاهای ریزمتخلخل است. فنون کامپیوتری که به‌تازگی ابداع شده‌اند<sup>۹</sup> باید محاسبات ضروری را به‌اندازه کافی انعطاف‌پذیر کنند تا قوه پیش‌بینی واقعی حاصل شود. از این فنون می‌توان برای توسعه سازه‌های خودمونتاز<sup>۱۰</sup> که غالباً امکانات جدیدی را برای غشاهای به‌شدت گزینشی فراهم می‌کنند، استفاده کرد.

این حوزه انواع بسیار متنوعی از غشاها را در برمی‌گیرد و فرایندهای مختلف انتقال جرم در آن رخ می‌دهد. می‌توان بین غشاهای زیستی<sup>۱۱</sup> و سنتزی<sup>۱۲</sup> تمایز قائل شد، اما در هریک از این دسته‌ها، انواع مختلف ترکیب‌ها و رفتارها وجود دارد. در دسته غشاهای سنتزی، غشاهای «همگن» وجود دارند که در آن‌ها «زمینه» به‌صورت حلالی واقعی برای گونه تراونده عمل می‌کند و غشاهای «ریزمتخلخل» که در آن‌ها گونه تراونده به نواحی «فاقد زمینه» و

2. E. L. Cussler, *Diffusion: Mass Transfer in Fluid Systems*, 2nd edition, Cambridge University Press (1997), p. 580.

3. W. M. Deen, *Analysis of Transport Phenomena*, Oxford University Press (1998), p. 597.

4. J. D. Seader and E. J. Henley, *Separation Process Principles*, Wiley, New York (1998).

5. O. Kedem and A. Katchalsky, *Biochem. Biophys. Acta*, **27**, 229 (1958).

6. K. Kaneko, *J. Membrane Sci.*, **96**, 95-89 (1994); K. Sakai, *J. Membrane Sci.*, **96**, 91-130 (1994); S. Nakao, *J. Membrane Sci.*, **96**, 181-165 (1994).

7. E. N. Lightfoot, J. B. Bassingthwaite, and E. F. Grabowski, *Ann. Biomed. Eng.*, **4**, 78-90 (1976).

8. J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall (1965), Martinus Nijhoff (1983), p. 62, p. 85.

9. S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*, Butterworth-Heinemann, Boston (1991).

10. I. Mustakis, S. C. Clear, P. F. Nealey, and S. Kim, *ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting*, FEDSM, June 22-26 (1997).

11. B. Alberts et al., *The Molecular Biology of the Cell*, Garland, New York (1999), Chapters 10 and 11.

12. W. S. W. Ho and K. K. Sirkar, *Membrane Handbook*, Van Nostrand Reinhold, New York (1992), p. 954; R. D. Noble and S. A. Stern, *Membrane Separations Technology*, Membrane Science and Technology Series, **2**, Elsevier (Amsterdam), p. 718; R. van Reis and A. L. Zydney, "Protein Ultrafiltration" in *Encyclopedia of Bioprocess Technology* (M. C. Flickinger and S. W. Drew, eds.), Wiley, New York (1999), pp. 2197-2214; L. J. Zeman and A. L. Zydney, *Microfiltration and Ultrafiltration*, Marcel Dekker, New York (1996).

هم چنین مخلوط‌هایی از دو گونه محدود می‌شود. این عوامل از دیدگاه مواد مهم‌اند، اما قالب‌های لازم برای توصیف رفتار انتقالی آن‌ها، برای همه تقریباً یکسان است. انواع مختلفی از شرایط فرایندی نیز متداول است. در این جا فقط چند مثال به منظور نشان دادن وضعیت‌هایی که معمولاً با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم، ارائه می‌شود.

### مثال ۱-۵.۲۴

نفوذ غلظتی بین فازهای توده‌ای از پیش موجود

ماده «حل‌شده»  $A$  را در نظر بگیرید که در غشای واقع بین محلول‌های دوتایی ماده حل‌شده  $A$  در حلال  $B$  فقط تحت تأثیر گرادیان غلظت، نفوذ می‌کند. این وضعیتی است که معمولاً در عمل با آن روبه‌رو می‌شویم و شامل دیالیز، اکسیژن‌دهی به خون، و بسیاری از سیستم‌های جذب گاز است.<sup>۱۳</sup> این پدیده انواع مختلفی دارد که نفوذ تسهیل‌شده (نگاه کنید به مسئله ۲۴ ج. ۹) یکی از آن‌هاست. همودیالیز مورد خاصی است که در آن از اختلاف فشار برای گذراندن آب از غشا استفاده می‌شود، اما از دیدگاه فعلی، نفوذ غلظتی مواد حل‌شده بیش‌تر مورد توجه است. فرض کنید که شار حلال،  $N_B$ ، معلوم است. نظیر قانون اول فیک را برای این سیستم پیدا کنید. برای ساده شدن کار، اندیس جهت  $z$  را از سرعت‌ها و شارها حذف می‌کنیم.

حل

در این جا اصولاً با ماده حل‌شده  $A$  سروکار داریم و معادلهٔ ماکسول-استفان برای این ماده چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{x_A v_A}{\mathcal{D}'_{AM}} + \frac{x_A x_B}{\mathcal{D}'_{AB}} (v_A - v_B) = - \left[ 1 + \left( \frac{\partial \ln \gamma_A}{\partial \ln x_A} \right)_{T,p} \right] \frac{dx_A}{dz} \quad (۸-۵.۲۴)$$

این معادله را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد:

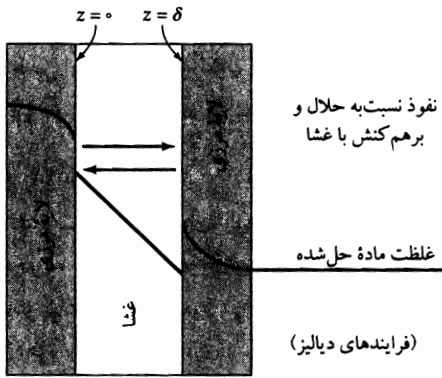
$$N_A = -c \left( \frac{\mathcal{D}'_{AM} \mathcal{D}_{AB}}{\mathcal{D}'_{AM} + \mathcal{D}_{AB}} \right) \left[ 1 + \left( \frac{\partial \ln \gamma_A}{\partial \ln x_A} \right)_{T,p} \right] \frac{dx_A}{dz} + x_A (N_A + N_B) \left( \frac{\mathcal{D}'_{AM}}{\mathcal{D}'_{AM} + \mathcal{D}_{AB}} \right) \quad (۹-۵.۲۴)$$

این معادله یادآور قانون فیک است، و نخستین جملهٔ سمت راست آن با شار نفوذی فیک، و دومین جمله با شار همرفتی متناظر است. اما اکنون ضریب نفوذ مؤثر شامل سهم مربوط به غشا نیز هست، و در این حالت جملهٔ همرفتی با استفاده از نسبت ضرایب نفوذ، وزن‌دهی می‌شود. این وضعیت با وضعیت نشان‌داده‌شده در شکل ۱-۵.۲۴ متناظر است. پیکانی که نوک آن به طرف راست است، نفوذ نسبت به حلال را نشان می‌دهد، که با برهم‌کنش با غشا تعدیل شده‌است، اما پیکانی که نوک آن به طرف چپ است، معرف «پسا»ی غشاست، که گرایش به کاهش انتقال نسبت به همرفت دارد که در غیاب غشا رخ می‌دهد، یعنی  $N_B$ .<sup>۱۴</sup> چه کنید که در حالت کلی، در هر دو طرف غشا لایه‌های مرزی انتقال جرم وجود دارد.

چندین وضعیت حدی وجود دارد که به آن‌ها

ضعیفی داشته‌باشند،  $\mathcal{D}'_{AM} \gg \mathcal{D}_{AB}$  بنابراین:

$$N_A = -c \mathcal{D}_{AB} \left[ 1 + \left( \frac{\partial \ln \gamma_A}{\partial \ln x_A} \right)_{T,p} \right] \frac{dx_A}{dz} + x_A (N_A + N_B) \quad (۱۰-۵.۲۴)$$



شکل ۱۵-۲۴ انتقال جرم درون‌غشایی.

که دقیقاً قانون فیک است. اما یادآوری می‌کنیم که هم غلظت مولی و هم ضریب نفوذ، به فاز غشا مربوط‌اند. سپس به وضعیتی حدی نظر می‌اندازیم که در آن:

$$x_A(N_A + N_B) \ll N_A \quad (۱۱-۵-۲۴)$$

و توزیع بین غشا و محلول خطی است، به طوری که:

$$c_{AM} = K_{DC}Ae \quad (۱۲-۵-۲۴)$$

در رابطه بالا اندیس‌های  $e$  و  $m$ ، به ترتیب، به محلول خارجی و فازهای غشا اشاره دارند، و  $K_D$  ضریب توزیع برای دو فاز است. سپس می‌توان نوشت:

$$N_A = P(c_{Ae^0} - c_{Ae\delta}) \quad (۱۳-۵-۲۴)$$

که در آن:

$$P = K_D D_{A,eff} / \delta \quad (۱۴-۵-۲۴)$$

تراوش‌پذیری غشاست، و:

$$D_{A,eff} = \left( \frac{B'_{AM} B_{AB}}{B'_{AM} + B_{AB}} \right) \left[ 1 + \left( \frac{\partial \ln \gamma_A}{\partial \ln x_A} \right)_{T,p} \right] \quad (۱۵-۵-۲۴)$$

اندیس‌های  $Ae\delta$  و  $Ae^0$  به غلظت‌های ماده حل‌شده در «بالادست» و «پایین‌دست» غشا اشاره می‌کنند (نگاه کنید به شکل ۱۵-۲۴).

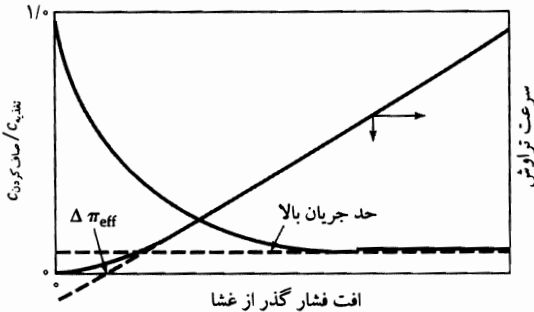
### مثال ۲۴-۵

فراصاف‌سازی و اسمز معکوس

حال فرایند صاف‌سازی را در نظر بگیرید که هدف از آن حذف گزینشی یک حلال نسبت به ماده حل‌شده، با استفاده از جریان فشاری در پشت غشایی است که ماده حل‌شده را دفع می‌کند. کاربردهای این روش عبارت‌اند از: فراصاف‌سازی و اسمز معکوس، که اولی با مولکول‌های درشت سروکار دارد و دومی با مواد حل‌شده کوچک.<sup>۱۴</sup>

14. R. J. Petersen, *J. Membrane Sci.*, **83**, 81-150 (1993).

صاف‌سازی میکرو و صاف‌سازی نانو از لحاظ صوری شباهت دارند، اما ماهیت ذره‌ای موادی که حذف می‌شوند پیچیدگی‌هایی به مسئله اضافه می‌کند که در این جا نمی‌خواهیم آن‌ها را در نظر بگیریم. چارچوبی برای توصیف آهنگ جریان حلال و ترکیب مایع عبور کرده از فیلتر، به صورت توابعی از فشار رانش پیدا کنید.



شکل ۲۵-۲۴ فراصاف‌سازی: دفع ماده حل شده و جریان.

حل

چنان‌که در شکل ۱۵-۲۴ نشان داده شده است، عبور مقداری از ماده حل شده به همراه حلال از غشا، اجتناب‌ناپذیر است و اکنون باید معادلات ماکسول-استفان را برای هر دو گونه در نظر بگیریم. اما صاف‌سازی غشایی فرایندی پیچیده است و برای به دست آوردن توصیفی پیشینی به اطلاعات فراوانی نیاز داریم؛ بنابراین کار خود را با مرور رفتار مشخصه با استفاده از شکل ۲۵-۲۴ آغاز می‌کنیم. در این جا هم جریان عبوری از غشا و هم ترکیب شیمیایی مایع عبور کرده از فیلتر، به طور شماتیک، به صورت توابعی از افت فشار در غشا نشان داده شده‌اند. ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که با افت فشار، جریان ابتدا به آهستگی افزایش می‌یابد، اما به سوی یک رابطه خطی مجانبی میل می‌کند و بجانب خط سرعت صفر را در افت فشار متناهی  $\Delta\pi_{eff}$  قطع می‌کند. نسبت غلظت ماده حل شده عبور کرده از فیلتر به غلظت ورودی، با افزایش افت فشار، از مقدار واحد کاهش می‌یابد و به سمت مجانبی میل می‌کند،<sup>۱۵</sup> که معمولاً بسیار پایین‌تر از واحد است. قصد ما در این آشنایی مقدماتی، توضیح دادن این رفتار مشخصه بر حسب رفتار مهم ترمودینامیکی و انتقالی است. این وضعیت، با وضعیتی که در بالا توصیف شد، تفاوت بنیادی دارد، از این لحاظ که اکنون نفوذ فشاری وارد عمل می‌شود، و محلول پایین‌دستی در نتیجه انتقال جرم درون غشایی تولید می‌شود. بنابراین نسبت پایین‌دستی ماده حل شده به حلال با نسبت آهنگ‌های انتقال جرم متناظر برابر است. در این صورت در سمت پایین دست غشا لایه مرزی وجود ندارد و معمولاً همه از سازه‌ای مرکب استفاده می‌کنند. غشاهای مرکب از یک لایه بسیار نازک گزیننده در سطح بالادستی، و یک پشت‌بند نسبتاً ضخیم، به شدت متخلخل، و غیرگزیننده تشکیل می‌شوند که استحکام مکانیکی را تأمین می‌کند. در مثال فعلی می‌توان این پشت‌بند را نادیده گرفت. کار را با تمرکز روی رفتار درون غشایی آغاز می‌کنیم که برای آن، معادلات ماکسول-استفان، که با استفاده از معادله (۴-۵.۲۴) تعدیل شده‌اند، صورت‌های زیر را پیدا می‌کنند:

$$\frac{x_S x_W}{B_{SW}} (\mathbf{v}_S - \mathbf{v}_W) + \frac{x_S \mathbf{v}_S}{B'_{SM}} = -\frac{1}{RT} x_S (\nabla RT \ln a_S)_{T,p} - \frac{c_S \bar{V}_S}{cRT} \nabla p \quad (۱۶-۵.۲۴)$$

$$\frac{x_S x_W}{B_{SW}} (\mathbf{v}_W - \mathbf{v}_S) + \frac{x_W \mathbf{v}_W}{B'_{WM}} = -\frac{1}{RT} x_W (\nabla RT \ln a_W)_{T,p} - \frac{c_W \bar{V}_W}{cRT} \nabla p \quad (۱۷-۵.۲۴)$$

۱۵. عملاً افت بسیار آهسته، اما پیوسته غلظت ماده حل شده از فیلتر عبور کرده، حتی به ازای افت فشارهای بسیار شدید، مشاهده می‌شود که ناشی از تراکم غشاست. اما، قصد نداریم این اثر کوچک را در این جا در نظر بگیریم.

در این جا اندیس‌های  $S$  و  $W$ ، به ترتیب، به ماده حل شده و حلال (معمولاً آب) دفع شده به طور جزئی اشاره می‌کنند. جمله‌های  $x_\alpha \bar{V}_\alpha$  را با  $c_\alpha \bar{V}_\alpha / c$  جایگزین کرده‌ایم تا حضور کسرهای حجمی:

$$\phi_\alpha = c_\alpha \bar{V}_\alpha \quad (۱۸-۵.۲۴)$$

صراحت پیدا کند. به علاوه، نخستین جمله سمت راست، را برای یادآوری این نکته که مشتق نماینده گرادیان انرژی آزاد مولی جزئی:

$$d\bar{G}_\alpha = RT d \ln a_\alpha \quad (۱۹-۵.۲۴)$$

است، بازنویسی کرده‌ایم و ترکیب، دما و فشار را ثابت نگه داشته‌ایم. کار را با بررسی رفتار جریان شروع می‌کنیم و برای انجام این کار معادله‌های (۱۶-۵.۲۴ و ۱۷) را باهم جمع می‌کنیم تا رابطه‌ای بین انتقال گونه‌ها و گرادیان فشار درون غشایی به دست آوریم:

$$\left( \frac{N_S}{\mathcal{D}'_{SM}} + \frac{N_W}{\mathcal{D}'_{WM}} \right) = -\frac{1}{cRT} \nabla p_M \quad (۲۰-۵.۲۴)$$

اندیس  $M$  روی فشار، یادآور این نکته است که تا به حال فقط افت فشار در داخل غشا را محاسبه کرده‌ایم. در این جا از معادله گیس-دوهم:

$$\sum_\alpha \bar{G}_\alpha dx_\alpha = 0 \quad (۲۱-۵.۲۴)$$

و این نکته که جمع کسرهای مولی برابر واحد است، استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن مستقیم اختلاف قابل سنجش بین فشارهای محلول در بالادست و پایین دست غشا، باید دوباره به سراغ معادله (۶-۵.۲۴) برویم که صورت زیر را به خود می‌گیرد:

$$p_e - p_M = \frac{RT}{\bar{V}_S} \ln \frac{a_{SM}}{a_{Se}} = \pi_e - \pi_M \quad (۲۲-۵.۲۴)$$

در سمت بالادست غشا، مثلاً معادله (۲۲-۵.۲۴)، حاکی از آن است که افت فشار در فصل مشترک غشا، برای راندن ماده حل شده با وجود افزایش فعالیت ترمودینامیکی ضروری است. بنابراین افت فشار قابل اندازه‌گیری در غشا برابر است با:

$$\Delta p_{\text{ext}} = \frac{cRT}{\delta} \left( \frac{N_S}{\mathcal{D}'_{SM}} + \frac{N_W}{\mathcal{D}'_{WM}} \right) + \Delta \pi_{\text{eff}} \quad (۲۳-۵.۲۴)$$

(با حذف اندیس جهتی  $z$ ) که در آن  $\delta$  ضخامت غشاست، و:

$$\Delta \pi_{\text{eff}} = (\pi_{e^0} - \pi_{e\delta}) - (\pi_{M^0} - \pi_{M\delta}) \quad (۲۴-۵.۲۴)$$

در رابطه بالا اندیس‌های « $0$ » و « $\delta$ »، به ترتیب، به بالادست و پایین دست غشا اشاره می‌کنند. فشار اسمزی درون غشایی به ندرت معلوم است، اما این افت فشار معمولاً از مقادیر مربوط به محلول متناظر کم تر است (نگاه کنید به مسئله‌های ۲۴.۷ و ۸). با درک فعلی ما، معادله (۲۳-۵.۲۴) نشان می‌دهد که چرا نقطه تقاطعی متناهی با رفتار جریان مجانبی وجود دارد، و حذف سهم غشا سبب پیدایش حدی بالایی برای آن می‌شود. به علاوه براساس مشاهدات تجربی، می‌توان بینشی هم درباره رفتار درون غشایی کسب کرد، اما این بینش، پیش‌بینی پیشینی نقطه تقاطع را ممکن نمی‌کند.

سیس با استفاده از معادله (۲۴-۵.۲۴) گرادیان فشار را از معادله (۲۴-۵.۱۶) حذف می‌کنیم:

$$N_S \left( \frac{x_W}{c \theta_{SW}} + \frac{\phi_W}{c \theta'_{SM}} \right) - N_W \left( \frac{x_S}{c \theta_{SW}} + \frac{\phi_S}{c \theta'_{WM}} \right) = - \left( 1 + \frac{\partial \ln \gamma_S}{\partial \ln x_S} \right)_{T,p} \frac{dx_S}{dz} \quad (25-5.24)$$

می‌توان از عبارت بالا انتگرال گرفت و توزیع غلظت ماده حل شده را به دست آورد (مثلاً نگاه کنید به مسئله‌های ۲۴ ج. ۷ و ۸). به طور کلی، توزیع غلظت حاکی از شیب منفی فزاینده در جهت جریان است، و با افزایش آهنگ جریان در غشا، این ویژگی شدت می‌یابد؛ یعنی افت فشار درون غشایی بیش‌تر می‌شود.

در آهنگ‌های جریان بسیار پایین،  $N_S$  و  $N_W$  نسبتاً کوچک‌اند و نفوذ نسبتاً سریع است. غلظت ماده حل شده در عبور از غشا فقط اندکی کاهش می‌یابد و نتیجه دفع ضعیفی است که در شکل ۲۴-۵.۲، به ازای افت فشار کم، مشاهده می‌شود. این رفتار را توزیع غلظت جریان صفر در شکل ۲۴-۵.۱۵ ایجاب می‌کند.

از طرف دیگر، در آهنگ‌های جریان بسیار بالا، گرادیان‌های غلظت بزرگ‌اند و نفوذ ضعیف است، مگر در نقاط بسیار نزدیک به مرز پایین دستی غشا، که گرادیان غلظت منفی بسیار بزرگی ایجاد می‌شود. در نزدیکی مرز بالادستی، دو جمله شار جرمی منفی، در مقایسه با اختلاف آن‌ها، بزرگ‌اند و می‌توان در محاسبه نسبت شار جرمی، گرادیان غلظت را نادیده گرفت:

$$\frac{N_S}{N_W} \approx \frac{x_S}{x_W} \left( \frac{(1/c\theta_{SW}) + (\bar{V}_S/\theta'_{WM})}{(1/c\theta_{SW}) + (\bar{V}_W/\theta'_{SM})} \right) \quad (26-5.24)$$

اکنون اساس طرد ماده حل شده آشکار می‌شود:

۱. طرد ترمودینامیکی، که با نسبت  $x_S/x_W$  تعریف می‌شود؛

۲. تفکیک اصطکاکی، که با استفاده از اختلاف جمله‌های برهم‌کنش با غشا  $(\bar{V}_S/\bar{V}_W)(\theta'_{SM}/\theta'_{WM})$  تعریف می‌شود.

هر دو اثر در عمل کاربرد دارند و در مسئله‌ها کاربرد آن‌ها را نشان خواهیم داد.

### مثال ۲۴-۵.۳

غشاهای باردار و طرد دوان<sup>۱۶</sup>

دو غشای حاوی بارهای غیرمتحرک را در نظر بگیرید که از ژل‌های پلی‌الکترولیت ساخته شده‌اند. این ژل‌ها، مطابق شکل ۲۴-۵.۳، حاوی گروه‌های یونی با پیوند کووالانسی مکررند. داخل غشا را می‌توان به عنوان محلولی حاوی بارهای ثابت در فضا، یون‌های مخالف متحرک، الکترولیت مهاجم، و آب در نظر گرفت. برای ساده شدن کار، فرض می‌کنیم که بارهای ثابت، آنیون‌اند، که به صورت  $X^-$  نشان داده می‌شوند، و یون‌های مخالف کاتیون‌اند، که به صورت  $M^+$  نوشته می‌شوند. محلول خارجی، محلول آبی  $M^+X^-$  است و همین محلول الکترولیت مهاجم  $M^+X^-$  را تأمین می‌کند. نشان دهید که چگونه حضور بارهای مثبت سبب طرد الکترولیت مهاجم می‌شود.

حل

این سیستم تحت تسلط رفتار در مرز غشاست و بنابراین به سراغ معادله (۲۴-۵.۶) می‌رویم که برای آب و نمک‌های  $S$  یا  $M^+X^-$  نوشته شده است؛ داریم:

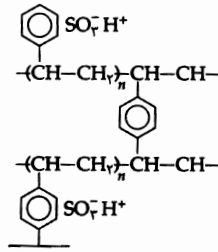
$$\ln \frac{a_{We}}{a_{WM}} = \frac{\bar{V}_W}{RT} (p_M - p_e) = \frac{\bar{V}_W}{RT} (\pi_M - \pi_e) = \frac{\bar{V}_W}{RT} \Delta\pi \quad (27-5.24)$$

16. H. Stathmann, "Electrodialysis" Section V in *Membrane Handbook* (W. W. S. Ho and K. K. Sirkar, eds.), van Nostrand Reinhold, New York (1992).





غشا



ساختار مولکولی

شکل ۲۴-۳۵ غشای تبادل یون مبتنی بر سولفونیک اسید.

که در آن اندیس‌های  $e$  و  $M$ ، به ترتیب، به محلول خارجی و غشا اشاره می‌کنند. چون غلظت الکترولیت درون غشایی همواره از غلظت الکترولیت خارجی بالاتر است، بنابراین فعالیت شیمیایی آب در داخل غشا پایین‌تر خواهد بود و فشار در داخل غشا، از فشار در محلول خارجی بالاتر است (مثلاً نگاه کنید به مسئله ۲۴.ب.۴). از معادله متناظر برای نمک  $S$  نتیجه می‌شود:

$$\left( \frac{a_{Se}}{a_{SM}} \right) = \frac{x_{M+e} x_{X-e}}{x_{M+M} x_{X-M}} \left( \frac{\gamma_{Se}}{\gamma_{SM}} \right)^{\nu} = \exp \left( \frac{\bar{V}_S}{RT} \Delta \pi \right) \quad (28-5.24)$$

یا

$$\frac{c_{M+e} c_{X-e}}{c_{M+M} c_{X-M}} = K \left( \frac{\gamma_{SM}}{\gamma_{Se}} \frac{c_e}{c_M} \right)^{\nu} \exp \left( \frac{\bar{V}_S}{RT} \Delta \pi \right) \quad (29-5.24)$$

نتیجه می‌شود که:

$$c_{SM}^{\nu} + c_{SM} c_{X-M} = \frac{1}{K} c_{Se}^{\nu} \quad (30-5.24)$$

و بنابراین غلظت نمک در فاز غشا کم‌تر از غلظت آن در محلول است ( $K$  برای یون‌های یک‌ظرفیتی از مرتبه واحد است). این سرکوبی الکترولیت مهاجم توسط بارهای ثابت را طرد دوتان می‌نامند (نگاه کنید به مسئله ۲۴.ب.۳). غلبه یون‌های مخالف، در این جا  $M^+$  در داخل غشا، آن‌ها را به طرف نفوذ به خارج و رفتن به محلول خارجی سوق می‌دهد، در حالی که یون‌های موافق، در این جا  $X^-$ ، گرایش به نفوذ به داخل غشا دارند. نتیجه این پدیده ایجاد اختلاف پتانسیل الکتریکی بین غشا و محلول خارجی است. با چشم‌پوشی از آثار اسمزی و برابر واحد فرض کردن ضرایب فعالیت، می‌توان این اختلاف را چنین تخمین زد:

$$\phi_M - \phi_e = \left( \frac{RT}{z_{M+} F} \right) \left( \ln \frac{x_{M+M}}{x_{M+e}} \right) \quad (31-5.24)$$

معادله‌های (۲۴-۵.۲۷ تا ۳۰) در مورد روابط بین محلول‌های واقع در دو طرف غشایی که در یک طرف حاوی ماده حل‌شده طردشده به‌طور جزئی باشد، و در این صورت متناظر با فاز غشا در مثال بالا تلقی می‌شود، نیز قابل‌کاربردند. از معادله (۲۴-۵.۳۱) غالباً در مواردی استفاده می‌شود که در مورد آثار نادیده‌گرفته‌شده، اطلاعاتی در دست نباشد. زیست‌شناسان برای تشریح منشأ پتانسیل‌هایی که همواره روی غشاهای زیستی مشاهده می‌شوند، به‌طور گسترده‌ای از معادله (۲۴-۵.۳۱) استفاده می‌کنند. اما روش‌هایی که غشاهای زیستی با استفاده از آن‌ها گزینندگی

تحت کنترل یون را ایجاد می‌کند، بسیار بفرنج است و هنوز در آغاز راه درک آن‌ها هستیم.<sup>۱۷</sup>

## ۶.۲۴ نفوذ در محیط‌های متخلخل

محیط‌های متخلخل در بسیاری از کاربردهای انتقال جرم اهمیت دارند که به بعضی از آن‌ها، از قبیل کاتالیز کردن<sup>۱</sup> در این کتاب اشاره کردیم (بخش ۷.۱۸)؛ این محیط‌ها ریخت‌شناسی‌های بسیار متنوعی دارند.<sup>۲</sup> فرایندهای جذب سطحی، مانند کروماتوگرافی، معمولاً در بسترهای دانه‌ای انجام می‌شوند و خود ذرات غالباً جامدهایی متخلخل‌اند. بازیابی ثانوی نفت خام معمولاً شامل انتقال جرم در سنگ متخلخل است و روش خشک کردن انجمادی یا حلال دوست‌سازی مواد غذایی و دارویی<sup>۳</sup> به انتقال بخار آب از لایه‌ای متخلخل از مواد جامد خشک‌شده وابسته است. این نوع فرایندهای انتقال در حوزه وسیع فناوری ذرات<sup>۴</sup> رخ می‌دهند و به طوری که در بخش ۵.۲۴ نشان داده شد، بعضی از غشاها را می‌توان ساختارهای ریزمتخلخل در نظر گرفت. ساختارهای ریزمتخلخل در موجودات زنده به وفور یافت می‌شوند و سهم مهمی در توزیع آب و مواد حل‌شده دارند.<sup>۵</sup> بحث دربارهٔ جامدات متخلخل ما را کاملاً به عقب، و به بحث انتقال اندازه حرکت برمی‌گرداند که کتاب خود را با آن شروع کردیم. بسیاری از مدل‌هایی که برای توصیف انتقال جرم در محیط‌های متخلخل به‌کار می‌روند، منشأ هیدرودینامیکی دارند و گاه مفاهیم انتقال جرم و انتقال اندازه حرکت دستخوش ابهام می‌شوند.

پیش‌بینی انتقال مایعات و گازها در محیط‌های متخلخل کاری دشوار است و به تلاش زیادی نیاز دارد و هنوز هیچ نظریهٔ کاملاً متقاعدکننده‌ای در این زمینه پی‌ریزی نشده است. انتقال جرم در محیطی متخلخل از طریق مکانیسم‌های مختلفی انجام می‌شود: (۱) نفوذ معمولی، که با معادله‌های ماکسول-استفان توصیف شد؛ (۲) نفوذ کنوسن؛ (۳) جریان ویسکوز طبق معادلهٔ هیگن-پوئازوی؛ (۴) نفوذ سطحی، یعنی خزش مولکول‌های جذب سطحی شده در طول سطوح حفره‌ها؛ (۴) تعریق گرمایی، که نظیر گرمایی لغزش ویسکوز است؛ و (۶) نفوذ گرمایی. در این بحث، سه مورد از این مکانیسم‌ها را نادیده می‌گیریم.

17. B. Hill, *Ionic Channels of Excitable Membranes*, Sinauer Associates, Sunderland, Mass. (1992); F. M. Ashcroft, *Ion Channels and Disease: Channelopathies*, Academic Press, New York (1999); D. J. Aidley, *The Physiology of Excitable Cells*, Cambridge University Press (1998).

1. (a) R. Aris, *The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts*, Vols. 1 and 2 Oxford University Press (1975); (b) O. Levenspiel, *Chemical Reaction Engineering*, 3rd edition, Wiley, New York (1999).

2. M. Sahimi, *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock*, Verlagsgesellschaft, Weinheim, Germany (1995); V. Stanek, *Fixed Bed Operations*, Ellis Horwood, Chichester, England (1994).

3. F. E. Curry, R. H. Adamson, Bing-Mei Fu, and S. Weinbaum, *Bioengineering Conference* (Sun River, Oregon), ASME, New York (1997).

4. (a) L. Rey and J. C. May, *Freeze-Drying/Lyophilization of Pharmaceutical and Biological Products in Drugs and the Pharmaceutical Sciences* (J. Swarbrick, ed.), Marcel Dekker, New York (1999); (b) P. Sheehan and A. I. Liabis, *Biotech, and Bioeng.*, **60**, 712-728 (1998).

5. M. Rhodes, *Introduction to Particle Technology*, Wiley, New York (1998).

6. J. Hoogchagen, *J. Chem. Phys.*, **21**, 2096 (1953), *Ind. Eng. Chem.*, **47**, 906-913 (1955); D. S. Scott and F. A. L. Dullien, *AIChE Journal*, **10**, 132-133 (1964); R. D. Gunn and C. J. King, *AIChE Journal*, **15**, 507-514 (1969); C. Feng and W. E. Stewart, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **12**, 143-147 (1973); C. F. Feng, V. V. Kostrov, and W. E. Stewart, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **13**, 5-9 (1974).

پژوهش‌گران بسیاری برای حل این مسئله تلاش کرده‌اند<sup>۶</sup> و بسیاری دیگر به جمع‌بندی آن پرداخته‌اند.<sup>۷</sup> در این جا نتایج اصلی تحقیقات آن‌ها را ارائه می‌دهیم. مدل‌های موجود بر مبنای مجراهای استوانه‌ای یا مجموعه‌هایی از ذرات کروی ساخته شده‌اند و ما به مرور چند نمونه از آن‌ها می‌پردازیم. هم‌چنین بحث خود را به دو وضعیت حدی داخل حفره‌ها و زمینه جامد، محدود می‌کنیم:

۱. جریان مولکول آزاد گازها، که در آن قطرهای مولکولی کوچک‌اند و مسافت‌های آزاد میانگین، نسبت به ابعاد مشخصه حفره‌ها کوتاه‌اند. تحت چنین شرایطی، برهم‌کنش در خوراعتنايي بين گونه‌های درون حفره‌ای وجود ندارد.

۲. جریان پیوستاری گازها یا مایعات، که در آن هم قطر و هم فاصله بین مولکول‌های درون حفره‌ای، در مقایسه با ابعاد حفره، کوچک است. در این جا سیال درون حفره‌ای را می‌توان با نظریه تعمیم‌یافته هیدرودینامیک<sup>۸</sup> توصیف، و از معادلات تعمیم‌یافته ماکسول-استفان برای نفوذ چندجزئی استفاده کرد.

پدیده‌هایی نیز برای انتقال گاز مطرح است که به پدیده‌های جریان لغزشی موسوم‌اند و در آن‌ها مسافت‌های آزاد میانگین با ابعاد حفره‌ها قابل مقایسه‌اند،<sup>۹</sup> اما شرح آن‌ها از حیطه کار ما بیرون است.

### انتقال مولکول آزاد

انتقال گازهای رقیق شده نمونه‌ای از جریان کنوسن است که قبلاً در مسئله ۲ب، ۹ مطرح شد. فرمول کنوسن برای لوله موئین طولی به شعاع  $a$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$N_A = -\frac{\lambda a}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi M_A R T}} \frac{dp_A}{dz} = -\frac{\lambda a}{3} \sqrt{\frac{RT}{2\pi M_A}} \frac{dc_A}{dz} \quad (۱-۶.۲۴)$$

در رابطه بالا  $p_A$  فشار جزئی گونه  $A$  در مخلوط است. توجه داشته باشید که معادله (۱-۶.۲۴) حاکی از آن است که انتقال هرگونه، تحت این شرایط حدی، از حضورگونه‌های دیگر تأثیر نمی‌پذیرد. بنابراین آهنگ جریان مولی کل  $W_A$  در لوله، با مکعب شعاع لوله و با عکس ریشه دوم وزن مولکولی متناسب است. این وابستگی به وزن مولکولی را قانون گراهام می‌نامند.

معادله (۱-۶.۲۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$N_A = -D_{AK} \frac{dc_A}{dz} \quad (۲-۶.۲۴)$$

که «ضریب نفوذ کنوسن»،  $D_{AK}$  را توصیف می‌کند. اما این عامل را باید ضریب نفوذ دوتایی گونه  $A$  نسبت به محیط متخلخل در نظر گرفت که با قانون فیک سازگاری ندارد، زیرا شار مولی حاوی جمله همرفتی نیست. در نتیجه  $D_{AK}$  خاصیت حالت نیست که حاوی شعاع  $a$  لوله باشد. برای به حساب آوردن ماهیت چنبره‌ای مجرا در محیط

7. E. A. Mason, R. B. Evans, III *J. Chem. Ed.*, **46**, 358-364 (1969); R. B. Evans III, L. D. Love, and E. A. Mason, *J. Chem. Ed.*, **46**, 423-427 (1969); R. Jackson, *Transport in Porous Catalysts*, Elsevier, Amsterdam (1977); R. E. Cunningham and R. J. J. Williams, *Diffusion in Gases and Porous Media*, Plenum Press, New York (1980);

در فصل ۶ کتاب اخیر، خلاصه‌ای از تاریخچه نفوذ ارائه شده است.

8. E. N. Lightfoot, J. B. Bassingthwaite, and E. F. Grabowski, *Ann. Biomed. Eng.*, **4**, 78-90 (1976).

9. R. Jackson, *Transport in Porous Catalysts*, Elsevier, Amsterdam (1977); R. E. Cunningham and R. J. J. Williams, *Diffusion in Gases and Porous Media*, Plenum Press, New York (1980).

متخلخل و سطح مقطع محدود موجود برای جریان، عبارت شار را باید بازم اصلاح کرد و چنین نوشت:

$$\langle N_A \rangle = -D_{AK}^{\text{eff}} \frac{dc_A}{dz} \quad (۳-۶.۲۴)$$

که در آن:

$$D_{AK}^{\text{eff}} = (\varepsilon/\tau) D_{AK} \quad (۴-۶.۲۴)$$

و  $\langle N_A \rangle$  شار مولی مبتنی بر سطح مقطع کل محیط متخلخل است. در این عبارت،  $\varepsilon$  کسر فضای خالی در محیط متخلخل، و  $\tau$  ضریب چنبری بودن حفره‌هاست. اگرچه برای تخمین زدن اندازه  $\tau$  مدل‌هایی وجود دارد، الف<sup>۱۰</sup> معمولاً باید آن را به روش تجربی تعیین کرد.<sup>۱۱</sup>

می‌توان به‌منزله جایگزینی برای معادله (۴-۶.۲۴) برای ضریب نفوذ مؤثر کنوسن، ذرات را به‌صورت مجموعه‌ای از کرات با تحرک زیاد (یا «مولکول‌های غول‌پیکر گاز») در نظر گرفت و نظریه سینتیکی چاپمن-انسکوگ را به‌کار برد.<sup>۱۲</sup> مسئله ۲۴.ب.۶ نشان می‌دهد که با استفاده از این رهیافت پیش‌بینی‌هایی بسیار شبیه به پیش‌بینی‌های معادله (۴-۶.۲۴) ممکن می‌شود. عدم حساسیت به مدل در این مورد چشم‌گیر است.

### مثال ۱-۶.۲۴

نفوذ کنوسن

دو مخزن بزرگ که کاملاً هم‌زده می‌شوند، هریک به‌حجم  $V$ ، با مجرای کوتاهی به‌سطح مقطع  $S$  و طول  $L$ ، مطابق شکل ۱-۶.۲۴، با جامدی متخلخل پر می‌شوند. ابتدا مخزن ۱ با هیدروژن در فشار یکنواخت  $p_0$  پر می‌شود و مخزن ۲ را با نیتروژن، بازم در فشار  $p_0$  پر می‌کنند. دمای کل سیستم را ثابت نگه می‌دارند. در زمان  $t = 0$ ، شیر کوچکی در مجرا باز می‌شود و دو مخزن می‌توانند به‌حالت تعادل با یکدیگر برسند. عبارتی برای بیان فشار کل در هر مخزن، به‌صورت تابعی از زمان پیدا کنید، فرض کنید که جریان هر گاز در مجرای رابط از معادله (۱-۶.۲۴) پیروی می‌کند و قانون گاز ایده‌آل در سرتاسر سیستم صادق است.

حل

کار خود را با فرض رفتار حالت‌پایا در مجرا آغاز می‌کنیم به‌طوری‌که، برای هر گاز، آهنگ انتقال از مخزن ۱ به مخزن ۲، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$W_A = \frac{(\lambda/3)(\varepsilon/\tau)aS}{L\sqrt{2\pi M_A RT}} (p_{A1} - p_{A2}) \equiv K_A (p_{A1} - p_{A2}) \quad (۵-۶.۲۴)$$

که در آن  $W_A$  آهنگ مولی جریان گونه  $A$  (نیتروژن یا هیدروژن) و  $a$  شعاع مؤثر حفره‌ها در تویی بین دو مخزن است. اکنون موازنه ماکروسکوپی جرم را برای مخزن ۲ می‌نویسیم و داریم:

$$V \frac{dc_{A2}}{dt} = \frac{V}{RT} \frac{dp_{A2}}{dt} = K_A (p_{A1} - p_{A2}) \quad (۶-۶.۲۴)$$

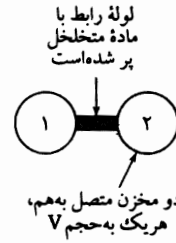
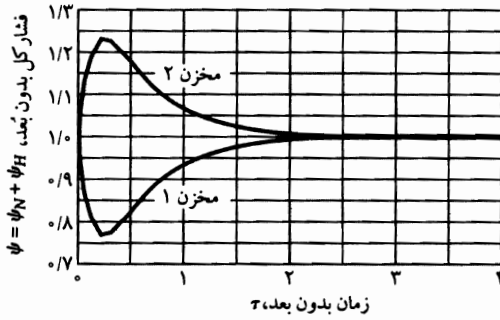
یا

$$\frac{dp_{A2}}{dt} = \left( K_A \frac{RT}{V} \right) (p_{A1} - p_{A2}) \quad (۷-۶.۲۴)$$

10. W. E. Stewart and M. F. L. Johnson, *J. Catalysis*, **4**, 248-252 (1965).

11. J. B. Butt, *Reaction Kinetics and Reactor Design*, 2nd edition, Marcel Dekker, New York (1999), p. 500, Table 7. 4.

12. R. B. Evans III, G. M. Watson, and E. A. Mason, *J. Chem. Phys.*, **35**, 2076-2083 (1961).



شکل ۱۶-۲۴ جریان کتون.

از موازنه جرم روی کل سیستم، نتیجه می‌شود:

$$p_{A1} + p_{A2} = p_0 \quad (۸-۶-۲۴)$$

شرایط اولیه، همان شرایط در زمان  $t = 0$  هستند:

$$p_{H1} = p_0 \quad p_{N1} = 0 \quad p_{H2} = 0 \quad p_{N2} = p_0 \quad (۹-۶-۲۴)$$

این شرایط اولیه توصیف رفتار سیستم را تکمیل می‌کند، و مشاهده می‌کنیم که توزیع‌های دو گاز از یکدیگر مستقل‌اند. در مورد نیتروژن می‌توان متغیرهای بدون بُعد  $\psi_N = p_N/p_0$  و  $\psi_H = (RTK_N/V)t$  را تعریف کرد. سپس می‌توان معادله (۷-۶-۲۴) را برای نیتروژن در مخزن ۲ نوشت:

$$\frac{d\psi_{N2}}{d\tau} = 1 - 2\psi_{N2} \quad (۱۰-۶-۲۴)$$

که شرط اولیه آن  $\psi_{N2}(0) = 1$  است. بنابراین جواب این مسئله چنین است:

$$\psi_{N2} = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\tau}) \quad \psi_{N1} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\tau}) \quad (۱۱-۶-۲۴)$$

در مورد هیدروژن به این نکته توجه می‌کنیم که  $K_H = \sqrt{28/2}K_N \approx 3.74K_N$ . بنابراین معادله دیفرانسیل مربوط به هیدروژن چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d\psi_{H2}}{d\tau} = 3.74(1 - 2\psi_{H2}) \quad (۱۲-۶-۲۴)$$

و شرط اولیه آن  $\psi_{H2}(0) = 0$  است. جواب این معادله به شرح زیر است:

$$\psi_{H2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-7.48\tau}) \quad \psi_{H1} = \frac{1}{2}(1 + e^{-7.48\tau}) \quad (۱۳-۶-۲۴)$$

نتایج برای  $\psi_{N1} + \psi_{H1}$  و  $\psi_{N2} + \psi_{H2}$  در شکل ۱۶-۲۴ ترسیم شده‌است.

نسبت  $N_A/N_B = -\sqrt{M_B/M_A}$  شارهای مولی به دست آمده در این جا، نخستین بار توسط گراهام<sup>۱۳</sup> در

13. T. Graham, *Phil. Mag.*, 2, 175, 269, 351 (1833).

توماس گراهام (۱۸۰۵-۱۸۶۹)، پسر یک کارخانه‌دار ثروتمند بود و از سال ۱۸۱۹ تا ۱۸۲۶ در دانشگاه گلاسکو به تحصیل پرداخت؛ در سال ۱۸۳۷، صاحب کرسی استادی شیمی در کالج یونیورسیتی لندن شد و در سال ۱۸۳۴ به عضویت انجمن سلطنتی درآمد، و در همان سال به ریاست ضرابخانه منصوب شد.

۱۸۳۳ مشاهده شد و در سال ۱۹۵۳ هوخ‌شاگن<sup>۶</sup> آن را دوباره کشف کرد. اگرچه در این‌جا این رابطه را برای جریان کنوسن به‌دست آوردیم، برای نفوذ هم‌فشار در خارج از ناحیه کنوسن نیز معتبر است. چندین پژوهش‌گر آن را از نظریه سینتیکی به‌دست آوردند و با آزمایش در لوله‌ها و محیط‌های متخلخل<sup>۱۴،۱۳،۷،۶</sup> درستی آن را تا نسبت‌های بسیار بزرگ عرض مجرا به مسافت آزاد میانگین، تأیید کردند. در جدول ۱-۶.۲۴ دو دسته از داده‌های تأییدشده نشان داده شده‌اند. در هر دو آزمایش،<sup>۱۳،۱۴</sup> از دستگاهی شبیه به آن‌چه در شکل ۱-۶.۲۴ دیده می‌شود، استفاده شد و گازهای مختلفی را در مقابل هوا آزمودند. نسبت‌های شار  $N_{\text{هو}}/N_{\text{گاز}}$  مقادیر ابتدایی مربوط به زمانی بودند که هر مخزن فقط حاوی هوا، یا گاز موردآزمایش بود.

جدول ۱-۶.۲۴ تأیید تجربی قانون گراهام.

گاز	$N_{\text{هو}}/N_{\text{گاز}}$	
	گراهام	میسون و کرانشتات
$H_2$	۳٫۸۳	
He		$۲٫۶۶ \pm ۰٫۰۱$
$CH_4$	۱٫۳۴۴	$۱٫۳۳ \pm ۰٫۰۱$
$C_2H_2$	۱٫۰۱۹۱	
CO	۱٫۰۱۴۹	
$N_2$	۱٫۰۱۴۳	$۱٫۰۲ \pm ۰٫۰۱$
$O_2$	۰٫۹۴۸۷	$۰٫۹۶۰ \pm ۰٫۰۰۵$
$H_2S$	۰٫۹۵	
Ar		$۰٫۸۵۵ \pm ۰٫۰۱۱$
$N_2O$	۰٫۸۲	
$CO_2$	۰٫۸۱۲	
$SO_2$	۰٫۶۸	

### انتقال پیوستاری

تا امروز مدل‌سازی مکانیک سیالاتی انتقال درون‌حفره‌ای به محلول‌های دوتایی محدود بوده‌است که در آن‌ها مولکول‌های سازنده فرعی (ماده حل‌شده) در مقایسه با مولکول‌های حلال بزرگ‌اند. مدل‌های این وضعیت بر نظریه نفوذ هیدرودینامیکی تعمیم‌یافته به ساختارهای متخلخل مبتنی است.<sup>۸</sup> توصیف‌ها با حل معادلات جریان خزشی برای حرکت کره‌ها (معرف ماده حل‌شده) در پیوستار (معرف حلال) در مجراهای بسته به‌دست می‌آیند.<sup>۱۵</sup> آثار مهم شامل طرد جزئی ماده حل‌شده در مدخل مجرا و برهم‌کنش گزینشی با جدار مجراست. نتایجی که تا امروز به‌دست آمده، به مواد حل‌شده تنها مربوط‌اند، اما با پیشرفت سریع فنون محاسباتی،<sup>۱۶</sup> تعمیم به سیستم‌های پیچیده‌تر نیز امکان‌پذیر می‌شود. از محاسبات نفوذ هیدرودینامیکی می‌توان برای غشاهای ریزمتخلخل استفاده کرد، اما این کار فقط در صورتی ممکن است که نیروهای بین‌مولکولی درخور اعتنایی بین مواد حل‌شده و جدارهای حفره وجود نداشته‌باشد.

14. E. A. Mason and B. Kronstadt, IMP-ARO(D)-12, University of Maryland, Institute for Molecular Physics, March 20, 1967.

15. Z. -Y Yan, S. Weinbaum, and R. Pfeffer, *J. Fluid Mech.*, **162**, 415-438 (1986).

16. S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*, Butterworth-Heinemann, Boston (1991).

مدل‌سازی جریان ویسکوز در این سیستم‌ها را قبلاً در بخش ۴.۶ شرح دادیم و معمول این است که چنین جریانی را، به‌ازای عددهای رینولدز کوچک که در این‌جا بیش‌تر مورد توجه است، با عبارت بلیک-کوزنی (معادله ۴.۶-۱۹)) توصیف کنند. [اما به رودز (فصل ۵)، سهیمی (فصل ۶)، و استانک (فصل ۳) نگاه کنید]:

$$v_0 = - \frac{D_p^*}{150 \mu} \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon)^2} \frac{dP}{dz} \quad (14-6.24)$$

در رابطه بالا  $v_0$  سرعت جرمی سطحی متوسط است. با توجه به بحث بخش ۲.۱۹، سرعت مورد استفاده در این‌جا سرعت جرمی متوسط سیال در ماده متخلخل است.

برای توصیف‌های ماکروسکوپی، می‌توان از معادلات تعمیم‌یافته ماکسول-استفان (معادله ۴.۶-۲۴)) استفاده کرد و ما در این‌جا خود را به جریان ناشی از غلظت و جریان ناشی از فشار محدود می‌کنیم. به‌علاوه، وقتی گونه‌های متحرک نسبت به ابعاد حفره کوچک باشند، شرایط مرزی به پیوستگی غلظت و فشار گونه در فصل مشترک بین سیال خارجی و «درون حفره‌ای» ساده می‌شود.

### مثال ۶.۲۴

انتقال از محلول خارجی دوتایی

معادله‌های ماکسول-استفان را برای نفوذ یک محلول رقیق دوتایی، از گونه حل‌شده درشت  $A$  در حلال  $B$ ، از طریق محیط درشت متخلخل  $M$ ، یعنی زمینه‌ای با حفره‌های درشت در مقایسه با قطر هر دو گونه متحرک، اما به اندازه کافی کوچک، به طوری که گرادیان غلظت جانبی در هر حفره قابل چشم‌پوشی باشد، ساده کنید.

حل

کار را با تعیین رابطه جریان فشاری شروع می‌کنیم و به این نکته توجه می‌کنیم که دو راه برای انجام این کار وجود دارد: معادله بلیک-کوزنی (معادله ۴.۶-۱۴))، و نتیجه مبتنی بر نفوذ (معادله ۴.۶-۲۰)) از بخش قبل.

برای سرعت‌های بالا در ماده متخلخل و حفره‌های درشت نسبت به ابعاد مولکولی، این سرعت متوسط جرمی است که باید با گرادیان فشار متناسب باشد و می‌توان فرض کرد که معادله بلیک-کوزنی حاکم بر جریان است. کار را با بازنویسی معادله ۴.۶-۱۴) به صورت:

$$\left( \frac{150 \mu (1 - \varepsilon)^2}{D_p^* \varepsilon^2} \right) (\omega_A v_A + \omega_B v_B) = - \frac{dp}{dz} \quad (15-6.24)$$

و معادله ۴.۶-۲۰) به صورت:

$$cRT \left( \frac{x_A v_A}{D'_{AM}} + \frac{x_B v_B}{D'_{BM}} \right) = - \frac{dp}{dz} \quad (16-6.24)$$

آغاز می‌کنیم. با برابر گرفتن ضرایب  $v_B$  و  $v_A$  در این دو معادله، به ترتیب، توصیف‌های  $D'_{BM}$  و  $D'_{AM}$  نتیجه می‌شود. اگر حفره‌ها نسبت به ابعاد مولکولی کوچک باشند و سرعت متوسط جرمی در مقایسه با سرعت‌های نفوذ  $v - v_\alpha$  بزرگ نباشد، با ناحیه‌ای از جریان سروکار داریم که بررسی چندانی روی آن انجام نشده است و باید به آزمایش یا مدل‌های مولکولی مناسب متوسل شد.<sup>۱۷</sup>

برای تعیین آهنگ انتقال ماده حل‌شده، به سراغ معادله ۴.۶-۲۵) می‌رویم و به این نکته توجه می‌کنیم که ضرایب نفوذ در آن بخش شامل عامل  $\varepsilon/\tau$  بودند. اما اگر ابعاد حفره در مقایسه با قطرهای مؤثر مولکول‌های حل‌شده

17. Z. -Y. Yan, S. Weinbaum, and R. Pfeffer, *J. Fluid Mech.*, **162**, 415-438 (1986).

و حلال خیلی بزرگ باشد، نسبت  $\mathcal{D}_{AB}/\mathcal{D}'_{AM}$  بسیار کوچک خواهد بود. بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\mathbf{N}_{Ax_B} - \mathbf{N}_{Bx_A} = -c(\varepsilon/\tau)\mathcal{D}_{AB}^{\text{ext}}\nabla x_A \quad (۱۷-۶.۲۴)$$

که در آن:

$$\mathcal{D}_{AB}^{\text{ext}} = \mathcal{D}_{AB}^{\text{ext}} \left( 1 + \frac{\partial \ln \gamma_A}{\partial \ln x_A} \right)_{T,p} \quad (۱۸-۶.۲۴)$$

که در آن اندیس ext به شرایط در محلول خارجی با همان ترکیب شیمیایی سیال داخل حفره اشاره دارد. حال معادله (۱۷-۶.۲۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbf{N}_A = -c(\varepsilon/\tau)\mathcal{D}_{AB}^{\text{ext}}\nabla x_A + x_A(\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) \quad (۱۹-۶.۲۴)$$

که قانون اول فیک است که برای کسر حفره و چنبری بودن حفره‌ها اصلاح شده است. این معادله کاربرد گسترده‌ای دارد. درست همانند سیال‌های نامحدود، نمی‌توان جریان خالص، یا افت فشار را، صرفاً براساس ملاحظات مربوط به نفوذ به دست آورد. به نسبت شار، یا هم‌ارز شار هم‌نیاز است. مثالی مشخص، خشکاندن انجمادی است که در آن بخار آب باید در ناحیه متخلخلی از جامد خشک نفوذ کند و گازهای بی‌اثر را می‌توان ساکن فرض کرد. این ناحیه از این لحاظ نیز درخور توجه است که شرایط آن می‌تواند با نفوذ پیوستاری ساده مثل همین‌جا، تا ناحیه جریان لغزشی، و تا ناحیه کنوسن تغییر کند.

یادآوری می‌کنیم که معادله (۱۹-۶.۲۴) و معادله‌های منتهی به آن، صرفاً معرف اثر مستقیم نفوذ مولکولی‌اند. در هنگام استفاده از معادله همرفت متوسط‌گیری شده حجمی، باید پراکنش همرفتی ناشی از اختلاط بین‌ذره‌ای و انحراف‌های موضعی از جریان راست‌خط را نیز اضافه کرد (نگاه کنید به بخش ۵.۲۰، بات بخش ۵-۲.۵، و لونسپیل بخش ۲.۱۳).

### پرسش‌های تشریحی

۱. ترمودینامیک تعادل را چگونه باید تکمیل کرد تا بتوان به بررسی سیستم‌های غیرتعادلی، مانند سیستم‌های شامل گرادیان سرعت، دما، و غلظت پرداخت؟
۲. کدام ضرایب جدید در مخلوط‌های چندجزئی پدیدار می‌شوند و این ضرایب چه چیز را توصیف می‌کنند؟
۳. این فصل تا چه میزان می‌تواند منشأ معادله (۳-۳.۱۹) را توضیح دهد؟ آیا این معادله کاملاً صحیح است؟
۴. آیا معادله (۶-۱.۲۴) به راستی نقطه شروع اشتقاق عبارت‌های کامل برای شارهاست؟ منشأ آن را تشریح کنید.
۵. ضریب نفوذ گرمایی، نسبت نفوذ گرمایی، و ضریب سوره را تعریف کنید. آیا علامت آن‌ها را می‌توان از قبل پیش‌بینی کرد؟
۶. چگونه می‌توان با شروع از معادله (۸-۲.۲۴)، معادله (۱-۹.۱۷) را به دست آورد؟ چه محدودیت‌هایی باید برای معادله (۱-۹.۱۷) قائل شد؟
۷. نیروی رانش مناسب برای نفوذ کدام است: گرادیان غلظت، گرادیان فعالیت، یا کمیتی دیگر؟
۸. ستون کلاوسوس-دیکل برای جداسازی ایزوتوپ را تشریح کنید.
۹. برای توصیف عملیات حالت‌پایای یک دستگاه فراگریزمرکز، به دانستن هیچ‌یک از خواص انتقال نیازی نیست. آیا این موضوع عجیب به نظر نمی‌رسد؟
۱۰. برای توصیف نفوذ در محیط‌های متخلخل، کدام پدیده‌های فیزیکی را باید درک کرد؟



مسئله‌ها

۱. الف ۲۴ نفوذ گرمایی.

(الف) جداسازی حالت پایای  $H_2$  و  $D_2$  را که در دستگاه نفوذ گرمایی نشان داده شده در شکل ۲۴-۱، تحت شرایط زیر رخ می‌دهد، تخمین بزنید:  $T_1$  برابر  $K$  ۲۰۰،  $T_2$  برابر  $K$  ۶۰۰، کسر مولی دوتریم ابتدا  $0.10$  و  $k_T$  متوسط مؤثر  $0.166$  است.

(ب) این  $k_T$  متوسط در چه دمایی باید تعیین شده باشد؟

جواب‌ها: (الف) کسر مولی  $H_2$  به‌اندازه  $0.183$  در حباب داغ بالاتر است: (ب)  $K$  ۳۳۰.

۲. الف ۲۴ جداسازی پروتئین‌ها به‌روش فراگریزمرکز. توزیع غلظت حالت پایا را، وقتی یک محلول آلبومین در معرض میدان گریزمرکزی  $50000$  برابر نیروی گرانش زمین قرار می‌گیرد، تحت شرایط زیر تخمین بزنید:

طول سلول  $1.0 \text{ cm}$

وزن مولکولی آلبومین  $45000$

چگالی ظاهری آلبومین در محلول  $M_A/\bar{V}_A = 1.34 \text{ g/cm}^3$

کسر مولی آلبومین (در  $z = 0$ )،  $x_{A_0} = 5 \times 10^{-6}$

چگالی ظاهری آب در محلول  $1.00 \text{ g/cm}^3$

دما  $75^\circ\text{F}$

جواب:  $x_A = 5 \times 10^{-6} \exp(-22.7z)$ ، که  $z$  برحسب  $\text{cm}$  است.

۳. الف ۲۴ ضرایب نفوذ یونی. رسانایی‌های یونی معادل حدی (یعنی در غلظت صفر)، با ابعاد  $\text{cm}^2/\text{ohm} \cdot \text{g-equiv}$  برای یون‌های زیر در  $25^\circ\text{C}$  عبارت‌اند از:  $\text{Na}^+$ ،  $50/10$ ؛  $\text{K}^+$ ،  $73/5$ ؛  $\text{Cl}^-$ ،  $35/76$ . مطلوب است محاسبه ضرایب نفوذ یونی متناظر با استفاده از تعریف:

$$D_{iw} = \frac{RT \lambda_i}{F^2 |z_i|} \quad (1-3. الف 24)$$

توجه کنید که  $F = 96500 \text{ coulombs/g-equiv}$ ،  $RT/F = 25.692 \text{ mv}$  در  $25^\circ\text{C}$ ، و  $1 \text{ ampere} \cdot \text{s} = 1 \text{ coulomb}$ .

۱. ب ۲۴ ابعاد نیروی لورنتس. نشان دهید که نیروی لورنتس وارد بر باری که در یک میدان مغناطیسی حرکت می‌کند، با جمله اول اضافه‌شده به  $d_\alpha$  خطی معادله (۴-۲۴) متناظر است و مجموعه‌ای سازگار از واحدها را برای این کمیت ارائه می‌دهد. پیشنهاد: توجه کنید که  $cRT d_\alpha$  معرف نیروی محرک برای حرکت نفوذ گونه  $\alpha$  در واحد حجم است و ابعاد متداول القای مغناطیسی عبارت‌اند از:  $1$  ویر  $= 1$  نیوتون‌ثانیه بر کولن‌متر.

۲. ب ۲۴ پتانسیل‌های پیوند. دو مخزن کاملاً مخلوط‌شده از نمک آبی با دمای  $25^\circ\text{C}$  را، مانند شکل ۲۴-۲، در نظر بگیرید که توسط ناحیه‌ای ساکن از هم جدا شده‌اند. غلظت نمک در سمت چپ (۱) برابر  $1.0 \text{ N}$  و در سمت راست (۲) برابر  $0.1 \text{ N}$  است. با استفاده از ضرایب نفوذ مسئله ۳. الف ۲۴، پتانسیل‌های پیوند را برای  $\text{NaCl}$  و  $\text{KCl}$  تخمین بزنید. ضرایب فعالیت یون را ثابت فرض کنید. کدام مخزن مثبت‌تر خواهد بود؟ چرا؟

I. R. A. Robinson and R. H. Stokes, *Electrolyte Solutions*, revised edition, Butterworths, London (1965), Table 6.1.

۲۴.ب۳. طرد دونان. غشای سولفونیک اسیدی که اسکاترگود<sup>۲</sup> از آن استفاده کرد، پس از فرو رفتن در محلول ۰/۱ N NaCl ترکیب داخلی تعادلی زیر را داشت:

$$c_{X^-} = ۱/۰۳ \text{ g-equiv/liter} \text{ سولفونیک اسید}$$

$$c_w = ۱۳/۲ \text{ g-equiv/liter} \text{ آب}$$

$$c_{Cl^-} = ۰/۰۰۱ \text{ g-equiv/liter} \text{ یون کلرید}$$

$$c_{Na^+} = ۱/۰۳۱ \text{ g-equiv/liter} \text{ یون سدیم}$$

مطلوب است محاسبه ثابت تعادل برای توزیع سدیم کلرید:

$$K = \frac{(x_{Na^+} + x_{Cl^-})_{\text{خارجی}}}{(x_{Na^+} + x_{Cl^-})_{\text{غشا}}} \quad (۱-۳.۲۴)$$

توجه داشته باشید که غلظت آب در محلول خارجی در حدود ۵۵/۵ g-mol/liter است.  
جواب: ۰/۶۴.

۲۴.ب۴. فشار اسمزی. آب معمولی دریا، حاوی ۳/۴۵٪ وزنی نمک‌های محلول، فشار بخاری به اندازه ۱/۸۴٪ پایین‌تر از فشار بخار آب خالص دارد. حداقل فشار ممکن لازم برای عبور از غشا را، برای تولید آب خالص در دمای محیط تخمین بزنید، هرگاه غشای گزینشی ایده‌آل باشد.  
جواب: در حدود ۲۵ atm.

۲۴.ب۵. تراوایی یک غشای صاف‌سازی گزینشی کامل. عبارتی برای بیان تراوایی هیدرولیکی غشای گزینشی کامل توصیف‌شده در مثال ۸-۲۲، برحسب پارامترهای نفوذی معرفی شده در بخش ۵-۲۴ به دست آورید.  
جواب:  $K_H = D'_{wm}/RT\delta$ ، که در آن  $\delta$  ضخامت غشاست.

۲۴.ب۶. عدم حساسیت مدل‌های نفوذ کنوسن برای جریان در لوله‌ها و بستری‌های دانه‌ای. در مدل‌سازی محیطی متخلخل به صورت شبکه‌ای موازی از مجراها، باید هم ماهیت چنبری ( $\tau$ ) سیستم‌های واقعی را در نظر گرفت و هم محدودیت انتقال ناشی از کسر  $\varepsilon$  مقطع که برای جریان در دسترس است. در این صورت معادله (۱-۶.۲۴) را باید به صورت زیر اصلاح کرد:

$$N_A = -\frac{\lambda \varepsilon a}{3 \tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi M_A RT}} \nabla p_A \quad (۱-۶.۲۴)$$

رهیافت جایگزین، در نظر گرفتن فرایند انتقال به صورت نفوذ گونه  $A$  در مجموعه‌ای غیرمتحرک از مولکول‌های غول‌آساست<sup>۳</sup> (این ذرات محیط متخلخل را در برمی‌گیرند). از این مدل عبارت زیر نتیجه می‌شود:

$$N_A = -\frac{\pi}{\gamma} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda} \pi} \right) \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{\varepsilon a}{\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi M_A RT}} \nabla p_A \quad (۲-۶.۲۴)$$

این دو معادله را، به‌ازای  $\varepsilon = ۰/۶$  مقایسه کنید.

2. E. M. Scattergood and E. N. Lightfoot, *Trans. Faraday Soc.*, **64**, 1135-1146 (1968).  
3. R. B. Evans, III, G. M. Watson, and E. A. Mason, *J. Chem. Phys.*, **35**, 2076-2083 (1961).

۱.ج۲۴ عبارتهایی برای شار جرم.

(الف) نحوه تبدیل سمت چپ معادله (۸-۲.۲۴) به سمت چپ معادله (۹-۲.۲۴) را نشان دهید. ابتدا معادله اول را به صورت زیر بازنویسی کنید:

$$\sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_\alpha x_\beta}{D_{\alpha\beta}} (\mathbf{v}_\gamma - \mathbf{v}_\beta) + x_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\gamma) \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_\beta}{D_{\alpha\beta}} \quad (1-۱.ج۲۴)$$

جمله دوم را به صورت جمع روی همه  $\beta$ ها بازنویسی کنید و سپس جمله‌ای اضافه کنید تا اصلاح ناشی از این جمع را جبران کند. توجه کنید که این تغییر جمله‌ای حاوی  $D_{\alpha\alpha}$  وارد علامت جمع کرده است که تعریف نشده بود، زیرا نیازی به آن نبود. حال آزادی  $D_{\alpha\alpha}$  را به هر روش دلخواه تعریف کنیم، و انتخاب ما چنین است:

$$\frac{x_\alpha}{D_{\alpha\alpha}} = - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_\beta}{D_{\alpha\beta}} \quad \text{یا} \quad \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{x_\beta}{D_{\alpha\beta}} = 0 \quad (۳.۲-۱.ج۲۴)$$

این انتخاب به ما امکان می‌دهد که سمت چپ معادله (۹-۲.۲۴) را به دست آوریم. درحقیقت، رابطه کمکی که بعد از معادله (۹-۲.۲۴) ارائه شد، همین معادله (۳-۱.ج۲۴) بالاست.

(ب) سپس با جایگزین کردن  $\mathbf{v}_\beta$  توسط  $[\mathbf{v}_\beta + (D_\beta^T / \rho_\beta) \nabla \ln T]$ ، و تحقیق در مورد درستی این نکته که هم جمله‌های نفوذ و هم جمله‌های نفوذ گرمایی معادله (۸-۲.۲۴) را می‌توان به جمله‌های متناظر در معادله (۹-۲.۲۴) تبدیل کرد، اشتقاق بالا را تکرار کنید.

۲.ج۲۴ گریز از مرکز تفاضلی. بر اثر انهدام (ترکیدن) سلول‌های ای. کلی سوسپانسیون رقیقی از اجسام درون بسته، مجموعه‌های سخت و انحلال‌ناپذیری از یک پروتئین مطلوب، سلول‌های رشد نیافته، و پروتئین‌های محلول ناخواسته، تولید شده است. در این مسئله، همه این‌ها را می‌توان به صورت کره‌هایی با خواصی به شرح زیر در نظر گرفت.

	سلول‌ها	اجسام درون بسته	پروتئین‌ها
	$1,89 \times 10^{-12}$ g	$2,32 \times 10^{-13}$ g	۵۰ کیلو دالتون
	جرم یا اکی‌والان		
	چگالی (g/ml)	۱,۳	۱,۳

آیا می‌توان با استفاده از روش گریز از مرکز این مواد را به طور مؤثر جدا کرد؟ توضیح دهید.

۳.ج۲۴ مشخصه‌های انتقال سدیم کلرید. در جدول زیر، رسانایی معادل، ضریب نفوذ، و ضرایب فعالیت ترمودینامیکی برای سدیم کلرید در  $25^\circ\text{C}$  ارائه شده است. دو عامل اخیر به صورت توابعی از مولاریته ( $M$ )، و سومی بر حسب مولالیه ( $m$ ) بیان شده‌اند. در این مسئله می‌توان فرض کرد که  $M/m = 1 - 0,19 m$ . رسانایی‌های یونی معادل حدی (یعنی، در رقت بی‌نهایت) برای  $\text{Na}^+$  و  $\text{Cl}^-$ ، به ترتیب، عبارت‌اند از:  $50,10$  و  $76,35$ . رسانایی معادل نمک، به نوبه خود، چنین تعریف می‌شود:

$$\Lambda_S = \lambda_{\text{Na}^+} + \lambda_{\text{Cl}^-} = K_{\text{sp}}/c_S \quad (1-۳.ج۲۴)$$

که در آن رسانایی خاص  $K_{\text{sp}} = L/AR$  و  $R$  مقاومت حجمی از محلول به طول  $L$  و سطح مقطع  $A$  است. با استفاده از این داده‌ها، حساسیت رفتار محلول به سه ضریب نفوذ  $D_{\text{Cl}^-,W}$ ،  $D_{\text{Na}^+,W}$  و  $D_{\text{Na}^+\text{Cl}^-}$  لازم برای توصیف این پاسخ به غلظت محلول را تشریح کنید.

مشخصه‌های الکتروشیمیایی محلول آبی NaCl در ۲۵°C.

غلظت مولار	رسانایی معادل (cm <sup>2</sup> /ohm-equiv)	ضریب نفوذ cm <sup>2</sup> /s × ۱۰ <sup>۵</sup>	غلظت مولال	ضریب فعالیت
۰	۱۲۶,۴۵	۱,۶۱	۰	۱
۰,۰۰۰۰۵۵	۱۲۴,۵۱			
۰,۰۰۰۱	۱۲۳,۷۴	۱,۵۸۵		
۰,۰۰۰۵	۱۲۰,۶۴			
۰,۰۰۱	۱۱۸,۵۳			
۰,۰۰۲	۱۱۵,۷۶			
۰,۰۰۵	۱۱۱,۰۶	۱,۵۰۷		
۰,۰۱	۱۰۶,۷۴	۱,۴۸۳	۰,۱	۰,۷۷۸
۰,۰۲	۱۰۱,۷۱	۱,۴۷۵	۰,۲	۰,۷۳۵
			۰,۳	۰,۷۱۰
			۰,۴	۰,۶۹۳
۰,۰۵	۹۳,۶۲	۱,۴۷۴	۰,۵	۰,۶۸۱
			۰,۶	۰,۶۷۳
			۰,۷	۰,۶۶۷
			۰,۸	۰,۶۵۹
			۰,۹	۰,۶۵۷
۱	۸۵,۷۶	۱,۴۸۴	۱,۰	۰,۶۵۷
			۱,۲	۰,۶۵۴
			۱,۴	۰,۶۵۵
۱,۵	۷۹,۸۶	۱,۴۹۵	۱,۶	۰,۶۵۷
			۱,۸	۰,۶۶۲
۲	۷۴,۷۱	۱,۵۱۶	۲,۰	۰,۶۶۸
			۲,۵	۰,۶۸۸
۳	۶۵,۵۷	۱,۵۶۳	۳,۰	۰,۷۱۴
			۳,۵	۰,۷۴۶
۴	۵۷,۲۳		۴,۰	۰,۷۸۳
			۴,۵	۰,۸۲۶
۵	۴۹,۴۶		۵,۰	۰,۸۷۴

۴.ج۲۴ انحراف از خنثایی الکتریکی. به پیروی از نیومن، انحراف از خنثایی الکتریکی در ناحیه ساکن بین مخزن‌های مسئله ۲۴.ب.۲ را به ترتیب زیر تخمین بزنید. ابتدا گرادیان میدان الکتریکی  $d^2\phi/dz^2$  را، که در آن  $z$  فاصله اندازه‌گیری شده از مخزن ۱ تا مخزن ۲ است، با فرض این‌که غلظت نمک برحسب g-moles/liter از رابطه:

$$c_s = 1 - 0.9 \frac{z}{L} \quad (۱-۴.ج۲۴)$$

به دست می‌آید که در آن  $L$  طول ناحیه ساکن است، محاسبه کنید. سپس نتیجه را در معادله پواسون قرار دهید:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{F}{\epsilon} \sum_{i=1}^N z_i c_i \quad (۲-۴.ج۲۴)$$

که در آن  $\varepsilon$  ثابت دی‌الکتریک است، و  $F/\varepsilon$  را می‌توان  $1,392 \times 10^{16}$  volt.cm/g-equiv گرفت (نگاه کنید به نیومن،<sup>۴</sup> صفحه‌های ۷۴ و ۲۵۶)، که با ثابت دی‌الکتریک نسبی  $78/303$  متناظر است. در این مسئله، جمع به  $(c_+ - c_-)$  خلاصه می‌شود.

۵.ج.۲۴ نیروهای رانش دی‌الکتروفورتیک. وقتی پتانسیل الکتریکی بین دو سر یک محیط بدون بار نارسانا برقرار شود، می‌توان نوشت:

$$(\nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E}) = 0 \quad (1-5.24)$$

که در آن  $\varepsilon$  ثابت دی‌الکتریک است.

نشان دهید که چگونه می‌توان از این معادله برای محاسبه توزیع میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  در ناحیه بین دو الکتروود فلزی استوانه‌ای هم‌محور، به ترتیب، با شعاع‌های خارجی  $R_1$  و  $R_2$  استفاده کرد. می‌توانید از تغییرات ثابت دی‌الکتریک چشم‌پوشی کنید. ذرات با پذیرفتاری مثبت به طرف کدام الکتروود مهاجرت خواهند کرد، و سرعت مهاجرت آن‌ها با مکان چگونه تغییر می‌کند؟

۶.ج.۲۴ آثار ذرات در محیط دی‌الکتریک. ایجاد حالت غیرخطی در میدان توسط ذرات موجود در محیط را می‌توان با در نظر گرفتن مورد حدی ذره‌ای تنها به شعاع  $R$  در میدانی که در غیر این صورت یکنواخت می‌بود، نمایش داد. توزیع میدان پتانسیل هم در محیط خارجی و هم در ذره با معادله لاپلاس  $\nabla^2 \phi = 0$ ، و شرط مرزی روی سطح کره تعریف می‌شود (در این جا اندیس‌های  $s$  و  $c$  به کره و پیوستار اشاره دارند).

$$\varepsilon_s (\delta_r \cdot \nabla \phi_s) = \varepsilon_c (\delta_r \cdot \nabla \phi_c) \quad (1-6.24)$$

عبارت‌هایی برای  $\phi_s$  و  $\phi_c$  به دست آورید، هرگاه به ازای مقادیر بزرگ  $r$  داشته باشیم  $\phi_c \rightarrow Ar \cos \theta$ .

۷.ج.۲۴ صاف‌سازی گزینشی واداشته ناشی از اصطکاک. رفتار دفع گلوکوز از غشای سلوفانی،<sup>۵</sup> را که دفع ترمودینامیکی از خود نشان نمی‌دهد، توصیف کنید. می‌توانید فرض کنید که کسر مولی گلوکوز در ورودی غشا  $0.1$  است و سایر خواص به شرح زیرند:

$$K_D = 1.0; \quad \bar{V}_g/\bar{V}_w = 4; \quad \mathcal{D}'_{wM}/\mathcal{D}'_{gM} = 1.0; \quad \mathcal{D}'_{wM}/\mathcal{D}'_{gw} = 2.5$$

در این جا اندیس‌های  $g$ ،  $w$ ، و  $M$ ، به ترتیب، به گلوکوز، آب، و زمینه غشا اشاره می‌کنند.

جواب جزئی: کسر مولی حدی جریان بالای قند در مایع عبور کرده از غشا  $0.234$  است.

۸.ج.۲۴ صاف‌سازی گزینشی واداشته ترمودینامیکی. رفتار غشای فرضی را که برای آن  $K_D = 0.1$ ، ضرایب فعالیت ماده حل شده برابر واحدند، و داریم  $\bar{V}_w/\bar{V}_s = \mathcal{D}'_{sM}/\mathcal{D}'_{wM}$  توصیف کنید.

جواب جزئی: کسر مولی حدی جریان بالای ماده حل شده در مایع عبور کرده از فیلتر  $0.1$  برابر مقدار آن در جریان ورودی است.

۹.ج.۲۴ انتقال تسهیل شده. انتقال ماده حل شده  $S$  از غشایی همگن را، از یک محلول خارجی به محلول خارجی دیگر،

4. J. S. Newman, *Electrochemical Systems*, 2nd edition, Prentice-Hall, New York (1991).

5. B. Z. Ginzburg and A. Katchalsky, *J. Gen. Physiol.*, **47**, 403-418 (1963).

6. T. G. Kaufmann and E. F. Leonard, *AIChE Journal*, **14**, 110-117 (1968).

به صورت کمپلکس  $CS$ ، که در آن حامل  $C$  نمی‌تواند فاز غشا را ترک کند، در نظر بگیرید. ماده حل شده  $S$  را می‌توان انحلال‌ناپذیر در غشا فرض کرد و همرفت را نادیده گرفت (نگاه کنید به شکل ۲۴ ج. ۹). فرض کنید:

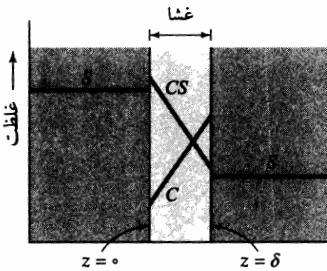
۱. تعادل در هر دو سطح غشا طبق رابطه:

$$c_{CS} = K_D c_C c_S \quad (۱-۹.۲۴)$$

برقرار است؛ در این رابطه غلظت  $S$ ، غلظت محلول خارجی است و غلظت‌های  $C$  و  $CS$  غلظت در غشایند.<sup>۷</sup>

۲.  $C$  و  $CS$ ، هر دو، تابع معادله آهنگ ساده  $N_i = D_{im} \Delta c_i$  هستند.

عبارتی کلی برای آهنگ انتقال  $S$  بر حسب مقدار کل حامل، به اضافه کمپلکس حامل موجود در غشا، غلظت محلول  $S$ ، کمیت  $K_D$ ، و ضرایب نفوذ به دست آورید. ماکزیم آهنگ انتقال  $S$  (یعنی وقتی غلظت در سمت چپ نمودار بسیار زیاد می‌شود و در سمت راست صفر است) چه قدر است؟



شکل ۹.۲۴ ج. ۹ انتقال تسهیل شده ابتدایی. توزیع‌های غلظت برای ماده حل شده ( $S$ )، حامل ( $C$ )، و کمپلکس ( $CS$ ).

۱.۵۲۴ شار آنتروپی و حاصل ضرب آنتروپی.

(الف) نشان دهید که معادله‌های (۳-۱.۲۴) و (۴) از معادله‌های (۱-۱.۲۴) و (۲) به دست می‌آیند.

(ب) نشان دهید که می‌توان از معادله‌های (۵-۴.۲۱) تا (۸) به عقب رفت و به معادله‌های (۳-۱.۲۴) و (۴) رسید. برای انجام این کار شاید لازم باشد صورتی از معادله گیبس-دوهم را به کار بگیرید:

$$\sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \nabla \left( \frac{1}{T} \frac{\bar{G}_{\alpha}}{M_{\alpha}} \right) - \frac{1}{T} \nabla p + \sum_{\alpha=1}^N \rho_{\alpha} \frac{\bar{H}_{\alpha}}{M_{\alpha}} \frac{1}{T^2} \nabla T = 0 \quad (۱-۱.۵۲۴)$$

۷. با وجود این، نگاه کنید به

## پس‌گفتار

مهم‌ترین پیامی که کوشیده‌ایم در این کتاب مفصل انتقال دهیم، تشخیص نقش کلیدی معادله‌های تغییر بود که در فصل‌های ۳، ۱۱، ۱۹ آن‌ها را به‌دست آوردیم. این معادله‌ها که در تراز پیوستاری میکروسکوپی نوشته شده‌اند، حلقه مهم بین حرکت‌های بسیار پیچیده مولکول‌های مجزا، و رفتار مشاهده‌شده از اغلب سیستم‌های مورد توجه در مهندسی‌اند. با استفاده از این معادله‌ها می‌توان توزیع‌های سرعت، فشار، دما، و غلظت، هم‌چنین شارهای اندازه‌حرکت، انرژی و جرم را، حتی در سیستم‌های پیچیده وابسته به‌زمان، تعیین کرد. این معادله‌ها در مورد سیستم‌های متلاطم قابل‌کاربردند، و حتی وقتی دستیابی به جواب‌های پیشینی کامل امکان‌پذیر نباشد، استفاده مؤثر از داده‌ها را، از طریق تحلیل ابعادی، ساده می‌کنند. با استفاده از صورت‌های انتگرال‌گیری‌شده معادله‌های تغییر، می‌توان موازنه‌های ماکروسکوپی را نوشت. اما هیچ کتاب مقدماتی نمی‌تواند پاسخگوی نیازهای همه خوانندگان باشد. بنابراین کوشیده‌ایم، شالوده‌ای محکم از موضوعات بنیادی لازم برای پرداختن به آن دسته از کاربردهای پدیده‌های انتقال را که هنوز پیش‌بینی نشده‌اند، به‌شیوه‌ای هوشمندانه فراهم کنیم. منابع بسیاری را نیز معرفی کرده‌ایم تا بتوان به اطلاعات بیش‌تری دست یافت. بعضی از این منابع حاوی داده‌های تخصصی‌اند یا فنون حل مسئله را معرفی می‌کنند. بعضی دیگر نحوه استفاده از تحلیل انتقال، برای طراحی تجهیزات و فرایندها را نشان می‌دهند.

بنابراین روی مثال‌های نسبتاً ساده‌ای تمرکز کردیم تا مشخصه‌های معادله‌های تغییر، و انواع پرسش‌هایی را که این معادله‌ها قادر به پاسخگویی آن‌ها هستند، نشان دهیم. اقدام به این کار مستلزم چشم‌پوشی از فنون عددی بسیار کارآمد برای حل مسئله‌های دشوار بوده‌است. خوش‌بختانه اکنون تک‌نگاری‌های بسیاری در زمینه فنون عددی و برنامه‌های بسته‌ای کمابیش کلی، در دسترس است. برنامه‌های گرافیکی نیز در دسترس‌اند که ارائه داده‌ها و شبیه‌سازی‌ها را بسیار ساده می‌کنند. این نکته را نیز باید در نظر داشت که پیشرفت‌های شگرفی در نظریه مولکولی پدیده‌های انتقال، از فنون بهتر برای پیش‌بینی خواص انتقال گرفته، تا تدوین مطالب نو، حاصل شده‌است. فنون شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و دینامیک براونی، نشان داده‌اند که برای درک سیستم‌های مختلفی از قبیل گازهای با چگالی بسیار پایین، فیلم‌های نازک، حفره‌های کوچک، فصل‌مشترک‌ها، کلئیدها، و مایعات پلیمری، بسیار کارآمدند.

مدل‌های ساده انتقال تلاطمی را نیز در کتاب گنجانده‌ایم، اما این مدل‌ها صرفاً وسیله آشنایی مقدماتی با حوزه‌ای وسیع و مهم به‌شمار می‌روند. فنون بسیار بفرنجی برای حوزه‌های تخصصی ابداع شده‌است که از آن میان می‌توان به پیش‌بینی نیروها و گشتاورهای وارد بر هواپیما، فرایندهای اجتراق در موتور اتومبیل‌ها، و عملکرد مخلوط‌کن‌های سیال اشاره کرد. امید می‌رود که خواننده علاقه‌مند به این بحث صرفاً مقدماتی اکتفا نکند.

در مقابل، بحث پدیده‌های لایه مرزی را بسیار گسترش داده‌ایم، زیرا امروزه اهمیت و توانمندی آن در بسیاری از کاربردها شناخته شده‌است. فنون لایه مرزی، که زمانی عمدتاً قلمرو فعالیت متخصصان آئرو‌دینامیک بود، اکنون در بسیاری از حوزه‌های انتقال گرما و جرم، هم‌چنین مکانیک سیالات، کاربرد یافته‌است. کاربردهای این فنون، در حوزه‌های متنوعی از قبیل کاتالیز کردن، فرایندهای جداسازی، و زیست‌شناسی، به‌وفور مشاهده می‌شود.

رفتار غیرنیوتونی اهمیتی به‌سزا و روزافزون دارد و در تهیه و کاربرد فیلم‌ها، روانکارها، چسب‌ها، سوسپانسیون‌ها، و امولسیون‌ها با آن سروکار پیدا می‌کنیم. مثال‌های زیست‌شناختی آن اهمیت فرآیندهای دارند و از عمل مفاصل تا مواد لیز پساگاه روی بدن جانوران دریایی، و تا مسئله بسیار پایه‌ای گوارش مواد غذایی را شامل می‌شوند.

شنیدن موسیقی یا برقراری ارتباط کلامی، بدون وجود جریان تراکم‌پذیر، ممکن نبود؛ حوزه‌ای که به‌علت کمبود جا از آن چشم پوشیدیم. جریان تراکم‌پذیر در طراحی هواپیما، وسایل نقلیه‌ای که در برنامه‌های فضایی برای بازگشت و ورود مجدد به جو زمین طراحی می‌شوند، و در پیش‌بینی پدیده‌های هواشناسی اهمیت فراوانی دارد. قدرت مهیب

و مخرب گردباد یکی از نمونه‌های چالش‌برانگیز است.

چند مسئله پدیده‌های انتقال در سیستم‌های دارای واکنش شیمیایی ارائه داده‌ایم. برای ساده شدن کار، صورت‌های ایده‌آل‌سازی شده عبارت‌های سینتیک شیمیایی را در نظر گرفته‌ایم. برای مسئله‌های مطرح شده در زمینه احتراق، انتشار شعله، و پدیده‌های انفجار به توصیف‌های واقعی‌تری از سینتیک نیاز خواهد بود. همین نکته در مورد سیستم‌های زیست‌شناختی نیز صادق است و درک کارکردهای بدن انسان مستلزم توصیف‌های بسیار مفصل‌تر از برهم‌کنش‌های بین سینتیک شیمیایی، کاتالیز، نفوذ، و تلاطم است.

از لحاظ اصولی، همه ما نیروی داخلی خود را از هم‌ارز بسیار نزدیک پیل سوختی کسب می‌کنیم و جریان در بدن ما توسط کاتیون‌ها، به‌ویژه پروتون‌ها، انتقال می‌یابد نه از طریق الکترون‌ها. در وسایل میکروالکترونیکی که امروزه در همه جا مشاهده می‌شوند، کامپیوترها و تلفن‌های همراه، پدیده‌های انتقال الکتریکی پیچیده‌ای رخ می‌دهند. بحثی بسیار مقدماتی درباره انتقال الکترون را مطرح کرده‌ایم، اما بازهم خواننده را تشویق می‌کنیم که به منابع تخصصی‌تر رجوع کند. صرفاً از طریق حوزه‌های علمی توصیفی، مانند پدیده‌های انتقال، یا ترمودینامیک، هیچ پروژه مهندسی را نمی‌توان در ذهن پروراند، چه رسد به این‌که بتوان آن را تکمیل یا اجرا کرد. مهندسی، در نهایت، برای تکمیل دانش ناقص، به روش‌های اکتشافی نیاز دارد. اما پدیده‌های انتقال، با مطرح کردن تقریب‌های سودمند، که از تخمین‌های مرتبه بزرگی آغاز می‌شوند و به تقریب‌های دقیق‌تر، از قبیل تقریب‌های حاصل از نظریه لایه مرزی می‌رسند، کمک به‌سزایی به مهندسی می‌کند. بنابراین بسیار مهم است، شاید در دوباره خوانی این کتاب، که با بررسی رفتار عددی سیستم‌های مدل ما، به جستجوی توصیف‌های غیرحساس به شکل و مدل پردازید.

ار. بایرن برد

وارن ای. استوارت

ادوین ان. لایت فوت



## پیوست الف

### نمادگذاری برداری و تانسوری<sup>۱</sup>

- الف. ۱. عملیات برداری از دیدگاه هندسی
- الف. ۲. عملیات برداری برحسب مؤلفه‌ها
- الف. ۳. عملیات تانسوری برحسب مؤلفه‌ها
- الف. ۴. عملیات دیفرانسیلی برداری و تانسوری
- الف. ۵. قضیه‌های انتگرال برداری و تانسوری
- الف. ۶. جبر برداری و تانسوری در مختصات خمیده خطی
- الف. ۷. عملیات دیفرانسیلی در مختصات خمیده خطی
- الف. ۸. عملیات انتگرالی در مختصات خمیده خطی
- الف. ۹. نکته‌هایی دیگر در مورد نمادگذاری برداری-تانسوری

کمیت‌های فیزیکی که در پدیده‌های انتقال با آن‌ها سروکار پیدا می‌کنیم به سه دسته تقسیم می‌شوند: اسکالرها مانند دما، فشار، حجم، و زمان؛ بردارها مانند سرعت، اندازه حرکت، و نیرو؛ و تانسورها (ی مرتبه دوم)، مانند تانسورهای تنش، شار اندازه حرکت، و گرادیان سرعت. این کمیت‌ها را با نمادهای زیر ازشم متمایز می‌کنیم:

$$s = \text{اسکالر (حروف ایتالیک نازک)}$$

$$\mathbf{v} = \text{بردار (حروف غیرایتالیک سیاه)}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \text{تانسور مرتبه دوم (حروف یونانی سیاه)}$$

به علاوه نمادهای یونانی سیاه با یک اندیس (مانند  $\delta_i$ ) بردار محسوب می‌شوند.

بردارها و تانسورها چندین نوع ضرب دارند. در بعضی از این ضرب‌ها به علامت خاصی برای عمل ضرب نیاز است که بعداً آن‌ها را تعریف می‌کنیم: نقطه ساده (.)، دو نقطه (:)، و ضرب در ( $\times$ ). این نوع ضرب‌ها، یا جمع آن‌ها

۱. این پیوست به پیوست (الف) در کتاب زیر شباهت فراوان دارد:

R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol. 1, Fluid Mechanics*, 2nd edition, Wiley-Interscience, New York (1987).

در بخش ۸ آن کتاب، مختصات غیرقائم شرح داده شده است. به علاوه در جدول الف. ۷-۴، خلاصه‌ای از عملگرهای دل برای مختصات دوقطبی آمده است.

را بین انواع مختلف علامت قرار می‌دهیم تا نوع نتیجه حاصل را نشان دهیم:

$$\begin{aligned} (\ ) &= \text{اسکالر} \\ [ \ ] &= \text{بردار} \\ \{ \} &= \text{تانسور مرتبهٔ دوم} \end{aligned}$$

اگر عمل بین این علامت‌ها فقط جمع و تفریق، یا ضرب فاقد (.)، (:)، و (×) باشد، نوع علامت مفهوم خاصی ندارد. بنابراین  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$  و  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  اسکالرند،  $[\nabla \times \mathbf{v}]$  و  $[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]$  بردارند، و  $\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}$  و  $\{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\sigma}\}$  تانسورهای مرتبهٔ دوم‌اند. از طرف دیگر،  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  را می‌توان به صورت  $(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ ،  $[\mathbf{v} - \mathbf{w}]$ ، یا  $\{\mathbf{v} - \mathbf{w}\}$  نوشت، زیرا نقطه یا ضرب در آن‌ها ظاهر نمی‌شود. به همین ترتیب  $\mathbf{vw}$ ،  $(\mathbf{vw})$ ،  $[\mathbf{vw}]$ ، و  $\{\mathbf{vw}\}$  همگی هم‌ارزند. در عمل اسکالرها را می‌توان به منزلهٔ تانسورهای مرتبهٔ صفر و بردارها را به منزلهٔ تانسورهای مرتبهٔ اول تلقی کرد. علامت‌های ضرب را می‌توان به ترتیب زیر تفسیر کرد:

علامت ضرب	مرتبهٔ نتیجه
	$\sum$
$\times$	$\sum - 1$
$\cdot$	$\sum - 2$
:	$\sum - 4$

در جدول بالا  $\sum$  معرف مجموع مرتبه‌های کمیت‌هایی است که در هم ضرب می‌شوند. مثلاً  $st$  از مرتبهٔ  $2 + 2 = 0$ ،  $\mathbf{vw}$  از مرتبهٔ  $2 + 1 = 1$ ،  $\delta_1 \delta_2$  از مرتبهٔ  $2 + 1 = 1$ ،  $[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]$  از مرتبهٔ  $1 + 1 = 1$ ،  $(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau})$  از مرتبهٔ  $0 = 2 + 2 - 4$ ، و  $\{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\}$  از مرتبهٔ  $2 = 2 - 2 = 2$  است.

در این جا لزومی نمی‌بینیم که به شرح عملیات پایه‌ای برداریم که می‌توان روی کمیت‌های اسکالر انجام داد. اما می‌توان از قوانین جبر اسکالرها برای نشان دادن سه جمله‌ای که در بحث بعدی روی عملیات برداری پدیدار می‌شوند، استفاده کرد: (الف) برای ضرب کردن دو اسکالر  $s$  و  $r$ ، ترتیب انجام عمل ضرب مهم نیست، بنابراین قانون تعویض‌پذیری معتبر است:  $rs = sr$ .

(ب) برای ضرب متوالی سه اسکالر  $q$ ،  $r$ ، و  $s$ ، ترتیب انجام عمل ضرب مهم نیست، بنابراین قانون شرکت‌پذیری معتبر است:  $(qr)s = q(rs)$ .

(ج) برای ضرب اسکالر  $s$  در مجموعی از اسکالرهایی  $p$ ،  $q$ ، و  $r$ ، مهم نیست که ابتدا عمل جمع انجام شود یا عمل ضرب، بنابراین قانون توزیع‌پذیری معتبر است:  $s(p + q + r) = sp + sq + sr$ .

این قوانین به صورت عام برای عملیات نظیر برداری و تانسوری که در ادامهٔ مطلب شرح داده می‌شوند، اعتبار ندارند.

### الف. عملیات برداری از دیدگاه هندسی

در درس‌های فیزیک مقدماتی، از دیدگاه هندسی با بردارها آشنا شده‌اید. در این بخش این رهیافت را تعمیم می‌دهیم تا عملیات ضرب برداری (یا خارجی) را نیز شامل شود. در بخش الف.۲ تحلیلی موازی را ارائه خواهیم داد.

#### تعریف بردار و اندازهٔ آن

بردار  $\mathbf{v}$  را به صورت کمیتی تعریف می‌کنند که اندازه و راستای مفروضی دارد. اندازهٔ بردار را با  $|\mathbf{v}|$  یا با نماد متناظر،

اما با حروف نازک  $v$  نشان می‌دهند. دو بردار  $v$  و  $w$  مساوی‌اند، هرگاه اندازه‌های آن‌ها مساوی باشد و هر دو در یک راستا باشند؛ نیازی نیست که بردارها هم‌خط باشند یا مبدأ مشترکی داشته‌باشند. اگر  $v$  و  $w$  اندازه مساوی، اما راستاهای مخالف داشته‌باشند، در این صورت  $v = -w$ .

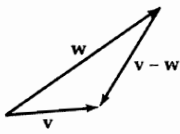
### جمع و تفریق بردارها

دو بردار را می‌توان با ترسیم متوازی‌الاضلاع، مطابق شکل الف. ۱-۱ (الف)، باهم جمع کرد. جمع برداری تابع قوانین زیر است:

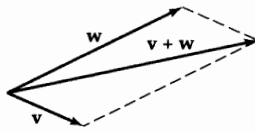
$$(v + w) = (w + v) \quad \text{(الف. ۱-۱) تعویض‌پذیری:}$$

$$(v + w) + u = v + (w + u) \quad \text{(الف. ۱-۲) شرکت‌پذیری:}$$

تفریق برداری با معکوس کردن علامت یک بردار و سپس انجام عمل جمع انجام می‌شود؛ بنابراین  $v - w = v + (-w)$ . ترسیم هندسی این عمل در شکل الف. ۱-۱ (ب) نشان داده شده‌است.



(ب)



(الف)

شکل الف. ۱-۱ (الف) جمع بردارها؛ (ب) تفریق بردارها.

### ضرب بردار در اسکالر

وقتی برداری در یک اسکالر ضرب می‌شود، اندازه بردار تغییر می‌کند، اما راستای آن تغییر نمی‌کند. در این مورد قوانین زیر حاکم‌اند:

$$sv = vs \quad \text{(الف. ۱-۳) تعویض‌پذیری:}$$

$$r(sv) = (rs)v \quad \text{(الف. ۱-۴) شرکت‌پذیری:}$$

$$(q + r + s)v = qv + rv + sv \quad \text{(الف. ۱-۵) توزیع‌پذیری:}$$

### ضرب اسکالر (یا نقطه‌ای) دو بردار

حاصل ضرب اسکالر دو بردار  $v$  و  $w$  کمیتی اسکالر است که چنین تعریف می‌شود:

$$(v \cdot w) = vw \cos \phi_{vw} \quad \text{(الف. ۱-۶)}$$

در رابطه بالا  $\phi_{vw}$  زاویه بین بردارهای  $v$  و  $w$  است. بنابراین حاصل ضرب اسکالر عبارت است از: اندازه  $w$  ضرب در تصویر  $v$  روی  $w$ ، یا برعکس (شکل الف. ۱-۲ (الف)). توجه کنید که ضرب اسکالر یک بردار در خودش، صرفاً مجذور اندازه آن بردار است:

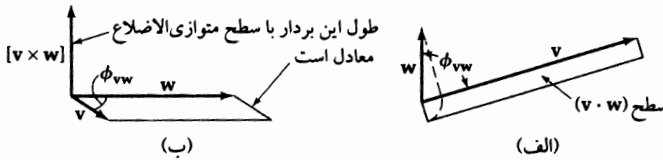
$$(v \cdot v) = |v|^2 = v^2 \quad \text{(الف. ۱-۷)}$$

قوانین حاکم بر ضرب‌های اسکالر عبارت‌اند از:

$$(u \cdot v) = (v \cdot u) \quad \text{(الف. ۱-۸) تعویض‌پذیری:}$$

$$(u \cdot v)w \neq u(v \cdot w) \quad \text{(الف. ۱-۹) غیرشرکت‌پذیری:}$$

(الف.۱-۱۰) توزیع پذیری:  $(\mathbf{u} \cdot \{\mathbf{v} \times \mathbf{w}\}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$



شکل الف.۱-۲ ضرب دو بردار: (الف) ضرب اسکالر؛ (ب) ضرب برداری.

### ضرب برداری (خارجی) دو بردار

حاصل ضرب برداری دو بردار  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  برداری با تعریف زیر است:

(الف.۱-۱۱)  $[\mathbf{v} \times \mathbf{w}] = \{vw \sin \phi_{vw}\} \mathbf{n}_{vw}$

که در آن  $\mathbf{n}_{vw}$  برداری به طول واحد (موسوم به «بردار یکه»)، عمود بر هر دو بردار  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  است و جهت آن در جهتی است که پیچ راست گرد حرکت خواهد کرد، اگر به اندازه زاویه  $\phi_{vw}$  از  $\mathbf{v}$  به طرف  $\mathbf{w}$  پیچانده شود. ضرب برداری را در شکل الف.۱-۲(ب) نشان داده ایم. اندازه حاصل ضرب برداری با مساحت متوازی الاضلاع ترسیم شده با بردارهای  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  برابر است. از تعریف ضرب برداری نتیجه می شود که:

(الف.۱-۱۲)  $[\mathbf{v} \times \mathbf{v}] = 0$

به جمع بندی قوانین حاکم بر عملیات ضرب برداری، به شرح زیر، توجه کنید:

(الف.۱-۱۳) تعویض ناپذیری:  $[\mathbf{v} \times \mathbf{w}] = -[\mathbf{w} \times \mathbf{v}]$

(الف.۱-۱۴) شرکت ناپذیری:  $[\mathbf{u} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]] \neq [[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \times \mathbf{w}]$

(الف.۱-۱۵) توزیع پذیری:  $[\{\mathbf{u} + \mathbf{v}\} \times \mathbf{w}] = [\mathbf{u} \times \mathbf{w}] + [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]$

### ضرب چندگانه بردارها

ضرب چندگانه بردارهای حاصل از ترکیب چندین فرایند ضربی که قبلاً توصیف شد، از همه پیچیده تر است:

(الف)  $rsv$

(ب)  $s(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

(ج)  $s[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]$

(د)  $(\mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}])$

(ه)  $[\mathbf{u} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]]$

(و)  $[[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \cdot [\mathbf{w} \times \mathbf{z}]]$

(ز)  $[[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \times [\mathbf{w} \times \mathbf{z}]]$

تفسیرهای هندسی سه ضرب نخست ساده و سرراست است. به آسانی می توان نشان داد که اندازه  $(\mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}])$  برابر با حجم متوازی السطوحی است که اضلاع آن را بردارهای  $\mathbf{u}$ ،  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  تشکیل می دهند.

تمرین

۱. «مرتبه» کمیت‌های زیر را تعیین کنید:  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ ،  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ ،  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ ،  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ ،  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ .
۲. شکلی ترسیم کنید و نامعادله (الف. ۱-۹) را نشان دهید. آیا هیچ حالت خاصی وجود دارد که به‌ازای آن تبدیل به معادله شود؟
۳. جهت‌گیری سطحی مسطح به مساحت  $S$  با بردار یکه  $\mathbf{n}$  نشان داده می‌شود که به طرف پایین سطح است. سیالی با چگالی  $\rho$ ، با سرعت  $\mathbf{v}$  از این سطح عبور می‌کند. نشان دهید که آهنگ جریان جرمی در این سطح برابر است با:  $w = \rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})S$ .
۴. سرعت زاویه‌ای  $\mathbf{W}$  یک جسم صلب چرخان برداری است که اندازه آن آهنگ جابه‌جایی زاویه‌ای (رادیان بر ثانیه) و راستای آن راستای پیشروی پیچی راست‌گرد است، هرگاه در همان جهت پیچانده شود. بردار مکان  $\mathbf{r}$  هر نقطه برداری است که از مبدأ مختصات تا آن نقطه ترسیم شود. نشان دهید که سرعت هر نقطه در جسم صلب چرخان، نسبت به مبدأ مختصات واقع روی محور چرخش، برابر است با:  $\mathbf{v} = [\mathbf{W} \times \mathbf{r}]$ .
۵. نیروی ثابت  $\mathbf{F}$  بر جسمی وارد می‌شود که با سرعت  $\mathbf{v}$  در حرکت است، که لزوماً با  $\mathbf{F}$  هم‌خط نیست. نشان دهید که آهنگ انجام کار توسط  $\mathbf{F}$  روی این جسم برابر است با:  $W = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})$ .

الف. ۲. عملیات برداری برحسب مؤلفه‌ها

در این بخش برای هریک از موضوعاتی که در بخش الف. ۱. به صورت هندسی مطرح شدند، یک روش تحلیلی موازی ارائه می‌شود. در بحث حاضر خود را به دستگاه مختصات قائم محدود می‌کنیم و محورهای ۱، ۲، و ۳ را متناظر با نمادگذاری معمول  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  نام‌گذاری می‌کنیم؛ فقط از مختصات راست‌گرد استفاده می‌کنیم. فرمول‌های بسیاری را می‌توان به صورت فشرده، برحسب دلتای کرونگر  $\delta_{ij}$  و نماد جایگشت  $\varepsilon_{ijk}$  بیان کرد. این کمیت‌ها چنین تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = +1, & \text{اگر } i = j \\ \delta_{ij} = 0, & \text{اگر } i \neq j \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(الف. ۱-۲)} \\ \text{(الف. ۲-۲)} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{ijk} = +1, & \text{اگر } ijk = ۱۲۳, ۲۳۱, \text{ یا } ۳۱۲ \\ \varepsilon_{ijk} = -1, & \text{اگر } ijk = ۳۲۱, ۱۳۲, \text{ یا } ۲۱۳ \\ \varepsilon_{ijk} = 0, & \text{اگر دو اندیس مانند هم باشند} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(الف. ۳-۲)} \\ \text{(الف. ۴-۲)} \\ \text{(الف. ۵-۲)} \end{matrix}$$

توجه کنید که هم‌چنین،  $\varepsilon_{ijk} = (1/2)(i-j)(j-k)(k-i)$ .

چندین رابطه شامل این کمیت‌ها، برای اثبات بعضی از اتحادهای برداری و تانسوری سودمندند:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{hjk} = 2\delta_{ih} \quad \text{(الف. ۶-۲)}$$

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \quad \text{(الف. ۷-۲)}$$

توجه کنید که هر دترمینان  $3 \times 3$  را می‌توان برحسب  $\varepsilon_{ijk}$  نوشت:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \quad (\text{الف-۲.۸})$$

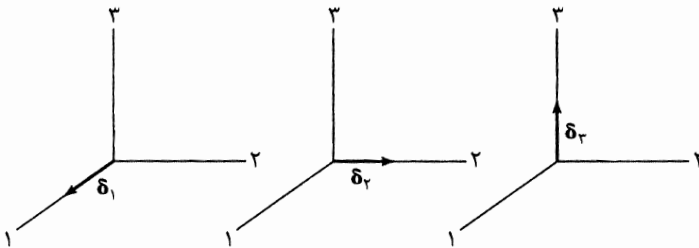
به این ترتیب کمیت  $\varepsilon_{ijk}$  جمله‌های لازمی را که در دترمینان ظاهر می‌شوند، انتخاب می‌کند و علامت مقتضی را به آن‌ها می‌دهد.

### بردارهای یکه

فرض کنید  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  «بردارهای یکه» (یعنی بردارهایی با اندازه واحد) در راستای محورهای ۱، ۲، ۳ باشند<sup>۱</sup> (شکل الف. ۲-۱). می‌توان از تعریف‌های ضرب اسکالر و ضرب برداری برای جدول‌بندی همه ضرب‌های ممکن از هر نوع استفاده کرد.

$$\begin{cases} (\delta_1 \cdot \delta_1) = (\delta_2 \cdot \delta_2) = (\delta_3 \cdot \delta_3) = 1 & (\text{الف-۲.۹}) \\ (\delta_1 \cdot \delta_2) = (\delta_2 \cdot \delta_3) = (\delta_3 \cdot \delta_1) = 0 & (\text{الف-۲.۱۰}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\delta_1 \times \delta_1] = [\delta_2 \times \delta_2] = [\delta_3 \times \delta_3] = 0 & (\text{الف-۲.۱۱}) \\ [\delta_1 \times \delta_2] = \delta_3; [\delta_2 \times \delta_3] = \delta_1; [\delta_3 \times \delta_1] = \delta_2 & (\text{الف-۲.۱۲}) \\ [\delta_2 \times \delta_1] = -\delta_3; [\delta_3 \times \delta_2] = -\delta_1; [\delta_1 \times \delta_3] = -\delta_2 & (\text{الف-۲.۱۳}) \end{cases}$$



شکل الف. ۲-۱ بردارهای یکه  $\delta_i$ : هر بردار اندازه واحد دارد و در جهت  $i$  است.

همه این روابط را می‌توان به صورت دو رابطه زیر خلاصه کرد:

$$(\delta_i \cdot \delta_j) = \delta_{ij} \quad (\text{الف-۲.۱۴})$$

$$[\delta_i \times \delta_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \delta_k \quad (\text{الف-۲.۱۵})$$

که در آن  $\delta_i$  دلتای کرونکر، و  $\varepsilon_{ijk}$  نماد جایگشت است که در ابتدای همین بخش تعریف شد. این دو رابطه به ما امکان می‌دهند که عبارت‌های تحلیلی برای همه ضرب‌های نقطه‌ای و برداری متداول به دست بیاوریم. در بقیه این

۱. در اغلب کتاب‌های مقدماتی، بردارهای یکه را  $i, j, k$  می‌نامند. ما از  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  استفاده می‌کنیم زیرا مؤلفه‌های این بردارها با دلتای کرونکر نشان داده می‌شوند. یعنی مؤلفه  $\delta_1$  در راستای ۱،  $\delta_{11}$  یا واحد است؛ مؤلفه  $\delta_1$  در راستای ۲، عبارت است از  $\delta_{12}$  یا صفر.

بخش و بخش بعد، در پی‌ریزی عبارتهایی برای عملیات برداری و تانسوری، تنها کاری که می‌کنیم تجزیه همه بردارها به مؤلفه‌های آن‌ها، و سپس کاربرد معادله‌های (الف. ۲-۱۴ و ۱۵) است.

### بسط بردار برحسب مؤلفه‌های آن

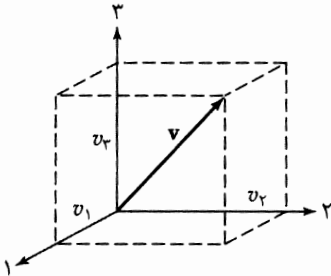
هر بردار  $\mathbf{v}$  را می‌توان، با مقدار تصاویر  $v_1, v_2, v_3$  آن روی محورهای مختصات ۱، ۲، ۳ به‌طور کامل مشخص کرد (شکل الف. ۲-۲). این بردار را می‌توان با جمع برداری مؤلفه‌های آن، ضرب در بردارهای یک‌ه متناظر، به‌دست آورد:

$$\mathbf{v} = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \delta_3 v_3 = \sum_{i=1}^3 \delta_i v_i \quad (\text{الف. ۲-۱۶})$$

توجه کنید که هر بردار با یک اسکالر در هر راستای مختصات همراه است.  $v_i$  ها را «مؤلفه‌های بردار  $\mathbf{v}$ » می‌نامند و اسکالرنند، اما  $\delta_i v_i$  ها بردارند و می‌توان آن‌ها را جمع برداری کرد و  $\mathbf{v}$  را به‌دست آورد. اندازه بردار از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\sum_i v_i^2} \quad (\text{الف. ۲-۱۷})$$

دو بردار  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  برابرند، هرگاه مؤلفه‌های آن‌ها برابر باشند:  $v_1 = w_1, v_2 = w_2, v_3 = w_3$ . هم‌چنین  $\mathbf{v} = -\mathbf{w}$  هرگاه  $v_1 = -w_1$  و غیره.



شکل الف. ۲-۲. مؤلفه‌های  $v_i$  بردار  $\mathbf{v}$  تصویرهای این بردار روی محورهای مختصات ۱، ۲، ۳ است.

### جمع و تفریق بردارها

مجموع یا تفاضل بردارهای  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  را می‌توان برحسب مؤلفه‌ها، به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{v} \pm \mathbf{w} = \sum_i \delta_i v_i \pm \sum_i \delta_i w_i = \sum_i \delta_i (v_i \pm w_i) \quad (\text{الف. ۲-۱۸})$$

از لحاظ هندسی، این رابطه متناظر است با جمع کردن تصویرهای  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  روی هر محور و سپس ترسیم برداری با این مؤلفه‌های جدید. سه یا چند بردار را نیز می‌توان دقیقاً به همین روش جمع کرد.

### ضرب بردار در اسکالر

ضرب یک بردار در یک اسکالر با ضرب هر مؤلفه بردار در آن اسکالر متناظر است:

$$s\mathbf{v} = s\{\sum_i \delta_i v_i\} = \sum_i \delta_i \{s v_i\} \quad (\text{الف. ۲-۱۹})$$

۲. برای اطلاع از رابطه این تعریف بردار با تعریف برحسب قواعد تبدیل مختصات، به منبع زیر رجوع کنید:

### ضرب اسکالر (نقطه‌ای) دو بردار

ضرب اسکالر دو بردار  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  با نوشتن هر بردار برحسب مؤلفه‌های آن، طبق معادله (الف.۲-۱۶) و سپس انجام عمل ضرب اسکالر روی بردارهای یکه، با استفاده از معادله (الف.۲-۱۴) انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) &= \left( \left\{ \sum_i \delta_i v_i \right\} \cdot \left\{ \sum_j \delta_j w_j \right\} \right) = \sum_i \sum_j (\delta_i \cdot \delta_j) v_i w_j \\ &= \sum_i \sum_j \delta_{ij} v_i w_j = \sum_i v_i w_i \end{aligned} \quad (\text{الف.۲-۲۰})$$

بنابراین حاصل ضرب اسکالر دو بردار با جمع کردن حاصل ضرب‌های مؤلفه‌های متناظر این دو بردار به دست می‌آید. توجه کنید که  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$  (که گاهی به صورت  $\mathbf{v}^2$  یا  $v^2$  نوشته می‌شود) اسکالری است که مجذور اندازه  $\mathbf{v}$  را نشان می‌دهد.

### ضرب برداری (خارجی) دو بردار

ضرب برداری دو بردار  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  را می‌توان با استفاده از معادله‌های (الف.۲-۱۶ و ۱۵) انجام داد:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v} \times \mathbf{w}] &= \left[ \left\{ \sum_j \delta_j v_j \right\} \times \left\{ \sum_k \delta_k w_k \right\} \right] \\ &= \sum_j \sum_k [\delta_j \times \delta_k] v_j w_k = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \delta_i v_j w_k \\ &= \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{الف.۲-۲۱})$$

در این جا از معادله (الف.۲-۸) استفاده کرده‌ایم. توجه داشته باشید که مؤلفه  $\delta_i$  از عبارت  $[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]$  عبارت است از:  $\sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} v_j w_k$ ؛ این نتیجه، غالباً در اثبات اتحادهای برداری به کار می‌آید.

### ضرب‌های برداری چندگانه

عبارت‌هایی را که در بخش الف.۱ برای ضرب‌های چندگانه گفته شد، می‌توان با استفاده از عبارت‌های تحلیلی به دست آمده در بالا، برای ضرب‌های اسکالر و برداری، به دست آورد. مثلاً ضرب  $(\mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}])$  را می‌توان چنین نوشت:

$$(\mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]) = \sum_i u_i [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]_i = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k \quad (\text{الف.۲-۲۲})$$

سپس از معادله (الف.۲-۸) نتیجه می‌شود:

$$(\mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (\text{الف.۲-۲۳})$$

اندازه  $(\mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}])$  برابر است با حجم متوازی‌السطوحی که با بردارهای  $\mathbf{u}$ ،  $\mathbf{v}$ ، و  $\mathbf{w}$  ترسیم شده از یک مبدأ مشترک، تعریف می‌شود. به علاوه، صفر شدن دترمینان شرط لازم و کافی برای هم صفحه بودن بردارهای  $\mathbf{u}$ ،  $\mathbf{v}$ ، و  $\mathbf{w}$  است.



## بردار مکان

نماد متداول برای بردار مکان - یعنی برداری که مکان یک نقطه را در فضا مشخص می‌کند -  $\mathbf{r}$  است. مؤلفه‌های  $\mathbf{r}$  عبارت‌اند از:  $x_1, x_2, x_3$  و به طوری که:

$$\mathbf{r} = \sum_i \delta_i x_i \quad (\text{الف. ۲-۲۴})$$

این نوعی بی‌نظمی در نمادگذاری است، زیرا مؤلفه‌ها نمادی متفاوت با بردار دارند. اندازه  $\mathbf{r}$  را معمولاً به صورت  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  نشان می‌دهند و این  $r$  مختص شعاعی در دستگاه مختصات کروی است (نگاه کنید به شکل الف. ۱-۶).

## مثال الف. ۱-۲

اثبات یک اتحاد برداری

برای اثبات اتحادهای برداری، می‌توان از عبارتهای تحلیلی ضرب‌های نقطه‌ای و برداری استفاده کرد؛ مثلاً درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$[\mathbf{u} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]] = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{الف. ۲-۲۵})$$

حل

مؤلفه  $i$  عبارت سمت چپ را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]]_i &= \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} u_j [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]_k \\ &= \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} u_j \left\{ \sum_l \sum_m \varepsilon_{klm} v_l w_m \right\} \\ &= \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} u_j v_l w_m \end{aligned} \quad (\text{الف. ۲-۲۶})$$

اکنون می‌توان از معادله (الف. ۲-۷) برای کامل کردن اثبات استفاده کرد:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]]_i &= \sum_j \sum_l \sum_m (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_j v_l w_m \\ &= v_i \sum_j \sum_m \delta_{jm} u_j w_m - w_i \sum_j \sum_l \delta_{jl} u_j v_l \\ &= v_i \sum_j u_j w_j - w_i \sum_j u_j v_j = v_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - w_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (\text{الف. ۲-۲۷})$$

که درست مؤلفه  $i$  سمت راست معادله (الف. ۲-۲۵) است. به همین ترتیب، می‌توان درستی اتحادهایی از قبیل اتحادهای زیر را نشان داد:

$$(\mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]) = (\mathbf{v} \cdot [\mathbf{w} \times \mathbf{u}]) \quad (\text{الف. ۲-۲۸})$$

$$([\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \cdot [\mathbf{w} \times \mathbf{z}]) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \quad (\text{الف. ۲-۲۹})$$

$$[[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \times [\mathbf{w} \times \mathbf{z}]] = ([\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \cdot \mathbf{z})\mathbf{w} - ([\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w})\mathbf{z} \quad (\text{الف. ۲-۳۰})$$

تمرین

۱. جمع‌های زیر را به تفصیل انجام دهید:

$$\sum_{k=1}^3 k^2 \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{k=1}^3 a_k^2 \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{jk} b_{kj} \quad (\text{ج})$$

$$\left( \sum_{j=1}^3 a_j \right)^2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_j a_k \quad (\text{د})$$

۲. مؤلفه‌های بردار  $\mathbf{v}$  عبارت‌اند از:  $v_x = 1$ ،  $v_y = 2$ ،  $v_z = -5$ ، مؤلفه‌های بردار  $\mathbf{w}$  عبارت‌اند از:  $w_x = 3$ ،  $w_y = -1$ ،  $w_z = 1$ . محاسبات زیر را انجام دهید:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \quad (\text{الف})$$

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{w}] \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{v} \quad \text{اندازه} \quad \mathbf{v} \quad (\text{ج})$$

$$(\delta_x \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{د})$$

$$[\delta_x \times \mathbf{w}] \quad (\text{ه})$$

$$\phi_{\mathbf{v}\mathbf{w}} \quad (\text{و})$$

(ز)  $[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]$ ، که  $\mathbf{r}$  بردار مکان است.

۳. مطلوب است محاسبه:

$$([\delta_1 \times \delta_2] \cdot \delta_3) \quad (\text{الف})$$

$$[[\delta_2 \times \delta_3] \times [\delta_1 \times \delta_3]] \quad (\text{ب})$$

۴. نشان دهید که معادله (الف-۲-۶) درحالت خاص  $i = 1$  و  $h = 2$  اعتبار دارد.

نشان دهید که معادله (الف-۲-۷) درحالت خاص  $i = j = m = 1$  و  $n = 2$  اعتبار دارد.

۵. نشان دهید که هرگاه  $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$ ، رابطه  $\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \alpha_{jk} = 0$  صحیح است.

۶. عبارت بعداز معادله (الف-۲-۲۱) را که می‌گویید مؤلفه  $i$  ام  $[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]$  برابر است با:  $\sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} v_j w_k$ . به دقت توضیح دهید.

۷. نشان دهید که  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 + ([\mathbf{v} \times \mathbf{w}] \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]) = v^2 w^2$  («اتحاد لاگرانژ»).

### الف. ۳. عملیات تانسوری برحسب مؤلفه‌ها

در بخش گذشته دیدیم که می‌توان عبارت‌هایی برای همهٔ عملیات متداول ضرب نقطه‌ای و ضرب برداری بردارها به‌دست آورد، هرگاه بتوان بردار  $v$  را به‌صورت جمع  $\sum_i \delta_i v_i$  نوشت و بردارهای یکه  $\delta_i$  را دستکاری کرد. در این بخش راهکاری موازی را دنبال می‌کنیم. تانسور  $\tau$  را به‌صورت جمع  $\sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \tau_{ij}$  می‌نویسیم و فرمول‌هایی برای دستکاری دوتایی‌های یکه  $\delta_i \delta_j$  ارائه می‌دهیم؛ به‌این‌ترتیب، عبارت‌هایی برای عملیات نقطه‌ای و برداری متداول برای تانسورها به‌دست می‌آید.

#### دوتایی‌های یکه

در بحث قبلی، بردارهای یکه  $\delta_i$  را تعریف کردیم و سپس ضرب‌های اسکالر  $(\delta_i \cdot \delta_j)$  و ضرب‌های برداری  $[\delta_i \times \delta_j]$  را ارائه دادیم. نوع سومی از ضرب هم وجود دارد که با استفاده از بردارهای یکه تشکیل می‌شود و ضرب دوتایی  $\delta_i \delta_j$  نام دارد (بدون نماد ضرب نوشته می‌شود).

طبق قواعد نمادگذاری که در مقدمهٔ پیوست الف ارائه شد، ضرب‌های  $\delta_i \delta_j$  تانسورهای مرتبهٔ دوم‌اند. چون  $\delta_i$  و  $\delta_j$  اندازهٔ واحد دارند، ضرب‌های  $\delta_i \delta_j$  را دوتایی‌های یکه می‌نامیم.

اگرچه هر بردار یکه نشان‌داده‌شده در شکل الف. ۲-۱ معرف یک راستای مختصات است، دوتایی‌های یکه شکل الف. ۳-۱ معرف زوج‌های منظمی از راستاهای مختصات‌اند.

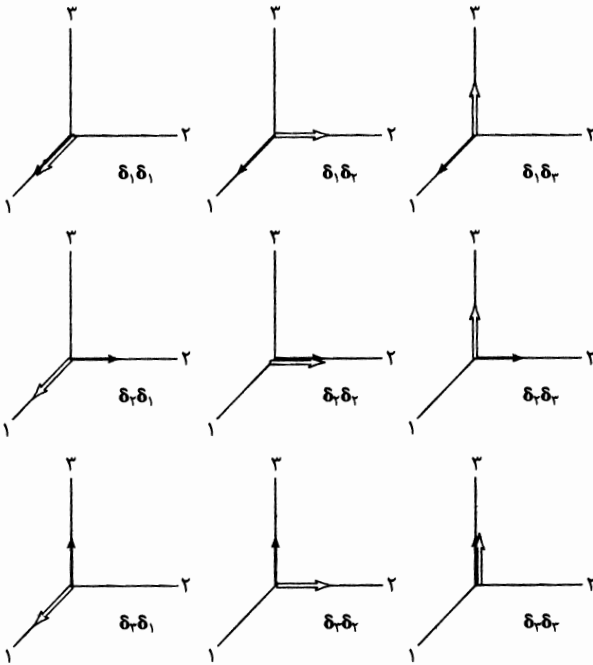
(در مسائل فیزیکی غالباً با کمیت‌هایی سروکار داریم که تعیین هم‌زمان دو راستا را ایجاب می‌کنند. مثلاً شار مؤلفهٔ  $x$ -اندازه‌حرکت روی سطح واحد عمود بر راستای  $y$  کمیتی از این نوع است.)

گاهی این کمیت با شار مؤلفهٔ  $y$ -اندازه‌حرکت عمود بر راستای  $x$  یکی نیست، و در این صورت بدیهی است که مشخص کردن دو راستا کفایت نمی‌کند؛ باید درمورد ترتیب بیان راستاها نیز توافق کنیم.)

ضرب‌های نقطه‌ای و برداری بردارهای یکه را با ارائهٔ تعریف‌های هندسی این عملیات معرفی کردیم. عملیات نظیر برای دوتایی‌های یکه را، به‌طور صوری، با مربوط کردن آن‌ها به عملیات بردارهای یکه معرفی می‌کنیم:

$(\delta_i \delta_j : \delta_k \delta_l) = (\delta_j \cdot \delta_k)(\delta_i \cdot \delta_l) = \delta_{jk} \delta_{il}$	(الف. ۳-۱)
$[\delta_i \delta_j \cdot \delta_k] = \delta_i (\delta_j \cdot \delta_k) = \delta_i \delta_{jk}$	(الف. ۳-۲)
$[\delta_i \cdot \delta_j \delta_k] = (\delta_i \cdot \delta_j) \delta_k = \delta_{ij} \delta_k$	(الف. ۳-۳)
$[\delta_i \delta_j \cdot \delta_k \delta_l] = \delta_i (\delta_j \cdot \delta_k) \delta_l = \delta_{jk} \delta_i \delta_l$	(الف. ۳-۴)
$[\delta_i \delta_j \times \delta_k] = \delta_i [\delta_j \times \delta_k] = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} \delta_i \delta_l$	(الف. ۳-۵)
$[\delta_i \times \delta_j \delta_k] = [\delta_i \times \delta_j] \delta_k = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \delta_l \delta_k$	(الف. ۳-۶)

به‌یاد سپردن این نتایج آسان است: کافی است ضرب نقطه‌ای (یا برداری) نزدیک‌ترین بردارهای یکه را در هر طرف علامت نقطه (یا ضرب‌در) به‌دست بیاورید؛ در معادلهٔ (الف. ۳-۱) دو عمل از این نوع انجام شده‌است.



شکل الف.۳-۱ دوتایی‌های یکه  $\delta_i\delta_j$ .  
 پیکان‌های توپر معرف بردار یکه اول در ضرب دوتایی‌اند و بردارهای توخالی بردار یکه دوم را نشان می‌دهند. توجه کنید که  $\delta_1\delta_1$  با  $\delta_2\delta_2$  همانند نیست.

بسط تانسور برحسب مؤلفه‌های آن

در معادله (الف.۲-۱۶)، یک بردار را برحسب مؤلفه‌های آن بسط دادیم و هر مؤلفه در بردار یکه مناسب ضرب شد. در این‌جا همان ایده را تعمیم می‌دهیم و تانسوری (از مرتبه دوم)، به‌صورت کمیتی که هر اسکالر را با یک زوج منظم از راستاهای مختصات همراه می‌کند، با مفهوم زیر، تعریف می‌کنیم:<sup>۲</sup>

$$\begin{aligned} \tau &= \delta_1\delta_1\tau_{11} + \delta_1\delta_2\tau_{12} + \delta_1\delta_3\tau_{13} \\ &+ \delta_2\delta_1\tau_{21} + \delta_2\delta_2\tau_{22} + \delta_2\delta_3\tau_{23} \\ &+ \delta_3\delta_1\tau_{31} + \delta_3\delta_2\tau_{32} + \delta_3\delta_3\tau_{33} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_i\delta_j\tau_{ij} \end{aligned} \quad (\text{الف.۳-۷})$$

اسکالرهایی  $\tau_{ij}$  را «مؤلفه‌های تانسور  $\tau$ » می‌نامند.

چند نوع خاص از تانسورهای مرتبه دوم درخور توجه‌اند:

۱. اگر  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ، آن‌گاه گفته می‌شود تانسور متقارن است.

۲. اگر  $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$ ، آن‌گاه گفته می‌شود تانسور پادمتقارن است.

۳. اگر مؤلفه‌های تانسور همان مؤلفه‌های  $\tau$  اما با اندیس‌های ترانهاده فرض شوند، تانسور حاصل را ترانهاده<sup>۳</sup>  $\tau$

۳. تانسورها را غالباً برحسب قواعد تبدیل تعریف می‌کنند؛ ارتباط بین چنین تعریفی، و تعریف ارائه‌شده در بالا، در منبع زیر تشریح

شده‌است:

W. Prager, *Mechanics of Continua*, Ginn, Boston (1961).

می‌نامند و آن را با نماد  $\tau^\dagger$  نشان می‌دهند:

$$\tau^\dagger = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \tau_{ji} \quad (\text{الف. ۳-۸})$$

۴. اگر مؤلفه‌های تانسور توسط زوج‌های منظمی از مؤلفه‌های دو بردار  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  تشکیل شوند، تانسور حاصل را ضرب دوتایی  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  می‌نامند و با نماد  $\mathbf{vw}$  نشان می‌دهند:

$$\mathbf{vw} = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j v_i w_j \quad (\text{الف. ۳-۹})$$

توجه کنید که  $\mathbf{vw} \neq \mathbf{wv}$  است، اما  $(\mathbf{vw})^\dagger = \mathbf{wv}$ .

۵. اگر مؤلفه‌های تانسور با دلتای کرونکر  $\delta_{ij}$  نشان داده شوند، تانسور حاصل تانسور یک‌گانه نامیده می‌شود و آن را با نماد  $\delta$  نشان می‌دهند:

$$\delta = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \delta_{ij} \quad (\text{الف. ۳-۱۰})$$

اندازه تانسور از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|\tau| = \tau = \sqrt{\frac{1}{\tau} (\tau : \tau^\dagger)} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_i \sum_j \tau_{ij}^2} \quad (\text{الف. ۳-۱۱})$$

### جمع تانسورها و ضرب‌های دوتایی

دو تانسور به صورت زیر باهم جمع می‌شوند:

$$\sigma + \tau = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \sigma_{ij} + \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \tau_{ij} = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j (\sigma_{ij} + \tau_{ij}) \quad (\text{الف. ۳-۱۲})$$

یعنی جمع این دو تانسور، تانسوری است که مؤلفه‌های آن جمع‌های مؤلفه‌های متناظر دو تانسورند. همین نکته در مورد ضرب‌های دوتایی نیز صادق است.

### ضرب تانسور در اسکالر

ضرب یک تانسور در یک اسکالر با ضرب کردن هر مؤلفه تانسور در آن اسکالر متناظر است:

$$s\tau = s \left\{ \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \tau_{ij} \right\} = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \{s\tau_{ij}\} \quad (\text{الف. ۳-۱۳})$$

همین نکته در مورد ضرب‌های دوتایی نیز صادق است.

### ضرب اسکالر (ضرب دونقطه‌ای) دو تانسور

دو تانسور را می‌توان با استفاده از عمل ضرب دونقطه‌ای درهم ضرب کرد:

$$\begin{aligned} (\sigma : \tau) &= \left( \left\{ \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \sigma_{ij} \right\} : \left\{ \sum_k \sum_l \delta_k \delta_l \tau_{kl} \right\} \right) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l (\delta_i \delta_j : \delta_k \delta_l) \sigma_{ij} \tau_{kl} \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta_{il} \delta_{jk} \sigma_{ij} \tau_{kl} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \tau_{ji} \end{aligned} \quad (\text{الف. ۳-۱۴})$$

که در آن از معادله (الف.۳-۱) استفاده شده است. به همین ترتیب، می توان نشان داد که:

$$(\boldsymbol{\tau} : \mathbf{vw}) = \sum_i \sum_j \tau_{ij} v_j w_i \quad (\text{الف.۳-۱۵})$$

$$(\mathbf{uv} : \mathbf{wz}) = \sum_i \sum_j u_i v_j w_j z_i \quad (\text{الف.۳-۱۶})$$

ضرب تانسوری (ضرب تک نقطه‌ای) دو تانسور دو تانسور را می توان طبق عمل تک نقطه‌ای نیز درهم ضرب کرد:

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\} &= \left\{ \left( \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \sigma_{ij} \right) \cdot \left( \sum_k \sum_l \delta_k \delta_l \tau_{kl} \right) \right\} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \{\delta_i \delta_j \cdot \delta_k \delta_l\} \sigma_{ij} \tau_{kl} \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta_{ijk} \delta_l \sigma_{ij} \tau_{kl} = \sum_i \sum_l \delta_i \delta_l \left( \sum_j \sigma_{ij} \tau_{jl} \right) \end{aligned} \quad (\text{الف.۳-۱۷})$$

یعنی مؤلفه  $il$  عبارت  $\{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}\}$  عبارت است از:  $\sum_j \sigma_{ij} \tau_{jl}$ . با استفاده از ضرب های دوتایی نیز می توان عملیات مشابهی را انجام داد. معمولاً  $\{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}\}$  را به صورت  $\boldsymbol{\sigma}^2$ ،  $\{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2\}$  را به صورت  $\boldsymbol{\sigma}^3$ ، و ... می نویسیم.

ضرب برداری (ضرب نقطه‌ای) یک تانسور در یک بردار وقتی یک تانسور در یک بردار ضرب نقطه‌ای می شود، بردار به دست می آید:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}] &= \left[ \left\{ \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \tau_{ij} \right\} \cdot \left\{ \sum_k \delta_k v_k \right\} \right] = \sum_i \sum_j \sum_k [\delta_i \delta_j \cdot \delta_k] \tau_{ij} v_k \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \delta_i \delta_{jk} \tau_{ij} v_k = \sum_i \delta_i \left\{ \sum_j \tau_{ij} v_j \right\} \end{aligned} \quad (\text{الف.۳-۱۸})$$

یعنی مؤلفه  $i$ ام  $[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]$  عبارت است از:  $\sum_j \tau_{ij} v_j$ . به همین ترتیب، مؤلفه  $i$ ام  $[\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}]$  عبارت است از:  $\sum_j v_j \tau_{ji}$ . بدیهی است که  $[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}] \neq [\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}]$ ، مگر  $\boldsymbol{\tau}$  متقارن باشد.

یادآوری می کنیم که وقتی بردار  $\mathbf{v}$  در اسکالر  $s$  ضرب می شود، بردار برآیند  $s\mathbf{v}$  در همان جهتی است که  $\mathbf{v}$  هست، اما طولی متفاوت با آن دارد. اما وقتی  $\boldsymbol{\tau}$  در  $\mathbf{v}$  ضرب نقطه‌ای شود، بردار برآیند  $[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]$  هم از لحاظ طول و هم از لحاظ جهت با بردار  $\mathbf{v}$  تفاوت دارد؛ یعنی تانسور  $\boldsymbol{\tau}$  بردار  $\mathbf{v}$  را «تغییرشکل» می دهد یا «می بیچاند» تا بردار جدیدی با جهتی جدید تشکیل دهد.

ضرب تانسوری (ضرب خارجی) یک تانسور در یک بردار وقتی تانسور را در بردار ضرب خارجی کنیم، یک تانسور نتیجه می شود:

$$\{\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{v}\} = \left\{ \left( \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \tau_{ij} \right) \times \left( \sum_k \delta_k v_k \right) \right\} = \sum_i \sum_j \sum_k [\delta_i \delta_j \times \delta_k] \tau_{ij} v_k$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \varepsilon_{ijkl} \delta_i \delta_l \tau_{ij} v_k = \sum_i \sum_l \delta_i \delta_l \left\{ \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijkl} \tau_{ij} v_k \right\}$$

(الف. ۱۹-۳)

بنابراین مؤلفه  $il$  عبارت  $\{\tau \times v\}$  برابر است با:  $\sum_j \sum_k \varepsilon_{ijkl} \tau_{ij} v_k$ . به همین ترتیب، مؤلفه  $lk$  عبارت  $\{v \times \tau\}$  برابر است با:  $\sum_i \sum_j \varepsilon_{ijl} v_i \tau_{jk}$ .

### عملیات دیگر

اثبات اتحادهای زیر با استفاده از نتایج بالا، کار دشواری نیست:

$$[\delta \cdot v] = [v \cdot \delta] = v \quad (\text{الف. ۲۰-۳})$$

$$[uv \cdot w] = u(v \cdot w) \quad (\text{الف. ۲۱-۳})$$

$$[w \cdot uv] = (w \cdot u)v \quad (\text{الف. ۲۲-۳})$$

$$(uv : wz) = (uw : vz) = (u \cdot z)(v \cdot w) \quad (\text{الف. ۲۳-۳})$$

$$(\tau : uv) = ([\tau \cdot u] \cdot v) \quad (\text{الف. ۲۴-۳})$$

$$(uv : \tau) = (u \cdot [v \cdot \tau]) \quad (\text{الف. ۲۵-۳})$$

### تمرین

۱. مؤلفه‌های تانسور متقارن  $\tau$  عبارت‌اند از:

$$\tau_{xx} = ۳ \quad \tau_{xy} = ۲ \quad \tau_{xz} = -۱$$

$$\tau_{yx} = ۲ \quad \tau_{yy} = ۲ \quad \tau_{yz} = ۱$$

$$\tau_{zx} = -۱ \quad \tau_{zy} = ۱ \quad \tau_{zz} = ۴$$

مؤلفه‌های بردار  $v$  عبارت‌اند از:

$$v_x = ۵ \quad v_y = ۳ \quad v_z = -۲$$

مطلوب است محاسبه:

(الف)  $[\tau \cdot v]$

(ب)  $[v \cdot \tau]$

(ج)  $(\tau : \tau)$

(د)  $(v \cdot [\tau \cdot v])$

(ه)  $vv$

(و)  $[\tau \cdot \delta_x]$

۲. مطلوب است محاسبه:

(الف)  $[[\delta_1 \delta_2 \cdot \delta_2] \times \delta_1]$

(ب)  $(\delta : \delta_1 \delta_2)$

(ج)  $(\delta : \delta)$

(د)  $\{\delta \cdot \delta\}$

۳. هرگاه  $\alpha$  متقارن و  $\beta$  پادمقارن باشد، نشان دهید که  $(\alpha : \beta) = 0$ .

۴. عبارت بعداز معادله (الف.۳-۱۷) را مبنی بر این که مؤلفه  $il$  عبارت  $\{\sigma \cdot \tau\}$  عبارت است از:  $\sum_j \sigma_{ij} \tau_{jl}$ ، با دقت توضیح دهید.

۵. سازه صلبی را در نظر بگیرید که از ذرات نقطه‌ای تشکیل شده است که با میله‌های بدون جرم به هم متصل شده‌اند. این ذرات را  $1, 2, 3, \dots, N$  می‌نامیم و جرم ذرات را به صورت  $m_\nu (1, 2, \dots, N)$  نشان می‌دهیم. مکان ذرات نسبت به مرکز جرم با بردار  $\mathbf{R}_\nu$  نشان داده می‌شود. کل سازه با سرعت زاویه‌ای  $\mathbf{W}$ ، روی محوری گذرا از مرکز جرم می‌چرخد. نشان دهید که اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم برابر است با:

$$\mathbf{L} = \sum_\nu m_\nu [\mathbf{R}_\nu \times (\mathbf{W} \times \mathbf{R}_\nu)] \quad (\text{الف.۳-۲۶})$$

سپس نشان دهید که عبارت اخیر را می‌توان چنین نوشت:

$$\mathbf{L} = [\Phi \cdot \mathbf{W}] \quad (\text{الف.۳-۲۷})$$

که در آن:

$$\Phi = \sum_\nu m_\nu \{(\mathbf{R}_\nu \cdot \mathbf{R}_\nu) \delta - \mathbf{R}_\nu \mathbf{R}_\nu\} \quad (\text{الف.۳-۲۸})$$

تانسور گشتاور لختی است.

۶. انرژی جنبشی چرخش سازه صلب تمرین ۵ برابر است با:

$$K = \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu (\dot{\mathbf{R}}_\nu \cdot \dot{\mathbf{R}}_\nu) \quad (\text{الف.۳-۲۹})$$

که در آن  $\dot{\mathbf{R}}_\nu = [\mathbf{W} \times \mathbf{R}_\nu]$  سرعت ذره  $\nu$ ام است. نشان دهید که:

$$K = \frac{1}{2} (\Phi : \mathbf{W}\mathbf{W}) \quad (\text{الف.۳-۳۰})$$

#### الف.۴ عملیات دیفرانسیلی برداری و تانسوری

عملگر دیفرانسیلی  $\nabla$  موسوم به «نابلا» یا «دل»، در مختصات قائم چنین تعریف می‌شود:

$$\nabla = \delta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \delta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \delta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{الف.۴-۱})$$

که در آن  $\delta_i$  بردارهای یکه و  $x_i$  متغیرهای مربوط به محورهای ۱، ۲، ۳ هستند (یعنی  $x_1, x_2, x_3$  مختصات دکارتی‌اند که معمولاً آن‌ها را  $x, y, z$  می‌نامیم). نماد  $\nabla$  عملگر بردار است - مؤلفه‌هایی مانند بردار دارد اما به‌تنهایی وجود ندارد؛ باید روی یک تابع اسکالر، برداری، یا تانسوری عمل کند. در این بخش عمل‌های مختلف  $\nabla$  روی اسکالرها، بردارها، و تانسورها را خلاصه می‌کنیم. مانند بخش‌های الف.۲ و الف.۳، بردارها و تانسورها را به مؤلفه‌هایشان تجزیه و سپس از معادله‌های (الف.۲-۱۴ و ۱۵)، و معادله‌های (الف.۳-۱ تا ۶) استفاده می‌کنیم. در نظر



داشته باشید که معادله‌هایی که در این بخش به صورت مؤلفه‌ای نوشته شدند، فقط در دستگاه مختصات قائم معتبرند که بردارهای یک‌ه‌ $\delta_i$  آن ثابت‌اند؛ در بخش‌های الف. ۶ و الف. ۷ مختصات خمیده خطی را شرح می‌دهیم.

### گرادیان یک میدان اسکالر

اگر  $s$  تابع اسکالر متغیرهای  $x_1, x_2, x_3$  باشد، آنگاه عمل  $\nabla$  روی  $s$  عبارت است از:

$$\nabla s = \delta_1 \frac{\partial s}{\partial x_1} + \delta_2 \frac{\partial s}{\partial x_2} + \delta_3 \frac{\partial s}{\partial x_3} = \sum_i \delta_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \quad (\text{الف. ۲-۴})$$

بنابراین بردار تشکیل شده از مشتق‌های  $s$  توسط  $\nabla s$  (یا  $\text{grad } s$ ) مشخص می‌شود و آن را گرادیان میدان اسکالر  $s$  می‌نامند. باید به خواص زیر عمل گرادیان توجه کرد:

$$\nabla s \neq s \nabla \quad (\text{الف. ۳-۴}) \quad \text{تعویض ناپذیری:}$$

$$(\nabla r)s \neq \nabla(rs) \quad (\text{الف. ۴-۴}) \quad \text{شرکت ناپذیری:}$$

$$\nabla(r+s) = \nabla r + \nabla s \quad (\text{الف. ۵-۴}) \quad \text{توزیع‌پذیری:}$$

### دیورژانس یک میدان برداری

اگر بردار  $\mathbf{v}$  تابعی از متغیرهای فضایی  $x_1, x_2, x_3$  باشد، آنگاه می‌توان یک ضرب اسکالر با عملگر  $\nabla$  تشکیل داد؛ برای به دست آوردن صورت نهایی، از معادله (الف. ۲-۱۴) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{v}) &= \left( \left\{ \sum_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j \delta_j v_j \right\} \right) = \sum_i \sum_j (\delta_i \cdot \delta_j) \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \\ &= \sum_i \sum_j \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{الف. ۶-۴})$$

این مجموعه از مشتق‌های مؤلفه‌های بردار  $\mathbf{v}$  را دیورژانس  $\mathbf{v}$  می‌نامند (گاهی آن را به صورت اختصاری  $\text{div } \mathbf{v}$  نشان می‌دهند). بعضی از خواص عملگر دیورژانس شایان توجه‌اند:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) \neq (\mathbf{v} \cdot \nabla) \quad (\text{الف. ۷-۴}) \quad \text{تعویض ناپذیری:}$$

$$(\nabla \cdot s\mathbf{v}) \neq (\nabla s \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{الف. ۸-۴}) \quad \text{شرکت ناپذیری:}$$

$$\nabla \cdot \{\mathbf{v} + \mathbf{w}\} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{w}) \quad (\text{الف. ۹-۴}) \quad \text{توزیع‌پذیری:}$$

### کرل (تاو) یک میدان برداری

بین عملگر  $\nabla$  و بردار  $\mathbf{v}$  که تابعی از سه متغیر فضایی است، می‌توان یک ضرب برداری تشکیل داد. این ضرب برداری با استفاده از معادله (الف. ۲-۱۵) ساده می‌شود و می‌توان آن را به صورت‌های مختلف نوشت:

$$[\nabla \times \mathbf{v}] = \left[ \left\{ \sum_j \delta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \left\{ \sum_k \delta_k v_k \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_j \sum_k [\delta_j \times \delta_k] \frac{\partial}{\partial x_j} v_k = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \delta_i \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \\
 &= \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
 &= \delta_1 \left\{ \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right\} + \delta_2 \left\{ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right\} + \delta_3 \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right\}. \quad (\text{الف-۱۰})
 \end{aligned}$$

برداری که به این ترتیب حاصل می‌شود، کول  $\mathbf{v}$  نام دارد. سایر نام‌های  $[\nabla \times \mathbf{v}]$  عبارت‌اند از:  $\text{curl } \mathbf{v}$  و  $\text{rot } \mathbf{v}$ . که دومی بیش‌تر در نوشته‌های آلمانی به چشم می‌خورد. عملگر کول، مانند دیورژانس، توزیع‌پذیر هست اما تعویض‌پذیر یا شرکت‌پذیر نیست. توجه کنید که مؤلفه  $i$ ام  $[\nabla \times \mathbf{v}]$  عبارت است از:  $\sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} (\partial/\partial x_j) v_k$ .

### گرادیان یک میدان برداری

علاوه بر ضرب اسکالر  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$  و ضرب برداری  $[\nabla \times \mathbf{v}]$ ، می‌توان ضرب دو تایی  $\nabla \mathbf{v}$  را نیز تشکیل داد:

$$\nabla \mathbf{v} = \left\{ \sum_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \left\{ \sum_j \delta_j v_j \right\} = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \quad (\text{الف-۱۱})$$

این عبارت را گرادیان بردار  $\mathbf{v}$  می‌نامند و گاهی به صورت  $\text{grad } \mathbf{v}$  نوشته می‌شود. این تانسور مرتبه دو است که مؤلفه  $ij$  آن عبارت است از:  $(\partial/\partial x_i) v_j$ . ترانزاده این تانسور چنین است:

$$(\nabla \mathbf{v})^\dagger = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \quad (\text{الف-۱۲})$$

که مؤلفه  $ji$  آن عبارت است از:  $(\partial/\partial x_j) v_i$ . توجه داشته باشید که  $\nabla \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \nabla$  و  $(\nabla \mathbf{v})^\dagger \neq \mathbf{v} \nabla$ .

### دیورژانس یک میدان تانسوری

اگر تانسور  $\tau$  تابعی از متغیرهای فضایی  $x_1, x_2, x_3$  باشد، آن‌گاه می‌توان با عملگر  $\nabla$  یک ضرب برداری تشکیل داد؛ برای به‌دست آوردن صورت نهایی از معادله (الف-۳-۳) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 [\nabla \cdot \tau] &= \left[ \left\{ \sum_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j \sum_k \delta_j \delta_k \tau_{jk} \right\} \right] = \sum_i \sum_j \sum_k [\delta_i \cdot \delta_j \delta_k] \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{jk} \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij} \delta_k \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{jk} = \sum_k \delta_k \left\{ \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ik} \right\} \quad (\text{الف-۱۳})
 \end{aligned}$$

این عبارت را دیورژانس تانسور  $\tau$  می‌نامند و گاه آن را به صورت  $\text{div } \tau$  می‌نویسند. مؤلفه  $k$ ام  $[\nabla \cdot \tau]$  عبارت است از:  $\sum_i (\partial/\partial x_i) \tau_{ik}$ . اگر  $\tau$  حاصل ضرب  $s\mathbf{v}w$  باشد، آن‌گاه:

$$[\nabla \cdot s\mathbf{v}w] = \sum_k \delta_k \left\{ \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (s v_i w_k) \right\} \quad (\text{الف-۱۴})$$

۴. بعضی از مؤلفان مؤلفه  $ji$  عبارت  $\nabla \mathbf{v}$  را به صورت  $(\partial/\partial x_j) v_i$  تعریف می‌کنند.

لاپلاسی یک میدان اسکالر

اگر دیورژانس گرادیان تابع اسکالر  $s$  را بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \nabla s) &= \left( \left\{ \sum_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j \delta_j \frac{\partial s}{\partial x_j} \right\} \right) \\ &= \sum_i \sum_j \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial x_j} = \left\{ \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} s \right\} \end{aligned} \quad (\text{الف. ۱۵-۴})$$

مجموعه عملگرهای دیفرانسیلی که در سطر آخر روی  $s$  عمل می‌کنند، با نماد  $\nabla^2$  نشان داده می‌شوند؛ بنابراین در مختصات قائم داریم:

$$(\nabla \cdot \nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (\text{الف. ۱۶-۴})$$

این عبارت را عملگر لاپلاسی می‌نامند. (بعضی از مؤلفان، به‌ویژه در متون قدیمی آلمانی، برای نشان دادن لاپلاسی از نماد  $\Delta$  استفاده می‌کنند؛ بنابراین  $(\nabla \cdot \nabla)s$ ،  $\nabla^2 s$  و  $\Delta s$  کمیت‌های هم‌ارز با یکدیگرند.) عملگر لاپلاسی، مانند عملگرهای گرادیان، دیورژانس، و کِرل فقط خاصیت توزیع‌پذیری دارد.

لاپلاسی یک میدان برداری

اگر از تابع برداری  $\mathbf{v}$  دیورژانس گرادیان بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}] &= \left[ \left\{ \sum_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j \sum_k \delta_j \delta_k \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \right\} \right] \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k [\delta_i \cdot \delta_j \delta_k] \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij} \delta_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k = \sum_k \delta_k \left( \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} v_k \right) \end{aligned} \quad (\text{الف. ۱۷-۴})$$

یعنی مؤلفه  $k$ ام  $[\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}]$ ، در مختصات دکارتی،  $\nabla^2 v_k$  است. نمادگذاری‌های جایگزین برای  $[\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}]$  عبارت‌اند از:  $\nabla^2 \mathbf{v}$  و  $(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{v}$ .

سایر روابط دیفرانسیلی

با استفاده از تعریف‌هایی که در بالا ارائه شد، اتحادهای متعددی را می‌توان اثبات کرد:

$$\nabla r s = r \nabla s + s \nabla r \quad (\text{الف. ۱۸-۴})$$

$$(\nabla \cdot s \mathbf{v}) = (\nabla s \cdot \mathbf{v}) + s(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{الف. ۱۹-۴})$$

$$(\nabla \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]) = (\mathbf{w} \cdot [\nabla \times \mathbf{v}]) - (\mathbf{v} \cdot [\nabla \times \mathbf{w}]) \quad (\text{الف. ۲۰-۴})$$

$$[\nabla \times s \mathbf{v}] = [\nabla s \times \mathbf{v}] + s[\nabla \times \mathbf{v}] \quad (\text{الف. ۲۱-۴})$$

$$[\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - [\nabla \times [\nabla \times \mathbf{v}]] \quad (\text{الف-۲۲})$$

$$[\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}] = \frac{1}{r} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - [\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{v}]] \quad (\text{الف-۲۳})$$

$$[\nabla \cdot \mathbf{vw}] = [\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}] + \mathbf{w}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{الف-۲۴})$$

$$(s\delta : \nabla \mathbf{v}) = s(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{الف-۲۵})$$

$$[\nabla \cdot s\delta] = \nabla s \quad (\text{الف-۲۶})$$

$$[\nabla \cdot s\boldsymbol{\tau}] = [\nabla s \cdot \boldsymbol{\tau}] + s[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] \quad (\text{الف-۲۷})$$

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = [(\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}] + [(\nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}] \quad (\text{الف-۲۸})$$

### مثال الف-۱۴

اثبات یک اتحاد تانسوری  
اثبات کنید که برای  $\boldsymbol{\tau}$  متقارن:

$$(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) = (\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) - (\mathbf{v} \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]) \quad (\text{الف-۲۹})$$

حل

ابتدا سمت راست معادله را برحسب مؤلفه‌ها می‌نویسیم:

$$(\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]_i = \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} v_j \quad (\text{الف-۳۰})$$

$$(\mathbf{v} \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]) = \sum_j v_j [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_j = \sum_j \sum_i v_j \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} \quad (\text{الف-۳۱})$$

سمت چپ را می‌توان چنین نوشت:

$$(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) = \sum_i \sum_j \tau_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \quad (\text{الف-۳۲})$$

صورت دوم از تقارن  $\boldsymbol{\tau}$  نتیجه می‌شود. با تفریق کردن معادله (الف-۳۱) از معادله (الف-۳۰)، معادله (الف-۳۲) نتیجه می‌شود.

اکنون که همه عملیات برداری و تانسوری، شامل انواع مختلف عملیات  $\nabla$  را نشان داده‌ایم، می‌خواهیم خاطر نشان کنیم که عملیات نقطه‌ای و دونقطه‌ای را می‌توان فوراً و با استفاده از قاعده ساده زیر نوشت: یک نقطه متضمن جمع روی اندیس‌های مجاور است. این قاعده را با چند مثال روشن می‌کنیم.

برای تفسیر  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ ، به این نکته توجه می‌کنیم که  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  بردارهایی هستند که مؤلفه‌های آنها یک اندیس دارند. چون هردو نماد مجاور نقطه‌اند، اندیس‌های هردو را یکسان می‌گیریم و سپس روی آنها عمل جمع انجام می‌دهیم:  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \sum_i v_i w_i$ . برای عملیات دونقطه‌ای، مانند  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$ ، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. به این نکته توجه می‌کنیم که  $\boldsymbol{\tau}$ ، که تانسور است، دو اندیس دارد، اما  $\nabla$  و  $\mathbf{v}$  هرکدام یک اندیس دارند. بنابراین اندیس دوم  $\boldsymbol{\tau}$  را مساوی اندیس  $\nabla$  می‌گیریم و عمل جمع را انجام می‌دهیم؛ سپس نخستین اندیس  $\boldsymbol{\tau}$  را مساوی اندیس روی  $\mathbf{v}$  می‌گیریم و عمل جمع را انجام می‌دهیم. بنابراین نتیجه می‌شود  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) = \sum_i \sum_j \tau_{ji} (\partial/\partial x_i) v_j$

به همین ترتیب،  $(\mathbf{v} \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}])$  را می‌توان فوراً، با انجام عمل داخلی (داخل کروهه) قبل از عمل بیرونی (داخل پرانتز)، به صورت  $\sum_i \sum_j v_j (\partial/\partial x_i) \tau_{ij}$  نوشت.

برای به دست آوردن مؤلفه  $i$ ام یک کمیت برداری، دقیقاً به همین شیوه عمل می‌کنیم. برای محاسبه  $[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]_i$ ، اندیس دوم تانسور  $\boldsymbol{\tau}$  را برابر اندیس روی  $\mathbf{v}$  می‌گیریم و عمل جمع را انجام می‌دهیم تا  $\sum_j \tau_{ij} v_j$  حاصل شود. به این ترتیب، مؤلفه  $i$ ام  $[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}]$  به صورت  $\sum_j (\partial/\partial x_j) (\rho v_j v_i)$  به دست می‌آید. با کسب مهارت در این روش می‌توان عملیات نقطه‌ای و دوتقطه‌ای در دستگاه مختصات دکارتی را، با صرف زمان بسیار کم‌تر، تفسیر کرد.

تمرین

۱. همه عملیات معادله (الف. ۴-۶) را با نوشتن همه جمع‌ها، به جای استفاده از نماد  $\sum$  انجام دهید.
۲. میدان  $\mathbf{v}(x, y, z)$  را میدان برداری غیرچرخشی می‌نامند، هرگاه  $[\nabla \times \mathbf{v}] = \mathbf{0}$ . کدام یک از میدان‌های زیر غیرچرخشی است؟

$$(الف) \quad v_x = by \quad v_y = 0 \quad v_z = 0$$

$$(ب) \quad v_x = bx \quad v_y = 0 \quad v_z = 0$$

$$(ج) \quad v_x = by \quad v_y = bx \quad v_z = 0$$

$$(د) \quad v_x = -by \quad v_y = bx \quad v_z = 0$$

۳. مطلوب است محاسبه  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$ ،  $\nabla \mathbf{v}$  و  $[\nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}]$  برای چهار میدان تمرین ۲.

۴. بردار  $\mathbf{v}$  مؤلفه‌هایی به شرح زیر دارد:

$$v_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j$$

که در آن  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  و  $\sum_{i=1}^3 \alpha_{ii} = 0$ ؛  $\alpha_{ij}$  را ثابت بگیرید. مطلوب است محاسبه  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$ ،  $[\nabla \times \mathbf{v}]$ ،  $\nabla \mathbf{v}$ ،  $(\nabla \mathbf{v})^\dagger$  و  $[\nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}]$ . (راهنمایی: در ارتباط با محاسبه  $[\nabla \cdot \mathbf{v}]$ ، نگاه کنید به تمرین ۵ در بخش الف. ۲.)

$$۵. \text{ نشان دهید که } (\nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{v})) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{و} \quad \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{و} \quad [\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^\dagger] = 0.$$

$$۶. \text{ نشان دهید که } (\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{v}]) = 0 \quad \text{و} \quad [\nabla \times \nabla s] = 0.$$

۷. اگر  $\mathbf{r}$  بردار مکان (با مؤلفه‌های  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$ )، و  $\mathbf{v}$  برداری دلخواه باشد، نشان دهید که:

$$(الف) \quad (\nabla \cdot \mathbf{r}) = 3$$

$$(ب) \quad [\nabla \times \mathbf{r}] = \mathbf{0}$$

$$(ج) \quad [\mathbf{r} \times [\nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}]] = [\nabla \cdot \mathbf{v} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]]$$

۸. عبارت جایگزینی برای  $[\nabla \times [\nabla \cdot s \mathbf{v} \mathbf{v}]]$  به دست آورید.

۹. اگر  $\mathbf{r}$  بردار مکان و  $r$  اندازه آن باشد، نشان دهید که:

$$(الف) \quad \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$(ب) \quad \nabla f(r) = \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \mathbf{r}$$

(ج) هرگاه  $\mathbf{a}$  برداری ثابت باشد.  $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}$

۱۰. عبارت‌های زیر را به صورت کامل در دستگاه مختصات دکارتی بنویسید:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} = -[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] - \nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g} \quad (\text{الف})$$

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu \{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\delta} \} \quad (\text{ب})$$

### الف. ۵. قضیه‌های انتگرال برداری و تانسوری

چند قضیه انتگرال، برای انجام اثبات‌های کلی در فیزیک کوانتومی، بسیار مفیدند.

#### قضیه دیورژانس گاوس-آستراگراتسکی

اگر  $V$  ناحیه‌ای بسته در فضای محصور با سطح  $S$  (رویه) باشد، آن‌گاه:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV = \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS \quad (\text{الف. ۱-۵})$$

که در آن  $n$  بردار یکه قائم رویه بیرون است. این قضیه را قضیه دیورژانس گاوس و آستراگراتسکی می‌نامند. دو قضیه نزدیک به هم برای اسکالرها و تانسورها عبارت‌اند از:

$$\int_V \nabla S dV = \int_S \mathbf{n} S dS \quad (\text{الف. ۲-۵})$$

$$\int_V [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] dV = \int_S [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}] dS \quad (\text{الف. ۳-۵})^1$$

رابطه آخر برای ضرب‌های دوتایی  $\mathbf{vw}$  نیز معتبر است. توجه داشته باشید که، در هر سه معادله،  $\nabla$  در انتگرال حجم، با  $n$  در انتگرال سطح جایگزین می‌شود.

#### قضیه کرل استوکس

اگر  $S$  سطحی محدود به منحنی  $C$  باشد، آن‌گاه:

$$\int_S (\mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{v}]) dS = \oint_C (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) dC \quad (\text{الف. ۴-۵})$$

که در آن  $t$  بردار یکه مناسب در جهت انتگرال‌گیری روی  $C$  است؛  $n$  بردار یکه قائم بر  $S$  در جهتی است که پیچ راست‌گرد در آن جهت حرکت خواهد کرد، هرگاه سر آن در جهت انتگرال‌گیری روی  $C$  بیچانده شود. رابطه مشابهی نیز برای تانسورها وجود دارد.<sup>۱</sup>

#### فرمول لایب‌نیتس برای مشتق‌گیری از انتگرال حجم<sup>۲</sup>

فرض کنید  $V$  ناحیه متحرک بسته‌ای در فضا باشد که توسط سطح  $S$  محصور شده است؛ فرض کنید سرعت هر

۱. نگاه کنید به

P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York (1953), p. 66.

2. M. D. Greenberg, *Foundations of Applied Mathematics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1978), pp. 163-164.

جزء سطح  $\mathbf{v}_s$  باشد. آن‌گاه، اگر  $s(x, y, z, t)$  تابعی اسکالر از مکان و زمان باشد، داریم:

$$\frac{d}{dt} \int_V s dV = \int_V \frac{\partial s}{\partial t} dV + \int_S s(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) dS \quad (\text{الف ۵-۵})$$

این تعمیم فرمول لایب‌نیتس برای مشتق‌گیری از یک انتگرال ساده است (نگاه کنید به معادله (ج ۳-۲)). در نظر داشته باشید که  $V = V(t)$  و  $S = S(t)$ . معادله (الف ۵-۵) در مورد بردارها و تانسورها نیز صادق است.

اگر انتگرال روی حجمی تعریف شده باشد که سطح آن با سرعت موضعی سیال حرکت می‌کند (به طوری که  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}$ )، آن‌گاه استفاده از معادله پیوستگی به نتیجه مفید دیگری منتهی می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV = \int_V \rho \frac{Ds}{Dt} dV \quad (\text{الف ۶-۵})$$

که در آن  $\rho$  چگالی سیال است. گاهی معادله (الف ۶-۵) را قضیه انتقال رینولدز می‌نامند.

### تمرین

۱. میدان برداری زیر مفروض است:

$$\mathbf{v} = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3$$

مطلوب است محاسبه دو طرف معادله (الف ۱-۵) روی ناحیه محصور توسط صفحه‌های  $x_1 = 1, x_1 = 0$ ;  $x_2 = 2, x_2 = 0$ ; و  $x_3 = 4, x_3 = 0$ .

۲. با استفاده از همین میدان برداری هر دو طرف معادله (الف ۴-۵) را به ازای  $x_1 = 1$  در تمرین ۱ محاسبه کنید.

۳. تابع اسکالر وابسته به زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$s = x + y + zt$$

هر دو طرف معادله (الف ۵-۵) را روی حجم محصور توسط صفحه‌های  $x = t, x = 0$ ;  $y = 2t, y = 0$ ; و  $z = 4t, z = 0$  محاسبه کنید. کمیت‌های  $x, y, z$  و  $t$  بدون بُعدند.

۴. با استفاده از معادله (الف ۴-۵) (که در آن  $\mathbf{v}$  با  $\tau$  جایگزین شده باشد)، نشان دهید که وقتی

$$\sigma_{ki} = \sum_j \varepsilon_{ijk} x_j$$

$$\tau \int_S \mathbf{n} dS = \oint_C [\mathbf{r} \times \mathbf{t}] dC$$

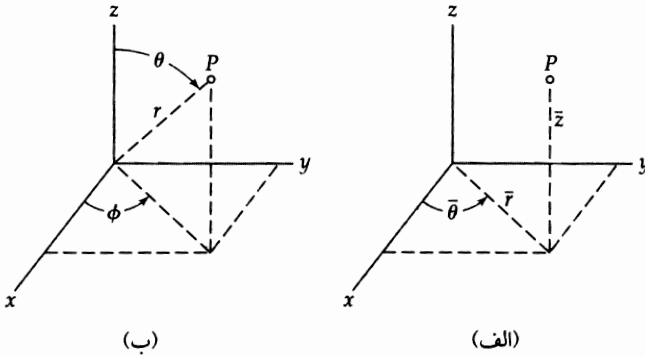
که در آن  $\tau$  بردار مکانی است که محل نقطه‌ای روی  $C$  را نسبت به مبدأ مشخص می‌کند.

۵. هر دو طرف معادله (الف ۲-۵) را به ازای تابع  $s(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  محاسبه کنید. حجم  $V$  منشور مثلث القاعده واقع بین دو مثلثی است که رئوس آن‌ها عبارت‌اند از:  $(2, 0, 0)$ ،  $(2, 1, 0)$ ،  $(2, 0, 3)$  و  $(-2, 0, 0)$ ،  $(-2, 1, 0)$ ،  $(-2, 0, 3)$ .

### الف ۶. جبر برداری و تانسوری در مختصات خمیده خطی

تا این‌جا فقط مختصات دکارتی  $x, y, z$  را در نظر گرفتیم. اگرچه معمولاً عملیات را در دستگاه مختصات دکارتی انجام می‌دهند، برای حل مسئله غالباً استفاده از دستگاه‌های مختصات خمیده خطی طبیعی‌تر است. دو دستگاه

مختصات خمیده خطی متداول تر عبارتند از: دستگاه مختصات استوانه‌ای و دستگاه مختصات کروی. در ادامه مطلب فقط این دو دستگاه را شرح می‌دهیم، اما می‌توان روش‌های گفته شده را در مورد همه دستگاه‌های متعامد یعنی دستگاه‌هایی که در آن‌ها سه خانواده مختصات دوه‌دو برهم عمودند نیز به کار برد.



شکل الف.۱-۶ (الف) مختصات استوانه‌ای<sup>۱</sup> با  $-\infty < \bar{z} < \infty$ ،  $0 \leq \bar{\theta} < 2\pi$ ،  $0 \leq \bar{r} < \infty$  و (ب) مختصات کروی با  $0 \leq \theta \leq \pi$ ،  $0 \leq \phi < 2\pi$ ،  $0 \leq r < \infty$  توجه کنید که  $\bar{r}$  و  $\bar{\theta}$  در مختصات استوانه‌ای، همان  $r$  و  $\theta$  در مختصات کروی نیستند. به نحوه نوشتن بردار مکان  $\mathbf{r}$  و طول آن در سه دستگاه مختصات توجه کنید:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \delta_x x + \delta_y y + \delta_z z; & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \text{قائم:} \\ \mathbf{r} &= \delta_r \bar{r} + \delta_z \bar{z}; & r &= \sqrt{\bar{r}^2 + \bar{z}^2} & \text{استوانه‌ای:} \\ \mathbf{r} &= \delta_r r; & r &= r & \text{کروی:} \end{aligned}$$

ما اصولاً به یادگیری نحوه نوشتن عملیات دیفرانسیلی مختلف، مانند  $\nabla s$ ،  $[\nabla \times \mathbf{v}]$ ، و  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$  در دستگاه‌های خمیده خطی علاقه‌مندیم. اگر درباره دستگاه مختصات مورد استفاده دو نکته را بدانیم، انجام این کار به روشی سراسر امکان‌پذیر است: (الف) عبارتی برای  $\nabla$  در دستگاه مختصات خمیده خطی؛ و (ب) مشتق‌های مکانی بردارهای یکه در دستگاه مختصات خمیده خطی. بنابراین روی این دو نکته تمرکز می‌کنیم.

### مختصات استوانه‌ای

در مختصات استوانه‌ای، به جای تعیین مختصات یک نقطه توسط  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  مکان آن نقطه را با مقادیر  $r$ ،  $\theta$ ، و  $z$  مشخص می‌کنیم. این مختصات<sup>۱</sup> در شکل الف.۱-۶ (الف) نشان داده شده‌اند و با روابط زیر به مختصات قائم مربوط می‌شوند:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & \text{(الف.۱-۶)} & r = +\sqrt{x^2 + y^2} & \text{(الف.۴-۶)} \\ y = r \sin \theta & \text{(الف.۲-۶)} & \theta = \arctan(y/x) & \text{(الف.۵-۶)} \\ z = z & \text{(الف.۳-۶)} & z = z & \text{(الف.۶-۶)} \end{cases}$$

۱. تذکر: استفاده از نمادگذاری آشنای  $r$ ،  $\theta$ ،  $z$  را برای مختصات استوانه‌ای، به نمادگذاری‌های ناآشنا ترجیح دادیم، اگر چه دو وضعیت وجود دارد که ممکن است در آن‌ها آشفتگی‌هایی پدید آید: (الف) گاهی ناگزیر باید در یک مسئله از هر دو نوع مختصات استوانه‌ای و کروی استفاده کرد، و نمادهای  $r$  و  $\theta$  در دو دستگاه معانی متفاوتی دارند؛ (ب) گاهی در مسئله‌ها با بردار مکان  $\mathbf{r}$  سروکار داریم که شامل مختصات استوانه‌ای است، اما اندازه  $r$  با مختص  $r$  برابر نیست، بلکه مساوی است با  $\sqrt{r^2 + z^2}$ . در چنین وضعیت‌هایی، مانند شکل الف.۱-۶، می‌توان مختصات استوانه‌ای را به صورت  $\bar{r}$ ،  $\bar{\theta}$ ،  $\bar{z}$  نمایش داد. در بیش‌تر موارد به این خطوط در بالای حروف نیازی نیست.



برای تبدیل مشتق اسکالر‌ها نسبت به  $x, y, z$  به مشتق نسبت به  $r, \theta, z$  از «قاعده زنجیری» مشتق‌گیری جزئی<sup>۲</sup> استفاده می‌کنیم. رابطه بین عملگرهای مشتق به آسانی پیدا می‌شود و عبارت است از:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = (\cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{\sin \theta}{r}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} + (0) \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} = (\sin \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{\cos \theta}{r}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} + (0) \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} = (0) \frac{\partial}{\partial r} + (0) \frac{\partial}{\partial \theta} + (1) \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(الف ۷-۶)} \\ \text{(الف ۸-۶)} \\ \text{(الف ۹-۶)} \end{array}$$

با این روابط، مشتق‌های هر تابع اسکالر (و البته شامل مؤلفه‌های بردارها و تانسورها)، نسبت به  $x, y, z$  و  $r, \theta, z$  می‌توان برحسب مشتق‌ها نسبت به  $r, \theta, z$  بیان کرد.

پس از تشریح روابط بین مختصات و مشتق‌ها در دو دستگاه مختصات، اکنون به سراغ روابط بین بردارهای یک می‌رویم. کار را با توجه به این نکته آغاز می‌کنیم که بردارهای یک  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  (یا به طوری که ما آن‌ها را نامیده‌ایم،  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ) از مکان - یعنی از  $x, y, z$  - مستقل‌اند. در مختصات استوانه‌ای، چنان‌که در شکل الف ۶-۲ مشاهده می‌شود، بردارهای یک  $\delta_r$  و  $\delta_\theta$  به مکان بستگی دارند. بردار یک  $\delta_r$  برداری به طول واحد در جهت افزایش  $r$  و بردار یک  $\delta_\theta$  برداری به طول واحد در جهت افزایش  $\theta$  است. بدیهی است که با حرکت نقطه  $P$  روی صفحه  $xy$ ، جهت‌های  $\delta_r$  و  $\delta_\theta$  تغییر می‌کند. استدلال مثلثاتی مقدماتی به روابط زیر منتهی می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_r = (\cos \theta) \delta_x + (\sin \theta) \delta_y + (0) \delta_z \\ \delta_\theta = (-\sin \theta) \delta_x + (\cos \theta) \delta_y + (0) \delta_z \\ \delta_z = (0) \delta_x + (0) \delta_y + (1) \delta_z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(الف ۱۰-۶)} \\ \text{(الف ۱۱-۶)} \\ \text{(الف ۱۲-۶)} \end{array}$$

این معادلات را می‌توان برحسب  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  حل کرد و نتیجه گرفت که:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_x = (\cos \theta) \delta_r + (-\sin \theta) \delta_\theta + (0) \delta_z \\ \delta_y = (\sin \theta) \delta_r + (\cos \theta) \delta_\theta + (0) \delta_z \\ \delta_z = (0) \delta_r + (0) \delta_\theta + (1) \delta_z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(الف ۱۳-۶)} \\ \text{(الف ۱۴-۶)} \\ \text{(الف ۱۵-۶)} \end{array}$$

در بخش بعد سودمندی این دو مجموعه از روابط آشکار خواهد شد.

در دستگاه مختصات استوانه‌ای هم، چنان‌که در مختصات دکارتی در معادله‌های (الف ۲-۱۶) و (الف ۳-۱۷) دیدیم، می‌توان بردارها و تانسورها را به مؤلفه‌هایشان تجزیه کرد (یعنی  $v = \delta_r v_r + \delta_\theta v_\theta + \delta_z v_z$ ). به علاوه، قواعد ضرب برای بردارهای یک و دوتایی‌های یک، و عملیات ضرب برداری (اما نه عملیات دیفرانسیلی!) به صورتی انجام می‌شوند که در بخش‌های الف ۲ و ۳ انجام شد. مثلاً:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = v_r w_r + v_\theta w_\theta + v_z w_z \quad \text{(الف ۱۶-۶)}$$

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{w}] = \delta_r (v_\theta w_z - v_z w_\theta) + \delta_\theta (v_z w_r - v_r w_z)$$

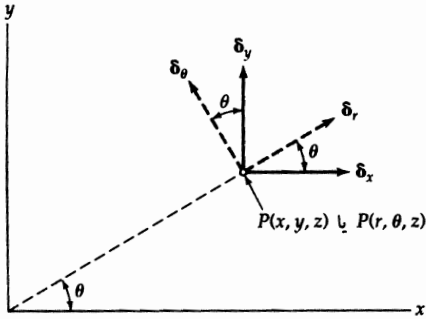
۲. مثلاً، برای تابع اسکالر  $\chi(x, y, z) = \psi(r, \theta, z)$  داریم:

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_{y,z} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{y,z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{\theta,z} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{y,z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)_{r,z} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_{r,\theta}$$

توجه کنید که از نمادهای متفاوت  $\chi$  و  $\psi$  استفاده کرده‌ایم، زیرا  $\chi$  تابعی متفاوت از  $x, y, z$  و  $\psi$  تابعی دیگر از  $r, \theta, z$  است!

$$+ \delta_z (v_r w_\theta - v_\theta w_r) \quad (\text{الف. ۱۷-۶})$$

$$\begin{aligned} \{\sigma \cdot \tau\} = & \delta_r \delta_r (\sigma_{rr} \tau_{rr} + \sigma_{r\theta} \tau_{r\theta} + \sigma_{rz} \tau_{rz}) \\ & + \delta_r \delta_\theta (\sigma_{r\theta} \tau_{r\theta} + \sigma_{r\theta} \tau_{\theta\theta} + \sigma_{rz} \tau_{z\theta}) \\ & + \delta_r \delta_z (\sigma_{rz} \tau_{rz} + \sigma_{r\theta} \tau_{\theta z} + \sigma_{rz} \tau_{zz}) \\ & + \text{etc.} \end{aligned} \quad (\text{الف. ۱۸-۶})$$



شکل الف. ۲-۶ بردارهای یکه در دستگاه‌های مختصات قائم و استوانه‌ای. محور z و بردار یکه  $\delta_z$  را برای ساده‌تر شدن حذف کرده‌ایم.

### مختصات کروی

اکنون همین نوع اطلاعات را برای مختصات کروی  $r, \theta, \phi$  جدول‌بندی می‌کنیم تا به‌عنوان مرجع به‌کار آید. این مختصات در شکل الف. ۱-۶ (ب) نشان داده شده‌اند و با استفاده از روابط زیر به مختصات دکارتی مربوط می‌شوند:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi & (\text{الف. ۱۹-۶}) & r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & (\text{الف. ۲۲-۶}) \\ y = r \sin \theta \sin \phi & (\text{الف. ۲۰-۶}) & \theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z) & (\text{الف. ۲۳-۶}) \\ z = r \cos \theta & (\text{الف. ۲۱-۶}) & \phi = \arctan(y/x) & (\text{الف. ۲۴-۶}) \end{cases}$$

در مختصات کروی، برای عملگرهای مشتق روابط زیر را داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = (\sin \theta \cos \phi) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{r}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(-\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}\right) \frac{\partial}{\partial \phi} & (\text{الف. ۲۵-۶}) \\ \frac{\partial}{\partial y} = (\sin \theta \sin \phi) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\cos \theta \sin \phi}{r}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\cos \phi}{r \sin \theta}\right) \frac{\partial}{\partial \phi} & (\text{الف. ۲۶-۶}) \\ \frac{\partial}{\partial z} = (\cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{\sin \theta}{r}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} + (0) \frac{\partial}{\partial \phi} & (\text{الف. ۲۷-۶}) \end{cases}$$

روابط بین بردارهای یکه عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} \delta_r = (\sin \theta \cos \phi) \delta_x + (\sin \theta \sin \phi) \delta_y + (\cos \theta) \delta_z & (\text{الف. ۲۸-۶}) \\ \delta_\theta = (\cos \theta \cos \phi) \delta_x + (\cos \theta \sin \phi) \delta_y + (-\sin \theta) \delta_z & (\text{الف. ۲۹-۶}) \\ \delta_\phi = (-\sin \phi) \delta_x + (\cos \phi) \delta_y + (0) \delta_z & (\text{الف. ۳۰-۶}) \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} \delta_x = (\sin \theta \cos \phi) \delta_r + (\cos \theta \cos \phi) \delta_\theta + (-\sin \phi) \delta_\phi & \text{(الف. ۳۱-۶)} \\ \delta_y = (\sin \theta \sin \phi) \delta_r + (\cos \theta \sin \phi) \delta_\theta + (\cos \phi) \delta_\phi & \text{(الف. ۳۲-۶)} \\ \delta_z = (\cos \theta) \delta_r + (-\sin \theta) \delta_\theta + (0) \delta_\phi & \text{(الف. ۳۳-۶)} \end{cases}$$

و سرانجام، بعضی از عملیات نمونه در مختصات کروی عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}) &= \sigma_{rr} \tau_{rr} = \sigma_{r\theta} \tau_{r\theta} + \sigma_{r\phi} \tau_{r\phi} \\ &+ \sigma_{\theta r} \tau_{r\theta} + \sigma_{\theta\theta} \tau_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\phi} \tau_{\theta\phi} \\ &+ \sigma_{\phi r} \tau_{r\phi} + \sigma_{\phi\theta} \tau_{\theta\phi} + \sigma_{\phi\phi} \tau_{\phi\phi} \end{aligned} \quad \text{(الف. ۳۴-۶)}$$

$$(\mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{w}]) = \begin{vmatrix} u_r & u_\theta & u_\phi \\ v_r & v_\theta & v_\phi \\ w_r & w_\theta & w_\phi \end{vmatrix} \quad \text{(الف. ۳۵-۶)}$$

یعنی روابط ارائه شده در بخش‌های الف. ۲ و الف. ۳ (که شامل  $\nabla$  نمی‌شود!) را می‌توان مستقیماً برحسب مؤلفه‌های کروی نوشت.  
تمرین

۱. نشان دهید که:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \delta_r \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 0 \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \delta_r \delta_r \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{4}{3} \pi \delta$$

که در آن  $\delta_r$  بردار یکه درجهت  $r$  در مختصات کروی است.

۲. نشان دهید که در مختصات کروی  $\delta = \delta_r \delta_r + \delta_\theta \delta_\theta + \delta_\phi \delta_\phi$ .

### الف. ۷. عملیات دیفرانسیلی در مختصات خمیده خطی

اکنون به سراغ استفاده از عملگر  $\nabla$  در مختصات خمیده خطی می‌رویم. مانند بخش قبل، نتایج مربوط به مختصات استوانه‌ای و کروی را به تفصیل به دست می‌آوریم. سپس راهکار حاصل را برای به دست آوردن عملیات  $\nabla$  برای هر دستگاه مختصات خمیده خطی متعامد خلاصه می‌کنیم.

مختصات استوانه‌ای

از معادله‌های (الف. ۶-۱۰، ۱۱، و ۱۲) می‌توان عبارت‌هایی برای مشتق‌های مکانی بردارهای یکه  $\delta_r$ ،  $\delta_\theta$ ، و  $\delta_z$  به دست آورد:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r} \delta_r = 0 \quad \frac{\partial}{\partial r} \delta_\theta = 0 \quad \frac{\partial}{\partial r} \delta_z = 0} \quad \text{(الف. ۷-۱)}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta} \delta_r = \delta_\theta \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \delta_\theta = -\delta_r \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \delta_z = 0} \quad \text{(الف. ۷-۲)}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} \delta_r = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} \delta_\theta = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} \delta_z = 0} \quad (\text{الف-۳})$$

خواننده باید با در نظر گرفتن شیوه تغییر  $\delta_r$ ،  $\delta_\theta$  و  $\delta_z$ ، با تغییر مکان  $P$  در شکل الف-۲-۶ بتواند تفسیر هندسی این مشتق‌ها را به خوبی بیان کند.

اکنون از تعریف عملگر  $\nabla$  در معادله (الف-۱-۴)، عبارت‌های معادلات (الف-۱۳-۶، ۱۴، ۱۵) و عملگرهای مشتق در معادلات (الف-۷-۶، ۸، ۹)، استفاده می‌کنیم تا فرمول  $\nabla$  را در مختصات استوانه‌ای به دست آوریم:

$$\begin{aligned} \nabla &= \delta_x \frac{\partial}{\partial x} + \delta_y \frac{\partial}{\partial y} + \delta_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= (\delta_r \cos \theta - \delta_\theta \sin \theta) \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + (\delta_r \sin \theta + \delta_\theta \cos \theta) \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \delta_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{الف-۴})$$

وقتی این ضرب انجام شود، عبارت بسیار ساده می‌شود، و نتیجه می‌گیریم که برای مختصات استوانه‌ای:

$$\boxed{\nabla = \delta_r \frac{\partial}{\partial r} + \delta_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta_z \frac{\partial}{\partial z}} \quad (\text{الف-۵})$$

از همین عبارت می‌توان برای محاسبه همه عملیات دیفرانسیلی در مختصات استوانه‌ای استفاده کرد، به شرط آن‌که برای مشتق‌گیری از هر بردار یکه‌ای که عملگر  $\nabla$  روی آن عمل می‌کند، از معادله‌های (الف-۷-۱، ۲، ۳) استفاده شود. در مثال بعدی این نکته را روشن می‌کنیم.

### مختصات کروی

مشتق‌های مکانی  $\delta_r$ ،  $\delta_\theta$  و  $\delta_\phi$  با مشتق‌گیری از معادله‌های (الف-۶-۲۸، ۲۹، ۳۰) به دست می‌آیند:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r} \delta_r = 0 \quad \frac{\partial}{\partial r} \delta_\theta = 0 \quad \frac{\partial}{\partial r} \delta_\phi = 0} \quad (\text{الف-۶})$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta} \delta_r = \delta_\theta \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \delta_\theta = -\delta_r \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \delta_\phi = 0} \quad (\text{الف-۷})$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \phi} \delta_r = \delta_\phi \sin \theta \quad \frac{\partial}{\partial \phi} \delta_\theta = \delta_\phi \cos \theta \quad \frac{\partial}{\partial \phi} \delta_\phi = -\delta_r \sin \theta - \delta_\theta \cos \theta} \quad (\text{الف-۸})$$

با استفاده از معادله‌های (الف-۶-۳۱، ۳۲، ۳۳) و معادله‌های (الف-۶-۲۵، ۲۶، ۲۷) در معادله (الف-۱-۴)، عبارت زیر برای عملگر  $\nabla$  در مختصات کروی حاصل می‌شود:

$$\boxed{\nabla = \delta_r \frac{\partial}{\partial r} + \delta_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}} \quad (\text{الف-۹})$$

از این عبارت می‌توان برای انجام عملیات دیفرانسیلی در مختصات کروی استفاده کرد، به شرط آن‌که برای مشتق‌گیری از بردارهای یکه، از معادله‌های (الف-۷-۶، ۷، ۸) استفاده شود.

مختصات متعامد عام

تا این جا دو مورد از پرکاربردترین دستگاه‌های مختصات خمیده خطی را شرح دادیم. اکنون روابط مربوط به هر دستگاه خمیده خطی متعامد را، بدون اثبات، ارائه می‌دهیم. فرض کنید رابطه بین مختصات دکارتی  $x_i$  و مختصات خمیده خطی  $q_\alpha$  به شرح زیر است:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad \text{یا} \quad x_i = x_i(q_\alpha) \quad (\text{الف. ۷-۱۰})$$

این معادلات را می‌توان برحسب  $q_\alpha$  حل کرد و روابط وارون  $q_\alpha = q_\alpha(x_i)$  را به دست آورد. سپس بردارهای یکجه  $\delta_i$  در مختصات قائم و  $\delta_\alpha$  در مختصات خمیده خطی با روابط زیر بهم مربوط می‌شوند:

$$\begin{cases} \delta_\alpha = \sum_i h_\alpha \left( \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_i} \right) \delta_i = \sum_i \frac{1}{h_\alpha} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta_i & (\text{الف. ۷-۱۱}) \\ \delta_i = \sum_\alpha h_\alpha \left( \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_i} \right) \delta_\alpha = \sum_\alpha \frac{1}{h_\alpha} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta_\alpha & (\text{الف. ۷-۱۲}) \end{cases}$$

که در آن «ضرایب مقیاس»  $h_\alpha$  از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$h_\alpha^2 = \sum_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \right)^2 = \left[ \sum_i \left( \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{-1} \quad (\text{الف. ۷-۱۲})$$

سپس می‌توان مشتق‌های مکانی بردارهای یکجه  $\delta_\alpha$  را به دست آورد:

$$\frac{\partial \delta_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\delta_\beta}{h_\alpha} \frac{\partial h_\beta}{\partial q_\alpha} - \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^r \frac{\delta_\gamma}{h_\gamma} \frac{\partial h_\alpha}{\partial q_\gamma} \quad (\text{الف. ۷-۱۴})$$

و عملگر  $\nabla$  عبارت است از:

$$\nabla = \sum_\alpha \frac{\delta_\alpha}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \quad (\text{الف. ۷-۱۵})$$

خواننده باید نشان دهد که می‌توان معادله‌های (الف. ۷-۱ تا ۳)، (الف. ۷-۵)، و (الف. ۷-۶ تا ۹) را با استفاده از معادله‌های (الف. ۷-۱۴ و ۱۵) به دست آورد.

اکنون می‌توان با استفاده از معادله‌های (الف. ۷-۱۵ و ۱۴)، عبارت‌های زیر را برای ساده‌ترین عملیات  $\nabla$  به دست آورد:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_\alpha} v_\alpha \right) \quad (\text{الف. ۷-۱۶})$$

$$\nabla^T s = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_{\alpha}^2} \frac{\partial s}{\partial q_{\alpha}} \right) \quad (\text{الف. ۱۷-۷})$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \delta_1 & h_2 \delta_2 & h_3 \delta_3 & \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 & & & \end{vmatrix} \quad (\text{الف. ۱۸-۷})$$

در عبارت آخر، بردارهای یکه، بردارهای متعلق به دستگاه مختصات خمیده خطی اند. در کتاب مورس و فشر باخ می‌توان عملیات دیگری را یافت.<sup>۱</sup>

ضرایب مقیاس که در بالا معرفی شدند، در عبارتهای مربوط به جزء حجم و جزء سطح نیز ظاهر می‌شوند:  $dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$  و  $dS_{\alpha\beta} = h_{\alpha} h_{\beta} dq_{\alpha} dq_{\beta}$  ( $\alpha \neq \beta$ ): در این جا  $dS_{\alpha\beta}$  جزء سطحی روی سطحی با  $\gamma$  ثابت است، و  $\alpha \neq \gamma$  و  $\beta \neq \gamma$ . بر عهده خواننده است که نشان دهد جزء حجم‌ها و جزء سطح‌های مختلف در مختصات استوانه‌ای و کروی را می‌توان به این روش پیدا کرد.

در جدول‌های الف. ۱-۷، ۲، ۳، متداول‌ترین عملیات دیفرانسیلی را در دستگاه‌های مختصات دکارتی، استوانه‌ای، و کروی خلاصه کرده‌ایم.<sup>۲</sup> عبارتهای مختصات خمیده خطی ارائه شده را می‌توان با استفاده از روش نشان داده شده در دو مثال زیر به دست آورد.

### مثال الف. ۱-۷

عملیات دیفرانسیلی در مختصات استوانه‌ای عبارتهایی برای  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$  و  $\nabla \mathbf{v}$  در مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

حل

(الف) حل مسئله را با نوشتن  $\nabla$  در مختصات استوانه‌ای و تجزیه  $v$  به مؤلفه‌های آن شروع می‌کنیم:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \left\{ \left\{ \delta_r \frac{\partial}{\partial r} + \delta_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \cdot \{ \delta_r v_r + \delta_{\theta} v_{\theta} + \delta_z v_z \} \right\} \quad (\text{الف. ۱۹-۷})$$

از بسط عبارت بالا نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{v}) &= \left( \delta_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \delta_r v_r \right) + \left( \delta_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \delta_{\theta} v_{\theta} \right) = \left( \delta_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \delta_z v_z \right) \\ &+ \left( \delta_{\theta} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta_r v_r \right) + \left( \delta_{\theta} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta_{\theta} v_{\theta} \right) + \left( \delta_{\theta} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta_z v_z \right) \\ &+ \left( \delta_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \delta_r v_r \right) + \left( \delta_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \delta_{\theta} v_{\theta} \right) + \left( \delta_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \delta_z v_z \right) \quad (\text{الف. ۲۰-۷}) \end{aligned}$$

اکنون از روابط ارائه شده به صورت معادله‌های (الف. ۱-۷، ۲، ۳) برای محاسبه مشتق‌های بردارهای یکه استفاده می‌کنیم. نتیجه می‌شود:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = (\delta_r \cdot \delta_r) \frac{\partial v_r}{\partial r} + (\delta_r \cdot \delta_{\theta}) \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + (\delta_r \cdot \delta_z) \frac{\partial v_z}{\partial r} + (\delta_{\theta} \cdot \delta_r) \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

۲. برای آشنایی با سایر دستگاه‌های مختصات، به مجموعه فراگیر

P. Moon and D. E. Spencer, *Field Theory Handbook*, Springer, Berlin (1961).

رجوع کنید. به علاوه یک دستگاه مختصات متعامد نیز هست که در آن یکی از سه مجموعه سطوح مختصات از مخروط‌های هم‌محور (که نوسشان بر هم منطبق نیست) تشکیل شده است؛ همه عملیات  $\nabla$  توسط ابداع‌کنندگان این دستگاه مختصات جدول‌بندی شده است:

J. F. Dijksman and E. P. W. Savanije, *Rheol. Acta*, **24**, 105-118 (1985).

$$\begin{aligned}
 & + (\delta_\theta \cdot \delta_\theta) \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + (\delta_\theta \cdot \delta_z) \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} (\delta_\theta \cdot \delta_\theta) + \frac{v_\theta}{r} (\delta_\theta \cdot \{-\delta_r\}) \\
 & + (\delta_z \cdot \delta_r) \frac{\partial v_r}{\partial z} + (\delta_z \cdot \delta_\theta) \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + (\delta_z \cdot \delta_z) \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{الف. ۲۱-۷})
 \end{aligned}$$

چون  $1 = (\delta_r \cdot \delta_r) = 0 = (\delta_r \cdot \delta_\theta)$ ، و غیره، عبارت اخیر به صورت زیر ساده می‌شود:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{الف. ۲۲-۷})$$

که همان معادله (الف) جدول الف. ۲-۷ است. این روش کمی خسته‌کننده، اما در عوض سراسر است.

جدول الف. ۱-۷ خلاصه عملیات دیفرانسیلی شامل عملگر  $\nabla$  در مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ .

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{الف})$$

$$(\nabla^2 s) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) &= \tau_{xx} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \tau_{xy} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\
 &+ \tau_{zx} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \tau_{zy} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \tau_{zz} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\
 &+ \tau_{yx} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \tau_{yy} \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \tau_{yz} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad (\text{ج})
 \end{aligned}$$

$$[\nabla s]_x = \frac{\partial s}{\partial x} \quad (\text{د})$$

$$[\nabla s]_y = \frac{\partial s}{\partial y} \quad (\text{ه})$$

$$[\nabla s]_z = \frac{\partial s}{\partial z} \quad (\text{و})$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (\text{ز})$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (\text{ح})$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (\text{ط})$$

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (\text{ی})$$

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_y = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (\text{ک})$$

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (\text{ل})$$

$$[\nabla^2 \mathbf{v}]_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (\text{م})$$

$$[\nabla^2 \mathbf{v}]_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \quad (\text{ن})$$

$$[\nabla^2 \mathbf{v}]_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \quad (\text{س})$$

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}]_x = v_x \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) + v_y \left( \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) + v_z \left( \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) \quad (\text{ع})$$

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}]_y = v_x \left( \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) + v_y \left( \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) + v_z \left( \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \quad (\text{ف})$$

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}]_z = v_x \left( \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + v_y \left( \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) + v_z \left( \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \quad (\text{ص})$$

$$[\nabla \mathbf{v}]_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (\text{ق})$$

$$[\nabla \mathbf{v}]_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (\text{را})$$

$$[\nabla \mathbf{v}]_{xz} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (\text{ش})$$

$$[\nabla \mathbf{v}]_{yx} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (\text{ت})$$

$$[\nabla \mathbf{v}]_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (\text{ث})$$

$$[\nabla \mathbf{v}]_{yz} = \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (\text{خ})$$

$$[\nabla \mathbf{v}]_{zx} = \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (\text{ذ})$$

$$[\nabla \mathbf{v}]_{zy} = \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (\text{ض})$$

$$[\nabla \mathbf{v}]_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{الفالف})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{xx} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)_{\tau_{xx}} \quad (\text{بب})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{xy} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)_{\tau_{xy}} \quad (\text{جج})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{xz} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)_{\tau_{xz}} \quad (\text{دد})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{yx} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)_{\tau_{yx}} \quad (\text{ه ه})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{yy} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)_{\tau_{yy}} \quad (\text{وو})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{yz} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)_{\tau_{yz}} \quad (\text{زز})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{zx} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)_{\tau_{zx}} \quad (\text{حح})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{zy} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)_{\tau_{zy}} \quad (\text{طط})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{zz} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)_{\tau_{zz}} \quad (\text{یی})$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{که در آن:}$$



جدول الف. ۲- خلاصه عملیات دیفرانسیلی شامل عملگر  $\nabla$  در مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ .

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{الف})$$

$$(\nabla^\top s) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) &= \tau_{rr} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \tau_{r\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \tau_{rz} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ &+ \tau_{\theta r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \tau_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \tau_{\theta z} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ &+ \tau_{zr} \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \tau_{z\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) + \tau_{zz} \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{ج})$$

$$[\nabla s]_r = \frac{\partial s}{\partial r} \quad (\text{د})$$

$$[\nabla s]_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \quad (\text{ه})$$

$$[\nabla s]_z = \frac{\partial s}{\partial z} \quad (\text{و})$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_r = \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \quad (\text{ز})$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (\text{ح})$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (\text{ط})$$

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \quad (\text{ی})$$

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} - \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \quad (\text{ک})$$

$$[\nabla \times \boldsymbol{\tau}]_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \quad (\text{ل})$$

$$[\nabla^\top \mathbf{v}]_r = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{م})$$

$$[\nabla^\top \mathbf{v}]_\theta = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (\text{ن})$$

$$[\nabla^\top \mathbf{v}]_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \quad (\text{س})$$

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}]_r = v_r \left( \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r} \right) + v_z \left( \frac{\partial w_r}{\partial z} \right) \quad (\text{ع})$$

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}]_\theta = v_r \left( \frac{\partial w_\theta}{\partial r} \right) + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r}{r} \right) + v_z \left( \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) \quad (\text{ف})$$

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}]_z = v_r \left( \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right) + v_z \left( \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \quad (\text{ص})$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (\text{ق})$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{r\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad (\text{ر})$$

$$\begin{aligned} \{\nabla \mathbf{v}\}_{rz} &= \frac{\partial v_z}{\partial r} && \text{(ش)} \\ \{\nabla \mathbf{v}\}_{\theta r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} && \text{(ت)} \\ \{\nabla \mathbf{v}\}_{\theta \theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} && \text{(ث)} \\ \{\nabla \mathbf{v}\}_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} && \text{(خ)} \\ \{\nabla \mathbf{v}\}_{zr} &= \frac{\partial v_r}{\partial z} && \text{(ذ)} \\ \{\nabla \mathbf{v}\}_{z\theta} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial z} && \text{(ض)} \\ \{\nabla \mathbf{v}\}_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} && \text{(الفالف)} \\ \{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{rr} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{rr} - \frac{v_\theta}{r} (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}) && \text{(بب)} \\ \{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{r\theta} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{r\theta} + \frac{v_\theta}{r} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) && \text{(جج)} \\ \{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{rz} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{rz} - \frac{v_\theta}{r} \tau_{\theta z} && \text{(دد)} \\ \{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{\theta r} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\theta r} + \frac{v_\theta}{r} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) && \text{(هه)} \\ \{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{\theta \theta} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\theta\theta} + \frac{v_\theta}{r} (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}) && \text{(وو)} \\ \{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{\theta z} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\theta z} + \frac{v_\theta}{r} \tau_{rz} && \text{(زز)} \\ \{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{zr} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{zr} - \frac{v_\theta}{r} \tau_{z\theta} && \text{(حح)} \\ \{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{z\theta} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{z\theta} + \frac{v_\theta}{r} \tau_{zr} && \text{(طط)} \\ \{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{zz} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{zz} && \text{(یی)} \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) &= v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} && \text{که در آن:} \end{aligned}$$

جدول الف. ۳-۷ خلاصه عملیات دیفرانسیلی شامل عملگر  $\nabla$  در مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$ .

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{الف})$$

$$(\nabla^T s) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 s}{\partial \phi^2} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) &= \tau_{rr} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \tau_{r\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \tau_{r\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right) \\ &+ \tau_{\theta r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \tau_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \tau_{\theta\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \cot \theta \right) \\ &+ \tau_{\phi r} \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \tau_{\phi\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) + \tau_{\phi\phi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot \theta \right) \end{aligned} \quad (\text{ج})$$

$$[\nabla s]_r = \frac{\partial s}{\partial r} \quad (\text{د})$$

$$[\nabla s]_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \quad (\text{ه})$$

$$[\nabla s]_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial s}{\partial \phi} \quad (\text{و})$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \quad (\text{ز})$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \quad (\text{ح})$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (\text{ط})$$

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \tau_{\phi r} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \quad (\text{ی})$$

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \tau_{\phi\theta} \\ &+ \frac{(\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}) - \tau_{\phi\phi} \cot \theta}{r} \end{aligned} \quad (\text{ک})$$

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_\phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\phi} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \tau_{\phi\phi} \\ &+ \frac{(\tau_{\phi r} - \tau_{r\phi}) + \tau_{\phi\theta} \cot \theta}{r} \end{aligned} \quad (\text{ل})$$

$$\begin{aligned} [\nabla^T \mathbf{v}]_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (\text{م})$$

$$\begin{aligned} [\nabla^T \mathbf{v}]_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (\text{ن})$$

$$\begin{aligned} [\nabla^T \mathbf{v}]_\phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (\text{س})$$

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}]_r = v_r \left( \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r} \right) + v_\phi \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w_r}{\partial \phi} - \frac{w_\phi}{r} \right) \quad (\text{ع})$$

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}]_\theta = v_r \left( \frac{\partial w_\theta}{\partial r} \right) + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r}{r} \right) + v_\phi \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} - \frac{w_\phi}{r} \cot \theta \right) \quad (\text{ف})$$

$$[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}]_\phi = v_r \left( \frac{\partial w_\phi}{\partial r} \right) + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w_\phi}{\partial \theta} \right) + v_\phi \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{w_r}{r} + \frac{w_\theta}{r} \cot \theta \right) \quad (\text{ص})$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (\text{ق})$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{r\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad (\text{را})$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{r\phi} = \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \quad (\text{ش})$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \quad (\text{ت})$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \quad (\text{ث})$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\theta\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \quad (\text{ج})$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\phi r} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \quad (\text{ذ})$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\phi\theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \cot \theta \quad (\text{ض})$$

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot \theta \quad (\text{الفالف})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{rr} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{rr} - \left( \frac{v_\theta}{r} \right) (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}) - \left( \frac{v_\phi}{r} \right) (\tau_{r\phi} + \tau_{\phi r}) \quad (\text{بب})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{r\theta} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{r\theta} + \left( \frac{v_\theta}{r} \right) (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) - \left( \frac{v_\phi}{r} \right) (\tau_{\phi\theta} + \tau_{r\phi} \cot \theta) \quad (\text{جج})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{r\phi} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{r\phi} - \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \tau_{\theta\phi} + \left( \frac{v_\phi}{r} \right) [(\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi}) + \tau_{r\theta} \cot \theta] \quad (\text{دد})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{\theta r} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\theta r} + \left( \frac{v_\theta}{r} \right) (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) - \left( \frac{v_\phi}{r} \right) (\tau_{\theta\phi} + \tau_{\phi r} \cot \theta) \quad (\text{ه ه})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{\theta\theta} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\theta\theta} + \left( \frac{v_\theta}{r} \right) (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}) - \left( \frac{v_\phi}{r} \right) (\tau_{\theta\phi} + \tau_{\phi\theta}) \cot \theta \quad (\text{وو})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{\theta\phi} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\theta\phi} + \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \tau_{r\phi} + \left( \frac{v_\phi}{r} \right) [\tau_{\theta r} + (\tau_{\theta\theta} - \tau_{\phi\phi}) \cot \theta] \quad (\text{زز})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{\phi r} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\phi r} - \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \tau_{\phi\theta} + \left( \frac{v_\phi}{r} \right) [(\tau_{rr} - \tau_{\phi\phi}) + \tau_{\theta r} \cot \theta] \quad (\text{حح})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{\phi\theta} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\phi\theta} + \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \tau_{\phi r} + \left( \frac{v_\phi}{r} \right) [\tau_{r\theta} + (\tau_{\theta\theta} - \tau_{\phi\phi}) \cot \theta] \quad (\text{طط})$$

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}\}_{\phi\phi} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \tau_{\phi\phi} + \left( \frac{v_\theta}{r} \right) [(\tau_{r\phi} + \tau_{\phi r}) + (\tau_{\theta\phi} + \tau_{\phi\theta}) \cot \theta] \quad (\text{یی})$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad \text{که در آن:}$$

(ب) سپس ضرب دوتایی  $\nabla \mathbf{v}$  را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \left\{ \delta_r \frac{\partial}{\partial r} = \delta_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \{ \delta_r v_r + \delta_\theta v_\theta + \delta_z v_z \} \\ &= \delta_r \delta_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \delta_r \delta_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \delta_r \delta_z \frac{\partial v_z}{\partial r} + \delta_\theta \delta_r \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \delta_\theta \delta_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \delta_\theta \delta_z \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ &\quad + \delta_\theta \delta_\theta \frac{v_r}{r} - \delta_\theta \delta_r \frac{v_\theta}{r} + \delta_z \delta_r \frac{\partial v_r}{\partial z} + \delta_z \delta_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \delta_z \delta_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \delta_r \delta_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \delta_r \delta_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \delta_r \delta_z \frac{\partial v_z}{\partial r} + \delta_\theta \delta_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \delta_\theta \delta_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \\ &\quad + \delta_\theta \delta_z \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \delta_z \delta_r \frac{\partial v_r}{\partial z} + \delta_z \delta_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \delta_z \delta_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{الف. ۲۳-۷}) \end{aligned}$$

بنابراین مؤلفه  $rr$  عبارت است از:  $\partial v_r / \partial r$ ، مؤلفه  $r\theta$  برابر است با:  $\partial v_\theta / \partial r$ ، و غیره، که در جدول الف. ۲-۷ آمده است.

### مثال الف. ۲-۷

عملیات دیفرانسیلی در مختصات کروی  
مطلوب است تعیین مؤلفه  $r$  عبارت  $[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]$ ، در مختصات کروی.

حل

با استفاده از معادله (الف. ۹-۷)، داریم:

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_r &= \left[ \left\{ \delta_r \frac{\partial}{\partial r} + \delta_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} \cdot \{ \delta_r \delta_r \tau_{rr} + \delta_r \delta_\theta \tau_{r\theta} + \delta_r \delta_\phi \tau_{r\phi} \right. \\ &\quad \left. + \delta_\theta \delta_r \tau_{\theta r} + \delta_\theta \delta_\theta \tau_{\theta\theta} + \delta_\theta \delta_\phi \tau_{\theta\phi} + \delta_\phi \delta_r \tau_{\phi r} + \delta_\phi \delta_\theta \tau_{\phi\theta} + \delta_\phi \delta_\phi \tau_{\phi\phi} \right]_r \quad (\text{الف. ۲۴-۷}) \end{aligned}$$

حال از معادله‌های (الف. ۶-۷، ۷، ۸) و معادله (الف. ۳-۳) استفاده می‌کنیم. چون فقط به مؤلفه  $r$  نیاز داریم، تنها جمله‌هایی را انتخاب می‌کنیم که در ضریب  $\delta_r$  سهم دارند:

$$\left[ \delta_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \delta_r \delta_r \tau_{rr} \right] = [\delta_r \cdot \delta_r \delta_r] \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} = \delta_r \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \quad (\text{الف. ۲۵-۷})$$

$$\left[ \delta_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \delta_\theta \delta_r \tau_{\theta r} \right] = [\delta_\theta \cdot \delta_\theta \delta_r] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \text{جمله‌های دیگر} \quad (\text{الف. ۲۶-۷})$$

$$\left[ \delta_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \delta_\phi \delta_r \tau_{\phi r} \right] = [\delta_\phi \cdot \delta_\phi \delta_r] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \tau_{\phi r} + \text{جمله‌های دیگر} \quad (\text{الف. ۲۷-۷})$$

$$\begin{aligned} \left[ \delta_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \delta_r \delta_r \tau_{rr} \right] &= \frac{\tau_{rr}}{r} \left[ \delta_\theta \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \delta_r \right\} \delta_r \right] + \frac{\tau_{rr}}{r} \left[ \delta_\theta \cdot \delta_r \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \delta_r \right\} \right] \quad (\text{الف. ۲۸-۷}) \\ &= \frac{\tau_{rr}}{r} [\delta_\theta \cdot \delta_\theta \delta_r] = \delta_r \frac{\tau_{rr}}{r} \end{aligned}$$

$$\left[ \delta_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \delta_r \delta_r \tau_{rr} \right] = \frac{\tau_{rr}}{r \sin \theta} \left[ \delta_\phi \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} \delta_r \right\} \delta_r \right]$$

$$= \frac{\tau_{rr}}{r \sin \theta} [\delta_\phi \cdot \delta_\phi \sin \theta \delta_r] = \delta_r \frac{\tau_{rr}}{r} \quad (\text{الف. ۲۹-۷})$$

$$\left[ \delta_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \delta_\theta \delta_\theta \tau_{\theta\theta} \right] = \delta_r \left( -\frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right) + \text{جمله‌های دیگر} \quad (\text{الف. ۳۰-۷})$$

$$\left[ \delta_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \delta_\theta \delta_r \tau_{\theta r} \right] = \delta_r \frac{\tau_{\theta r} \cos \theta}{r \sin \theta} \quad (\text{الف. ۳۱-۷})$$

$$\left[ \delta_\phi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \delta_\phi \delta_\phi \tau_{\phi\phi} \right] = \delta_r \left( \frac{-\tau_{\phi\phi}}{r} \right) + \text{جمله‌های دیگر} \quad (\text{الف. ۳۲-۷})$$

با ترکیب کردن نتایج بالا، داریم:

$$[\nabla \cdot \tau_r] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{\tau_{\theta r}}{r} \cot \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \quad (\text{الف. ۳۳-۷})$$

توجه کنید که صرف‌نظر از متقارن بودن یا نبودن  $\tau$ ، عبارت بالا صحیح است.  
تعرین

۱. اگر  $\mathbf{r}$  بردار مکان لحظه‌ای یک ذره باشد، نشان دهید که سرعت و شتاب ذره، در دستگاه مختصات استوانه‌ای، از روابط زیر به دست می‌آید (از معادله (الف. ۲-۷) استفاده کنید):

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r} = \delta_r \dot{r} + \delta_\theta r \dot{\theta} + \delta_z \dot{z} \quad (\text{الف. ۳۴-۷})$$

$$\mathbf{a} = \delta_r (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) + \delta_\theta (r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) + \delta_z \ddot{z} \quad (\text{الف. ۳۵-۷})$$

نقطه‌های روی حروف نشانه مشتق‌های زمانی مختصات اند.

۲. حاصل عبارت‌های  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$ ،  $[\nabla \times \mathbf{v}]$ ، و  $\nabla \mathbf{v}$  را در مختصات کروی، و  $[\nabla \cdot \tau]$  را در مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

۳. با استفاده از جدول الف. ۲-۷، کمیت‌های زیر را در دستگاه مختصات کروی، مستقیماً بنویسید:

(الف)  $(\nabla \cdot \rho \mathbf{v})$  که در آن  $\rho$  اسکالر است.

(ب)  $[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}]_r$  که در آن  $\rho$  اسکالر است.

(ج)  $[\nabla \cdot p \delta]_\theta$  که در آن  $p$  اسکالر است.

(د)  $(\nabla \cdot [\tau \cdot \mathbf{v}])$

(ه)  $[\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}]_\theta$

(و)  $\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger$

۴. نشان دهید که درایه‌های  $\nabla^2 \mathbf{v}$  در جدول الف. ۲-۷ را می‌توان با استفاده از هریک از روش‌های زیر به دست آورد:

(الف) ابتدا نشان دهید که عملگر  $(\nabla \cdot \nabla)$  در مختصات استوانه‌ای، عبارت است از:

$$(\nabla \cdot \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{الف. ۳۶-۷})$$

و سپس عملگر را در مورد  $\mathbf{v}$  به کار ببرید.

(ب) از عبارت ارائه شده برای  $[\nabla \cdot \mathcal{T}]$  در جدول الف. ۷-۲ استفاده کنید، اما به جای مؤلفه‌های  $\mathcal{T}$ ، مؤلفه‌های  $\nabla \mathbf{v}$  را قرار دهید تا نتیجه شود  $[\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}]$ .

(ج) از معادله (الف. ۴-۲۲) استفاده کنید:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - [\nabla \times [\nabla \times \mathbf{v}]] \quad (\text{الف. ۷-۳۷})$$

و عملیات گرادیان، دیورژانس، و کرل جدول الف. ۷-۲ را به کار ببرید تا بتوانید عملیات سمت راست را محاسبه کنید.

### الف. ۸. عملیات انتگرالی در مختصات خمیده خطی

در انجام انتگرال‌گیری‌های بخش الف. ۵ در مختصات خمیده خطی، درک نحوه ترسیم جزء حجم‌ها، که برای مختصات استوانه‌ای در شکل الف. ۸-۱ و برای مختصات کروی در شکل الف. ۸-۲ نشان داده شده، مهم است.

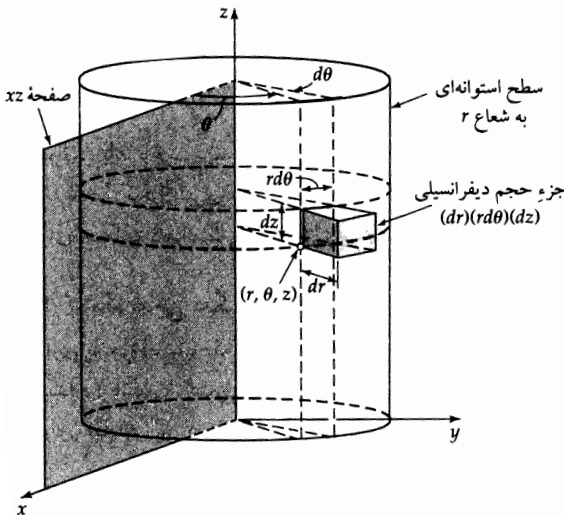
هنگام گرفتن انتگرال‌های حجمی، ساده‌ترین وضعیت‌ها، وضعیت‌هایی است که در آن‌ها سطوح کرانی، سطوح مختصات باشند. در دستگاه مختصات استوانه‌ای، انتگرال حجم تابع  $f(r, \theta, z)$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r, \theta, z) r \, dr \, d\theta \, dz \quad (\text{الف. ۸-۱})$$

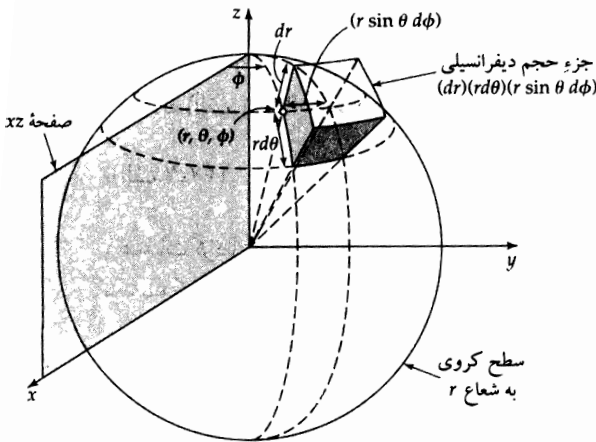
و در دستگاه مختصات کروی، انتگرال حجم تابع  $g(r, \theta, \phi)$  چنین است:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} g(r, \theta, \phi) r^2 \, dr \, \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{الف. ۸-۲})$$

از آن جاکه حدود این انتگرال‌ها  $(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$  و غیره مقادیر ثابت‌اند، ترتیب انتگرال‌گیری اهمیتی ندارد.



شکل الف. ۸-۱ جزء حجم دیفرانسیلی  $r \, dr \, d\theta \, dz$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای، و جزء خط‌های دیفرانسیلی  $dr$ ،  $rd\theta$  و  $dz$ . جزء حجم‌های دیفرانسیلی عبارت‌اند از:  $(r \, d\theta)(dz)$  عمود بر راستای  $r$  (ناحیه سایه‌خورده متوسط)،  $(dz)(dr)$  عمود بر راستای  $\theta$  (ناحیه سایه‌خورده تیره)، و  $(dr)(r \, d\theta)$  عمود بر راستای  $z$  (ناحیه سایه‌خورده روشن).



شکل الف. ۲-۸. جزء حجم دیفرانسیلی  $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  در دستگاه مختصات کروی، و جزء خط‌های دیفرانسیلی  $r d\theta$ ،  $dr$ ،  $r \sin \theta d\phi$ ، و جزء سطح‌های دیفرانسیلی عبارت‌اند از:  $(r d\theta)(r \sin \theta d\phi)$  بر راستای  $r$  (ناحیه سایه‌خورده روشن)؛  $(r \sin \theta d\phi)(dr)$  عمود بر راستای  $\theta$  (ناحیه سایه‌خورده تیره)؛ و  $(dr)(r d\theta)$  عمود بر راستای  $\phi$  (ناحیه سایه‌خورده متوسط).

در انجام انتگرال‌گیری روی سطح، ساده‌ترین وضعیت‌ها، وضعیت‌هایی است که در آن‌ها سطوحی که انتگرال‌گیری روی آن‌ها انجام می‌شود، سطوح مختصات باشند. برای مختصات استوانه‌ای سه امکان زیر وجود دارد:

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r_0, \theta, z) r_0 d\theta dz \quad \text{الف. ۳-۸. روی سطح } r = r_0$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r, \theta_0, z) dr dz \quad \text{الف. ۴-۸. روی سطح } \theta = \theta_0$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r, \theta, z_0) r dr d\theta \quad \text{الف. ۵-۸. روی سطح } z = z_0$$

به همین ترتیب، برای مختصات کروی، داریم:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(r_0, \theta, \phi) r_0^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad \text{الف. ۶-۸. روی سطح } r = r_0$$

$$\int_{\phi}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} g(r, \theta_0, \phi) \sin \theta_0 r dr d\phi \quad \text{الف. ۷-۸. روی سطح } \theta = \theta_0$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} g(r, \theta, \phi_0) r dr d\theta \quad \text{الف. ۸-۸. روی سطح } \phi = \phi_0$$

خواننده باید با ترسیم شکل نشان دهد که هریک از شش انتگرال سطح بالا، دقیقاً کدام ناحیه را توصیف می‌کنند. اگر ناحیه انتگرال‌گیری در یک انتگرال سطح، یکی از سطوح دستگاه مختصات نباشد، آن‌گاه باید به یکی از کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال رجوع کرد.

### الف. ۹. نکته‌هایی دیگر در مورد نمادگذاری برداری-تانسوری

نمادگذاری با حروف سیاه که در این کتاب به کار رفت، نمادگذاری گیبس<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. نمادگذاری دیگری موسوم به نمادگذاری تانسوری دکارتی<sup>۲</sup> نیز کاربرد گسترده‌ای دارد. چنان‌که در جدول الف. ۹-۱ نشان داده شده است، چند مثال برای مقایسه این دو سیستم کافی است. دو ستون بیرونی صرفاً دو راه متفاوت برای خلاصه‌نویسی عملیاتی

1. J. W. Gibbs, *Vector Analysis*, Dover Reprint, New York (1960).

2. W. Prager, *Mechanics of Continua*, Ginn, Boston (1961).



است که به‌صراحت در ستون میانی، در دستگاه مختصات دکارتی، توصیف شده‌اند. قواعد تبدیل از یک سیستم به سیستم دیگر به‌شرح زیر است.

برای تبدیل از نمادگذاری گسترده به نمادگذاری تانسوری دکارتی:

۱. همهٔ علامت‌های جمع را حذف کنید («قرارداد جمع انشتین»).

۲. همهٔ بردارهای یکه و دوتایی‌های یکه را حذف کنید.

۳.  $\partial/\partial x_i$  را با  $\partial_i$  جایگزین کنید.

جدول الف. ۹-۱

نمادگذاری تانسوری دکارتی	نمادگذاری برحسب بردارهای یکه و دوتایی‌های یکه	نمادگذاری گیبس
$v_i w_i$	$\sum_i v_i w_i$	$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$
$\varepsilon_{ijk} v_j w_k$	$\sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \delta_i v_j w_k$	$[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]$
$\partial_j \tau_{ji}$	$\sum_i \sum_j \delta_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ji}$	$(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})$
$\partial_i \partial_i s$	$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} s$	$\nabla^2 s$
$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \partial_j \partial_m v_n$	$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_m \sum_n \delta_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_m} v_n$	$[\nabla \times [\nabla \times \mathbf{v}]]$
$\varepsilon_{jkl} \tau_{ij} v_k$	$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \varepsilon_{jkl} \delta_i \tau_{ij} v_k$	$\{\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{v}\}$

برای تبدیل از نمادگذاری تانسوری دکارتی به نمادگذاری گسترده:

۱. علامت‌های جمع را برای همهٔ اندیس‌های تکراری اضافه کنید.

۲. بردارهای یکه و دوتایی‌های یکه را برای همهٔ اندیس‌های غیرتکراری اضافه کنید؛ در هر جمله از معادلهٔ تانسور، باید بردارهای یکه به‌همان ترتیب دوتایی‌های یکه ظاهر شوند.

۳.  $\partial_i$  را با  $\partial/\partial x_i$  جایگزین کنید.

نمادگذاری گیبس موجز است، خواندن آن آسان است، و فاقد هرگونه ارجاع به دستگاه مختصات است؛ اما باید مفهوم عملیات نقطه‌ای و برداری، و کاربرد نمادهای سیاه را دانست. نمادگذاری تانسوری دکارتی ماهیت عملیات را، در دستگاه مختصات دکارتی، به‌صراحت نشان می‌دهد، اما خطا در خواندن یا نوشتن اندیس‌ها بسیار آزردهنده است. کسانی که هردو سیستم را به‌خوبی می‌شناسند، استفاده از نمادگذاری گیبس را در بحث‌های کلی و برای ارائهٔ نتایج ترجیح می‌دهند، اما برای اثبات اتحادها از نمادگذاری تانسوری دکارتی استفاده می‌کنند.

گاهی از نمادگذاری ماتریس برای نمایش مؤلفه‌های بردارها و تانسورها، نسبت به دستگاه‌های مختصات تعیین شده، استفاده می‌کنند. مثلاً، وقتی  $\dot{\gamma}y = v_x$ ،  $v_y = 0$ ، و  $v_z = 0$ ، می‌توان  $\nabla \mathbf{v}$  را به دو روش نوشت:

$$\nabla \mathbf{v} = \delta_y \delta_x \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{الف. ۹-۱})$$

علامت «=» دوم در واقع علامت «تساوی» نیست، بلکه باید آن را چنین تفسیر کرد: «می‌توان به این صورت هم نشان داد». توجه کنید که این نمادگذاری تاحدودی مخاطره‌آمیز است، زیرا دوتایی‌های یکه‌ای که عناصر ماتریس در آن ضرب می‌شوند - در این مورد  $\delta_x \delta_x$ ،  $\delta_x \delta_y$ ، و غیره - باید استنباط شوند. اگر از مختصات استوانه‌ای استفاده کرده بودیم،  $\nabla \mathbf{v}$  با ماتریس زیر نشان داده می‌شد:

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \sin \theta \cos \theta & -\dot{\gamma} \sin^2 \theta & \circ \\ \dot{\gamma} \cos^2 \theta & -\dot{\gamma} \sin \theta \cos \theta & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \quad (\text{الف-۹})$$

که در آن عناصر ماتریس را باید در  $\delta_r \delta_\theta$ ،  $\delta_r \delta_r$ ، و غیره ضرب، و سپس باهم جمع کرد. باوجود خطر سوءتفسیر و استفاده ناصحیح از «=»، نمادگذاری ماتریسی کاربرد گسترده‌ای دارد و مهم‌ترین دلیل آن این است که عملیات «نقطه‌ای» با قواعد ضرب استاندارد ماتریس متناظرند. مثلاً:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (v_1 \ v_2 \ v_3) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \quad (\text{الف-۹})$$

$$[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}] = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} v_1 + \tau_{12} v_2 + \tau_{13} v_3 \\ \tau_{21} v_1 + \tau_{22} v_2 + \tau_{23} v_3 \\ \tau_{31} v_1 + \tau_{32} v_2 + \tau_{33} v_3 \end{pmatrix} \quad (\text{الف-۹})$$

البته، این نوع ضرب‌های ماتریسی فقط هنگامی معنا دارند که مؤلفه‌ها برحسب بردارهای یکه همانند بیان شوند.

## پیوست ب

### شارها و معادله‌های تغییر

- ب.۱ قانون ویسکوزیته نیوتون
- ب.۲ قانون رسانش گرمای فوریه
- ب.۳ قانون (اول) فیک برای نفوذ دوتایی
- ب.۴ معادله پیوستگی
- ب.۵ معادله حرکت برحسب  $\tau$
- ب.۶ معادله حرکت برای سیال نیوتونی با  $\mu$  و  $\rho$  ثابت
- ب.۷ تابع اتلاف  $\Phi_v$  برای سیالات نیوتونی
- ب.۸ معادله انرژی برحسب  $q$
- ب.۹ معادله انرژی برای سیالات نیوتونی خالص با  $k$  و  $\rho$  ثابت
- ب.۱۰ معادله پیوستگی گونه  $\alpha$  برحسب  $j_\alpha$
- ب.۱۱ معادله پیوستگی گونه  $A$  برحسب  $\omega_A$  به‌ازای  $\rho D_{AB}$  ثابت

ب.۱ قانون ویسکوزیته نیوتون

$$[\tau = -\mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger) + (\frac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta]$$

مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ :

$$\tau_{xx} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] + (\frac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{الف (ب.۱-۱)}$$

$$\tau_{yy} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] + (\frac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{الف (ب.۱-۲)}$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + (\frac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{الف (ب.۱-۳)}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \quad \text{(ب.۱-۴)}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \quad \text{(ب.۱-۵)}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left[ \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \quad \text{(ب.۱-۶)}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{الف (ب.۱-۷)}$$

که در آن

الف) وقتی فرض می‌شود که چگالی سیال ثابت است، جمله حاوی  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$  را می‌توان حذف کرد. برای گازهای تک‌اتمی در چگالی پایین، ویسکوزیته اتساعی  $\kappa$  صفر است.

مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ :

$$\tau_{rrr} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] + (\frac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{الف (ب.۱-۸)}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \right] + (\frac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{الف (ب.۱-۹)}$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[ 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + (\frac{2}{3}\mu - \kappa)(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{الف (ب.۱-۱۰)}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad \text{(ب.۱-۱۱)}$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \quad \text{(ب.۱-۱۲)}$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \quad \text{(ب.۱-۱۳)}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{الف (ب.۱-۱۴)}$$

که در آن

الف) وقتی فرض می‌شود که چگالی سیال ثابت است، جمله حاوی  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$  را می‌توان حذف کرد. برای گازهای تک‌اتمی در چگالی پایین، ویسکوزیته اتساعی  $\kappa$  صفر است.

مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\tau_{rr} = -\mu \left[ \gamma \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] + \left( \frac{\gamma}{\bar{\nu}} \mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{الف (ب.۱۵-۱)}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[ \gamma \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \right] + \left( \frac{\gamma}{\bar{\nu}} \mu - \kappa \right) (z \nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{الف (ب.۱۶-۱)}$$

$$\tau_{\phi\phi} = -\mu \left[ \gamma \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r + v_\theta \cot \theta}{r} \right) \right] + \left( \frac{\gamma}{\bar{\nu}} \mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \text{الف (ب.۱۷-۱)}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad \text{(ب.۱۸-۱)}$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\theta}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \quad \text{(ب.۱۹-۱)}$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = -\mu \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) \right] \quad \text{(ب.۲۰-۱)}$$

که در آن

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad \text{(ب.۲۱-۱)}$$

الف) وقتی فرض می‌شود که چگالی سیال ثابت است، جمله حاوی  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$  را می‌توان حذف کرد. برای گازهای تک‌اتمی در چگالی پایین، ویسکوزیته اتساعی  $\kappa$  صفر است.

ب.۲ قانون رسانش گرمای فوریه‌الف

$$[\mathbf{q} = -k \nabla T]$$

مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ :

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{(ب.۲-۱)}$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{(ب.۲-۲)}$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{(ب.۲-۳)}$$

مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ :

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{(ب.۲-۴)}$$

$$q_\theta = -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad \text{(ب.۲-۵)}$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{(ب.۲-۶)}$$

مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$ :

$$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{(ب.۲-۷)}$$

$$q_\theta = -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad \text{(ب.۲-۸)}$$

$$q_\phi = -k \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \quad \text{(ب.۲-۹)}$$

الف) برای مخلوطها، جمله  $\sum_\alpha (H_\alpha / M_\alpha) z_\alpha - k \nabla T$  را باید به  $\sum_\alpha (H_\alpha / M_\alpha) z_\alpha$  اضافه کرد (نگاه کنید به معادله (۲-۳-۱۹)).

ب.۳ قانون (اول) فیک برای نفوذ دوتایی الف

$$[j_A = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A]$$

مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ :

$$j_{Ax} = -\rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial x} \quad (\text{ب.۳-۱})$$

$$j_{Ay} = -\rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial y} \quad (\text{ب.۳-۲})$$

$$j_{Az} = -\rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial z} \quad (\text{ب.۳-۳})$$

مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ :

$$j_{Ar} = -\rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial r} \quad (\text{ب.۳-۴})$$

$$j_{A\theta} = -\rho D_{AB} \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_A}{\partial \theta} \quad (\text{ب.۳-۵})$$

$$j_{Az} = -\rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial z} \quad (\text{ب.۳-۶})$$

مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$ :

$$j_{Ar} = -\rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial r} \quad (\text{ب.۳-۷})$$

$$j_{A\theta} = -\rho D_{AB} \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_A}{\partial \theta} \quad (\text{ب.۳-۸})$$

$$j_{A\phi} = -\rho D_{AB} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_A}{\partial \phi} \quad (\text{ب.۳-۹})$$

الف) برای بدست آوردن شارهای مولی نسبت به سرعت مولی متوسط،  $\mathbf{j}_A^*$ ،  $c$ ، و  $x_A$  را جایگزین  $\rho$ ،  $\omega_A$  کنید.

ب.۴ معادله پیوستگی الف

$$[\partial \rho / \partial t + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0]$$

مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (\text{ب.۴-۱})$$

مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (\text{ب.۴-۲})$$

مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0 \quad (\text{ب.۴-۳})$$

الف) وقتی چگالی جرمی سیال ثابت و برابر  $\rho$  فرض شود، این معادله به صورت  $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$  ساده می‌شود.

۵.ب معادله حرکت برحسب  $\tau$

$$[\rho D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}]$$

مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ : الف

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right] + \rho g_x \quad (۱-۵.ب)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right] + \rho g_y \quad (۲-۵.ب)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z \quad (۳-۵.ب)$$

الف) این معادله‌ها بدون استفاده از فرض متقارن بودن  $\boldsymbol{\tau}$  نوشته شده‌اند. یعنی مثلاً وقتی به‌طور معمول فرض شود که تانسور تنش متقارن است،  $\tau_{yx}$  و  $\tau_{xy}$  را می‌توان به‌جای هم به‌کار برد.

مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ : ب

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] + \rho g_r \quad (۴-۵.ب)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + \rho g_\theta \quad (۵-۵.ب)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z \quad (۶-۵.ب)$$

ب) این معادله‌ها بدون استفاده از فرض متقارن بودن  $\boldsymbol{\tau}$  نوشته شده‌اند. یعنی مثلاً وقتی به‌طور معمول فرض شود که تانسور تنش متقارن است، داریم  $\tau_{r\theta} - \tau_{\theta r} = 0$ .

مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$ : ج

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \tau_{\phi r} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right] + \rho g_r \quad (۷-۵.ب)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \tau_{\phi\theta} + \frac{(\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}) - \tau_{\phi\phi} \cot \theta}{r} \right] + \rho g_\theta \quad (۸-۵.ب)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r + v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\phi} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \tau_{\phi\phi} + \frac{(\tau_{\phi r} - \tau_{r\phi}) + \tau_{\phi\theta} \cot \theta}{r} \right] + \rho g_\phi \quad (۹-۵.ب)$$

ج) این معادله‌ها بدون استفاده از فرض متقارن بودن  $\boldsymbol{\tau}$  نوشته شده‌اند. یعنی مثلاً وقتی به‌طور معمول فرض شود که تانسور تنش متقارن است، داریم  $\tau_{r\theta} - \tau_{\theta r} = 0$ .

۶.ب معادله حرکت برای سیال نیوتونی با  $\mu$  و  $\rho$  ثابت

$$[\rho D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}]$$

مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ :

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x \quad (۱-۶.ب)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y \quad (۲-۶.ب)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (۳-۶.ب)$$

مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ :

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r \quad (۴-۶.ب)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta \quad (۵-۶.ب)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (۶-۶.ب)$$



$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 v_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} \right] + \rho g_r \quad \text{الف (ب.۷-۶)}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho g_\theta \quad \text{ب.۸-۶}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r + v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] + \rho g_\phi \quad \text{ب.۹-۶}$$

الف) کمیت داخل کروشه در معادله (ب.۷-۶) همان کمیتی نیست که از معادله (م) در جدول الف.۳-۷، برای  $[\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}]$  انتظار می‌رود، زیرا عبارت  $(2/r)(\nabla \cdot \mathbf{v})$  را که در صورت ثابت بودن  $\rho$  برای سیال صفر می‌شود، به معادله (م) افزوده‌ایم. در نتیجه معادله بسیار ساده‌تری حاصل می‌شود.

۷. ب تابع اتلاف  $\Phi_v$  برای سیالات نیوتونی (نگاه کنید به معادله (۳-۳.۳))

مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ :

$$\Phi_v = \nu \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right]^2 - \frac{\nu}{3} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]^2 \quad (۱-۷.ب)$$

مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ :

$$\Phi_v = \nu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]^2 - \frac{\nu}{3} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]^2 \quad (۲-۷.ب)$$

مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\Phi_v = \nu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r + v_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 \right] + \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]^2 + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) \right]^2 - \frac{\nu}{3} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right]^2 \quad (۳-۷.ب)$$

۸. ب معادله انرژی برحسب  $q$

$$[\rho \hat{C}_p DT/Dt = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\partial \ln \rho / \partial \ln T)_p Dp/Dt - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})]$$

مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ :

$$\rho \hat{C}_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \left[ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) \quad \text{الف (۱-۸.ب)}$$

مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ :

$$\rho \hat{C}_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) \quad \text{الف (۲-۸.ب)}$$

مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\rho \hat{C}_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \right] - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) \quad \text{الف (۳-۸.ب)}$$

الف) جمله اتلاف ویسکوز،  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  - در پیوست الف، جدول‌های الف.۱-۷، ۲، ۳ آمده‌است. معمولاً می‌توان از این جمله چشم‌پوشی کرد، مگر در مورد سیستم‌هایی یا گزادیان‌های سرعت بسیار بزرگ. جمله حاوی  $(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_p$  برای سیالاتی با  $\rho$  ثابت، صفر است.

ب.۹ معادله انرژی برای سیالات نیوتونی خالص با  $\rho$  و  $k$  ثابت الف

$$[\rho \hat{C}_p DT/Dt = k \nabla^2 T + \mu \Phi_v]$$

مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ :

$$\rho \hat{C}_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \mu \Phi_v \quad \text{ب.۹-۱}$$

مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ :

$$\rho \hat{C}_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \mu \Phi_v \quad \text{ب.۹-۲}$$

مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\rho \hat{C}_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + \mu \Phi_v \quad \text{ب.۹-۳}$$

الف) این صورت از معادله انرژی، تحت شرایط ساده‌تر (مقدار ثابت)  $k = 0$  و  $D(\ln \rho / \ln T)_p DP/Dt = 0$  نیز معتبر است. فرض (مقدار ثابت)  $\rho$  در عنوان جدول آمده‌است، زیرا غالباً از این فرض بیش‌تر استفاده می‌شود.

ب) تابع  $\Phi_v$  در بخش ب.۷ آمده‌است. معمولاً می‌توان از جمله  $\mu \Phi_v$  چشم‌پوشی کرد، مگر در سیستم‌هایی با گرادیان‌های سرعت بزرگ.

ب.۱۰ معادله پیوستگی گونه  $\alpha$  برحسب  $\mathbf{j}_\alpha$  الف

$$[\rho D\omega_\alpha/Dt = -(\nabla \cdot \mathbf{j}_\alpha) + r_\alpha]$$

مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ :

$$\rho \left( \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial z} \right) = - \left[ \frac{\partial j_{\alpha x}}{\partial x} + \frac{\partial j_{\alpha y}}{\partial y} + \frac{\partial j_{\alpha z}}{\partial z} \right] + r_\alpha \quad \text{ب.۱۰-۱}$$

مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ :

$$\rho \left( \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial z} \right) = - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_{\alpha r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial j_{\alpha \theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial j_{\alpha z}}{\partial z} \right] + r_\alpha \quad \text{ب.۱۰-۲}$$

مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\rho \left( \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \phi} \right) = - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_{\alpha r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (j_{\alpha \theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial j_{\alpha \phi}}{\partial \phi} \right] + r_\alpha \quad \text{ب.۱۰-۳}$$

الف) برای به‌دست آوردن معادله‌های متناظر برحسب  $\mathbf{J}_\alpha^*$  جایگزینی‌های زیر را انجام دهید:

$\rho$	$\omega_\alpha$	$\mathbf{j}_\alpha$	$\mathbf{v}$	$r_\alpha$	جایگزین کنید:
$c$	$x_\alpha$	$\mathbf{J}_\alpha^*$	$\mathbf{v}^*$	$R_\alpha - x_\alpha \sum_{\beta=1}^N R_\beta$	با

ب.۱۱ معادله پیوستگی گونه A برحسب  $\omega_A$  به‌ازای  $\rho D_{AB}$  ثابت الف

$$[\rho D\omega_A/Dt = \rho D_{AB} \nabla^r \omega_A + r_A]$$

مختصات دکارتی  $(x, y, z)$ :

$$\rho \left( \frac{\partial \omega_A}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega_A}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega_A}{\partial z} \right) = \rho D_{AB} \left[ \frac{\partial^r \omega_A}{\partial x^r} + \frac{\partial^r \omega_A}{\partial y^r} + \frac{\partial^r \omega_A}{\partial z^r} \right] + r_A \quad (1-11.ب)$$

مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$ :

$$\rho \left( \frac{\partial \omega_A}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega_A}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \omega_A}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \omega_A}{\partial z} \right) = \rho D_{AB} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^r \omega_A}{\partial \theta^r} + \frac{\partial^r \omega_A}{\partial z^r} \right] + r_A \quad (2-11.ب)$$

مختصات کروی  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\rho \left( \frac{\partial \omega_A}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega_A}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \omega_A}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_A}{\partial \phi} \right) = \rho D_{AB} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \omega_A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^r \omega_A}{\partial \phi^r} \right] + r_A \quad (3-11.ب)$$

الف) برای به‌دست آوردن معادله‌های متناظر برحسب  $x_A$  جایگزینی‌های زیر را انجام دهید:

$\rho$	$\omega_A$	$\mathbf{v}$	$r_A$	جایگزین کنید:
$c$	$x_A$	$\mathbf{v}^*$	$x_B R_A - x_A R_B$	با

## پیوست ج

### موضوعات ریاضی

- ج.۱ بعضی معادله‌های دیفرانسیل معمولی و جواب‌های آنها
- ج.۲ بسط توابع به صورت سری تیلر
- ج.۳ دیفرانسیل‌گیری از انتگرال‌ها (فرمول لایب‌نیتس)
- ج.۴ تابع گاما
- ج.۵ توابع هذلولوی
- ج.۶ تابع خطا

در این پیوست، بعضی موضوعات ریاضی (غیر از بردارها و تانسورها) را که در مطالعهٔ پدیده‌های انتقال به‌کار می‌آیند، خلاصه کرده‌ایم.<sup>۱</sup>

#### ج.۱ بعضی معادله‌های دیفرانسیل معمولی و جواب‌های آنها

در این بخش فهرست کوتاهی از معادله‌های دیفرانسیلی که در پدیده‌های انتقال مطرح می‌شوند، ارائه می‌دهیم. فرض بر این است که خواننده با این معادله‌ها و نحوهٔ حل کردن آنها آشناست. کمیت‌های  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  ثابت‌های حقیقی و  $f$  و  $g$  توابعی از  $x$  اند.

<sup>۱</sup> بعضی از کتاب‌های مرجع مناسب در مورد ریاضیات کاربردی عبارت‌اند از:

M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 9th printing (1973); G. M. Murphy, *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, Van Nostrand, Princeton N. J. (1960); J. J. Tuma, *Engineering Mathematics Handbook*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1987).

معادله	جواب
$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$	$\int g \, dy = \int f \, dx + C_1$ (ج. ۱-۱)
$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$	$y = e^{-\int f \, dx} (\int e^{\int f \, dx} g \, dx + C_1)$ (ج. ۲-۱)
$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = 0$	$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$ (ج. ۳-۱)
$\frac{d^2 y}{dx^2} - a^2 y = 0$	$y = C_1 \cosh ax + C_2 \sinh ax$ یا (ج. ۴-الف)
	$y = C_1 e^{+ax} + C_2 e^{-ax}$ (ج. ۴-۱)
$\frac{1}{x^r} \frac{d}{dx} \left( x^r \frac{dy}{dx} \right) + a^2 y = 0$	$y = \frac{C_1}{x} \cos ax + \frac{C_2}{x} \sin ax$ (ج. ۵-۱)
$\frac{1}{x^r} \frac{d}{dx} \left( x^r \frac{dy}{dx} \right) - a^2 y = 0$	$y = \frac{C_1}{x} \cosh ax + \frac{C_2}{x} \sinh ax$ یا (ج. ۶-الف)
	$y = \frac{C_1}{x} e^{+ax} + \frac{C_2}{x} e^{-ax}$ (ج. ۶-۱)
$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$	معادله $n^2 + an + b = 0$ را حل کنید و ریشه‌های $n = n_-$ و $n = n_+$ را به دست بیاورید. سپس (الف) اگر $n_-$ و $n_+$ حقیقی و نامساوی باشند:
	$y = C_1 \exp(n_+ x) + C_2 \exp(n_- x)$ (ج. ۷-الف)
	(ب) اگر $n_+$ و $n_-$ حقیقی و مساوی $n$ باشند:
	$y = e^{nx} (C_1 x + C_2)$
	(ج) اگر $n_+$ و $n_-$ مختلط باشند: $n_{\pm} = p \pm iq$
	$y = e^{px} (C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$ (ج. ۷-۱)
$\frac{d^2 y}{dx^2} + \gamma x \frac{dy}{dx} = 0$	$y = C_1 \int_0^x \exp(-\bar{x}^\gamma) d\bar{x} + C_2$ (ج. ۸-۱)
$\frac{d^2 y}{dx^2} + \gamma x^\gamma \frac{dy}{dx} = 0$	$y = C_1 \int_0^x \exp(-\bar{x}^\gamma) d\bar{x} + C_2$ (ج. ۹-۱)
$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x)$	$y = \int_0^x \int_0^{\bar{x}} f(\bar{\bar{x}}) d\bar{\bar{x}} d\bar{x} + C_1 x + C_2$ (ج. ۱۰-۱)
$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) = f(x)$	$y = \int_0^x \frac{1}{\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} \bar{\bar{x}} f(\bar{\bar{x}}) d\bar{\bar{x}} d\bar{x} + C_1 \ln x + C_2$ (ج. ۱۱-۱)
$\frac{1}{x^r} \frac{d}{dx} \left( x^r \frac{dy}{dx} \right) = f(x)$	$y = \int_0^x \frac{1}{\bar{x}^r} \int_0^{\bar{x}} \bar{\bar{x}}^r f(\bar{\bar{x}}) d\bar{\bar{x}} d\bar{x} - \frac{C_1}{x} + C_2$ (ج. ۱۲-۱)
$\frac{d^2 y}{dx^2} = h(y)$	$x = \int_0^y \frac{d\bar{y}}{\sqrt{r \int_0^{\bar{y}} h(\bar{\bar{y}}) d\bar{\bar{y}} + C_1}} + C_2$ (ج. ۱۳-۱)

$$x^r \frac{d^r y}{dx^r} + ax^r \frac{d^r y}{dx^r} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (\text{ج. ۱۴-۱})$$

در  $y = C_1 x^{n_1} + C_2 x^{n_2} + C_3 x^{n_3}$  که در

آن  $n_k$  ریشه‌های معادله

$$n(n-1)(n-2) + an(n-1) + bn + c = 0$$

به شرط این‌که همه ریشه‌ها متمایز باشند.

تذکر:

الف) در معادله‌های (ج. ۱-۴) و (ج. ۱-۶)، تصمیم‌گیری در مورد این‌که از صورت نمایی یا صورت مثلثاتی (یا هذلولوی) توابع استفاده شود، معمولاً براساس شرایط مرزی مسئله یا خواص تقارنی جواب، انجام می‌شود.

ب) معادله‌های (ج. ۱-۵) و (ج. ۱-۶) با انجام جایگزینی  $y(x) = u(x)/x$ ، و سپس حل معادله حاصل برحسب  $u(x)$  حل می‌شوند. ج) در معادله‌های (ج. ۱-۸) تا (ج. ۱-۱۳)، تغییر حدهای پایینی انتگرال‌ها به مقداری غیراز صفر، راحت یا ضروری است.

### ج. ۲. بسط توابع به صورت سری تیلر

در مسائل فیزیکی غالباً به توصیف تابع  $y(x)$  در همسایگی نقطه  $x = x_0$  نیاز داریم. سپس تابع  $y(x)$  را «حول نقطه  $x = x_0$  بسط سری تیلر می‌دهیم»:

$$y(x) = y|_{x=x_0} + \frac{1}{1!} \left( \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} \right) (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=x_0} \right) (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{x=x_0} \right) (x - x_0)^3 + \dots \quad (\text{ج. ۱-۲})$$

جمله نخست مقدار تابع را در  $x = x_0$  نشان می‌دهد. دو جمله نخست در  $x = x_0$  با منحنی برازش راست خط دارند. سه جمله نخست در  $x = x_0$  با منحنی برازش سهموی دارند، و غیره. از سری تیلر غالباً در هنگامی استفاده می‌شود که برای توصیف تابع، در حد کفایت، فقط به چند جمله نیاز داریم. در این‌جا چند بسط سری تیلر برای توابع استاندارد، حول نقطه  $x = 0$  ارائه می‌شود:

$$e^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{ج. ۲-۲})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (\text{ج. ۳-۲})$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{x^2}{1!3} + \frac{x^4}{2!5} - \frac{x^6}{3!7} + \dots \right) \quad (\text{ج. ۴-۲})$$

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots \quad (\text{ج. ۵-۲})$$

با رجوع به کتاب‌ها و هندبوک‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، می‌توان مثال‌های بیشتری را یافت. سری تیلر را می‌توان به صورت تابعی از دو یا چند متغیر نیز نوشت.

ج.۳ دیفرانسیل‌گیری از انتگرال‌ها (فرمول لایب‌نیتس)

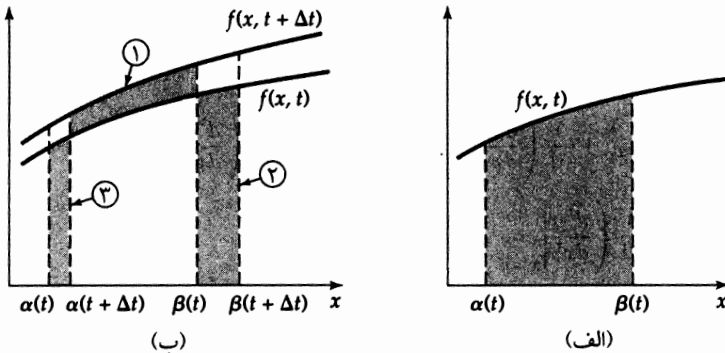
تابعی مانند  $f(x, t)$  را در نظر بگیرید که به متغیر مکان  $x$  و زمان  $t$  وابسته است. می‌توان انتگرال زیر را نوشت:

$$I(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx \quad (\text{ج.۳-۱})$$

که تابعی از  $t$  است (نگاه کنید به شکل ج.۳-۱ الف). اگر بخواهیم از این تابع نسبت به  $t$  مشتق بگیریم، بدون آن‌که انتگرال را محاسبه کنیم، می‌توانیم از فرمول لایب‌نیتس استفاده کنیم:

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + \left( f(\beta, t) \frac{d\beta}{dt} - f(\alpha, t) \frac{d\alpha}{dt} \right) \quad (\text{ج.۳-۲})$$

شکل ج.۳-۱ ب) معنی عمل‌های انجام‌شده در این جا را نشان می‌دهد: نخستین جمله سمت راست تغییر در انتگرال را نشان می‌دهد، زیرا خود تابع با زمان تغییر می‌کند؛ جمله دوم افزایش سطح بر اثر حرکت حد بالایی به سمت راست را نشان می‌دهد؛ و جمله سوم کاهش سطح بر اثر حرکت حد پایینی به سمت راست را نشان می‌دهد. این فرمول در علوم و مهندسی کاربردهای فراوانی دارد. نظیر سه‌بعدی این فرمول با معادله (الف.۵-۵) نشان داده شده‌است.



شکل ج.۳-۱ الف) ناحیه سایه‌خورده معرف  $I(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx$  در لحظه  $t$  است (معادله ج.۳-۱)؛ (ب) برای به دست آوردن  $dI/dt$ ، تفاضل  $I(t + \Delta t) - I(t)$ ، تقسیم بر  $\Delta t$  را تشکیل می‌دهیم و سپس فرض می‌کنیم  $\Delta t \rightarrow 0$ . سه ناحیه سایه‌خورده با سه جمله سمت راست معادله (ج.۳-۲) متناظرند.

ج.۴ تابع گاما

تابع گاما معمولاً بر اثر انتگرال‌گیری ظاهر می‌شود:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (\text{ج.۴-۱})$$

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{x} \right)^{n-1} dx \quad (\text{ج.۴-۲})$$

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} \exp(-x^{1/n}) dx \quad (\text{ج.۴-۳})$$



چند فرمول تابع گاما مهم‌اند:

ج. ۴-۴) (برای تعریف تابع  $\Gamma(n)$  به‌ازای  $n$ ‌های منفی به‌کار می‌رود)

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

ج. ۴-۵) (وقتی  $n$  عدد صحیحی بزرگ‌تر از صفر باشد)

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

بعضی از مقادیر خاص تابع گاما عبارت‌اند از:

ج. ۴-۶)

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

ج. ۴-۷)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 1,77245\dots$$

ج. ۴-۸)

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} = 0,88622\dots$$

ج. ۴-۹)

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2,67893\dots$$

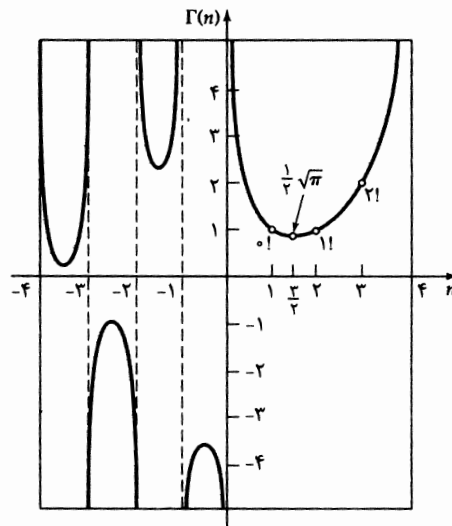
ج. ۴-۱۰)

$$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 0,89297\dots$$

ج. ۴-۱۱)

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = 1,19063\dots$$

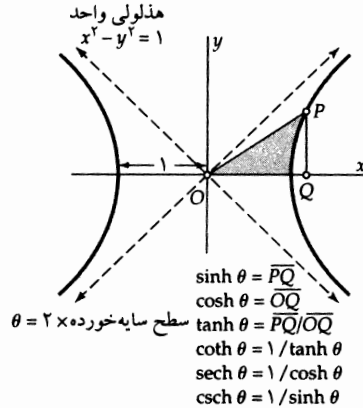
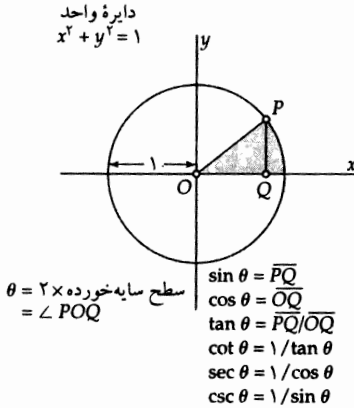
تابع گاما در شکل ج. ۴-۱ ترسیم شده‌است.



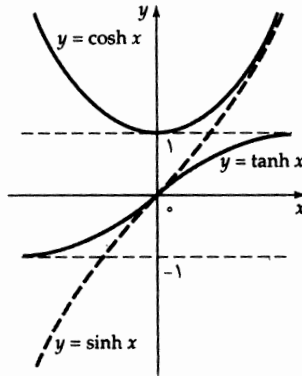
شکل ج. ۴-۱. تابع گاما.

### ج. ۵. توابع هذلولوی

سینوس هذلولوی  $(\sinh x)$ ، کسینوس هذلولوی  $(\cosh x)$ ، و تانژانت هذلولوی  $(\tanh x)$  غالباً در مسائل علوم و مهندسی ظاهر می‌شوند. رابطه این توابع با هذلولی، بسیار شبیه رابطه توابع دایروی با دایره است (نگاه کنید به شکل ج. ۵-۱). توابع دایروی  $(\sin x$  و  $\cos x)$  توابع نوسانی تناوبی‌اند، اما نظایر هذلولوی آن‌ها چنین نیستند (نگاه کنید به شکل ج. ۵-۲).



شکل ج. ۱-۵ مقایسه توابع دایروی و هذلولوی.



شکل ج. ۲-۵ مقایسه شکل‌های توابع هذلولوی.

توابع هذلولوی با توابع نمایی، روابطی به صورت زیر دارند:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}); \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (\text{ج. ۱-۵، ۲})$$

روابط نظیر برای توابع دایروی عبارت‌اند از:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}); \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad (\text{ج. ۳-۵، ۴})$$

می‌توان انواع مختلف روابط استاندارد را برای توابع هذلولوی نوشت؛ مثلاً:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (\text{ج. ۵-۵، ۵})$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \quad (\text{ج. ۵-۶، ۶})$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \quad (\text{ج. ۵-۷، ۷})$$

$$\cosh ix = \cos x; \quad \sinh ix = i \sin x \quad (\text{ج. ۵-۸، ۹})$$

$$\frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x; \quad \frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x \quad (\text{ج. ۵-۱۰، ۱۱})$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x; \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x \quad (\text{ج. ۵-۱۲، ۱۳})$$

به خاطر بسپارید که  $\cosh x$  و  $\cos x$  توابع زوج  $x$  اند، اما  $\sinh x$  و  $\sin x$  توابع فرد  $x$  اند.

### ج. ۶. تابع خطا

تابع خطا چنین تعریف می‌شود:

$$\operatorname{erf} x = \frac{\int_0^x \exp(-\bar{x}^2) d\bar{x}}{\int_0^\infty \exp(-\bar{x}^2) d\bar{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\bar{x}^2) d\bar{x} \quad (\text{ج. ۶-۱})$$

این تابع که در بسیاری از مسئله‌های انتقال ظاهر می‌شود، تابع افزایشی یکنواست و از  $\operatorname{erf} 0 = 0$  تا  $\operatorname{erf} \infty = 1$  تغییر می‌کند و مقدار آن در حوالی  $x = 2$  برابر  $0.997$  است. بسط سری تیلر برای تابع خطا در حوالی  $x = 0$  در معادله (ج. ۶-۲) ارائه شده است. شایان ذکر است که  $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf} x$  و:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{erf} u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) \frac{du}{dx} \quad (\text{ج. ۶-۲})$$

که از کاربرد فرمول لایب‌نیتس در مورد معادله (ج. ۶-۱) به دست می‌آید. تابع  $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$  که رابطه نزدیکی با تابع خطا دارد، «تابع مکمل خطا» نامیده می‌شود.

## پیوست د

### نظریه سینتیکی گازها

۱.د معادله بولتزمن

۲.د معادلات تغییر

۳.د عبارت‌های مولکولی برای شارها

۴.د جواب معادله بولتزمن

۵.د شارها برحسب خواص انتقال

۶.د خواص انتقال برحسب نیروهای بین‌مولکولی

۷.د چند نکته پایانی

در فصل‌های ۱، ۹، و ۱۷ شرحی اجمالی از کاربرد استدلال‌های مسافت آزاد میانگین، جهت به‌دست آوردن عبارت‌هایی تقریبی برای خواص انتقال و سپس نتایج دقیق عبارت‌های چاپمن-انسکوگ برای گازهای تک‌اتمی رقیق را بیان کردیم. در این پیوست توصیفی مختصر از نظریه چاپمن-انسکوگ را بیان می‌کنیم که صرفاً برای نشان دادن موارد شمول این نظریه و چگونگی ایجاد حسی از یکپارچگی در موضوع پدیده‌های انتقال در گازها کافی است. خواننده علاقه‌مند برای پیگیری بیش‌تر این موضوع، می‌تواند به مراجع استاندارد رجوع کند.<sup>۱</sup>

### ۱.د معادله بولتزمن<sup>۲</sup>

نقطه آغاز نظریه سینتیکی، مخلوط‌های گازهای تک‌اتمی واکنش‌ناپذیر با چگالی پایین، معادله بولتزمن برای تابع

1. J. H. Ferziger and H. G. Kaper, *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*, North-Holland, Amsterdam (1972); S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, 3rd edition, Cambridge University Press (1970); J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, 2nd corrected printing, Wiley, New York (1964), Chapter 7; E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics*, Pergamon, Oxford (1981), Chapter 1.

2. L. Boltzmann, *Sitzungsberichte Kaiserl. Akad. der Wissenschaften*, **66**, (2), 275-370 (1872); C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Springer-Verlag, New York (1988). C. F. Curtiss, *J. Chem. Phys.*, **97**, 1416-1423, 7679-7686 (1992);

کورتیس به این نتیجه رسید که باید معادله بولتزمن اصلاح شود تا امکان چرخش زوج‌های مولکولی را نیز به‌حساب آورد؛ این اصلاح، که فقط در دماهای بسیار پایین اهمیت پیدا می‌کند، با داده‌های آزمایشی در دماهای محدود پایین توافق بهتری دارد.

توزیع سرعت  $f_\alpha(\dot{\mathbf{r}}_\alpha, \mathbf{r}, t)$  است. کمیت  $f_\alpha(\dot{\mathbf{r}}_\alpha, \mathbf{r}, t) d\dot{\mathbf{r}}_\alpha d\mathbf{r}$  تعداد احتمالی مولکول‌های گونه  $\alpha$  است که در زمان  $t$  در جزء حجم  $d\mathbf{r}$  در مکان  $\mathbf{r}$  واقع شده‌اند و سرعت‌های آن‌ها حول  $\dot{\mathbf{r}}_\alpha$  در گستره  $d\dot{\mathbf{r}}_\alpha$  است. معادله بولتزمن، که چگونگی شکل گرفتن  $f_\alpha$  با گذشت زمان را توصیف می‌کند، عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha = - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha f_\alpha \right) - \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \cdot \mathbf{g}_\alpha f_\alpha \right) + J_\alpha \quad (۱-۱.د)$$

که در آن  $\partial/\partial \mathbf{r}$  با عملگر  $\nabla$  یکسان است و  $\partial/\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha$  عملگری مشابه است که شامل سرعت است، نه مکان. کمیت  $\mathbf{g}_\alpha$  نیروی خارجی در واحد جرم است که بر هر مولکول از گونه  $\alpha$  وارد می‌شود، و  $J_\alpha$  یک جمله بسیار پیچیده انتگرال پنج‌گانه است که تغییر در  $f_\alpha$  به واسطه برخوردهای مولکولی را منظور می‌کند. جمله  $J_\alpha$  شامل تابع انرژی پتانسیل بین مولکولی (یعنی پتانسیل لنارد-جونز) و جزئیات مسیرهای برخورد است. معادله بولتزمن را می‌توان به صورت یک معادله پیوستگی در فضای شش‌بُعدی مکان-سرعت در نظر گرفت و  $J_\alpha$  به صورت جمله منبع عمل می‌کند. تابع توزیع سرعت به چگالی عددی گونه  $\alpha$  «به‌هنجار» می‌شود؛ یعنی  $\int f_\alpha(\dot{\mathbf{r}}_\alpha, \mathbf{r}, t) d\dot{\mathbf{r}}_\alpha = n_\alpha(\mathbf{r}, t)$ .

## ۲.۵ معادلات تغییر

وقتی معادله بولتزمن را در خاصیت مولکولی  $\psi_\alpha(\dot{\mathbf{r}}_\alpha)$  ضرب کنیم و سپس روی همه سرعت‌های مولکولی از آن انتگرال بگیریم، معادله کلی تغییر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \psi_\alpha f_\alpha d\dot{\mathbf{r}}_\alpha = - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \int \dot{\mathbf{r}}_\alpha \psi_\alpha f_\alpha d\dot{\mathbf{r}}_\alpha \right) + \int \left( \mathbf{g}_\alpha \cdot \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha} \right) f_\alpha d\dot{\mathbf{r}}_\alpha + \int \psi_\alpha J_\alpha d\dot{\mathbf{r}}_\alpha \quad (۱-۲.د)$$

برای به‌دست آوردن این نتیجه، انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء انجام می‌شود و از این نکته استفاده می‌کنیم که  $f_\alpha$  در سرعت‌های بی‌نهایت صفر است. اگر  $\psi_\alpha$  کمیتی باشد که درحین برخورد پایسته می‌ماند، (نگاه کنید به بخش ۳.۰)، آنگاه می‌توان نشان داد که جمله حاوی  $J_\alpha$  برابر صفر است.<sup>۱</sup>

اکنون فرض کنید که  $\psi_\alpha$  به‌طور متوالی، کمیت‌های پایسته برای مولکول‌های تک‌اتمی باشد: جرم  $m_\alpha$ ، اندازه حرکت  $m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha$ ، و انرژی  $\frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha)$ . وقتی در معادله (۱-۲.د) این کمیت‌ها را به‌جای  $\psi_\alpha$  قرار دهیم و وقتی برای کمیت‌های دوم و سوم، روی همه گونه‌های  $\alpha$  عمل جمع انجام دهیم معادله‌های تغییر برای جرم  $\alpha$ ، اندازه حرکت، و انرژی به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_\alpha = -(\nabla \cdot \rho_\alpha \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{j}_\alpha) \quad (۲-۲.د)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} = -[\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}] - [\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}] + \sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{g}_\alpha \quad (۳-۲.د)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) &= -(\nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \hat{U} \right) \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{q}) - (\nabla \cdot [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}]) \\ &+ \sum_\alpha ((\mathbf{j}_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{v}) \cdot \mathbf{g}_\alpha) \end{aligned} \quad (۴-۲.د)$$

در آخرین معادله، انرژی داخلی به‌ازای واحد حجم، چنین تعریف می‌شود:

$$\rho \hat{U} = \sum_\alpha \int \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{\mathbf{r}}_\alpha - \mathbf{v})^2 f_\alpha d\dot{\mathbf{r}}_\alpha \quad (۵-۲.د)$$

به این ترتیب مشاهده می‌کنیم که معادله‌های پیوستگی، حرکت، و انرژی پیامدهای مستقیم قوانین پایستگی جرم، اندازه حرکت، و انرژی تشریح شده در فصل صفر است. معادله‌های (۲-۲.د) تا (۴) را باید با معادله‌های (۷-۱.۱۹)، (۹-۲.۳) و معادله (ب) و پانوش (ب) جدول ۴-۲.۱۹ مقایسه کرد که با استدلال‌های پایستگی به دست آمدند.

### ۳.د عبارت‌های مولکولی برای شارها

هم‌زمان با به دست آوردن معادلات تغییر، عبارت‌های مولکولی برای شارها، به صورت انتگرال‌هایی روی تابع توزیع به دست می‌آیند:

$$\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}, t) = m_\alpha \int (\dot{\mathbf{r}}_\alpha - \mathbf{v}) f_\alpha d\dot{\mathbf{r}}_\alpha \xrightarrow{\text{در حالت تعادل}} \circ \quad (۱-۳.د)$$

$$\pi(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha m_\alpha \int (\dot{\mathbf{r}}_\alpha - \mathbf{v})(\dot{\mathbf{r}}_\alpha - \mathbf{v}) f_\alpha d\dot{\mathbf{r}}_\alpha \xrightarrow{\text{در حالت تعادل}} p\delta \quad (۲-۳.د)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha \frac{1}{\bar{\gamma}} m_\alpha \int (\dot{\mathbf{r}}_\alpha - \mathbf{v})^\dagger (\dot{\mathbf{r}}_\alpha - \mathbf{v}) f_\alpha d\dot{\mathbf{r}}_\alpha \xrightarrow{\text{در حالت تعادل}} \circ \quad (۳-۳.د)$$

در این عبارت‌ها، شارها شامل انتگرال‌هایی روی حاصل ضرب‌های جرم، اندازه حرکت، و انرژی با «سرعت نفوذ» گونه، یعنی  $(\dot{\mathbf{r}}_\alpha - \mathbf{v})$  اند. به شباهت بین ساختار این شارهای مولکولی (یا «شارهای نفوذی») و ساختار شارهای همرفتی جرم  $\rho_\alpha \mathbf{v}$ ، اندازه حرکت  $\rho \mathbf{v}$ ، و انرژی جنبشی  $\frac{1}{2} \rho v^2$ ، که در معادله‌های تغییر ظاهر می‌شوند، و در آن‌جا  $\mathbf{v}$  سرعت متوسط لحظه‌ای موضعی مخلوط گازی است، توجه کنید. به این ترتیب شارهای مولکولی معرف حرکت نفوذی جرم، اندازه حرکت، و انرژی به میزانی ورای میزان توصیف شده توسط شارهای همرفتی اند. هم‌چنین به این نکته توجه کنید که نظریه مولکولی به طور خودکار جمله کار مولکولی  $-(\nabla \cdot [\pi \cdot \mathbf{v}])$  را در معادله انرژی ایجاد می‌کند.

### ۴.د جواب معادله بولتزمن

اگر مخلوط گازی ساکن می‌بود، تابع توزیع سرعت از تابع توزیع ماکسول-بولتزمن (که از مکانیک آماری تعادلی آن را می‌شناسیم) به دست می‌آمد. در این صورت، چنان‌که در بخش ۳.د نشان داده شد، درمی‌یافتیم که  $\mathbf{j}_\alpha = 0$ ،  $\pi = p\delta = nkT\delta$ ، و  $\mathbf{q} = 0$ . نحوه به دست آوردن  $p = nKT$  در مسئله ۱.ج ۳ نشان داده شد. از طرف دیگر وقتی گرادیان‌های غلظت، سرعت، و دما وجود دارند، تابع توزیع به صورت توزیع ماکسول-بولتزمن، ضرب در یک «ضریب تصحیح» ارائه می‌شود:

$$f_\alpha(\dot{\mathbf{r}}_\alpha, \mathbf{r}, t) = n_\alpha \left( \frac{m_\alpha}{2\pi KT} \right)^{3/2} \exp[-m_\alpha (\dot{\mathbf{r}}_\alpha - \mathbf{v})^2 / 2KT] (1 + \phi_\alpha(\dot{\mathbf{r}}_\alpha, \mathbf{r}, t) + \dots) \quad (۱-۴.د)$$

که در آن  $\phi_\alpha \ll 1$  است. در این عبارت،  $n_\alpha$ ،  $\mathbf{v}$ ، و  $T$  تابعی از مکان  $\mathbf{r}$  و زمان  $t$  هستند. چون انحراف از حالت تعادل، نتیجه وجود گرادیان‌های دما، سرعت، و غلظت است، می‌توان  $\phi_\alpha(\dot{\mathbf{r}}_\alpha, \mathbf{r}, t)$  را در نزدیکی نقطه تعادل به صورت تابعی خطی از گرادیان‌های مختلف در نظر گرفت (مقایسه کنید با معادله (۶-۱.۲۴) در صفحه ۷۶۶):

$$\phi_\alpha = -(\mathbf{A}_\alpha \cdot \nabla \ln T) - (\mathbf{B}_\alpha : \nabla \mathbf{v}) + n \sum_\beta (\mathbf{C}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{d}_\beta) \quad (۲-۴.د)$$

که در آن بردار  $\mathbf{A}_\alpha$ ، تانسور  $\mathbf{B}_\alpha$  و بردارهای  $\mathbf{C}_{\alpha\beta}$ ، همه توابع  $\mathbf{r}$ ،  $t$ ، و همه توابع  $\dot{\mathbf{r}}_\alpha$ ،  $\mathbf{r}$ ،  $t$ ، به صورت جواب‌های معادله‌های انتگرالی-دیفرانسیلی ارائه می‌شوند. <sup>۱</sup> کمیت‌های  $\mathbf{d}_\alpha$  «نیروهای رانشی نفوذی تعمیم‌یافته» اند که شامل گرادیان‌های

غلظت، گرادیان فشار، و تفاضل نیروهای خارجی می‌شوند، و تعریفی به صورت زیر دارند:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_\alpha &= \nabla x_\alpha + (x_\alpha - \omega_\alpha) \nabla \ln p - (\rho/p) \omega_\alpha (\mathbf{g}_\alpha - \sum_\beta \omega_\beta \mathbf{g}_\beta) \\ &= \frac{1}{cRT} \left[ (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}_\alpha) - \omega_\alpha \left( \nabla p - \sum_\beta \rho_\beta \mathbf{g}_\beta \right) \right] \end{aligned} \quad (3-4.d)$$

که در آن  $x_\alpha$ ،  $\omega_\alpha$  و  $p_\alpha$  به ترتیب کسر مولی، کسر جرمی، و فشار جزئی‌اند. معادله (3-4.d) که فقط برای مخلوط گازهای تک‌اتمی در چگالی پایین معتبر است، در بخش ۱.۲۴ به سایر سیالات مطرح در ترمودینامیک فرایندهای برگشت‌ناپذیر، تعمیم داده شد.

#### ۵. د. شارها برحسب خواص انتقال

وقتی معادله‌های (۱-۴.d تا ۳) را در معادله‌های (۱-۳.d تا ۳) جایگزین کنیم، عبارت‌هایی برحسب  $\mathbf{d}_\alpha$ ،  $\nabla v$ ، و  $\nabla T$  برای شارها به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}, t) = +\rho_\alpha \sum_\beta \mathbb{D}_{\alpha\beta} \mathbf{d}_\beta - D_\alpha^T \nabla \ln T \quad (1-5.d)$$

$$\pi(\mathbf{r}, t) = p\delta - \mu[\nabla v + (\nabla v)^\dagger + -\frac{2}{3}(\nabla \cdot v)\delta] \quad (2-5.d)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -k\nabla T + \sum_\alpha \frac{\bar{H}_\alpha}{M_\alpha} \mathbf{j}_\alpha + \sum_\alpha \sum_\beta \frac{cRT x_\alpha x_\beta}{\rho_\alpha} \frac{D_\alpha^T}{\mathcal{B}_{\alpha\beta}} \left( \frac{\mathbf{j}_\alpha}{\rho_\alpha} - \frac{\mathbf{j}_\beta}{\rho_\beta} \right) \quad (3-5.d)$$

خواص انتقال در این معادله‌ها ظاهر می‌شوند: ویسکوزیته  $\mu$ ، رسانندگی گرمایی  $k$ ، ضرایب نفوذ گرمایی چندجزئی  $D_\alpha^T$ ، و ضرایب نفوذ چندجزئی  $\mathbb{D}_{\alpha\beta}$  و  $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$  ضرایب نفوذ ماکسول-استفان‌اند که با  $\mathbb{D}_{\alpha\beta}$  رابطه نزدیکی دارند). بنابراین نظریه سینتیکی «آثار متقابل» را پیش‌بینی می‌کند: انتقال جرم ناشی از گرادیان دما (نفوذ گرمایی) و انتقال انرژی ناشی از گرادیان غلظت (اثر گرمانفوذی).

جمله فشار در معادله (۲-۵.d) از نخستین جمله بسط معادله (۱-۴.d) (یعنی توزیع ماکسول-بولتزمن)، و جمله ویسکوزیته از جمله دوم (یعنی جمله  $\phi_\alpha$  حاوی گرادیان‌ها) نتیجه می‌شود. نظریه سینتیکی گازهای تک‌اتمی در چگالی پایین پیش‌بینی می‌کند که ویسکوزیته اتساعی صفر خواهد بود.

#### ۶. د. خواص انتقال برحسب نیروهای بین‌مولکولی

خواص انتقال در معادله‌های (۱-۵.d تا ۳) توسط نظریه سینتیکی، به صورت انتگرال‌های چندگانه پیچیده‌ای ارائه می‌شوند که شامل نیروهای بین‌مولکولی توصیف‌کننده برخورد‌های دوتایی در مخلوط گازی‌اند. وقتی عبارتی برای قانون نیروی بین‌مولکولی (مانند پتانسیل لِنارد-جونز (۶-۱۲) در معادله (۱۰-۴.۱)) انتخاب شد، این انتگرال‌ها را می‌توان به شیوه عددی محاسبه کرد. در این صورت، سه خاصیت انتقال-خودنفوذی، ویسکوزیته، و رسانندگی گرمایی-برای گازی خالص، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D = \frac{3}{\lambda} \frac{\sqrt{\pi m K T}}{\pi \sigma^2 \Omega_D} \frac{1}{\rho}; \quad \mu = \frac{5}{16} \frac{\sqrt{\pi m K T}}{\pi \sigma^2 \Omega_\mu}; \quad k = \frac{25}{32} \frac{\sqrt{\pi m K T}}{\pi \sigma^2 \Omega_k} \hat{C}_V \quad (3, 2, 1-6.d)$$

«انتگرال‌های برخورد» بدون بُعد  $\Omega_{\mu} = \Omega_k \approx 1/\Omega_D$  حاوی همه اطلاعات درباره نیروهای بین‌مولکولی و دینامیک برخورد دوتایی هستند. در جدول ۲.۰، این انتگرال‌ها به صورت توابعی از  $KT/\varepsilon$  ارائه شده‌اند. اگر انتگرال‌های برخورد را مساوی واحد بگیریم، می‌توانیم خواص انتقال را برای گاز ترکیب شده از کره‌های صلب به دست بیاوریم. بنابراین خواص انتقال، که در معادله‌های تغییر به آن‌ها نیاز داریم، از نظریه سینتیکی برحسب دو پارامتر  $\sigma$  و  $\varepsilon$  تابع انرژی پتانسیل بین‌مولکولی به دست آمدند. با استفاده از این عبارت‌ها می‌توان:

$$Pr = \hat{C}_p \mu / k = \frac{2}{5} (\hat{C}_p / \hat{C}_V) = \frac{2}{5} \left( \frac{5}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

و

$$Sc = \mu / \rho D = \frac{5}{6} (\Omega_D / \Omega_{\mu}) \approx \frac{3}{4}$$

را به دست آورد؛ این مقادیر برای گازهای تک‌اتمی خالص نسبتاً خوب هستند.

### ۷.د چند نکته پایانی

در بحث بالا بر ارتباط نزدیک بین انتقال جرم، اندازه حرکت، و انرژی تأکید شد و مشاهده می‌شود که چگونه می‌توان پدیده‌های انتقال را برحسب نظریه مولکولی برای گازهای تک‌اتمی در چگالی پایین توضیح داد. توجه به این نکته نیز مهم است که همه معادلات پیوستاری پیوستگی، حرکت، و انرژی را بتوان از یک نقطه شروع - معادله بولتزمن - به دست آورد و این‌که عبارت‌های مولکولی برای شارها و خواص انتقال در طی این فرایند به دست می‌آیند. به علاوه، بحث وابستگی شارها به نیروهای رانش با رهیافت ترمودینامیک برگشت‌ناپذیر در فصل ۲۴ رابطه بسیار نزدیکی دارد. این پیوست فقط با گازهای تک‌اتمی در چگالی پایین سروکار داشت. مطالب مشابهی برای گازهای چنداتمی،<sup>۳</sup> مایعات تک‌اتمی،<sup>۴</sup> و مایعات پلیمری<sup>۵</sup> نیز در دسترس است. در نظریه سینتیکی برای مایعات تک‌اتمی، عبارت‌های مربوط به شارهای اندازه حرکت و گرما شامل جمله‌هایی مشابه جمله‌های معادله‌های (د.۳-۲ و ۳) هستند، اما حاوی سهم‌های مرتبط با نیروهای بین‌مولکولی نیز دارند؛ پلیمرها دارای سهم اخیر هستند و علاوه بر آن نیروهای اضافی درون زنجیره پلیمر نیز وجود دارند. در همه این نظریه‌ها، می‌توان معادله‌های تغییر را از معادله تابع توزیع به دست آورد و سپس عبارت‌هایی صوری برای خواص انتقال نتیجه گرفت.

3. C. F. Curtiss, *J. Chem. Phys.*, **24**, 225-241 (1956); C. Muckenfuss and C. F. Curtiss, *J. Chem. Phys.*, **29**, 1257-1277 (1958); L. A. Viehland and C. F. Curtiss, *J. Chem. Phys.*, **60**, 492-520 (1974); D. Russell and C. F. Curtiss, *J. Chem. Phys.*, **60**, 514-520 (1974).

4. J. H. Irving and J. G. Kirkwood, *J. Chem. Phys.*, **18**, 817-829 (1950); R. J. Bearman and J. G. Kirkwood, *J. Chem. Phys.*, **28**, 136-145 (1958).

5. C. F. Curtiss and R. B. Bird, *Adv. Polymer Sci.*, **125**, 1-101 (1996); *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **93**, 7440-7445 (1996); *J. Chem. Phys.*, **106**, 9899-9921 (1997), **107**, 5254-5267 (1997), **111**, 10362-10370 (1999).



## پیوست ۵

### جدول‌های پیش‌بینی خواص انتقال

- ۱.۵ پارامترهای نیروی بین‌مولکولی و خواص بحرانی
- ۲.۵ توابع پیش‌بینی خواص انتقال گازها در چگالی‌های پایین

جدول ۱۰. پارامترهای پتانسیل لانه‌جوز (۱۲-۶) و خواص بحرانی.

		پارامترهای لانه‌جوز				خواص بحرانی			
ماده	وزن مولکولی $M$	$\sigma$ (Å)	$\epsilon/K$ (K)	Ref.	$T_c$ (K)	$p_c$ (atm)	$\bar{V}_c$ (cm <sup>3</sup> /g-mole)	$\mu_c \times 10^6$ (g/cm <sup>3</sup> · s)	$k_c \times 10^6$ (cal/cm <sup>3</sup> · s · K)
<b>عناصر سبک</b>									
H <sub>2</sub>	۲،۰۱۶	۲،۹۱۵	۳۸،۰	(الف)	۳۳،۳	۱۲،۸۰	۶۵،۰	۳۴،۷	-
He	۴،۰۰۳	۲،۵۷۶	۱۰،۲	(الف)	۵،۲۶	۲،۲۶	۵۷،۸	۲۵،۴	-
<b>گازهای نجیب</b>									
Ne	۲۰،۱۸۰	۲،۷۸۹	۳۵،۷	(الف)	۴۴،۵	۲۶،۹	۴۱،۷	۱۵۶	۷۹،۲
Ar	۳۹،۹۴۸	۳،۴۳۲	۱۲۲،۴	(ب)	۱۵۰،۷	۴۸،۰	۷۵،۲	۲۶۴	۷۱،۰
Kr	۸۳،۸۰	۳،۶۷۵	۱۷۰،۰	(ب)	۲۰۹،۴	۵۴،۳	۹۲،۲	۳۹۶	۴۹،۴
Xe	۱۳۱،۲۹	۴،۰۰۹	۲۳۴،۷	(ب)	۲۸۹،۸	۵۸،۰	۱۱۸،۸	۴۹۰	۴۰،۲
<b>گازهای چند اتمی ساده</b>									
هوا	۲۸،۹۶۴	۳،۶۱۷	۹۷،۰	(الف)	۱۳۲،۴	۳۷،۰	۸۶،۷	۱۹۳	۹۰،۸
N <sub>2</sub>	۲۸،۰۱۳	۳،۶۶۷	۹۹،۸	(ب)	۱۲۶،۲	۳۳،۵	۹۰،۱	۱۸۰	۸۶،۸
O <sub>2</sub>	۳۱،۹۹۹	۳،۴۳۳	۱۱۳	(الف)	۱۵۴،۴	۴۹،۷	۷۴،۴	۲۵۰	۱۰۵،۳
CO	۲۸،۰۱۰	۳،۵۹۰	۱۱۰	(الف)	۱۳۲،۹	۳۴،۵	۹۳،۱	۱۹۰	۸۶،۵
CO <sub>2</sub>	۴۴،۰۱۰	۳،۹۹۶	۱۹۰	(الف)	۳۰۴،۲	۷۲،۸	۹۴،۱	۳۴۳	۱۲۲
NO	۳۰،۰۰۶	۳،۴۷۰	۱۱۹	(الف)	۱۸۰	۶۴	۵۷	۲۵۸.	۱۱۸،۲
N <sub>2</sub> O	۴۴،۰۱۲	۳،۸۷۹	۲۲۰	(الف)	۳۰۹،۷	۷۱،۷	۹۶،۳	۳۳۲	۱۳۱
SO <sub>2</sub>	۶۴،۰۶۵	۴،۰۲۶	۳۶۳	(ج)	۴۳۰،۷	۷۷،۸	۱۲۲	۴۱۱	۹۸،۶
F <sub>2</sub>	۳۷،۹۹۷	۳،۶۵۳	۱۱۲	(الف)	-	-	-	-	-
Cl <sub>2</sub>	۷۰،۹۰۵	۴،۱۱۵	۳۵۷	(الف)	۴۱۷	۷۶،۱	۱۲۴	۴۲۰	۹۷،۰
Br <sub>2</sub>	۱۵۹،۸۰۸	۴،۲۶۸	۵۲۰	(الف)	۵۸۴	۱۰۲	۱۴۴	-	-
I <sub>2</sub>	۲۵۳،۸۰۹	۴،۹۸۲	۵۵۰	(الف)	۸۰۰	-	-	-	-
<b>هیدروکربن‌ها</b>									
CH <sub>4</sub>	۱۶،۰۴	۳،۷۸۰	۱۵۴	(ب)	۱۹۱،۱	۴۵،۸	۹۸،۷	۱۵۹	۱۵۸
CH <sub>2</sub> ≡CH	۲۶،۰۴	۴،۱۱۴	۲۱۲	(د)	۳۰۸،۷	۶۱،۶	۱۱۲،۹	۲۳۷	-

$\text{CH}_2 = \text{CH}_2$	۲۸,۰۵	۴,۲۲۸	۲۱۶	(ب)	۲۸۲,۴	۵۰,۰	۱۲۴	۲۱۵	-
$\text{C}_2\text{H}_6$	۳۰,۰۷	۴,۳۸۸	۲۳۲	(ب)	۳۰۵,۴	۴۸,۲	۱۴۸	۲۱۰	۲۰,۳
$\text{CH}_2\text{C} \equiv \text{CH}$	۴۰,۰۶	۴,۷۴۲	۲۶۱	(د)	۳۹۴,۸	-	-	-	-
$\text{CH}_2\text{-CH} = \text{CH}_2$	۴۲,۰۸	۴,۷۶۶	۲۷۵	(ب)	۳۶۵,۰	۴۵,۵	۱۸۱	۲۳۳	-
$\text{C}_2\text{H}_4$	۴۴,۱۰	۴,۹۳۴	۲۷۳	(ب)	۳۶۹,۸	۴۱,۹	۲۰۰	۲۲۸	-
$n\text{-C}_2\text{H}_4$	۵۸,۱۲	۵,۶۰۴	۳۰۴	(ب)	۴۲۵,۲	۳۷,۵	۲۵۵	۲۳۹	-
$i\text{-C}_2\text{H}_4$	۵۸,۱۲	۵,۳۹۳	۲۹۵	(ب)	۴۰۸,۱	۳۶,۰	۲۶۳	۲۳۹	-
$n\text{-C}_3\text{H}_8$	۷۲,۱۵	۵,۸۵۰	۳۲۶	(ب)	۴۶۹,۵	۳۳,۲	۳۱۱	۲۳۸	-
$i\text{-C}_3\text{H}_8$	۷۲,۱۵	۵,۸۱۲	۳۲۷	(ب)	۴۶۰,۴	۳۳,۷	۳۰۶	-	-
$\text{C}(\text{CH}_3)_2$	۷۲,۱۵	۵,۷۵۹	۳۱۲	(ب)	۴۳۳,۸	۳۱,۶	۳۰۳	-	-
$n\text{-C}_4\text{H}_{10}$	۸۶,۱۸	۶,۲۶۴	۳۴۲	(ب)	۵۰۷,۳	۲۹,۷	۳۷۰	۲۴۸	-
$n\text{-C}_4\text{H}_{10}$	۱۰۰,۲۰	۶,۶۶۳	۳۵۲	(ب)	۵۴۰,۱	۲۷,۰	۴۳۲	۲۵۴	-
$n\text{-C}_4\text{H}_{10}$	۱۱۴,۲۳	۷,۰۳۵	۳۶۱	(ب)	۵۶۸,۷	۲۴,۵	۴۹۲	۲۵۹	-
$n\text{-C}_4\text{H}_{10}$	۱۲۸,۲۶	۷,۴۶۳	۳۵۱	(ب)	۵۹۴,۶	۲۲,۶	۵۴۸	۲۶۵	-
سیکلوهگزان	۸۴,۱۶	۶,۱۴۳	۳۱۳	(د)	۵۵۳	۴۰,۰	۳۰۸	۲۸۴	-
بنزن	۷۸,۱۱	۵,۴۴۳	۳۸۷	(ب)	۵۶۲,۶	۴۸,۶	۲۶۰	۳۱۲	-
سایر ترکیب‌های آلی									
$\text{CH}_2$	۱۶,۰۴	۳,۷۸۰	۱۵۴	(ب)	۱۹۱,۱	۴۵,۸	۹۸,۷	۱۵۹	۱۵۸
$\text{CH}_2\text{Cl}$	۵۰,۴۹	۴,۱۵۱	۳۵۵	(ج)	۴۱۶,۳	۶۵,۹	۱۴۳	۳۳۸	-
$\text{CH}_2\text{Cl}_2$	۸۴,۹۳	۴,۷۴۸	۳۹۸	(ج)	۵۱۰	۶۰	-	-	-
$\text{CHCl}_2$	۱۱۹,۳۸	۵,۳۸۹	۳۴۰	(ه)	۵۳۶,۶	۵۴	۲۴۰	۴۱۰	-
$\text{CCl}_2$	۱۵۳,۸۲	۵,۹۴۷	۳۲۳	(ه)	۵۵۶,۴	۴۵,۰	۲۷۶	۴۱۳	-
$\text{C}_2\text{N}_2$	۵۲,۰۳۴	۴,۳۶۱	۳۴۹	(ه)	۴۰۰	۵۹	-	-	-
$\text{COS}$	۶۰,۰۷۶	۴,۱۲۰	۳۳۶	(ه)	۳۷۸	۶۱	-	-	-
$\text{CS}_2$	۷۶,۱۴۳	۴,۴۸۳	۴۶۷	(ه)	۵۵۲	۷۸	۱۷۰	۴۰۴	-
$\text{CCl}_2\text{F}_2$	۱۲۰,۹۱	۵,۱۱۶	۲۸۰	(ب)	۳۸۴,۷	۳۹,۶	۲۱۸	-	-

<sup>a</sup> J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, corrected printing, with notes added, Wiley, New York (1964).

<sup>b</sup> L. S. Tee, S. Gotoh, and W. E. Stewart, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **5**, 356-363 (1966).

مقادیر گفته شده برای بنزن براساس داده‌های ویسکوزیته این ماده به دست آمده‌اند. مقادیر مربوط به مواد دیگر با استفاده از رابطه (۲) مقاله بالا محاسبه شده‌اند.

<sup>c</sup> L. Monchick and E. A. Mason, *J. Chem. Phys.*, **35**, 1676-1697 (1961).

پارامترها از ویسکوزیته به دست آمده‌اند.

<sup>d</sup> L. W. Flynn and G. Thodos, *AIChE Journal*, **8**, 362-365 (1962).

پارامترها از ویسکوزیته به دست آمده‌اند.

<sup>e</sup> R. A. Svehla, *NASA Tech. Report R-132* (1962).

پارامترها از ویسکوزیته به دست آمده‌اند. در این گزارش جدول‌های مفصلی از پارامترهای لئارد-جونز، ظرفیت‌های گرمایی، و خواص انتقال محاسبه‌ای ارائه شده‌است.

(و) مقادیر ثابت‌های بحرانی برای مواد خالص از منبع زیر انتخاب شده‌اند:

K. A. Kobe and R. E. Lynn, Jr., *Chem. Rev.*, **52**, 117-236 (1962); *Amer. Petroleum Inst. Research Proj. 44*, Thermodynamics Research Center, Texas A&M University, College Station, Texas (1966); and *Thermodynamic Functions of Gases*, F. Din (editor), Vols. 1-3, Butterworths, London (1956, 1961, 1962).

(ز) مقادیر ویسکوزیته بحرانی از منبع زیر نقل شده‌است:

O. A. Hougen and K. M. Watson, *Chemical Process Principles*, Vol. 3, Wiley, New York (1947), p. 873.

(ح) مقادیر رسانندگی گرمایی بحرانی از منبع زیر نقل شده‌اند:

E. J. Owens and G. Thodos, *AIChE Journal*, **3**, 454-461 (1957).

(ط) برای هوا، وزن مولکولی  $M$  و خواص شبه‌بحرانی براساس ترکیب متوسط هوای خشک، به نقل از منبع زیر محاسبه شده‌اند:

COESA, *U.S. Standard Atmosphere 1976*, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. (1976).

جدول ۲.۰ه انتگرال های برخورد برای کاربرد همراه با پتانسیل لندارد-جونز (۱۲-۶) برای پیش بینی خواص انتقال گازها در چگالی های پایین. الف، ب، ج

$\Omega_{\mu} = \Omega_k$			$\Omega_{\mu} = \Omega_k$		
$KT/\varepsilon$ یا $KT/\varepsilon_{AB}$	(برای ویسکوزیته و رسانش گرمایی) $\Omega_{D,AB}$ (برای ضریب نفوذ)	$\Omega_{D,AB}$ (برای ضریب نفوذ)	$KT/\varepsilon$ یا $KT/\varepsilon_{AB}$	(برای ویسکوزیته و رسانش گرمایی) $\Omega_{D,AB}$ (برای ضریب نفوذ)	$\Omega_{D,AB}$ (برای ضریب نفوذ)
۰٫۳۰	۲٫۸۴۰	۲٫۶۴۹	۲٫۷	۱٫۰۶۹۱	۰٫۹۷۸۲
۰٫۳۵	۲٫۶۷۶	۲٫۴۶۸	۲٫۸	۱٫۰۵۸۳	۰٫۹۶۸۲
۰٫۴۰	۲٫۵۳۱	۲٫۳۱۴	۲٫۹	۱٫۰۴۸۲	۰٫۹۵۸۸
۰٫۴۵	۲٫۴۰۱	۲٫۱۸۲	۳٫۰	۱٫۰۳۸۸	۰٫۹۵۰۰
۰٫۵۰	۲٫۲۸۴	۲٫۰۶۶	۳٫۱	۱٫۰۳۰۰	۰٫۹۴۱۸
۰٫۵۵	۲٫۱۷۸	۱٫۹۶۵	۳٫۲	۱٫۰۲۱۷	۰٫۹۳۴۰
۰٫۶۰	۲٫۰۸۴	۱٫۸۷۷	۳٫۳	۱٫۰۱۳۹	۰٫۹۲۶۷
۰٫۶۵	۱٫۹۹۹	۱٫۷۹۹	۳٫۴	۱٫۰۰۶۶	۰٫۹۱۹۷
۰٫۷۰	۱٫۹۲۲	۱٫۷۲۹	۳٫۵	۰٫۹۹۹۶	۰٫۹۱۳۱
۰٫۷۵	۱٫۸۵۳	۱٫۶۶۷	۳٫۶	۰٫۹۹۳۱	۰٫۹۰۶۸
۰٫۸۰	۱٫۷۹۰	۱٫۶۱۲	۳٫۷	۰٫۹۸۶۸	۰٫۹۰۰۸
۰٫۸۵	۱٫۷۳۴	۱٫۵۶۲	۳٫۸	۰٫۹۸۰۹	۰٫۸۹۵۲
۰٫۹۰	۱٫۶۸۲	۱٫۵۱۷	۳٫۹	۰٫۹۷۵۳	۰٫۸۸۹۷
۰٫۹۵	۱٫۶۳۶	۱٫۴۷۷	۴٫۰	۰٫۹۶۹۹	۰٫۸۸۴۵
۱٫۰۰	۱٫۵۹۳	۱٫۴۴۰	۴٫۱	۰٫۹۶۴۷	۰٫۸۷۹۶
۱٫۰۵	۱٫۵۵۴	۱٫۴۰۶	۴٫۲	۰٫۹۵۹۸	۰٫۸۷۴۸
۱٫۱۰	۱٫۵۱۸	۱٫۳۷۵	۴٫۳	۰٫۹۵۵۱	۰٫۸۷۰۳
۱٫۱۵	۱٫۴۸۵	۱٫۳۴۷	۴٫۴	۰٫۹۵۰۶	۰٫۸۶۵۹
۱٫۲۰	۱٫۴۵۵	۱٫۳۲۰	۴٫۵	۰٫۹۴۶۲	۰٫۸۶۱۷
۱٫۲۵	۱٫۴۲۷	۱٫۲۹۶	۴٫۶	۰٫۹۴۲۰	۰٫۸۵۷۶
۱٫۳۰	۱٫۴۰۱	۱٫۲۷۴	۴٫۷	۰٫۹۳۸۰	۰٫۸۵۳۷
۱٫۳۵	۱٫۳۷۷	۱٫۲۵۳	۴٫۸	۰٫۹۳۴۱	۰٫۸۴۹۹
۱٫۴۰	۱٫۳۵۵	۱٫۲۳۴	۴٫۹	۰٫۹۳۰۴	۰٫۸۴۶۳
۱٫۴۵	۱٫۳۳۴	۱٫۲۱۶	۵٫۰	۰٫۹۲۶۸	۰٫۸۴۲۸
۱٫۵۰	۱٫۳۱۵	۱٫۱۹۹	۶٫۰	۰٫۸۹۶۲	۰٫۸۱۲۹
۱٫۵۵	۱٫۲۹۷	۱٫۱۸۳	۷٫۰	۰٫۸۷۲۷	۰٫۷۸۹۸
۱٫۶۰	۱٫۲۸۰	۱٫۱۶۸	۸٫۰	۰٫۸۵۳۸	۰٫۷۷۱۱
۱٫۶۵	۱٫۲۶۴	۱٫۱۵۴	۹٫۰	۰٫۸۳۸۰	۰٫۷۵۵۵
۱٫۷۰	۱٫۲۴۹	۱٫۱۴۱	۱۰٫۰	۰٫۸۲۴۴	۰٫۷۴۲۲
۱٫۷۵	۱٫۲۳۵	۱٫۱۲۸	۱۲٫۰	۰٫۸۰۱۸	۰٫۷۲۰۲
۱٫۸۰	۱٫۲۲۲	۱٫۱۱۷	۱۴٫۰	۰٫۷۸۳۶	۰٫۷۰۲۵
۱٫۸۵	۱٫۲۰۹	۱٫۱۰۵	۱۶٫۰	۰٫۷۶۸۳	۰٫۶۸۷۸
۱٫۹۰	۱٫۱۹۸	۱٫۰۹۵	۱۸٫۰	۰٫۷۵۵۲	۰٫۶۷۵۱
۱٫۹۵	۱٫۱۸۶	۱٫۰۸۵	۲۰٫۰	۰٫۷۴۳۶	۰٫۶۶۴۰
۲٫۰۰	۱٫۱۷۶	۱٫۰۷۵	۲۵٫۰	۰٫۷۱۹۸	۰٫۶۴۱۴
۲٫۱۰	۱٫۱۵۶	۱٫۰۵۸	۳۰٫۰	۰٫۷۰۱۰	۰٫۶۲۳۵
۲٫۲۰	۱٫۱۳۸	۱٫۰۴۲	۳۵٫۰	۰٫۶۸۵۴	۰٫۶۰۸۸
۲٫۳۰	۱٫۱۲۲	۱٫۰۲۷	۴۰٫۰	۰٫۶۷۲۳	۰٫۵۹۶۴
۲٫۴۰	۱٫۱۰۷	۱٫۰۱۳	۵۰٫۰	۰٫۶۵۱۰	۰٫۵۷۶۳
۲٫۵۰	۱٫۰۹۳۳	۱٫۰۰۰۶	۷۵٫۰	۰٫۶۱۴۰	۰٫۵۴۱۵
۲٫۶۰	۱٫۰۸۰۷	۰٫۹۸۹۰	۱۰۰٫۰	۰٫۵۸۸۷	۰٫۵۱۸۰

(الف) مقادیر این جدول، که برای پتانسیل لنارد-جونز (۶-۱۲) قابل‌کاربردند، با درون‌یابی نتایج گفته‌شده در منبع زیر به‌دست آمده‌اند:

L. Monchick and E. A. Mason, *J. Chem. Phys.*, **35**, 1676-1697 (1961).

به‌نظر می‌رسد جدول مانچیک-میسون از جدول قدیمی‌تری که در منبع زیر آمده‌است، کمی بهتر باشد:

J. O. Hirschfelder, R. B. Bird, and E. L. Spatz, *J. Chem. Phys.*, **16**, 968-981 (1948).

(ب) این جدول در منبع زیر به دماهای پایین‌تر تعمیم داده شده‌است:

C. F. Curtiss, *J. Chem. Phys.*, **97**, 7679-7686 (1992).

کورتیس نشان داد که در دماهای پایین، معادله بولتزمن را باید اصلاح کرد تا «زوج‌های چرخان» مولکول‌ها در آن منظور شود. فقط با انجام این اصلاح است که می‌توان گذاری هموار از رفتار کوانتومی به رفتار کلاسیک را شاهد بود. انحراف، در پایین‌تر از دمای بدون بُعد  $0.3^\circ$ ، چشمگیر است.

(ج) انتگرال‌های برخورد در منبع زیر به منحنی برازیده شده‌اند:

P. D. Neufeld, A. R. Janzen, and R. A. Aziz, *J. Chem. Phys.*, **57**, 1100-1102 (1972).

نتایج به شرح زیر است:

$$\Omega_{\mu} = \Omega_k = \frac{1,16145}{T^{*0.14874}} + \frac{0,52487}{\exp(0,77732 \cdot T^*)} + \frac{2,16178}{\exp(2,43787T^*)} \quad (1-2.0)$$

$$\Omega_{D,AB} = \frac{1,06036}{T^{*0.15610}} + \frac{0,19300}{\exp(0,47635T^*)} + \frac{1,03587}{\exp(1,52996T^*)} + \frac{1,76474}{\exp(3,89411T^*)} \quad (2-2.0)$$

که در آن  $T^* = KT/\varepsilon$

## پیوست و

### ثابت‌ها و ضریب‌های تبدیل

۱. ثابت‌های ریاضی

۲. ثابت‌های فیزیکی

۳. ضریب‌های تبدیل

۱. ثابت‌های ریاضی

$$\pi = ۳,۱۴۱۵۹\dots$$

$$e = ۲,۷۱۸۲۸\dots$$

$$\ln ۱۰ = ۲,۳۰۲۵۹\dots$$

## ۲. ثابت‌های فیزیکی<sup>۱</sup>

۸,۳۱۴۵۱	J/g-mol · K	ثابت قانون گازها (R)
۸,۳۱۴۵۱ × ۱۰ <sup>۳</sup>	kg · m <sup>۲</sup> /s <sup>۲</sup> · kg-mol · K	
۸,۳۱۴۵۱ × ۱۰ <sup>۷</sup>	g · cm <sup>۲</sup> /s <sup>۲</sup> · g-mol · K	
۱,۹۸۷۲۱	cal/g-mol · K	
۸۲,۰۵۷۸	cm <sup>۳</sup> atm/g-mol · K	
۴,۹۶۸۶ × ۱۰ <sup>۴</sup>	lb <sub>m</sub> ft <sup>۲</sup> /s <sup>۲</sup> · lb-mol · R	
۱,۵۴۴۳ × ۱۰ <sup>۳</sup>	ft · lb <sub>f</sub> /lb-mol · R	
۹,۸۰۶۶۵	m/s <sup>۲</sup>	شتاب گرانش استاندارد (g <sub>۰</sub> )
۹۸۰,۶۶۵	cm/s <sup>۲</sup>	
۳۲,۱۷۴۰	ft/s <sup>۲</sup>	
۴,۱۸۴۰	J/cal	ثابت ژول (J <sub>c</sub> )
۴,۱۸۴۰ × ۱۰ <sup>۷</sup>	erg/cal	(هم‌ارز مکانیکی گرما)
۷۷۸,۱۶	ft · lb <sub>f</sub> /Btu	
۶,۰۲۲۱۴ × ۱۰ <sup>۲۳</sup>	molecules/g-mol	عدد آوآگادرو ( $\bar{N}$ )
۱,۳۸۰۶۶ × ۱۰ <sup>-۲۳</sup>	J/K	ثابت بولتزمن (K = R/ $\bar{N}$ )
۱,۳۸۰۶۶ × ۱۰ <sup>-۱۶</sup>	erg/K	
۹۶۴۸۵,۳	C/g-equivalent	ثابت فاراده (F)
۶,۶۲۶۰۸ × ۱۰ <sup>-۲۴</sup>	J · s	ثابت پلانک (h)
۶,۶۲۶۰۸ × ۱۰ <sup>-۲۷</sup>	erg · s	
۵,۶۷۰۵۱ × ۱۰ <sup>-۸</sup>	W/m <sup>۲</sup> · K <sup>۴</sup>	ثابت استفان-بولتزمن ( $\sigma$ )
۱,۳۵۵۳ × ۱۰ <sup>-۱۲</sup>	cal/s · cm <sup>۲</sup> K <sup>۴</sup>	
۱,۷۱۲۴ × ۱۰ <sup>-۹</sup>	Btu/hr · ft <sup>۲</sup> R <sup>۴</sup>	
۱,۶۰۲۱۸ × ۱۰ <sup>-۱۹</sup>	C	بار الکترون (e)
۲,۹۹۷۹۲ × ۱۰ <sup>۸</sup>	m/s	سرعت نور در خلأ (c)

## ۳. ضریب‌های تبدیل

در جدول‌های زیر، برای تبدیل هر کمیت فیزیکی از یک دستگاه واحدها به دستگاه دیگر، آن را در مدخل مناسب از جدول، ضرب کنید. مثلاً، فرض کنید که  $p$  به صورت  $۱۰ \text{ lb}_f/\text{in.}^۲$  داده شده‌است و می‌خواهیم آن را برحسب پوندال بر  $\text{ft}^۲$  به دست آوریم. از جدول ۳-۲ نتیجه می‌شود:

$$p = (۱۰)(۴,۶۳۳۰ \times ۱۰^۳) = ۴,۶۳۳۰ \times ۱۰^۴ \text{ پوندال}/\text{ft}^۲$$

1. E. R. Cohen B. N. Taylor, *Physics Today* (August 1996), pp. BG9-BG13; R. A. Nelson, *Physics Today* (August 1996), pp. BG15-BG16.



مدخل‌های سطرها و ستون‌های سایه‌خورده، آن‌هایی هستند که برای تبدیل از واحدهای SI، و به واحدهای SI، لازم‌اند. علاوه بر این جدول‌ها، چند ضرب تبدیل متداول را نیز در این جا بیان می‌کنیم:

کمیت برحسب این واحدها را	در عدد زیر ضرب کنید	تا کمیت برحسب این واحدها به دست آید
پوند	۴۵۳/۵۹	گرم
کیلوگرم	۲/۲۰۴۶	پوند
اینچ	۲/۵۴۰۰	سانتی‌متر
متر	۳۹/۳۷۰	اینچ
گالن (امریکایی)	۳/۷۸۵۳	لیتر
گالن (امریکایی)	۲۳۱/۰۰	اینچ مکعب
گالن (امریکایی)	۰/۱۳۳۶۸	فوت مکعب
فوت مکعب	۲۸/۳۱۶	لیتر
کلوین	۱/۸۰۰۰۰۰	درجهٔ رانکین
درجهٔ رانکین	۰/۵۵۵۵۵۶	کلوین

جدول و ۳-۱ ضرب‌های تبدیل برای کمیت‌هایی با ابعاد  $F$  یا  $ML/t^2$ .

کمیت برحسب به این واحدها را درمقدار جدول ↓	ضرب کنید تا به این واحدها تبدیل شود →	$N = kg \cdot m/s^2$ (نیوتن)	$g \cdot cm/s^2$ (دین)	$lb_m \cdot ft/s^2$ (پوندال)	$lb_f$
$N = kg \cdot m/s^2$	(نیوتن)	۱	$10^5$	۷/۲۳۳۰	$2,24809 \times 10^{-1}$
$g \cdot cm/s^2$	(دین)	$10^{-5}$	۱	$7,2330 \times 10^{-5}$	$2,24809 \times 10^{-6}$
$lb_m \cdot ft/s^2$	(پوندال)	$1,3826 \times 10^{-1}$	$1,3826 \times 10^2$	۱	$3,1081 \times 10^{-2}$
$lb_f$		۴/۴۴۸۲	$4,4482 \times 10^5$	۳۲/۱۷۴۰	۱

جدول ۲-۳ و ۲-۴ ضریب‌های تبدیل برای کمیت‌هایی با ابعاد  $F/L^2$  یا  $M/L^2$  (فشار، شار انرژی-حرکت).

↓	↑	kg/m <sup>2</sup> · s <sup>2</sup>	g/cm <sup>2</sup> · s <sup>2</sup>	(N/m <sup>2</sup> )	dyne/cm <sup>2</sup>	(lb <sub>m</sub> /ft <sup>2</sup> · s <sup>2</sup> )	lb <sub>f</sub> /ft <sup>2</sup>	lb <sub>f</sub> /in <sup>2</sup>	atm	mm Hg	hp - hr	kw - hr	in. Hg
ضرب کنید تا کمیت برحسب	→	۱	۱۰ <sup>-۳</sup>	۱	۱۰	۶,۷۱۹۷ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	۲,۸۸۶ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۱,۴۰۲ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۹,۸۶۹ × ۱۰ <sup>-۶</sup>	۷,۵۰۰۶ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۲,۷۵۳ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۲,۷۷۷ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۲,۹۵۳ × ۱۰ <sup>-۲</sup>
به این واحدها این واحدها را	→	۱۰ <sup>-۳</sup>	۱	۱	۱	۶,۷۱۹۷ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۲,۸۸۶ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۱,۴۰۲ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۹,۸۶۹ × ۱۰ <sup>-۶</sup>	۷,۵۰۰۶ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۲,۷۵۳ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۲,۷۷۷ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۲,۹۵۳ × ۱۰ <sup>-۲</sup>
درمقدار جدول	→	۱/۲۸۸۲	۱/۲۸۸۲ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۱/۲۸۸۲	۱/۲۸۸۲ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۱	۱	۱	۱/۶۶۸۷ × ۱۰ <sup>-۵</sup>	۱/۱۱۶۲ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۱/۱۱۶۲ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۱/۱۱۶۲ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۱/۱۱۶۲ × ۱۰ <sup>-۲</sup>
	→	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۳۲,۱۷۴ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۱	۱	۲,۷۲۵ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۳,۵۹۱ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	۳,۵۹۱ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	۳,۵۹۱ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	۳,۵۹۱ × ۱۰ <sup>-۱</sup>
	→	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۲,۶۳۳ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱۴۴	۱	۶,۸۰۴ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۵,۱۷۱ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۵,۱۷۱ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۵,۱۷۱ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۵,۱۷۱ × ۱۰ <sup>۱</sup>
	→	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>-۵</sup>	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
	→	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
	→	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

(الف) ترجیح این است که این واحد با صورت اختصاری «psia» (پوند مربع مطلق) یا «psig» (پوند مربع نسبی) نشان داده شود. فشار نسبی عبارت است از فشار مطلق منهای فشار جو. گاهی فشار را برحسب «بار» ذکر می‌کنند. برای تبدیل از بار به پوندال، در ۱۰۵ و برای تبدیل از بار به اتمسفر در ۱۸۸۶۲ ضرب کنید.

جدول ۳-۳ و ۳-۴ ضریب‌های تبدیل برای کمیت‌هایی با ابعاد  $F/L^2$  یا  $M/L^2$  (انرژی، کار، و گشتاور).

↓	↑	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	ergs	foot	foot	ergs	foot	cal	Btu	hp - hr	kw - hr
ضرب کنید تا کمیت برحسب	→	۱	۱۰ <sup>۷</sup>	۱	۱	۱۰ <sup>۷</sup>	۱	۱	۱	۱	۱
به این واحدها این واحدها را	→	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
درمقدار جدول	→	۱/۲۸۸۲	۱/۲۸۸۲ × ۱۰ <sup>۷</sup>	۱/۲۸۸۲	۱/۲۸۸۲ × ۱۰ <sup>۷</sup>	۱/۲۸۸۲	۱/۲۸۸۲ × ۱۰ <sup>۷</sup>	۱/۲۸۸۲	۱/۲۸۸۲	۱/۲۸۸۲	۱/۲۸۸۲
	→	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۲,۷۸۸ × ۱۰ <sup>۱</sup>
	→	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۶,۸۱۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>
	→	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>-۵</sup>	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۱/۱۳۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>
	→	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱/۳۳۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>
	→	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۳,۳۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>

(الف) این واحد با صورت اختصاری «cal» در بعضی از جدول‌های ترمودینامیک شیمیایی بکار رفته‌است. برای تبدیل کمیت‌های بیان‌شده برحسب کاری جدول بخار بین‌المللی (با صورت اختصاری «at. T. cal») به این واحد کمیت را در ۱,۰۰۰۶۵۲ ضرب کنید.

جدول ۴-۳. ضرب‌های تبدیل برای کمیت‌هایی با ابعاد  $M/L^2$  یا  $M/Lt^2$  (ویسکوزیته، چگالی ضرب در ضریب نفوذ).

↓	→	pa · s (kg/m · s)	g/cm · s (poises)	سانتی پواز	lb <sub>m</sub> /ft · s	lb <sub>m</sub> /ft · hr	lb <sub>f</sub> · s/ft <sup>2</sup>
pa · s = kg/m · s	→	۱	۱۰	۱۰ <sup>۲</sup>	۶,۷۱۹۷ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	۲,۴۱۹۱ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۲,۷۸۸۶ × ۱۰ <sup>-۱</sup>
g/cm · s (پواز)	→	۱۰ <sup>-۱</sup>	۱	۱۰ <sup>۲</sup>	۶,۷۱۹۷ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۲,۴۱۹۱ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۲,۷۸۸۶ × ۱۰ <sup>-۲</sup>
سانتی پواز	→	۱۰ <sup>-۲</sup>	۱۰ <sup>-۲</sup>	۱	۶,۷۱۹۷ × ۱۰ <sup>-۴</sup>	۲,۴۱۹۱	۲,۷۸۸۶ × ۱۰ <sup>-۵</sup>
lb <sub>m</sub> /ft · s	→	۱,۴۸۸۲	۱,۴۸۸۲ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۱,۴۸۸۲ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱	۳۶۰۰	۳,۱۰۸۱ × ۱۰ <sup>-۲</sup>
lb <sub>m</sub> /ft · hr	→	۲,۱۳۳۸ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۲,۱۳۳۸ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۲,۱۳۳۸ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	۲,۷۷۷۸ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۱	۸,۶۳۳۶ × ۱۰ <sup>-۶</sup>
lb <sub>f</sub> · s/ft <sup>2</sup>	→	۴,۷۸۸۰ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۴,۷۸۸۰ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۴,۷۸۸۰ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۳۲,۱۷۴۰	۱,۱۵۸۳ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۱

الف) وقتی در واحدهای مفروض و مطلوب، مول ظاهر می‌شود، ضریب تبدیل همان متناظر برای واحدهای جرمی است.

جدول ۵-۳. ضرب‌های تبدیل برای کمیت‌هایی با ابعاد  $F/tT$  یا  $ML/t^3T$  (رسانندگی گرمایی).

↓	→	W/m · K (kg · m/s <sup>3</sup> · K)	g · cm/s <sup>3</sup> · K	یا	lb <sub>m</sub> ft/s <sup>3</sup> F	lb <sub>f</sub> /s · F	cal/s · cm · K	Btu/hr · ft · F
W/m · K = kg · m/s <sup>3</sup> · K	→	۱	۱۰ <sup>۵</sup>	۴,۰۱۸۳	۱,۲۲۸۹ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	۲,۳۹۰۱ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۵,۷۷۸۰ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	
g · cm/s <sup>3</sup> · K	→	۱۰ <sup>-۵</sup>	۱	۴,۰۱۸۳ × ۱۰ <sup>-۵</sup>	۱,۲۲۸۹ × ۱۰ <sup>-۶</sup>	۲,۳۹۰۱ × ۱۰ <sup>-۸</sup>	۵,۷۷۸۰ × ۱۰ <sup>-۶</sup>	
lb <sub>m</sub> ft/s <sup>3</sup> F	→	۲,۴۸۸۶ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	۲,۴۸۸۶ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۱	۳,۱۰۸۱ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۵,۱۴۷۹ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۱,۴۳۷۹ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	
lb <sub>f</sub> /s · F	→	۸,۰۰۶۸	۸,۰۰۶۸ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۳,۲۱۷۴ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۱	۱,۹۱۳۷ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۴,۶۲۶۳	
cal/s · cm · K	→	۴,۱۸۴۰ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۴,۱۸۴۰ × ۱۰ <sup>۷</sup>	۱,۶۸۱۳ × ۱۰ <sup>۲</sup>	۵,۲۲۵۶ × ۱۰ <sup>۱</sup>	۱	۲,۴۱۷۵ × ۱۰ <sup>۲</sup>	
Btu/hr · ft · F	→	۱,۷۳۰۷	۱,۷۳۰۷ × ۱۰ <sup>۵</sup>	۶,۹۵۴۶	۲,۱۶۱۶ × ۱۰ <sup>-۱</sup>	۲,۱۳۶۵ × ۱۰ <sup>-۲</sup>	۱	

ضرب کنید تا

کمیت برحسب

به این واحدها

را

تبدیل شود

در مقدار جدول

جدول ۳-۶ ضریب‌های تبدیل برای کمیت‌هایی با ابعاد  $L^2/t$  (ضریب نفوذ اندازه حرکت، ضریب نفوذ گرمایی، و ضریب نفوذ مولکولی).

ضرب کنید تا به این واحدها تبدیل شود	↓ درمقدار جدول	→	متری/ثانیه $m^2/s$	سانتی‌متری/ثانیه $cm^2/s$	فوت‌متری/ساعت $ft^2/hr$	سانتی‌استوکس
$m^2/s$	۱		۱	$10^4$	$3,8750 \times 10^4$	$10^6$
$cm^2/s$	$10^{-4}$		$10^{-4}$	۱	۳,۸۷۵۰	$10^2$
$ft^2/hr$	$2,5807 \times 10^{-5}$		$2,5807 \times 10^{-5}$	$2,5807 \times 10^{-1}$	۱	$2,5807 \times 10^1$
سانتی‌استوکس	$10^{-6}$		$10^{-6}$	$10^{-2}$	$3,8750 \times 10^{-2}$	۱

جدول ۷-۳ ضریب‌های تبدیل برای کمیت‌هایی با ابعاد  $F/Lt^2$  یا  $M/t^2$  (ضریب‌های انتقال گرمایی).

ضرب کنید تا به این واحدها تبدیل شود درمقدار جدول	←	↓	←	↓	←	↓	←	↓	←	↓
ضرب برحسب این واحدها درمقدار جدول	←	↓	←	↓	←	↓	←	↓	←	↓
←	↓	←	↓	←	↓	←	↓	←	↓	←
$W/m^2K = kg/s^2K$	$1$	$10^{-2}$	$10^2$	$1/2228$	$3,8068 \times 10^{-2}$	$2,3901 \times 10^{-5}$	$1,7611 \times 10^{-1}$			
$W/cm^2K$	$10^4$	$1$	$10^7$	$1,2248 \times 10^4$	$3,8068 \times 10^2$	$2,3901 \times 10^{-1}$	$1,7611 \times 10^2$			
$g/s^2K$	$10^{-2}$	$10^{-7}$	$1$	$1,2248 \times 10^{-2}$	$3,8068 \times 10^{-5}$	$2,3901 \times 10^{-8}$	$1,7611 \times 10^{-2}$			
$lbm/s^2F$	$4,18677 \times 10^{-1}$	$4,18677 \times 10^{-5}$	$4,18677 \times 10^2$	$1$	$3,71081 \times 10^{-2}$	$1,9514 \times 10^{-5}$	$1,43779 \times 10^{-1}$			
$lb_f/ft \cdot s \cdot F$	$2,76269 \times 10^1$	$2,76269 \times 10^{-2}$	$2,76269 \times 10^4$	$32,1740$	$1$	$6,22784 \times 10^{-2}$	$4,6263$			
$cal/cm^2 \cdot s \cdot K$	$2,1182 \times 10^2$	$2,1182$	$2,1182 \times 10^7$	$5,12245 \times 10^4$	$1,59228 \times 10^2$	$1$	$7,23686 \times 10^2$			
$Btu/ft^2 \cdot hr \cdot F$	$5,6782$	$5,6782 \times 10^{-2}$	$5,6782 \times 10^2$	$6,9526$	$2,1616 \times 10^{-1}$	$1,2571 \times 10^{-2}$	$1$			

جدول ۸-۳ ضریب‌های تبدیل برای کمیت‌هایی با ابعاد  $L^3/t^3$  یا  $M/L^3$  (ضریب‌های انتقال جرم  $k_c$  یا  $k_m$ ).

ضرب کنید تا به این واحدها تبدیل شود درمقدار جدول	←	↓	←	↓	←	↓	←	↓	←	↓
ضرب برحسب این واحدها درمقدار جدول	←	↓	←	↓	←	↓	←	↓	←	↓
←	↓	←	↓	←	↓	←	↓	←	↓	←
$kg/m^3s$	$1$	$10^{-1}$	$10^3$	$2,0482 \times 10^{-1}$	$7,3774 \times 10^{-2}$	$6,3659 \times 10^{-2}$				
$g/cm^3s$	$10^3$	$1$	$10^6$	$2,0482$	$7,3774 \times 10^2$	$6,3659 \times 10^2$				
$lbm/ft^3s$	$2,8824$	$4,8824 \times 10^{-1}$	$4,8824 \times 10^2$	$1$	$3600$	$3,1081 \times 10^{-2}$				
$lbm/ft^3hr$	$1,3562 \times 10^{-2}$	$1,3562 \times 10^{-2}$	$1,3562 \times 10^2$	$2,7778 \times 10^{-2}$	$1$	$8,6336 \times 10^{-6}$				
$lb_f/s/ft^3$	$1,5709 \times 10^2$	$1,5709 \times 10^1$	$1,5709 \times 10^3$	$32,1740$	$1,1583 \times 10^5$	$1$				

(الف) وقتی در واحدهای مفروض و مطلوب، مول ظاهر می‌شود، ضریب تبدیل همان ضریب متناظر برای واحدهای جرمی است.

## نمادگذاری

اعداد داخل پرانتز به معادله‌ها، بخش‌ها، یا جدول‌هایی ارجاع می‌دهند که این نمادها در آن‌ها تعریف شده، یا برای نخستین بار به‌کار رفته‌اند. ابعاد برحسب جرم ( $M$ )، طول ( $L$ )، زمان ( $t$ )، دما ( $T$ ) و بدون بُعد (—) ارائه شده‌اند. نمادهایی که با حروف سیاه آمده‌اند، بردار یا تانسورند (نگاه کنید به پیوست الف). نمادهایی که به‌ندرت به‌کار می‌روند، در این فهرست نیامده‌اند.

$L^2$	=	$A$	سطح،
—	=	$a$	ضریب جذب (۱-۲.۱۶)،
$L^{-1}$	=	$a$	سطح فصل‌مشرکی به‌ازای واحد حجم بستر پرشده (۴-۴.۶)،
—	=	$a_\alpha$	فعالیت گونه $\alpha$ (۸-۱.۲۴)،
$ML^2/t^2T$	=	$C_p$	ظرفیت گرمایی در فشار ثابت (۸-۱.۹)،
$ML^2/t^2T$	=	$C_V$	ظرفیت گرمایی در حجم ثابت (۶-۳.۹)،
$L/t$	=	$c$	سرعت نور (۱۱.۱۶)،
moles/ $L^3$	=	$c$	غلظت مولی کل، (بخش ۷.۱۷)،
moles/ $L^3$	=	$c_\alpha$	غلظت مولی گونه $\alpha$ ، (بخش ۷.۱۷)،
—	=	$D$	قطر استوانه یا کره، $L$
$L$	=	$D_p$	قطر ذره در بستر پرشده، (۶-۴.۶)،
$L^2/t$	=	$\mathcal{D}_{AB}$	ضریب نفوذ دوتایی برای سیستم $A-B$ (۲-۱.۱۷)،
$L^2/t$	=	$\mathcal{D}_{\alpha\beta}$	ضریب نفوذ دوتایی برای زوج $\alpha-\beta$ در سیستمی چندجزئی (۱-۹.۱۷)،
$L^2/t$	=	$\mathcal{D}_{\alpha\beta}$	ضریب نفوذ چندجزئی ماکسول-استفان (۴-۲.۲۴)،
$L^2/t$	=	$\mathbb{D}_{\alpha\beta}$	ضریب نفوذ چندجزئی فیک (۳-۲.۲۴)،
$M/Lt$	=	$D_\alpha^T$	ضریب نفوذ گرمایی چندجزئی (۳-۲.۲۴)،
—	=	$d$	قطر مولکولی (۳-۴.۱)،
$L^{-1}$	=	$d_\alpha$	نیروی رانش نفوذی برای گونه $\alpha$ (۸-۱.۲۴)،
$ML^2/t^2$	=	$E_{\text{tot}}$	انرژی کل در هر سیستم ماکروسکوپی (۲-۱.۱۵)،
$ML^2/t^2$	=	$E_c$	جمله تراکم در موازنه انرژی مکانیکی (۳-۴.۷)،
$ML^2/t^2$	=	$E_v$	جمله اتلاف ویسکوز در موازنه انرژی مکانیکی (۴-۴.۷)،
۲,۷۱۸۲۸...	=	$e$	
—	=	$e$	ضریب گسیل (۳-۲.۱۶)،
$M/t^2$	=	$e$	بردار شار انرژی مرکب (۵-۸.۹)،
—	=	$F_{12}, \bar{F}_{12}$	ضریب دید مستقیم، غیرمستقیم (۹-۴.۱۶)، (۱۵-۴.۱۶)،
$ML/t^2$	=	$\mathbf{F}_{s \rightarrow f}$	نیروی که جسم جامد بر سیال وارد می‌کند (۱-۲.۷)،
—	=	$f$	ضریب اصطکاک (یا ضریب پسا) (۱-۱.۶)،
$ML^2/t^2$	=	$G$	$H - TS$ = انرژی آزاد گیبس (۲-۱.۲۴)،
$M/L^2t$	=	$\langle \rho v \rangle = G$	سرعت جرمی (۸-۴.۶)،
$L/t^2$	=	$\mathbf{g}$	شتاب گرانشی (۸-۲.۳)،
$L/t^2$	=	$\mathbf{g}_\alpha$	نیروی حجمی در واحد جرم، وارد بر گونه $\alpha$ (جدول ۱-۲.۱۹)،
$ML^2/t^2$	=	$H$	$U + pV$ = آنتالپی (۶-۸.۹)،
$ML^2/t$	=	$h$	ثابت پلانک (۲-۱.۱۶)،

	$L$ , (۱۰-۳.۲) ارتفاع	$= h$
	$M/t^2 T$ , (۶ تا ۱-۱.۱۴) ضرایب انتقال گرما	$= h, h_1, h_{1n}, h_{1oc}, h_a, h_m$
	$\sqrt{-1}$ , (۴۳-۱.۴)	$= i$
	moles/ $L^3 t$ , (۱-۸.۱۷) شارهای مولی (جدول)	$= J_\alpha, J_\alpha^*$
	$M/L^3 t$ , (۱-۸.۱۷) شارهای جرمی (جدول)	$= \dot{j}_\alpha, \dot{j}_\alpha^*$
	ضرایب $j$ چیلتون-کولبورن (۱۹-۳.۱۴)، جدول (۱-۲.۲۲) -	$= j_H, j_D$
	$ML^3/t^3$ , (۱-۴.۷) انرژی جنبشی	$= K$
	moles/ $tL^3$ , (۴-۴.۲۲) ضرایب انتقال جرم دوفاز	$= K_x, K_y$
	$ML^3/t^2 L$ , (۱-۴.۱) ثابت بولتزمن	$= R/\bar{N}$
	$ML/t^2 T$ , (۶-۲.۲۴ و ۱-۱.۹) رسانندگی گرمایی	$= k$
	moles/ $tL^3$ , (۱-۲.۲۲) ضریب انتقال جرم تک‌فاز (۴-۳.۲۲، ۷-۱.۲۲)	$= k_x$
	ضرایب انتقال جرم برای آهنگ‌های پایین انتقال جرم و غلظت‌های پایین گونه	$= K_x, K_y'$
	moles/ $tL^3$ , (۲-۴.۲۲، ۹-۱.۲۲)	
	ضریب انتقال جرم برای آهنگ‌های بالای انتقال جرم خالص (۲-۸.۲۲) (الف)	$= k_x'$
	نسبت نفوذ گرمایی (۱۰-۲.۲۴) -	$= k_T$
	ohm $^{-1}$ cm $^{-1}$ , (۱-۵.۹) رسانندگی الکتریکی	$= k_e$
	moles $^{1-n}/L^{3-2n}t$ , (۳-۰.۱۸) ضریب آهنگ واکنش شیمیایی ناهمگن	$= k_n''$
	moles $^{1-n}/L^{3-2n}t$ , (۲-۰.۱۸) ضریب آهنگ واکنش شیمیایی همگن	$= k_n'''$
	$L$ , (۳.ب ۲، ۱-۳.۲، ۱-۲.۲) طول فیلم، لوله، یا شکاف (شکل‌های)	$= L$
	$ML^3/t$ , (۱-۳.۷) اندازه حرکت زاویه‌ای کل در سیستمی ماکروسکوپی،	$= L_{tot}$
	$L$ , (۴-۴.۵) طول اختلاط	$= l$
	$L$ , (۳-۷.۳) طول مشخصه در تحلیل ابعادی	$= l_c$
	$M/\text{mole}$ , (۱-۷.۱۷) وزن مولکولی میانگین مولی (جدول)	$= M$
	$M/\text{mole}$ , (۱-۷.۱۷) وزن مولکولی گونه $\alpha$ (جدول)	$= M_\alpha$
	moles, (۳-۱.۲۳) تعداد کل مول‌های گونه $\alpha$ در سیستم ماکروسکوپی	$= M_{\alpha,tot}$
	$M$ , (۱-۴.۱) جرم یک مولکول	$= m$
	$M/Lt^{1-n}$ , (۳-۳.۸) پارامترهای مدل ویسکوزیته قانون توانی	$= m, n$
	$M$ , (۱۱.۲۳) جرم کل گونه $\alpha$ در سیستم ماکروسکوپی	$= m_{\alpha,tot}$
	$t^{-1}$ , (۲۸-۷.۳) آهنگ چرخش محور	$= N$
	-، (۱-۷.۱۷) تعداد گونه‌ها در مخلوطی چندجزئی	$= N$
	عدد آووگادرو $^{-1}$ (g-mole)	$= \bar{N}$
	moles/ $L^3 t$ , (۲-۸.۱۷) بردار شار مولی گونه $\alpha$	$= N_\alpha$
	بردار یکه قائم (الف-۱-۵)	$= n$
	$M/L^3 t$ , (۱-۸.۱۷) بردار شار جرمی مرکب گونه $\alpha$	$= n_\alpha$
	$L^{-2}$ , (۲-۴.۱) غلظت مولکولی یا چگالی عددی	$= n$
	$ML/t$ , (۱-۲.۷) اندازه حرکت کل در سیستم جریان ماکروسکوپی	$= P_{tot}$
	$M/Lt^3$ , (۱۰-۳.۲) فشار اصلاح شده (به‌ازای $\rho$ و $g$ ثابت)	$= P$
	$M/Lt^3$ , (۴-۷.۳) فشار مشخصه مورد استفاده در تحلیل ابعادی	$= P_c$
	$M/Lt^3$ فشار سیال،	$= p$
	$ML^3/t^2$ , (۱-۱.۱۵، ۱-۱.۹) آهنگ جریان گرما روی سطح	$= Q$

$ML^2/t^2$ , (۵-۴-۱۶)	جریان انرژی تابشی از سطح ۱ به سطح ۲	$= Q_{\vec{r}}$
$ML^2/t^2$ , (۸-۴-۱۶)	تبادل انرژی تابشی خالص بین سطوح ۱ و ۲	$= Q_{12}$
$M/t^2$ , (۶-۱-۹)	بردار شارگرما	$= q$
$M/t^2$ , (۱۴-۸-۱۰)	شار گرمای فصل مشترکی	$= q_0$
$ML^2/t^2 T \text{mole}$ , ( $p\bar{V} = RT$ )	ثابت گاز (در رابطه)	$= R$
$L$	شعاع استوانه یا کره	$= R$
$\text{moles}/tL^2$ , (۲-۰-۱۸)	آهنگ مولی تولید گونه $\alpha$ از طریق واکنش شیمیایی همگن	$= R_\alpha$
$L$ , (۱۶-۲-۶)	شعاع هیدرولیکی میانگین	$= R_h$
(۴۳-۱-۴)	بخش حقیقی (در کمیتی مختلط)	$= \mathcal{R}$
$L$ , (۱-۴-۳)	بردار مکان	$= r$
$L$	مختص شعاعی در دستگاه مختصات استوانه‌ای	$= r$
$L$	مختص شعاعی در دستگاه مختصات کروی	$= r$
$M/tL^2$ , (۵-۱-۱۹)	آهنگ جرمی تولید گونه $\alpha$ توسط واکنش شیمیایی همگن	$= r_\alpha$
$L^2$ , (۱-۱-۷)	سطح مقطع در صفحه‌های ۱ و ۲	$= S_1, S_2$
$ML^2/t^2 T$ , (۱-۱-۲۴, ۱-۱-۱۱)	آنترپپی	$= S$
$T$	دمای مطلق	$= T$
$ML^2/t^2$ , (۱-۳-۷)	گشتاوری که مرز جامد بر سیال وارد می‌کند	$= T_{s \rightarrow f}$
$ML^2/t^2$ , (۱-۳-۷)	گشتاور خارجی وارد بر سیستم	$= T_{\text{ext}}$
$T$ , (۵-۵-۱۱)	اختلاف دمای مشخصه مورد استفاده در تحلیل ابعادی	$= T_1 - T_2$
$t$	زمان	$= t$
$ML^2/t^2$ , (۱-۷-۹)	انرژی داخلی	$= U$
$M/t^2 T$ , (۱۵-۶-۱۰)	ضریب کلی انتقال گرما	$= U$
$L/t$ , (۱-۴-۱)	سرعت مولکولی میانگین حسابی	$= \bar{u}$
—	بردار یکه درجهت جریان	$= u$
$L^3$	حجم	$= V$
$L/t$ , (۱-۷-۱۷)	سرعت جرمی متوسط	$= v$
$L/t$ , (۲-۷-۱۷)	سرعت مولی متوسط	$= v^*$
$L/t$ , (۲-۷-۱۷)	سرعت گونه $\alpha$ (جدول ۳-۱-۱۷)	$= v_\alpha$
$L/t$ , (۴-۷-۳)	سرعت مشخصه در تحلیل ابعادی	$= v_0$
$L/t$ , (۴-۱-ج ۱۱, ۲-۴-۹)	سرعت صوت	$= v_s$
$L/t$ , (۲-۳-۵)	سرعت اصطکاکی	$= v_*$
$\text{moles}/t$ , (۴-۱-۲۳)	آهنگ جریان مولی روی سطح	$= W$
$\text{moles}/t$ , (۳-۱-۲۳)	آهنگ جریان مولی گونه $\alpha$ روی سطح	$= W_\alpha$
$ML^2/t^2$ , (۱-۴-۷)	آهنگ انجام کار توسط محیط اطراف روی سیستم، از طریق قطعات متحرک	$= W_m$
$M/t$ , (۲۱-۲-۲)	آهنگ جریان جرمی روی سطح	$= w$
$M/t$ , (۱-۱-۲۳)	آهنگ جریان جرمی گونه $\alpha$ روی سطح	$= w_\alpha$
—	کسر مولی گونه $\alpha$ (جدول ۱-۷-۱۷)	$= x_\alpha$
	مختصات دکارتی	$= x, y, z$
$L$	فاصله از جدار (در نظریه لایه مرزی و تلاطم (بخش ۴-۴))	$= y$
—	کسر مولی گونه $\alpha$ (جدول ۲-۴-۲۲)	$= y_\alpha$



	$Z$	=	بسامد برخورد با جدار (۲-۴.۱)، $L^{-2}t^{-1}$
	$z_\alpha$	=	بار یونی، (۵-۴.۲۴)، equiv/mole
آلفا	$\alpha$	=	$k/\rho C_p$ = ضریب نفوذ گرمایی (۸-۱.۹)، $L^2/t$
بتا	$\beta$	=	ضریب انبساط حجمی گرمایی (۶-۹.۱۰)، $T^{-1}$
	$\beta$	=	گرادیان سرعت در سطح (۲۶-۴.۱۲)، $s^{-1}$
گاما	$\gamma$	=	$C_p/C_v$ = نسبت ظرفیت گرمایی (۵۶-۴.۱۱)، —
	$\dot{\gamma}$	=	$(\nabla \mathbf{v})^\dagger = \nabla \mathbf{v}$ = تانسور آهنگ تغییر شکل (۱-۳.۸)، $t^{-1}$
دلتا	$\Delta X$	=	$X_2 - X_1$ = اختلاف بین مقادیر ورودی و خروجی
	$\delta$	=	ضخامت فیلم ریزان (۲۲-۲.۲)، ضخامت لایه مرزی (۱۴-۴.۴)، $L$
	$\delta$	=	تانسور بکه (۲-۲.۱)، الف (۱۰-۳.۱۰)، —
	$\delta_i$	=	بردار بکه در راستای $i$ (الف ۹-۲)، —
	$\delta_{ij}$	=	دلتای کرونکر (الف ۱-۲)، —
ایسیلون	$\varepsilon$	=	کسر فضای خالی (۳-۴.۶)، —
	$\varepsilon, \varepsilon_{AB}$	=	ماکریم انرژی جاذبه بین دو مولکول (۱۰-۴.۱، ۱۳-۳.۱۷)، $ML^2/t^2$
	$\varepsilon_{ijk}$	=	نماد جایگشت (الف ۳-۲)، —
زتا	$\zeta$	=	ضریب انبساط حجمی ترکیبی (۲-۲.۱۹) و جدول (۱-۲.۲۲)، —
اتا	$\eta$	=	ویسکوزیته غیرنیوتونی (۱-۲.۸)، $M/Lt$
	$\eta', \eta''$	=	مؤلفه‌های ویسکوزیته مختلط (۴-۲.۸)، $M/Lt$
	$\bar{\eta}$	=	ویسکوزیته افزایش طولی (۵-۲.۸)، $M/Lt$
	$\eta_0$	=	ویسکوزیته آهنگ برشی صفر (۴-۳.۸)، $M/Lt$
تتا	$\theta$	=	$\arctan(y/x)$ = زاویه در مختصات استوانه‌ای (الف ۵-۶)، —
	$\theta$	=	$\arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z)$ = زاویه در مختصات کروی (الف ۶-۲۳)، —
کاپا	$\kappa$	=	ویسکوزیته اتساعی (۶-۲.۱)، $M/Lt$
	$\kappa, \kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$	=	ثابت‌های بدون بُعد مورد استفاده در تلاطم (۱-۳.۵، ۳-۴.۵، ۵-۴.۵، ۶-۴.۵)
لاندا	$\Lambda, \Lambda_v, \Lambda_T, \Lambda_w$	=	نسبت‌های ضریب نفوذ (۲۹-۲.۲۰)، —
	$\lambda$	=	طول موج تابش الکترومغناطیسی (۱-۱.۱۶)، $L$
	$\lambda$	=	مسافت آزاد میانگین (۳-۴.۱)، $L$
	$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_k, \lambda_H$	=	ثابت‌های زمانی در مدل‌های سیال شناختی (بخش ۴.۸ تا بخش ۶.۸)، $t$
مو	$\mu$	=	ویسکوزیته (۱-۱.۱)، $M/Lt$
نو	$\nu$	=	$\mu/\rho$ = ویسکوزیته سینماتیکی (۳-۱.۱)، $L^2/t$
	$\nu$	=	بسامد تابش الکترومغناطیسی (۱-۱.۱۶)، $t^{-1}$
خی	$\xi$	=	ضریب انبساط حجمی ترکیبی (جدول ۱-۲.۲۲)، —
پی	$\Pi, \Pi_v, \Pi_T, \Pi_w$	=	توزیع‌های بدون بُعد (۲۵-۴.۴، ۲۱-۴.۱۲، ۲۸-۲.۲۰)، —
	$\pi$	=	۳٫۱۴۱۵۹...
	$\pi$	=	$\tau + p\delta$ = تانسور شار اندازه حرکت مولکولی،
	$\rho$	=	چگالی، $M/L^3$
رو	$\rho_\alpha$	=	جرم گونه $\alpha$ در واحد حجم مخلوط (جدول ۱-۷.۱۷)، $M/L^3$
	$\sigma$	=	ثابت استفان-بولتزمن، $M/t^2 T^2$
سیگما	$\sigma$	=	کشش سطحی (۱۲-۷.۳)، $M/t^2$

	$\sigma, \sigma_{AB}$	= قطر برخورد (۱۰-۴.۱), (۱۱-۳.۱۷), $L$
تاو	$\tau$	= تانسور شار اندازه حرکت (ویسکوز)، تانسور تنش (ویسکوز) (۲-۲.۱), $M/Lt^2$
	$\tau_0$	= اندازه تنش برشی در فصل مشترک سیال-جامد (۱-۳.۵), $M/Lt^2$
فی	$\Phi$	= انرژی پتانسیل (۲-۳.۳), $ML^2/t^2$
	$\Phi_v$	= تابع اتلاف ویسکوز (۳-۳.۳), $t^{-2}$
	$\phi$	= $\pi + p\mathbf{v}\mathbf{v}$ = تانسور شار اندازه حرکت ترکیبی (۲-۷.۱), $M/Lt^2$
	$\phi$	= $\arctan y/x$ = زاویه در مختصات کروی (الف.۶-۲۴), -
	$\phi$	= پتانسیل الکتروستاتیکی (۵-۴.۲۴), ولت
	$\varphi$	= انرژی پتانسیل بین مولکولی (۱۰-۴.۱), $ML^2/t^2$
سای	$\Psi_1, \Psi_2$	= ضریب تنش قائم اول، دوم (۳, ۲-۲.۸), $M/L$
	$\Psi_v$	= تابع اتلاف ویسکوز (۳-۳.۳), $t^{-2}$
	$\psi$	= تابع جریان (جدول ۱-۲.۴), ابعاد به دستگاه مختصات بستگی دارد
أمگا	$\Omega_\mu, \Omega_k, \Omega_D$	= انتگرال‌های برخورد (۱۴-۴.۱), (۱۳-۳.۹), (۱۱-۳.۱۷), -
	$\omega_\alpha$	= کسر جرمی گونه $\alpha$ (۲-۱.۱۷), جدول (۱-۷.۱۷), -
	$\omega_{A1} - \omega_{A0}$	= اختلاف کسر جرمی مشخصه مورد استفاده در تحلیل ابعادی (۷-۵.۱۹), -
	<b>خطوط بالاسری</b>	
	$\bar{X}$	= بر مول
	$\hat{X}$	= بر واحد جرم
	$\bar{X}$	= مولار جزئی (۲-۱.۲۴, ۳-۳.۱۹)
	$\bar{X}$	= هموارشده زمانی (۴-۱.۵)
	$\check{X}$	= بدون بُعد (۳-۷.۳)
	<b>پرانترها</b>	
	$\langle X \rangle$	= مقدار متوسط در مقطع جریان
	$(X), [X], \{X\}$	= به‌کار رفته در عمل‌های تانسور-بردار، وقتی داخل پرانتر ضرب نقطه‌ای یا برداری انجام می‌شود (پیوست الف)
	$[[ ]]$	= گروه‌های بدون بُعد
	$[=]$	= دارای ابعاد ...
	<b>اندیس‌های بالایی</b>	
	$X^\dagger$	= ترانزاده یک تانسور
	$X^{(t)}$	= متلاطم (۸-۲.۵)
	$X^{(v)}$	= ویسکوز (۹-۲.۵)
	$X'$	= کمیت نوسانی (۱-۲.۵)
	<b>اندیس‌های پایینی</b>	
	$A, B$	= گونه‌های $A$ و $B$ در سیستم‌های دوتایی
	$\alpha, \beta, \dots$	= گونه‌ها در سیستم‌های چندجزئی
	$a$	= نیروی رانش میانگین حسابی یا ضریب انتقال مربوط به آن (۳-۱.۱۴)
	$b$	= مقدار حجمی یا «اختلاط-فنجانی» برای جریانی بسته (۲-۱.۱۴, ۳۳-۸.۱۰)
	$c$	= تعیین شده در نقطه بحرانی (۱-۳.۱)
	$\ln$	= نیروی رانش میانگین لگاریتمی یا ضریب انتقال مربوط به آن (۴-۱.۱۴)

نیروی رانش موضعی یا ضریب انتقال مربوط به آن (۵-۱.۱۴)	= loc
ضریب انتقال میانگین برای جسمی غوطه‌ور (۶-۱.۱۴)	= $m$
کاهش‌یافته، نسبت به مقدار بحرانی (بخش ۳.۱)	= $r$
مقدار کل کمیتی در سیستم ماکروسکوپی	= tot
تعیین‌شده روی سطح	= °
تعیین‌شده در مقاطع ۱ و ۲ (۱-۱.۷)	= ۱, ۲
گروه‌های بدون بُعد دارای نامی که با دو حرف مشخص می‌شوند	
عدد برینکمن (۹-۴.۱۰، جدول ۲-۵.۱۱)	= Br
عدد اکرت (جدول ۲-۵.۱۱)	= Ec
عدد فرود (۱۱-۷.۳)	= Fr
عدد گراسهوف (۱۸-۹.۱۰، جدول ۲-۵.۱۱)	= Gr
عدد گراسهوف نفوذی (۱۳-۵.۱۹، جدول ۱-۲.۲۲)	= $Gr_\omega, Gr_x$
عدد هاتا (۸-۵.۲۲)	= Ha
عدد لوئیس (۹-۱.۱۷)	= Le
عدد ماخ (۷۱-۴.۱۱)	= Ma
عدد نوسلت (۱۰-۳.۱۴ تا ۱۵)	= Nu
عدد پکلت (جدول ۲-۵.۱۱)	= $Pe^-$
عدد پرانتل (۹-۱.۹، جدول ۲-۵.۱۱)	= Pr
عدد ریلی (جدول ۲-۵.۱۱)	= Ra
عدد رینولدز (جدول ۱۰-۷.۳)	= Re
عدد اشمیت (۸-۱.۱۷)	= Sc
عدد شروود (۱۵-۱.۲۲)	= Sh
عدد وبر (۱۲-۷.۳)	= We
	<b>عمل‌های ریاضی</b>
مشتق مادی (۲-۵.۳)، $t^{-1}$	= $D/Dt$
مشتق هم‌چرخشی (۲-۵.۸)، $t^{-1}$	= $D/Dt$
عملگر دل (الف-۱.۴)، $L^{-1}$	= $\nabla$
لگاریتم $x$ در مبنای $e$	= $\ln x$
لگاریتم $x$ در مبنای $۱۰$	= $\log_{10} x$
تابع نمایی $x$	= $\exp x = e^x$
تابع خطای $x$ (۱۴-۱.۴، بخش ج. ۶)	= erf $x$
تابع (کامل) گاما (۲۴-۲.۱۲، بخش ج. ۴)	= $\Gamma(x)$
تابع غیرکامل گاما (۲۴-۲.۱۲، مسئله ۷.د.۱۲)	= $\Gamma(x, u)$
«از مرتبه»	= $O(\dots)$

## واژه‌نامه

reversible	برگشت پذیر		
efflux	برون رفت		
perturbation expansion	بسط اختلال	inclusion	آخال
packing parameter	پارامتر انباشت	blending	آمیختن
electric susceptibility	پذیرفتاری الکتریکی	entropy	آنتروپی
magnetic susceptibility	پذیرفتاری مغناطیسی	mass flow rate	آهنگ جریان جرمی
radiosity	پرتو تابشی	volume flow rate	آهنگ جریان حجمی
cooling fin	پره خنک کن	diffusion-thermo effect	اثر گرما-نفوذی
back-mixing	پس اختلاط	reverse osmosis	اَسْمَز معکوس
friction drag	پسای اصطکاکی	miscible	امتزاج پذیر
form drag	پسای شکلی	mass transfer	انتقال جرم
ejector pump	پمپ فواره‌ای		انتقال جرم درون غشایی
convolution	پیچش	intramembrane mass transport	
coil	پیچه	intrapore transport	انتقال درون حفره‌ای
chemical bond	پیوند شیمیایی	heat transfer	انتقال گرما
radiation	تابش	dissolution	انحلال
monochromatic radiation	تابش تک فام	solubility	انحلال پذیر
cavity radiation	تابش کواکی	momentum	اندازه حرکت
stream function	تابع جریان	angular momentum	اندازه حرکت زاویه‌ای
error function	تابع خطا	shell momentum	اندازه حرکت لایه‌ای
	تابع خطای مکمل	energy	انرژی
complementary error function		free energy of activation	انرژی آزاد فعال سازی
residence time function	تابع زمان ماندگاری	intermolecular energy	انرژی بین مولکولی
decay function	تابع واپاشی	potential energy	انرژی پتانسیل
inverse function	تابع وارون	kinetic energy	انرژی جنبشی
eigenfunction	تابع ویژه	intramolecular energy	انرژی درون مولکولی
transposed tensor	تانسور ترانهاده	pressure tap	انشعاب فشارسنج
molecular stress tensor	تانسور تنش مولکولی	beam	باریکه
viscous stress tensor	تانسور تنش ویسکوز	reflux	بازروانی
unit tensor	تانسور یکه	stripping section	بخش عریان ساز
curl	تاو	rectifying section	بخش یکسوساز
evaporation	تبخیر		بردار شار انرژی همرفتی
mobility	تحرك	convective energy flux vector	
compartmental analysis	تحليل بخشی	position vector	بردار مکان
permeability	تراوایی	unit vector	بردار یکه

drier	خشک‌کن	ترمودینامیک عدم تعادل
equilibrium line	خط تعادل	nonequilibrium thermodynamics
operating line	خط کارکرد	attenuation
equipotential lines	خطوط هم‌پتانسیل	distillation
self-diffusion	خودنفوذی	free turbulence
macromixing	درشت‌اختلاط	wall turbulence
influx	درون‌رفت	pumping station
	دستگاه مختصات هم‌چرخ	shear stress
corotating coordinate frame		normal stress
tube bank	دسته‌لوله	displacement
temperature	دما	phase shift
bulk temperature	دمای کپه‌ای	segregation
dimerization	دیم‌شدن	absorption
fluid dynamics	دینامیک سیالات	adsorption
melting	ذوب	absorber
fixed-bed reactor	راکتور بسترثابت	mass
catalytic reactor	راکتور کاتالیزی	laminar flow
rheology	رئولوژی	potential flow
thermal conductivity	رسانندگی گرمایی	compressible flow
dehumidification	رطوبت‌زدایی	isentropic flow
orifice	روزنه	creeping flow
micromixing	ریزاختلاط	orifice meter
residence time	زمان اقامت	plug flow
relaxation time	زمان رهایی	turbulent flow
mean residence time	زمان ماندگاری میانگین	جريان متلاطم با تحريك پايا
subsonic	زیرصوتی	steadily driven turbulent flow
sublayer	زیرلایه	gray body
molecular structure	ساختار مولکولی	black body
radiation shield	سپر تابش	condensation
energy barrier	سد انرژی	film condensation
velocity	سرعت	dropwise condensation
friction velocity	سرعت اصطکاکی	density
terminal velocity	سرعت حدی	number density
angular velocity	سرعت زاویه‌ای	control volume
complex velocity	سرعت مختلط	extensive property
		تضعيف
		تقطير
		تلاطم آزاد
		تلاطم جداري
		تلمبه‌خانه
		تنش برشي
		تنش قائم
		جابه‌جايي
		جابه‌جايي فاز
		جدانشيني
		جذب
		جذب سطحي
		جذب‌کن
		جرم
		جريان آرام
		جريان پتانسيل
		جريان تراکم‌پذير
		جريان تک‌انتروپيک
		جريان خزشي
		جريان سنج روزنه‌اي
		جريان قالبی
		جريان متلاطم
		جسم خاکستري
		جسم سیاه
		چگالش
		چگالش فيلمی
		چگالش قطره‌وار
		چگالی
		چگالی عددی
		حجم معيار
		خاصیت مقداری

diffusivity	ضریب نفوذ	molecular velocity	سرعت مولکولی
eddy diffusivity	ضریب نفوذ گردابی	time-smoothed velocity	سرعت هموارشده زمانی
spectrophotometry	طیف نورسنجی	transpiration cooling	سرمایش تعریفی
heat capacity	ظرفیت گرمایی	bounding surfaces	سطوح کرانی
microporous membrane	غشای ریزمتخلخل	packed bed	سیال پرشده
permselective membrane	غشای نفوذگزین	rheometer	سیال سنج
concentration	غلظت	rheometry	سیال سنجی
	غلظت هموارشده زمانی	rheology	سیال شناسی
time-smoothed concentration		inviscid fluid	سیال غیرلزج
inviscid	غیرلزج	viscoelastic fluid	سیال ویسکوکشسان
homogeneous phase	فاز همگن	isotropic fluid	سیال همسانگرد
ultraviolet	فرابنفش	شار اندازه حرکت تلاطمی	
ultrafiltration	فراصاف سازی	turbulent momentum flux	
overdamped	فرامیرا	شار اندازه حرکت مرکب	
nuclear disintegration	فروپاشی هسته‌ای	combined momentum flux	
infrared	فروسرخ	شار اندازه حرکت همرفتی	
leaching	فروشویی	convective momentum flux	
underdamped	فرومیرا	work flux	شار کار
pressure	فشار	capillary radius	شعاع مویینی
U-tube manometer	فشارسنج دوشاخه	fission	شکافت
interface	فصل مشترک	fission fragment	شکافت پاره
activity	فعالیت	refraction	شکست
supersonic	فوق صوتی	indicator	شناساگر
falling film	فیلم ریزان	nozzle	شیپوره
	قانون پایستگی اندازه حرکت	friction factor	ضریب اصطکاک
law of conservation of momentum		overall heat transfer coefficient	ضریب انتقال گرمای کلی
	قانون پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای	axial dispersion coefficient	ضریب پراکنش محوری
law of conservation of angular momentum		drag coefficient	ضریب پسا
	قانون پایستگی انرژی	discharge coefficient	ضریب تخلیه
law of conservation of energy		absorptivity	ضریب جذب
	قانون پایستگی جرم	emissivity	ضریب گسیل
law of conservation of mass		slip coefficient	ضریب لغزش
collision diameter	قطر برخورد		
droplet	قطرک		

corotational derivative	مشتق هم‌چرخشی	conservation laws	قوانین پایستگی
equation of continuity	معادله پیوستگی	catalyst	کاتالیزگر
equation of motion	معادله حرکت	cavity	کاواک
	معادله دیفرانسیل تصادفی	probe	کاوه
stochastic differential equation		elasticity	کشسانی
eigenvalue	مقدار ویژه	extensibility	کشش‌پذیری
collision cross section	مقطع برخورد	interfacial tension	کشش فصل‌مشرکی
shock wave	موج شوکی	reboiler	کمک‌گرمن
homonuclear molecule	مولکول جورهمسته	coil	کویل
unmixedness	نآمیختگی	heating coil	کویل گرمایی
transition region	ناحیه گذار	vortex	گردابه
heterogeneous	ناهمگن	free vortex	گردابه آزاد
amplitude ratio	نسبت دامنه	forced vortex	گردابه واداشته
mixing-length theory	نظریه طول اختلاط	vorticity	گردشاری
boundary-layer theory	نظریه لایه مرزی	emission	گسیل
diffusion	نفوذ	torque	گشتاور
ordinary diffusion	نفوذ عادی	buffer layer	لایه میانگیر
concentration diffusion	نفوذ غلظتی		ماده فعال در سطح
pressure diffusion	نفوذ فشاری	surfae-active agent, surfactant	
thermal diffusion	نفوذ گرمایی	heterogeneous material	ماده ناهمگن
forced diffusion	نفوذ واداشته	homogeneous material	ماده همگن
stagnation point	نقطه رکود		مبادله‌کن گرمای جریان متقابل
dew point	نقطه شبنم	counter-flow heat exchanger	
psychrometric chart	نمودار رطوبت‌سنجی		مبادله‌کن گرمای جریان موازی
intermolecular force	نیروی بین‌مولکولی	parallel-flow heat exchanger	
kinetic force	نیروی جنبشی		مبادله‌کن گرمای بستریگی
buoyant force	نیروی شناوری	pebble-bed heat exchanger	
reverse reaction	واکنش برگشت	converter	مبدل
autocatalytic reaction	واکنش خودکاتالیزی	refrigerant	مبرد
forward reaction	واکنش رفت	time-averaging	متوسط‌گیری زمانی
reactant	واکنشگر	raffinate	محصول تصفیه
exothermic reaction	واکنش گرمازا	center of mass	مرکز جرم
endothermic reaction	واکنش گرماگیر	closure problem	مسئله بستار
vulcanization	ولکانش	mean free path	مسافت آزاد میانگین
viscosity	ویسکوزیته	substantial derivative	مشتق مادی

viscometry	ویسکوزیته‌سنجی
dilatational viscosity	ویسکوزیتهٔ اتساعی
dynamic viscosity	ویسکوزیتهٔ دینامیکی
viscoelasticity	ویسکوکشسانی
free convection	همرفت آزاد
natural convection	همرفت طبیعی
mixed convection	همرفت مختلط
forced convection	همرفت واداشته
agitator	هم‌زن
convergent	همگرا
homogenous	همگن
time-smoothing	هموارسازی زمانی
counter ion	یون مخالف



## نمایه

- انتقال انرژی  
 ~ از طریق تابش، ۵۶۹-۵۹۱  
 ~ در جریان داخل لوله  
 ~ تحلیل فوریه، ۴۸۳-۴۸۸  
 ~ مکانیسم‌های، ۳۰۷-۳۳۱  
 انتقال انرژی تابشی در محیط‌های جاذب، ۵۹۰-۵۹۱  
 انتقال پیوستاری، ۹۲۵-۹۲۶  
 انتقال جرم  
 ~ از طریق همرفت، ۶۲۰-۶۲۳  
 ~ با تغییر فصل مشترک غیریکنواخت، ۷۴۴-۷۴۵  
 ~ به قطره‌ها و حباب‌ها، ۷۹۷-۷۹۸  
 ~ تقویت توسط واکنش مرتبه اول در جریان متلاطم،  
 ۷۶۶-۷۷۰  
 ~ جریان در اطراف کره، ۷۸۶-۷۸۷  
 ~ در جریان خزشی در اطراف حباب گاز، ۷۳۸-۷۳۹  
 ~ در جریان خزشی در بسترهای پرشده، ۷۹۶-۷۹۷  
 ~ در غشاهای تراوای گزینشی، ۹۱۵-۹۱۲  
 ~ در فصل مشترک  
 ~ تأثیر تغییر مساحت، ۷۲۰-۷۲۳  
 ~ در فیلم ریزان روی سطوح مسطح، ۷۸۴-۷۸۶  
 ~ در لایه‌های مرزی پایا و جدانشده، ۷۸۷-۷۸۸  
 ~ در همسایگی دیسک چرخان، ۷۸۸  
 ~ لایه مرزی .  
 ~ با حرکت فصل مشترکی پیچیده، ۷۳۹-۷۴۵  
 ~ مکانیسم‌های، ۵۹۷-۶۲۵، ۸۸۷-۹۲۷  
 ~ مولکولی، ۵۹۸-۶۰۵  
 ~ و واکنش‌های شیمیایی، ۸۰۵-۸۰۶  
 انتقال جرم چندجزئی  
 ~ تقریب‌های ماتریسی، ۸۳۰-۸۳۶  
 انتقال جرم خالص  
 ~ ضرایب در آهنگ‌های بالا، ۸۱۶-۸۳۰  
 انتقال حالت پایا  
 ~ در لایه‌های مرزی دوتایی، ۷۲۳-۷۳۴  
 انتقال گرما  
 ~ در همرفت واداشته آرام روی صفحه تخت، ۴۴۹-۴۵۳
- آنتالپی مولی جزئی، ۶۸۶  
 آنتروپی  
 ~ معادله تغییر، ۸۸۸-۸۹۰  
 آهنگ جریان  
 ~ به‌ازای افت فشار مفروض، ۲۱۲  
 آهنگ کرنش  
 ~ تانسور، ۲۸۱  
 اتلاف اصطکاکی، ۲۳۹  
 ~ در گشادگی ناگهانی، ۲۴۵-۲۴۷  
 ~ ضریب، ۲۴۱-۲۴۲  
 اتلاف گرما  
 ~ همرفت آزاد در لوله افقی، ۵۱۶-۵۱۷  
 اتلاف گرمای تابشی  
 ~ از لوله افقی، ۵۸۸  
 اتلاف گرمای همرفتی  
 ~ از لوله افقی، ۵۸۸  
 اتلاف ویسکوز، ۲۳۹  
 ~ تخمین، ۲۴۱-۲۴۳  
 اثر دوفو، ۸۸۷  
 اثر سوره، ۸۸۷  
 اثر سیفون بی‌لوله، ۲۷۶  
 اختلاط تلاطمی  
 ~ با واکنش مرتبه دوم، ۷۷۰-۷۷۵  
 اختلاط دو جریان گاز ایده‌آل، ۵۳۶  
 اُسْمَز معکوس، ۹۱۶-۹۱۹  
 اعداد گراسهوف  
 ~ جمع‌پذیری، ۸۱۰  
 افت فشار  
 ~ برای آهنگ جریان مفروض، ۲۱۲  
 ~ جریان خزشی در لوله پرشده، ۱۱۳  
 اکسایش کاتالیزی کربن مونوکسید، ۶۹۳-۶۹۴  
 الکترواُسْمَز، ۹۰۸-۹۱۰  
 انبساط آزاد سیال تراکم‌پذیر، ۵۵۰-۵۵۳  
 انبساط مخلوط گاز واکنش‌پذیر، ۸۶۸-۸۷۱

- انرژی داخلی  
 ~ موازنه ماکروسکوپی، ۵۳۳  
 انرژی مکانیکی  
 ~ موازنه ماکروسکوپی، ۲۳۸-۲۴۱، ۲۵۹-۲۶۲، ۵۳۳-۵۳۲، ۸۵۶  
 باریکه تابش تک فام  
 ~ جذب، ۵۹۱  
 بردار  
 ~ اندازه، ۹۳۸-۹۳۹  
 ~ تعریف، ۹۳۸-۹۳۹  
 ~ جمع و تفریق، ۹۳۹  
 ~ شار انرژی همرفتی، ۳۲۸-۳۲۹  
 ~ ضرب در اسکالر، ۹۳۹  
 ~ مکان، ۹۴۵  
 بردارها  
 ~ ضرب چندگانه، ۹۴۰  
 ~ ی یک، ۹۴۲-۹۴۳  
 بسط بردار  
 ~ برحسب مؤلفه‌های آن، ۹۴۳  
 بسط تانسور  
 ~ برحسب مؤلفه‌های آن، ۹۴۸-۹۴۹  
 بسط تیلر، ۹۹۳  
 ~ در زیرلایه ویسکوز، ۱۸۸-۱۸۶  
 پایستگی  
 ~ قوانین، ۳-۷  
 پتانسیل پیوند، ۹۰۷  
 پتانسیل لئارد-جونز، ۲۵  
 ~ پارامترهای، ۱۰۰۴-۱۰۰۶  
 پدیده‌های انتقال  
 ~ سطوح بررسی، ۲  
 ~ سطح ماکروسکوپی، ۲  
 ~ سطح مولکولی، ۲  
 ~ سطح میکروسکوپی، ۲  
 پراکنش تیلر  
 ~ در جریان آرام در لوله، ۷۵۰-۷۴۵
- ~ و جرم  
 ~ اثر نیروهای فصل مشترکی، ۸۱۲-۸۱۵  
 ی تابشی  
 ~ بین دیسک‌ها، ۵۸۴-۵۸۵  
 ~ ی همرفتی آزاد، ۸۱۲-۸۱۰  
 ~ ی همرفتی واداشته، ۳۹۵  
 ~ ی همرفتی واداشته  
 ~ از صفحه عمودی، ۴۰۳-۴۰۰  
 انتقال مرکب گرما و جرم  
 ~ از طریق همرفت آزاد، ۸۱۲-۸۰۹  
 انتقال مولکول آزاد، ۹۲۳-۹۲۲  
 انتقال مولکولی انرژی، ۳۱۴-۳۰۸  
 انتقال مولی  
 ~ از طریق همرفت، ۶۲۳-۶۲۰  
 انتقال میان‌فازی  
 ~ در سیستم‌های هم‌دما، ۲۲۲-۲۰۵  
 ~ در مخلوط‌های غیرهم‌دما، ۸۳۶-۷۷۹  
 ~ سیستم‌های غیرهم‌دما، ۵۲۱-۴۹۱  
 انتقال همرفتی  
 ~ اندازه حرکت، ۳۸-۳۵  
 ~ انرژی، ۳۲۸-۳۲۹  
 انتقال هم‌زمان گرما و جرم، ۶۹۱-۶۸۸  
 انتگرال فون کارمان  
 ~ روش، ۴۵۲-۴۴۹  
 انتگرال‌های برخورد، ۱۰۰۸-۱۰۰۷  
 اندازه حرکت  
 ~ انتقال همرفتی، ۳۸-۳۵  
 ~ شار، ۱۱  
 ~ موازنه‌های ماکروسکوپی، ۲۳۶-۲۳۵، ۸۵۶-۸۵۵  
 ~ موازنه لایه‌ای، ۵۰-۴۴  
 اندازه حرکت زاویه‌ای  
 ~ موازنه‌های ماکروسکوپی، ۲۳۸-۲۳۶، ۸۵۶-۸۵۵  
 انرژی  
 ~ موازنه ماکروسکوپی، ۵۳۲-۵۳۰، ۸۵۶  
 انرژی پتانسیل بین‌مولکولی، ۲۵

- ۲۴۷-۲۴۸ پمپ فواره‌ای مایع-مایع، تابش
- ۴۰۸-۴۱۱ ~ معادله‌های تغییر برای سیستم‌های غیرهم‌دما،  
تحلیل فوریه
- ۵۷۰-۵۷۱ ~ طیف، الکترومغناطیسی
- ۴۸۳-۴۸۸ ~ انتقال انرژی در جریان داخل لوله، تراوایی هیدرولیکی، ۸۲۷  
ترموکوبل
- ۵۶۹-۵۹۱ ~ انتقال انرژی از طریق، بین اجسام غیرسیاه، ۵۸۵-۵۸۷
- ۳۵۶-۳۵۷ ~ خطای اندازه‌گیری، تغییر آنتروپی، ۵۷۹-۵۸۵  
و همرفت مرکب، ۵۸۹
- ۸۸۸-۸۹۰ ~ معادله، تابع اتلاف  $\Phi_v$  برای سیالات نیوتونی
- ۷۹۱ تناظر چیلتون-کولبورن، ۹۸۶ ~ در مختصات استوانه‌ای، ۹۸۶  
تشش برشی، ۱۶ ~ در مختصات دکارتی، ۹۸۶
- تشش رینولدز در مجاورت جدار ~ پی‌ریزی رابطه، ۱۹۰  
تشش قائم، ۱۶ ~ در مختصات کروی، ۹۸۶
- تشش ویسکوز ~ تانسور، ۱۶ تابع خطا، ۱۳۴، ۹۹۵  
~ حل مسئله، ۱۴۰-۱۳۹ تابع گاما، ۹۹۳-۹۹۲
- تشش‌های قائم در سطوح جامد، ۸۴ تابع مقدار دیراک، ۸۴۸
- توابع ماده، ۲۷۷-۲۸۰ تابع واپاشی بدون بُعد، ۷۷۱
- توابع هذلولوی، ۹۹۷-۹۹۵ توزیع دما تانسور آهنگ کرنش، ۲۸۱
- ~ با بیش از یک متغیر مستقل، ۴۳۳-۴۵۶ تانسور رسانندگی گرمایی، ۳۱۰
- ~ جریان متلاطم، ۴۷۳-۴۸۸ تانسور شار اندازه حرکت تلاطمی، ۱۸۴-۱۸۳
- ~ جریان متلاطم داخل لوله، ۴۷۸-۴۸۱ تانسور گردشاری، ۲۹۲
- ~ جریان متلاطم در جت، ۴۸۱-۴۸۳ ناو میدان برداری، ۹۵۴-۹۵۳
- ~ در اطراف استوانه طویل، ۴۱۳-۴۱۱ تبخیر
- ~ در جامدات، ۳۳۷-۳۶۶ ~ از قطره در حال سقوط، ۷۹۳-۷۹۲
- ~ در دیوار، ۴۴۷-۴۴۶ تبخیر حالت ناپایای مایع، ۷۱۶-۷۱۳
- ~ موج شوکی ساکن، ۴۰۸-۴۰۴ تبخیر سریع مایع از سطح مسطح، ۸۲۳-۸۲۲
- ~ ی هموارشده زمانی در نزدیکی جدار، ۴۷۶-۴۷۵ تبخیر قطرک
- توزیع سرعت ~ ضرایب تصحیح، ۸۲۴-۸۲۳
- ~ با بیش از یک متغیر مستقل، ۱۶۱-۱۳۱ تجزیه رینولدز، ۱۸۲
- ~ توانی تحلیل ابعادی
- ~ در زیرلایه لخت، ۱۸۶-۱۸۵ ~ معادله‌های تغییر برای مخلوط‌های دوتایی، ۷۰۳-۶۹۶
- ~ خطی تحلیل بعدی
- ~ در نزدیکی سطح انتقال جرم، ۷۳۸-۷۳۷

- ~ موازنه‌های ماکروسکوپی، ۲۳۳-۲۳۴، ۸۴۲-۸۵۵  
 جریان
- ~ در اطراف اجسام غوطه‌ور، ۲۰۷-۲۰۸  
 ~ در اطراف استوانه، ۵۱۰-۵۱۱  
 ~ در اطراف کره، ۲۱۷، ۵۱۰  
 ~ ضریب اصطکاک، ۲۱۴-۲۱۵  
 ~ در خط لوله  
 ~ توان لازم، ۲۴۳-۲۴۴  
 ~ در لوله‌ها، ۲۱۵  
 ~ ضریب اصطکاک، ۲۰۸-۲۱۱  
 ~ در لولهٔ مدور، ۵۱-۵۶  
 ~ در مجراها  
 ~ تعریف ضریب اصطکاک، ۲۰۶-۲۰۸  
 ~ در نزدیکی جدار، ۱۳۲-۱۳۴  
 ~ در نزدیکی سطوح جامد  
 ~ نظریهٔ لایهٔ مرزی، ۱۵۳-۱۵۶  
 ~ در نزدیکی کرهٔ چرخان، ۱۰۳-۱۰۵  
 ~ در نزدیکی کنج، ۱۵۰-۱۵۳، ۱۶۰-۱۶۱  
 ~ دو سیال امتزاج‌ناپذیر مجاور، ۶۰-۶۲  
 ~ روی صفحهٔ تخت، ۵۰۸-۵۱۰  
 جریان آرام، ۳۳۷-۳۶۶  
 ~ پراکنش تیلر، ۷۴۵-۷۵۰  
 ~ توزیع غلظت، ۶۳۱-۶۵۹  
 ~ در لوله با شار گرمای ثابت جدار، ۴۴۳-۴۴۵  
 ~ روی صفحهٔ تخت (جواب تقریبی)، ۱۵۶-۱۵۷  
 ~ روی صفحهٔ تخت (جواب دقیق)، ۱۵۸-۱۶۰  
 جریان آرام حالت‌پایا  
 ~ در لوله‌های غیرمدور، ۲۷۳-۲۷۵  
 ~ در لوله‌های مدور، ۲۷۳-۲۷۵  
 جریان آرام سیال تراکم‌ناپذیر  
 ~ در لولهٔ مدور، ۲۸۳-۲۸۴  
 جریان آرام ناپایا  
 ~ بین دو صفحهٔ موازی، ۱۳۴-۱۳۷  
 ~ در نزدیکی صفحهٔ درحال نوسان، ۱۳۷  
 جریان افزایش طولی حالت‌پایا، ۲۷۹-۲۸۰
- ~ در جریان آرام، ۴۳-۶۶  
 ~ در جریان متلاطم، ۱۷۷-۱۹۸  
 ~ عام بارن‌بلات-چورین، ۱۸۶  
 ~ لگاریتمی  
 ~ در زیرلایهٔ لخت، ۱۸۵-۱۸۶  
 ~ لگاریتمی عام فون‌کارمان-پرانتل، ۱۸۶  
 ~ هموارشدهٔ زمانی  
 ~ در جت با جدار مدور، ۱۹۴-۱۹۷  
 ~ در نزدیکی جدار، ۱۸۴-۱۸۵  
 توزیع غلظت  
 ~ با بیش‌از یک متغیر مستقل، ۷۱۱-۷۵۰  
 ~ جریان متلاطم، ۷۶۳-۷۷۵  
 ~ در اطراف استوانهٔ طویل، ۶۹۸-۶۹۹  
 ~ در جامدات  
 ~ در جریان آرام، ۶۳۱-۶۵۹  
 ~ در رآکتور لوله‌ای، ۶۹۱-۶۹۳  
 توزیع فشار  
 ~ موج شوکی ساکن، ۴۰۴-۴۰۸  
 ثابت خورشیدی  
 ~ برآورد، ۵۸۳  
 ثابت‌های ریاضی، ۱۰۰۹  
 ثابت‌های فیزیکی، ۱۰۱۰  
 جبر برداری و تانسوری  
 ~ در مختصات خمیده‌خطی، ۹۵۹-۹۶۳  
 جت برخوردی، ۲۵۱-۲۵۲  
 جداساز دوتایی، ۸۴۵-۸۴۷  
 جداسازی پروتئین‌ها  
 ~ به روش گریزازمرکز، ۹۰۴-۹۰۱  
 جذب باریکهٔ تابش تک‌فام، ۵۹۱  
 جذب در سطوح جامد، ۵۷۲-۵۷۵  
 جذب گاز  
 ~ از حباب‌های بالارونده، ۶۵۰-۶۵۱  
 ~ با واکنش سریع، ۷۴۵، ۷۱۶-۷۱۸  
 ~ با واکنش شیمیایی، ۶۴۵-۶۴۷  
 جرم

- جریان متلاطم  
 ~ با واکنش مرتبه دوم، ۷۷۵-۷۷۰  
 ~ تقویت انتقال جرم توسط واکنش مرتبه اول، ۷۷۰-۷۶۶  
 ~ توزیع دما، ۴۸۸-۴۷۳  
 ~ توزیع سرعت، ۱۹۸-۱۷۷  
 ~ توزیع غلظت، ۷۷۵-۷۶۳  
 ~ داخل لوله  
 ~ توزیع دما در، ۴۸۱-۴۷۸  
 ~ در جت، ۱۹۴  
 ~ توزیع دما در، ۴۸۳-۴۸۱  
 ~ در مجراها، ۱۹۱  
 جریان مماسی در حلقه، ۳۹۷-۳۹۵  
 جریان ناپایای خروجی از مخزن استوانه‌ای، ۲۵۶-۲۵۴  
 جریان وابسته به زمان، ۱۳۲-۱۳۱  
 جریان ورودی به کانال مستطیلی، ۱۵۰-۱۴۹  
 جریان ویسکوکشسان ناپایا  
 ~ در نزدیکی صفحه نوسان‌گر، ۲۹۰-۲۸۹  
 جریان‌های آرام و متلاطم  
 ~ مقایسه، ۱۸۱-۱۷۹  
 ~ مقایسه در جت‌های مدور و صفحه‌ای، ۱۸۱  
 ~ مقایسه در صفحه تخت، ۱۸۱  
 ~ مقایسه در لوله‌های غیرمدور، ۱۸۰  
 ~ مقایسه در لوله‌های مدور، ۱۸۰-۱۷۹  
 جریان هم‌دمای مایع  
 ~ در عبور از روزنه، ۲۵۴-۲۵۲  
 جمع تانسورها، ۹۴۹  
 چگالش بخار  
 ~ روی سطوح عمودی، ۵۲۱-۵۱۹  
 حرکت مولکولی  
 ~ کار مربوط به، ۳۳۱-۳۲۹  
 حرکت نوسانی کوچک دامنه، ۲۷۹-۲۷۸، ۲۸۹-۲۸۸  
 حساسیت به مدل، ۸۰۷  
 خطای اندازه‌گیری  
 ~ ترموکوپل، ۳۵۷-۳۵۶  
 خواص انتقال
- جریان برشی ساده پایا، ۲۷۸-۲۷۷  
 جریان پایا  
 ~ در فیلم غیرهم‌دما، ۳۹۸-۳۹۷  
 ~ در لوله مدور طویل، ۹۶-۹۵  
 ~ در مخزن دارای هم‌زن، ۱۱۲-۱۱۰  
 جریان پتانسیل، ۱۴۴  
 ~ پایای گرما  
 ~ در جامدات، ۴۴۶-۴۴۵  
 ~ در اطراف استوانه، ۱۴۹-۱۴۷  
 جریان تراکم‌پذیر تک‌بعدی، ۴۰۸-۴۰۴  
 جریان تراکم‌ناپذیر  
 ~ آرام  
 ~ رسانش پایا، ۴۴۳-۴۴۱  
 ~ در لوله مدور افقی، ۵۷  
 ~ غیرهم‌دما  
 ~ معادله‌های هموارشده زمانی تغییر، ۴۷۵-۴۷۴  
 جریان حلقوی مماسی، ۲۸۶-۲۸۵  
 جریان خزشی  
 ~ حول کره، ۶۴-۶۲  
 ~ در لوله پرشده  
 ~ افت فشار، ۱۱۳  
 ~ دور کره، ۱۴۴-۱۴۲  
 جریان در حلقه، ۶۰-۵۷  
 جریان سه‌بعدی پایا  
 ~ همرفت واداشته در، ۴۵۶-۴۵۳  
 جریان سیال  
 ~ در شکاف باریک، ۲۸۵-۲۸۴  
 جریان سیالات غیریوسکوز، ۱۴۷-۱۴۴  
 جریان سیال تراکم‌پذیر  
 ~ در فشارسنج ارتفاعی، ۵۵۰-۵۴۹  
 جریان عرضی  
 ~ حول استوانه مدور، ۱۱۰-۱۰۷  
 جریان غیرهم‌دما  
 ~ نظریه لایه مرزی، ۴۴۹-۴۴۷  
 جریان فیلم ریزان، ۵۰-۴۵

- ~ برحسب نیروهای بین مولکولی، ۱۰۰۰-۱۰۰۱  
 درشت اختلاط، ۷۷۲  
 دستگاه فراگریزمرکز، ۸۹۷-۸۹۸  
 دوتایی‌های یکه، ۹۴۷-۹۴۸  
 دیورژانس میدان برداری، ۹۵۳  
 دیورژانس میدان تانسوری، ۹۵۴  
 رسانش پایا  
 ~ در جریان تراکم‌ناپذیر آرام، ۴۴۱-۴۴۳  
 رسانش گرما  
 ~ از جدارهای استوانه‌ای مرکب، ۳۵۳-۳۵۴  
 ~ از جدارهای مرکب، ۳۵۱-۳۵۳  
 با منبع گرمای الکتریکی، ۳۳۹-۳۴۱  
 با منبع گرمای شیمیایی، ۳۴۷-۳۵۰  
 با منبع گرمای ویسکوز، ۳۴۵-۳۴۷  
 با منبع گرمای هسته‌ای، ۳۴۳-۳۴۵  
 ~ در پرهٔ خنک‌کن، ۳۵۴  
 رسانش گرمای ناپایا  
 ~ نزدیک جدار با شار گرمای سینوسی، ۴۳۸-۴۳۹  
 رسانش ناپایا  
 ~ در جامدات، ۴۳۳-۴۳۴  
 رسانندگی گرمایی، ۳۰۷-۳۳۱  
 ~ اثر فشار بر، ۳۱۶  
 ~ اندازه‌گیری، ۳۱۲-۳۱۴  
 ~ تیغه، ۳۰۸  
 ~ تانسور، ۳۱۰  
 ~ جامدات، ۳۲۴  
 ~ گاز تک‌اتمی در چگالی پایین  
 ~ محاسبه، ۳۲۱  
 ~ گاز چنداتمی، ۶۹۴-۶۹۶  
 ~ گاز چنداتمی در چگالی پایین  
 ~ تخمین، ۳۲۱  
 ~ گازها  
 ~ در چگالی پایین، ۳۱۶-۳۲۰  
 ~ گردابی، ۴۷۷  
 ~ مایعات
- ~ نظریه، ۳۲۲-۳۲۴  
 ~ پیش‌بینی، ۳۲۴  
 ~ مخلوط گازی در چگالی پایین  
 ~ پیش‌بینی، ۳۲۲  
 ~ مؤثر  
 ~ جامدات مرکب، ۳۲۵-۳۲۷  
 ~ وابستگی به دما و فشار، ۳۱۴-۳۱۶  
 رطوبت‌زدایی  
 ~ تشکیل مه، ۶۹۹-۷۰۱  
 رطوبت‌سنج خشک، ۷۹۵  
 رطوبت‌سنج خیس، ۷۹۳-۷۹۵  
 روش پاسخ سینوسی، ۱۳۲  
 روش ترکیب متغیرها، ۱۳۲  
 روش جداسازی متغیرها، ۱۳۲  
 ریزاختلاط، ۷۷۲  
 زمان تأخیر، ۲۸۷  
 زمان رهایی، ۲۸۶  
 زنجیره‌های آدیاباتیک، ۸۶۶-۸۶۷  
 زنجیره‌های ایده‌آل، ۸۶۷-۸۶۸  
 زنجیره‌های خطی، ۸۶۴-۸۶۸  
 زیرلایهٔ لخت  
 ~ توزیع سرعت توانی، ۱۸۵-۱۸۶  
 ~ توزیع سرعت لگاریتمی، ۱۸۵-۱۸۶  
 زیرلایهٔ ویسکوز  
 ~ بسط سری تیلر، ۱۸۶-۱۸۸  
 سپرهای تابش، ۵۸۷-۵۸۸  
 ستون کلاوسوس-دیکل، ۸۹۵-۸۹۷  
 ستون‌های پرشده  
 ~ ضریب اصطکاک، ۲۱۸-۲۲۲  
 سد نفوذ، ۶۲۵  
 سرد کردن گاز ایده‌آل، ۵۳۴-۵۳۶  
 سرعت اصطکاک، ۱۸۶  
 سرعت ظاهری، ۲۱۹  
 سرعت فیلم  
 ~ محاسبه، ۵۰

- سرعت متوسط  
 ~ تخمین در لوله دایره‌ای، ۱۹۱-۱۹۳  
 سرعت متوسط جرمی، ۵۹۹، ۶۲۰-۶۲۲  
 سرعت متوسط مولی، ۶۲۰-۶۲۲  
 ~ موضعی، ۶۲۱  
 سرمایه‌ش تعریفی، ۳۹۸-۴۰۰  
 سرمایه‌ش کره  
 ~ در تماس با سیال هم‌زده، ۴۳۹-۴۴۱  
 سلول‌های بُنار  
 ~ تشکیل، ۴۱۳-۴۱۵  
 سیالات غیرنیوتونی، ۲۷۱  
 سیال تراکم‌پذیر  
 ~ انبساط آزاد، ۵۵۳-۵۵۵  
 ~ توان لازم برای تلمبه‌زنی، ۵۴۱-۵۴۲  
 ~ جریان در فشارسنج ارتفاعی، ۵۴۹-۵۵۰  
 سیال‌سنجی، ۲۷۷-۲۸۰  
 سیال غیرنیوتونی، ۱۱  
 سیال‌های امتزاج‌پذیر  
 ~ آمیختن، ۷۰۱-۷۰۳  
 سیستم گازی سه‌جزئی  
 ~ نفوذ، ۶۵۷-۶۵۹  
 سیستم‌های جریان هم‌دما  
 ~ موازنه‌های ماکروسکوپی، ۲۳۱-۲۶۲  
 سیستم‌های چندجزئی  
 ~ معادله‌های تغییر، ۶۷۷-۷۰۳  
 ~ موازنه‌های ماکروسکوپی، ۸۴۱-۸۷۹  
 سیستم‌های غیرهم‌دما  
 ~ انتقال میان‌فازی، ۴۹۱-۵۲۱  
 ~ تحلیل بُعدی معادله‌های تغییر، ۴۰۸-۴۱۱  
 ~ معادله‌های تغییر، ۳۸۵-۴۱۶  
 ~ موازنه‌های ماکروسکوپی، ۵۲۹-۵۵۳  
 سیستم‌های هم‌دما، ۸۱-۱۱۳  
 ~ انتقال میان‌فازی، ۲۲۲-۲۰۵  
 شار اندازه حرکت، ۱۱  
 ~ تلاطمی، ۷۶۴
- ~ عبارت‌های تجربی، ۱۸۸-۱۹۰  
 ~ محاسبه، ۱۴  
 شار جرمی تلاطمی  
 ~ عبارت‌های شبه‌تجربی، ۷۶۵-۷۶۶  
 شار جرمی مرکب، ۶۲۳  
 شار جرمی مولکولی، ۶۲۲  
 شار جرمی همرفتی، ۶۲۲-۶۲۳  
 شار گرما و جرم  
 ~ عبارت‌های، ۸۹۱-۸۹۸  
 شارگرمای تلاطمی، ۷۶۴  
 ~ عبارت‌های تجربی، ۴۷۶-۴۷۷  
 شارگرمای جداری در جریان متلاطم داخل لوله  
 ~ رابطه تقریبی، ۴۷۷-۴۷۸  
 شار مولی تلاطمی، ۷۶۴  
 شار مولی مرکب، ۶۲۳  
 شار مولی همرفتی، ۶۲۲-۶۲۳  
 شارها  
 ~ برحسب خواص انتقال، ۱۰۰۰  
 شارهای جرمی و مولی  
 ~ جمع‌بندی، ۶۲۳-۶۲۴  
 شارهای چندجزئی، ۶۸۵-۶۸۸  
 شدت تلاطم، ۱۸۲-۱۸۳  
 شعاع هیدرولیکی، ۲۲۰  
 ~ میانگین، ۲۴۲  
 شکل سطح مایع چرخان، ۱۰۱-۱۰۳  
 ضرایب انتقال جرم  
 ~ حجمی  
 ~ تعیین، ۸۰۷-۸۰۸  
 ~ عبارت‌های تحلیلی، ۷۸۴-۷۸۸  
 ضرایب انتقال  
 ~ در آهنگ‌های بالای انتقال جرم خالص، ۸۱۶-۸۳۰  
 ~ در دوفاز  
 ~ تعریف، ۷۹۸-۸۰۵  
 ~ در یک فاز  
 ~ تعریف، ۷۸۰-۷۸۴

- ~ دوتایی در یک فاز  
~ رابطه همبستگی، ۷۸۸-۷۹۸
- ~ تعریف برای جریان در اطراف اجسام غوطه‌ور، ۲۰۷-۲۰۸
- ~ گرم  
~ تعریف، ۴۹۲-۴۹۵
- ~ تعریف برای جریان در مجراها، ۲۰۶-۲۰۸
- ~ ضریب اصطکاک فنینگ، ۲۰۷
- ~ گرم  
~ ضریب انتقال گرما، ۳۳۹
- ~ چگالش بخار خالص روی سطوح جامد، ۵۱۷-۵۲۱
- ~ ی کلی، ۴۹۴-۴۹۵
- ~ ی موضعی، ۴۹۳
- ~ محاسبه با استفاده از داده‌های تجربی، ۴۹۵-۴۹۷
- ~ ضریب پسا، ۲۰۸
- ~ ضریب خودنفوذی  
~ همرفت آزاد، ۵۱۳-۵۱۷
- ~ تخمین در چگالی بالا، ۶۰۸-۶۰۹
- ~ همرفت مختلط، ۵۱۳-۵۱۷
- ~ ضریب سوره، ۸۹۴
- ~ ضریب نفوذ  
~ همرفت واداشته در اطراف اجسام غوطه‌ور، ۵۰۸-۵۱۱
- ~ تانسور، ۶۰۲
- ~ همرفت واداشته در بسترهای پرشده، ۵۱۱-۵۱۳
- ~ تخمین در چگالی پایین، ۶۰۸
- ~ همرفت واداشته در لوله‌ها، ۵۰۲-۵۰۷
- ~ تعیین، ۶۳۸-۶۳۹
- ~ همرفت واداشته، محاسبات تحلیلی، ۴۹۷-۵۰۲
- ~ تلاطمی، ۷۶۵
- ~ ضرایب تصحیح، تبخیر قطرک، ۸۲۳-۸۲۴
- ~ جرمی  
~ ضرایب نفوذ چندجزئی ماکسول-استفان، ۸۹۲
- ~ محاسبه برای گازهای با چگالی پایین، ۶۱۴
- ~ ضرب اسکالر  
~ دوتایی
- ~ دو بردار، ۹۳۹
- ~ تخمین در چگالی بالا، ۶۰۹-۶۱۰
- ~ دو تانسور، ۹۴۹-۹۵۰
- ~ گردابی، ۷۶۵
- ~ ضرب برداری
- ~ گرمایی، ۸۹۵
- ~ دو بردار، ۹۴۰
- ~ مایعات  
~ ضرب تانسور در اسکالر، ۹۴۹
- ~ تعیین، ۶۱۷
- ~ ضرب تانسوری
- ~ وابستگی به دما و فشار، ۶۰۵-۶۱۰
- ~ تانسور در بردار، ۹۵۰-۹۵۱
- ~ ضریب‌های تبدیل،  
~ دو تانسور، ۹۵۰
- ~ طول اختلاط پراتنل، ۱۸۹
- ~ ضرب چندگانه بردارها، ۹۴۰
- ~ کاربرد فرمول درمورد جریان متلاطم، ۱۹۳
- ~ ضرب دوتایی تانسورها، ۹۴۹
- ~ طول اختلاط پراتنل و تیلر  
~ ضریب اتلاف اصطکاک، ۲۴۱-۲۴۲
- ~ عبارت، ۴۷۷، ۷۶۶
- ~ ضریب اصطکاک
- ~ طیف تابش الکترومغناطیسی، ۵۷۰-۵۷۱
- ~ برای جریان در اطراف کره‌ها، ۲۱۴-۲۱۵
- ~ ظرفیت جداسازی دیراک، ۸۴۸
- ~ برای جریان در لوله‌ها، ۲۰۸-۲۱۱
- ~ عبارت‌های مولکولی برای شارها، ۹۹۹
- ~ برای ستون‌های پرشده، ۲۱۸-۲۲۲
- ~ عدد اشمیت تلاطمی، ۷۶۵
- ~ عدد گراسهوف، ۳۶۶
- ~ تعریف، ۲۰۶-۲۱۱



- عدد نخست دامکوهلر، ۷۲۶  
 عدم حساسیت به مدل، ۸۵۳-۸۵۵  
 عملکرد حساب خیس تصحیح شده، ۸۲۴  
 عملیات انتگرالی  
 ~ در مختصات استوانه‌ای، ۹۷۵-۹۷۶  
 ~ در مختصات خمیده خطی، ۹۷۵-۹۷۶  
 ~ در مختصات کروی، ۹۷۵-۹۷۶  
 عملیات برداری، ۹۳۸-۹۴۱  
 ~ برحسب مؤلفه‌ها، ۹۴۱-۹۴۲  
 عملیات تانسوری  
 ~ برحسب مؤلفه‌ها، ۹۴۷-۹۵۲  
 عملیات حالت ناپایای ستون پر شده، ۸۷۲-۸۷۵  
 عملیات دیفرانسیلی  
 ~ برداری و تانسوری، ۹۵۲-۹۵۸  
 ~ در مختصات استوانه‌ای، ۹۶۶-۹۷۳  
 ~ در مختصات خمیده خطی، ۹۶۳-۹۷۵  
 ~ در مختصات کروی، ۹۷۳-۹۷۵  
 غشاهای باردار، ۹۱۹-۹۲۱  
 غشاهای تراوای گزینشی  
 ~ انتقال جرم در، ۹۱۲-۹۱۵  
 غلظت جرمی، ۶۲۰  
 غلظت مولی، ۶۲۰  
 فواصل سازی، ۹۱۶-۹۱۹  
 ~ قطبش غلظتی، ۸۲۷-۸۳۰  
 فرایندهای بدون اصطکاک آدیاباتیک  
 ~ در گاز ایده‌آل، ۴۰۳-۴۰۴  
 فرمول بارن‌بلات، ۲۱۱  
 فرمول پرائنل، ۲۱۱  
 فرمول لایب‌نیتس، ۹۹۲  
 ~ مشتق‌گیری از انتگرال حجم، ۹۵۸-۹۵۹  
 فشارسنج  
 ~ نوسانات، ۲۵۶-۲۵۹  
 فیلم ریزان  
 ~ با سرعت متغیر، ۵۰-۵۱  
 ~ با ویسکوزیته متغیر، ۹۶  
 ~ روی سطوح مسطح  
 ~ انتقال جرم در، ۷۸۴-۷۸۶  
 ~ ناپایداری مارانگونی، ۸۱۴-۸۱۵  
 فیلم غیرهم‌دما  
 ~ جریان پایا در، ۳۹۷-۳۹۸  
 قانون استفان-بولتزمن، ۵۷۵-۵۷۹  
 قانون استوکس، ۶۵  
 قانون اول نفوذ فیک  
 ~ صورت تک‌بعدی، ۵۹۹  
 قانون توزیع پلانک، ۵۷۵-۵۷۹  
 قانون جابه‌جایی وین، ۵۷۵-۵۷۹  
 قانون جذب لامبرت، ۵۹۱  
 قانون دوم نفوذ فیک، ۶۸۰  
 قانون رسانش گرمای فوری، ۳۰۸-۳۱۴  
 ~ در مختصات استوانه‌ای، ۹۸۱  
 ~ در مختصات دکارتی، ۹۸۱  
 ~ در مختصات کروی، ۹۸۱  
 قانون سرمایش نیوتون، ۳۳۹  
 قانون فیک  
 ~ برای نفوذ دوتایی، ۵۹۸-۶۰۵  
 ~ در مختصات استوانه‌ای، ۹۸۲  
 ~ در مختصات دکارتی، ۹۸۲  
 ~ در مختصات کروی، ۹۸۲  
 ~ صورت برداری، ۶۰۰  
 قانون کیرشهوف، ۵۷۳  
 قانون گراهام، ۹۲۲  
 قانون ویسکوزیته نیوتون، ۹-۱۰  
 ~ تعمیم، ۱۴-۲۰  
 ~ در مختصات استوانه‌ای، ۹۸۰  
 ~ در مختصات دکارتی، ۹۸۰  
 ~ در مختصات کروی، ۹۸۱  
 قضیه دیورژانس گاوس-آستراگراتسکی، ۹۵۸  
 قضیه کرل استوکس، ۹۵۸  
 قطبش غلظتی  
 ~ در فواصل سازی، ۸۲۷-۸۳۰

- قصر کره افتان  
 ~ تعیین، ۲۱۸-۲۱۷  
 قوانین پایستگی، ۷-۴  
 قیدهای انتقال، ۸۶۸-۸۶۷  
 قیدهای ترمودینامیکی، ۸۶۷-۸۶۶  
 کاتالیزگر متخلخل  
 ~ نفوذ، ۶۵۷-۶۵۴  
 کار  
 ~ مربوط به حرکت مولکولی، ۳۳۱-۳۲۹  
 کرل میدان برداری، ۹۵۴-۹۵۳  
 کسر حفره، ۲۱۹  
 کشسانی، ۲۹۰-۲۸۶  
 کنترلگر دما  
 ~ طرز کار، ۵۴۹-۵۴۶  
 گاز ایده آل  
 ~ فرایندهای بدون اصطکاک آدیاباتیکی، ۴۰۴-۴۰۳  
 گزاردان میدان اسکالر، ۹۵۳  
 گرمایش تبخیر  
 ~ ی منتهای، ۴۳۸-۴۳۵  
 ~ ی نیمه نامتهای، ۴۳۵-۴۳۴  
 گرم کردن مایع در مخزن هم‌زن دار، ۵۴۶-۵۴۳  
 گرم‌کن لوله‌ای  
 ~ طراحی، ۵۰۸-۵۰۷  
 گسیل در سطوح جامد، ۵۷۵-۵۷۲  
 لاپلاسی میدان اسکالر، ۹۵۵  
 لاپلاسی میدان برداری، ۹۵۵  
 لایه مرزی  
 ~ انتقال جرم، ۷۴۵-۷۳۹  
 ~ دوتایی  
 ~ انتقال حالت پایا، ۷۳۴-۷۲۳  
 ~ سرعتی، ۷۲۴  
 ~ گرمایی، ۷۲۴  
 ~ نظریه برای جریان غیرهم‌دما، ۴۴۹-۴۴۷  
 ~ نفوذی، ۷۲۴  
 مایعات پلیمری، ۳۰۰-۲۷۱  
 ~ رفتار، ۲۷۷-۲۷۳  
 ~ نظریه‌های مولکولی، ۳۰۰  
 مایع چرخان  
 ~ شکل سطح، ۱۰۳-۱۰۱  
 مبادله‌کن‌های گرمای جریان متقابل، ۵۴۰-۵۳۸  
 مبادله‌کن‌های گرمای جریان موازی، ۵۴۰-۵۳۸  
 متوسط‌گیری مساحت، ۸۰۴  
 مختصات استوانه‌ای، ۹۶۲-۹۶۰، ۹۶۴-۹۶۳  
 مختصات خمیده خطی  
 ~ جبر برداری و تانسوری، ۹۶۳-۹۵۹  
 ~ عملیات انتگرالی، ۹۷۶-۹۷۵  
 ~ عملیات دیفرانسیلی، ۹۷۵-۹۶۳  
 مختصات کروی، ۹۶۳-۹۶۲، ۹۶۴  
 مختصات متعامد عام، ۹۶۶-۹۶۵  
 مخزن اختلاط  
 ~ گشتاور وارد بر، ۲۳۸-۲۳۷  
 مخلوط‌های دوتایی  
 ~ تحلیل ابعادی معادله‌های تغییر، ۷۰۳-۶۹۶  
 مخلوط‌های غیرهم‌دما  
 ~ انتقال میان‌فازی، ۸۳۶-۷۷۹  
 مدل ب اولدریوید، ۲۹۲  
 مدل تعمیم‌یافته ماکسول، ۲۸۸-۲۸۷  
 مدل ۶ ثابت‌ه اولدریوید، ۲۹۲  
 مدل ۳ ثابت‌ه گیسکاس، ۲۹۲  
 مدل جفریز، ۲۸۷  
 مدل فارماکوسینتیکی دیالیز، ۸۵۲  
 مدل فیلم ساکن، ۸۱۹-۸۱۶  
 مدل لایه مرزی صفحه تخت، ۸۲۲-۸۲۰  
 مدل ماکسول، ۲۸۶  
 مدل نفوذ، ۸۲۰-۸۱۹  
 مدل‌های تعمیم‌یافته نیوتون، ۲۸۳-۲۸۱  
 مدل‌های فارماکوسینتیکی، ۸۵۳  
 مدل‌های ویسکوکشنسان خطی، ۲۹۰-۲۸۶  
 مدول رهایی، ۲۸۸  
 مسئله آرنولد، ۷۱۶-۷۱۳

- معادله استوکس-انشتین، ۶۱۵  
 معادله اصلاح شده وان دریست، ۱۸۹  
 معادله اندازه حرکت زاویه‌ای، ۸۸-۸۹  
 معادله انرژی، ۳۸۸-۳۸۶  
 ~ برای سیالات نیوتونی خالص با  $\rho$  و  $k$  ثابت  
 ~ در مختصات استوانه‌ای، ۹۸۷  
 ~ در مختصات دکارتی، ۹۸۷  
 ~ در مختصات کروی، ۹۸۷  
 معادله انرژی  
 ~ برحسب  $q$   
 ~ در مختصات استوانه‌ای، ۹۸۶  
 ~ در مختصات دکارتی، ۹۸۶  
 ~ در مختصات کروی، ۹۸۶  
 ~ داخلی، ۳۸۸  
 ~ صورت‌های خاص، ۳۸۸-۳۹۱  
 ~ مکانیکی، ۸۷-۸۸  
 معادله برک-پلامر، ۲۲۱  
 معادله برنولی، ۹۲  
 ~ برای جریان پایای سیالات غیریسکوز، ۹۲-۹۳  
 ~ برای جریان پتانسیل تراکم‌ناپذیر، ۱۴۵  
 معادله بریجمن، ۳۲۳  
 معادله بلیک-کوزنی، ۲۲۰  
 معادله بوسینسک  
 ~ برای همرفت آزاد، ۳۹۳-۳۹۱  
 ~ برای همرفت واداشته، ۳۹۳-۳۹۱  
 معادله بولتزمن، ۹۹۸-۹۹۷  
 ~ جواب، ۹۹۹  
 معادله پیوستگی، ۸۴-۸۳  
 ~ در مختصات استوانه‌ای، ۹۸۲  
 ~ در مختصات دکارتی، ۹۸۲  
 ~ در مختصات کروی، ۹۸۲  
 ~ هموارسازی زمانی، ۷۶۵-۷۶۴  
 معادله تغییر آنتروپی، ۸۹۰-۸۸۸  
 معادله تغییر برای گردشاری، ۱۳۹  
 معادله تلمیج، ۲۲۲-۲۲۱
- مساحت فصل مشترکی در ستون پر شده  
 ~ تخمین، ۸۰۶  
 مسافت آزاد میانگین، ۲۷  
 مشتق زمانی جزئی، ۸۹  
 مشتق زمانی کلی، ۸۹  
 مشتق زمانی مادی، ۹۰-۸۹  
 مشتق‌های زمانی هم‌چرخشی، ۲۹۲-۲۹۱  
 مشتق‌های زمانی یارومان، ۲۹۲-۲۹۱  
 مشتق‌های هم‌چرخشی، ۲۹۲-۲۹۰  
 معادلات تعمیم‌یافته ماکسول-استفان  
 ~ کاربردهای، ۹۱۲-۹۰۰  
 معادلات تغییر، ۹۹۹-۹۹۸  
 معادلات ماکسول-استفان  
 ~ برای نفوذ چندجزئی در گازها، ۶۴۵  
 معادله‌های پیوستگی  
 ~ برای مخلوط چندجزئی، ۶۸۱-۶۷۷  
 معادله‌های تعمیم‌یافته فیک، ۸۹۱  
 معادله‌های تغییر  
 ~ برای سیستم‌های چندجزئی، ۷۰۳-۶۷۷  
 ~ برای سیستم‌های غیرهم‌دما  
 ~ تحلیل بُعدی، ۴۱۱-۴۰۸  
 ~ برای سیستم‌های هم‌دما، ۱۱۳-۸۱  
 ~ برحسب مشتق مادی، ۹۲-۸۹  
 ~ تحلیل ابعادی، ۱۰۷-۱۰۵  
 ~ تحلیل ابعادی برای مخلوط‌های دوتایی، ۷۰۳-۶۹۶  
 ~ سیستم‌های غیرهم‌دما، ۴۱۶-۳۸۵  
 ~ کاربرد، ۹۴-۹۳  
 ~ کاربرد برای حل مسئله‌های حالت‌پایا، ۳۹۴  
 ~ کاربرد برای مخلوط‌ها، ۶۹۶-۶۸۸  
 معادله‌های چندجزئی تغییر، ۶۸۵-۶۸۱  
 معادله‌های کوشی-ریمان، ۱۴۶  
 معادله‌های هموارشده زمانی تغییر  
 ~ برای سیالات تراکم‌ناپذیر، ۱۸۴-۱۸۱  
 ~ جریان تراکم‌ناپذیر غیرهم‌دما، ۴۷۵-۴۷۴  
 معادله آرگون، ۲۲۱

- موازنه انرژی کل ۸۵-۸۷  
معادله حرکت،
- ~ صورت  $d$ ، ۵۳۸  
معادله حرکت
- موازنه انرژی مکانیکی ~ برای سیال نیوتونی با  $\mu$  و  $\rho$  ثابت  
~ در مختصات استوانه‌ای، ۹۸۴
- ~ صورت  $d$ ، ۵۳۸  
~ در مختصات دکارتی، ۹۸۴
- موازنه لایه‌های اندازه حرکت، ۴۴-۵۰  
~ در مختصات کروی، ۹۸۵
- موازنه لایه‌های جرم ~ برحسب  $r$   
~ شرایط مرزی، ۶۳۳-۶۳۴
- موازنه ماکروسکوپی، ۲۳۱  
~ در مختصات استوانه‌ای، ۹۸۳
- ~ اندازه حرکت، ۲۳۵-۲۳۶  
~ در مختصات دکارتی، ۹۸۳
- ~ اندازه حرکت حالت ناپایا، ۲۳۵  
~ در مختصات کروی، ۹۸۳
- ~ اندازه حرکت زاویه‌ای، ۲۳۶-۲۳۸  
معادله مهندسی برنولی، ۲۳۸
- ~ اندازه حرکت زاویه‌ای حالت پایا، ۲۳۷  
معادله نفوذ، ۶۸۰
- ~ اندازه حرکت زاویه‌ای حالت ناپایا، ۲۳۷  
معادله ویدمان-فرانتس-لورنتس، ۳۲۵
- ~ انرژی، ۵۳۲-۵۳۰، ۸۵۶  
معادله هیگن-پوئازوی، ۵۵
- ~ انرژی داخلی، ۵۳۳  
مقاومت کنترل‌کننده
- ~ انرژی مکانیکی، ۲۴۱-۲۳۸، ۲۶۲-۲۵۹، ۵۳۳-۵۳۲، ۸۵۶  
~ تعیین، ۸۰۲-۸۰۱
- مقاومت‌های فازی  
~ برهم‌کنش، ۸۰۴-۸۰۲
- ~ صورت‌های  $d$ ، ۵۳۷-۵۳۸  
مقایسه مدل‌های فیلم و نفوذ، ۸۲۶-۸۲۵
- موج شوکی ساکن  
مقطع برخورد، ۲۴
- ~ توزیع دما در، ۴۰۴-۴۰۸  
موازنه‌های انرژی
- ~ توزیع سرعت در، ۴۰۴-۴۰۸  
~ برای مبدل گوگرد دیوکسید، ۸۵۹-۸۵۷
- ~ توزیع فشار در، ۴۰۴-۴۰۸  
موازنه‌های فون کارمان، ۷۲۵
- ناپایداری مارانگونی  
موازنه‌های لایه‌های انرژی، ۳۶۶-۳۳۷
- ~ در فیلم ریزان، ۸۱۵-۸۱۴  
~ شرایط مرزی، ۳۳۹-۳۳۸
- نسبت نفوذ گرمایی، ۸۹۴  
موازنه‌های ماکروسکوپی
- نظریه‌های مولکولی  
~ اندازه حرکت، ۸۵۶-۸۵۵
- ~ مایعات پلیمری، ۳۰۰  
~ اندازه حرکت زاویه‌ای، ۸۵۶-۸۵۵
- نظریه حالت فعال شده آیرینگ، ۶۱۷-۶۱۶  
~ جرم، ۸۵۵-۸۴۲
- نظریه رسانندگی گرمایی گازها  
~ سیستم‌های جریان هم‌دما، ۲۶۲-۲۳۱
- ~ در چگالی پایین، ۳۲۰-۳۱۶  
~ سیستم‌های چندجزئی، ۸۷۹-۸۴۱
- نظریه رسانندگی گرمایی مایعات، ۳۲۴-۳۲۲  
~ سیستم‌های غیرهم‌دما، ۵۵۳-۵۲۹
- نظریه سینتیکی گازها، ۱۰۰۱-۹۹۷  
~ کاربرد در حل مسئله، ۵۳۷-۵۳۴، ۵۵۳-۵۴۳
- نظریه لایه مرزی  
~ کاربرد در حل مسئله‌های حالت پایا، ۸۷۱-۸۵۶
- ~ برای جریان غیرهم‌دما، ۴۴۹-۴۴۷  
~ کاربرد در حل مسئله‌های حالت ناپایا، ۸۷۹-۸۷۱

- ~ جریان در نزدیکی سطوح جامد، ۱۵۶-۱۵۳  
 ~ دوتایی
- ~ جریان در اطراف اجسام، ۷۳۹-۷۳۴  
 نظریه مولکولی ویسکوزیته گازها، ۲۷-۲۲  
 نظریه مولکولی ویسکوزیته مایعات، ۳۱-۲۹  
 نظریه نفوذ
- ~ در پلیمرها، ۶۲۰-۶۱۹
- ~ در سوسپانسیون‌های کلوئیدی، ۶۱۹-۶۱۸  
 ~ در گازها
- ~ در چگالی پایین، ۶۱۴-۶۱۰  
 ~ در مایعات دوتایی، ۶۱۷-۶۱۴  
 نظریه هیدرودینامیکی نفوذ، ۶۱۵  
 نفوذ، ۶۲۵-۵۹۷
- ~ از فیلم کروی غیرهم‌دما، ۶۴۰-۶۳۹  
 ~ آسزنی، ۶۲۵
- ~ با فصل مشترک متحرک، ۶۳۷
- ~ با واکنش شیمیایی ناهمگن، ۶۴۳-۶۴۰  
 ~ با واکنش شیمیایی همگن، ۶۴۷-۶۴۳  
 ~ با واکنش ناهمگن آهسته، ۶۴۳-۶۴۲  
 ~ جرمی، ۵۹۸، ۶۰۳  
 ~ چندجزئی در گازها
- ~ معادلات ماکسول-استفان، ۶۲۵
- ~ در سیستم گازی سه‌جزئی، ۶۵۹-۶۵۷  
 ~ در فیلم گاز ساکن، ۶۴۰-۶۳۴  
 ~ در فیلم مایع ریزان
- ~ انحلال جامد، ۶۵۴-۶۵۲  
 ~ جذب گاز، ۶۵۱-۶۴۷
- ~ در گازها
- ~ در چگالی پایین، ۶۱۴-۶۱۰  
 ~ در مایعات دوتایی، ۶۱۷-۶۱۴  
 ~ در محیط‌های متخلخل، ۹۲۱
- ~ عادی، ۵۹۸، ۶۰۳  
 ~ غلظتی، ۵۹۸، ۶۰۳
- ~ بین فازهای توده‌ای موجود، ۹۱۶-۹۱۵  
 ~ نیروهای رانش، ۹۰۰-۸۹۸
- ~ فشاری، ۸۹۸-۸۹۷، ۶۸۵  
 ~ کنوسن، ۹۲۵-۹۲۳  
 ~ گرمایی، ۶۸۵
- ~ ستون کلاسیوس-دیکل، ۸۹۷-۸۹۵  
 ~ معکوس، ۶۲۵  
 ~ ناپایا
- ~ با واکنش همگن مرتبه اول، ۷۲۰-۷۱۸  
 ~ نمک
- ~ در محلول آبی، ۹۰۸-۹۰۵  
 ~ وابسته به زمان، ۷۲۳-۷۱۲  
 ~ واداشته، ۶۰۳، ۶۸۵  
 ~ و واکنش شیمیایی
- ~ در کاتالیزگر متخلخل ۶۵۷-۶۵۴  
 نمادگذاری برداری، ۹۷۸-۹۳۷  
 نمادگذاری تانسوری، ۹۷۸-۹۳۷
- نیروی رانش
- ~ وارد بر زانویی لوله، ۲۵۱-۲۴۸  
 نیروی وارد شده توسط جت، ۲۴۱-۲۴۰  
 واکنش ناهمگن، ۶۳۳-۶۳۲  
 واکنش همگن، ۶۳۲
- ویسکوزیته
- ~ آهنگ برش صفر، ۲۸۶  
 ~ اتساعی، ۱۷  
 ~ افزایش طولی، ۲۷۹  
 ~ امولسیون‌ها، ۳۵-۳۴  
 ~ اندازه نسبی، ۱۹۴-۱۹۳
- ~ تخمین از روی خواص بحرانی، ۲۲-۲۱  
 ~ تعیین از روی سرعت حدی کره در حال سقوط، ۶۶-۶۵  
 ~ تعیین با استفاده از داده‌های جریان مویینه، ۵۷-۵۶
- ~ تلاطمی، ۱۸۹-۱۸۸  
 ~ دینامیکی، ۱۱
- ~ سوسپانسیون‌ها، ۳۴-۳۲  
 ~ غیرنیوتونی، ۲۸۳-۲۸۱  
 ~ گاز خالص با چگالی پایین
- ~ محاسبه، ۲۸-۲۷

~ گازها

~ نظریه مولکولی، ۲۲-۲۷

~ گردابی، ۱۸۸-۱۸۹

~ اندازه نسبی، ۱۹۳-۱۹۴

~ بوسینسک، ۱۸۸

~ مایعات

~ نظریه مولکولی، ۲۹-۳۱

~ مایع خالص، ۳۱-۳۲

~ مخلوط گازی با چگالی پایین

~ پیش‌بینی، ۲۸-۲۹

~ وابستگی به فشار و دما، ۲۰-۲۱

~ ویسکوزیته سنج کوئت، ۹۷-۱۰۱

~ ویسکوزیته سنجی، ۲۷۱

~ همرفت آزاد، ۳۶۳-۳۶۶

~ اتلاف گرما از لوله افقی، ۵۱۶-۵۱۷

~ انتقال مرکب گرما و جرم، ۸۰۹-۸۱۲

~ در لایه سیال افقی، ۴۱۳-۴۱۵

~ ضرایب انتقال گرما، ۵۱۳-۵۱۷

~ معادله بوسینسک، ۳۹۱-۳۹۳

~ همرفت مختلط، ضرایب انتقال گرما، ۵۱۳-۵۱۷

~ همرفت واداشته، ۳۵۷-۳۶۳

~ از صفحه تخت با آهنگ انتقال جرم بالا، ۷۲۷-۷۳۳

~ در اطراف اجسام غوطه‌ور

~ ضرایب انتقال گرما، ۵۰۸-۵۱۱

~ در اطراف کره، ۷۹۱

~ در بسترهای پر شده

~ ضرایب انتقال گرما، ۵۱۱-۵۱۳

~ در جریان سه‌بعدی پایا، ۴۵۳-۴۵۶

~ در طول صفحه تخت، ۷۹۱

~ ضرایب انتقال گرما در لوله‌ها، ۵۰۲-۵۰۷

~ محاسبات تحلیلی ضرایب انتقال گرما، ۴۹۷-۵۰۲

~ معادله بوسینسک، ۳۹۱-۳۹۳

~ آرام

~ انتقال گرما روی صفحه تخت، ۴۴۹-۴۵۳

~ هموارسازی زمانی

~ معادله پیوستگی، ۷۶۴-۷۶۵

## درباره نویسندگان

در دهه ۱۹۵۰، رابرت بایرن (باب) برد، وارن ای. استوارت، و ادوین ان. لایت فوت، بر آن شدند تا در دانشگاه ویسکانسین درسی در دوره کارشناسی ارائه دهند که در آن آموزش جریان سیال، انتقال گرما، و نفوذ باهم تلفیق شده باشد. همین نقطه آغازی برای تدوین کتاب معتبر پدیده‌های انتقال در سال ۱۹۶۰ شد. این کتاب، که چندین نسل از مهندسان شیمی آن را، براساس نام نویسندگانش، *BSL* می‌نامند، ۴۱ سال در بازار کتاب بوده، ۶۴ بار چاپ شده و به پنج زبان ترجمه شده است.

رابرت بایرن برد (باب) در ۵ فوریه سال ۱۹۲۴ در بریان، تگزاس، به دنیا آمد. در سال ۱۹۴۷ از دانشگاه ایلینویز با درجه کارشناسی در رشته مهندسی شیمی فارغ‌التحصیل شد و دوره دکتری را در دانشگاه ویسکانسین گذراند. پس از آن یک سال در دانشگاه آمستردام و یک سال دیگر در دانشگاه ویسکانسین به پژوهش‌های پسادکتری پرداخت. باب در دانشگاه‌های کورنل و ویسکانسین، و چندین دانشگاه خارجی، از جمله دانشگاه کیوتو، تدریس کرده است و در دوران کار حرفه‌ای خود مقام‌های اجرایی مختلفی نیز در مؤسسات آموزشی و پژوهشی داشته است. وی گذشته از کتاب حاضر، تألیفات متعدد دیگری هم دارد. باب در سال ۱۹۹۲ بازنشسته شد. او در دوران فعالیت حرفه‌ای خود نشان‌ها و جوایز علمی مختلفی دریافت کرد که بعضی از آن‌ها عبارت‌اند از:

نشان ملی علم (۱۹۸۷)، جایزه وارن کی. لوئیس (۱۹۷۴)، جایزه پیشرفت حرفه‌ای (۱۹۶۵)، جایزه وستینگهاوس (۱۹۶۰) و غیره. وی عضو فرهنگستان ملی مهندسی، فرهنگستان ملی علوم، و فرهنگستان‌ها و انجمن‌های مختلف داخلی و خارجی نیز هست.



از چپ به راست: استوارت، برد و لایت فوت در حال نمونه‌خوانی اولین ویراست کتاب پدیده‌های انتقال، حدود ۱۹۶۰ م.



از چپ به راست: لایت فوت، استوارت و برد در حال نمونه خوانی دومین ویراست کتاب پدیده‌های انتقال، ۲۰۰۱ م.

وارن ای. استوارت در ۳ ژوئیه ۱۹۲۴ در وایت‌واتر، ویسکانسین، به دنیا آمد. کارشناسی و کارشناسی ارشد خود را در سال‌های ۱۹۴۵ و ۱۹۴۷ از دانشگاه ویسکانسین گرفت و در سال ۱۹۵۱ موفق به دریافت درجه ScD از انستیتوی تکنولوژی ماساچوست (MIT) شد. او همه تحصیلات خود را در رشته مهندسی شیمی انجام داد. وارن استوارت، پس از پنج سال کار در آزمایشگاه‌های پژوهشی سینکلر، در سال ۱۹۵۶ به دانشکده مهندسی شیمی دانشگاه ویسکانسین پیوست و تا سال ۱۹۹۶، در این دانشگاه تدریس کرد. استوارت علاوه بر تدریس، چندین مقام اجرایی نیز در دانشگاه داشت. او صدها مقاله پژوهشی بسیار متنوع، حاوی اطلاعات مفصل، تألیف کرد و تنوع این زمینه‌ها گویای وسعت علایق و دانش اوست.

از جمله مهم‌ترین دستاوردهای فنی استوارت باید به ابداع روش‌های ریاضیاتی و محاسباتی جدید برای مدل‌سازی پدیده‌های شیمیایی و فرایندهای شیمیایی اشاره کرد. کارهای او در این زمینه به طراحی بهتر و ایمن‌تر عملیات فرایندهای شیمیایی شامل واکنش‌های شیمیایی، انتقال گرما و جرم، و جریان مختلط سیالات منتهی شد.

استوارت در دوران کار حرفه‌ای خود عضو انجمن‌های علمی مختلفی از جمله انجمن مهندسان شیمی آمریکا و فرهنگستان ملی مهندسی بود و جوایز متعددی مانند جایزه بنجامین اسمیت ریولدرز برای مهارت در تدریس (۱۹۸۱)، جایزه محاسبات در مهندسی شیمی (۱۹۸۳)، جایزه ای.وی. مورفی در شیمی صنعتی و مهندسی شیمی (۱۹۸۹)، و جایزه بایرن برد برای انتشار اثر پژوهشی برجسته (۱۹۹۱) را به خود اختصاص داد. وی در ۲۷ مارس ۲۰۰۶ درگذشت.



ادوین. ان. لایت فوت (اد) در ۲۵ سپتامبر سال ۱۹۲۵ در میلواکی ویسکانسین متولد شد. در سال ۱۹۴۷ درجه کارشناسی و در سال ۱۹۵۰ درجه دکتری خود را از دانشگاه کورنل گرفت. سه سال در یک شرکت دارویی به عنوان مهندس شیمی کار کرد و سپس در سال ۱۹۵۳ به عنوان استادیار به دانشگاه ویسکانسین دعوت شد تا دوره مهندسی بیوشیمی را در مقطع کارشناسی پایه‌گذاری کند. البته در این دوره مهندسی بیوشیمی کمی از زمان خود جلوتر بود و حتی چند سال بعد کنار گذاشته شد، اما لایت فوت به تدریس مهندسی بیوشیمی برای دانشجویان دوره کارشناسی و بالاتر ادامه داد. او پژوهش‌های پدیده‌های مختلف مهندسی شیمی و زیست‌شناسی انجام داد و جوایز مختلفی دریافت کرد که برای نمونه می‌توان از جایزه ویلیام اچ. واکر (۱۹۷۵)، جایزه وارن. کی. لوئیس (۱۹۹۱)، و جایزه ای. وی. مورفی (۱۹۹۲) نام برد. ادوین لایت فوت عضو فرهنگستان هنر و علوم امریکا (۱۹۹۲)، انجمن مهندسی پزشکی و زیست‌شناسی، فرهنگستان ملی علوم و انجمن‌های علمی مختلف دیگری بود.



از چپ به راست: باب برد، استوارت و لایت فوت به همراه نسخه‌ای از چاپ شصت و چهارم کتاب پدیده‌های انتقال.

••• معادله‌های تغییر برحسب شارهای مرکب.

این معادله‌ها فقط برای سیستم‌هایی معتبرند که در آن‌ها گرانش تنها نیروی خارجی باشد. اطلاعات بیش‌تر را می‌توانید در بخش ۲.۱۹ به‌دست آورید.

اندازه حرکت:

معادله (۸-۲.۳) 
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} = -[\nabla \cdot \phi] + \rho \mathbf{g}$$

انرژی:

معادله (۶-۱.۱۱) 
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) = -(\nabla \cdot \mathbf{e}) + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g})$$

جرم:

معادله (۶-۱.۱۹) 
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \omega_A = -(\nabla \cdot \mathbf{n}_A) + r_A$$

••• معادله‌های تغییر (صورت‌های خاص).

اندازه حرکت (برای سیال‌های نیوتنی با  $\rho$  و  $\mu$  ثابت):

(۶.ب)

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \equiv \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

انرژی (برای سیال‌های نیوتنی با  $\rho$  و  $k$  ثابت):

(۹.ب)

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} \equiv \rho \hat{C}_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right) = k \nabla^2 T + \mu \Phi_v$$

جرم (برای مخلوط‌های دوتایی  $A$  و  $B$  و  $\rho \mathcal{D}_{AB}$  ثابت):

(۱۱.ب)

$$\rho \frac{D\omega_A}{Dt} \equiv \rho \left( \frac{\partial \omega_A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega_A \right) = \rho \mathcal{D}_{AB} \nabla^2 \omega_A + r_A$$

••• گروه‌های بدون بُعد.

( $l_0$  و  $v_0$  به ترتیب، طول مشخصه و سرعت مشخصه‌اند.)

$$\text{Re} = l_0 v_0 \rho / \mu$$

$$\text{Pr} = \hat{C}_p \mu / k$$

$$\text{Sc} = \mu / \rho \mathcal{D}_{AB}$$

$$\text{Ra} = \text{GrPr}$$

$$\text{Gr} = g \beta l_0^3 \Delta T / \nu^2$$

$$\text{Gr}_\omega = g \zeta l_0^3 \Delta \omega_A / \nu^2$$

$$\text{Nu} = h l_0 / k$$

$$\text{Pe}' = \text{RePr}$$

$$\text{Pe}'_{AB} = \text{ReSc}$$

$$\text{Sh} = k_c l_0 / \mathcal{D}_{AB}$$

$$j_H = \text{Nu} / \text{RePr}^{1/2}$$

$$j_D = \text{Sh} / \text{ReSc}^{1/2}$$

••• عبارتهای شار مولکولی (نگاه کنید به پیوستهای ب.۱، ب.۲، و ب.۳).

اندازه حرکت (مقدار ثابت  $\rho$ ، سیال نیوتنی):

$$\boldsymbol{\pi} = p\boldsymbol{\delta} - \mu(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^\dagger) \quad \text{یا} \quad \pi_{ij} = p\delta_{ij} - \mu\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

جرم (فقط سیال خالص):

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad \text{یا} \quad q_i = -k\frac{\partial T}{\partial x_i}$$

جرم (برای مخلوط دوتایی  $A$  و  $B$ ):

$$\mathbf{j}_A = -\rho\mathcal{D}_{AB}\nabla\omega_A \quad \text{یا} \quad j_{Ai} = -\rho\mathcal{D}_{AB}\frac{\partial\omega_A}{\partial x_i}$$

••• عبارتهای شار همرفتی (نگاه کنید به بخشهای ۷.۱، ۷.۹، ۷.۱۷).

اندازه حرکت:

$$\rho\mathbf{v}\mathbf{v} \quad \text{یا} \quad \rho v_i v_j$$

انرژی:

$$\rho(\hat{U} + \frac{1}{2}v^2)\mathbf{v} \quad \text{یا} \quad \rho(\hat{U} + \frac{1}{2}v^2)v_i$$

جرم:

$$\rho\omega_A\mathbf{v} \quad \text{یا} \quad \rho\omega_A v_i$$

••• عبارتهای شار مرکب.

اندازه حرکت:

$$\text{معادله (۲-۷.۱)} \quad \boldsymbol{\phi} = p\mathbf{v}\mathbf{v} + \boldsymbol{\pi} = \rho\mathbf{v}\mathbf{v} + p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}$$

انرژی:

$$\text{معادله (۵-۸.۹)} \quad \mathbf{e} = \rho(\hat{U} + \frac{1}{2}v^2)\mathbf{v} + \mathbf{q} + [\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}]$$

$$\text{معادله (۶-۸.۹)} \quad = \rho(\hat{H} + \frac{1}{2}v^2)\mathbf{v} + \mathbf{q} + [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]$$

جرم:

$$\text{معادله (۱-۸.۱۷)} \quad \mathbf{n}_A = \rho\omega_A\mathbf{v} + \mathbf{j}_A$$

تذکر: کمیت  $[\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}]$  شارکار مولکولی است (نگاه کنید به بخش ۸.۹) و  $\boldsymbol{\pi} = p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}$  (نگاه کنید به جدول ۲.۱-۲.۱). همه شارها از یک قرارداد علامت پیروی می‌کنند: وقتی انتقال از سمت منفی سطح به سمت مثبت سطح انجام می‌شود، این شارها مثبت‌اند.

••• عملیات جبری برای بردارها و تانسورها در دستگاه مختصات دکارتی.

(s اسکالر است؛  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{w}$  بردارند؛  $\boldsymbol{\tau}$  تانسور است؛ عملیات ضرب نقطه‌ای یا برداری که در داخل پرانتز انجام می‌شوند، اسکالریند؛ آن‌ها که در داخل کروشه انجام می‌شوند، بردارند)

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$$

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]_x = v_y w_z - v_z w_y = -[\mathbf{w} \times \mathbf{v}]_x$$

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]_y = v_z w_x - v_x w_z = -[\mathbf{w} \times \mathbf{v}]_y$$

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]_z = v_x w_y - v_y w_x = -[\mathbf{w} \times \mathbf{v}]_z$$

$$[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]_x = \tau_{xx} v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z$$

$$[\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}]_x = v_x \tau_{xx} + v_y \tau_{yx} + v_z \tau_{zx}$$

$$[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]_y = \tau_{yx} v_x + \tau_{yy} v_y + \tau_{yz} v_z$$

$$[\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}]_y = v_x \tau_{xy} + v_y \tau_{yy} + v_z \tau_{zy}$$

$$[\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]_z = \tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \tau_{zz} v_z$$

$$[\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}]_z = v_x \tau_{xz} + v_y \tau_{yz} + v_z \tau_{zz}$$

تذکر: عملیات بالا را می‌توان به دستگاه مختصات استوانه‌ای تعمیم داد: به این منظور باید  $(r, \theta, z)$  را جایگزین  $(x, y, z)$  کرد. برای تعمیم به دستگاه مختصات کروی باید  $(r, \theta, \phi)$  را جایگزین  $(x, y, z)$  کرد. مختصات خمیده خطی در شکل‌های ۱-۲، ۱-۲، الف-۶، الف-۸، الف-۸، و الف-۸ توصیف شده‌اند.

••• عملیات مشتق‌گیری برای اسکالرها، بردارها، و تانسورها، در دستگاه مختصات دکارتی.

$$[\nabla s]_x = \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$[\nabla s]_y = \frac{\partial s}{\partial y}$$

$$[\nabla s]_z = \frac{\partial s}{\partial z}$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$[\nabla \times \mathbf{v}]_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

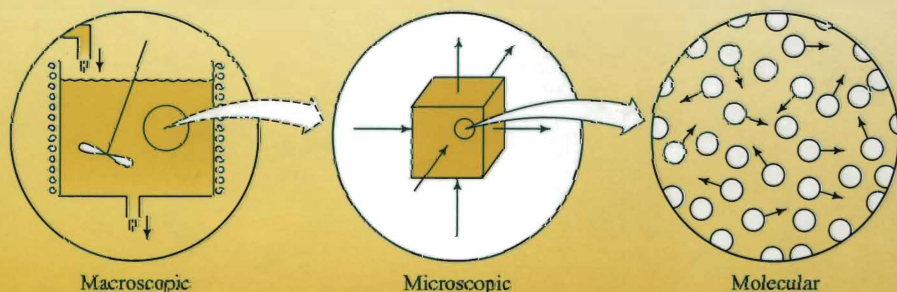
$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla s) = v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_y \frac{\partial s}{\partial y} + v_z \frac{\partial s}{\partial z}$$

$$\nabla^2 s \equiv (\nabla \cdot \nabla s) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

# Transport Phenomena

Second Edition



R. Byron Bird  
Warren E. Stewart  
Edwin N. Lightfoot



نشر کتاب دانشگاهی

ISBN 978-600-5107-44-3



9 786005 110744