۳ ـ ۴ ـ ۲. در شکل a ۷ ـ ۲ داریم: h_1=50 cm، h_2=25 cm، h_3=1 m، S_1=0.80، S_2=0.65 و S_3=1.0. اختلاف فشار h_B-h_A برحسب سانتی‌متر ستون آب چقدر است؟

□ الف) 44−　□ ب) 44　□ ج) 76　□ د) 156　□ هـ) هیچکدام.

۴ ـ ۴ ـ ۲. در شکل b ۷ ـ ۲ داریم: h_1=38 cm، h_2=33 cm، h_3=60 cm، S_1=1.0، S_2=3.0 و S_3=1.0. اختلاف فشار p_A-p_B برحسب کیلوپاسکال چقدر است؟

□ الف) 7.55−　□ ب) 0.098　□ ج) 11.86　□ د) 19.32　□ هـ) هیچکدام.

۵ ـ ۴ ـ ۲. یک مانومتر جیوه‌ای برای اندازه‌گیری فشار آب به‌کار رفته است. اختلاف ارتفاع سطح جیوه در دو شاخه مانومتر 500 mm است. اختلاف فشار برحسب متر ستون آب چقدر است؟

□ الف) 0.5　□ ب) 6.3　□ ج) 6.8　□ د) 7.3　□ هـ) هیچکدام.

۶ ـ ۴ ـ ۲. یک مانومتر مایل (شکل ۹ ـ ۲) با زاویهٔ $\theta=30°$ محتوی آب به‌عنوان یک مانومتر ساده برای اندازه‌گیری فشار هوا به‌کار می‌رود. مخزن مانومتر بزرگ است و می‌توان فرض کرد که ارتفاع سطح آن ثابت می‌ماند. اگر R=40 cm باشد، فشار در A برحسب سانتی‌متر ستون آب چقدر است؟

□ الف) 40−　□ ب) 20 خلأ نسبی　□ ج) 20　□ د) 40　□ هـ) هیچکدام.

۵ ـ ۲ نیروهای وارد به‌صفحات مسطح

در بخشهای قبل نحوهٔ تغییرفشار در سیال ساکن را بررسی کردیم. وقتی صفحه‌ای در سیال ساکن قرار گیرد، به‌هر نقطهٔ آن یک نیروی فشاری وارد می‌شود و یک سیستم توزیع نیرو روی صفحه به‌وجود می‌آید. به‌جای سیستم توزیع نیرو می‌توانیم برآیند آن را در نظر بگیریم. در این بخش روشهای تعیین مقدار نیروی برآیند و خط اثر آن را شرح می‌دهیم. این روشها عبارتند از: روش انتگرال‌گیری، روش استفاده از فرمول و روش استفاده از منشور فشار.

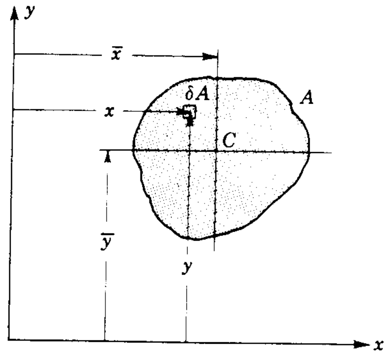
سطوح افقی

یک صفحهٔ مسطح را در نظر بگیرید که به‌طور افقی در سیال ساکن قرار گرفته است. صفحه در معرض فشار ثابتی است. به‌هر المان سطح از صفحه جزء نیروی $p\,dA$ وارد می‌شود. تمام جزء نیروها موازی و هم‌جهت هستند. بنابراین مقدار نیروی برآیند برابر است با جمع عددی تمام جزء نیروها. لذا نیروی وارد به‌یک طرف صفحه برابر است با:

$$\int p\,dA = p\int dA = pA$$

امتداد نیروی برآیند عمود بر صفحه و جهت آن به‌طرف صفحه است ــ به‌شرطی که p مثبت باشد. خط اثر نیروی برآیند از نقطه‌ای می‌گذرد که گشتاور توزیع نیرو حول هر محور گذرنده از آن صفر

باشد. برای تعیین محل این نقطه مطابق شکل ۱۰ ـ ۲ محورهای دلخواه xyرا انتخاب می‌کنیم. حال گشتاور نیروی برآیند و گشتاور توزیع نیرو را حول یک محور دلخواه برابر قرار می‌دهیم. مثلاً اگر



شکل ۱۰ ـ ۲ علامات به‌کار رفته برای تعیین خط اثر نیرو.

نسبت به‌محور yها گشتاور بگیریم، داریم:

$$pAx' = \int_A xp\, dA$$

x'فاصلهٔ نیروی برآیند از محور yهاست. چون p ثابت است می‌توان نوشت:

$$x' = \frac{1}{A}\int_A x\, dA = \bar{x}$$

که در آن $\bar{x}$ فاصلهٔ مرکز سطح[18] صفحه از محور yهاست. مرکز سطح را در پیوست الف شرح داده‌ایم. بنابراین نیروی برآیند وارده از سیال ساکن به‌یک سطح افقی از مرکز سطح آن می‌گذرد.

سطوح مایل

در شکل ۱۱ ـ ۲ یک صفحه مسطح مایل نشان داده شده است. $A'B'$خط اثر صفحه است که زاویهٔ آن با امتداد افقی θ می‌باشد. صفحه را امتداد می‌دهیم تا سطح آزاد را قطع کند و خط تلاقی آنها را به‌عنوان محور xها می‌گیریم. محور yها را در روی صفحه و مبدأ مختصات را در روی سطح آزاد می‌گیریم. نمای روبروی صفحه در دستگاه xyدیده می‌شود. می‌خواهیم مقدار، امتداد و خط اثر نیروی وارده از مایع به‌یک طرف صفحه را تعیین کنیم.

یک نوار افقی به‌پهنای δyرا به‌عنوان المان سطح در نظر می‌گیریم. نیروی وارده به المان برابر

18– Centroid

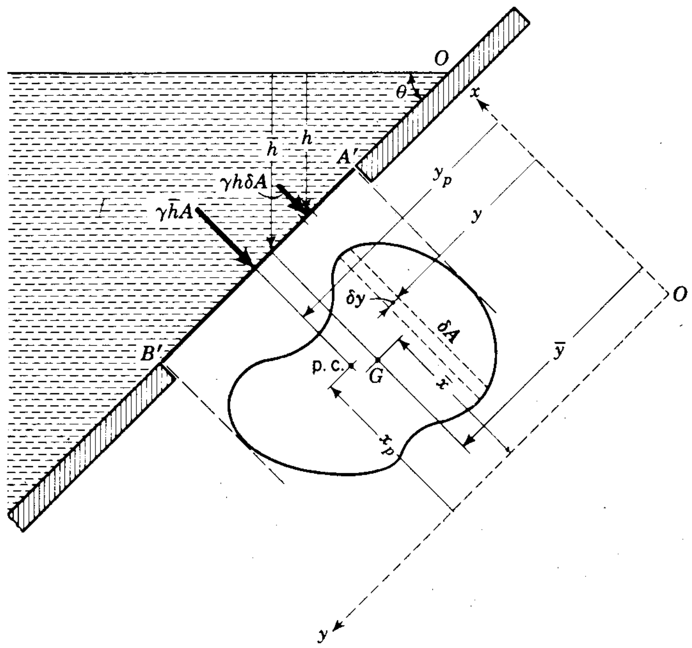
است با:

$$\delta F = p\,\delta A = \gamma h\,\delta A = \gamma y \sin\theta\,\delta A \qquad (۲-۵-۱)$$

چون تمام جزء نیروها موازیند، نیروی برآیند وارد به‌یک طرف صفحه یعنی F برابر است با انتگرال جزء نیروها روی سطح:

$$F = \int p\,dA = \gamma \sin\theta \int y\,dA = \gamma \sin\theta\,\bar{y}A = \gamma\bar{h}A = p_G A \qquad (۲-۵-۲)$$

برای نوشتن معادلات فوق از روابط $\bar{y}\sin\theta = \bar{h}$ و $p_G = \gamma\,\bar{h}$ که با توجه به‌شکل ۱۱ - ۲ روشن است، استفاده کرده‌ایم. p_G فشار در مرکز سطح است. بنابراین می‌توان گفت: مقدار نیروی وارد به‌یک طرف سطح مسطح غوطه‌ور در مایع برابر است با مساحت صفحه ضربدر فشار در مرکز سطح آن. توجه کنید که با این طرز بیان ضرورتی ندارد که در مسأله سطح آزاد وجود داشته باشد؛ برای تعیین فشار در



شکل ۱۱ - ۲ علامات به‌کار رفته برای تعیین نیروی وارده از مایع به‌یک طرف صفحهٔ **مسطح مایل**.

مرکز سطح از هر روشی می‌توان استفاده کرد. اگر p_G مثبت باشد، جهت نیرو به‌طرف صفحه است. چون تمام جزء نیروها بر سطح عمودند، خط اثر نیروی برآیند نیز بر سطح عمود است. اگر سطح

حول هر محور گذرنده از مرکز سطح خود دوران کند، مقدار نیروی برآیند تغییر نخواهد کرد — به‌شرطی که کل سطح در مایع غوطه‌ور بماند.

مرکز فشار

محل تلاقی خط اثر نیروی برآیند و سطح را مرکز فشار[19] گویند. در شکل ۱۱ - ۲ مرکز فشار را با مختصات (x_p, y_p) نشان داده‌ایم. مرکز فشار سطوح مایل برخلاف سطوح افقی، در مرکز سطح واقع نیست. برای تعیین مختصات مرکز فشار، گشتاور نیروی برآیند حول محور yها و محور xها یعنی x_pF و y_pF را با گشتاور توزیع نیرو حول همان محورها برابر قرار می‌دهیم:

$$x_pF = \int_A xp\, dA \tag{۲ - ۵ - ۳}$$

$$y_pF = \int_A yp\, dA \tag{۲ - ۵ - ۴}$$

در معادلهٔ (۳ - ۵ - ۲) المان سطح باید $\delta x\, \delta y$ باشد و نه نواری که در شکل ۱۱ - ۲ نشان داده شده است. از معادلات فوق مختصات مرکز فشار به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x_p = \frac{1}{F}\int_A xp\, dA \tag{۲ - ۵ - ۵}$$

$$y_p = \frac{1}{F}\int_A yp\, dA \tag{۲ - ۵ - ۶}$$

در بسیاری از موارد می‌توان انتگرال‌های معادلات فوق را براحتی محاسبه کرده، مختصات مرکز فشار را به‌دست آورد. برای سطوح هندسی ساده بهتر است به‌جای انتگرال‌گیری، از فرمولهایی که در زیر ارائه می‌شود، استفاده کنیم. برای به‌دست آوردن این فرمولها از مطالب پیوست الف بهره می‌گیریم. ابتدا برای تعیین x_p با استفاده از معادلات (۵ - ۵ - ۲) و (۲ - ۵ - ۲) می‌نویسیم:

$$x_p = \frac{1}{\gamma \bar{y} A \sin\theta}\int_A x\gamma y \sin\theta\, dA = \frac{1}{\bar{y}A}\int_A xy\, dA = \frac{I_{xy}}{\bar{y}A} \tag{۲ - ۵ - ۷}$$

با استفاده از معادلهٔ (۱۰ - الف) داریم:

$$x_p = \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A} + \bar{x} \tag{۲ - ۵ - ۸}$$

19- Center of pressure

اگر سطح نسبت به‌یکی از محورهای گذرنده از مرکز سطح یعنی محور $x = \bar{x}$ یا محور $y = \bar{y}$ متقارن باشد، $\bar{I}_{xy}$ صفر می‌شود و مرکز فشار روی محور $x = \bar{x}$ واقع می‌شود. در حالت کلی $\bar{I}_{xy}$ هم می‌تواند مثبت باشد و هم منفی لذا مرکز فشار می‌تواند در هر یک از دوطرف محور $x = \bar{x}$ قرار گیرد. حال برای تعیین y_p با استفاده از معادلات (۲ ـ ۵ ـ ۲) و (۶ ـ ۵ ـ ۲) می‌نویسیم:

$$y_p = \frac{1}{\gamma \bar{y} A \sin\theta} \int_A y\gamma y \sin\theta \, dA = \frac{1}{\bar{y}A} \int_A y^2 \, dA = \frac{I_x}{\bar{y}A} \qquad (۲-۵-۹)$$

ممان دوم[20] سطوح حول دومحور موازی با رابطهٔ زیر به‌یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$I_x = I_G + \bar{y}^2 A$$

که در آن I_G ممان دوم یا ممان اینرسی[21] سطح حول محوری افقی است که از مرکز سطح می‌گذرد. با قرار دادن I_x از رابطهٔ فوق در معادلهٔ (۹ ـ ۵ ـ ۲) به‌دست می‌آوریم:

$$y_p = \frac{I_G}{\bar{y}A} + \bar{y} \qquad (۲-۵-۱۰)$$

یا

$$y_p - \bar{y} = \frac{I_G}{\bar{y}A} \qquad (۲-۵-۱۱)$$

I_G همواره مثبت است. بنابراین $y_p - \bar{y}$ همواره مثبت است و لذا مرکز فشار همواره زیر مرکز سطح قرار می‌گیرد. دقت کنید که فواصل $\bar{y}$ و $y_p - \bar{y}$ در سطح صفحه اندازه‌گیری می‌شوند.

مثال ۶ ـ ۲. دریچهٔ مثلثی CDE مطابق شکل ۱۲ ـ ۲ در ظرفی از روغن با چگالی 0.8 قرار دارد و طرف دیگر آن در معرض فشار اتمسفر است. الف) مقدار نیروی وارد به‌دریچه را با انتگرال‌گیری و همچنین با استفاده از معادلهٔ (۴ ـ ۵ ـ ۲) به‌دست آورید. ب) محل مرکز فشار را تعیین کنید. ج) نیروی لازم برای باز کردن دریچه یعنی P را به‌دست آورید. این نیرو به‌طور عمودی و در نقطهٔ E وارد می‌شود. دریچه حول CD لولا شده است. از وزن دریچه صرفنظر کنید.

حل. الف) ابتدا به‌روش انتگرال‌گیری عمل می‌کنیم. با توجه به‌شکل ۱۲ ـ ۲ داریم:

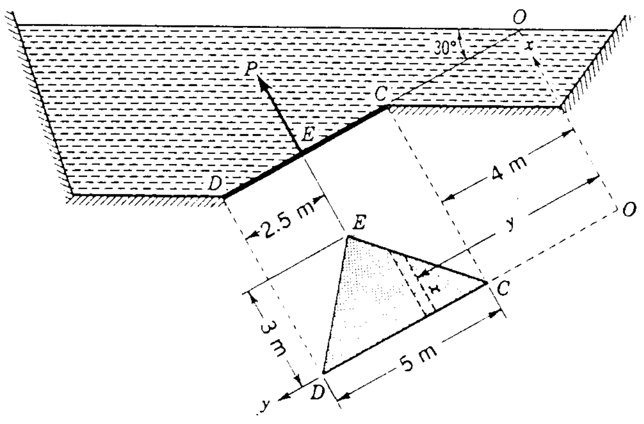
$$F = \int_A p \, dA = \gamma \sin\theta \int yx \, dy = \gamma \sin\theta \int_4^{6.5} xy \, dy + \gamma \sin\theta \int_{6.5}^{8} xy \, dy$$

برای محاسبهٔ انتگرال‌های فوق باید معادلهٔ خطوط CE و ED را به‌دست آوریم. معادلهٔ خط CE به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$x = ay + b$$

20– Second moment

21– Moment of inertia



شکل ۱۲ ـ ۲ دریچهٔ مثلثی

برای تعیین a و b، مختصات دو نقطه از خط را در معادلهٔ فوق قرار می‌دهیم. مطابق شکل در نقطهٔ C داریم: $x=0$ و $y=4$ و در نقطهٔ E داریم: $x=3$ و $y=6.5$. لذا

$$0=4a+b \qquad 3=6.5a+b$$

از حل معادلات فوق a و b به‌دست آمده، معادلهٔ خط CE تعیین می‌شود:

$$a=\frac{6}{5} \quad b=-\frac{4.8}{5} \quad x=\frac{6}{5}(y-4)$$

معادلهٔ خط ED به‌طور مشابه به‌صورت $x=\frac{6}{5}(9-y)$ به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$F=\gamma\sin\theta\frac{6}{5}\left[\int_{4}^{6.5}(y-4)y\,dy+\int_{6.5}^{9}(9-y)y\,dy\right]$$

با انتگرال‌گیری و جاگذاری مقدار $\gamma\sin\theta$ به‌دست می‌آوریم:

$$F=9806\,(0.8)(0.50)\frac{6}{5}\left[\left[\frac{y^3}{3}-2y^2\right]_4^{6.5}+\left[4.5y^2-\frac{y^3}{3}\right]_{6.5}^{9}\right]=191.2\,\text{kN}$$

در روش دیگر برای تعیین نیرو با استفاده از معادلهٔ (۲ ـ ۵ ـ ۲) می‌توان نوشت:

$$F=p_GA=(\gamma\bar{y}\sin\theta)A=9806\,(0.80)(6.5)(0.50)(7.5)=191.2\,\text{kN}$$

ب) مختصات مرکز سطح در دستگاه مختصات نشان داده شده، عبارتند از $\bar{x}=1.0$ و $\bar{y}=6.5$. در معادلهٔ (۲ ـ ۵ ـ ۸):

$$x_p=\frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A}+\bar{x}$$

$\bar{I}_{xy}$ صفراست، زیرادریچه نسبت به‌محورافقی‌که از مرکزسطح‌آن می‌گذرد، متقارن‌است. لذا $\bar{x}=x_p=1$ m حال معادلهٔ (۲ ـ ۵ ـ ۱۱) را می‌نویسیم:

$$y_p-\bar{y}=\frac{I_G}{\bar{y}A}=2\,\frac{1(3)(2.5)^3}{12(6.5)(7.5)}=0.16\ \text{m}$$

یعنی مرکز فشار 0.16 m پایین‌تر از مرکز سطح قرار دارد. این فاصله در سطح صفحه اندازه‌گیری می‌شود.

ج) برای تعیین نیروی P گشتاور نیروها حول CD را برابر قرار می‌دهیم:

$$(p)(3)=(191\ 200)(1) \quad P=63.74\ \text{kN}$$

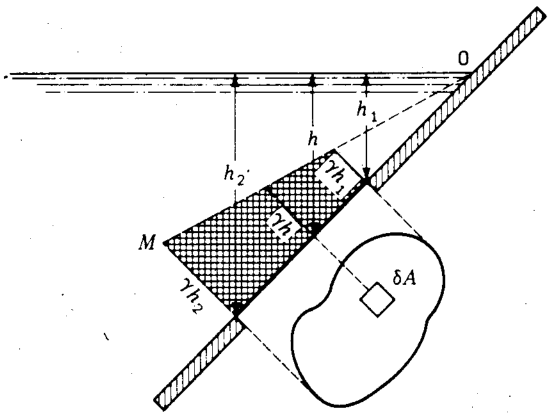
منشور فشار

یک روش دیگر برای تعیین نیروی وارد به‌سطوح مسطح و خط اثر آن، استفاده از منشور فشار[22] است. منشور فشار حجمی است به‌شکل منشور که قاعدهٔ آن همان سطح مسطح است و ارتفاع آن از قاعده در هر نقطه برابر است با γh که h فاصلهٔ قائم تا سطح آزاد است. در شکل ۱۳ ـ ۲ منشور فشار را برای سطح دلخواهی نشان داده‌ایم. اگر در مسأله سطح آزاد واقعی وجود نداشته باشد، می‌توانیم برای تعریف h یک سطح آزاد خیالی در نظر بگیریم. می‌توانیم در روی شکل γhها را با مقیاس مناسب دلخواهی رسم کنیم. در این صورت اثر آنها روی صفحهٔ تصویر خطی مانند OM می‌شود. نیروی وارد به‌المان سطح δA برابر است با:

$$\delta F = \gamma h\, \delta A = \delta \mathcal{V} \qquad (۲ ـ ۵ ـ ۱۲)$$

$d\mathcal{V}$ المان حجم منشور فشار است. با انتگرال‌گیری از معادلهٔ فوق به‌دست می‌آوریم: $F=\mathcal{V}$. یعنی نیروی برآیند وارد به‌یک طرف صفحه برابر است با حجم منشور فشار.

برای تعیین مختصات مرکز فشار معادلات (۵ ـ ۵ ـ ۲) و (۶ ـ ۵ ـ ۲) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:



شکل ۱۳ ـ ۲ منشور فشار

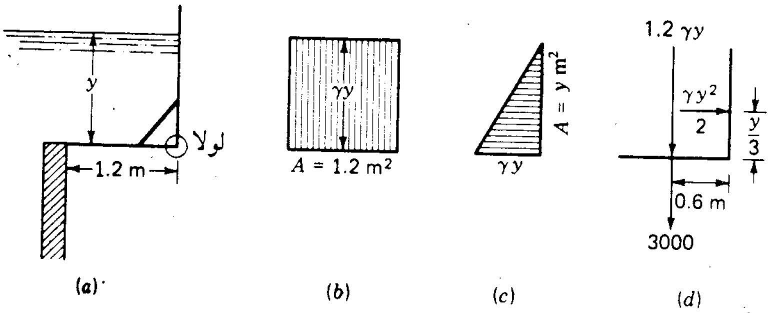
22– Pressure prism

$$x_p = \frac{1}{\mathcal{V}}\int_{\mathcal{V}} x\,d\mathcal{V} \qquad y_p = \frac{1}{\mathcal{V}}\int_{\mathcal{V}} y\,d\mathcal{V} \qquad (۱۳-۵-۲)$$

معادلات فوق نشان می‌دهد که x_p و y_p مختصات مرکز حجم منشور فشار هستند. [معادلهٔ (۵ ـ الف)]. بنابراین خط اثر نیروی برآیند از مرکز حجم منشور فشار می‌گذرد. برای برخی سطوح ساده استفاده از روش منشور فشار از دو روش دیگر آسان‌تر است. برای مثال یک سطح مستطیلی را در نظر بگیرید که یک لبهٔ آن روی سطح آزاد قرار دارد. برای این سطح، منشور فشار به‌شکل یک گوه است که مرکز حجم آن در $\frac{1}{3}$ فاصله از قاعده می‌باشد. بنابراین مرکز فشار این صفحهٔ مستطیلی در $\frac{1}{3}$ فاصله از لبهٔ پایینی آن قرار دارد.

مثال ۷ ـ ۲. در شکل a ۱۴ ـ ۲ دریچه‌ای نشان داده شده است که در دیوارهٔ کانال نصب می‌شود و هرگاه ارتفاع آب به y رسید، حول محور خود دوران کرده، باعث سرریز شدن آب می‌گردد. دریچه از ورق فولادی ساخته شده است که وزن واحد سطح آن $2500\ \mathrm{N/m^2}$ است. y را به‌دست آورید.

حل. برای حل مسأله از روش منشور فشار استفاده می‌کنیم. عرض دریچه در امتداد عمود بر صفحهٔ کاغذ را واحد می‌گیریم. منشور فشار برای کف افقی دریچه در شکل b ۱۴ ـ ۲ نشان داده شده است. مساحت قاعدهٔ منشور $1.2\ \mathrm{m^2}$ است. ارتفاع منشور، ثابت و برابر $\gamma y\ \mathrm{N/m^2}$ است. نیروی وارد به کف برابر است با حجم این منشور یعنی $F_y = 1.2\gamma y\ \mathrm{N}$. این نیرو از مرکز قاعده می‌گذرد. منشور فشار برای دیوارهٔ قائم در شکل c ۱۴ ـ ۲



شکل ۱۴ ـ ۲ دریچه در دیوارهٔ جانبی کانال

نشان داده شده است. این منشور به‌شکل گوه‌ای است که مساحت قاعدهٔ آن $y\ \mathrm{m^2}$ است. ارتفاع منشور در بالا صفر و در پایین $\gamma y\ \mathrm{N/m^2}$ است. ارتفاع متوسط منشور $\gamma y/2$ است. بنابراین $F_x = \gamma y^2/2\ \mathrm{N}$. مرکز حجم منشور به‌فاصلهٔ $y/3$ از لولا قرار دارد. وزن کف دریچه $3000\ \mathrm{N}$ است که از مرکز آن می‌گذرد. در شکل d ۱۴ ـ ۲ تمام نیروها و بازوی کارگر آنها نشان داده شده است. دریچه هنگامی وارونه می‌شود که گشتاور نیروها حول لولا صفر شود. پس:

$$M = (3000\ \mathrm{N})(0.6\ \mathrm{m}) + (1.2\gamma y\ \mathrm{N})(0.6\ \mathrm{m}) - \left(\frac{\gamma y^2}{2}\mathrm{N}\right)\left(\frac{y}{3}\mathrm{m}\right) = 0$$

یا
$$M = y^3 - 4.32y - 1.1014 = 0$$

این معادله تنها یک ریشهٔ مثبت دارد و آن‌هم براحتی درمی‌یابیم که بین $y=2$ و $y=3$ است. برای حل معادله از روش تکراری نیوتن ـ رافسون (پیوست ۵ ـ ب) استفاده می‌کنیم.

$$y = y - \frac{M(y)}{M'(y)} = y - \frac{y^3 - 4.32y - 1.1014}{3y^2 - 4.32}$$

ابتدا یک مقدار آزمایشی مثلاً $y=2.5$ انتخاب می‌کنیم. این مقدار را در سمت راست معادله قرار می‌دهیم تا مقدار بهتری برای y حاصل شود. اگر این کار را سه بار تکرار کنیم به‌جواب $y=2.196$ m می‌رسیم. معادلات درجه سوم را براحتی می‌توان با ماشین‌حساب قابل برنامه‌ریزی حل کرد. زحمت تهیه کردن برنامه از زحمت یکبار حل معادله با ماشین‌حساب بیشتر نیست.

اثر فشار اتمسفر بر نیروهای وارد به‌سطوح مسطح

در مطالب پیشین به‌مبنای اندازه‌گیری فشار اشاره‌ای نکردیم. فشار را از معادله $p=\gamma h$ محاسبه کردیم که در آن h فاصلهٔ قائم زیر سطح آزاد است. مبنایی که برای فشار گرفته شده بود، فشار اتمسفر محلی بود. حال سطحی را در نظر بگیرید که یک‌طرف آن در معرض فشار سیال و طرف دیگر آن در معرض فشار اتمسفر است. نیروی وارده از اتمسفر به‌صفحه برابر است با حاصلضرب فشار اتمسفر در سطح صفحه یعنی p_0A. نیرویی که مایع به‌طرف دیگر سطح وارد می‌کند برابر است با:

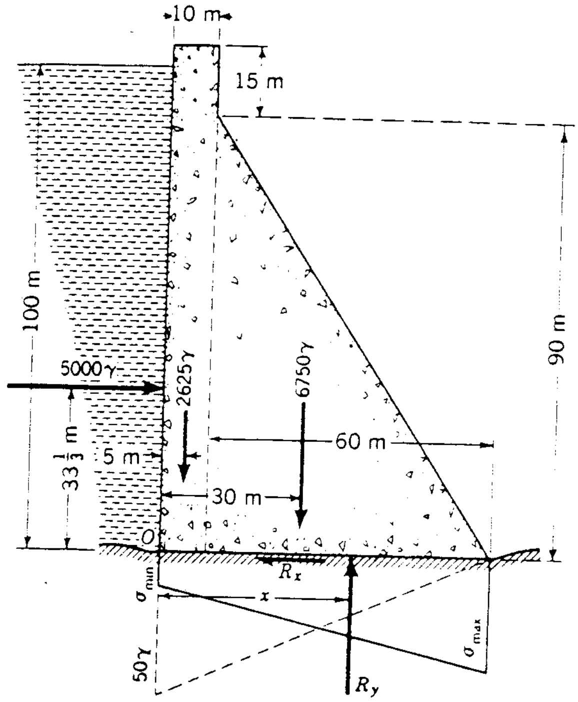
$$\int (p_0 + \gamma h)\, dA = p_0A + \gamma \int h\, dA$$

ملاحظه می‌شود که اثر فشار اتمسفر یعنی p_0A به‌طور یکسان بر هر دو طرف صفحه وارد می‌شود و لذا هیچ تأثیری بر مقدار نیروی برآیند و موقعیت آن ندارد.

مادامی که در یک دیاگرام آزاد برای تمام سطوح از یک مبنای فشار استفاده کنیم، می‌توانیم سطح آزاد را در محلی در نظر بگیریم که طبق مبنای مزبور فشار صفر است و نیرو و گشتاور را به‌روشهای فوق تعیین کنیم.

مثال ۸ ـ ۲. یکی از موارد کاربرد نیروهای وارد به‌سطوح مسطح در طراحی سدهای وزنی است. در شکل ۱۵ ـ ۲ مقطع یک سد بتونی نشان داده شده است. حداقل و حداکثر تنش فشاری در قاعدهٔ سد را از روی نیروهایی که به‌سد اثر می‌کنند، محاسبه کنید. چگالی بتون را 2.5 فرض کنید.

حل. قسمتی از سد با عرض 1 m را در نظرگرفته، دیاگرام آزاد آن را رسم می‌کنیم. نیروهای وارده عبارتند از؛ وزن سد، نیروی فشاری آب، فشار فونداسیون و نیروی بالابرندهٔ هیدرواستاتیک. مقطع سد را به‌دو



شکل ۱۵ ـ ۲ سد وزنی بتونی

قسمت مثلثی و مستطیلی تقسیم کرده، وزن آنها را به‌ترتیب برابر $6750\,\gamma$ و $2625\,\gamma$ به‌دست آورده‌ایم. نیروی فشاری آب براحتی برابر $5000\,\gamma$ به‌دست می‌آید. تعیین نیروی بالابرندهٔ هیدرواستاتیک خارج از حیطهٔ این بحث است. در اینجا فرض می‌کنیم که این نیرو در ابتدای قاعدهٔ سد (نقطهٔ O) نصف ارتفاع هیدرواستاتیک باشد و تا انتهای آن به‌طور خطی کاهش یافته، به‌صفر برسد. در شکل، توزیع نیروی بالابرندهٔ هیدرواستاتیک را با خط چین نشان داده‌ایم. برآیند این توزیع نیرو $1750\,\gamma$ است. در قاعدهٔ سد باید اصطکاک کافی ایجاد شود تا نیروی رانش ناشی از آب یعنی $R_x=5000\,\gamma$ را متعادل کند. نیروی قائم وارد به‌قاعدهٔ سد برابر است با وزن سد منهای نیروی بالابرنده هیدرواستاتیک یعنی

$$R_y=6750\,\gamma+2625\,\gamma-1750\,\gamma=7625\,\gamma$$

برای تعیین محل اثر R_y گشتاور نیروها حول O را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\Sigma M_0 = 0 = R_y x - 5000\gamma(33.33) - 2625\gamma(5) - 6750\gamma(30) + 1750\gamma(23.33)$$

و به‌دست می‌آوریم:

$$x = 44.8 \text{ m}$$

معمولاً فرض می‌کنند که تغییرات فشار فونداسیون در روی قاعدهٔ سد خطی باشد. در این صورت منشور فشار، یک ذوزنقه است که حجم آن برابر R_y است. لذا

$$\frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2}70 = 7625\gamma$$

که در آن σ_{max} و σ_{min} حداکثر و حداقل تنش فشاری هستند. مرکز حجم‌منشور درنقطه‌ای به‌طول x=44.8 m است. برای تعیین موقعیت مرکز حجم منشور فشار برحسب σ_{max} و σ_{min}، نسبت به O لنگر می‌گیریم:

$$44.8 = \frac{(\sigma_{min})(70)(\frac{70}{2}) + (\sigma_{max} - \sigma_{min})(\frac{70}{2})\frac{2}{3}(70)}{(\sigma_{max} + \sigma_{min})(\frac{70}{2})}$$

پس از ساده کردن به‌دست می‌آوریم:

$$\sigma_{max} = 11.75\sigma_{min}$$

بنابراین:

$$\sigma_{max}=210\,\gamma=2.059 \text{ MPa} \qquad \sigma_{min}=17.1\,\gamma=0.168 \text{ MPa}$$

هنگامی‌که نیروی برآیند در دوسوم فاصلهٔ قاعده سد قرار گیرد، تنش σ_{min} همواره فشاری خواهد بود. به‌علت ضعیف بودن مقاومت کششی بتون، در یک طرح خوب باید نیروی برآیند در محدودهٔ دوسوم قاعدهٔ سد قرار گیرد.

مثال ۹ ـ ۲. در شکل ۱۶ ـ ۲ انتهای لوله با دریچه‌ای بسته شده است. هنگامی که عمق آب افزایش یافته به y برسد، گشتاور نیروی وارده از آب بر گشتاور وزنهٔ تعادل غلبه کرده، دریچه را باز خواهد کرد. از وزن سازه صرفنظر کرده، yرا به‌دست آورید. اطلاعات لازم در شکل نشان داده شده است.

حل. گشتاور نیروی فشاری وارده از آب به‌دریچه حول لولا به‌صورت زیر بیان می‌شود:

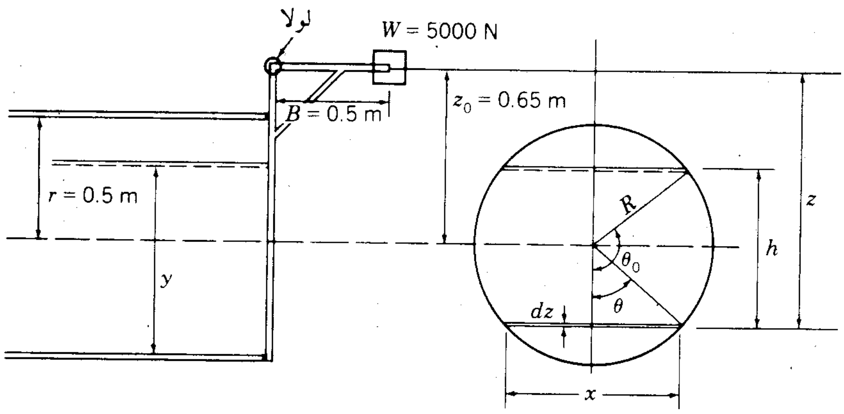
$$M = -\gamma \int_{z_0+R}^{z_0+R\cos\theta_0} zhx\,dz = \int_0^{\theta_0} F(\theta)\,d\theta$$

که در آن

$$z = z_0 + R\cos\theta \qquad dz = -R\sin\theta\,d\theta$$

$$h = R(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad x = 2R\sin\theta$$

می‌باشد. بنابراین



شکل ۱۶ ـ ۲ دریچه در انتهای لوله

$$F(\theta) = \gamma(z_0 + R\cos\theta)R(\cos\theta - \cos\theta_0)2R^2\sin^2\theta$$

θ_0 زاویه‌ای است که به‌ازای آن گشتاور ناشی از نیروی آب با گشتاور ناشی از وزنه تعادل برابر می‌شود. برای یافتن θ_0 از روش نصف کردن استفاده می‌کنیم. جواب موردنظر بین 0 و π خواهد بود. پس θ_{min} را برابر 0 و θ_{max} را برابر π می‌گیریم. $d\theta$ برابر θ_0/n است که n تعداد تقسیمات می‌باشد. در این صورت گشتاور ایجادی در یک $d\theta$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$M = \frac{d\theta}{2}[F(\theta) + F(\theta - d\theta)]$$

که برای n فاصله جمع می‌شود. اگر گشتاور زیاد باشد، در روش نصف کردن θ_0 بعدی کاهش می‌یابد. لیست برنامه و جواب آن در شکل ۱۷ ـ ۲ آمده است. در این برنامه MOM گشتاور ناشی از وزنه تعادل، DTH=$d\theta$ و TH1=θ=I*DTH و TH=θ_0 و THMI=θ_{0min} و THMA=θ_{0max} و II=n و SUM گشتاور انتگرال‌گیری شده با استفاده از قانون ذوزنقه‌ای است.

```
10 REM EX29 EXAMPLE 2.9  MOMENT ON CIRCULAR GATE SEGMENT
20 DEFINT I: DEF FNM (CC) = C1 * (C2 + CC) * (CC - CS0) * (1! - CC ^ 2)
30 READ R, Z0, GAM, B, W, II: DATA .5,.65,9806,.5,5000,40
40 PRINT " R, Z0, GAM, B, W, II="; R; Z0; GAM; B; W; II
50 MOM = B * W: C1 = 2! * GAM * R ^ 4: C2 = Z0 / R: THMI = 0!: THMA = 3.1416: I1 = 0
60 OM = 0!: SUM = 0!: TH = .5 * (THMI + THMA): DTH = TH / II: CS0 = COS(TH)
70 FOR I = 1 TO II: TH1 = I * DTH: CS = COS(TH1): M = FNM(CS)
80 SUM = SUM + .5 * DTH * (OM + M): OM = M: NEXT I: PRINT I1; THMA; THMI; SUM
90 IF SUM > MOM THEN THMA = TH ELSE THMI = TH
100 I1 = I1 + 1: IF I1 > 16 THEN 120
110 GOTO 60
120 PRINT " DEPTH="; : PRINT R * (1! - COS(TH));
130 PRINT " MOMENT="; : PRINT MOM;
140 PRINT "THETAO="; .5 * (THMI + THMA) * 180! / 3.1416

R, Z0, GAM, B, W, II = 0.5  0.65  9806  0.5  5000 40

DEPTH = 0.902  MOMENT = 2500  THETAO = 143.64
```

شکل ۱۷ ـ ۲ لیست برنامهٔ مثال ۹ ـ ۲.

تمرینات

۱ ـ ۵ ـ ۲. یک صفحه دایره‌ای به‌مساحت واحد در آب قرار دارد، به‌طوریکه مرکز آن 10 m زیر سطح آزاد است. نیروی وارد به‌یک طرف صفحه، □ الف) کمتر از 10γ است □ ب) به‌امتداد صفحه بستگی دارد □ ج) از 10γ بیشتر است □ د) برابر است با حاصلضرب γ و فاصله قائم مرکز فشار از سطح آزاد □ هـ) هیچکدام.

۲ ـ ۵ ـ ۲. یک صفحهٔ مستطیلی به‌عرض 3 m و طول 4 m در روغن با چگالی 0.8 قرار دارد. زاویه صفحه با امتداد افق 30° است. لبهٔ پایینی صفحه (به‌عرض 3m) افقی بوده و 6 m پایین‌تر از سطح آزاد روغن است. نیروی وارد به‌یک

طرف صفحه چقدر است؟

□ الف) $38.4\,\gamma$ □ ب) $48\,\gamma$ □ ج) $51.2\,\gamma$ □ د) $60\,\gamma$ □ هـ) هیچکدام.

۳ ـ ۵ ـ ۲. در تمرین قبل فاصلهٔ قائم مرکز فشار صفحه با سطح آزاد چقدر است؟

□ الف) 10.133 m □ ب) 5.133 m □ ج) 5.067 m □ د) 5.00 m □ هـ) هیچکدام.

۴ ـ ۵ ـ ۲. مرکز فشار، □ الف) مرکز سطح سطح غوطه‌ور است □ ب) مرکز حجم منشور فشار است □ ج) مستقل از جهت قرارگیری سطح است □ د) نقطه‌ای روی خط اثر نیروی برآیند است □ هـ) همواره بالاتر از مرکز سطح است.

۵ ـ ۵ ـ ۲. حلقه‌ای که شعاع داخلی آن 1.0 m و شعاع خارجی آن 2.0 m است، به‌طور قائم در آب غوطه‌ور شده است. مرکز حلقه 3.0 m پایین‌تر از سطح آزاد قرار دارد. نیروی وارد به‌حلقه چقدر است؟

□ الف) $3\,\pi\gamma$ □ ب) $9\,\pi\gamma$ □ ج) $10.25\,\pi\gamma$ □ د) $12\,\pi\gamma$ □ هـ) هیچکدام.

۶ ـ ۵ ـ ۲. در تمرین قبل فاصله مرکز فشار حلقه با مرکز سطح آن چقدر است؟

□ الف) 0 m □ ب) 0.42 m □ ج) 0.44 m □ د) 0.47 m □ هـ) هیچکدام.

۷ ـ ۵ ـ ۲. یک سطح مثلثی به‌طور قائم قرارگرفته به‌طوریکه یک ضلع آن روی سطح آزاد قرار دارد و رأس آن در پایین است. ارتفاع مثلث h است. فاصلهٔ مرکز فشار از سطح آزاد چقدر است؟

□ الف) $h/4$ □ ب) $h/3$ □ ج) $h/2$ □ د) $2\,h/3$ □ هـ) $3\,h/4$.

۸ ـ ۵ ـ ۲. یک دریچه مربعی قائم به‌ابعاد 4 m در 4 m آب را نگه می‌دارد. سطح آزاد آب بر لبهٔ بالایی دریچه منطبق است. گشتاور نیروی وارد به‌دریچه حول لبهٔ پایینی آن چقدر است؟

□ الف) $42.7\,\gamma$ □ ب) $57\,\gamma$ □ ج) $64\,\gamma$ □ د) $85.3\,\gamma$ □ هـ) هیچکدام.

۶ ـ ۲ مؤلفه‌های نیروی وارد به‌سطوح منحنی

برای سطوح منحنی غوطه‌ور، امتداد جزء نیروها یکسان نیست و لذا بایستی آنها را به‌صورت برداری با هم جمع کرد. یعنی باید سه امتداد دوبدو متعامد در نظر گرفت و هر جزء نیرو را به سه مؤلفه در امتدادهای مزبور تجزیه کرد. آنگاه مؤلفهٔ جزء نیروها در هریک از امتدادها را به‌صورت عددی با هم جمع کرد و نهایتاً سه مؤلفه را به‌طور برداری به‌هم افزود. با معلوم شدن دو مؤلفهٔ افقی و یک مؤلفهٔ قائم، نیروی برآیند تعیین می‌شود. مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد به‌سطوح منحنی براحتی محاسبه می‌شوند. خط اثر مولفه‌ها نیز بسهولت تعیین می‌شود.

مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به‌سطوح منحنی

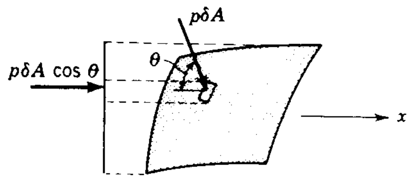
مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به‌یک سطح منحنی برابر است با نیروی وارد به‌تصویر آن سطح بر روی صفحهٔ قائمی عمود بر امتداد مؤلفهٔ افقی موردنظر. برای اثبات این موضوع در شکل ۸ ـ ۲ یک سطح منحنی سه‌بعدی را نشان داده‌ایم. المان سطح δA را در نظر بگیرید. جزء نیروی وارد به‌المان، $p\,dA$ است. مؤلفهٔ افقی این جزء نیرو برابر است با:

$$\delta F_x = p\,\delta A \cos\theta$$

که در آن θ زاویه بردار عمود بر المان با امتداد منفی محور xهاست. با انتگرال‌گیری از مؤلفه‌های فوق روی سطح به‌دست می‌آوریم:

$$F_x = \int_A p \cos\theta\, dA \qquad (۱ - ۶ - ۲)$$

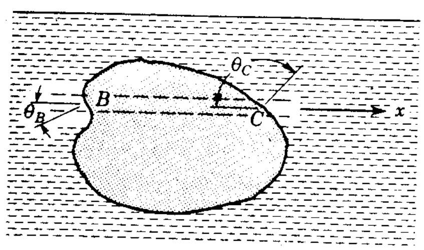
حال توجه کنید که $\cos\theta\,\delta A$ تصویر δA روی صفحه‌ای عمود بر محور xهاست. جزء نیروی وارد به‌این تصویر $p\cos\theta\,\delta A$ است. وقتی تمام المانهای سطح منحنی را روی صفحهٔ عمود بر محور xها تصویر کنیم، تصویر کل منحنی بر روی آن صفحه حاصل می‌شود. بدین‌ترتیب ثابت می‌شود که مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به‌سطح منحنی در امتداد x برابر است با نیروی وارد به‌تصویر آن بر روی



شکل ۱۸ ـ ۲ مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به‌یک سطح منحنی.

صفحهٔ قائم عمود بر x. برای یافتن مؤلفهٔ افقی در امتداد محور yها سطح منحنی را بر روی یک صفحهٔ قائم که بر محور yها عمود باشد تصویر می‌کنیم و نیروی وارد به‌تصویر را به‌دست می‌آوریم.

مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به‌یک سطح بسته صفر است. زیرا تصویر سطح بسته روی هر صفحه صفر است. چراکه مطابق شکل ۱۹ ـ ۲ تصاویر المانهای سطح واقع در طرفین سطح بسته دارای علامات مخالف هستند. برای اثبات این موضوع استوانهٔ کوچکی به‌مقطع δA به‌موازات محور xها در نظر می‌گیریم که سطح بسته را در B و C قطع می‌کند و دو المان سطح روی آن به‌وجود می‌آورد.



شکل ۱۹ ـ ۲ تصاویر المانهای سطح واقع در طرفین یک سطح بسته.

المان سطح در B را به δA_B و المان سطح در C را به δA_C نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت:

$$\delta A_B \cos \theta_B = -\delta A_C \cos \theta_C = \delta A$$

زیرا $\cos \theta_C$ منفی است. حال با توجه به‌اینکه فشار در طرفین استوانه یکسان است، داریم:

$$p\, \delta A_B \cos \theta_B + p\, \delta A_C \cos \theta_C = 0$$

این رابطه برای تمام المانهای سطح صادق است. بنابراین نیروی افقی وارد به‌سطح بسته صفر می‌باشد.

برای یافتن خط اثر مؤلفهٔ افقیِ نیروی وارده به‌سطح منحنی باید برآیند یک سیستم نیروی موازی را تعیین کنیم که اجزاء آن مؤلفه‌های نیروی وارد به المانهای سطح هستند. این نیرو درست همان نیروی وارد به‌تصویر سطح است، زیرا دو سیستم نیرو دارای توزیع یکسان از جزء نیروهای افقی هستند. بنابراین محل مرکز فشار روی تصویر سطح با روشی که در بخش ۵ ـ ۲ گفته شد، تعیین می‌شود.

مثال ۱۰ ـ ۲. معادلهٔ یک بیضیگون $x^2/4+y^2/4+z^2/9=1$ است. بیضیگون درآب‌غوطه‌ور شده‌و مرکز آن 2 m زیر سطح آزاد قرار دارد. قسمتی از بیضیگون را در نظر بگیرید که در یک هشتم اول دستگاه مختصات قرار دارد و مؤلفه‌های افقی نیروی وارد به‌آن را به‌دست آورید. صفحهٔ xz را افقی و محور y را قائم و رو به‌بالا بگیرید.

حل. سطح را روی صفحهٔ yz تصویر می‌کنیم. مساحت تصویر $(\pi/4)(2)(3)\ \mathrm{m}^2$ است. مرکز سطح آن به‌اندازهٔ $2-(4/3\pi)(2)$ m زیر سطح آزاد قرار دارد. بنابراین

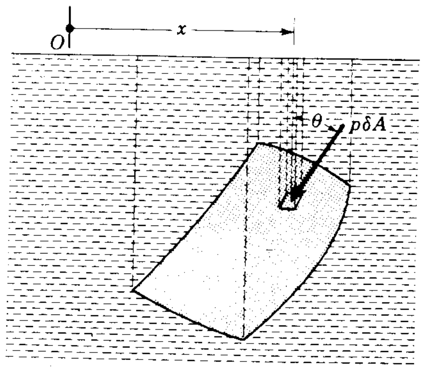
$$F_x = -\left[\frac{\pi}{4}(6)\right]\left(2-\frac{8}{3\pi}\right)\gamma = (-5.425\ \mathrm{m}^3)(9806\ \mathrm{N/m}^3) = -53.2\ \mathrm{kN}$$

به‌طور مشابه

$$F_z = -\left[\frac{\pi}{4}(4)\right]\left(2-\frac{8}{3\pi}\right)\gamma = (-3.617\ \mathrm{m}^3)(9806\ \mathrm{N/m}^3) = -35.4\ \mathrm{kN}$$

مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به‌سطوح منحنی

مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به‌سطح منحنی برابر است با وزن مایعی که به‌طور قائم روی سطح قرار دارد تا سطح آزاد. برای اثبات این موضوع باید مؤلفه‌های قائم جزء نیروهای وارد به‌المانهای سطح را با هم جمع کنیم. در شکل ۲۰ ـ ۲ یک المان سطح و جزء نیروی $p\delta A$ که عمود بر آن اثر می‌کند، نشان داده شده است. زاویه بین امتداد قائم و امتداد عمود بر المان را به θ نشان داده‌ایم. بنابراین مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به‌المان سطح برابر $p\cos\theta\delta A$ است و در نتیجه مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به‌کل سطح منحنی برابر



شکل ۲۰ ـ ۲ مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به‌یک سطح منحنی

است با:

$$F_v = \int_A p \cos\theta \, dA \qquad (۲-۶-۲)$$

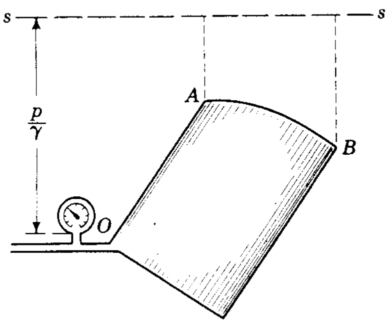
به‌جای p معادل آن یعنی γh را قرار می‌دهیم (h فاصلهٔ المان از سطح آزاد است). با توجه به‌اینکه $\cos\theta\delta A$ تصویر δA روی صفحهٔ افقی است، خواهیم داشت:

$$F_v = \gamma \int_A h \cos\theta \, dA = \gamma \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \qquad (۲-۶-۳)$$

که در آن $\delta\mathcal{V}$ حجم استوانه‌ای است به‌ارتفاع h و قاعدهٔ $\cos\theta\,\delta A$ یعنی حجم مایعی است که بطور قائم روی المان سطح قرار دارد. با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آوریم:

$$F_v = \gamma\mathcal{V} \qquad (۲-۶-۴)$$

ممکن است مایع زیر سطح باشد. مثلاً در شکل ۲۱ ـ ۲ مایع، زیر سطح منحنی AB است. در این حالت اگر فشار در نقطه‌ای مانند O معلوم باشد، می‌توانیم سطح آزاد خیالی s-s را به‌فاصلهٔ p/γ در بالای O رسم کنیم، به‌طوری‌که حاصلضرب وزن مخصوص و فاصلهٔ قائم هر نقطه با سطح آزاد برابر فشار در آن نقطه باشد. در این صورت مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به‌سطح برابر است با وزن مایع خیالی که در بالای سطح قرار دارد تا سطح آزاد. در تعیین سطح آزاد خیالی باید وزن مخصوص مایع خیالی با وزن مخصوص مایعی که با سطح منحنی تماس دارد یکسان باشد، در غیر این‌صورت توزیع فشار روی سطح درست درنمی‌آید. با فرض وجود مایع خیالی برروی سطح منحنی، در هر نقطه از سطح، فشار در بالا و پایین آن یکسان است، اما جهت مؤلفه‌های قائم جزء نیروها مخالف یکدیگر است. بنابراین در مواردی که مایع روی سطح منحنی، خیالی است جهت مؤلفهٔ قائم رو به‌بالا است. در



شکل ۲۱ ـ ۲ سطح آزاد خیالی.

برخی موارد، ممکن است مایع روی سطح منحنی محبوس باشد و سطح آزاد واقعی وجود نداشته باشد. در این موارد برای تعیین سطح آزاد باید یک مایع خیالی افزود و یا کم کرد.

برای تعیین خط اثر مؤلفهٔ قائم از مؤلفهٔ قائم جزء نیروها حول یک محور مناسب گشتاور گرفته، با گشتاور نیروی برآیند برابر قرار می‌دهیم. مثلاً اگر محور را در O بگیریم (شکل ۲۰ ـ ۲) داریم:

$$F_v\bar{x} = \gamma \int_{\mathcal{V}} x\, d\mathcal{V}$$

که در آن $\bar{x}$ فاصلهٔ خط اثر نیرو از O است. حال با توجه به‌اینکه $F_v=\gamma\mathcal{V}$ است به‌دست می‌آوریم:

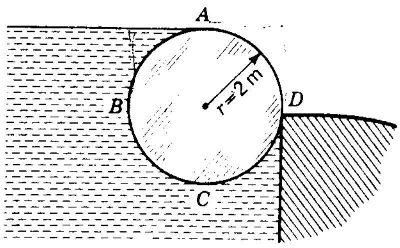
$$\bar{x} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} x\, d\mathcal{V}$$

رابطهٔ فوق معرف فاصلهٔ مرکز حجم است. بنابراین خط اثر نیروی قائم از مرکز حجم مایع واقعی یا خیالی که در روی سطح منحنی قرار دارد می‌گذرد.

مثال ۱۱ ـ ۲. در شکل ۲۲ ـ ۲ مانعی به‌شکل استوانه آب را نگه می‌دارد. بین استوانه و دیوار اصطکاک وجود ندارد. به‌ازای 1 m طول استوانه الف) وزن استوانه را به‌دست آورید. ب) نیروی وارد به‌دیوار چقدر است؟

حل. الف) برای تعادل نیروها در امتداد قائم باید وزن استوانه با مؤلفهٔ قائم نیروی وارده از آب برابر باشد. برای تعیین مؤلفهٔ قائم، سطح تماس آب و استوانه را به‌دو قسمت BCD و AB تقسیم می‌کنیم. نیروی قائم وارد به BCD برابر است با:

$$F_{v_{BCD}} = \left(\frac{\pi r^2}{2} + 2r^2\right)\gamma = (2\pi + 8)\gamma$$



شکل ۲۲ ـ ۲ مانع استوانه‌ای

توجه کنید که سطح آزاد خیالی برای CD از A می‌گذرد. نیروی قائم وارده به AB برابر است با:

$$F_{v_{AB}} = -\left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4}\right)\gamma = -(4-\pi)\gamma$$

بنابراین وزن واحد طول استوانه برابر است با:

$$F_{v_{BCD}} + F_{v_{AB}} = (3\pi + 4)\gamma = 0.132\ \text{MN}$$

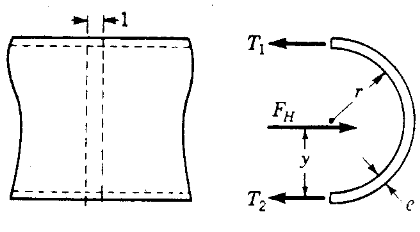
ب) نیروی وارد به‌دیوار برابر است با نیروی افقی وارد به ABC منهای نیروی افقی وارد به CD. مؤلفه‌های افقی نیروهای وارد به BC و CD یکدیگر را خنثی می‌کنند، زیرا تصویر BCD روی صفحهٔ قائم صفر است. پس فقط سطح AB باقی می‌ماند. با توجه به‌اینکه مساحت تصویر AB برابر $2\ \text{m}^2$ و فشار در مرکز سطح آن $9806\ \text{Pa}$ است، داریم:

$$F_H = F_{H_{AB}} = 2\gamma = 19.6\ \text{kN}$$

برای تعیین عکس‌العمل‌های خارجی ناشی از نیروهای فشاری، می‌توان به‌جای اثر سیال، دو مؤلفهٔ افقی و یک مؤلفهٔ قائم که روی خط اثر مربوطه اثر می‌کنند در نظر گرفت.

تنش کششی در لوله و پوسته کروی

لوله‌ها در اثر فشار داخلی تحت کشش محیطی قرار می‌گیرند. با فرض اینکه تنش طولی به‌وجود نیاید، جدارهٔ لوله مطابق شکل ۲۳ ـ ۲ تحت کشش قرار می‌گیرد. مقطعی از لوله به‌طول واحد را در نظر می‌گیریم که به‌شکل حلقه است. دیاگرام آزاد نصف حلقه را رسم می‌کنیم. نیروی کششی وارد بر



شکل ۲۳ ـ ۲ تنشهای کششی در لوله

واحد طول را در بالا و پایین به‌ترتیب به T_1 و T_2 نشان می‌دهیم. مؤلفهٔ افقی نیروی فشاری $2pr$ است. p فشار در مرکز لوله و r شعاع داخلی آن است. این نیرو از مرکز فشار تصویر سطح می‌گذرد.

اگر فشار زیاد باشد، می‌توان مرکز فشار را در مرکز لوله گرفت. در آن صورت $T_2=T_1$ خواهد بود و داریم:

$$T = pr \qquad (۲ - ۶ - ۵)$$

که در آن T نیروی کششی بر واحد طول لوله است. ضخامت جدارهٔ لوله را به e نشان می‌دهیم. لذا تنش کششی در جدارهٔ لوله برابر است با:

$$\sigma = \frac{T}{e} = \frac{pr}{e} \qquad (۲ - ۶ - ۶)$$

اگر تغییرات فشار از پایین تا بالای لوله زیاد باشد، بایستی محل مرکز فشار یعنی y را تعیین کرد. در این حالت به‌دو معادله احتیاج داریم

$$T_1 + T_2 = 2pr \qquad 2rT_1 - 2pry = 0$$

در معادلهٔ دوم، گشتاور نیروها را حول لبهٔ پایینی حلقه برابر صفر قرار داده‌ایم. از مؤلفهٔ قائم نیروی فشاری صرفنظر شده است. از حل معادلات به‌دست می‌آوریم:

$$T_1 = py \qquad T_2 = p(2r - y)$$

مثال ۱۲ - ۲. قطر داخلی یک لولهٔ فولادی 100 mm و ضخامت جدارهٔ آن 6 mm است. تنش کششی مجاز 70 MPa است. حداکثر فشار چقدر می‌تواند باشد؟

حل. از معادلهٔ (۶ - ۶ - ۲) داریم:

$$p = \frac{\sigma e}{r} = \frac{(70\times10^6\ \mathrm{Pa})(0.006\ \mathrm{m})}{0.1\ \mathrm{m}} = 4.2\ \mathrm{MPa}$$

پوسته کروی جدار نازکی را در نظر بگیرید که تحت فشار داخلی قرار دارد. کره را با یک **صفحهٔ** قائم به‌دو قسمت تقسیم کرده، دیاگرام آزاد نیمکره را رسم می‌کنیم. از وزن سیال صرفنظر می‌کنیم. نیروی وارده از سیال به‌داخل نیمکره $p\pi r^2$ است که r شعاع کره است. تنش σ ضربدر سطح بریده‌شدهٔ جداره یعنی $2\pi re$ باید این نیرو را متعادل کند. پس:

$$\sigma = \frac{pr}{2e}$$

تمرینات

۱ - ۶ - ۲. مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به‌یک سطح منحنی برابر است با □ الف) وزن مایعی که به‌طور قائم در بالای سطح