قرار دارد □ ب) وزن مایعی که سطح منحنی آن را نگه داشته است □ ج) فشار در مرکزسطح صفحه ضربدر مساحت آن □ د) نیروی وارد به‌تصویر سطح منحنی بر روی یک صفحهٔ قائم □ ه) جمع عددی تمام جزء نیروهای افقی.

۲ ـ ۶ ـ ۲. لوله‌ای به‌قطر 5 m قرار است آب را تحت فشار 1.4 MPa منتقل کند. تنش کششی مجاز 55 MPa است. ضخامت جدارهٔ لوله برحسب میلی‌متر باید چقدر باشد؟

□ الف) 32 □ ب) 42 □ ج) 64 □ د) 80 □ ه) هیچکدام.

۳ ـ ۶ ـ ۲. مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به‌یک سطح منحنی غوطه‌ور برابر است با □ الف) مؤلفهٔ افقی آن □ ب) نیروی وارد به‌تصویر قائم سطح منحنی □ ج) فشار در مرکز سطح ضربدر مساحت آن □ د) وزن مایعی که به‌طور قائم در بالای سطح منحنی قرار دارد □ ه) هیچکدام.

۴ ـ ۶ ـ ۲. استوانه‌ای به‌قطر 3 m و طول 10 m باآب پر شده و به‌طور افقی قرارگرفته است. فشار در مرکز استوانه 9.8 kPa است. مؤلفهٔ قائم نیروی وارده به‌نیمه بالایی استوانه برحسب kN چقدر است؟

□ الف) 94.7− □ ب) 52.4− □ ج) 98.1 □ د) 147.1 □ ه) هیچکدام.

۵ ـ ۶ ـ ۲. یک بشکهٔ چوبی استوانه‌ای را دو حلقه در بالا و پایین آن نگهداری می‌کنند. بشکه با مایع پر می‌شود. نسبت کشش در حلقه بالایی به‌کشش در حلقهٔ پایینی چقدر است؟

□ الف) $\frac{1}{2}$ □ ب) 1 □ ج) 2 □ د) 3 □ ه) هیچکدام.

۶ ـ ۶ ـ ۲. لوله‌ای به‌قطر داخلی 50 mm و ضخامت جدارهٔ 5 mm آب را تحت فشار 0.89 MPa منتقل می‌کند. تنش کششی در جدارهٔ لوله برحسب مگاپاسکال چقدر است؟

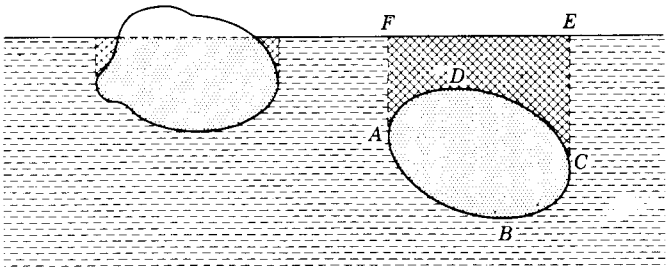
□ الف) 4.9 □ ب) 9.8 □ ج) 19.6 □ د) 39.2 □ ه) هیچکدام.

۲ ـ ۷ نیروی شناوری

نیرویی راکه سیال ساکن به‌جسم غوطه‌ور یا شناور وارد می‌کند، نیروی شناوری[23] گویند. امتداد نیروی شناوری، قائم و جهت آن رو به‌بالاست. این نیرو مؤلفه افقی ندارد زیرا تصویر جسم غوطه‌ور (یا بخش غوطه‌ور جسم شناور) روی صفحهٔ قائم همواره صفر است.

در شکل ۲۴ ـ ۲ یک جسم غوطه‌ور در سیال ساکن را نشان داده‌ایم. نیروی شناوری وارد به‌جسم برابر است با مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به‌سطح زیرین جسم یعنی ABC منهای مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به‌سطح بالایی آن یعنی ADC. نیروی وارد به‌سطح زیرین جسم رو به‌بالاست و برابر است با وزن مایع واقعی و خیالی که روی سطح ABC قرار دارد و معادل است با وزن مایع داخل حجم $ABCEFA$. نیروی وارد به‌سطح بالایی رو به‌پایین است و معادل است با وزن مایع داخل حجم $ADCEFA$. اختلاف این دو نیرو، نیرویی است قائم و به‌طرف بالا که معادل است با وزن سیال به‌حجم $ABCD$. این حجم، حجمی است که توسط جسم جابه‌جا شده است. بنابراین می‌توان

23– Buoyant force



شکل ۲۴ ـ ۲ نیروی شناوری وارد به‌اجسام شناور و غوطه‌ور.

نوشت:

$$F_B = \mathcal{V}\gamma \qquad (۲ - ۷ - ۱)$$

F_B نیروی شناوری، $\mathcal{V}$ حجم سیال جابه‌جاشده و γ وزن مخصوص سیال است. معادلهٔ فوق برای اجسام شناور نیز معتبر است، به‌شرطی که $\mathcal{V}$ را حجم مایع جابه‌جاشده بگیریم. این موضوع با ملاحظهٔ جسم شناور در شکل ۲۴ ـ ۲ روشن می‌شود.

برای اثبات ریاضی مطابق شکل ۲۵ ـ ۲ المانی از جسم غوطه‌ور به‌شکل منشور قائم در نظر می‌گیریم. سطح مقطع المان δA است. نیروی قائم وارد به المان برابر است با:

$$\delta F_B = (p_2 - p_1)\,\delta A = \gamma h\,\delta A = \gamma\,\delta\mathcal{V}$$

که در آن $\delta\mathcal{V}$ حجم المان است. γ را ثابت فرض کرده، روی کل جسم انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$F_B = \gamma \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} = \gamma\mathcal{V}$$

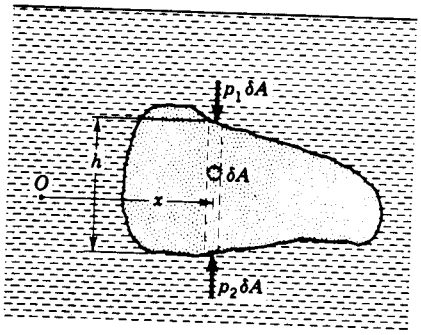
برای یافتن خط اثر نیروی شناوری، گشتاور جزء نیروها حول محور O را با گشتاور نیروی برآیند برابر قرار می‌دهیم. فاصلهٔ خط اثر نیروی برآیند تا O را به $\bar{x}$ نشان می‌دهیم:

$$\gamma \int_{\mathcal{V}} x\,d\mathcal{V} = \gamma\mathcal{V}\bar{x} \quad \Longrightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} x\,d\mathcal{V}$$

ملاحظه می‌شود که معادلهٔ فوق فاصلهٔ مرکز حجم را به‌دست می‌دهد. بنابراین نیروی شناوری از مرکز حجم جابه‌جاشده می‌گذرد. معادلهٔ فوق نیز هم برای اجسام غوطه‌ور و هم برای اجسام شناور صادق است. مرکز حجم جابه‌جاشده، مرکز شناوری[۲۴] نامیده می‌شود.

در حل مسائل استاتیک مربوط به‌اجسام غوطه‌ور یا شناور، عموماً لازم می‌شود که دیاگرام

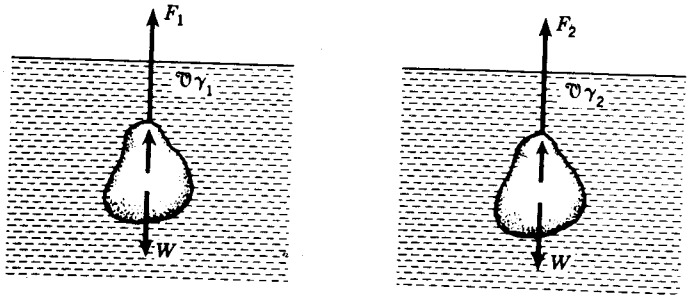
24– Center of buoyancy



شکل ۲۵ ـ ۲ نیروهای قائم وارد به‌یک المان از جسم غوطه‌ور.

آزاد جسم را رسم کنیم. اثر سیال با نیروی شناوری نشان داده می‌شود. علاوه بر نیروهای سطحی، وزن جسم راکه از مرکز ثقل می‌گذرد، نیز بایستی روی دیاگرام آزاد نشان داد.

اگر جسمی راکه دارای شکل هندسی نامنظمی است در دو سیال متفاوت غوطه‌ور و توزین نماییم، می‌توانیم وزن، حجم، وزن مخصوص و چگالی آن را به‌دست آوریم. در شکل ۲۶ ـ ۲ یک جسم در دو سیال متفاوت توزین می‌شود. دیاگرام آزاد مربوط به‌هر حالت رسم شده است. F_1 و F_2



شکل ۲۶ ـ ۲ دیاگرام آزاد یک جسم معلق در سیال.

وزن ظاهری، γ_1 و γ_2 وزن مخصوص دو سیال است. W وزن جسم و $\mathcal{V}$ حجم آن است که هر دو مجهولند.

معادلات تعادل به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$F_1 + \mathcal{V}\gamma_1 = W \qquad F_2 + \mathcal{V}\gamma_2 = W$$

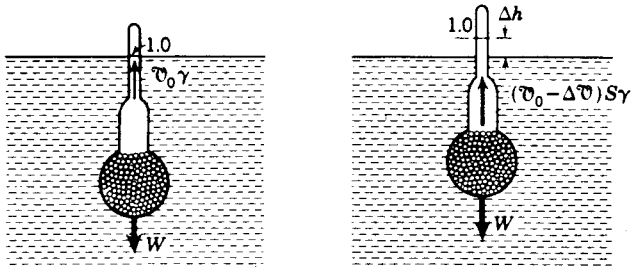
و با حل آنها به‌دست می‌آوریم:

$$\mathcal{V} = \frac{F_1 - F_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \qquad W = \frac{F_1\gamma_2 - F_2\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

هیدرومتر[۲۵] وسیله‌ای است برای اندازه‌گیری چگالی مایعات که براساس اصل شناوری ساخته شده است (شکل ۲۷ ـ ۲). این وسیله شاخه‌ای دارد که سطح مقطع آن ثابت است. در شکل سمت چپ، هیدرومتر در آب مقطر ($S=1.0$) غوطه‌ور شده است. برای تعادل هیدرومتر داریم:

$$\mathcal{V}_0\gamma = W \qquad (۲ ـ ۷ ـ ۲)$$

$\mathcal{V}_0$ حجم غوطه‌وری، γ وزن مخصوص آب و W وزن هیدرومتر است. موقعیت سطح آب مقطر



شکل ۲۷ ـ ۲ هیدرومتر در آب و در مایعی با چگالی S.

روی شاخه هیدرومتر با علامت 1.00 مشخص می‌شود که مبین چگالی واحد است. وقتی هیدرومتر در مایع دیگر شناور شود، معادلهٔ تعادل به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$(\mathcal{V}_0 - \Delta\mathcal{V})S\gamma = W \qquad (۲ ـ ۷ ـ ۳)$$

که درآن $\Delta\mathcal{V} = a\,\Delta h$ است و a سطح مقطع شاخهٔ هیدرومتر می‌باشد: Δh را از معادلات (۲ ـ ۷ ـ ۲) و (۲ ـ ۷ ـ ۳) به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta h = \frac{\mathcal{V}_0}{a}\frac{S-1}{S} \qquad (۲ ـ ۷ ـ ۴)$$

با استفاده از معادلهٔ فوق می‌توان هیدرومتر را مدرج نمود.

مثال ۱۳ ـ ۲. وزن یک قطعه سنگ معدن در هوا 1.5 N و در آب 1.1 N است. حجم سنگ را برحسب سانتی‌متر مکعب تعیین کنید. چگالی سنگ چقدر است؟

حل. از نیروی شناوری ناشی از هوا می‌توان صرفنظر کرد. با توجه به‌شکل ۲۶ ـ ۲ می‌توان نوشت:

$$1.5\ \text{N} = 1.1\ \text{N} + (9806\ \text{N/m}^3)\mathcal{V}$$

25– Hydrometer

پس: $\mathcal{V} = 0.0000408\ \text{m}^3 = 40.8\ \text{cm}^3$

و $$S = \frac{W}{\gamma \mathcal{V}} = \frac{1.5\ \text{N}}{(9806\ \text{N/m}^3)(0.0000408\ \text{m}^3)} = 3.75$$

تمرینات

۱ ـ ۷ ـ ۲. تخته‌ای به‌ابعاد 1 m در 1 m در 0.25 m و چگالی 0.5 در آب شناور شده و 400 N بار روی آن قرار داده شده است. حجم غوطه‌ور تخته برحسب متر مکعب چقدر است؟

□ الف) 0.043 □ ب) 0.125 □ ج) 0.166 □ د) 0.293 □ ه) هیچکدام.

۲ ـ ۷ ـ ۲. خط اثر نیروی شناوری، □ الف) در تمام اجسام غوطه‌ور از مرکز ثقل می‌گذرد □ ب) در تمام اجسام شناور از مرکز حجم می‌گذرد □ ج) از مرکز حجم سیال جابه‌جاشده می‌گذرد □ د) از مرکز حجم سیالی که به‌طور قائم در بالای جسم قرار دارد می‌گذرد □ ه) از مرکز سطح تصویر افقی جسم می‌گذرد.

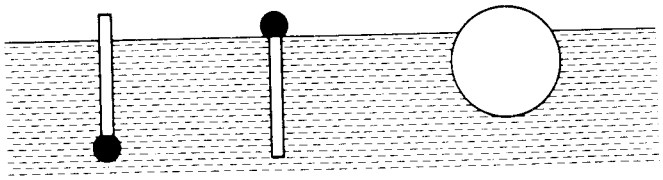
۳ ـ ۷ ـ ۲. نیروی شناوری، □ الف) نیروی برآیند وارده از سیال اطراف جسم به‌آن است □ ب) نیروی برآیند وارد به‌جسم شناور است □ ج) نیروی لازم برای برقراری تعادل جسم غوطه‌ور است □ د) برای اجسام نامتقارن قائم نیست □ ه) معادل است با حجم مایع جابه‌جا شده.

۸ ـ ۲ پایداری اجسام شناور و غوطه‌ور

جسمی را در نظر بگیرید که در مایع ساکن شناور است. اگر جسم اندکی به‌طرف پایین رانده شود، حجم مایع جابه‌جا شده زیاد می‌شود، نیروی شناوری افزایش می‌یابد و یک نیروی نامتعادل رو به بالا ایجاد می‌شود که می‌خواهد جسم را به‌موقعیت اولیه خود برگرداند. به‌عکس اگر جسم اندکی به‌طرف بالا رانده شود، نیروی شناوری کاهش می‌یابد و یک نیروی نامتعادل رو به‌پایین ایجاد می‌شود. می‌گوییم جسم شناور در مایع ساکن دارای پایداری قائم است.

به‌طور کلی هرگاه با جابه‌جایی خطی کوچکی، نیروهایی ایجاد شوند که بخواهند جسم را به‌موقعیت اولیه برگردانند، گوییم جسم پایداری خطی دارد و هرگاه با انحراف زاویه‌ای کوچکی، گشتاور برگرداننده‌ای ایجاد شود، گوییم جسم پایداری دورانی دارد.

در این بخش روشهای تعیین پایداری دورانی را بیان می‌کنیم. تعادل یک جسم شناور می‌تواند پایدار، ناپایدار یا خنثی باشد. اگر با انحراف زاویه‌ای کوچکی، کوپلی ایجاد شود که بخواهد انحراف زاویه‌ای را افزایش دهد گوییم تعادل جسم ناپایدار است. اگر با هر انحراف زاویه‌ای کوچکی، هیچ کوپلی ایجاد نشود، گوییم تعادل جسم خنثی است. در شکل ۲۸ ـ ۲ هر سه نوع تعادل نشان داده شده است. میلهٔ چوبی سبکی که به‌یک طرف آن وزنهٔ فلزی متصل شده است در شکل ۲۸ ـ ۲ *a* دارای تعادل پایدار است. این جسم به‌صورت شکل ۲۸ ـ ۲ *b* که وزنه در بالای آن قرار دارد نیز در تعادل است، اما با کوچکترین انحراف زاویه‌ای به‌حالت شکل ۲۸ ـ ۲ *a* درمی‌آید. شکل

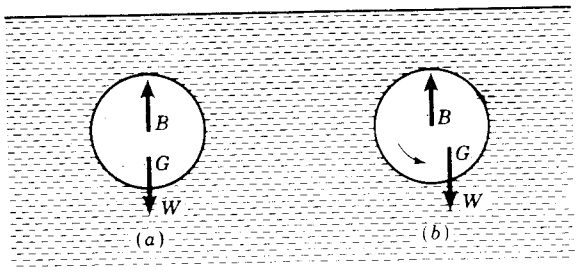


شکل ۲۸ ـ ۲ تعادل پایدار، ناپایدار و خنثی.

۲۸ ـ ۲ c کره (یا استوانه) همگنی را نشان می‌دهد که همواره در تعادل است، یعنی با انحراف زاویه‌ای، هیچ کوپلی ایجاد نمی‌شود.

تعادل اجسام غوطه‌ور تنها هنگامی پایدار است که مرکز ثقل جسم پایین‌تر از مرکز شناوری آن باشد. این وضعیت در شکل ۲۹ ـ ۲ a نشان داده شده است. حال اگر جسم مثلاً در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند و به‌صورت شکل ۲۹ ـ ۲ b درآید، نیروی شناوری و نیروی وزن، یک کوپل ایجاد می‌کنند که در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

جسمی که چندان سنگین باشد که شناور نماند، طبعاً غوطه‌ور می‌شود و در مایع فرو می‌رود تا به کف ظرف برسد. گرچه با افزایش عمق، وزن مخصوص مایع کمی افزایش می‌یابد، اما از طرف



شکل ۲۹ ـ ۲ پایداری دورانی جسم غوطه‌ور.

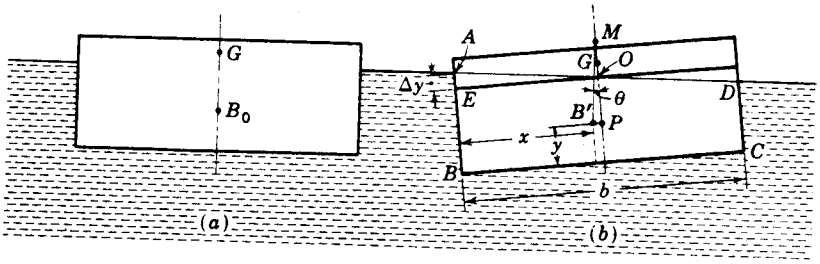
دیگر فشار زیاد باعث می‌شود که مایع جسم را متراکم کند و یا در خلل و فرج آن نفوذ کند و لذا از نیروی شناوری می‌کاهد. مثلاً یک کشتی اگر کاملاً غوطه‌ور شود، به‌واسطهٔ متراکم شدن هوای محبوس در بخشهای مختلف آن، قطعاً به کف دریا فرو خواهد رفت.

پایداری دورانی اجسام شناور

هر جسم شناوری که مرکز ثقل آن پایین‌تر از مرکز شناوری (مرکز حجم سیال جابه‌جا شده) باشد،

مانند شکل ۲۸ ـ ۲ a، دارای تعادل پایدار است. برخی از اجسام شناور حتی وقتی که مرکز ثقل آنها بالاتر از مرکز شناوری باشد نیز در تعادل پایدار هستند. ابتدا پایداری اجسام منشوری شکل (یعنی با مقطع یکنواخت) را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس به‌تحلیل کلی پایداری اجسام شناور تحت انحرافهای کوچک می‌پردازیم.

در شکل ۳۰ ـ ۲ a مقطعی از یک جسم منشوری نشان داده شده است. مرکز شناوری که در حالت کلی در مرکز حجم جابه‌جاشده واقع است، در این حالت بر مرکز سطح مقطع جسم زیر سطح مایع منطبق است. وقتی جسم مطابق شکل ۳۰ ـ ۲ b کج شود، مرکز شناوری به‌نقطهٔ B' یعنی مرکز سطح ذوزنقهٔ $ABCD$ منتقل می‌شود. نیروی شناوری از B' می‌گذرد و جهت آن به‌طرف بالاست. نیروی وزن از G می‌گذرد و جهت آن به‌طرف پایین است. اگر نیروی شناوری در سمت چپ نیروی وزن قرار گیرد، یک کوپل برگرداننده ایجاد می‌شود و جسم در تعادل پایدار است. محل تلاقی امتداد



شکل ۳۰ ـ ۲ پایداری جسم منشوری (با مقطع یکنواخت).

نیروی شناوری (خط قائمی که از B' می‌گذرد) و امتداد محور جسم یعنی M، متاسانتر[۲۶] نامیده می‌شود. M اگر بالاتر از G باشد تعادل پایدار است اگر پایین‌تر از G باشد تعادل ناپایدار است و اگر در روی G باشد، تعادل خنثی است. فاصلهٔ $\overline{MG}$ ارتفاع متاسانتریک[۲۷] نامیده می‌شود و معیاری از پایداری جسم است. کوپل برگرداننده برابر است با:

$$W\overline{MG}\sin\theta$$

که در آن θ انحراف زاویه‌ای و W وزن جسم است.

مثال ۱۴ ـ ۲. در شکل ۳۰ ـ ۲ یک قایق به‌عرض 6 m و طول 20 m و جرم 200 Mg نشان داده شده است. مرکز ثقل جسم 30 cm بالاتر از سطح آب است. ارتفاع متاسانتریک و کوپل برگرداننده را به‌ازای Δy=30 cm به‌دست آورید.

26– Metacenter

27– Metacentric height

حل. ابتدا عمق غوطه‌وری در آب یعنی h را به‌دست می‌آوریم:

$$h = \frac{200\,000 \times 9.806}{6 \times 20 \times 9806} = 1.667 \text{ m}$$

برای تعیین موقعیت مرکز سطح در حالتی که جسم کج شده است، حول AB و BC گشتاور می‌گیریم:

$$x = \frac{1.37 \times 6 \times 3 + 0.6 \times 6 \times \frac{1}{2} \times 2}{1.67 \times 6} = 2.82 \text{ m}$$

$$y = \frac{1.367 \times 6 \times \frac{1.367}{2} + 0.6 \times 6 \times \frac{1}{2} \times (0.2 + 1.367)}{1.667 \times 6} = 0.842 \text{ m}$$

با توجه به‌تشابه مثلثهای AEO و $B'PM$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta y}{b/2} = \frac{\overline{B'P}}{\overline{MP}}$$

$\Delta y = 0.3$ ، $b/2 = 3$ و $\overline{B'P} = 3 - 2.82 = 0.18$ m ، پس:

$$\overline{MP} = \frac{0.18 \times 3}{0.3} = 1.8 \text{ m}$$

G به‌اندازهٔ 1.97 m با کف فاصله دارد، پس:

$$\overline{GP} = 1.97 - 0.842 = 1.128 \text{ m}$$

و

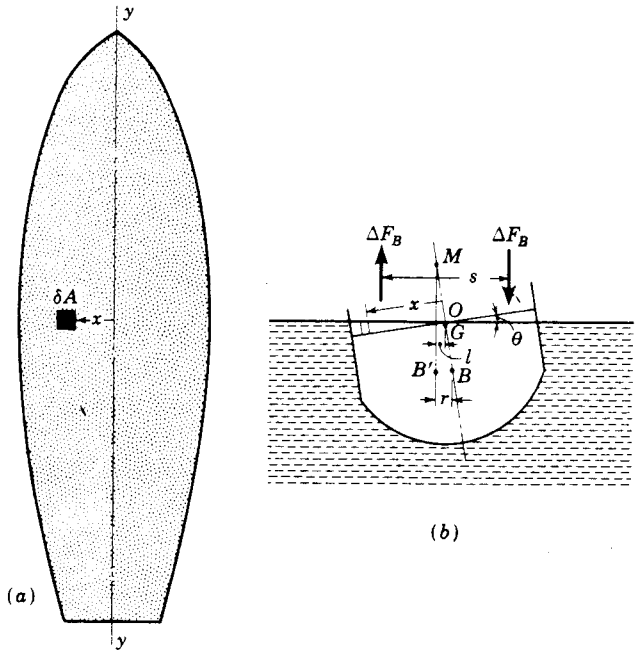
$$\overline{MG} = \overline{MP} - \overline{GP} = 1.8 - 1.128 = 0.672 \text{ m}$$

قایق پایدار است زیرا $\overline{MG}$ مثبت است. گشتاور برگرداننده برابر است با:

$$W\overline{MG} \sin\theta = 200\,000 \times 9.806 \times 0.672 \times \frac{0.3}{\sqrt{3^2 + 0.3^2}} = 131 \text{ kN·m}$$

مقاطع غیرمنشوری

برای اجسامی مانند کشتی (شکل ۳۱ ـ ۲ a) که مقطع آنها یکنواخت نیست، می‌توان فرمول مناسبی برای ارتفاع متاسانتریک تحت دوران با زوایای بسیار کوچک به‌دست آورد. با دوران جسم، مرکز شناوری آن به‌طور افقی و به‌اندازهٔ r جابه‌جا می‌شود (شکل ۳۱ ـ ۲ b). جابه‌جایی مرکز شناوری ناشی از این است که در اثر دوران، حجمی به‌شکل گوه در یک طرف در مایع فرو می‌رود و حجم دیگری به‌همان شکل در طرف دیگر از مایع بیرون می‌آید. حجمی که در مایع فرو می‌رود باعث می‌شود که نیروی شناوری در سمت چپ به‌اندازهٔ ΔF_B افزایش یابد و حجمی که از مایع بیرون می‌آید سبب می‌شود که نیروی شناوری در سمت راست به‌همان اندازه کاهش یابد. این دو نیرو کوپل $\Delta F_B \times s$ را ایجاد می‌کنند. سیستم نیروی متشکل از نیروی شناوری که در نقطهٔ B اثر می‌کند و



شکل ۳۱ـ۲ پایداری جسم غیرمنشوری (با مقطع متغیر).

کوپل $\Delta F_B \times s$ با نیروی شناوری که در B' اثر می‌کند، معادل است. برای تعیین r، حول B گشتاور می‌گیریم:

$$\Delta F_B\, s = W r \qquad (۲\text{ـ}۸\text{ـ}۱)$$

برای تعیین مقدار کوپل می‌توانیم حول محور O گشتاور بگیریم. محور O محور تقارن جسم در سطح آب است. بر روی مقطع افقی جسم در سطح آب، المان سطح δA را در نظر می‌گیریم. المان حجم مربوطه $x\theta\,\delta A$ است. نیروی شناوری ناشی از این المان $\gamma x\theta\,\delta A$ است و گشتاور آن حول O برابر $\gamma\theta x^2\,\delta A$ است، که در آن θ زاویهٔ کوچک دوران برحسب رادیان می‌باشد. با انتگرال‌گیری از این نیرو روی کل سطح مقطع اولیه، کوپل به‌دست می‌آید:

$$\Delta F_B\, s = \gamma\theta \int_A x^2\, dA = \gamma\theta I \qquad (۲\text{ـ}۸\text{ـ}۲)$$

که در آن I ممان اینرسی سطح حول محور y-y است (شکل ۳۱ـ۲ a). با جاگذاری در معادلهٔ (۱ـ۸ـ۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\gamma\theta I = W r = \forall \gamma r$$

$\mathcal{V}$ کل حجم مایع جابه‌جا شده است. از آنجا که θ بسیار کوچک است، می‌توان نوشت:

$$\overline{MB}\sin\theta = \overline{MB}\theta = r \quad \Rightarrow \quad \overline{MB} = \frac{r}{\theta} = \frac{I}{\mathcal{V}}$$

بنابراین ارتفاع متاسانتریک برابر است با:

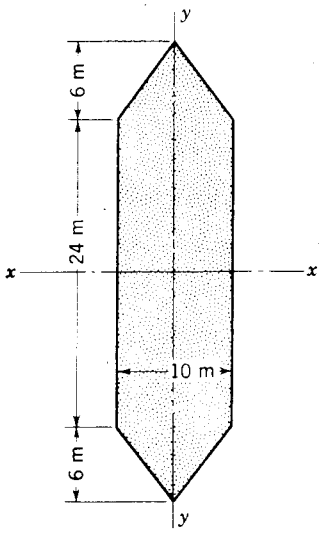
$$\overline{MG} = \overline{MB} \mp \overline{GB}$$

یا:

$$\overline{MG} = \frac{I}{\mathcal{V}} \mp \overline{GB} \qquad (۲-۸-۳)$$

اگر G بالاتر از B باشد از علامت منفی و اگر پایین‌تر از B باشد از علامت مثبت استفاده می‌شود.

مثال ۱۵ ـ ۲. در شکل ۳۲ ـ ۲ مقطع افقی یک قایق باری در سطح آب نشان داده شده است که 1Gg جرم را حمل می‌کند. مرکز شناوری قایق 2.0 m و مرکز ثقل آن 0.5 m پایین‌تر از سطح آب قرار دارد. ارتفاع متاسانتریک را برای غلتش حول محور y-y و برای دوران حول محور x-x به‌دست آورید.



شکل ۳۲ ـ ۲ مقطع افقی قایق در سطح آب.

حل.

$$\overline{GB} = 2 - 0.5 = 1.5\ \text{m}$$

$$\mathcal{V} = \frac{\text{جرم}}{\text{دانسیته}} = \frac{1\ \text{Mkg}}{1000\ \text{kg/m}^3} = 1000\ \text{m}^3$$

$$I_{yy} = \tfrac{1}{12}(24\text{ m})(10\text{ m})^3 + 4(\tfrac{1}{12})(6\text{ m})(5\text{ m})^3 = 2250\text{ m}^4$$

$$I_{xx} = \tfrac{1}{12}(10\text{ m})(24\text{ m})^3 + 2(\tfrac{1}{36})(10\text{ m})(6\text{ m})^3 + (60\text{ m}^2)(14\text{ m})^2 = 23{,}400\text{ m}^4$$

برای غلتش $\overline{MG} = \frac{I}{\forall} - \overline{GB} = \frac{2250}{1000} - 1.5 = 0.75\text{ m}$

برای دوران $\overline{MG} = \frac{I}{\forall} - GB = \frac{23{,}400}{1000} - 1.5 = 21.9\text{ m}$

تمرینات

۱ ـ ۸ ـ ۲. تعادل یک جسم شناور پایدار است، □ الف) اگر ارتفاع متاسانتریک صفر باشد □ ب) اگر و تنها اگر مرکز ثقل پایین‌تر از مرکز شناوری باشد □ ج) اگر $\overline{GB} - I/\forall$ مثبت باشد و G بالاتر از B باشد □ د) اگر $I/\forall$ مثبت باشد □ هـ) اگر نقطه متاسانتر بالاتر از مرکز ثقل باشد.

۲ ـ ۸ ـ ۲. جعبهٔ بسته‌ای به‌شکل مکعب از ورقهای یکنواخت ساخته شده است. طول ضلع جعبه 1 m و جرم آن 550 kg است. جعبه به‌طور قائم در روغن با چگالی 0.9 قرار می‌گیرد. ارتفاع متاسانتریک چقدر است؟

□ الف) −0.058 m □ ب) 0.078 m □ ج) 0.33 m □ د) 0.467 m □ هـ) هیچکدام.

۹ ـ ۲ تعادل نسبی

در سیال ساکن به‌دلیل فقدان تنش برشی، محاسبهٔ تغییرات فشار آسان است. در سیال متحرک نیز اگر هیچ لایه‌ای نسبت به‌لایه مجاور حرکت نکند، تنش برشی در تمام نقاط صفر است. لذا در سیالی با حرکت انتقالی یکنواخت، تغییرات فشار هیدرواستاتیک است. حال فرض کنید سیال شتاب داشته باشد اما باز هم هیچ لایه‌ای نسبت به‌لایه مجاور حرکت نکند، یعنی سیال همانند جسم صلب حرکت کند. در این نوع حرکت نیز هیچ تنش برشی به‌وجود نمی‌آید و می‌توان دیاگرام آزاد مناسبی رسم کرده، با نوشتن معادله حرکت نحوه تغییر فشار را تعیین کرد. در این بخش دو حرکت از این نوع را بررسی می‌کنیم؛ حرکت با شتاب خطی یکنواخت و حرکت دورانی یکنواخت حول محور قائم. وقتی سیال بدین‌ترتیب حرکت کند، گویند در تعادل نسبی[۲۸] است.

هرچند تعادل نسبی از مباحث استاتیک سیال به‌شمار نمی‌رود، اما به‌علت تشابه نیروها، آن را در این فصل گنجانیده‌ایم.

شتاب خطی یکنواخت

در شکل ۳۳ ـ ۲ یک مخزن روباز را نشان داده‌ایم که تحت شتاب خطی ثابت **a** قرار گرفته است. پس

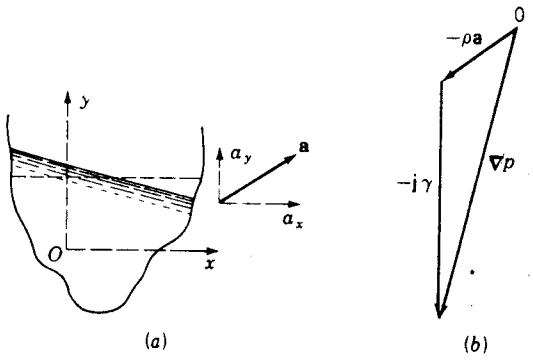
28– Relative equilibrium

از مدتی مایع خود را با شتاب وفق می‌دهد و به‌صورت جسم صلب حرکت می‌کند. در این حالت فاصلهٔ بین هر دو ذرهٔ سیال ثابت می‌ماند و بنابراین هیچ تنش برشی ایجاد نمی‌شود.

دستگاه مختصات را طوری می‌گیریم که محور y قائم باشد و بردار شتاب در صفحهٔ xy قرار گیرد (شکل a ۳۳ ـ ۲). بدین‌ترتیب بردار شتاب بر محور z عمود است و در این امتداد مؤلفه‌ای ندارد. برای این حرکت می‌توان معادلهٔ (۵ ـ ۲ ـ ۲) را به‌کار برد.

$$\mathbf{f} - \mathbf{j}\gamma = -\nabla p - \mathbf{j}\gamma = \rho\mathbf{a} \qquad (۲ ـ ۲ ـ ۵)$$

بنابراین مطابق شکل b ۳۳ ـ ۲ گرادیان فشار یعنی ∇p جمع بردارهای $-\rho\mathbf{a}$ و $-\mathbf{j}\gamma$ است. از آنجا که



شکل ۳۳ ـ ۲ حرکت مایع تحت شتاب یکنواخت.

∇p در امتداد بیشترین تغییرات فشار است، فشار در امتداد عمود بر آن تغییر نمی‌کند. بنابراین سطوح فشار ثابت از جمله سطح آزاد عمود بر ∇p هستند. حال برای تعیین $p=p(x,y,z)$ یعنی رابطه‌ای که تغییرات فشار را در سه امتداد به‌دست دهد، مؤلفه‌های معادله (۵ ـ ۲ ـ ۲) را در سه امتداد می‌نویسیم:

$$\nabla p = \mathbf{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z} = -\mathbf{j}\gamma - \frac{\gamma}{g}(\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y)$$

یا
$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\gamma}{g}a_x \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma\left(1+\frac{a_y}{g}\right) \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

از طرفی چون p تابع مکان (x,y,z) است، دیفرانسیل کل آن به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

با جاگذاری مشتقات جزئی به‌دست می‌آوریم:

$$dp = -\gamma\frac{a_x}{g}dx - \gamma\left(1+\frac{a_y}{g}\right)dy \qquad (۲ ـ ۹ ـ ۱)$$

معادلهٔ فوق را می‌توان برای سیالات تراکم‌ناپذیر انتگرال‌گیری کرد:

$$p = -\gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma\left(1 + \frac{a_y}{g}\right) y + c$$

برای تعیین ثابت انتگرال‌گیری فرض می‌کنیم که در نقطهٔ $x=0$ و $y=0$، فشار p_0 باشد. لذا خواهیم داشت $c=p_0$. بنابراین:

$$p = p_0 - \gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma\left(1 + \frac{a_y}{g}\right) y \qquad (۲-۹-۲)$$

اگر سیال دارای سطح آزاد باشد، می‌توانیم برای تعیین معادلهٔ سطح آزاد در معادلهٔ (۲ ـ ۹ ـ ۲) قرار دهیم $p=0$. معادلهٔ (۲ ـ ۹ ـ ۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$y = -\frac{a_x}{a_y + g} x + \frac{p_0 - p}{\gamma(1 + a_y/g)} \qquad (۲-۹-۳)$$

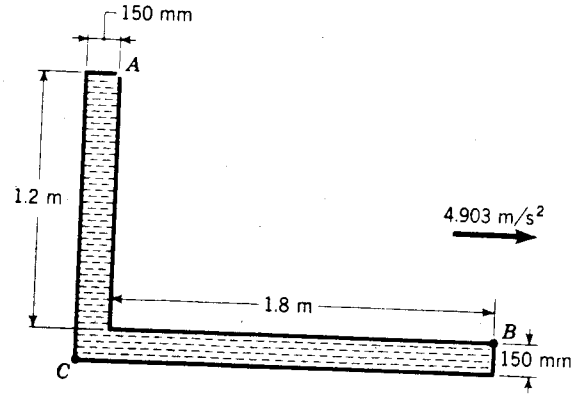
پس شیب سطوح فشار ثابت،

$$-\frac{a_x}{a_y + g}$$

است. این سطوح با سطح آزاد موازیند. عرض محل تلاقی سطح آزاد با محور yها برابر است با:

$$\frac{p_0}{\gamma(1 + a_y/g)}$$

مثال ۱۶ ـ ۲. مخزنی که در شکل ۳۴ ـ ۲ نشان داده شده با روغن به‌چگالی 0.8 پر شده است. سوراخ کوچکی در نقطهٔ A از دیوارهٔ مخزن وجود دارد. برای شتاب افقی $4.903\ \text{m/s}^2$ فشار در نقاط B و C را تعیین



شکل ۳۴ ـ ۲ مخزن پر از مایع.

کنید. شتاب a_x لازم برای اینکه فشار در نقطهٔ B صفر شود، چقدر است؟

حل. از معادلهٔ (۲ ـ ۹ ـ ۲) استفاده می‌کنیم: مبدأ را در نقطهٔ A می‌گیریم. شتاب قائم، a_y، صفر است. پس:

$$p = -\gamma \frac{a_x}{g} x - \gamma y = -\frac{0.8(9806\ \text{N/m}^3)(4.903\ \text{m/s}^2)}{9.806\ \text{m/s}^2} x - 0.8(9806\ \text{N/m}^3) y$$

یا

$$p = -3922.4x - 7844.8y \quad \text{Pa}$$

در نقطهٔ B داریم $x=1.8$ m و $y=-1.2$ m، پس $p=2.35$ kPa. در نقطهٔ C داریم: $x=-0.15$ m و $y=-1.35$ m. پس $p=11.18$ kPa.

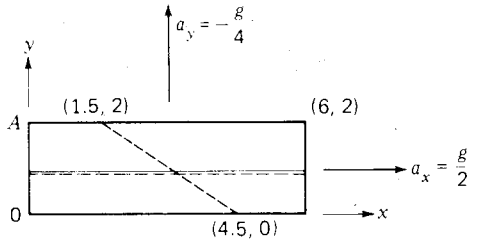
برای تعیین شتابی که فشار در نقطهٔ B را صفر کند، مجدداً معادلهٔ (۲ ـ ۹ ـ ۲) را می‌نویسیم. مبدأ را در A می‌گیریم:

$$0.0 = 0.0 - \frac{0.8(9806\ \text{N/m}^3)}{9.806\ \text{m/s}^2} 1.8a_x - 0.8(9806\ \text{N/m}^3)(-1.2)$$

یا

$$a_x = 6.537\ \text{m/s}^2$$

مثال ۱۷ ـ ۲. ظرف بسته‌ای که ابعاد قاعدهٔ آن 6 واحد در 6 واحد و ارتفاع آن 2 واحد است تا نیمه از مایع پر شده است (شکل ۳۵ ـ ۲). ظرف تحت شتاب خطی ثابتی با مؤلفه‌های $a_x=g/2$ و $a_y=-g/4$ قرار می‌گیرد.



شکل ۳۵ ـ ۲ مخزن تحت شتاب خطی یکنواخت

معادله‌ای برای تغییرات فشار در روی قاعدهٔ ظرف به‌دست آورید.

حل. ابتدا شیب سطح آزاد را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{-a_x}{a_y + g} = \frac{-g/2}{-g/4 + g} = -\frac{2}{3}$$

بنابراین سطح آزاد به‌صورتی که در شکل نشان داده شده است درمی‌آید. مبدأ را در O می‌گیریم. معادلهٔ (۲ ـ ۹ ـ ۲) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$p = p_0 - \frac{\gamma}{2} x - \gamma(1 - \tfrac{1}{4}) y = p_0 - \frac{\gamma}{2}(x + \tfrac{3}{2} y)$$

در نقطهٔ $y=0$، $x=4.5$ داریم $p=0$. پس $p_0=2.25\gamma$ می‌باشد. بنابراین برای کف ظرف به‌ازای $y=0$ داریم:

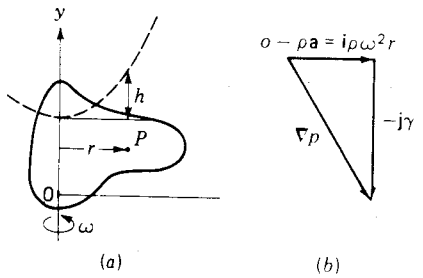
$$p = 2.25\gamma - 0.5\gamma x \qquad 0 \le x \le 4.5$$

دوران یکنواخت حول محور قائم

حرکت دورانی سیال حول یک محور را گرداب گویند. اگر سرعت زاویه‌ای تمام ذرات سیال یکسان باشد و سیال مانند جسم صلب دوران کند، حرکت گرداب اجباری[29] نامیده می‌شود. یک نوع دیگر گرداب، گرداب آزاد[30] است. در گرداب آزاد نیز ذرات در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کنند، اما سرعت آنها با فاصله از مرکز تناسب معکوس دارد. گرداب آزاد را در فصلهای ۸ و ۱۰ تشریح خواهیم کرد. مخزنی را در نظر بگیرید که حول یک محور قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت دوران می‌کند. مایع داخل مخزن پس از مدتی مانند جسم صلب دوران خواهد کرد. هیچ تنش برشی در مایع ایجاد نمی‌شود و تنها شتاب موجود در امتداد شعاعی و به‌طرف محور دوران است. دستگاه مختصات را طوری می‌گیریم که بردار یکه $\mathbf{i}$ در امتداد r و بردار یکه $\mathbf{j}$ در امتداد قائم و به‌طرف بالا باشد و محور yها را به‌عنوان محور دوران می‌گیریم. برای تعیین تغییرات فشار در سیال می‌توانیم از معادلهٔ (۵ ـ ۲ ـ ۲) استفاده کنیم:

$$\nabla p = -\mathbf{j}\gamma - \rho\mathbf{a} \qquad (۲ ـ ۲ ـ ۵)$$

به‌ازای سرعت زاویه‌ای ثابت ω، شتاب هر ذرهٔ سیال مانند P برابر $\omega^2 r$ و در امتداد شعاعی و به‌طرف مرکز است یعنی $\mathbf{a}=-\mathbf{i}\omega^2 r$. جمع برداری $-\mathbf{j}\gamma$ و $-\rho\mathbf{a}$ گرادیان فشار ∇p را به‌دست می‌دهد (شکل b ۳۶ ـ ۲). در هر نقطه فشار در امتداد عمود بر این بردار تغییر نمی‌کند. پس سطح آزاد در هر



شکل ۳۶ ـ ۲ دوران مایع حول محور قائم.

نقطه عمود بر ∇p است. معادلهٔ (۵ ـ ۲ ـ ۲) را به‌صورت زیر بسط می‌دهیم:

29– Forced vortex

30– Free vortex

$$\mathbf{i}\frac{\partial p}{\partial r}+\mathbf{j}\frac{\partial p}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z}=-\mathbf{j}\gamma+\mathbf{i}\rho\omega^2 r$$

$\mathbf{k}$ بردار یکّه در امتداد محور z (یا امتداد مماسی) است. بنابراین:

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\gamma}{g}\omega^2 r \qquad \frac{\partial p}{\partial y}=-\gamma \qquad \frac{\partial p}{\partial z}=0$$

چون p فقط تابع y و r است، مشتق کل dp به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$dp=\frac{\partial p}{dy}\,dy+\frac{\partial p}{\partial r}\,dr$$

با جاگذاری $\partial p/\partial y$ و $\partial p/\partial r$ خواهیم داشت:

$$dp=-\gamma\,dy+\frac{\gamma}{g}\omega^2 r\,dr \qquad (۲-۹-۴)$$

برای مایعات، γ ثابت است و با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آوریم:

$$p=\frac{\gamma}{g}\omega^2\frac{r^2}{2}-\gamma y+c$$

c ثابت انتگرال‌گیری است. اگر فشار در مبدأ $(y=0, r=0)$ را به p_0 نشان دهیم، آنگاه داریم $c=p_0$ و :

$$p=p_0+\gamma\frac{\omega^2 r^2}{2g}-\gamma y \qquad (۲-۹-۵)$$

وقتی که یک صفحهٔ افقی خاص $(y=0)$ که برای آن $p_0=0$ است انتخاب کنیم، و معادلهٔ (۵ ـ ۹ ـ ۲) را به γ تقسیم کنیم:

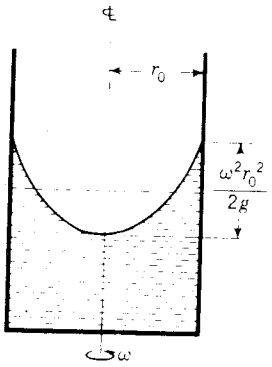
$$h=\frac{p}{\gamma}=\frac{\omega^2 r^2}{2g} \qquad (۲-۹-۶)$$

معادلهٔ فوق نشان می‌دهد که عمق قائم متناسب با مجذور شعاع است. سطوح هم‌فشار به‌شکل سهمیگون هستند.

در یک مخزن دوار، حجم زیر سهمیگون با حجم اولیه سیال برابر است. شکل سهمیگون فقط به‌سرعت زاویه‌ای بستگی دارد.

ظرفی به‌شکل استوانه در نظر بگیرید که حول محور خود دوران می‌کند (شکل ۳۷ ـ ۲). در این حالت طبق معادلهٔ (۶ ـ ۹ ـ ۲) ارتفاع مایع در دیوارهٔ استوانه نسبت به‌رأس سهمی $\omega^2 r_0^2/2g$ است. از آنجا که حجم سهمیگون نصف حجم استوانه محاط بر آن است، حجم مایعی که در بالای سطح افقی گذرنده از رأس قرار دارد، برابر است با:

$$\pi r_0^2\frac{1}{2}\frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$



شکل ۳۷ ـ ۲ دوران ظرف استوانه‌ای حول محور خود.

وقتی مایع ساکن باشد، عمق آن از سطح گذرنده از رأس یکنواخت و برابر

$$\frac{1}{2}\frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$

است. نتیجه می‌گیریم که مایع به‌همان اندازه که در مرکز ظرف پایین می‌رود، در دیوارهٔ آن بالا می‌آید. حال اگر r_0، ω و عمق مایع قبل از دوران معلوم باشد. می‌توانیم محل رأس سهمیگون را تعیین کنیم.

مثال ۱۸ ـ ۲. مایعی با سرعت 200 rpm حول یک محور قائم دوران می‌کند. چگالی مایع 1.2 است. فشار در نقطه A که به‌فاصلهٔ 1 m از محور قرار دارد، 70 kPa است. فشار در نقطهٔ B چقدر است؟ این نقطه 1.5 m با محور فاصله دارد و 2 m بالاتر از A است.

حل. معادلهٔ (۵ ـ ۹ ـ ۲) را برای دو نقطه می‌نویسیم:

$$p_A = p_0 + \gamma\frac{\omega^2 r_A^2}{2g} - \gamma y \qquad p_B = p_0 + \gamma\frac{\omega^2 r_B^2}{2g} - \gamma(y+2)$$

داریم $\omega = 200(2\pi/60) = 20.95$ rad/s، $\gamma = 1.2(9806) = 11{,}767$ N/m^3 و $r_A = 1$ m , $r_B = 1.5$ m. معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم و مقادیر را در آن قرار می‌دهیم:

$$70{,}000 - p_B = (2\text{ m})(11{,}767\text{ N/m}^3) + \frac{11{,}767\text{ N/m}^3}{2(9.806\text{ m/s}^2)}(20.95/\text{s})^2[1\text{ m}^2 - (1.5\text{ m})^2]$$

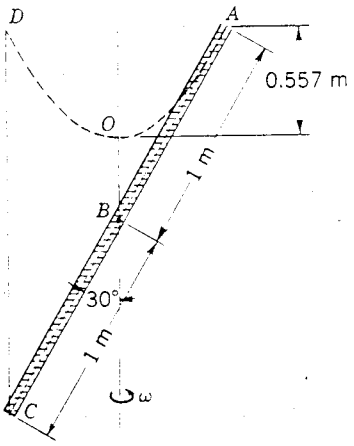
بنابراین:

$$p_B = 375.6\text{ kPa}$$

ظرف بسته‌ای محتوی مایع را در نظر بگیرید که فاقد سطح آزاد است یا تنها قسمتی از سطح

آزاد آن در معرض اتمسفر قرار دارد. برای دوران این ظرف حول محور قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت، می‌توان یک سطح آزاد خیالی رسم کرد. شکل این سطح به‌صورت یک سهمیگون است که معادلهٔ آن با رابطهٔ (۶ ـ ۹ ـ ۲) داده می‌شود. فاصله قائم هر نقطه مایع تا این سطح آزاد برابر ارتفاع فشاری آن نقطه است.

مثال ۱۹ ـ ۲. در شکل ۳۸ ـ ۲ لوله‌ای به‌طول 2 m نشان داده شده است که کف آن بسته شده و با آب پر شده است. زاویهٔ لوله با امتداد قائم 30° است. لوله حول محور قائمی که از وسط آن می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای



شکل ۳۸ ـ ۲ دوران لولهٔ مایل حول محور قائم

6.73 rad/s دوران می‌کند. سهمیگونِ فشار صفر را رسم کنید. فشار در کف و وسط لوله را تعیین کنید.

حل. سهمیگون فشار صفر از نقطهٔ A می‌گذرد. اگر مبدأ مختصات را در رأس سهمی بگیریم داریم $p_0=0$. معادلهٔ (۶ ـ ۹ ـ ۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$h=\frac{\omega^2 r^2}{2g}=\frac{(6.73)^2}{2(9.806)}(\sin 30°)^2=0.577 \text{ m}$$

یعنی رأس سهمی، O، به‌فاصلهٔ 0.577 m در زیر A قرار دارد. فشار در کف لوله $\gamma(\overline{CD})$ است، پس:

$$(2 \cos 30°)(9806)=16.98 \text{ kPa}$$

در نقطه وسط لوله $\overline{OB}=0.289$ m. پس:

$$p_B=0.289(9806)=2.83 \text{ kPa}$$

نیروهای فشاری سیال در تعادل نسبی

در مایعی که تحت شتاب ثابت همچون جسم صلب حرکت می‌کند، نیروی وارده به‌یک سطح مسطح با انتگرال‌گیری روی سطح به‌دست می‌آید:

$$F = \int p\, dA$$

نحوهٔ تغییر فشار روی سطح به‌شتاب و جهت سطح بستگی دارد. اگر توزیع فشار روی سطح خطی باشد (شتاب خطی) نیروی وارده برابر است با حاصلضرب مساحت صفحه در فشار در مرکز سطح آن. **زیرا حجم منشور فشار برابر است با $p_C A$. اگر توزیع فشار غیرخطی باشد نیروی وارده و خط اثر آن را می‌توان با انتگرال‌گیری تعیین کرد.**

تمرینات

۱ ـ ۹ ـ ۲. جعبهٔ بسته‌ای به‌شکل مکعب وجود دارد که طول هر ضلع آن 1 m است. نصف جعبه با آب و نصف دیگر آن با روغن به‌چگالی 0.75 پر شده است. وقتی جعبه تحت شتابی به اندازهٔ $4.903\ m/s^2$ در امتداد قائم و به‌طرف بالا قرار گیرد، اختلاف فشار پایین و بالای جعبه برحسب کیلوپاسکال چقدر خواهد شد؟

□ الف) 4.9 □ ب) 11 □ ج) 12.9 □ د) 14.7 □ ه) هیچکدام.

۲ ـ ۹ ـ ۲. جعبه‌ای که مشخصات آن در تمرین قبل گفته شد به‌موازات یکی از وجوه خود تحت شتاب یکنواخت افقی $4.91\ m/s^2$ قرار می‌گیرد. شیب سطح مشترک آب و روغن چقدر خواهد شد؟

□ الف) 0 □ ب) $-\frac{1}{4}$ □ ج) $-\frac{1}{2}$ □ د) -1 □ ه) هیچکدام.

۳ ـ ۹ ـ ۲. اگر حداقل فشار نسبی در جعبهٔ تمرین قبل صفر باشد، حداکثر فشار توان برحسب متر ستون آب چقدر است؟

□ الف) 0.94 □ ب) 1.125 □ ج) 1.31 □ د) 1.5 □ ه) هیچکدام.

۴ ـ ۹ ـ ۲. استوانه‌ای به‌طول 10 m محتوی مایع است. استوانه در امتداد محور خود تحت شتاب افقی $20\ g\ m/s^2$ قرار می‌گیرد. اختلاف فشار دو انتهای استوانه برحسب پاسکال چقدر است؟ وزن مخصوص مایع γ است.

□ الف) 20γ □ ب) 200γ □ ج) $20\ g\gamma$ □ د) $200\ \gamma/g$ □ ه) هیچکدام.

۵ ـ ۹ ـ ۲. در مایعی که حول یک محور قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت به‌صورت جسم صلب دوران می‌کند، فشار □ الف) متناسب با مجذور فاصله شعاعی کاهش می‌یابد □ ب) متناسب با فاصله شعاعی افزایش می‌یابد □ ج) در امتداد هر خط قائم متناسب با مجذور افزایش ارتفاع کاهش می‌یابد □ د) در امتداد هر خط قائم با افزایش ارتفاع تناسب معکوس دارد □ ه) با مجذور فاصله شعاعی تغییر می‌کند.

۶ ـ ۹ ـ ۲. مایعی حول یک محور قائم به‌صورت جسم صلب دوران می‌کند. فشار در نقطه‌ای از روی محور دوران با فشار در نقطه‌ای که 60 cm بالاتر از آن و 60 cm دورتر از محور دوران است برابر می‌باشد. سرعت دورانی برحسب رادیان بر ثانیه چقدر است؟

□ الف) 4.04 □ ب) 4.43 □ ج) 5.72 □ د) با اطلاعات داده شده قابل محاسبه نیست □ ه) هیچکدام.

۷ ـ ۹ ـ ۲. ظرف استوانه‌ای که انتهای فوقانی آن باز است با مایع به‌چگالی 1.2 پر شده و حول محور قائم خود دوران می‌کند، به‌طوری‌که نصف مایع از ظرف سرریز می‌کند. فشار در کف ظرف □ الف) صفر است □ ب) یک‌چهارم مقداری است که وقتی استوانه پر بوده است داشته است □ ج) به‌علت کافی نبودن اطلاعات قابل تعیین نیست □ د) نسبت به‌حالتی که مایع آب باشد، بیشتر است □ ه) هیچکدام.

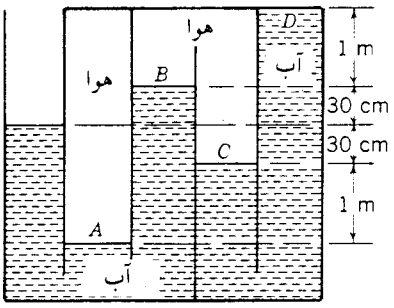
۸ ـ ۹ ـ ۲. گرداب اجباری □ الف) درخلاف جهت گرداب آزاد دوران می‌کند □ ب) همیشه همراه با گرداب آزاد ایجاد می‌شود □ ج) سرعتی دارد که با شعاع کاهش می‌یابد □ د) هنگامی ایجاد می‌شود که سیال مانند جسم جامد دوران کند □ ه) سرعتی دارد که با شعاع به‌طور معکوس کاهش می‌یابد.

مسائل

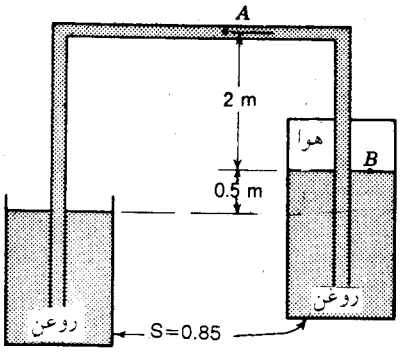
۱ ـ ۲. برای حالت سه‌بعدی ثابت کنید که دریک نقطه در سیال ساکن، فشار در تمام جهات یکسان است.

۲ ـ ۲. مخزن شکل ۳۹ ـ ۲ محتوی آب و هواست. فشار در نقاط A، B، C و D را برحسب پاسکال به‌دست آورید.

۳ ـ ۲. در شکل ۴۰ ـ ۲ لوله با روغن پر شده است. فشار در A و B را برحسب متر ستون آب به‌دست آورید.



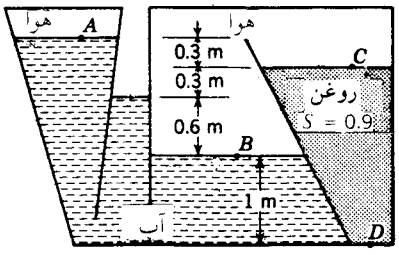
شکل ۳۹ ـ ۲



شکل ۴۰ ـ ۲

۴ ـ ۲. برای شکل ۴۱ ـ ۲ فشار در نقاط A، B، C و D را برحسب پاسکال به‌دست آورید.

۵ ـ ۲. معادلاتی بنویسید که فشار و جرم مخصوص را در هر ارتفاع از گاز ساکن به‌دست دهد. شرایط در یک ارتفاع



شکل ۴۱ ـ ۲

خاص معلوم است. گرادیان دما β است.

۶ ـ ۲. از نتایج مسألهٔ قبل به‌ازای $\beta \to 0$ حد بگیرید و معادلات مربوط به‌حالت ایزوترم (دما ثابت) را به‌دست آورید.

۷ ـ ۲. از نتایج مسألهٔ ۵ ـ ۲ استفاده کنید و فشار و جرم مخصوص در ارتفاع 3000 متری را به‌دست آورید. در ارتفاع 300 متری فشار مطلق هوا 100 kPa و دمای آن 15°C است. $\beta = -0.005°C/m$.

۸ ـ ۲. برای هوای ایزوترم در دمای 0°C، فشار و دانسیته در ارتفاع 4000 متری را به‌دست آورید. فشار مطلق در سطح دریا 0.1 MPa است.

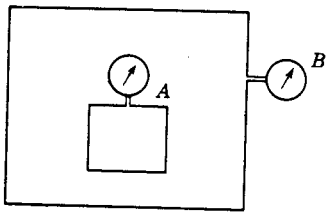
۹ ـ ۲. در هوای ایزوترم با دمای 25°C چند متر به‌طور قائم باید بالا رویم تا دانسیته، 10 درصد کاهش یابد؟

۱۰ ـ ۲. فشار 50 kPa را برحسب الف) میلی‌متر ستون جیوه ب) متر ستون آب ج) متر ستون تترابرومید استیلن ($S=2.94$) بیان کنید.

۱۱ ـ ۲. یک فشارسنج بوردون خلأ نسبی 15 kPa را نشان می‌دهد. بارومتر جیوه‌ای عدد 750 mm را نشان می‌دهد. فشار را به‌دو روش دیگر بیان کنید.

۱۲ ـ ۲. 300 kPa را برحسب متر ستون آب بیان کنید. بارومتر جیوه‌ای عدد 750 mm را نشان می‌دهد.

۱۳ ـ ۲. در شکل ۴۲ ـ ۲ فشارسنج A عدد 80 kPa و فشارسنج B عدد 120 kPa را نشان می‌دهد. بارومتر خشک عدد 750 mmHg را نشان می‌دهد. فشار مطلق A برحسب سانتی‌متر ستون جیوه چقدر است؟



شکل ۴۲ ـ ۲

۱۴ ـ ۲. الف) چه ارتفاعی از ستون آب، ب) چه ارتفاعی از ستون نفت سفید ($S=0.83$) و ج) چه ارتفاعی از ستون تترابرومیداستیلن ($S=2.94$)، با 300 میلی‌متر جیوه معادل است؟

۱۵ ـ ۲. در شکل ۶ ـ ۲ a اگر $h=50$ cm باشد، فشار در A برحسب پاسکال چقدر است؟ چگالی مایع 1.90 است.

۱۶ ـ ۲. در شکل ۶ ـ ۲ b اگر $p_A=-30$ kPa باشد، h چقدر است؟ مایع نفت سفید ($S=0.83$) است.

۱۷ ـ ۲. در شکل ۶ ـ ۲ b مایع آب است و $h=15$ cm می‌باشد. فشار مطلق p_A را برحسب متر ستون آب به‌دست آورید. بارومتر عدد 750 mmHg را نشان می‌دهد.

۱۸ ـ ۲. در شکل ۶ ـ ۲ c داریم: $S_1=0.86$، $S_2=1.0$، $h_2=90$ mm و $h_1=150$ mm. p_A را برحسب میلی‌متر جیوه به‌دست آورید. اگر بارومتر، عدد 720 mmHg را نشان دهد، فشار مطلق p_A برحسب متر ستون آب چقدر است؟

۱۹ ـ ۲. در شکل ۶ ـ ۲ c سیال داخل مخزن A، گاز است. سیال مانومتری آب است. $h_1=75$ mm. فشار در A را برحسب میلی‌متر ستون جیوه به‌دست آورید.

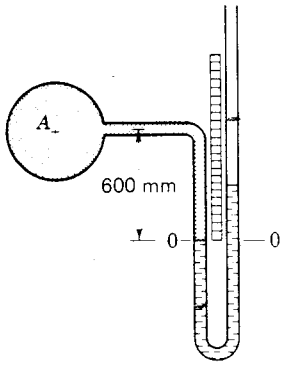
۲۰ ـ ۲. در شکل ۲ ـ ۷ a، $S_1=1.0$، $S_2=0.95$، $S_3=1.0$، $h_1=h_2=280$ mm و $h_3=1$ m است. p_A-p_B را برحسب میلی‌متر ستون آب به‌دست آورید.

۲۱ ـ ۲. در مسألهٔ قبل اگر اختلاف فشار $p_A-p_B=-350$ mmHg باشد، اختلاف ارتفاع سطح مایع در دو ستون مانومتر یعنی h_2، چقدر خواهد بود؟

۲۲ ـ ۲. در شکل ۲ ـ ۷ b داریم: $S_1=S_3=0.83$، $S_2=13.6$، $h_1=150$ mm، $h_2=70$ mm و $h_3=120$ mm. الف) اگر $p_B=70$ kPa gage باشد، p_A چقدر است؟ ب) اگر $p_A=140$ kPa abs باشد و مانومتر 720 mmHg را نشان دهد p_B برحسب متر ستون آب چقدر است؟

۲۳ ـ ۲. در مسألهٔ قبل اگر $p_A=p_B$ باشد، اختلاف ارتفاع h_2 چقدر است؟

۲۴ ـ ۲. در شکل ۴۳ ـ ۲ مخزن A محتوی آب است. چگالی سیال مانومتری 2.94 است. وقتی $p_A=90$ mmH_2O است، سطح مایع در شاخه سمت چپ مانومتر در مقابل نشانهٔ صفر خط‌کش قرار می‌گیرد. اگر p_A به 8 kPa



شکل ۴۳ ـ ۲

برسد. سطح مایع در شاخه سمت راست چه عددی را بر روی خط‌کش نشان خواهد داد؟

۲۵ ـ ۲. ارتفاع ساختمان امپایراستیت 381 m است. فشار یک ستون آب به‌این ارتفاع برحسب پاسکال چقدر است؟

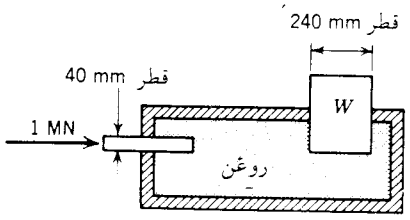
۲۶ ـ ۲. دانسیته یک مایع با رابطهٔ $\rho=450+ah$ بیان شده است که در آن $a=12$ kg/m^4 است و h فاصله از سطح آزاد برحسب متر می‌باشد. فشار در عمق 10 متری از سطح آزاد این مایع چقدر است؟

۲۷ ـ ۲. در یک ساختمان به‌ارتفاع 250 m لوله قائم گاز محتوی گازی با دانسیتهٔ $\rho=0.72$ kg/m^3 است. فشار نسبی در پایین لوله معادل 8 سانتی‌متر آب است. فشار گاز در بالای ساختمان برحسب سانتی‌متر ستون آب چقدر است؟ الف) گاز را تراکم‌ناپذیر فرض کنید ب) دمای گاز را ثابت بگیرید. فشار بارومتریک 10.34 متر ستون آب و دما 20°C است.

۲۸ ـ ۲. در شکل ۸ ـ ۲ اختلاف فشار گازها 9 mmH_2O است. $\gamma_2=9.8$ kN/m^3، $\gamma_3=10.5$ kN/m^3 و $a/A=0.01$ است. R را تعیین کنید.

۲۹ ـ ۲. مانومتر مایل شکل ۹ ـ ۲ وقتی فشار A و B یکسان است، صفر را نشان می‌دهد. قطر مخزن 5 cm و قطر لوله مایل 6 mm است. چگالی مایع مانومتری 0.832 و $\theta=30°$ است. اختلاف فشار p_A-p_B را (برحسب پاسکال) به‌صورت تابعی از R (برحسب سانتی‌متر) بیان کنید.

۳۰ ـ ۲. در شکل ۴۴ ـ ۲ وزن W که به‌واسطهٔ نیروی وارده به‌پیستون نگهداری می‌شود، چقدر است؟

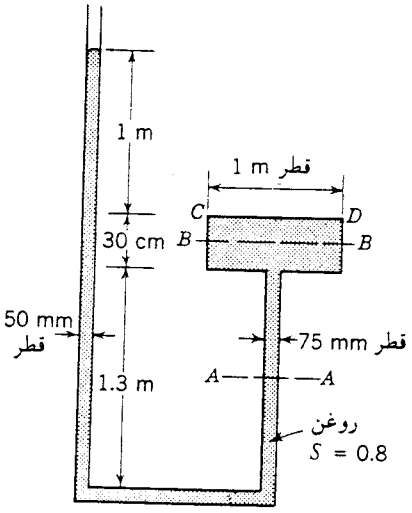


شکل ۴۴ ـ ۲

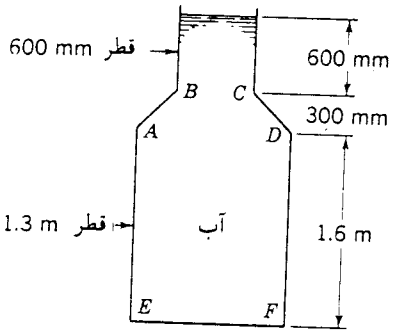
۳۱ ـ ۲. در شکل ۴۵ ـ ۲ از وزن مخزن صرفنظر کنید الف) نیرویی که به‌سطح دایره‌ای CP به‌طرف بالا وارد می‌شود چقدر است؟ ب) در مقطع $A-A$ نیروی فشاری وارد به‌دیوارهٔ لوله چقدر است؟

۳۲ ـ ۲. در شکل ۴۵ ـ ۲ اگر سطح روغن داخلِ لوله به‌اندازهٔ 3 m پایین‌تر بیاید نیروی وارده از روغن به‌سطح CD چقدر خواهد شد؟

۳۳ ـ ۲. مقطع ظرفی که در شکل ۴۶ ـ ۲ نشان داده شده، دایره است. مقدار نیروی قائم رو به‌بالا وارده به‌سطح مخروط ناقص $ABCD$ را تعیین کنید. مقدار نیروی روبه‌پایین وارده به‌صفحه EF را تعیین کنید. آیا این نیرو با وزن سیال برابر است؟ چرا؟

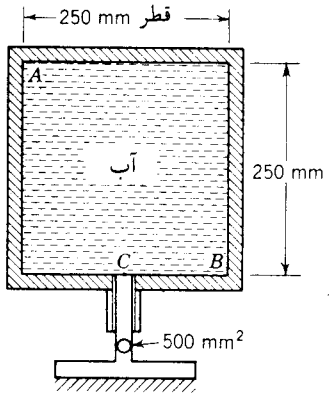


شکل ۴۵ ـ ۲ مسائل ۳۱ ـ ۲ و ۳۲ ـ ۲



شکل ۴۶ ـ ۲

۳۴ ـ ۲. در شکل ۴۷ ـ ۲ وزن ظرف استوانه هنگامی‌که خالی است 400 N است. ظرف با آب پر می‌شود و به‌طور وارونه روی پیستون قرار می‌گیرد. الف) نیرویی که به‌سطح فوقانی ظرف وارد می‌شود چقدر است؟ ب) اگر

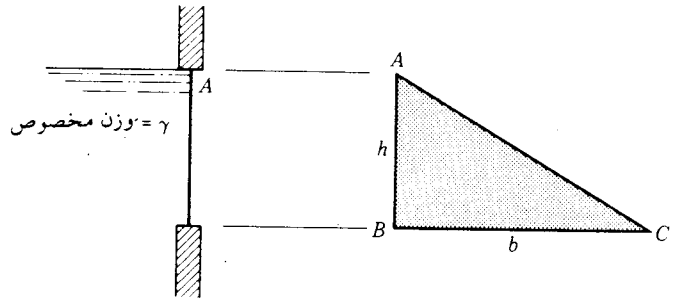


شکل ۲ ـ ۴۷

وزنه‌ای به‌وزن 600 N روی ظرف قرار دهیم، نیرویی که به‌سطح فوقانی ظرف وارد می‌شود، چقدر افزایش می‌یابد؟

۳۵ ـ ۲. بشکه‌ای به‌قطر 600 mm با آب پر شده است. لولهٔ قائمی به‌قطر 12 mm به‌بالای بشکه متصل می‌شود. چند کیلوگرم آب باید به‌داخل لوله افزود تا نیرویی معادل 4 kN به‌سطح فوقانی بشکه وارد شود. از تراکم‌پذیری آب صرفنظر کنید.

۳۶ ـ ۲. در شکل ۴۸ ـ ۲ مثلث قائم‌الزاویه ABC به‌طور قائم قرار دارد، به‌طوری‌که رأس آن بر سطح آزاد مایع منطبق است. نیروی وارد به‌یک طرف سطح را الف) با انتگرال‌گیری و ب) با استفاده از فرمول، تعیین کنید.



شکل ۴۸ ـ ۲ مسائل ۳۶ ـ ۲ و ۳۸ ـ ۲ و ۴۹ ـ ۲ و ۵۰ ـ ۲

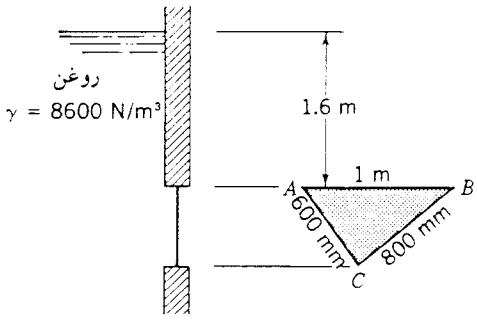
۳۷ ـ ۲. سطح مثلثی ABC در شکل ۴۹ ـ ۲ قائم‌الزاویه است. نیروی وارد به‌یک طرف سطح را الف) با انتگرال‌گیری و ب) با استفاده از فرمول، تعیین کنید.

۳۸ ـ ۲. برای سطح ABC در شکل ۴۸ ـ ۲ گشتاور نیروی وارد به‌یک طرف سطح حول AB چقدر است؟ $\gamma=9000\ \text{N/m}^3$.

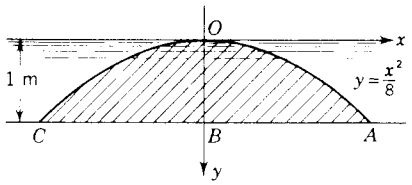
۳۹ ـ ۲. برای سطح قائم ABC در شکل ۴۹ ـ ۲ گشتاور نیروی وارد به‌یک طرف سطح حول AB چقدر است؟

۴۰ ـ ۲. در شکل ۴۹ ـ ۲ سطح ABC را با یک خط افقی به‌دو قسمت تقسیم می‌کنیم. به‌طوری‌که مقدار نیروی فشاری وارده از آب به‌آنها برابر باشد. فاصلهٔ قائم این خط با AB چقدر است؟

۴۱ ـ ۲. در شکل ۵۰ ـ ۲ نیروی وارد به‌یک طرف سطح قائم $OABCO$ چقدر است؟ $\gamma=9\ \text{kN/m}^3$.



شکل ۴۹ ـ ۲ مسائل ۳۷ ـ ۲ و ۳۹ ـ ۲ و ۴۰ ـ ۲ و ۴۷ ـ ۲ و ۴۸ ـ ۲

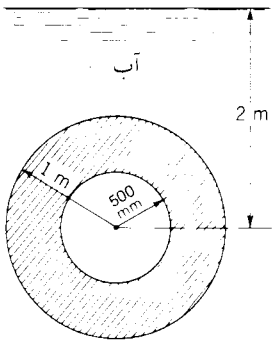


شکل ۵۰ ـ ۲ مسائل ۴۱ ـ ۲ و ۵۶ ـ ۲ و ۸۳ ـ ۲

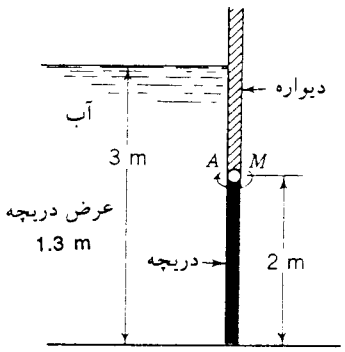
۴۲ ـ ۲. در شکل ۵۱ ـ ۲ نیروی وارده از آب به‌یک طرف حلقهٔ قائم چقدر است؟

۴۳ ـ ۲. در شکل ۵۲ ـ ۲ گشتاور لازم برای نگهداری دریچه حول A چقدر است؟

۴۴ ـ ۲. در شکل ۵۲ ـ ۲ فرض کنید در سمت راست دریچه نیز تا نقطهٔ A آب وجود داشته باشد. برآیند نیروهای وارده از آب به‌دو طرف دریچه را به‌دست آورید. خط اثر برآیند را تعیین کنید.



شکل ۵۱ ـ ۲ مسائل ۴۲ ـ ۲ و ۵۱ ـ ۲



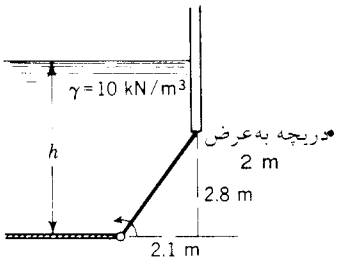
شکل ۵۲ ـ ۲

۴۵ ـ ۲. در شکل ۵۳ ـ ۲ لولای دریچه تحت گشتاور 150 kN.m از کار می‌افتد. عمق مایع، h، حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟

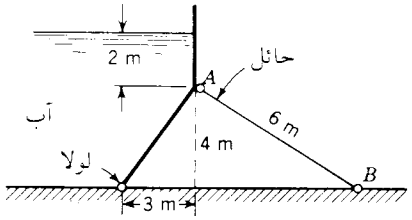
۴۶ ـ ۲. در شکل ۵۴ ـ ۲ دریچهٔ OA در هر 6 m دارای یک حائل ABاست. نیروی فشاری در حائل چقدر است؟ از وزن دریچه صرفنظر کنید.

۴۷ ـ ۲. در شکل ۴۹ ـ ۲ فاصلهٔ مرکز فشار سطح مثلثی ABCاز سطح آزاد مایع را به‌روش انتگرال‌گیری و نیز با استفاده از فرمول تعیین کنید.

۴۸ ـ ۲. در شکل ۴۹ ـ ۲ موقعیت افقی مرکز فشار سطح مثلثی ABCرا به‌روش انتگرال‌گیری تعیین کنید.



شکل ۵۳ ـ ۲ مسائل ۴۵ ـ ۲ و ۵۵ ـ ۲



شکل ۵۴ ـ ۲

۴۹ ـ ۲. در شکل ۴۸ ـ ۲ مقدار و امتداد نیروی برآیند وارد به‌مثلث ABCرا با استفاده از منشور فشار تعیین کنید.

۵۰ ـ ۲. در شکل ۴۸ ـ ۲ محل مرکز فشار را به‌روش انتگرال‌گیری تعیین کنید.

۵۱ ـ ۲. در شکل ۵۱ ـ ۲ محل مرکز فشار سطح حلقوی را تعیین کنید.

۵۲ ـ ۲. در شکل ۵۲ ـ ۲ محل مرکز فشار دریچه را تعیین کنید.

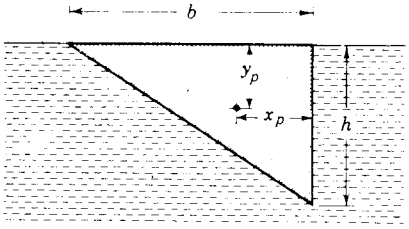
۵۳ ـ ۲. یک سطح مربعی به‌ابعاد 2 m در 2 m به‌طور قائم در آب غوطه‌ور شده، لبهٔ فوقانی آن 1 m در زیر سطح آب است. محل یک خط افقی روی سطح مربع را تعیین کنید به‌طوری‌که الف) نیروی وارد به‌بخش بالایی خط با نیروی وارد به‌بخش پایینی آن برابر باشد. ب) گشتاور نیروی وارد به‌بخش بالایی حول این خط با گشتاور نیروی وارد به‌بخش پایینی آن برابر باشد.

۵۴ ـ ۲. سطحی به‌شکل مثلث متساوی‌الساقین در آب قرار دارد. یکی از ساقهای مثلث بر سطح آب منطبق است. زاویهٔ سطح با امتداد افقی 45° است. محل مرکز فشار را برحسب طول ساق مثلث یعنی b، تعیین کنید.

۵۵ ـ ۲. در شکل ۵۳ ـ ۲ رابطه‌ای برای y_pبرحسب hبه‌دست آورید.

۵۶ ـ ۲. در شکل ۵۰ ـ ۲ محل مرکز فشار سطح قائم $OABCO$ را تعیین کنید.

۵۷ ـ ۲. در شکل ۵۵ ـ ۲ محل مرکز فشار سطح قائم را تعیین کنید.

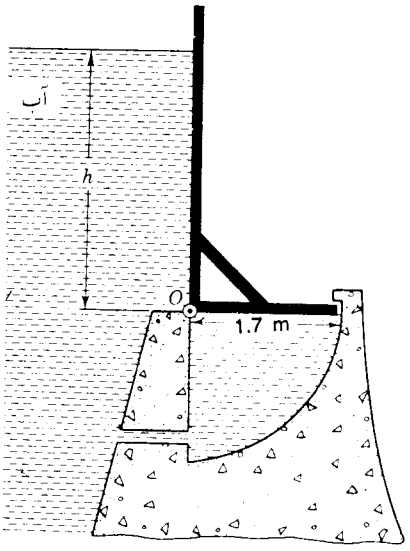


شکل ۵۵ ـ ۲

۵۸ ـ ۲. نشان دهید که اگر سطح مستوی کاملاً غوطه‌ور حول محوری که از مرکز سطح آن می‌گذرد دوران نماید، مقدار نیروی وارد به‌آن تغییر نمی‌کند.

۵۹ ـ ۲. در شکل ۵۶ ـ ۲ دریچهٔ L شکل در نقطهٔ O لولا شده است. جرم دریچه عمود بر صفحهٔ کاغذ 450 kg/m است. فاصلهٔ مرکز ثقل دریچه با صفحهٔ سمت چپ 45 cm و با صفحهٔ کف 60 cm است. سطح آب پایین‌تر از لولا و دریچه خوابیده است. موقعیت سطح آب را طوری تعیین کنید که دریچه در آستانه دوران باشد.

۶۰ ـ ۲. در مسألهٔ قبل برای اینکه دریچه به‌حالت قائم (مانند شکل) درآید، حداقل h چقدر است؟

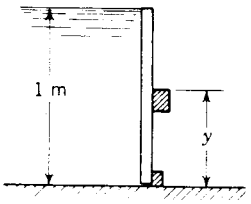


شکل ۵۶ ـ ۲ مسائل ۵۹ ـ ۲ تا ۶۱ ـ ۲ و ۱۳۹ ـ ۲

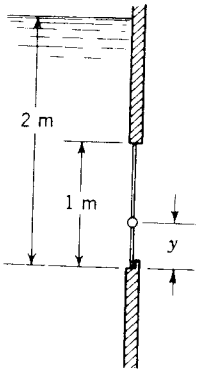
۶۱ ـ ۲. در مسألهٔ ۵۹ ـ ۲ به‌ازای چه مقداری از h، نیروی وارد به مانع حداکثر است. مقدار نیرو را نیز تعیین کنید.

۶۲ ـ ۲. در شکل ۵۷ ـ ۲، y را طوری تعیین کنید که وقتی سطح آب به‌بالای دیواره‌ها می‌رسد، دیواره‌ها پغلتند.

۶۳ ـ ۲. در شکل ۵۸ ـ ۲ محل لولای دریچه مستطیلی را طوری تعیین کنید که وقتی محل سطح آب مطابق شکل



شکل ۵۷ ـ ۲



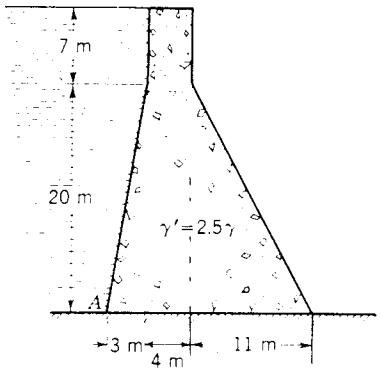
شکل ۵۸ ـ ۲

است، دریچه باز شود.

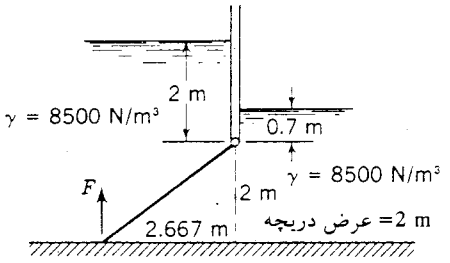
۶۴ ـ ۲. با استفاده از مفهوم منشور فشار نشان دهید که با افزایش عمق غوطه‌وری یک سطح، مرکز فشار آن به‌سمت مرکز سطح میل می‌کند.

۶۵ ـ ۲. الف) مقدار و امتداد نیروهای وارد به‌دو طرف دریچهٔ شکل ۵۹ ـ ۲ را به‌دست آورید. ب) برآیند نیروهای وارد از مایع به‌دو طرف دریچه را تعیین کنید.

۶۶ ـ ۲. در شکل ۶۰ ـ ۲ تنش روی قاعده سد به‌طور خطی تغییر می‌کند. الف) نیروی برآیند در چه نقطه‌ای قاعده را قطع می‌کند. ب) حداکثر و حداقل تنشهای فشاری در قاعده را محاسبه کنید. از نیروی بالابرنده هیدرواستاتیک صرفنظر کنید.



شکل ۶۰ ـ ۲ مسائل ۶۶ ـ ۲ و ۶۷ ـ ۲

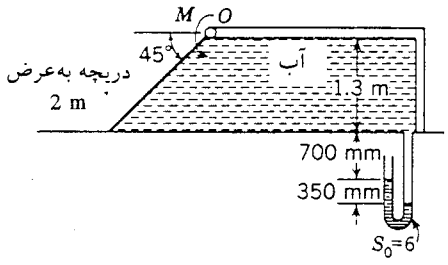


شکل ۵۹ ـ ۲

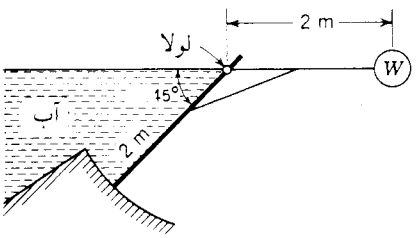
۶۷ ـ ۲. مسألهٔ قبل را مجدداً حل کنید. این‌بار فرض کنید نیروی بالابرنده هیدرواستاتیک از 20 m در A تا صفر در پاشنه سد به‌طور خطی تغییر کند.

۶۸ ـ ۲. در شکل ۶۱ ـ ۲ گشتاور حول O برای بستهٔ نگه داشتن دریچه چقدر است؟

۶۹ ـ ۲. دریچه‌ای که در شکل ۶۲ ـ ۲ نشان داده شده است، در حال تعادل است. وزن وزنهٔ تعادل بر واحد عرض دریچه چقدر است؟ از وزن دریچه صرفنظر کنید. آیا تعادل دریچه پایدار است؟



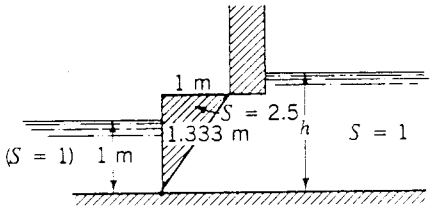
شکل ۶۱ ـ ۲



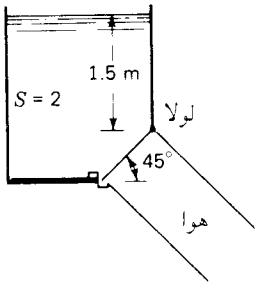
شکل ۶۲ ـ ۲

۷۰ ـ ۲. در شکل ۶۳ ـ ۲ در سمت راست دریچه آب تا چه ارتفاعی، h، باید بالا رود تا دریچه باز شود. عرض دریچه 2 m است و چگالی آن 2.5 می‌باشد. از روش منشور فشار استفاده کنید.

۷۱ ـ ۲. در شکل ۶۴ ـ ۲ برای اینکه دریچه باز نشود باید فشار هوا چقدر باشد؟ دریچه صفحه‌ای است دایره‌ای به‌قطر 700 mm و وزن آن 1800 N می‌باشد.



شکل ۶۳ ـ ۲



شکل ۶۴ ـ ۲

۷۲ ـ ۲. لوله‌ای به‌قطر 5 m مایع را تحت فشار 1.4 MPa منتقل می‌کند. ضخامت جدارهٔ لوله باید چقدر باشد؟ حداکثر تنش مجاز 70 MPa است.

۷۳ ـ ۲. برای انتقال سیال می‌توان به‌جای یک لوله از چهار لوله با قطر نصف استفاده کرد، تا سطح مقطع جریان در دو حالت برابر باشد. در کدامیک از دو حالت فولاد مصرفی کمتر است؟ تنش حداکثر مجاز در جدارهٔ لوله در دو حالت یکسان است.

۷۴ ـ ۲. یک کره جدار نازک به‌قطر 3 m محتوی گاز تحت فشار 5 MPa است. حداقل ضخامت جدارهٔ کره را تعیین کنید. تنش مجاز 60 MPa است.

۷۵ ـ ۲. یک مخزن استوانه‌ای به‌ارتفاع 2.3 m و قطر 1.3 m به‌دو حلقه مجهز شده است که به‌فاصلهٔ 30 cm از دو قاعدهٔ مخزن قرار دارند. مخزن از آب پر می‌شود. تنش کششی در هر حلقه چقدر است؟

۷۶ ـ ۲. فشار داخلی یک مخزن 30 MPa است. سوراخی به‌قطر 10 mm در بالای مخزن وجود دارد. یک کرهٔ فولادی به‌قطر 20 mm این سوراخ را پوشانده است. برای بلند کردن کره از روی سوراخ به‌چه نیرویی احتیاج داریم؟

۷۷ ـ ۲. قایقی در شکل ۶۵ ـ ۲ نشان داده شده است. اگر مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به‌سطح منحنی با نیروی وارد به‌تصویر آن روی سطح قائم برابر نمی‌بود، در مورد نیروی جلوبرنده وارده به‌قایق چه نتیجه‌ای می‌توانستیم بگیریم؟

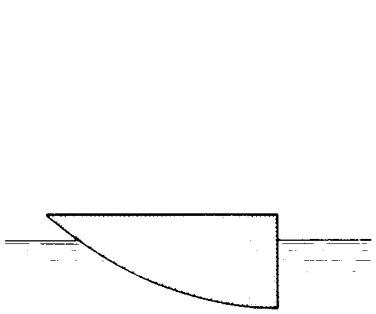
۷۸ ـ ۲. در شکل ۶۶ ـ ۲ یک دریچه قطاعی نشان داده شده است.

الف) مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به‌دریچه و خط اثر آن را تعیین کنید.

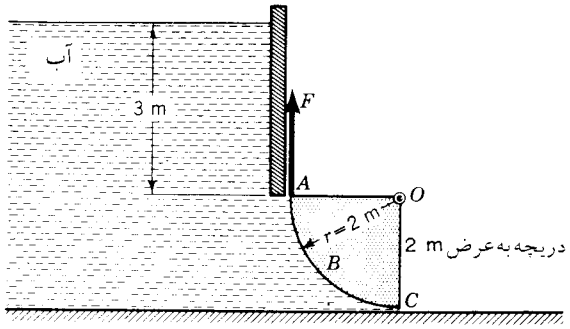
ب) مؤلفهٔ قائم نیرو و خط اثر آن را تعیین کنید.

ج) نیروی لازم برای باز کردن دریچه، F، را به‌دست آورید. از وزن دریچه صرفنظر کنید.

د) گشتاورنیروها حول محوری که از O می‌گذرد، چقدر است؟



شکل ۶۵ ـ ۲



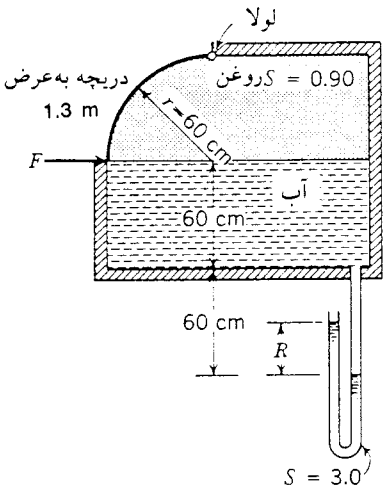
شکل ۶۶ ـ ۲

۷۹ ـ ۲. در شکل ۶۷ ـ ۲ نیروی لازم برای بسته نگه داشتن دریچه، F، را محاسبه کنید. $R=60$ cm.

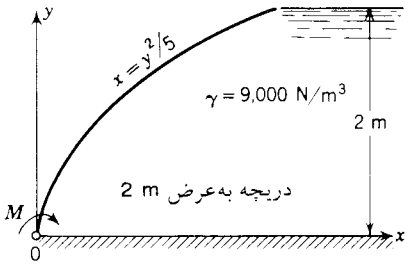
۸۰ ـ ۲. در شکل ۶۷ ـ ۲ نیروی لازم برای بازکردن یا بسته نگه داشتن دریچه، F چقدر است؟ $R=45$ cm.

۸۱ ـ ۲. در شکل ۶۷ ـ ۲ مقدار R را طوری تعیین کنید که نیروی لازم برای بازکردن یا بسته نگه داشتن دریچه، F، صفر شود.

۸۲ ـ ۲. در شکل ۶۸ ـ ۲ مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به دریچه و خط اثر آن را تعیین کنید.



شکل ۶۷ ـ ۲ مسائل ۷۹ ـ ۲ تا ۸۱ ـ ۲



شکل ۶۸ ـ ۲ مسائل ۸۲ ـ ۲ و ۸۶ ـ ۲

۸۳ ـ ۲. در شکل ۵۰ ـ ۲، OA معرف یک سطح منحنی است. عرض سطح عمود بر صفحهٔ کاغذ 3 m است. نیروی وارد به‌سطح را به‌دست آورید. $\gamma=9$ kN/m^3

۸۴ ـ ۲. در شکل ۶۹ ـ ۲ یک استوانه نشان داده شده است. توزیع فشار ناشی از جریان در پیرامون استوانه، روی قطعه ABC با رابطه $p=2\rho(1-4\sin^2\theta)+500$ داده شده است، که در آن p برحسب پاسکال است. نیروی وارد

به ABC را محاسبه کنید.

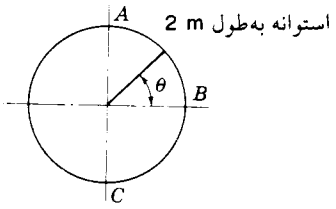
۸۵ ـ ۲. تغییرات فشار روی استوانهٔ شکل ۶۹ ـ ۲ با رابطهٔ $p=2\rho[1-4(1+\sin\theta)^2]+500$ داده شده است. نیروی وارد به‌استوانه چقدر است؟

۸۶ ـ ۲. در شکل ۶۸ ـ ۲ گشتاور M برای نگهداری دریچه چقدر است؟ از وزن دریچه صرفنظر کنید.

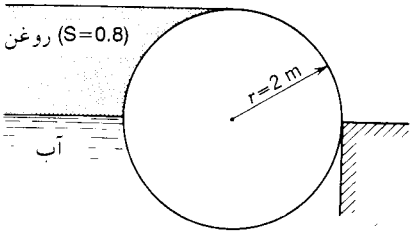
۸۷ ـ ۲. مقدار و امتداد نیروی برآیند وارد به‌ربع اول سطح یک کره به‌شعاع 600 mm که مرکز آن در مبدأ است را به‌دست آورید. مرکز کره 1.2 m زیر سطح آب است.

۸۸ ـ ۲. حجم یک بیضیگون به‌معادلهٔ $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2=1$ برابر $4\pi abc/3$ است و سطح یک بیضی به‌معادلهٔ $x^2/a^2 + z^2/c^2=1$ برابر πac است. نیروی قائم وارد به‌سطحی که در مثال ۱۰ ـ ۲ ذکر شده را تعیین کنید.

۸۹ ـ ۲. یک تنهٔ درخت مطابق شکل ۷۰ ـ ۲ جلوی آب و روغن را بند آورد، ست. شکل کنده را استوانه فرض کرده، برای واحد طول آن مطلوب است: الف) نیرویی که استوانه را به‌دیواره می‌فشارد، ب) وزن استوانه، ج) چگالی استوانه.



شکل ۶۹ ـ ۲

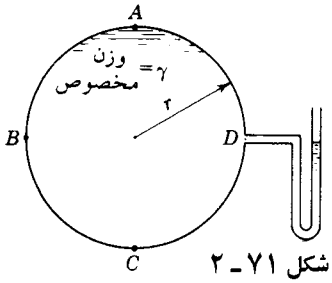


شکل ۷۰ ـ ۲

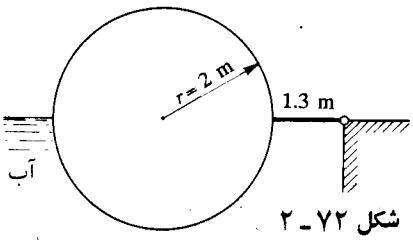
۹۰ ـ ۲. در شکل ۷۱ ـ ۲ استوانه از مایع پر شده است. برای واحد طول استوانه؛ الف) مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به AB را به‌دست آورید. خط اثر این مؤلفه را تعیین کنید. ب) مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به AB و خط اثر آن را تعیین کنید.

۹۱ ـ ۲. دریچه شکل ۷۲ ـ ۲ از یک استوانه توخالی و یک صفحه تشکیل شده است. صفحه به‌دیواره لولا شده است. موقعیت دریچه با پمپاژ آب به‌داخل یا خارج استوانه کنترل می‌شود. در حالتی‌که استوانه خالی است، مرکز ثقل کل دریچه در روی محور تقارن و به‌فاصلهٔ 1.3 m از لولا قرار دارد. در این حالت دریچه به‌صورتی که در شکل نشان داده شده، متعادل است. هنگامی‌که سطح آب 1 m بالاتر رود، چند متر مکعب آب باید به‌داخل استوانه پمپ شود تا دریچه در موقعیت خود باقی بماند. عرض دریچه را 1 m بگیرید.

۹۲ ـ ۲. وزن یک هیدرومتر 0.035 N و قطر شاخه آن 6 mm است. فاصلهٔ بین دو نشانهٔ 1.0 و 1.1 چقدر است.



شکل ۷۱ ـ ۲



شکل ۷۲ ـ ۲

۹۳ ـ ۲. یک هیدرومتر طراحی کنید که چگالی را محدودهٔ 0.8 تا 1.1 اندازه‌گیری کند. طول مقیاس هیدرومتر را 75 mm بگیرید.

۹۴ ـ ۲. تغییرات دانسیته یک مایع با عمق با رابطهٔ $\rho=1000+0.03y$ kg/m^3 داده شده است. کره‌ای به‌قطر 250 mm و چگالی 1.4 در این مایع غوطه‌ور می‌شود. در چه عمقی کره به‌تعادل می‌رسد؟

۹۵ ـ ۲. مسألهٔ قبل را برای یک استوانهٔ افقی به‌قطر 250 mm و چگالی 1.4 حل کنید.

۹۶ ـ ۲. طول ضلع یک مکعب 60 cm است. چگالی نیمه‌بالایی مکعب 1.4 و چگالی نیمه‌پایینی آن 0.6 است. مکعب در مایعی به‌چگالی 0.9 قرار می‌گیرد. در زیر این مایع، مایع دیگری به‌چگالی 1.2 وجود دارد. چه ارتفاعی از مکعب، بالاتر از سطح مشترک دو مایع خواهد بود؟

۹۷ ـ ۲. وزن یک جسم در آب 3 N و در روغن ($S=0.83$) 4 N است. جرم مخصوص، حجم مخصوص و حجم جسم را تعیین کنید.

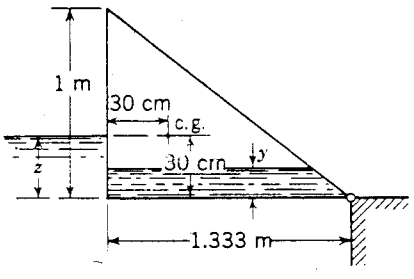
۹۸ ـ ۲. دو مکعب با حجم یکسان 1 m^3، یکی با چگالی 0.8 و دیگری با چگالی 1.1 با سیم کوتاهی به‌یکدیگر متصل شده، در آب قرار داده شده‌اند. چقدر از مکعب سبکتر در بالای سطح آب قرار می‌گیرد؟ کشش در سیم چقدر است؟

۹۹ ـ ۲. منشور توخالی مثلث‌القاعده‌ای که در شکل ۷۳ ـ ۲ نشان داده شده است، به‌ازای $z=30$ cm و $y=0$ مطابق شکل در تعادل است. وزن واحد طول منشور و z را برحسب y به‌دست آورید. هر دو مایع آب است. مقدار y را به‌ازای $z=45$ cm حساب کنید.

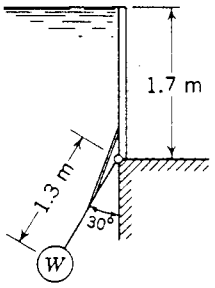
۱۰۰ ـ ۲. حجم یک تیر چوبی 0.1 m^3 و چگالی آن 0.65 است. چند کیلوگرم بتون باید به‌تیر متصل کرد تا هر دو غوطه‌ور شوند. وزن مخصوص بتون 25 kN/m^3 است.

۱۰۱ ـ ۲. دریچه‌ای که در شکل ۷۴ ـ ۲ نشان داده شده، در حال تعادل است. جرم واحد عرض دریچه 225 kg/m است. از وزن میله و حائلی که وزنهٔ تعادل را نگه می‌دارند، صرفنظر کنید. الف) W را به‌دست آورید ب) آیا تعادل دریچه پایدار است؟ وزنه از بتون ساخته شده و چگالی آن 2.5 است.

۱۰۲ ـ ۲. یک استوانه چوبی به‌چگالی 0.5 و یک استوانه بتونی به‌چگالی 2.5 به‌یکدیگر متصل شده‌اند. قطر هر دو استوانه 600 mm است. طول استوانه بتونی 600 mm است. این مجموعه به‌طور قائم در آب شناور می‌شود. طول استوانه چوبی را طوری تعیین کنید تا تعادل مجموعه پایدار باشد.



شکل ۷۳ ـ ۲ مسائل ۹۹ ـ ۲ و ۱۴۰ ـ ۲



شکل ۷۴ ـ ۲

۱۰۳ ـ ۲. استوانه‌ای به‌طور قائم در آب شناور می‌شود. نسبت r_0/h چقدر باشد تا تعادل استوانه پایدار باشد. چگالی استوانه S_0 است.

۱۰۴ ـ ۲. یک تیر چوبی به‌طول 4 m به‌طور قائم در آب شناور می‌شود. سطح مقطع تیر، مربع و چگالی آن 0.75 است. آیا تعادل تیر پایدار است؟

۱۰۵ ـ ۲. برای چنبره‌ای که در شکل ۷۵ ـ ۲ نشان داده شده است، ارتفاع متاسانتریک را به‌دست آورید.

۱۰۶ ـ ۲. در شکل ۷۶ ـ ۲ دریچهٔ مسطحی نشان داده شده است که وزن واحد عرض آن 2000 N/m است. فاصلهٔ مرکز ثقل دریچه تا لولای O، برابر 2 m است.

الف) برای تعادل دریچه h را به‌صورت تابعی از θ به‌دست آورید.

ب) آیا تعادل دریچه به‌ازای تمام مقادیر θ پایدار است؟

۱۰۷ ـ ۲. قطر یک بالون کروی 15 m است. بالون با هیدروژن پر شده و کف آن باز است. بارومتر فشار محیط را برابر 710 mmHg نشان می‌دهد. دمای هوا 20°C است. مجموع وزن بالون و باری که می‌تواند آن را ساکن نگه دارد، چقدر است؟

۱۰۸ ـ ۲. مخزنی محتوی مایع تحت شتاب یکنواخت افقی قرار گرفته است. کاهش فشار داخل مایع در امتداد حرکت 20 kPa/m است. شتاب را به‌دست آورید. $S=0.88$.

۱۰۹ ـ ۲. ظرف محتوی مایع در امتداد افقی تحت شتاب یکنواخت قرار گرفته است. زاویه سطح آزاد مایع با افق 20° است. شتاب ظرف چقدر است؟

۱۱۰ ـ ۲. در شکل ۷۷ ـ ۲، $a_x=3.9\ \text{m/s}^2$ و $a_y=0$ است. سطح آزاد خیالی مایع را تعیین کنید. فشار در نقاط B، C، D و E را به‌دست آورید.

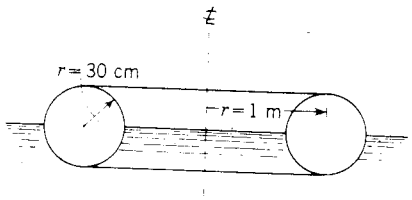
۱۱۱ ـ ۲. در شکل ۷۷ ـ ۲، $a_x=0$ و $a_y=2.45\ \text{m/s}^2$ است. فشار در نقاط B، C، D و E را تعیین کنید.

۱۱۲ ـ ۲. در شکل ۷۷ ـ ۲، $a_x=2.45\ \text{m/s}^2$ و $a_y=4.902\ \text{m/s}^2$ است. سطح آزاد خیالی و فشار در نقاط B، C، D و E را تعیین کنید.

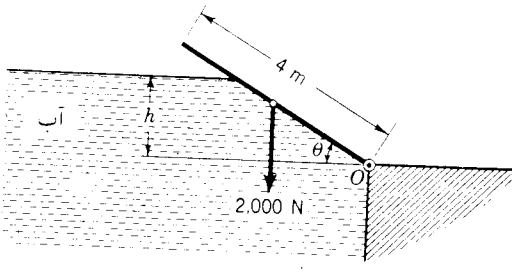
۱۱۳ ـ ۲. در شکل ۷۸ ـ ۲، $a_x=9.806\ \text{m/s}^2$ و $a_y=0$ است، فشار در نقاط A، B و C را تعیین کنید.

۱۱۴ ـ ۲. در شکل ۷۸ ـ ۲، $a_x=4.903\ \text{m/s}^2$ و $a_y=9.806\ \text{m/s}^2$ است. فشار در نقاط A، B و C را تعیین کنید.

۱۱۵ ـ ۲. مخزنی به‌شکل استوانه به‌قطر 1.3 m و عمق 2 m را با مایع پر کرده و تحت شتاب یکنواخت افقی قرار می‌دهند. یک‌سوم مایع از مخزن سرریز می‌کند. شتاب حرکت چقدر است؟



شکل ۷۵ ـ ۲



شکل ۷۶ ـ ۲

۱۱۶ ـ ۲. برای شکل ۷۷ ـ ۲، a_x و a_y را طوری تعیین کنید که فشار در نقاط A، B و C یکسان باشد.

۱۱۷ ـ ۲. در شکل ۷۹ ـ ۲، لوله با مایعی به‌چگالی 2.40 پر شده است. برای حالتی که لوله با شتاب $2.45\ m/s^2$ به طرف راست حرکت می‌کند، سطح آزاد خیالی مایع را رسم کنید و فشار در A را تعیین کنید. اگر خلأ نسبی در A برابر 56 kPa باشد، a_x چقدر است؟

۱۱۸ ـ ۲. جعبه مکعبی‌شکلی که طول هر ضلع آن 1 m است، تا نیمه از آب پر شده است. سطح بالایی جعبه باز است. جعبه روی یک سطح شیبدار قرار می‌گیرد که زاویهٔ آن با امتداد افقی 30° است. وزن جعبه خالی 550 N است. ضریب اصطکاک جعبه با سطح شیبدار 0.3 است. شتاب جعبه را تعیین کنید. زاویهٔ سطح آزاد آب با امتداد افقی را به‌دست آورید.

۱۱۹ ـ ۲. نشان دهید که در یک مایع که به‌صورت جسم صلب حرکت می‌کند، فشار در هر نقطه، در تمام جهات یکسان است.

۱۲۰ ـ ۲. یک جعبهٔ بسته محتوی دو مایع نامحلول است. ثابت کنید هنگامی‌که جعبه به‌طور یکنواخت در امتداد افقی شتاب می‌گیرد، سطح مشترک دو مایع با سطح فشار صفر موازی است.

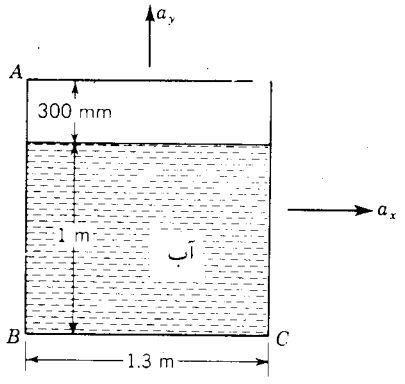
۱۲۱ ـ ۲. نشان دهید که وقتی مایع مانند جسم صلب حول محور قائم دوران می‌کند، هیچ تنش برشی در سیال ایجاد نمی‌شود.

۱۲۲ ـ ۲. مخزنی محتوی مایع حول محور قائم دوران می‌کند. چگالی مایع 1.3 است. فشار در نقطه‌ای به‌فاصلهٔ 0.6 m از محور با فشار در نقطهٔ دیگری به‌فاصلهٔ 1.2 m از محور که 0.6 m بالا قرار دارد، برابر است. سرعت دوران را به‌دست آورید.

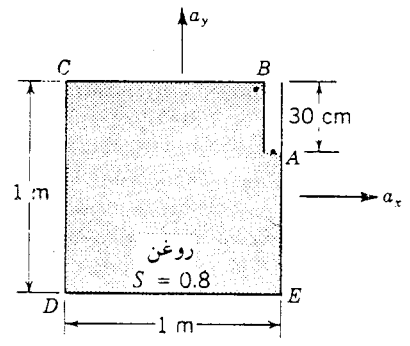
۱۲۳ ـ ۲. در شکل ۷۹ ـ ۲ لوله حول محور قائمی که در سمت راست A و به‌فاصلهٔ 15 cm از آن است دوران می‌کند، اگر فشار نسبی در A صفر باشد، سرعت دورانی چقدر است؟

۱۲۴ ـ ۲. در شکل ۷۹ ـ ۲ محل محور قائم دوران و سرعت دورانی لوله U شکل را طوری تعیین کنید که فشار مایع در نقطه وسط لوله و در A، هر دو صفر باشد.

۱۲۵ ـ ۲. سیال تراکم‌ناپذیر با دانسیته ρ با سرعت زاویه‌ای ω حول یک محور مایل دوران می‌کند. زاویهٔ محور با



شکل ۷۸ ـ ۲ مسائل ۱۱۳ ـ ۲ و ۱۱۴ ـ ۲



شکل ۷۷ ـ ۲ مسائل ۱۱۰ ـ ۲ تا ۱۱۲ ـ ۲ و ۱۱۶ ـ ۲

امتداد قائم 0 است. با دانستن فشار در یک نقطه از سیال، چگونه می‌توان فشار در سایر نقاط را به‌دست آورد؟

۱۲۶ ـ ۲. استوانه روباز به‌شعاع r_0 و ارتفاع h_0 با مایع پر شده است. استوانه با چه سرعتی حول محور قائم دوران کند تا نصف قاعدهٔ آن در معرض هوا قرار گیرد؟

۱۲۷ ـ ۲. مایعی مانند جسم صلب حول یک محور افقی دوران می‌کند. فشار در روی محور 70 kPa است. تغییرات فشار را در امتداد خط قائمی که از مرکز می‌گذرد، به‌دست آورید. دانسیته مایع ρ و سرعت دورانی ω است.

۱۲۸ ـ ۲. برای وضعیتی که در مسالهٔ قبل گفته شد، معادله‌ای برای سطوح فشار ثابت به‌دست آورید.

۱۲۹ ـ ۲. با انتگرال‌گیری ثابت کنید که حجم سهمیگون نصف حجم استوانه محاط بر آن است.

۱۳۰ ـ ۲. مخزنی محتوی دو مایع نامحلول حول یک محور قائم دوران می‌کند. ثابت کنید که شکل سطح مشترک دو مایع با شکل سطح فشار صفر یکسان است.

۱۳۱ ـ ۲. یک کرهٔ توخالی به‌شعاع r_0 با مایع پر شده و حول محور قائم خود با سرعت ω دوران می‌کند. موقعیت خط دایره‌ای حداکثر فشار را تعیین کنید.

۱۳۲ ـ ۲. گازی که از قانون $P\rho^{-n}=Const$ پیروی می‌کند، حول محور قائم به‌صورت جسم صلب دوران می‌کند. رابطه‌ای برای فشار در امتداد شعاعی به‌دست آورید. سرعت دورانی ω است. در نقطه‌ای روی محور، فشار p_0 و دانسیته ρ_0 است.

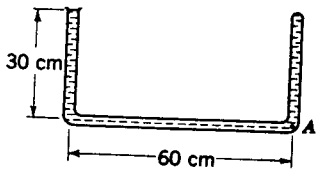
۱۳۳ ـ ۲. یک مخزن محتوی آب حول یک محور قائم با سرعت زاویه‌ای 50 rad/s دوران می‌کند. در همان حال، مخزن با شتاب $4.903\ m/s^2$ به‌پایین سقوط می‌کند. معادلهٔ سطح فشار ثابت را به‌دست آورید.

۱۳۴ ـ ۲. در شکل ۷۹ ـ ۲ لولهٔ U شکل حول محور قائمی که از A می‌گذرد، دوران می‌کند. آب داخل لوله در انتهای بستهٔ لوله در بالای A شروع به‌بخار شدن می‌کند. دمای آب 20°C است. سرعت زاویه‌ای چقدر است؟ اگر سرعت زاویه‌ای افزایش یابد، چه اتفاقی خواهد افتاد؟

۱۳۵ ـ ۲. یک جعبه مکعبی روباز که طول هر ضلع آن 1.3 m است با آب پر شده است. جعبه با شتاب $2.45\ m/s^2$ به‌طرف بالا حرکت می‌کند. نیروی وارده از آب به‌یکی از وجوه جانبی جعبه را به‌دست آورید.

۱۳۶ ـ ۲. جعبه مکعبی‌شکلی که طول هر ضلع آن 1 m است با مایعی به‌چگالی 0.65 پر شده است و با شتاب $2.45\ m/s^2$ رو به‌پایین حرکت می‌کند. نیروی وارده به‌یک وجه جعبه را به‌دست آورید.

۱۳۷ ـ ۲. یک استوانه به‌قطر 60 cm و طول 2 m در امتداد محور خود در امتداد افقی با شتاب $4.903\ m/s^2$ حرکت می‌کند. استوانه با مایعی به‌وزن مخصوص $7850\ N/m^3$ پر شده است و فشار روی محور استوانه قبل از آنکه حرکت شتابدار شروع شود 70 kPa است. نیروی خالص افقی که به‌مایع وارد می‌شود را به‌دست آورید.



شکل ۷۹ ـ ۲ مسائل ۱۱۷ ـ ۲ و ۱۲۳ ـ ۲ و ۱۲۴ ـ ۲ و ۱۳۴ ـ ۲

۱۳۸ ـ ۲. یک جعبه مکعبی که طول هر ضلع آن 300 mm است با آب پر می‌شود و به‌طور یکنواخت حول محور قائمی که از مرکز آن می‌گذرد با سرعت ω rad/s دوران می‌کند. سوراخ کوچکی در مرکز وجه فوقانی جعبه وجود دارد. نیروی وارده به‌یک طرف جعبه را به‌دست آورید.

۱۳۹ ـ ۲. **برنامه‌ای بنویسید و با آن**

الف) مسأله ۵۹ ـ ۲ را حل کنید.

ب) مسأله ۶۰ ـ ۲ را حل کنید.

ج) ارتفاع h در شکل ۵۶ ـ ۲ را برای اینکه دریچه شروع به‌بسته شدن کند تعیین نمایید.

۱۴۰ ـ ۲. با مراجعه به‌مسألهٔ ۹۹ ـ ۲ برنامه‌ای بنویسید که y را برای بازه‌های z به‌اندازهٔ 15 cm از 30 cm تا 90 cm محاسبه کند. همچنین z را برای بازه‌های y برابر 15 cm به‌دست آورید.

۱۴۱ ـ ۲. در مثال ۹ ـ ۲ یک انتگرال‌گیری عددی از 0 تا θ_0 انجام شد تا گشتاور روی دریچه برای مقادیر آزمونی θ_0 یا y به‌دست آید. در این مسأله از معادله گشتاور در بین 0 تا مقدار مجهول θ_0 انتگرال بگیرید. نتایج مثال ۹ـ۲ را با روش نصف کردن امتحان کنید.