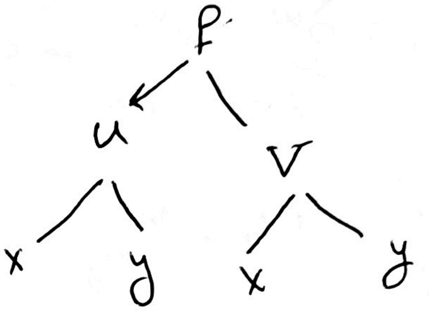
قاعده زنجیره‌ای: فرض کنید $Z=f(u,v)$ تابع دو متغیره برحسب u و v باشد که u و v خود توابع مشتق‌پذیر برحسب x و y هستند. به طور مثال $u=g(x,y)$ و $v=h(x,y)$. دراین صورت تابع f تابع مشتق‌پذیر برحسب x و y است و داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$



برای توابع n متغیره $Z=f(u_1,u_2,\dots,u_n)$ نیز می‌توان فرمول فوق را تعمیم داد.

مثال فرض کنید $Z=x^2y^2+2xe^y$ و $x=\sin 2t$ و $y=\cos 3t$. مطلوبست $\frac{\partial Z}{\partial t}$.

حل.

$$\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial Z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$=(2xy^2+2e^y)(2\cos 2t)+(2x^2y+2xe^y)(-3\sin 3t)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری } x \text{ و } y}(2\sin 2t\cdot\cos^2 3t+2e^{\cos 3t})(2\cos 2t)+(2\sin^2 2t\cdot\cos 3t+2\sin 2t\cdot e^{\cos 3t})(-3\sin 3t)$$

مثال. اگر $Z=e^x\cdot\sin y$ و $x=sr^2$ و $y=s^2r$. مطلوبست Z_r و Z_s.

حل.

$$\frac{\partial Z}{\partial r}=\frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial Z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=(e^x\sin y)(2sr)+(e^x\cos y)(s^2)$$

$$=(e^{sr^2}\sin s^2r)(2sr)+(e^{sr^2}\cos s^2r)\cdot s^2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial s}=\frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial Z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=(e^x\sin y)r^2+(e^x\cos y)(2sr)$$

105

مثال. فرض کنید $w=f(x-y,\ y-z,\ z-x)$ مطلوبست محاسبه $w_x+w_y+w_z$

حل. فرض می‌کنیم
$$\begin{cases} u_1=x-y \\ u_2=y-z \\ u_3=z-x \end{cases}$$
در این صورت داریم:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=w_x=\frac{\partial w}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x}=w_{u_1}(1)+w_{u_2}(0)+w_{u_3}(-1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}=w_{u_1}-w_{u_3}$$

$$w_y=\frac{\partial w}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial y}=w_{u_1}(-1)+w_{u_2}(1)+w_{u_3}(0)=-w_{u_1}+w_{u_2}$$

$$w_z=\frac{\partial w}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial z}=w_{u_1}(0)+w_{u_2}(-1)+w_{u_3}(1)=-w_{u_2}+w_{u_3}$$

$$\Rightarrow w_x+w_y+w_z=w_{u_1}-w_{u_3}-w_{u_1}+w_{u_2}-w_{u_2}+w_{u_3}=0$$

مثال. اگر $z=y\cdot f(x^2-y^2)$. مطلوبست حاصل $\frac{1}{x}z_x+\frac{1}{y}z_y$.

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y f(x^2-y^2)\right)=y\frac{\partial}{\partial x}f(x^2-y^2)$$

با فرض $u=x^2-y^2$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(2x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=2xy\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(y f(x^2-y^2)\right)=\frac{\partial y}{\partial y}f(x^2-y^2)+y\frac{\partial f(x^2-y^2)}{\partial y}=$$

$$f(x^2-y^2)+y\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f(x^2-y^2)+y\frac{\partial f}{\partial u}(-2y)$$

1.6

لذا داریم:

$$\frac{1}{x} Z_x + \frac{1}{y} Z_y = \frac{1}{x}(2xy f_u) + \frac{1}{y}\left(f(x^2-y^2) - 2y^2 f_u\right)$$

$$= 2y f_u + \frac{f(x^2-y^2)}{y} - 2y f_u = \frac{f(x^2-y^2)}{y}$$

مثال. اگر $Z = f(u,v)$ و $u = x\cdot y$ و $v = x^2 - y^2$ مطلوبست $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$

حل. داریم $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$. ابتدا مقدار $\frac{\partial Z}{\partial y}$ را می‌یابیم.

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial u}(x) + \frac{\partial Z}{\partial v}(-2y)$$

$$= x Z_u - 2y Z_v$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x Z_u - 2y Z_v\right)$$

$$= Z_u + x\frac{\partial}{\partial x}(Z_u) - 2y\frac{\partial}{\partial x}(Z_v) =$$

$$Z_u + x\left(\frac{\partial}{\partial u} Z_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} Z_u \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2y\left(\frac{\partial}{\partial u} Z_v \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} Z_v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) = Z_u + x\left(Z_{uu}\cdot y + Z_{uv}\cdot(2x)\right)$$

$$-2y\left(Z_{vu}\, y + Z_{vv}\, 2x\right) = Z_u + xy Z_{uu} + 2x^2 Z_{uv}$$

$$-2y^2 Z_{vu} - 4xy Z_{vv}$$

مثال. اگر $Z = x f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ نشان دهید

$$x^2 Z_{xx} + 2xy Z_{yx} + y^2 Z_{yy} = 0$$

حل. فرض کنید $u = \frac{y}{x}$.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f(u) + x\left(\frac{-y}{x^2}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \left(\frac{-y}{x^2}\right)\frac{\partial g}{\partial u} = f(u) - \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \left(\frac{-y}{x^2}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial u} +$$
$$\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$
$$= -\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = x\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

جایگذاری در معادله:

$$x^2\left[\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right] + 2xy\left[-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u} -\right.$$
$$\left.\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right] + y^2\left[\frac{1}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right] = 0$$

مشتق گیری ضمنی: اگر $f(x,y)=0$ تابعی باشد که به طور ضمنی مشتق پذیر است و

در آن y به عنوان تابعی از x باشد یعنی داشته باشیم $f(x,y(x))=0$

در این صورت بنا به قاعده زنجیره ای داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0 \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-f_x}{f_y}$$

به همین ترتیب اگر $f(x,y,z)=0$ معرف تابعی باشد که به طور ضمنی مشتق پذیر

است و در آن z به عنوان تابعی برحسب x و y باشد، یعنی $z=z(x,y)$، در

اینصورت مشتق ضمنی تابع $f(x,y,z(x,y))$ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \Longrightarrow z_x=\frac{-f_x}{f_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \Longrightarrow z_y=\frac{-f_y}{f_z}$$

مثال. برای رابطه $x^3+y^3+z^3+6xy=1$ مطلوبست محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$.

حل.

$$x^3+y^3+z^3+6xy-1=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z}=\frac{-(3x^2+6y)}{(3z^2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_z}=\frac{-(3y^2+6x)}{3z^2}$$

مثال. مقدار u_x و u_y و u_z را برای تابع $e^{xyz} = zu$ بیابید.

حل: $e^{xyz} - zu = 0 \Rightarrow u_x = \dfrac{-f_x}{f_u} = \dfrac{-(yze^{xyz})}{-z}$

$$u_y = \frac{-f_y}{f_u} = \frac{-xze^{xyz}}{-z}$$

$$u_z = -\frac{f_z}{f_u} = \frac{-xye^{xyz} - u}{-z}$$

مثال. مقادیر z_x و z_y را در معادله $f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$

برحسب x و y و z و مشتقات جزئی f بیابید.

حل. فرض کنیم $u = x+y+z$ و $v = x^2+y^2+z^2$ داریم:

$$z_x = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)}$$

$$= -\frac{(f_u + 2xf_v)}{f_u + 2zf_v}$$

به همین ترتیب داریم:

$$z_y = -\frac{f_y}{f_z} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)}$$

$$= -\frac{(f_u + 2yf_v)}{f_u + 2zf_v}$$

مثال. فرض کنید z تابعی برحسب x و y باشد. حاصل z_y را در نقطه (π,π,π) بیابید.

$$\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(x+z)=0$$

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-f_y}{f_z}=-\frac{(\cos(x+y)+\cos(y+z))}{\cos(y+z)+\cos(x+z)}=-1$$

تعریف دیفرانسیل: فرض کنید $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ تابعی n متغیره باشد، دیفرانسیل تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

مثال. دیفرانسیل کل توابع زیر را بیابید.

1) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow df=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}dy+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}dz$

2) $g(x,y)=xe^{xy}\longrightarrow df=(e^{xy}+xye^{xy})dx+x^2e^{xy}dy$

مثال. شعاع قاعده یک شکل استوانه‌ای مستدیر $3\,cm$ و ارتفاع آن $4\,cm$ است. اگر شعاع قاعده را به $2.9\,cm$ و ارتفاع را به $4.2\,cm$ برسانیم، میزان کل تغییر حجم یا برنیک را بیابید.

حل: داریم

$$V=\pi r^2h\xrightarrow{?}dV=?$$

$$\begin{cases}dr=2.9-3=-0.1\\ dh=4.2-4=0.2\end{cases}\qquad dV=\frac{\partial V}{\partial r}dr+\frac{\partial V}{\partial h}dh=2\pi rh\,dr+\pi r^2dh$$

$$\Rightarrow dV=2(3.14)(3)(4)(-0.1)+\pi(3)^2(0.2)=-0.6\pi$$

تقریب زدن توابع: در توابع تک متغیره داشتیم

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$$

حال در توابع چند متغیره داریم

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \simeq f(x,y) + f_x\cdot\Delta x + f_y\cdot\Delta y$$

مثال. مقدار تقریبی $\sqrt{(2.99)^2+(4.1)^2}$ را بیابید.

حل.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \begin{cases} x=3 \longrightarrow \Delta x = -0.01 \\ y=4 \longrightarrow \Delta y = 0.1 \end{cases}$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \sqrt{(2.99)^2+(4.1)^2} \simeq f(3,4) + f_x\cdot(-0.01)$$

$$+ f_y(0.1) = \sqrt{3^2+4^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(-0.01) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(0.1)$$

$$= 5 + \frac{3}{5}(-0.01) + \frac{4}{5}(0.1)$$

تمرینات درس نهم

۱- برای تابع $f(x,y,z)=\sin\left(\dfrac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}\right)$ نشان دهید $xf_x+yf_y+zf_z=0$.

۲- فرض کنید $z=y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$. نشان دهید $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

۳- اگر $z=u^2+v^2-2uv$

و $u=r\cos\theta$ و $v=r\sin\theta$، مقدار

$\dfrac{\partial z}{\partial r}$ را بیابید.

۴. اگر $z=f(x,y)$ و $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$. با فرض وجود مشتقات جزئی مربوطه نشان دهید:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

۵، فرض کنید تابع دو متغیره $f(u,v)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد و $w=f(xy,z-2x)$ نشان دهید

$$xw_x-yw_y+2xw_z=0$$

۶ اگر $z=\dfrac{f(x-y)}{y}$ نشان دهید $z+y\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

۷. اگر $z=z(x,y)$ و داشته باشیم $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$. مقدار z_x-z_y را بیابید

۸. دیفرانسیل کل تابع $u(x,y)=\ln(2xy-3y)$ را بیابید.

۹- حاصل مقدار تقریبی $\sin\left((1.05)^2+(0.95)^2\right)-\sin(1^2+1^2)$ را بیابید.

۱۰. اگر $z=f(x,y)$ مشتق‌های جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشد، با توجه به $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ نشان دهید

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

بردار گرادیان، صفحه مماس و مشتق‌های جهتی

تعریف بردار گرادیان: فرض کنید $f: R^n \longrightarrow R$ یک تابع چند متغیره دلخواه داده شده باشد، در این صورت گرادیان تابع f که با نماد ∇f نمایش داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla f = \text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

و اگر $f(x,y,z)$ تابعی سه متغیره باشد، در این صورت

$$\nabla f = \text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

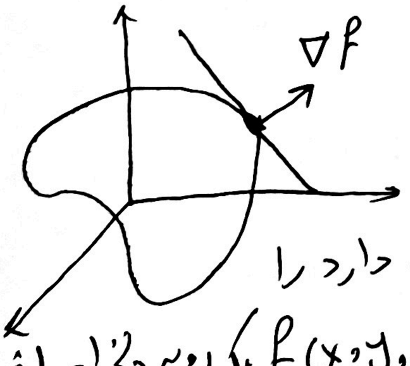
مثال.

$$\text{If} \quad f = e^{xyz} + \sin(yz) - x\sin(z) \Longrightarrow$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(yze^{xyz} - \sin z, xze^{xyz} + z\cos yz, xye^{xyz} + y\cos(yz) - x\cos z \right)$$

$$\text{If} \quad f(x,y) = xy^2 + e^{xy} \Longrightarrow \nabla f = \left(y^2 + ye^{xy}, 2xy + xe^{xy} \right)$$

قضیه: بردار گرادیان در هر نقطه بر رویه عمود است



تعریف: صفحه‌ای که تمام مماس‌های بر یک رویه را در یک نقطه دارد را صفحه مماس بر رویه گویند. فرض کنید $f(x,y,z) = 0$ یک رویه دلخواه باشد، از قضیه فوق نتیجه می‌گیریم که بردار گرادیان بر صفحه مماس بر رویه نیز عمود است. لذا بردار گرادیان همان بردار نرمال صفحه است. در نتیجه داریم:

$$\vec{n} = (a,b,c) = (f_x, f_y, f_z)$$

معادله صفحه مماس بر رویه در نقطه دلخواه (x_0, y_0, z_0) :

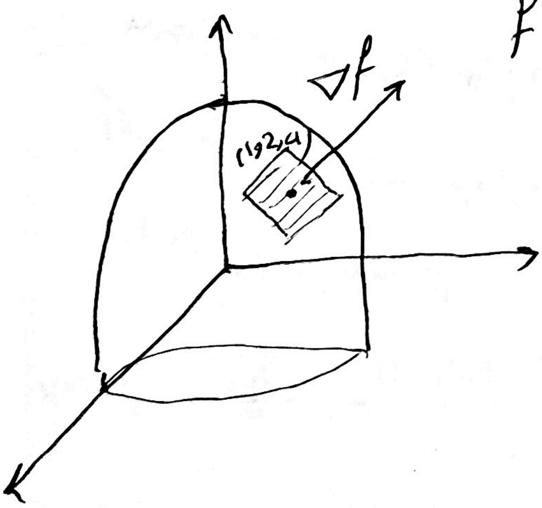
$$\boxed{f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)+f_z(z-z_0)=0}$$

تعریف : خطی که بر صفحه مماس بر رویه عمود باشد، را خط قائم بر رویه گویند.
از حقایق فوق نتیجه می‌شود که بردار گرادیان همان بردار هادی خط قائم بر رویه است.
در نتیجه معادله خط قائم بر رویه S در نقطه دلخواه (x_0, y_0, z_0) عبارت است از:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{f_z(x_0,y_0,z_0)}}$$

مثال. معادلات صفحه مماس و خط قائم بر رویه زیر را در نقطه $(1,2,4)$ بیابید.

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z-9=0$$



حل. نمودار رویه یک سهمیگون دایره‌ای است، داریم

$$\nabla f=(2x,2y,1)\xrightarrow{\nabla f(1,2,4)}$$

$$\nabla f_{(1,2,4)}=(2,4,1)$$

لذا معادله صفحه مماس:

$$2(x-1)+4(y-2)+(z-4)=0 \Rightarrow 2x+4y+z=14$$

معادله خط قائم بر رویه در نقطه $(1,2,4)$:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-4}{1} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+4t \\ z=4+t \end{cases}$$

مثال. معادله صفحه مماس و خط قائم بر رویه $z=x^2y^2+2xe^y$ را در نقطه $A(1,0,2)$ بیابید.

حل. داریم

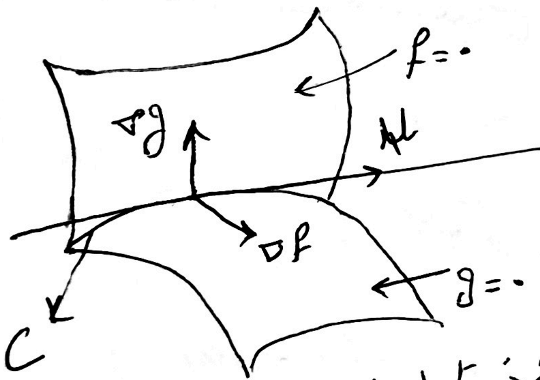
$$x^2y^2+2xe^y-z=0 \Rightarrow \nabla f=(2xy^2+2e^y,\ 2x^2y+2xe^y,\ -1)$$

$$\Rightarrow \nabla f_{(1,0,2)}=(2,2,-1)$$

$$\Rightarrow 2(x-1)+2(y-0)-1(z-2)=0 \longrightarrow$$ معادله صفحه مماس

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-2}{-1} \longrightarrow$$ معادله خط قائم

مثال (خط مماس بر فصل مشترک دو رویه). معادله پارامتری خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطح های $4x^2+y^2+z^2=9$ و $z=x^2+y^2$ را در نقطه $(-1,1,2)$ بیابید.



حل. نقطه $(-1,1,2)$ یک نقطه از منحنی C است، چون در هر دو معادله صدق می‌کند. اکنون کافیست بردار موازی با خط مماس در این نقطه را بیابیم. این بردار همان $N=\nabla f\times\nabla g$

$$u_1=\nabla f(-1,1,2)=(8x)i+2yj+2z\vec{k} \xrightarrow{(-1,1,2)} -8i+2j+4k$$

$$u_2=\nabla g(-1,1,2)=-2i+2j-k$$

$$\rightsquigarrow u=\nabla f\times\nabla g=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -8 & 2 & 4\\ -2 & 2 & -1\end{vmatrix}=-10\vec{i}+16\vec{j}+12\vec{k}$$

معادله پارامتری خط

$$x=-10t-1,\quad y=-16t+1,\quad z=-12t+2$$

مثال. معادله خط مماس بر مقطع دو رویه $x^2+2y^2+3z^2=6$ و $xyz=1$ را در نقطه $(1,1,1)$ بیابید.

حل:

$$\nabla f=(2x,4y,6z)\rightarrow \nabla f(1,1,1)=(2,4,6)$$

$$\nabla g=(yz,xz,xy)\rightarrow \nabla g(1,1,1)=(1,1,1)$$

$$\Rightarrow u=\nabla f\times\nabla g=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-2,4,-2)$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-2}\rightarrow$$ معادله خط مماس

مثال. معادله خط مماس بر مقطع رویه‌های زیر در نقطه $(1,0,2)$ را بیابید.

A) $x^2y+zy^2+2x-4y+3z^2=14$

B) $x-2yz+xyz^2-4y=1$

حل.

$$\nabla A=(2xy+2,x^2+2yz-4,y^2+6z)\Rightarrow \nabla A(1,0,2)=(2,-3,12)$$

$$\nabla B=(1+yz^2,-2z+xz^2-4,-2y+2xyz)\rightarrow \nabla B(1,0,2)=(1,-4,0)$$

$$\rightarrow u=\nabla A\times\nabla B=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -3 & 12\\ 1 & -4 & 0\end{vmatrix}=(48,12,-5)$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{48}=\frac{y-0}{12}=\frac{z-2}{-5}$$

مثال نشان دهید کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ و مخروط $x^2+y^2-z^2=0$ در نقاط مشترک بر هم متعامدند.

حل.

$$f=x^2+y^2+z^2-a^2\longrightarrow \nabla f=(2x,2y,2z)$$

$$g=x^2+y^2-z^2\longrightarrow \nabla g=(2x,2y,-2z)$$

$$\xrightarrow{\text{شرط تعامد}} \nabla f\cdot\nabla g=0$$

$$\nabla f\cdot\nabla g=(2x,2y,2z)\cdot(2x,2y,-2z)=4(x^2+y^2-z^2)=0$$

مشتق سوی (جهتی):

یادآوری: f_x و f_y و f_z میزان تغییرات تابع f نسبت به x و y و z بودند. در واقع مشتقات جزئی میزان تغییرات تابع $f(x,y,z)$ به ترتیب در جهت های i و j و k بود. حال می خواهیم این مفهوم را در هر جهت دلخواه عمومیت بدهیم.

مشتق سوی (جهتی): فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه $\bar{x} \in R^n$ تعریف شده باشد که $\bar{x}$ یک نقطه دلخواه است. همچنین فرض کنید $u \in R^n$ یک بردار یکه دلخواه باشد در این صورت مشتق سوی (جهتی) تابع f در نقطه $\bar{x}$ و در جهت بردار u به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_u f(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t}$$

در این تعریف اگر $\bar{x} = (x_0, y_0) \in R^2$ و $\bar{u} = (a, b) \in R^2$ بردار یکه باشد در این صورت

$$D_u f(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

اگر داشته باشیم $u = i = (1, 0)$. در این صورت

$$D_u f(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

اگر داشته باشیم $u = j = (0, 1)$ در این صورت

$$D_u f(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

یعنی اگر $u = \vec{i}$ در این صورت مشتق سوی در نقطه (x_0, y_0) همان مشتق جزئی $\frac{\partial f}{\partial x}$ در این نقطه خواهد بود و اگر $u = \vec{j}$ آن گاه مشتق سوی همان $\frac{\partial f}{\partial y}$ خواهد بود. در واقع مشتقات جزئی حالت خاصی از مشتق سوی هستند.

مثال. مقدار مشتق سوی تابع $f(x,y)=x^2y$ را در نقطه $(1,2)$ و در جهت بردار $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$ بیابید.

حل داریم

$$u=3i+4j \longrightarrow |u|=\sqrt{9+16}=5$$

چون $\vec{u}$ یکه نیست ابتدا آن را یکه می‌کنیم داریم:

$$u_{new}=\frac{u}{|u|}=\frac{3}{5}i+\frac{4}{5}j \longrightarrow |u_{new}|=1$$

$$D_u f(1,2)=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+\frac{3}{5}t,2+\frac{4}{5}t)-f(1,2)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+\frac{3}{5}t)^2(2+\frac{4}{5}t)-2}{t}=\frac{16}{5}$$

نکته: گاهی اوقات بردار یکه $\vec{u}$ را به صورت $\vec{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$ نیز نشان می‌دهند که در آن θ زاویه‌ای است که $\vec{u}$ با محور xها می‌سازد.

در فضای R^3 نیز $\vec{u}$ را می‌توانیم به صورت $\vec{u}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ نوشت که در آن α و β و γ زوایایی هستند که $\vec{u}$ به ترتیب با محور xها yها و zها می‌سازد.

مثال. مشتق سوی تابع زیر را در مبدأ مختصات و در جهت محوری که با $\vec{ox}$ زاویه 30° می‌سازد را بیابید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حل. داریم:

$$\vec{u}=(\cos 30^\circ,\sin 30)=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})\longrightarrow |u|=1$$

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+\frac{\sqrt{3}}{2}t,0+\frac{1}{2}t)-f(0,0)}{t}=$$

$$\lim\frac{f(\frac{\sqrt{3}}{2}t,\frac{1}{2}t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}t)^3}{(\sqrt{3}/2\,t)^2+(\frac{1}{2}t)^2}-0}{t}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

قضیه (ارتباط بین مشتق سوی و بردار گرادیان): اگر مشتقات جزئی تابع f در نقطه $\bar{X}=(x_0,y_0)\in R^2$ موجود و پیوسته باشند و $\vec{u}=(a,b)$ برداری یکه دلخواهی باشد آن‌گاه،

$$D_u f(\bar{X}) = \nabla f \cdot \vec{u}$$

به همین ترتیب اگر $f:R^n \to R$ داده شده باشد و $\bar{X}\in R^n$ و $u\in R^n$ برداری یکه باشد، در این صورت اگر مشتقات جزئی f در $\bar{X}\in R^n$ موجود باشند داریم:

$$D_u f(\bar{X}) = \nabla f(\bar{X})\cdot \vec{u}$$

مثال. مشتق سوی تابع $f(x,y,z)=z-e^x\cos(y+z)$ را در نقطه $(0,0,\frac{\pi}{6})$ و در جهت بردار $u=i+\sqrt{3}j+2k$ بیابید.

حل. داریم:

$$\nabla f(0,0,\tfrac{\pi}{6})=(f_x,f_y,f_z)\Big|_{(0,0,\frac{\pi}{6})} =$$

$$(e^x\cos(z+y), e^x\sin(y+z), 1+e^x\sin(y+z)) = (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})$$

$$u=i+\sqrt{3}j+2k \to |u|=\sqrt{8} \to u_{new}=\frac{u}{|u|}=\frac{1}{\sqrt{8}}i+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}j+\frac{2}{\sqrt{8}}\vec{k}$$

$$\to D_{\vec{u}}f(0,0,\tfrac{\pi}{6}) = \nabla f\cdot u_{new} = (-\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2})(\tfrac{1}{\sqrt{8}},\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}},\tfrac{2}{\sqrt{8}}) \Rightarrow$$

$$D_{\vec{u}}f(0,0,\tfrac{\pi}{6}) = \frac{3}{\sqrt{8}}$$

مثال (مشتق جهتی در امتداد منحنی). مشتق جهتی تابع $f(x,y)=x^3-3xy$ را در امتداد منحنی $y=x^2-x+2$ و در نقطه $(1,2)$ بیابید.

حل. داریم:

$$\nabla f=(2x-3y)i-3xj \to \nabla f(1,2)=-4i-3j=(-4,-3)$$

برای پیدا کردن جهت $\vec{u}$، بردار یکه مماس بر منحنی $\vec{c}$ حاصل از رویه را می‌یابیم.

در واقع $\vec{u}$ همان بردار یکه مماس (T) خواهد بود. داریم.

12. با فرض $\begin{cases} x=t \\ y=t^2-t+2 \end{cases}$ یعنی $y=x^2-x+2$ را به صورت پارامتری

$r(t)=ti+(t^2-t+2)j$ نمایش می‌دهیم داریم لذا. $t=x=1$

$r(1)=i+2j$ و $r'(t)=i+(2t-1)j \longrightarrow r'(1)=i+j$

$$\longrightarrow T(1)=\frac{r'(1)}{|r'(1)|}=\frac{i+j}{\sqrt2}=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$$

$$\longrightarrow u=T(1)=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)\Rightarrow$$

$$Df_u=\nabla f\cdot u=(-4,-3)\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=-\frac{7}{\sqrt2}$$

مثال. مشتق سوئی تابع دو متغیره $f(x,y)$ در نقطه $(2,3)$ در جهت $v_1=i+j$ برابر $2\sqrt2$ و در جهت $v_2=-2j$ برابر -3 است. مشتق سوئی تابع $f(x,y)$ را در جهت $v_3=-i-2j$ بیابید.

حل.

$$v_1=i+j \rightarrow |v_1|=\sqrt2 \longrightarrow u_1=\frac{1}{\sqrt2}i+\frac{1}{\sqrt2}j=\frac{v_1}{|v_1|}$$

$$v_2=-2j \rightarrow |v_2|=2 \longrightarrow u_2=\frac{v_2}{|v_2|}=-j$$

If $\nabla f=(f_x,f_y)$

$$Df_{u_1}(2,3)=2\sqrt2 \longrightarrow (f_x,f_y)\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=2\sqrt2$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{f_x}{\sqrt2}+\frac{f_y}{\sqrt2}=2\sqrt2}\ (*)$$

$$Df_{u_2}(2,3)=-3 \longrightarrow (f_x,f_y)(0,-1)=-3 \longrightarrow -f_y=-3$$

$$\longrightarrow f_y=3 \xrightarrow[(*)]{\text{جایگذاری در}} \frac{f_x}{\sqrt2}+\frac{3}{\sqrt2}=2\sqrt2 \longrightarrow f_x=1$$

$$\longrightarrow \nabla f=(1,3) \quad \text{و} \quad v_3=-i-2j \longrightarrow u_3=\left(-\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5}\right)$$

$$\rightsquigarrow Df_{u_3}=\nabla f\cdot u_3=(1,3)\left(-\frac{1}{\sqrt5},-\frac{2}{\sqrt5}\right)=-\frac{7}{\sqrt5}$$

مثال مخروط $x^2+4y^2=z^2$ و صفحه $2x-y+2z=14$ یکدیگر را در منحنی C قطع می‌کنند. مشتق سوی تابع $f=\ln(x^2+y^2+z^2)$ را در نقطه $(3,2,5)$ و در جهت بردار مماس بر $\vec{C}$ بدست آورید.

حل. داریم

$$A: x^2+4y^2-z^2 \longrightarrow \nabla A=(2x,8y,-2z)=(6,16,-10)$$

$$B: 2x-y+2z-14 \longrightarrow \nabla B=(2,-1,2)$$

$$\vec{u}=\nabla A\times\nabla B=(22,-32,-38) \longrightarrow u_{new}=\frac{(22,-32,-38)}{\sqrt{758}}$$

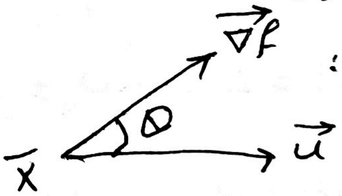
$$D_u f=\nabla f\cdot u=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)\Big|_{(3,2,5)}\cdot u_{new}$$

خواص مشتق سوی: از تعریف مشتق سوی داریم:

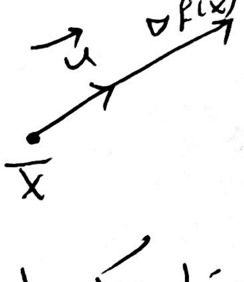
$$D_u f(\bar{x})=\nabla f\cdot u=|\nabla f||u|\cos\theta$$

که در آن θ زاویه بین $\vec{u}$ و $\vec{\nabla f}$ است. چون $\vec{u}$ یکه است لذا $|u|=1$ و در نتیجه داریم:

$$D_u f(\bar{x})=|\nabla f|\cos\theta$$



① اگر $\theta=0$ آنگاه $\cos\theta=1$ لذا مشتق سوی بیشترین مقدار ممکن را دارد و مقدار آن برابر با $|\nabla f|$ است. یعنی بیشترین مقدار مشتق سوی تابع f در جهت بردار گرادیان است و اندازه آن $|\nabla f|$ است.



در این حالت می‌توان قرار داد

$$u=\frac{\nabla f(\bar{x})}{|\nabla f(\bar{x})|}$$

② اگر $\theta=\pi$ آنگاه $\cos\theta=-1$. لذا مشتق سوی کمترین مقدار ممکن را دارد و مقدار آن برابر با $-|\nabla f|$ است. لذا بیشترین کاهش در جهت $-\nabla f$ خواهد بود.

③ اگر $\theta=\frac{\pi}{2}$ در این حالت $\cos\theta=0$. لذا مقدار مشتق سوئی برابر صفر خواهد بود

مثال. مطلوب است جهت هایی که در آن تابع $f=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}$ در نقطه $(1,1)$ بیشترین افزایش، بیشترین کاهش و تغییرات صفر را دارد.

حل.

$$\nabla f=(f_x,f_y)=(x,\frac{y}{2})\to \nabla f(1,1)=(1,\frac{1}{2})$$

بیشترین افزایش:

$$u=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{(1,\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt5}{2}}=(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5})$$

بیشترین کاهش:

$$u=-\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=-\frac{(1,\frac{1}{2})}{\sqrt5/2}=(-\frac{2}{\sqrt5},-\frac{1}{\sqrt5})$$

تغییرات صفر:

$$u\perp\nabla f\to \text{If } u=(-1,2)\to u\cdot\nabla f=(-1,2)(1,\frac{1}{2})=0$$

مثال. فرض کنید $f(x,y)=x^2y+xy^3+4x-5y+2$ و بیشترین مقدار مشتق سوئی تابع f روی محور x ها برابر ۱۰ باشد. این نقطه را بیابید.

حل. با توجه به اینکه نقطه روی محور x ها است لذا مقدار y آن صفر است. فرض کنیم نقطه مورد نظر به صورت $(a,0)$ باشد. داریم.

$$\nabla f=(2xy+4,x^2+3xy^2-5)\to\nabla f(a,0)=(4,a^2-5)$$

$$\max D_u f=|\nabla f|=10\to\sqrt{16+(a^2-5)^2}=10$$

$$\Rightarrow 16+(a^2-5)^2=100\Rightarrow a=\pm\sqrt{\sqrt{84}+5}$$

مثال. نشان دهید مشتق سوی تابع $f = \frac{y^2}{x}$ در هر نقطه از بیضی $2x^2+y^2=2$ و در جهت قائم بر بیضی در همان نقطه مقدار ثابتی است.

حل. می دانیم بردار گرادیان بر هر رویه عمود (قائم) است. لذا

$$\text{If } g = 2x^2+y^2-2 \longrightarrow \nabla g = (4x, 2y) \perp g$$

لذا می توانیم قرار دهیم

$$u = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{(4x, 2y)}{\sqrt{16x^2+4y^2}}$$

از طرفی داریم:

$$\nabla f = \left(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x}\right) \quad \text{و} \quad D_u f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) . u$$

$$\rightarrow D_u f(\bar{x}) = \left(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x}\right)\left(\frac{4x}{\sqrt{16x^2+4y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{16x^2+4y^2}}\right)$$

$$= \frac{-4xy^2}{x^2\sqrt{16x^2+4y^2}} + \frac{4y^2}{x\sqrt{16x^2+4y^2}} = 0$$

تعریف مشتق پذیری توابع دو متغیره: تابع $f(x,y)$ را در نقطه (x_0, y_0) مشتق پذیر گوییم هرگاه $f_x(x_0, y_0)$ و $f_y(x_0, y_0)$ موجود و پیوسته باشند و داشته باشیم

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 . \Delta x + \varepsilon_2 . \Delta y$$

که در آن هرگاه $\nabla x, \nabla y \to 0$ نتیجه بگیریم $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ (یعنی

$$\Big(\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0$$

مثال. ثابت کنید تابع $f(x,y)=x\cdot y$ در R^2 مشتق پذیر است.

حل. فرض کنیم $(x_0,y_0)\in R^2$ نقطه‌ای دلخواه باشد. داریم:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x)\cdot(y_0+\Delta y)-x_0 y_0=$$

$$y_0\Delta x+x_0\Delta y+\Delta x\cdot\Delta y \qquad (I)$$

از طرفی داریم

$$f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_1\cdot\Delta x+\varepsilon_2\Delta y=$$

$$y_0\Delta x+x_0\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y \qquad (II)$$

از روابط (I) و (II) می‌بینیم که اگر قرار دهیم $\varepsilon_2=0$ و $\varepsilon_1=\Delta y$ آن‌گاه

اگر $\Delta x,\Delta y\to 0$ نتیجه می‌گیریم $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$. در نتیجه f مشتق‌پذیر است.

قضیه. اگر تابع f در (x_0,y_0) مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در (x_0,y_0) پیوسته است (یعنی شرط لازم مشتق‌پذیری پیوستگی است)

نتیجه: اگر f در نقطه‌ای پیوسته نباشد، در آن نقطه مشتق ناپذیر است.

مثال: تابع زیر در نقطه $(0,0)$ پیوسته نیست لذا در این نقطه مشتق ناپذیر است.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

قضیه: اگر تابع f در نقطه (x_0,y_0) مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه مشتقات جزئی آن در نقطه (x_0,y_0) وجود دارند. ~~اما~~ اما عکس آن لزوماً برقرار نیست (شرط لازم).

نتیجه: اگر مشتقات جزئی تابع f در نقطه (x_0,y_0) موجود نباشند تابع f مشتق ناپذیر است.

125

مثال. تابع زیر در نقطه (0,0) مشتق پذیر نیست. چون $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ موجود نیست

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

قضیه: اگر تابع f در نقطه (x_0, y_0) مشتق پذیر باشد آن گاه مشتقات سوئی آن در هر جهتی وجود دارند اما عکس آن لزوماً برقرار نیست (شرط لازم)

قضیه شرط کافی مشتق پذیری: اگر مشتقات جزئی $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ از تابع $f(x,y)$ در سرتاسر یک گوی باز $\vec{C}$ موجود و پیوسته باشند آن گاه f در C مشتق پذیر است.

کاربردهای مشتق توابع چندمتغیره

اکسترمم توابع چندمتغیره

تعریف: فرض کنید تابع $f: R^n \longrightarrow R$ یک تابع چندمتغیره باشد، نقطه $x^* \in R^n$ را یک نقطه max نسبی تابع f گویند هرگاه یک همسایگی مانند I از نقطه $x^* \in R^n$ وجود داشته باشد به طوریکه

$$f(x^*) \geqslant f(x) \quad \forall x \in I$$

و x^* را min نسبی گویند هرگاه.

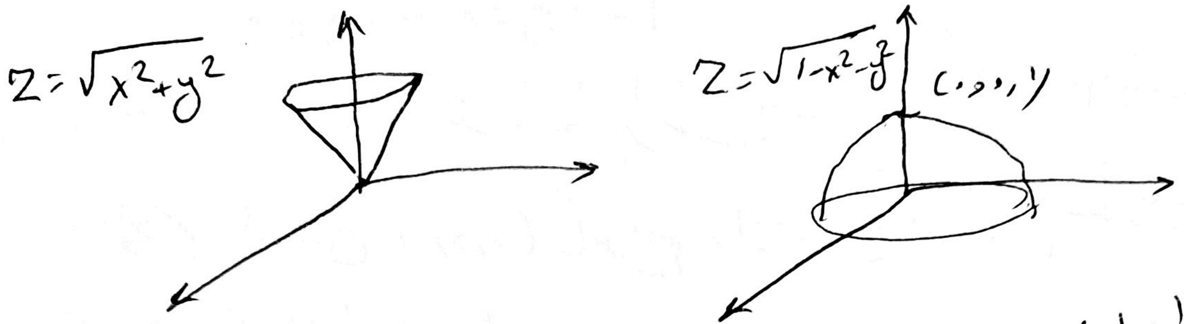
$$f(x^*) \leqslant f(x) \quad \forall x \in I$$

تعریف: نقطه x^* را ماکزیمم مطلق گویند هرگاه. $f(x^*) \geqslant f(x), \ \forall x \in D_f$

و نقطه x^* را مینیمم مطلق گویند هرگاه $f(x^*) \leqslant f(x), \ \forall x \in D_f$

نکته: به نقاط max نسبی و min نسبی اکسترمم های موضعی گویند.

مثال. نیم کره $Z^2=1-x^2-y^2$ در مبدأ یک ماکزیمم نسبی دارد که ماکزیمم مطلق نیز هست. همچنین مخروط $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ در مبدأ یک min نسبی دارد که روی کل R^2 مطلق است.



تعریف نقاط بحرانی: نقطه $x^*\in R^n$ را یک نقطه بحرانی برای تابع f گویند هرگاه $\nabla f(x^*)=0$ یا مشتقات جزئی تابع f در x^* موجود نباشد.

قضیه: اگر تابع $f:R^n\longrightarrow R$ یک تابع چند متغیره باشد که در همسایگی $x^*\in R^n$ تعریف شده است و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول باشد. در این صورت اگر نقطه $x^*\in R^n$ یک نقطه اکسترمم باشد آن گاه

$$\nabla f(x^*)=0$$

نتیجه: اگر $x^*\in R^n$ یک نقطه اکسترمم تابع f باشد آن گاه x^* یک نقطه بحرانی است.

توجه شود که عکس قضیه فوق لزوماً برقرار نیست. یعنی هر نقطه بحرانی لزوماً اکسترمم نیست.

تعریف: به یک نقطه بحرانی که اکسترمم نباشد یک نقطه زینی اسبی (یا minmax) گویند.

مثال. نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^2+y^2-2y+2$ را بیابید.

حل

$$\nabla f=(f_x,f_y)=(2x,2y-2)=0\Rightarrow\begin{cases}2x=0\longrightarrow x=0\\2y-2=0\longrightarrow y=1\end{cases}$$

لذا نقطه $(0,1)$ یک نقطه بحرانی است. توجه شود که این نقطه min نسبی هم هست چون داریم

$$f(x,y)=x^2+(y-1)^2+1$$

که مینیمم آن در $(0,1)$ اتفاق می‌افتد.

مثال. نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^2-y^2$ را بیابید و بررسی کنید که آیا اکسترمم است یا نه

حل

$$\nabla f=(2x,-2y) \longrightarrow \nabla f=0 \longrightarrow \begin{cases} 2x=0 \longrightarrow x=0 \\ -2y=0 \longrightarrow y=0 \end{cases}$$

لذا $(0,0)$ یک نقطه بحرانی است اما اکسترمم نیست (بعداً نشان می‌دهیم)

چون از جهتی $(0,0)$ ماکزیمم و از جهتی دیگر این نقطه مینیمم است. لذا $(0,0)$ یک نقطه زینی است

$$f(a,0)=a^2-0 \geq f(0,0)=0$$

$$f(0,b)=0-b^2 \leq f(0,0)=0$$

آزمون مشتق دوم برای توابع دو متغیره:

فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دو متغیره باشد، هسین (Hessian) تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Hf=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

برای ماتریس Hf داریم:

$$\det(Hf)=f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}\cdot f_{yx}$$

قضیه آزمون مشتق دوم: فرض کنید $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ یک نقطه بحرانی باشد برای تابع $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow \mathbb{R}$. در این صورت

الف. اگر $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ و $\det(Hf)(x_0,y_0)>0$ آن‌گاه (x_0,y_0) یک نقطه min نسبی است.

ب. اگر $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ و $\det(Hf)(x_0,y_0)>0$ آن‌گاه (x_0,y_0) یک نقطه max نسبی است.

ج. اگر $\det(Hf)(x_0,y_0)<0$ آن گاه (x_0,y_0) یک نقطه زینی است.

د. اگر $\det(Hf)(x_0,y_0)=0$ آن گاه این آزمون بی نتیجه است.

مثال. نوع نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2-3y+2$ را بیابید.

حل.

$$\nabla f=(3x^2-6x\,,\,3y^2-3) \qquad \text{If } \nabla f=0 \Longrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x=0 \longrightarrow x=0\,,\,x=2 \\ 3y^2-3=0 \longrightarrow y=\pm 1 \end{cases}$$

لذا نقاط بحرانی عبارت اند از $(0,1)$، $(0,-1)$، $(2,1)$ و $(2,-1)$.

داریم:

$$Hf=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,1)=\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow f_{xx}(0,1)<0\,,\ \det H(f)=-36<0$$

لذا نقطه $(0,1)$ ~~ماکزیمم نسبی است~~ نقطه زین اسبی است.

$$Hf(0,-1)=\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow f_{xx}(0,-1)=-6<0\,,\ \det(H(f))=36>0$$

$\Longrightarrow$ نقطه $(0,-1)$ ماکزیمم نسبی است.

$$Hf(2,1)=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow f_{xx}(2,1)=6>0 \text{ و } \det(H(f))=36>0$$

$\Longrightarrow$ نقطه $(2,1)$ مینیمم نسبی است.

$$Hf(2,-1)=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow f_{xx}(2,-1)=6>0\,,\ \det(H(f))=-36$$

$\Longrightarrow$ نقطه $(2,-1)$ نقطه زینی است.

مثال نقاط بحرانی تابع $f(x,y) = xy\,e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$ را بیابید و نوع آن ها را مشخص کنید.

حل. داریم:

$$f_x = y(1-x^2)\,e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \quad \text{و} \quad f_y = x(1-y^2)\,e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1-x^2)\,e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} = 0 \\ x(1-y^2)\,e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1-x^2) = 0 \\ x(1-y^2) = 0 \end{cases}$$

جواب های این دستگاه عبارت اند از:

$(0,0)$ $(1,1)$ $(1,-1)$ $(-1,1)$ $(-1,-1)$

$$Hf = \begin{bmatrix} xy(x^2-3)\,e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} & (1-x^2)(1-y^2)\,e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \\ (1-x^2)(1-y^2)\,e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} & xy(y^2-3)\,e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \end{bmatrix}$$

$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(Hf)(0,0) = -1 < 0 \rightarrow$ لذا $(0,0)$ نقطه زینی است.

$Hf(1,1) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{e} \end{bmatrix} \rightarrow f_{xx} < 0$ و $\det Hf = (\frac{2}{e})^2 > 0$ لذا نقطه $(1,1)$ مینیمم نسبی است.

$Hf(-1,-1) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{e} \end{bmatrix} \rightarrow f_{xx} < 0,\ \det Hf = (\frac{2}{e})^2 > 0 \rightarrow$ $(1,1)$ مینیمم نسبی است

$Hf(1,-1) = \begin{bmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{bmatrix} \rightarrow f_{xx} > 0$ و $\det Hf = (\frac{2}{e})^2 > 0 \rightarrow$ $(1,-1)$ ماکزیمم موضعی است

$Hf(-1,1) = \begin{bmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{bmatrix} \rightarrow f_{xx} > 0,\ \det Hf = (\frac{2}{e})^2 > 0 \rightarrow$ $(-1,1)$ ماکزیمم موضعی است.

مثال. نوع نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=x^3-2y^3+2x^2+y+3$ را بیابید.

حل.

$$\nabla f=(3x^2+4x,\ -6y^2+1) \to \nabla f=0 \to \begin{cases} 3x^2+4x=0 \to x=0,\ -\frac{4}{3} \\ -6y^2+1=0 \to y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{نقاط بحرانی}}$ $(0,\frac{1}{\sqrt{6}})$, $(0,\frac{-1}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{4}{3},\frac{1}{\sqrt{6}})$ و $(-\frac{4}{3},\frac{-1}{\sqrt{6}})$

$$\to Hf=\begin{bmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & -12y \end{bmatrix}$$

$\det(Hf)(0,\frac{1}{\sqrt{6}})=\frac{-48}{6}<0 \longrightarrow$ $(0,\frac{1}{\sqrt{6}})$ نقطه زینی است

$\det(Hf)(0,\frac{-1}{\sqrt{6}})=\frac{48}{\sqrt{6}}>0,\ f_{xx}(0,\frac{-1}{\sqrt{6}})=4>0 \Rightarrow$

$(0,\frac{-1}{\sqrt{6}})$ مینیمم نسبی است.

$\det(Hf)(-\frac{4}{3},\frac{1}{\sqrt{6}})=\frac{48}{\sqrt{6}}>0,\ f_{xx}(-\frac{4}{3},\frac{1}{\sqrt{6}})=-4<0 \Rightarrow$

$(-\frac{4}{3},\frac{1}{\sqrt{6}})$ ماکزیمم نسبی است.

$\det(Hf)(-\frac{4}{3},\frac{-1}{\sqrt{6}})=\frac{-48}{\sqrt{6}}<0 \longrightarrow$ $(-\frac{4}{3},\frac{-1}{\sqrt{6}})$ نقطه زینی است.

اکسترمم های مقید (روش لاگرانژ).

فرض کنید بخواهیم تابع چند متغیره $f(x)$ را تحت شرط $g(x)=0$ بهینه کنیم (ماکزیمم یا مینیمم کنیم) تعریف می کنیم:

$$F(x,\lambda) = f(x) - \lambda \cdot g(x)$$

حال نقاط بحرانی تابع جدید $F(x,\lambda)$ را می یابیم. نقاط بحرانی تابع $F(x,\lambda)$ تحت شرایطی همان نقاط اکسترمم تابع $f(x)$ تحت شرط $g(x)=0$ خواهد بود.

توجه شود که نقاط بحرانی تابع $F(x,\lambda)$ با قرار دادن گرادیان این تابع برابر صفر بدست می آید.

$$\nabla F = 0 \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow -g(x) = 0 \longrightarrow g(x) = 0 \end{cases}$$

مثال: نقاط اکسترمم تابع $f(x,y,z) = x-2y+5z$ را روی کره $x^2+y^2+z^2=30$ بیابید.

حل. داریم:

$$\begin{cases} f = x-2y+5z \\ g = x^2+y^2+z^2-30 \end{cases} \longrightarrow F = f - \lambda g = x-2y+5z-\lambda(x^2+y^2+z^2-30)$$

$$\nabla F = 0 \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1-2\lambda x = 0 \longrightarrow x = \dfrac{1}{2\lambda} & (I) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2-2\lambda y = 0 \longrightarrow y = -\dfrac{1}{\lambda} & (II) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 5-2\lambda z = 0 \longrightarrow z = \dfrac{5}{2\lambda} & (III) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x^2+y^2+z^2-30) = 0 \longrightarrow x^2+y^2+z^2-30=0 & (*) \end{cases}$$

با جایگذاری روابط (I)، (II)، (III) در $(*)$ داریم:

$$x^2+y^2+z^2=30 \rightsquigarrow \left(\frac{1}{4\lambda^2}\right)+\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)+\left(\frac{25}{4\lambda^2}\right)=30$$

$$\rightsquigarrow 4\lambda^2=1 \rightsquigarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

$$\text{If } \lambda=\frac{1}{2} \to \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=5 \end{cases} \to f(x,y,z)=30 \to \text{نسبی } \max$$

$$\text{If } \lambda=-\frac{1}{2} \to \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-5 \end{cases} \to f(x,y,z)=-30 \to \text{نسبی } \min$$

مثال: مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y)=x\cdot y$ را تحت قید $x^2+y^2=10$ بیابید.

حل. داریم

$$\begin{cases} f=x\cdot y \\ g=x^2+y^2-10 \end{cases} \longrightarrow F(x,y,\lambda)=x\cdot y-\lambda(x^2+y^2-10)$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=y-2\lambda x=0 \to x=\dfrac{y}{2\lambda} & (I) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x-2\lambda y \to x=2\lambda y & (II) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=-(x^2+y^2-10)=0 & (*) \end{cases}$$

با جایگذاری (I) و (II) در (*) داریم:

$$\cancel{x^2+y^2=10 \to \frac{y^2}{4\lambda^2}+} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{y}{2\lambda} \\ x=2\lambda y \end{cases} \to \frac{y}{2\lambda}=2\lambda y$$

$$\to y\left(\frac{1}{2\lambda}-2\lambda\right)=0 \to \begin{cases} y=0 \to x=0 \to \text{غ ق ق. چون در شرط (*) صدق نمی کنند} \\ \dfrac{1}{2\lambda}=2\lambda \to \lambda=\pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lambda=\pm\frac{1}{2} \xrightarrow{x=\frac{y}{2\lambda}} x=\pm y \xrightarrow{\text{جایگذاری در (*)}} x^2+x^2-10=0$$

$$\to x=\pm\sqrt{5} \to y=\pm\sqrt{5} \xrightarrow{\text{نقاط بحرانی}} (\sqrt{5},\sqrt{5}),(\sqrt{5},-\sqrt{5})$$

$$,(-\sqrt{5},\sqrt{5}),(-\sqrt{5},-\sqrt{5}) \to f(\pm\sqrt{5},\pm\sqrt{5})=5$$

لذا تمام نقاط فوق نقاط max نسبی است. توجه شود برای اینکه تشخیص دهیم این نقاط max نسبی یا min نسبی هستند کافیست یک نقطه دیگر که در شرط $x^2+y^2=10$ صدق می‌کند را امتحان کنیم و ببینیم مقدار max است یا min. به عنوان مثال نقطه $(3,1)$ در شرط $x^2+y^2=10$ صدق می‌کند و داریم $f(3,1)=3$.

چون $f(\pm\sqrt5,\pm\sqrt5)=5$ لذا نقاط $(\pm\sqrt5,\pm\sqrt5)$ max هستند.

مثال. بر صفحه $x-y+z=2$ نقطه‌ای بیابید که فاصله آن تا مبدأ min شود.

حل. فرض کنیم نقطه مورد نظر (x,y,z) باشد، فاصله آن نقطه تا مبدأ برابر $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ است. لذا هدف مینیمم کردن تابع $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ تحت شرط $x-y+z=2$ است. توجه شود برای راحتی کار می‌توانیم به جای عبارت $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$، $x^2+y^2+z^2$ (توان دو f) را مینیمم کرد. لذا قرار می‌دهیم

$$F=x^2+y^2+z^2-\lambda(x-y+z-2)$$

$$\nabla F=0 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=0 \to 2x-\lambda=0 \to x=\frac{\lambda}{2} & (I) \\ \frac{\partial F}{\partial y}=0 \to 2y+\lambda=0 \to y=-\frac{\lambda}{2} & (II) \\ \frac{\partial F}{\partial z}=0 \to 2z-\lambda=0 \to z=\frac{\lambda}{2} & (III) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0 \to x-y+z-2=0 \to x-y+z=2 & (*) \end{cases}$$

با جایگذاری روابط (I و II و III) در $(*)$ داریم:

$$x-y+z=2 \to \frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{2}=2 \to \lambda=\frac{4}{3}$$

$$\to \begin{cases} x=\frac{4}{6} \\ y=-\frac{4}{6} \\ z=\frac{4}{6} \end{cases} \to$$

نقطه $(\frac{4}{6},-\frac{4}{6},\frac{4}{6})$ کمترین فاصله را تا مبدأ دارد و مقدار فاصله برابر $\sqrt{\frac{16}{36}+\frac{16}{36}+\frac{16}{36}}=\frac{4\sqrt3}{6}$ است.

مثال. x و y و z سه عدد مثبت اند به طوری که $x^2+yz=4$ مطلوبست بیشترین مقدار

$$f = xy + 2yz + 3xz$$

حل.

$$F = xy + 2yz + 3xz + \lambda(x^2+yz-4)$$

$$\nabla F = 0 \to \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \to y + 3z - 2\lambda x = 0 \to \quad (I) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \to x + 2z - \lambda z = 0 \to z = \dfrac{x}{\lambda - 2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0 \to 2y + 3x - \lambda y = 0 \to y = \dfrac{3x}{\lambda - 2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \to x^2 + yz - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + yz - 4 = 0 \to x^2 + \left(\frac{3x}{\lambda-2}\right)\left(\frac{x}{\lambda-2}\right) - 4 = 0$$

$$x^2 + \frac{3x^2}{(\lambda-2)^2} = 4 \to x^2\left(1 + \frac{3}{(\lambda-2)^2}\right) = 4 \quad (*)$$

از طرفی از رابطه (I) داریم

$$y + 3z - 2\lambda x = 0 \to \frac{3x}{\lambda-2} + \frac{3x}{\lambda-2} - 2\lambda x = 0$$

غ ق ق چون $x>0$

$$x\left(\frac{6}{\lambda-2} - 2\lambda\right) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \to \\ \dfrac{6}{\lambda-2} = 2\lambda \to 2\lambda^2 - 4\lambda - 6 = 0 \\ \quad \to \lambda = 1 \quad (**) \end{cases}$$

با جایگذاری $(**)$ در $(*)$ داریم

$$x^2\left(1 + \frac{3}{(1-2)^2}\right) = 4 \to 4x^2 = 4 \to x = \pm 1 \xrightarrow{x>0} x = 1$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{x}{\lambda-2} \to z = \dfrac{-1}{1-2} = +1 \\ y = \dfrac{3x}{\lambda-2} \to y = 3 \end{cases}$$

نقطه مورد نظر $(1,3,1) \longrightarrow$

مثال. فرض کنید x و y و z سه عدد مثبت باشند. اکسترمم های تابع $f=\frac{1}{xyz}$ را تحت شرط $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ بیابید.

حل

$$F=\frac{1}{xyz}-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$$\nabla F=0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{-1}{x^2yz}-\frac{\lambda}{a^2}(2x)=0 \rightarrow \lambda=\frac{a^2}{2x^3yz} & (\mathrm{I}) \\ \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{1}{xy^2z}-\frac{\lambda}{b^2}(2y)=0 \rightarrow \lambda=\frac{b^2}{2xy^3z} & (\mathrm{II}) \\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{-1}{xyz^2}-\frac{\lambda}{c^2}(2z)=0 \rightarrow \lambda=\frac{c^2}{2xyz^3} & (\mathrm{III}) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 & (*) \end{cases}$$

از روابط (I و II و III) داریم:

$$\frac{a^2}{2x^3yz}=\frac{b^2}{2xy^3z}=\frac{c^2}{2xyz^3} \rightarrow \frac{a^2}{x^2}=\frac{b^2}{y^2}=\frac{c^2}{z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \quad (**)$$

جایگذاری روابط (**) در (*) داریم:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}=1 \longrightarrow x=\frac{a}{\sqrt{3}} \longrightarrow y=\frac{b}{\sqrt{3}} \text{ و } z=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

نکته: اگر بخواهیم اکسترمم تابع $f(x)$ را تحت شرط های $g_1(x)=0$ و $g_2(x)=0$ بیابیم تعریف می کنیم

$$F(x,\lambda_1,\lambda_2) = f(x)-\lambda_1 g_1(x)-\lambda_2 g_2(x)$$

مثال. بردو صفحه $\begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y-z=3 \end{cases}$ نقطه ای بیابید که فاصله آن تا مبدأ min شود.

حل. فرض کنید (x,y,z) نقطه مورد نظر باشد. فاصله آن تا مبدأ عبارت است از $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. برای سادگی قرار می دهیم $f=x^2+y^2+z^2$

لذا تابع لاگرانژ به صورت زیر خواهد بود:

$$F(x,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^2+z^2-\lambda_1(x-y+z-2)-\lambda_2(x+y-z-3)$$

داریم:

$$\nabla F=0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=0 \rightarrow 2x-\lambda_1-\lambda_2=0 \rightarrow x=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \\ \frac{\partial F}{\partial y}=0 \rightarrow 2y+\lambda_1-\lambda_2=0 \rightarrow y=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2} \\ \frac{\partial F}{\partial z}=0 \rightarrow 2z-\lambda_1+\lambda_2=0 \rightarrow z=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=0 \rightarrow x-y+z-2=0 \quad (*) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}=0 \rightarrow x+y-z-3=0 \quad (**) \end{cases}$$

با جایگذاری x و y و z در $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$\begin{cases} x-y+z=2 \rightarrow \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-\frac{\lambda_2+\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}=2 \rightarrow 3\lambda_1-\lambda_2=4 \\ x+y-z=3 \rightarrow \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}=3 \rightarrow 3\lambda_2-\lambda_1=6 \end{cases}$$

$$\rightarrow \lambda_1=\frac{18}{8}, \lambda_2=\frac{22}{8} \rightarrow x=\frac{5}{2}, y=\cancel{1/4}, z=-\cancel{1/4}$$

اکسترمم های مطلق:

قضیه: هر تابع پیوسته در یک ناحیه بسته و کران دار دارای اکسترمم های مطلق است.

فرض کنید $f(x,y)$ در ناحیه بسته D پیوسته باشد. برای محاسبه اکسترمم هر تابع f در D،
ابتدا D را به دو قسمت درون D و روی مرز D تقسیم می کنیم.

1. در درون D قرار می دهیم $\nabla f = 0$.
2. روی مرز D از روش اکسترمم های مقید استفاده می کنیم.

نقاط بدست آمده را در تابع $f(x,y)$ قرار می دهیم. بیشترین مقدار max مطلق و کمترین مقدار min مطلق خواهد بود.

مثال. اکسترمم های مطلق تابع $f(x,y)=x\cdot y$ را در ناحیه $\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq 1\}$ بیابید.

حل.

$$f = x\cdot y \rightarrow \nabla f=(y,x)=0 \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \longrightarrow f(0,0)=0$$

برای نقاط روی مرز:

$$F = f-\lambda(x^2+y^2-1) \longrightarrow F = x\cdot y-\lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\rightarrow \nabla F=0 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y-2\lambda x=0 \rightarrow \dfrac{y}{2x}=\lambda & (\mathrm{I}) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x-2\lambda y=0 \rightarrow \dfrac{x}{2y}=\lambda & (\mathrm{II}) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=0 \rightarrow x^2+y^2-1=0 & (*) \end{cases}$$

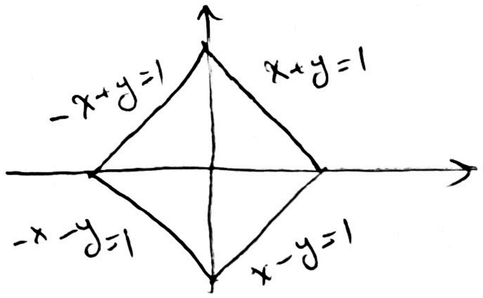
$$\xrightarrow{(\mathrm{I},\mathrm{II})} \frac{y}{2x}=\frac{x}{2y} \rightarrow y^2=x^2 \longrightarrow y=\pm x \xrightarrow[(*)]{\text{جایگذاری در}}$$

$$x^2+x^2=1 \longrightarrow 2x^2=1 \longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2} \quad , \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2} \quad , \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$. لذا نقاط $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ماکزیمم مطلق و $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ min مطلق هستند.

مثال. اکسترمم های مطلق تابع $f = x \cdot y$ را روی ناحیه $D=\{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 1\}$ بیابید.



حل. مسئله چهار شرط دارد.

$$f = x \cdot y \to \nabla f = (y, x) = 0 \to y = x = 0$$

$$\to f(0,0) = 0$$

روی $: x+y=1$

$$F = xy - \lambda(x+y-1) \to \begin{cases} y-\lambda=0 \to y=\lambda \\ x-\lambda=0 \to x=\lambda \\ x+y=1 \to 2x=1 \to x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \to x=y$$

$$\to f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

روش دوم:

$$x+y=1 \to y=1-x \xrightarrow{\text{جایگذاری در } f} f = x \cdot y = x(1-x) = x - x^2$$

$$\to f' = 0 \to 1-2x=0 \to x=\frac{1}{2},\ y=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \to f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

روی $: -x+y=1$

$$F = xy - \lambda(-x+y-1) \to \begin{cases} y+\lambda=0 \to \lambda=-y \\ x-\lambda=0 \to \lambda=x \\ -x+y=1 \to y=\frac{1}{2},\ x=-\frac{1}{2} \end{cases} \to x=-y$$

$$\to f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

روی $: -x-y=1$

$$F = xy - \lambda(-x-y-1) \to \begin{cases} y+\lambda=0 \\ x+\lambda=0 \\ -x-y=1 \to x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x=y$$

$$\to f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

روی $: x-y=1$

$$F = xy - \lambda(x-y-1) \to \begin{cases} y-\lambda=0 \\ x+\lambda=0 \\ x-y=1 \end{cases} \to x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$$

$$\to f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ max نسبی و $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ min نسبی هستند.

تمرینات درس دهم

1: مشتق سوی تابع $f(x,y,z)=e^{xyz}$ را در نقطه $(1,1,1)$ و در راستای بردار گرادیان بیابید.

2. ثابت های a و b و c را چگونه بیابید که مشتق جهتی تابع زیر در نقطه $(1,2,-1)$ دارای ماکزیمم 64 در جهت موازی محور z ها باشد.

$$f(x,y,z)=axy^2+byz+cz^2x^3$$

3. معادله خط مماس و صفحه قائم بر منحنی C که مقطع رویه $x^2-3xy+z^2=1$ و رویه $2x\tan(xz)+2y^2-z=1$ در نقطه $(0,1,1)$ است را بیابید.

4. نشان دهید که سطوح $z=e^{2x+y+4}$ و $z=xy-y^2+8y-5$ در نقطه $(-3,2,1)$ بر هم مماس هستند و معادله صفحه مماس مشترک را بیابید.

5. نوع نقاط برای توابع زیر را مشخص کنید.

الف. $f(x,y)=e^{-x}(x^2-5xy^2-4y^2)$

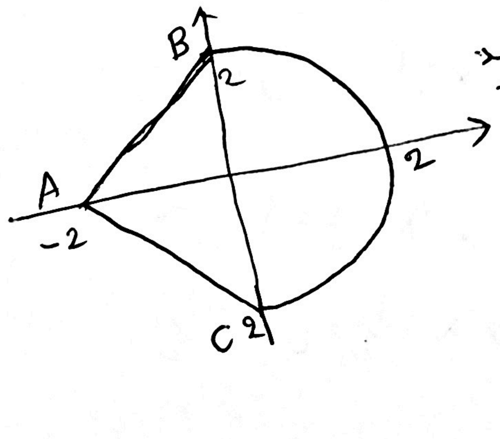
ب. $f(x,y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}-4x+y$

6. نقاط اکسترمم مشروط توابع زیر را بیابید.

$f(x,y,z)=xy^2z^3$ اگر $x+2y+3z=6$

7. مطلوبست مقادیر اکسترمم $f=x^2yz+1$ بر محل تقاطع صفحه $z=1$ با کره $x^2+y^2+z^2=20$.

8. مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y)=x^2y^2$ را بر ناحیه بسته زیر بیابید.

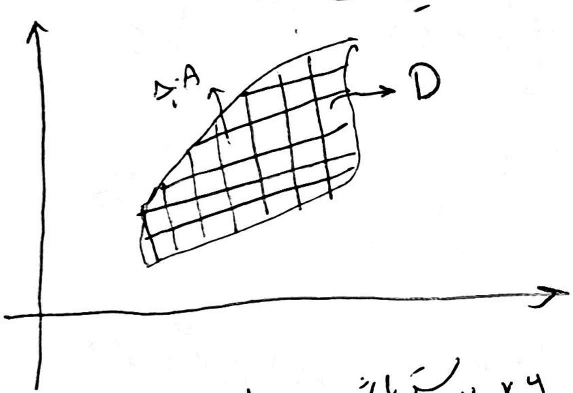


فصل پنجم: انتگرال های چندگانه

انتگرال های دوگانه: فرض کنید تابع $f(x,y)$ بر ناحیه $D \subseteq R^2$ تعریف شده باشد. ناحیه D را به افرازهای $D_1, D_2, \dots, D_n$ تقسیم می کنیم به طوری که $D_i \cap D_j = \phi , \forall i \neq j$ و $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$. مساحت هر جز D_i را با $\Delta A_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ نمایش می دهیم و مجموع زیر را تشکیل می دهیم:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta_i A$$

حال اگر $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta_i A$ موجود باشد، گوییم تابع f بر D دارای انتگرال دوگانه است و آن را به صورت زیر نمایش می دهیم:



$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta_i A = \iint_D f(x,y)\,dA$$

در واقع اگر تابع $f(x,y)$ روی ناحیه D واقع در صفحه xy پیوسته باشد. در این صورت انتگرال دوگانه تابع f روی ناحیه D به عنوان حجم جسمی در نظر گرفته می شود که از بالا به تابع f و از پایین به ناحیه D محدود است.

نکته: اگر $D=[a,b]\times[c,d]$ در این صورت انتگرال دوگانه تابع $f(x,y)$ روی D به صورت زیر تعریف می شود:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

برای محاسبه هر یک از این انتگرال ها ابتدا باید انتگرال میانی را با توجه به دیفرانسیل مربوطه حل کنیم و سپس سراغ انتگرال بیرونی برویم.

مثال:

$$\int_0^3 \int_0^2 e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^3 \int_0^2 e^x e^y\,dx\,dy = \int_0^3 e^y\, e^x \Big|_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^3 e^y (e^2-1)\,dy$$

$$= (e^2-1)\int_0^3 e^y\,dy = (e^2-1)\, e^y \Big|_{y=0}^{y=3} = (e^2-1)(e^3-1)$$

141

قضیه فوبینی، اگر $D=[a,b]\times[c,d]$ و $f(x,y)$ بر D پیوسته باشد آن‌گاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

مثال.

$$\int_1^2\int_3^4 (x^2y+ye^x)\,dx\,dy = \int_3^4\int_1^2 (x^2y+ye^x)\,dy\,dx$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^2}{2}e^x\right)\Bigg|_{y=1}^{y=2} dx = \int_3^4 \left(2x^2+2e^x-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{e^x}{2}\right)\right)dx$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}e^x\right)dx = \frac{3}{6}x^3+\frac{3}{2}e^x\Bigg|_{x=3}^{4} = \frac{4^3}{2}+\frac{3}{2}e^4-\frac{3^3}{2}-\frac{3}{2}e^3$$

مثال:

$$\int_1^2\int_0^\pi y\sin(xy)\,dy\,dx = ?$$

حل. اگر بخواهیم با همین ترتیب مسئله را حل کنیم نیاز به انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم اما با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری با کمک قضیه فوبینی داریم:

$$\int_1^2\int_0^\pi y\sin(xy)\,dy\,dx = \int_0^\pi\int_1^2 y\sin(xy)\,dx\,dy =$$

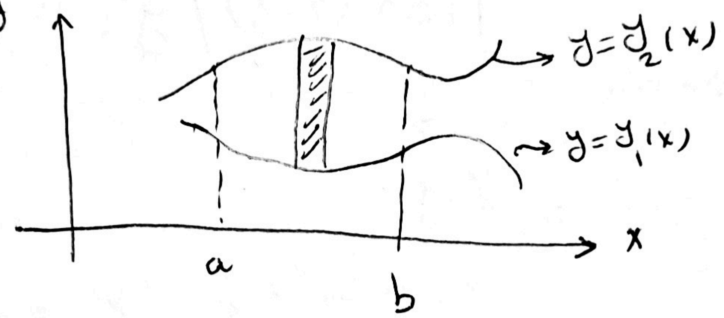
$$= \int_0^\pi -\cos(xy)\Big|_{x=1}^{x=2} dy = \int_0^\pi(-\cos 2y+\cos y)\,dy = 0$$

انتگرال گیری دوگانه روی نواحی غیر مستطیلی

تعریف منظم بودن:

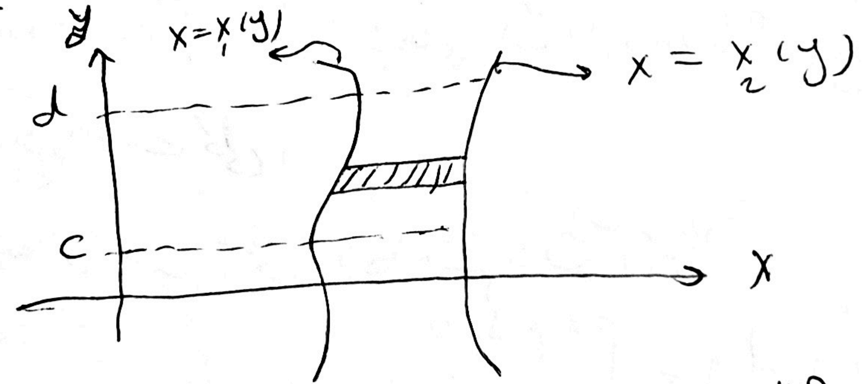
ناحیه D را منظم از نوع اول گویند (منظم در راستای محور y ها گویند) هرگاه.

$$D = \{ (x,y) \mid a \leq x \leq b \text{ و } y_2(x) \leq y \leq y_1(x) \}$$

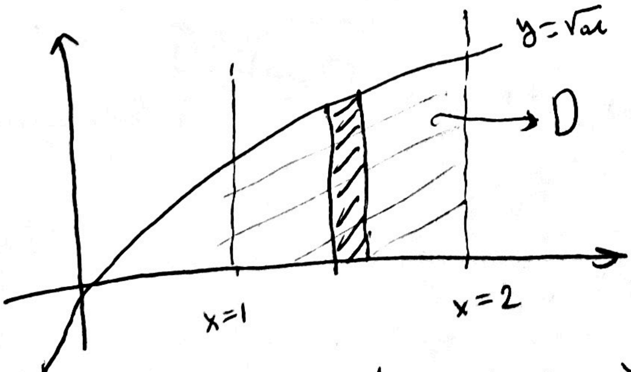


ناحیه D را منظم از نوع دوم (منظم در راستای محور x ها) گویند هرگاه

$$D = \{ (x,y) \mid c \leq y \leq d \text{ و } x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \}$$



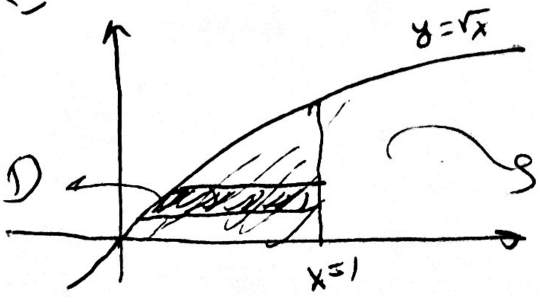
مثال. فرض کنید D ناحیه محصور به $y=\sqrt{x}$ و $y=0$ و $x=1$ و $x=2$ باشد منظم بودن D را نسبت به محور x ها و y ها بررسی کنید



منظم از نوع اول:

$$D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ و } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \}$$

نکته: در مثال قبلی اگر ناحیه محصور به $y=0$ و $y=\sqrt{x}$ و $x=0$ و $x=1$ باشد داریم:



منظم از نوع اول:

$$D_1 = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ و } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \}$$

منظم از نوع دوم:

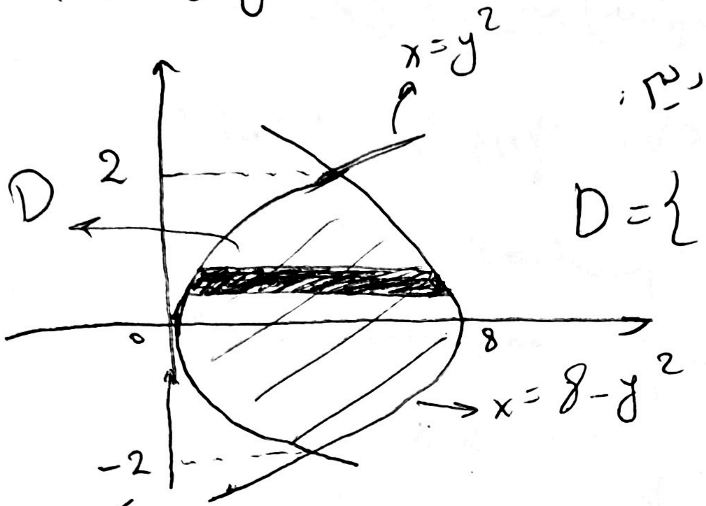
$$D_2 = \{ (x,y) \mid y^2 \leq x \leq 1 \text{ و } 0 \leq y \leq 1 \}$$

یعنی D هم نسبت به محور xها و هم نسبت به محور yها منظم است.

مثال. فرض کنید D ناحیه محدود به منحنی های زیر باشد:

$$D: \begin{cases} x = y^2 \\ x = 8 - y^2 \end{cases}$$

D نسبت به محور xها منظم است و داریم:



$$D = \{ (x,y) \,/\, y^2 \le x \le 8 - y^2 ,\ -2 \le y \le 2 \}$$

توجه شود برای سادگی زمانی که انتگرال دوگانه را روی ناحیه نوع اول یا دوم محاسبه می کنیم ، به ترتیب یک پیکان در جهت محور y یا محور x برای مشخص کردن منحنی های ورودی و خروجی در نظر می گیریم که محدوده، حرکت پیکان ، کران های انتگرال داخلی را مشخص می کند.

قضیه فوبینی در حالت کلی:

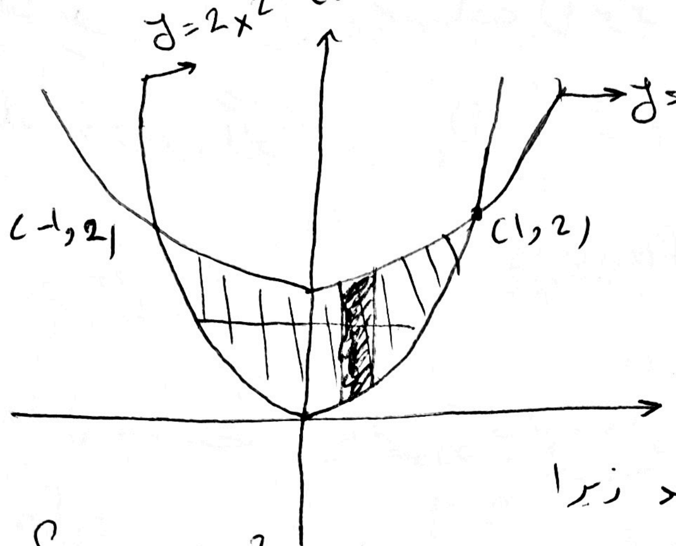
الف: اگر ناحیه D نسبت به محور yها منظم باشد آن گاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

ب. اگر ناحیه D نسبت به محور xها منظم باشد آن گاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال، مقدار $\iint_D (x+2y)\,dA$ که در آن D ناحیه محدود بین منحنی $y=1+x^2$ و $y=2x^2$ می‌باشد را بیابید.



حل.

با توجه به شکل، ناحیه D منظم از نوع اول است. توجه شود که دو منحنی یکدیگر را در نقاط $(1,2)$ و $(-1,2)$ قطع می‌کنند زیرا

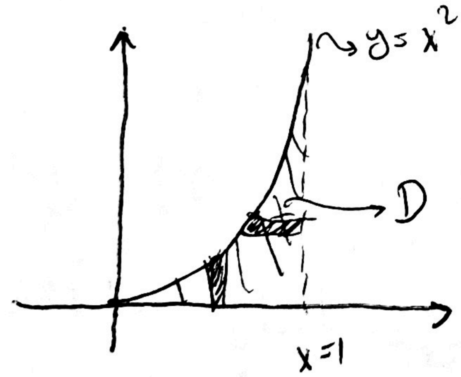
$$\begin{cases} y=1+x^2 \\ y=2x^2 \end{cases} \longrightarrow 1+x^2=2x^2 \longrightarrow x=\pm 1$$

لذا:

$$\iint_D (x+2y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} (xy+y^2)\Big|_{2x^2}^{1+x^2} dx$$

$$= \frac{32}{15}$$

مثال. مطلوب است محاسبه $\iint_D (xy+y^2)\,dx\,dy$ که در آن D ناحیه محصور به $x=0$ و $y=x^2$ و $x=1$ و $y=0$ است.



حل: توجه شود که ناحیه D هم منظم نوع اول و هم منظم نوع دوم است و لذا از هر دو روش می‌توان مسئله را حل کرد.

نوع اول:

$$\iint_D (xy+y^2)\,dA = \int_0^1\int_0^{x^2} (xy+y^2)\,dy\,dx = \frac{1}{12}+\frac{1}{21}$$

نوع دوم:

$$\iint_D (xy+y^2)\,dA = \int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{1} (xy+y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{12}+\frac{1}{21}$$

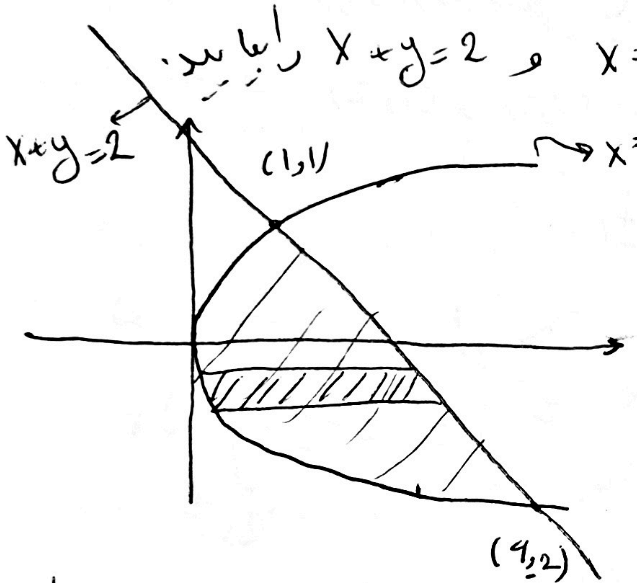
برخی خواص انتگرال های دوگانه:

نکته یک: انتگرال دوگانه ناحیه D برابر است با مساحت ناحیه D.

نکته دو: اگر $D=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ و $D_i \cap D_j = \phi , \forall i \neq j$ آنگاه

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA + \cdots + \iint_{D_n} f(x,y)\,dA$$

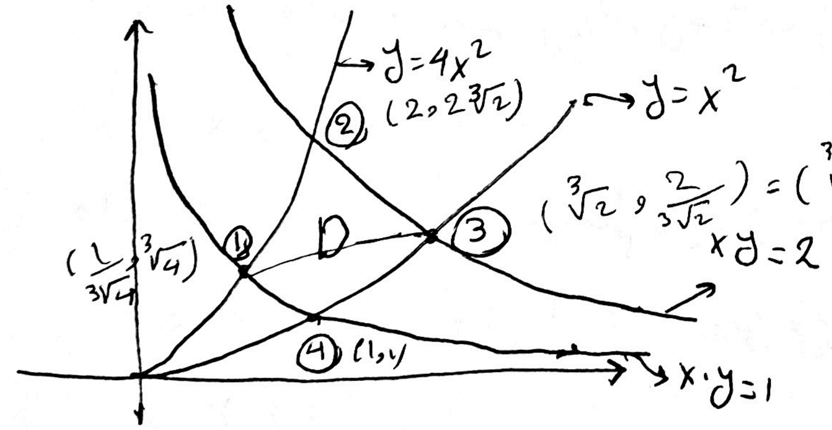
مثال: مساحت ناحیه محدود به منحنی های $x=y^2$ و $x+y=2$ را بیابید.



حل:

$$S=\iint_D dA = \int_{-2}^{1}\int_{y^2}^{2-y} dx\,dy$$

مثال. مساحت ناحیه محدود به منحنی های $y=x^2$ و $y=4x^2$ و $x\cdot y=1$ و $x\cdot y=2$ را بیابید.



حل ابتدا محل تقاطع منحنی ها را می یابیم.

(1) $\begin{cases} x\cdot y=1 \\ y=4x^2 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{x}=4x^2 \rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ و $y=\sqrt[3]{4} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \sqrt[3]{4}\right)$

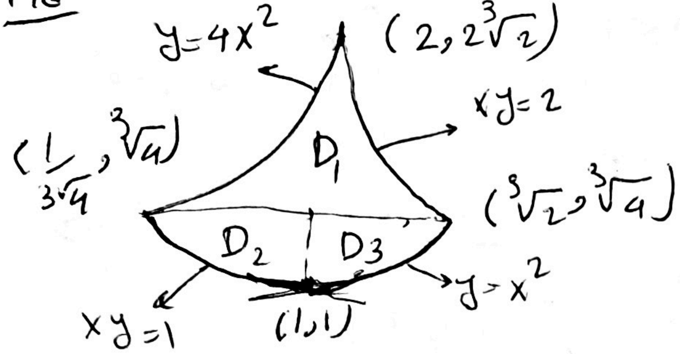
(2) $\begin{cases} xy=2 \\ y=4x^2 \end{cases} \rightarrow \frac{2}{x}=4x^2 \rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ و $y=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=2\sqrt[3]{2} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{2}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\right)$

(3) $\begin{cases} xy=2 \\ y=x^2 \end{cases} \rightarrow \frac{2}{x}=x^2 \rightarrow x=\sqrt[3]{2}$ و $y=\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \rightarrow \left(\sqrt[3]{2}, \frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)$

(4) $\begin{cases} xy=1 \\ y=x^2 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{x}=x^2 \rightarrow x=1 , y=1 \rightarrow (1,1)$

توجه: نقاط (1) و (3) دارای y یکسانی هستند.

لذا داریم:

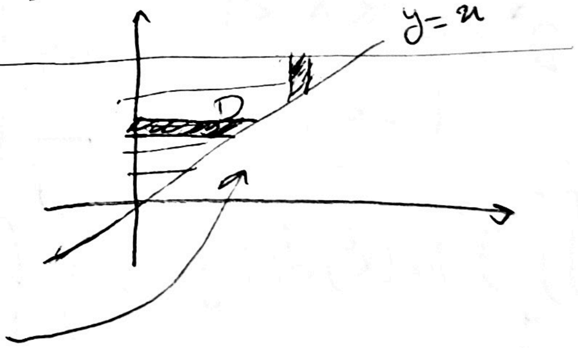


$$\iint_D dA = \iint_{D_1} dA + \iint_{D_2} dA + \iint_{D_3} dA = \int_{\sqrt[3]{4}}^{2\sqrt[3]{2}} \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\frac{2}{y}} dx\, dy + \int_1^{\sqrt[3]{4}} \int_{\frac{1}{y}}^{1} dx\, dy + \int_1^{\sqrt[3]{4}} \int_1^{\sqrt{y}} dx\, dy = \cdots$$

تعویض ترتیب انتگرال گیری: در برخی مواقع ممکن است حل یک انتگرال دوگانه با یک ترتیب مشخص امکان پذیر نباشد. در اینگونه مواقع ممکن است بتوان با تغییر ترتیب انتگرال گیری یک انتگرال دوگانه جدید بدست آورد که حل آن ساده‌تر است.

مثال. انتگرال های دوگانه زیر را حل کنید.

1) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}}\, dy\, dx$



$D = \{(x,y) \mid x \le y \le 1 \text{ و } 0 \le x \le 1\}$

$D^* = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1 \text{ و } 0 \le x \le y\}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^y e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy = \int_0^1 y e^{\frac{x}{y}} \Big|_{x=0}^{x=y} dy$$

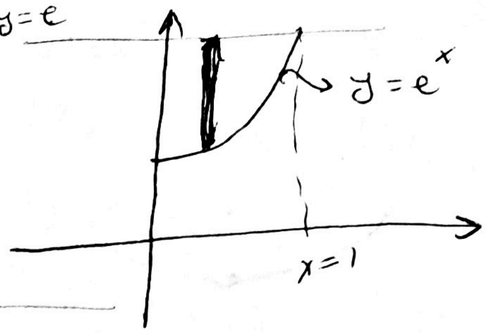
$$= \int_0^1 (ye - y)\, dy = (e-1)\int_0^1 y\, dy = (e-1)\frac{y^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{(e-1)}{2}$$

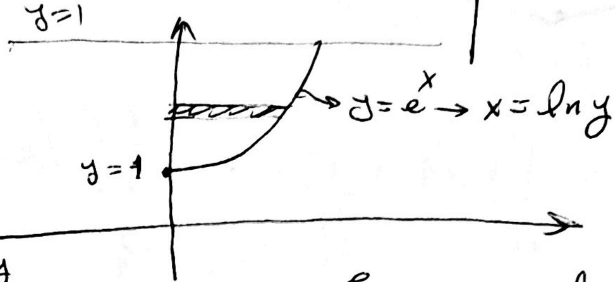
توجه شود که با ترتیب اولیه انتگرال قابل حل نبود.

147

2) $$\int_0^1\int_{e^x}^{e}\frac{1}{\ln y}\,dy\,du \Rightarrow D:\begin{cases}0\leq x\leq 1\\ e^x\leq y\leq e\end{cases}$$



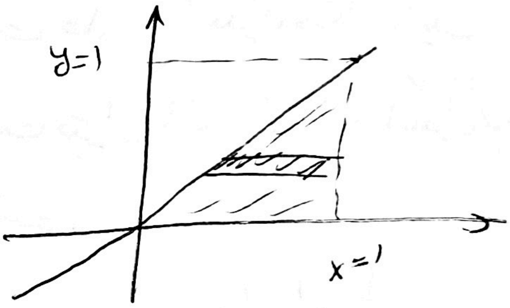
$$D^*:\begin{cases}0\leq x\leq \ln y\\ 1\leq y\leq e\end{cases}$$



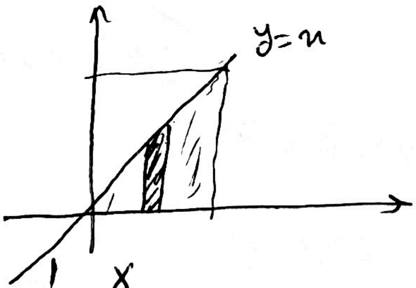
$$\to \int_0^1\int_{e^x}^{e}\frac{1}{\ln y}\,dy\,dx=\int_1^e\int_0^{\ln y}\frac{1}{\ln y}\,dx\,dy=\int_1^e \frac{x}{\ln y}\Big|_{x=0}^{x=\ln y} dy$$

$$=\int_1^e dy = e-1$$

3) $$\int_0^1\int_y^1 y^2\sin(x^2)\,dx\,dy \Rightarrow D:\begin{cases}0\leq y\leq 1\\ y\leq x\leq 1\end{cases}$$



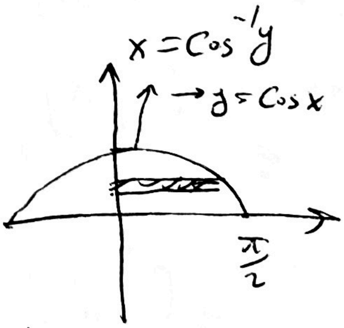
$$\to D^*=\begin{cases}0\leq x\leq 1\\ 0\leq y\leq x\end{cases}$$



$$\to \int_0^1\int_y^1 y^2\sin(x^2)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^x y^2\sin(x^2)\,dy\,dx=\int_0^1 \frac{y^3}{3}\sin(x^2)\Big|_0^x dx$$

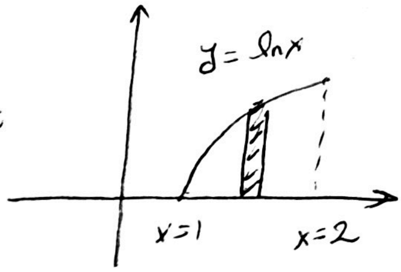
$$=\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\sin(x^2)\,dx \overset{?.?}{=} \cdots$$

4) $$\int_0^1\int_0^{\cos^{-1}(y)}\frac{dx\,dy}{1+\sin x} \to D:\begin{cases}0\leq y\leq 1\\ 0\leq x\leq \cos^{-1}(y)\end{cases}$$

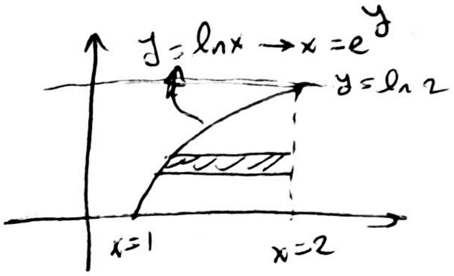


$$D^*=\begin{cases}0\leq y\leq \cos x\\ 0\leq x\leq \frac{\pi}{2}\end{cases} \to \int_0^1\int_0^{\cos^{-1}y}\frac{dx\,dy}{1+\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos x}\frac{dy\,dx}{1+\sin x}=\cdots$$

5) $\int_1^2 \int_0^{\ln x} x\sqrt{1+e^{2y}}\,dy\,dx \rightarrow \quad D: \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \ln x \end{cases}$



$D^* = \begin{cases} e^y \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \ln 2 \end{cases}$



$\rightarrow \int_1^2 \int_0^{\ln x} x\sqrt{1+e^{2y}}\,dy\,dx = \int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^{2} x\sqrt{1+e^{2y}}\,dx\,dy = \int_0^{\ln 2} \frac{x^2}{2}\sqrt{1+e^{2y}}\Big|_{x=e^y}^{x=2} dy$

$= \int_0^{\ln 2} \left(2 - \frac{e^{2y}}{2}\right)\sqrt{1+e^{2y}}\,dy = \int_0^{\ln 2} 2\sqrt{1+e^{2y}}\,dy - \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} e^{2y}\sqrt{1+e^{2y}}\,dy$

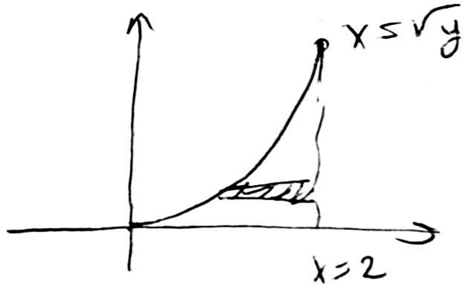
$e^y = \tan\theta$ حل انتگرال اول

$1+e^{2y} = u$ حل انتگرال دوم

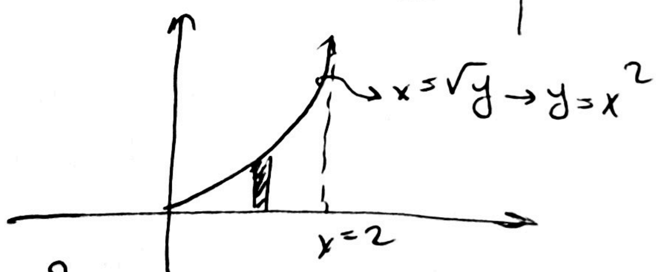
$= \sqrt{5} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right| - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}-1}{\frac{2}{\sqrt{2}}+1}\right|$

$+ \frac{1}{12}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$

6) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} \sqrt{1+x^3}\,dx\,dy \quad D: \begin{cases} 0 \le y \le 4 \\ \sqrt{y} \le x \le 2 \end{cases}$



$D^*: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$



$\rightarrow \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} \sqrt{1+x^3}\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{1+x^3}\,dy\,dx = \int_0^2 y\sqrt{1+x^3}\Big|_{y=0}^{y=x^2} dx$

$= \int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx \xrightarrow{1+x^3=u} \int_1^9 \frac{1}{3}\sqrt{t}\,dt = \frac{52}{9}$

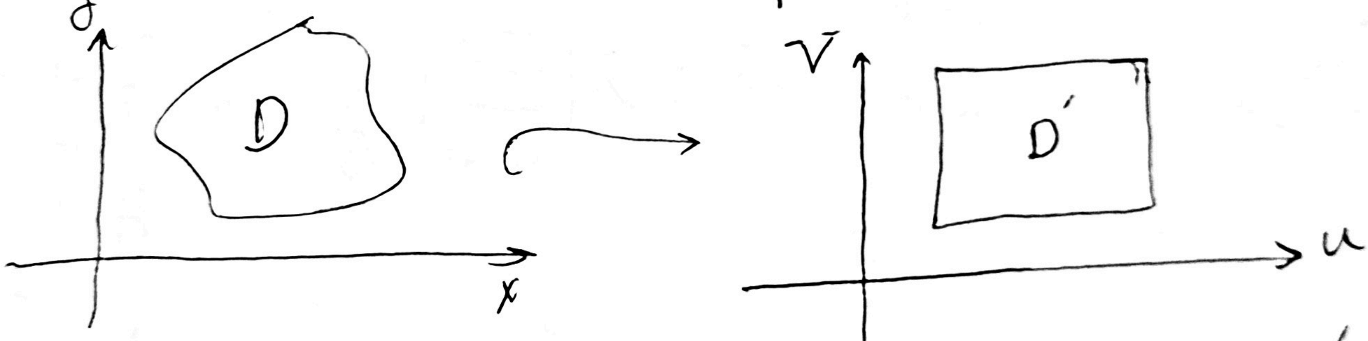
تغییر متغیر در انتگرال های دوگانه:

برای حل برخی از انتگرال های دوگانه لازم است از تغییر متغیری نظیر
$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$
استفاده کنیم که ناحیه D در دستگاه $x-y$ را به ناحیه D' در دستگاه $u-v$ تبدیل می کند.
در این صورت فرمول تغییر متغیر در انتگرال به صورت زیر خواهد بود:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(u,v)\,|J|\,du\,dv$$

که در آن J ژاکوبین تبدیل فوق است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$



نکته: توجه شود که اگر تعریف کنیم $J'(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ آنگاه $J' = \frac{1}{J}$ و داریم:

$$J'(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

مثال. فرض کنید $u = xy$ و $v = \frac{y}{x^2}$ مطلوبست $J(u,v)$.

حل:

$$J'(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{3y}{x^2} = 3v \longrightarrow J(u,v) = \frac{1}{J'(u,v)} = \frac{1}{3v}$$

ژاکوبین در مختصات قطبی:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow J(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \longrightarrow |J| = r$$

در قضیه تغییر متغیر نکات زیر حائز اهمیت است.

1_ D' تبدیل یافته D تحت تابع تغییر متغیر است.

2_ $J(u,v)$ را باید برحسب u و v نوشت.

3- اگر فرمول تغییر متغیر را نداشتیم، به تابع زیر انتگرال نگاه می‌کنیم، اگر دو ترکیب مشخص داشت یکی را u و دیگری را v می‌گیریم.

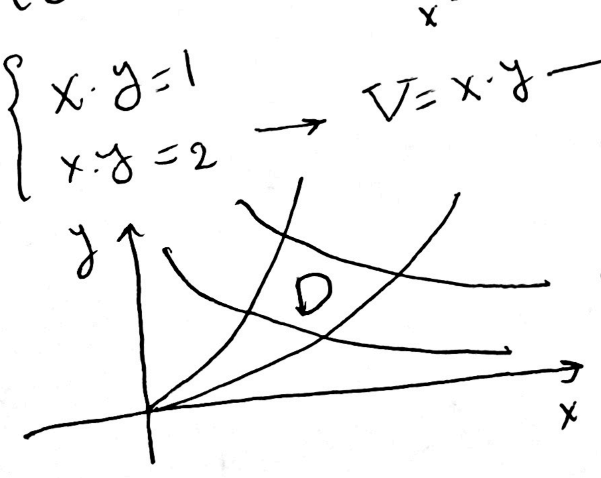
4- اگر فرمول تغییر متغیر را نداشتیم، به ناحیه D توجه می‌کنیم و عباراتی را u و v می‌گیریم که حتی‌المقدور بین دو مقدار ثابت تغییر کنند، یعنی D' یک مستطیل باشد.

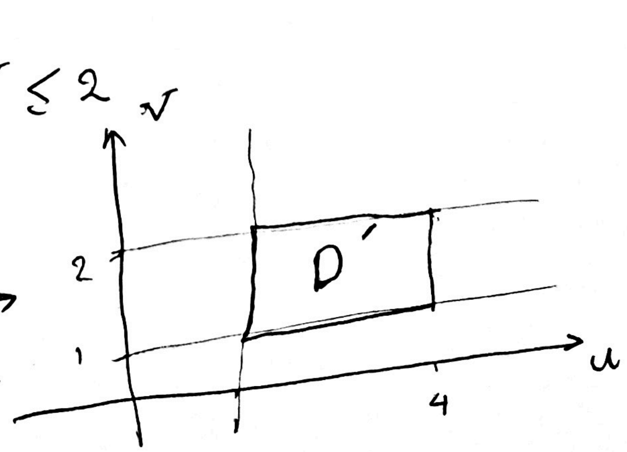
مثال. مساحت ناحیه محدود بین منحنی های $y=x^2$ و $y=4x^2$ و $x\cdot y=1$ و $xy=2$ را بیابید.

حل. داریم.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4x^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x^2} = 1 \\ \frac{y}{x^2} = 4 \end{cases} \longrightarrow u = \frac{y}{x^2} \longrightarrow 1 \le u \le 4$$

$$\begin{cases} x\cdot y = 1 \\ x\cdot y = 2 \end{cases} \longrightarrow v = x\cdot y \longrightarrow 1 \le v \le 2$$





151/

$$\dot{J}' = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} = \left| -\frac{3y}{x^2} \right|$$

$$= \frac{3y}{x^2} \longrightarrow \dot{J} = \frac{1}{\dot{J}'} = \frac{x^2}{3y} = \frac{1}{3\left(\frac{y}{x^2}\right)} = \frac{1}{3u}$$

$$\Rightarrow S = \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} |\dot{J}|\,du\,dv = \int_1^2\int_1^4 \frac{1}{3u}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 1) = \frac{\ln 4}{3}$$

مثال. حاصل $\iint_D e^{2x}(y^2+3x^2y)\,dx\,dy$ را بیابید که در آن D ناحیه محدود بین منحنی های

$$D: \begin{cases} y = e^{-x} \\ y = 2e^{-x} \\ y = x^3 \\ y = x^3+1 \end{cases}$$

است.

حل. داریم

$$\begin{cases} y = e^{-x} \\ y = 2e^{-x} \end{cases} \to \begin{cases} \frac{y}{e^{-x}} = 1 \\ \frac{y}{e^{-x}} = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ye^x = 1 \\ ye^x = 2 \end{cases} \longrightarrow$$

$$u = ye^x \longrightarrow 1 \le u \le 2$$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = x^3+1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y - x^3 = 0 \\ y - x^3 = 1 \end{cases} \longrightarrow V = y - x^3 \longrightarrow 0 \le V \le 1$$

$$\dot{J}' = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} ye^x & e^x \\ -3x^2 & 1 \end{vmatrix} = e^x(y+3x^2) \to \dot{J} = \frac{1}{\dot{J}'} = \frac{1}{e^x(y+3x^2)}$$

$$\to \iint_D e^{2x}(y^2+3x^2y)\,dx\,dy = \iint_{D'} e^{2x}(y^2+3x^2y)\,|\dot{J}|\,du\,dv =$$

$$\iint e^{2x}(y^2+3xy)\frac{1}{e^x(y+3x^2)}\,du\,dv = \iint ye^x\,du\,dv = \int_0^1\int_1^2 u\,du\,dv = \frac{3}{2}$$

مثال: اگر D ناحیه محدود به $y^3=4x^2$ و $y^3=x^2$ و $y=2x$ و $y=x$ باشد، حاصل انتگرال $\iint \frac{1}{y}\,dx\,dy$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{cases} y^3=4x^2 \\ y^3=x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{y^3}{x^2}=4 \\ \frac{y^3}{x^2}=1 \end{cases} \rightarrow u=\frac{y^3}{x^2} \rightarrow 1\le u\le 4$$

$$\begin{cases} y=2x \\ y=x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x}=2 \\ \frac{y}{x}=1 \end{cases} \rightarrow v=\frac{y}{x} \rightarrow 1\le v\le 2$$

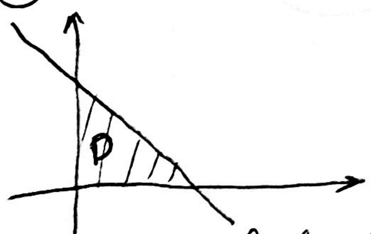
$$\rightarrow J'=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\frac{y^3}{x^3} & \frac{3y^2}{x^2} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = +\frac{y^3}{x^4} \rightarrow J=\frac{x^4}{y^3}$$

$$\Rightarrow \iint_D \frac{1}{y}\,dx\,dy = \iint_{D'} \frac{1}{y}\left|\frac{x^4}{y^3}\right| du\,dv = \iint \frac{x^4}{y^4}\,du\,dv$$

$$=\int_1^2\int_1^4 \frac{1}{v}\,du\,dv = 3\ln 2$$

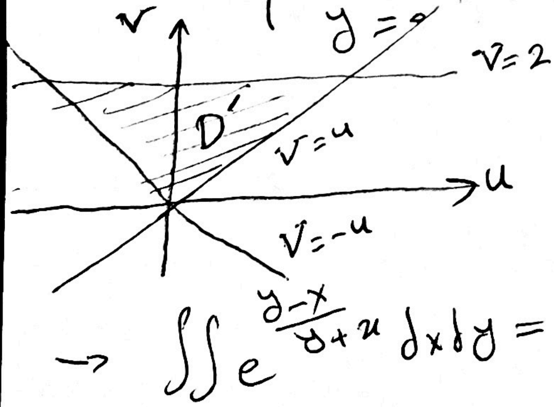
مثال. حاصل $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy$ را بیابید که در آن D ناحیه محدود به خط $x+y=2$ و محورهای مختصات می‌باشد.

حل.



$$\begin{cases} u=y-x \\ v=y+x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v+u=2y \\ v-u=2x \end{cases}$$

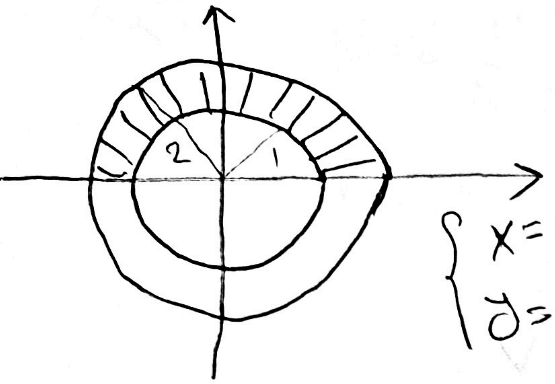
$$D: \begin{cases} x+y=2 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \longrightarrow D': \begin{cases} v=2 \\ x=0 \rightarrow \frac{v-u}{2}=x \longrightarrow v=u \\ y=0 \rightarrow \frac{v+u}{2}=0 \longrightarrow v=-u \end{cases}$$



$$J'=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2 \rightarrow J=\frac{1}{|J'|}=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \iint e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy = \int_0^2\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv = \left(\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right)2 = 2\sinh(1)$$

مثال. فرض کنید D ناحیه بین دایره‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ در نیم صفحه بالای باشد. حاصل $\iint_D (3x+4y^2)\,dA$ را بیابید.



حل:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow J = r$$

$$\iint_D (3x+4y^2)\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

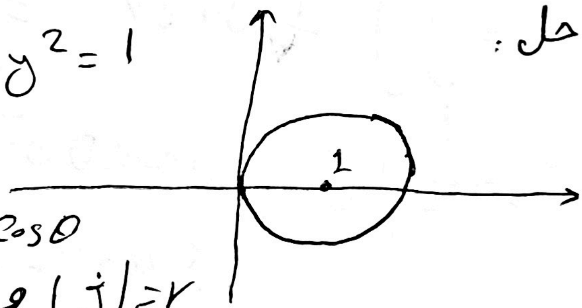
$$= \left(\int_0^{\pi} \cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_1^2 3r^2\,dr\right) + 4\left(\int_0^{\pi} \sin^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_1^2 r^3\,dr\,d\theta\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{15\pi}{2}$$

مثال: حاصل $\iint_D (x^2+y^2+2x)\,dA$ را بیابید که در آن D ناحیه محدود به دایره $x^2+y^2=2x$ است.

حل:

$$x^2+y^2=2x \longrightarrow x^2-2x+y^2=0 \longrightarrow (x-1)^2+y^2=1$$



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow x^2+y^2=2x \longrightarrow r^2 = 2r\cos\theta$$

$$\longrightarrow r = 2\cos\theta$$

و $|J| = r$

$$\rightarrow \iint (x^2+y^2+2x)\,dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} (r^2+2r\cos\theta)\cdot r\,dr\,d\theta = \cdots$$

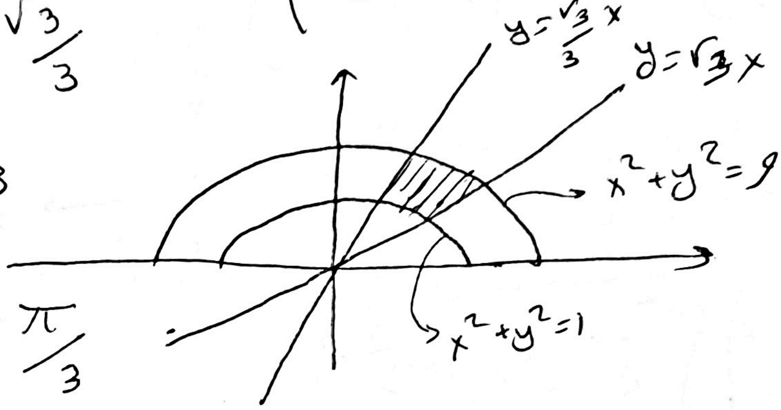
مثال. حاصل $\iint_D \frac{y}{x}\sin(x^2+y^2)\,dA$ که در آن D عبارت است از

$$D: \begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ y = \sqrt{9-x^2} \\ y = \sqrt{2}\,x \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}\,x \end{cases}$$

را بیابید.

حل: روش اول:

$$D:\begin{cases} y=\sqrt{1-x^2} \\ y=\sqrt{9-x^2} \\ y=\sqrt{2}\,x \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=9 \\ y/x=\sqrt{3} \\ y/x=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$



$$\rightarrow \begin{cases} r^2=1 \\ r^2=9 \end{cases} \rightarrow 1\le r\le 3$$

$$y/x=\sqrt{3} \rightarrow \tan\theta=\sqrt{3} \rightarrow \theta=\pi/3$$

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\rightarrow \iint \frac{y}{x}\sin(x^2+y^2)\,dA = \int_1^3\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan\theta\cdot\sin(r^2)\cdot r\,d\theta\,dr$$

$$=\left(\int_{\pi/6}^{\pi/3}\tan\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_1^3 r\sin r^2\,dr\right)=\dots$$

روش دوم:

$$\begin{cases} x^2+y^2=u \rightarrow 1\le u\le 9 \\ \frac{y}{x}=v \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}\le v\le\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow J^{-1}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\dots$$

مثال: حاصل $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ را بیابید.

حل: فرض کنیم $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. داریم:

$$I^2=I\times I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \xrightarrow[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta}$$

چون x و y بزرگترمابری مثبتهستند لذا $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ است و $0 \leq r \leq \infty$:

درنتیجه:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_0^\infty r e^{-r^2}\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{\infty}\right) = \frac{\pi}{4} \longrightarrow I^2 = \frac{\pi}{4} \longrightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\longrightarrow \boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

مثال. حاصل $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$ را بیابید.

حل: عبارت زیر انتگرال را بصورت یک انتگرال می‌نویسیم، داریم:

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-yx}\,dy \longrightarrow \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dy = \int_0^\infty\int_a^b e^{-yx}\,dy\,dx$$

$$= \int_a^b\int_0^\infty e^{-yx}\,dx\,dy = \int_a^b -\frac{1}{y}e^{-yx}\Big|_0^\infty dy = \int_a^b \frac{1}{y}\,dy = \ln b - \ln a$$

$$= \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

کاربرد انتگرال‌های دوگانه:

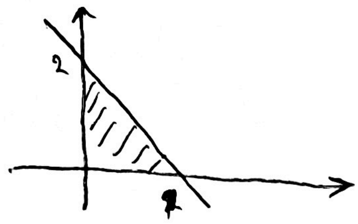
الف. تعیین مساحت: مساحت ناحیه D با استفاده از انتگرال دوگانه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$S = \iint_D dx\,dy$$

ب: تعیین حجم: اگر D تصویر ناحیه محدود به صفحه xy و رویه $z = f(x,y)$ باشد، حجم ناحیه محدود به کمک انتگرال دوگانه بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال. مطلوبست حجم فضای محدود بین صفحات و رویه های $Z=x^2+y^2+1$ و $2x+y=2$ واقع در ربع اول.



حل.

$$V=\iint z\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^{\frac{2-y}{2}}(x^2+y^2+1)\,dx\,dy$$

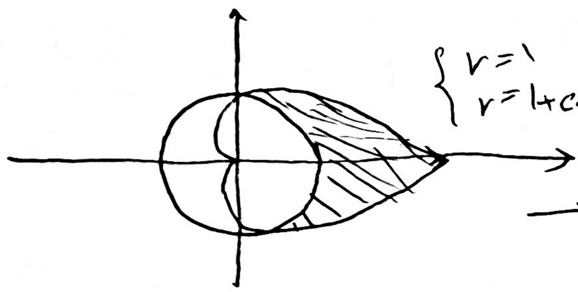
مثال. حجم رویه $x^2+2y^2+z=16$ محدود به صفحات $x=2$ و $y=2$ و محورهای مختصات را بیابید.

$$V=\iint f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^2(16-x^2-2y^2)\,dx\,dy=\dots$$

مثال. مساحت ناحیه درون دلوار $r=1+\cos\theta$ و بیرون دایره $r=1$ را بیابید.

حل.

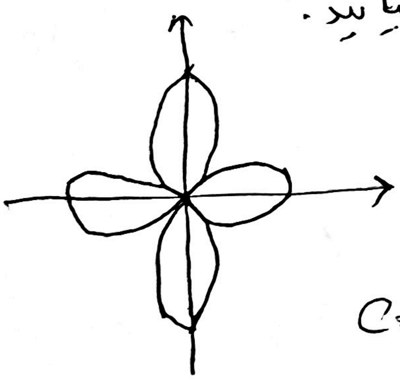
$1\leq r\leq 1+\cos\theta$



$$\begin{cases} r=1 \\ r=1+\cos\theta \end{cases}\to 1+\cos\theta=1\to\cos\theta=0\to\theta=-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$$

$$\to A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta=\dots$$

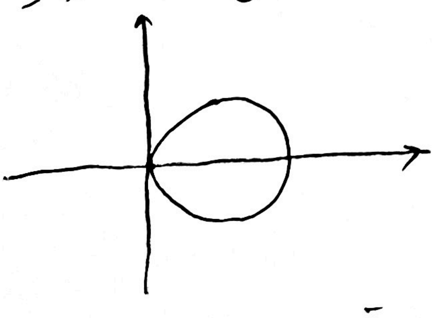
مثال: مساحت یک حلقه از گل چهاربرگ $r=\cos2\theta$ را بیابید.



$$A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos2\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$\cos2\theta=0\to2\theta=\pm\frac{\pi}{2}\to\theta=\pm\frac{\pi}{2}$$

مثال. حجم ناحیه محدود به سهمی گون $Z=x^2+y^2$ و داخل استوانه $x^2+y^2=2x$ را بیابید.

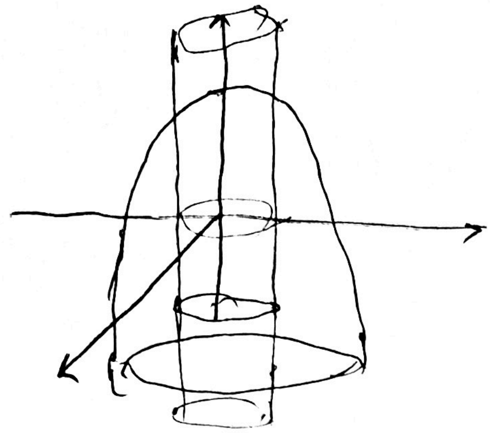


حل:

$$V=\iint f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}(x^2+y^2)\,dA$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r^3\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta=\dots$$

مثال. حجم ناحیه محدود به استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحه $Z=0$ و کلاهک گون $Z=4-x^2-y^2$ را بیابید.



حل.

$$V=\iint (Z_2-Z_1)\,dx\,dy=\iint (4-x^2-y^2-0)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4-r^2)\,r\,dr\,d\theta=\dots$$

مثال. با کمک انتگرال دوگانه حجم کره ای به شعاع a را بیابید.

حل. داریم:

$$x^2+y^2+Z^2=a^2 \longrightarrow Z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$V=2\iint\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=2\int_0^{2\pi}\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta \;\underline{\underline{a^2-r^2=u}}$$

$$\frac{4}{3}\pi a^3$$

مثال. مطلوبست حجم فضای واقع در اکتان اول و محدود بین سیلندر $x^2+y^2=16$ و صفحه $3y-2x=0$ و صفحه $x=0$.

حل.

$$V=\int_0^4\int_0^{\frac{3}{2}y}\sqrt{16-y^2}\,dx\,dy$$

روش دوم:

$$V=\iint f(y,z)\,dy\,dz=\iint\frac{3}{2}y\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^4\frac{3}{2}r\cos\theta\cdot r\,dr\,d\theta$$

مثال: حجم ناحیه محدود به $Z=1$ و $Z=4-(x^2+y^2)$ را بیابید.

حل.

$$V=\iint(Z_2-Z_1)\,dx\,dy=\iint(4-x^2-y^2-1)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}(3-r^2)\,r\,dr\,d\theta=\dots$$

سری یازدهم تمرینات.

هریک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

1. $\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$ که در آن $D=\{(x,y)\ /\ |x|+|y|\leq 1\}$.

2. $\iint_D y\,dA$ که در آن D ناحیه واقع در یک چهارم اول و بالای $xy=1$ ، $y=x$ و زیر $y=2$ است.

3. $\iint_D x\cos y\,dA$ که در آن D ناحیه واقع در ربع اول زیر منحنی $y=1-x^2$ است.

4. $\displaystyle\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{dy\,dx}{1+y^4}$ (راهنمایی: با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری)

5. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{4-x^2}\frac{x e^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$

6) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sin^{-1}x} e^{\cos y}\,dy\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{x} x e^{-\frac{x^2}{y}}\,dy\,dx$

8) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$

9. فرض کنید D متوازی‌الاضلاع محدود به $y=2x$ و $y=2x-2$ و $y=x+1$ و $y=x$ باشد مساحت ناحیه D را با تغییر متغیر مناسبی بیابید. (جواب $S=2$)

10. حاصل $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dx\,dy$ را بیابید که در آن D ناحیه محدود به خطوط $x=0$ و $y=0$ و $x+y=\frac{\pi}{2}$ است (جواب $\frac{\pi^2}{16}\sin 1$)

11. $\iint_D x^2 dA$ را بیابید که D ناحیه محصور در بیضی $9x^2+4y^2=36$ است (راهنمایی: از تغییر متغیر $x=2u$ و $y=3v$ استفاده کنید)

12. حاصل $\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+2} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\,dx\,dy$ را بیابید (راهنمایی $\begin{cases} 2x-y=u \\ \frac{y}{2}=v \end{cases}$)

13. $\iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ که در آن D دایره به شعاع یک است را بیابید.

14. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy\,dx$ را بیابید (با تغییر متغیر قطبی)

15. $\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dy\,dx$ که در آن $D: 1\leq x^2+y^2\leq 4$

16: مساحت بیضی به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را بیابید. (راهنمایی $x=au$ و $y=bu$ و سپس تغییر متغیر قطبی)

17. حجم جسمی را بیابید که در $\frac{1}{8}$ اول فضا است و محدود به صفحات و استوانه $x^2+y^2=4$ و صفحه $z+y=3$ است.

18. حجم ناحیه محدود به استوانه $x^2+y^2=1$ و $x^2+z^2=1$ را در $\frac{1}{8}$ اول فضا بیابید.

19. حاصل $I=\int_0^2(\tan^{-1}\pi x-\tan^{-1}x)dx$ را بیابید. (راهنمایی: انتگرالده را می‌توان به صورت $\int_x^{x\pi}\frac{dy}{1+y^2}$ نوشت)

20. $\int_0^1 \frac{x^a-x^b}{\ln x}$ را محاسبه کنید.

21. مساحت ناحیه بین دایره $r=1$ و حلزونی $r=2+\cos\theta$ را بیابید.

22. مساحت ناحیه محصور در یک برگ از گل $r=\cos 3\theta$ را بیابید.

23. مساحت فصل مشترک قسمت‌های درون دلنماهای $r=1+\cos\theta$ و $r=1-\cos\theta$ را بیابید.

انتگرال‌های سه‌گانه:

انتگرال سه‌گانه همانند انتگرال دوگانه به صورت حد یک سری تعریف می‌شود. داریم:

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dv = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta_i V$$

اگر R مکعب $\begin{cases} a\le x\le b \\ c\le y\le d \\ e\le z\le h \end{cases}$ باشد. در اینصورت داریم:

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dv = \int_a^b\int_c^d\int_e^h f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

نکته: توجه شود که قضیه فوبینی برای انتگرال‌های سه‌گانه نیز برقرار است.

مثال. حاصل $\iiint_R xz\,dV$ را بیابید که در آن R ناحیه محدود به نیمکره فوقانی به شعاع a است.

حل

$x^2+y^2+z^2=a^2$ و $z>0$

$$\to z^2=a^2-x^2-y^2 \longrightarrow z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$\to \iiint_R xz\,dV = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\,\cancel{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,z\,dz\,dy\,dx$$

$$=\iint x\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dy\,dx = \iint \frac{1}{2}x(a^2-x^2-y^2)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{2} r\cos\theta(a^2-r^2)\,r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\cdot\int_0^a r(a^2-r^2)\,dr$$

$$=0$$

قضیه تغییر متغیر:

ژاکوبین در فضای R^3: فرض کنید $\varphi: R^3 \longrightarrow R^3$ که

$$\varphi: \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

یک تبدیل دلخواه باشد. ژاکوبین تبدیل فوق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

نکته: اگر $J' = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ آنگاه $J = \frac{1}{J'}$

مثال: ژاکوبین را برای تغییر متغیر استوانه‌ای بیابید.

حل:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \longrightarrow J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

مثال: ژاکوبین را در دستگاه مختصات کروی بیابید.

حل:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \longrightarrow J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}$$

$$\rightarrow J = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= -\rho^2\sin\varphi \longrightarrow J = -\rho^2\sin\varphi$$

قضیه تغییر متغیر: فرض کنید $\psi: R^3 \to R^3$ که

$$\psi: \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

یک تبدیل دلخواه باشد که ناحیه R در دستگاه xyz را به ناحیه R' در دستگاه uvw تبدیل می‌کند. در این صورت

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{R'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,du\,dv\,dw$$

کاربرد انتگرال سه‌گانه

محاسبه حجم یک ناحیه در فضا: هرگاه R یک ناحیه در فضا باشد، آن‌گاه حجم R را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$V = \iiint_R dV \quad \text{حجم}$$

مثال: حجم یک کره به شعاع a را بیابید. (تغییر متغیر کره‌ای)

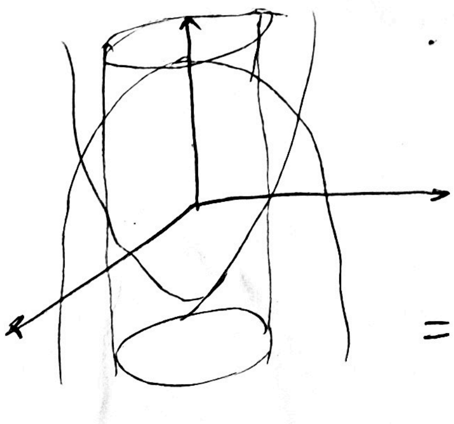
حل: داریم:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \to V = \iiint_R dV = \iiint_R dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} +\rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 2\pi\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^{a} +\rho^2\, d\rho\right)$$

$$= 2\pi \times 2 \times \left(+\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^a\right) = \frac{4}{3}\pi a^3$$

مثال: حجم جسمی را بیابید که از بالا به رویه $x^2+y^2+z=4$ و از پایین به $x^2+y^2-z=1$ و از اطراف به استوانه $x^2+y^2=3$ محدود شده است.



$$V = \iiint dz\,dy\,dx = \iiint_{z=x^2+y^2-1}^{z=4-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$$

$$= \iint (4-x^2-y^2-x^2-y^2+1)\,dy\,dx$$

$$= \iint (5-2x^2-2y^2)\,dy\,dx \overset{\text{قطبی}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (5-r^2)\,r\,dr\,d\theta = 6\pi$$

مثال. حجم محصور بین رویه $z=3-x^2-y^2$ و صفحه xy را بیابید.

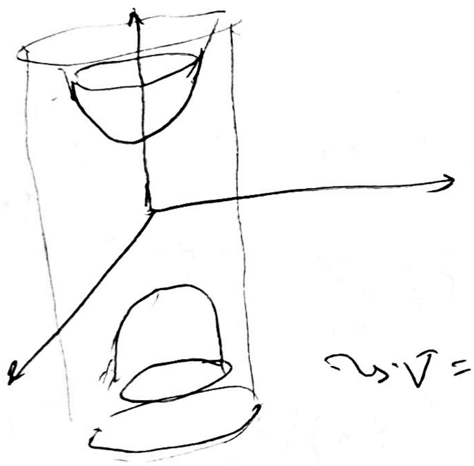
حل. (تغییر متغیر استوانه‌ای):

$$V=\iiint dx\,dy\,dz = \iiint_0^{3-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$$

$$=\iint (3-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (3-r^2)\,r\,dr\,d\theta = \dots$$

مثال. حجم محدود به رویه‌های
$$\begin{cases} -x^2-y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$
را بیابید.

حل. استوانه‌ای



$$V=\iiint_{-\sqrt{1+x^2+y^2}}^{\sqrt{1+x^2+y^2}} dz\,dx\,dy$$

لذا $V=\iint 2\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 2r\sqrt{1+r^2}\,dr\,d\theta$

مثال. حجم کره‌ای به شعاع a را با تغییر متغیر استوانه‌ای بیابید.

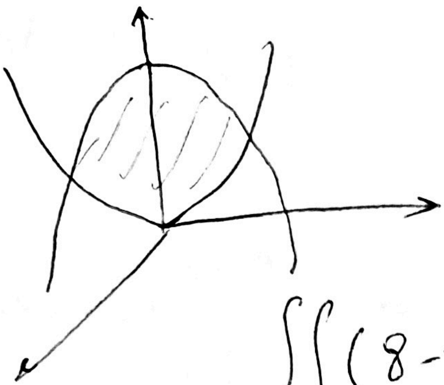
حل:

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \rightsquigarrow V=\iiint_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\,dx\,dy =$$

$$2\iint 2\sqrt{a^2-x^2-y^2} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\,d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3$$

مثال. حجم ناحیه محصور به رویه‌های $z=8-x^2-y^2$ و $z=x^2+3y^2$ را بیابید.

حل:



$$V=\iint\int_{z=x^2+3y^2}^{z=8-x^2-y^2} dz\,dx\,dy =$$

$$\iint(8-x^2-y^2-x^2-3y^2)\,dx\,dy=\iint 8-2x^2-4y^2\,dx\,dy$$

حال برای تعیین ناحیه انتگرال گیری داریم:

$$\begin{cases} z=8-x^2-y^2 \\ z=x^2+3y^2 \end{cases} \rightsquigarrow x^2+3y^2=8-x^2-y^2 \longrightarrow 2x^2+4y^2=8$$

$$\rightsquigarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \to \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt2}\right)^2=1$$

$$\xrightarrow[v=\frac{y}{\sqrt2}]{u=\frac{x}{2}} u^2+v^2=1 \quad \& \begin{cases} x=2u \\ y=\sqrt2 v \end{cases} \to J=2\sqrt2$$

$$\Rightarrow \iint(8-2x^2-4y^2)\,dx\,dy=\iint_{u^2+v^2=1}(8-8u^2-8v^2)\,2\sqrt2\,du\,dv$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1(8-8r^2)\,2\sqrt2\cdot r\,dr\,d\theta=\cdots$$

(روش دوم)

$$\iint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1}(8-2x^2-4y^2)\,dx\,dy=? \longrightarrow \begin{cases} x=2r\cos\theta \\ y=\sqrt2 r\sin\theta \end{cases} \longrightarrow J=2\sqrt2 r$$

$$\to \int_0^{2\pi}\int_0^1(8-8r^2\cos^2\theta-8r^2\sin^2\theta)\,2\sqrt2\,r\,dr\,d\theta=\cdots$$

مثال: حجم بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را بیابید.

حل (روش اول):

$$\begin{cases}\frac{x}{a}=u\\ \frac{y}{b}=v\\ \frac{z}{c}=w\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=au\\ y=bv\\ z=cw\end{cases} \longrightarrow J=abc$$

$$\rightarrow \iiint dx\,dy\,dz = \iiint_{u^2+v^2+w^2=1} |J|\,du\,dv\,dw = \iiint_{u^2+v^2+w^2=1} abc\,du\,dv\,dw$$

$$= abc\iiint_{u^2+v^2+w^2=1} du\,dv\,dw = abc\,(\text{حجم کره به شعاع یک}) = \frac{4}{3}\pi abc$$

روش دوم:

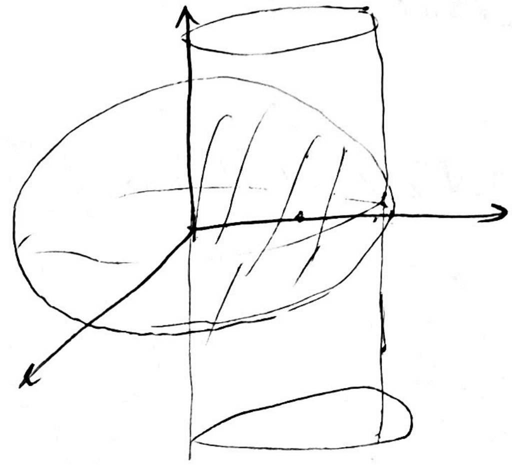
$$\begin{cases}x=a\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=c\rho\cos\varphi\end{cases} \rightsquigarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\rho^2$$

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = abc\cdot\rho^2\sin\varphi$$

$$\rightsquigarrow V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}(abc)\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \frac{4}{3}\pi abc$$

مثال. حجم قسمتی از استوانه $(x-1)^2+y^2=1$ که درون کره $x^2+y^2+z^2=4$ قرار دارد را بیابید.

حل.



$$V=\iiint dx\,dy\,dz$$

$$=2\iint\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dx\,dy$$

$$= 2\iint \sqrt{4-x^2-y^2}\, dx\, dy = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$= \cdots$

(توجه شود کران بالای r از رابطه زیر بدست آمد:

$$(x-1)^2+y^2=1 \rightarrow x^2+y^2=2x \rightarrow r^2=2r\cos\theta \rightarrow r=2\cos\theta$$)

مثال. اگر R ناحیه محدود به رویه‌های $Z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ و $Z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ ~~مطلوبست~~ هم و صفحه xy باشد مطلوبست حجم ناحیه R.

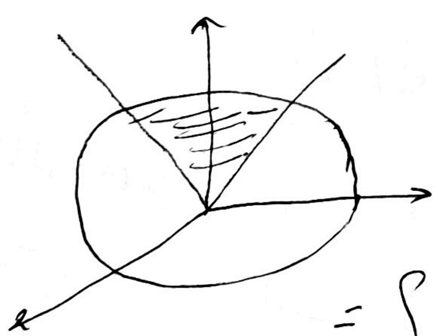
حل: مختصات استوانه‌ای:

$$V=\iiint dz\,dx\,dy = \iint\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} dz\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\pi}\int_1^{3}\left(\sqrt{9-r^2}-\sqrt{1-r^2}\right) r\,dr\,d\theta = \cdots$$

مثال. حجم محدود به $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ و $x^2+y^2+Z^2=2$ را بیابید.

حل:



$$V=\iint\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{Z=\sqrt{2-x^2-y^2}} dz\,dx\,dy$$

$$= \iint\left(\sqrt{2-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy$$

$$= \int_{r=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left(\sqrt{2-r^2}-r\right) r\,dr\,d\theta = \cdots$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \rightarrow x^2+y^2+x^2+y^2=2 \rightarrow x^2+y^2=1$$

مثال. حجم قسمتی محدود با $\varphi=\frac{\pi}{6}$ و کره $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ را بیابید.

حل: مختصات کروی:

$$V=\iiint \rho^2\sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$\sim V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

(کرانها:

$$x^2+y^2+z^2+a^2-2az=a^2 \longrightarrow x^2+y^2+z^2=2az$$

$$\sim \rho^2=2a\rho\cos\varphi \longrightarrow \rho(\rho-2a\cos\varphi)=0 \rightarrow \begin{cases}\rho=0\\ \rho=2a\cos\varphi\end{cases}$$

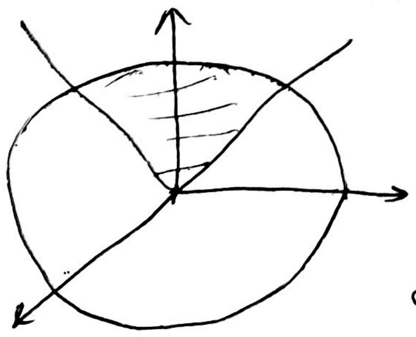
مثال: حاصل $\iiint_R e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ را بیابید که R ناحیه $1\le x^2+y^2+z^2\le 4$ است.

حل: دستگاه مختصات کروی:

$$\begin{cases}1\le\rho\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le\pi\end{cases} \longrightarrow \iiint_R e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2} \rho^2\sin\varphi \, e^{\rho^3} d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho = \frac{4}{3}\pi(e^8-e)$$

مثال. حاصل انتگرال قبلی را روی R که ناحیه واقع در نیمکره $x^2+y^2+z^2=3\ (z>0)$ و بالای مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است را بیابید.



$$z=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow z^2=x^2+y^2 \rightarrow$$

$$\rho^2\cos^2\varphi=\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta$$

$$\sim \rho^2\cos^2\varphi=\rho^2\sin^2\varphi \rightarrow \tan^2\varphi=1$$

$$\rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt3} e^{\rho^3}\cdot\rho^2\sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{1}{3}(e^{3\sqrt3}-1)\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right)2\pi$$

مثال. مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$I=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}$$

حل: مختصات کروی

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}\frac{\rho^2\sin\varphi}{(\rho^2+a^2)^2}\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\infty}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^2}\,d\rho=\frac{\pi^2}{8a}$$

مثال. حجم جسمی را بیابید که درون نیم کره فوقانی $x^2+y^2+z^2=3$ و مابین مخروطهای $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ و $z=\sqrt{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2}$ واقع است.

حل:

$$z=\sqrt{3x^2+3y^2}\rightarrow\rho^2\cos^2\varphi=3\rho^2\sin^2\varphi\rightarrow\tan\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}\rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}$$

$$z=\sqrt{\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{3}y^2}\rightarrow\rho^2\cos^2\varphi=\tfrac{1}{3}\rho^2\sin^2\varphi\rightarrow\tan\varphi=\sqrt{3}\rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow V=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\sqrt{3}}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\pi(3-\sqrt{3})$$

مثال. مطلوبست حجم ناحیه محصور بین رویه‌های $x^2+y^2=z$ و $x^2+y^2=2z-2$.

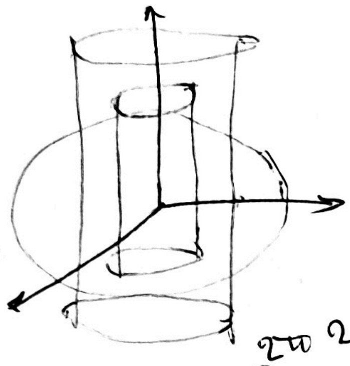
حل: مختصات استوانه‌ای

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{z=r^2}^{z=\frac{r^2}{2}+1}r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}r\left(\frac{r^2}{2}+1\right)dr\,d\theta=\pi$$

کرانها:

$$\begin{cases}x^2+y^2=z\\ \frac{x^2+y^2+2}{2}=z\end{cases}\rightarrow x^2+y^2+2=2x^2+2y^2\rightarrow x^2+y^2=2\rightarrow r=\sqrt{2}$$

مثال. حاصل $\iiint_R \frac{dV}{\sqrt{x^2+y^2}}$ را بیابید که R واقع بین استوانه های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ است که از بالا به نیم کره $x^2+y^2+z^2=9$ و از پایین به صفحه xy محدود است

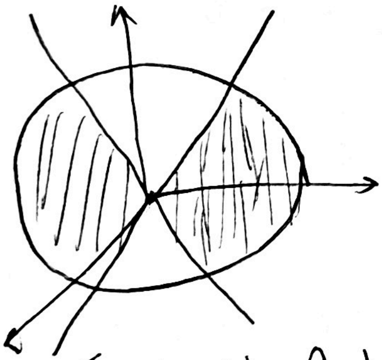


حل: مختصات استوانه‌ای

$$I=\iint\int_{z=0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{z=0}^{\sqrt{9-r^2}} \frac{r\,dz\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2}} = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{9-r^2}\,dr\,d\theta=\dots$$

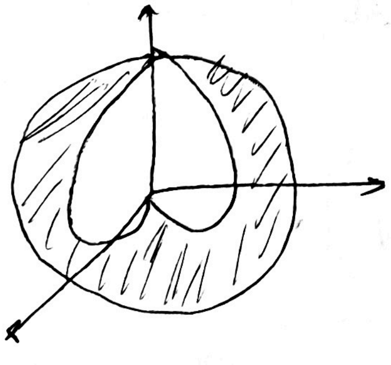
مثال. مطلوب است حجم ناحیه‌ای از کره $\rho=a$ که بین مخروط‌های $\varphi=\frac{\pi}{3}$ و $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ قرار دارد.



حل:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\int_0^a \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\frac{2\pi}{3}a^3$$

مثال. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از درون به رویه $\rho=1+\cos\varphi$ و از بیرون به کره $\rho=2$ محدود است.



حل:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1+\cos\varphi}^{2} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\frac{63\pi}{6}$$

تمرینات درس دوازدهم

1. حجم ناحیه محصور بین رویه‌های $x=y^2+z^2$ و $x=1-y^2$ را بیابید.

2. مطلوبست محاسبه حجم درون مخروط $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ و $\rho=1-\cos\varphi$.

3. حجم بیضی‌گون $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ را بیابید.

4. حجم ناحیه محصور بین رویه‌های $z=x^2+y^2$ و $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)$ را بیابید.

5. حاصل انتگرال زیر را با توجه به تبدیل داده شده بیابید.

$$I=\int_0^3\int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)dx\,dy\,dz \quad \text{و} \quad \begin{cases} u=\frac{2x-y}{2} \\ v=\frac{y}{2} \\ w=\frac{z}{3} \end{cases}$$

6. حاصل $\iiint_E z\,dV$ را بیابید که E ناحیه محصور بین دو کره به شعاع‌های یک و دو واقع در اکتانت اول است.

7. حاصل $\iiint_E z\,dV$ را بیابید که E ناحیه واقع در درون کره $x^2+y^2+z^2=4$ و بیرون رویه $x^2+y^2-z^2=1$ است.

8. حجم ناحیه محصور به سطح $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$ را بیابید.

انتگرال خط

۱ انتگرال خط نوع اول (توابع اسکالر)

فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد که دامنه تعریف آن شامل منحنی هموار C در صفحه xy با معادله پارامتری

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ a \le t \le b \end{cases}$$

باشد. اگر $\vec{C}$ را به صورت پارامتری $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ بنویسیم. در این صورت انتگرال خط تابع $f(x,y)$ روی منحنی $\vec{C}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta_i s$$

که در آن $\Delta_i s$ طول قطعه iام حاصل از تقسیم C به n زیر کمان است

نحوه محاسبه انتگرال خط: می دانیم اگر $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$. در این صورت طول منحنی C شامل بازه $[a, t_0]$ که در آن $a \le t_0 \le b$ است، به صورت زیر خواهد بود:

$$S(t_0) = \int_a^{t_0} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

لذا انتگرال خط را می توانیم به صورت انتگرال یگانه زیر حساب کنیم.

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

نکته: در حالت خاص اگر C پاره خط بین $(a,0)$ و $(b,0)$ باشد آنگاه فرمول فوق به صورت

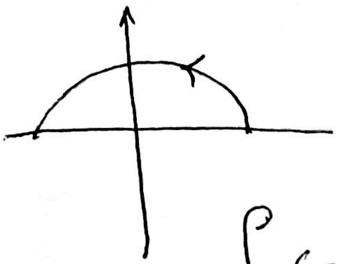
$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,0)\,dx$$

می شود که همان انتگرال یگانه معمولی است.

نکته: علامت انتگرال خط با عوض شدن جهت منحنی C عوض نمی شود یعنی

$$\int_{-C} f(x,y)\,ds = \int_C f(x,y)\,ds$$

مثال. مطلوب است $\int_C (2+x^2y)\,ds$ که در آن C نیم بالای دایره $x^2+y^2=1$ می‌باشد.



حل. منحنی $\vec{C}$ را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم

$$C:\begin{cases} x=\cos t\\ y=\sin t\\ 0\leq t\leq \pi\end{cases}$$

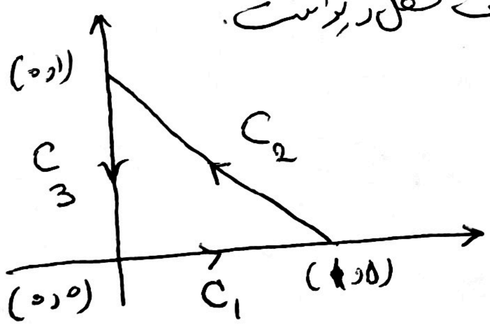
$$\int_C (2+x^2y)\,ds=\int (2+\cos^2 t\cdot \sin t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}(2+\cos^2 t\sin t)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt=\int_0^{\pi}(2+\cos^2 t\sin t)\,dt=2\pi+\frac{2}{3}$$

نکته، اگر C یک منحنی به طور تکه‌ای هموار باشد به طوری که اجتماع منحنی‌های $C_1, C_2, \dots, C_n$ باشد در این صورت

$$\int_C f(x,y)\,ds=\int_{C_1} f(x,y)\,ds+\int_{C_2} f(x,y)\,ds+\dots+\int_{C_n} f(x,y)\,ds.$$

مثال. حاصل $\oint_C (x+y)\,ds$ را بیابید که در آن C مثلث شکل زیر است.



حل: توجه شود $\oint_C$ یعنی C یک منحنی بسته است.

چون C تکه‌ای هموار است. داریم:

$$\oint_C (x+y)\,ds=\int_{C_1}(x+y)\,ds+\int_{C_2}(x+y)\,ds+\int_{C_3}(x+y)\,ds$$

$$C_1:\begin{cases}0\leq x\leq 1\\ y=0\end{cases}\rightarrow r(t)=t\vec{i}+0\vec{j},\quad 0\leq t\leq 1$$

$$C_2:\ \{x+y=1\rightarrow r(t)=t\vec{i}+(1-t)\vec{j},\quad \underbrace{1\leq t\leq 0}$$

$$C_3:\begin{cases}x=0\\ 1\leq y\leq 0\end{cases}\rightarrow r(t)=0\vec{i}+t\vec{j},\quad 1\leq t\leq 0$$

$$\rightarrow \oint_C (x+y)\,ds=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}=\int_0^1 (t+0)\sqrt{1+0}\,dt+$$

$$\int_1^0 (t+1-t)\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dt + \int_1^0 (0+t)\sqrt{0+1}\,dt = \frac{t^2}{2}\Big]_0^1 + \sqrt{2}\,t\Big]_1^0$$

$$+\frac{t^2}{2}\Big]_1^0 = \frac{1}{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} = -\sqrt{2}$$

نکته: اگر $f(x,y,z)$ تابعی سه متغیره باشد و منحنی C به صورت

$r(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ و $a \le t \le b$ باشد، آنگاه

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x,y,z)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

نکته: اگر $f>0$، آنگاه $\int_C f\,ds$ در واقع مساحت دیواری بر روی C با ارتفاع f است.

مثال. حاصل $\int_C y\sin z\,ds$ را بیابید که در آن $\vec{C}$ مارپیچ فنری به معادله زیر است:

$x(t)=\cos t$ ، $y(t)=\sin t$ ، $z(t)=t$ ، $0 \le t \le 2\pi$

حل.

$$\int_C y\sin z\,ds = \int_0^{2\pi} (\sin t)(\sin t)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}\,dt$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2t)\,dt = \sqrt{2}\,\pi.$$

انتگرال خط نوع دوم: «میدان های برداری»

تعریف: هر نگاشتی از $R^n \to R^n$ را یک میدان برداری گویند.

تابع $F: D \subseteq R^3 \to R^3$ با $F(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ را یک میدان برداری در R^3 گویند.

به عنوان مثال $F(x,y,z) = (x\sin z, y^2\sin xz, x^2+y^2)$ یک میدان برداری است.

فرض کنید $F(x,y,z)=(P,Q,R)$ یک میدان برداری باشد و C یک منحنی با معادله پارامتری

$r(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ ، $a \le t \le b$

باشد. در این صورت انتگرال میدان برداری F روی $\vec{C}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_C F\cdot dr=\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_a^b (P\cdot x'(t)+Q\,y'(t)+R\,z'(t))\,dt$$

$$=\int F\cdot r'(t)\,dt$$

نکته: توجه شود که به $\int_C F\cdot dr$ کار انجام شده توسط میدان نیروی F گویند.

مثال. مطلوب است $\int_C (xyz^2)dx+(y+z)dy+xz\,dz$ که در آن $r(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$ که $0\le t\le 1$.

حل.

$F=(xyz^2,\ y+z,\ xz)$

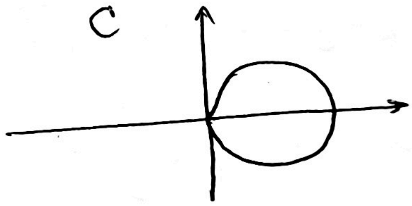
$$\begin{cases} x(t)=t \longrightarrow x'(t)=dt \\ y(t)=t^2 \longrightarrow y'(t)=2t\,dt \\ z(t)=t^3 \longrightarrow z'(t)=3t^2\,dt \end{cases}$$

$$\longrightarrow \int_C F\cdot dr=\int (t)(t^2)(t^6)dt+(t^2+t^3)(2t\,dt)+t\cdot t^3(3t^2)dt=\frac{1}{7}$$

مثال. حاصل $\int_C (2xy,-y)dr$ را بیابید که در آن C منحنی $(x-1)^2+y^2=1$ است.

حل.

$$\begin{cases} x-1=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2}\le t\le \frac{\pi}{2}$$



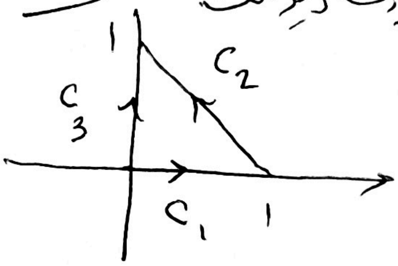
$$\rightsquigarrow \int_C (2xy,-y)dr=\int_C (2(\cos t-1)\sin t,\ -\sin t)\cdot(-\sin t\,dt,\ \cos t\,dt)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2(\cos t-1)\sin^2 t-\sin t\cdot\cos t)\,dt$$

نکته. اگر $C=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ در این صورت

$$\int_C F\cdot dr=\int_{C_1} F\cdot dr+\int_{C_2} F\cdot dr+\dots+\int_{C_n} F\cdot dr$$

مثال. مطلوبست محاسبه $\int_C (x+y)dx+(2x-y)dy$ که در آن C بصورت زیر است.



حل.

$$\begin{cases} C_1(t): t\vec{i}+0j \ , \ 0\le t\le 1 \\ C_2(t)= t\vec{i}+(1-t)j \quad 1\leq t\leq 0 \\ C_3(t)= 0\vec{i}+t\vec{j} \quad 1\leq t\leq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_C (x+y)dx+(2x-y)dy = \int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3} = \int_0^1 (t+0)dt+(2t-0)\cancel{0}dt$$

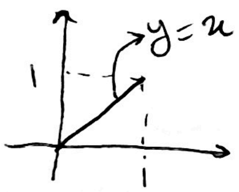
$$+\int_1^0 (t+1-t)dt+(2t-1+t)(-dt) + \int_1^0 (0+\cancel{t})0\,dt+(2\times 0-t)dt = \frac{1}{2}$$

مثال. مطلوب است محاسبه $\int xy\,dx+x^2dy$ که در آن C :

الف. خطی است که $(0,0)$ را به $(1,1)$ تبدیل می‌کند.

ب. منحنی $y=x^2$ از $(0,0)$ به $(1,1)$

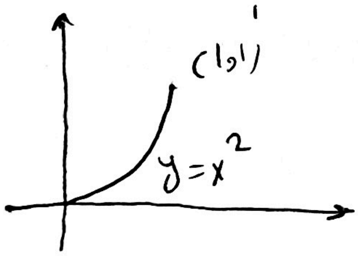
ج. منحنی $y=x^3$ از $(0,0)$ به $(1,1)$



حل: الف.

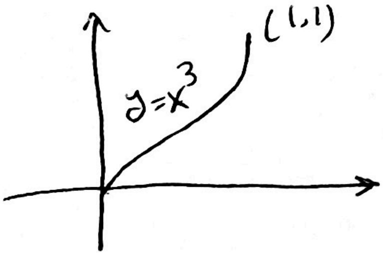
$$C_1: x=y \rightarrow r(t)=t\vec{i}+tj$$

$$\rightarrow \int_{C_1} xy\,dx+x^2dy = \int_0^1 (t)(t)dt+t^2dt = \frac{2}{3}$$



ب. $C_2: t\vec{i}+t^2j, \ 0\le t\le 1$

$$\int_{C_2} xy\,dx+x^2dy = \int_0^1 t^3dt+t^2(2t)dt = \frac{3}{4}$$



ج. $C_3: t\vec{i}+t^3j \ ; \ 0\le t\le 1$

$$\int_{C_3} xy\,dx+x^2dy = \int_0^1 t^4dt+t^2(3t^2)dt = \frac{4}{5}$$

مثال. حاصل $\int_C F\cdot dr$ را بیابید که $F=(2xy, x^2)$ و C منحنی مثال قبلی باشد.

حل، الف.

$$\int_{C_1} F\cdot dr=\int_{C_1} 2xy\,dx+x^2dy=\int_0^1 2t^2dt+t^2dt=\int_0^1 3t^2dt=1$$

ب.

$$\int_0^1 2t^3dt+t^2(2t\,dt)=\int_0^1 4t^3dt=1$$

ج.

$$\int_0^1 2t\,t^3dt+t^2(3t^2)dt=\int_0^1 5t^4dt=1$$

نکته: اگر حاصل یک انتگرال برداری روی مسیرهای مختلف ثابت باشد (مانند مثال قبل) در این صورت میدان برداری F را پایستار (Conservative) گویند و مقدار آن به مسیر بستگی ندارد.

تعریف: فرض کنید $F:R^2\longrightarrow R^2$ یک میدان برداری باشد بطوری که $F=P\vec{i}+Q\vec{j}$ و توابع P و Q و مشتقات جزئی مرتبه اول آن ها موجود و پیوسته باشند، در این صورت تابع برداری F را پایستار گویند هرگاه تابعی چندمتغیره مانند Φ موجود باشد بطوری که $\nabla\vec{\Phi}=P$. به عبارت دیگر تابعی چندمتغیره مانند Φ موجود باشد بطوری که

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P\ ,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q$$

به Φ تابع پتانسیل متناظر با میدان برداری $\vec{F}$ گویند.

قضیه: اگر $F=P\vec{i}+Q\vec{j}$ یک میدان برداری باشد که در آن P و Q و مشتقات جزئی مرتبه اول آن ها موجود و پیوسته باشند، آن گاه F پایستار است اگر و فقط اگر

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

قضیه: اگر $F = Pi + Qj + R\vec{K}$ از R^3 به R^3 یک میدان برداری باشد که در آن P و Q و R و مشتقات جزئی آن‌ها موجود و پیوسته باشند آن‌گاه F پایستار است اگر و فقط اگر

$$\begin{cases} P_y = Q_x \\ P_z = R_x \\ Q_z = R_y \end{cases}$$

اگر $F = Pi + Qj + R\vec{K}$ یک میدان برداری باشد آن‌گاه کرل F ($\mathrm{curl}\, F$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{curl}\, F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

نتیجه: اگر $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ یک میدان برداری پایستار باشد آن‌گاه $\mathrm{curl}\, F = 0$.

دلیل:

$$\mathrm{curl}\, F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

روش پیدا کردن تابع پتانسیل یک میدان برداری.

روش اول: چون داریم

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = P \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = R \end{cases}$$

کافیست از P نسبت به x، از Q نسبت به y و از R نسبت به z انتگرال بگیریم و اجتماع جواب‌ها (یعنی جواب‌های تکراری را یکبار بنویسیم) برابر Φ (تابع پتانسیل) خواهد بود.

روش دوم:

$$\Phi = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} F\,dr = \int_0^x P(t,0,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t,0)\,dt + \int_0^z R(x,y,t)\,dt$$

مثال. اگر $F = 2xy\vec{i} + x^2 j$ مطلوبست تابع پتانسیل آن.

حل: $F = Pi + Qj \to \begin{cases} P = 2xy \\ Q = x^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} P_y = 2x \\ Q_x = 2x \end{cases} \longrightarrow$ F پایستار است.

$$\begin{cases} \Phi = \int P dx = \int 2xy\, dy = x^2 y \\ \Phi = \int x^2 dy = \int Q dy = x^2 y \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع جوابها}} \Phi = x^2 y \to \text{تابع پتانسیل}$$

روش دوم:

$$\Phi = \int_0^x P(t,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t)\,dt = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y x^2 dt =$$

$$x^2 t \Big]_0^y = x^2 y$$

مثال. اگر داشته باشیم $F = (2xy - yz, x^2 + z^2 - xz, 2yz - xy)$ بررسی کنید آیا F پایستار است یا خیر، تابع پتانسیل آن را بیابید.

حل. داریم

$$\begin{cases} P_y = 2x - z, \quad Q_x = 2x - z \to P_y = Q_x \\ Q_z = 2z - x, \quad R_y = 2z - x \to Q_z = R_y \\ P_z = -y, \quad R_x = -y \to P_z = R_x \end{cases} \longrightarrow \text{F پایستار است.}$$

یا به عبارت دیگر

$$\text{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy - yz & x^2 + z^2 - xz & 2yz - xy \end{vmatrix} = 0$$

حال تابع پتانسیل را می‌یابیم. داریم:

$$\left.\begin{cases} \Phi = \int P dx = \int (2xy - yz)\,dx = x^2 y - xyz \\ \Phi = \int Q dy = \int (x^2 + z^2 - xz)\,dy = x^2 y + z^2 y - xyz \\ \Phi = \int R dz = \int (2yz - xy)\,dz = yz^2 - xyz \end{cases}\right\} \xrightarrow[\text{جوابها}]{\text{اجتماع}} \Phi = x^2 y - xyz + z^2 y$$

روش دوم:

$$\Phi = \int_0^x P(t,0,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t,0)\,dt + \int_0^z R(x,y,t)\,dt = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y x^2 dt +$$

$$\int_0^z (2yt - xy)\,dt = x^2 y + yz^2 - xyz$$

تعریف: گوییم $\int F\cdot dr$ مستقل از مسیر است هرگاه برای هر دو مسیر دلخواه C_1 و C_2 در ناحیه با ابتدا و انتهای یکسان داشته باشیم:

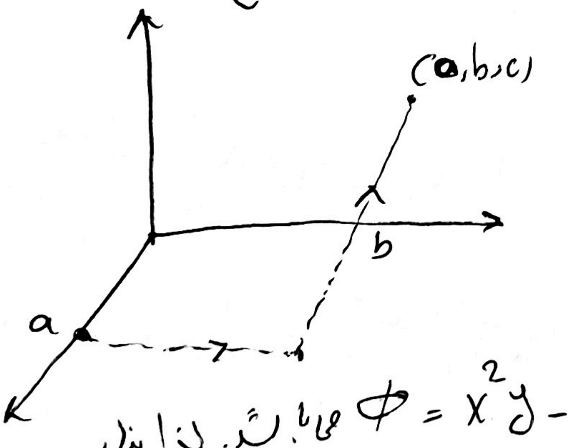
$$\int_{C_1} F\cdot dr = \int_{C_2} F\cdot dr$$

قضیه: انتگرال منحنی الخط $\int_C F\cdot dr$ روی منحنی C مستقل از مسیر است هرگاه تابع برداری F پایستار باشد. به عبارت دیگر در انتگرال‌های منحنی الخطی که مستقل از مسیر هستند، مقدار انتگرال تنها به دو نقطه ابتدا و انتهای مسیر وابسته است و داریم:

$$\int_C F\cdot dr = \int_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int_C d\phi = \phi \Big|_{\text{ابتدای مسیر}}^{\text{انتهای مسیر}}$$

$$= \phi(\text{انتهای مسیر}) - \phi(\text{ابتدای مسیر})$$

مثال. مطلوبست محاسبه $\int_C (2xy-yz)\,dx + (x^2+z^2-xz)\,dy + (2yz-xy)\,dz$ که در آن C مسیر زیر است:



حل. همانگونه که در مثال قبلی نشان دادیم این تابع

$$F=(2xy-yz,\ x^2+z^2-xz,\ 2yz-xy)$$

پایستار است و تابع پتانسیل آن $\phi = x^2y - yz^2 - xyz$ می‌باشد. لذا بنا به قضیه قبل مقدار انتگرال فوق به مسیر وابسته نیست و فقط به نقطه ابتدا و انتهای مسیر وابسته است. لذا

$$\int_C (2xy-yz)\,dx + (x^2+z^2-xz)\,dy + (2yz-xy)\,dz = \phi(\text{انتها}) - \phi(\text{ابتدا}) = \phi(0,b,c) - \phi(a,0,0) = -bc^2$$

مثال. مطلوبست حاصل

$$\int_{(0,2,\pi)}^{(2,\pi,4)} 2\cos y\,dx + \left(\frac{1}{y} - 2x\sin y\right)dy + \frac{1}{z}\,dz$$

حل. داریم

$$F=\left(2\cos y,\ \frac{1}{y}-2x\sin y,\ \frac{1}{z}\right) \to \begin{cases} P_y = -2\sin y = Q_x \\ P_z = R_x = 0 \\ Q_z = R_y = 0 \end{cases} \longrightarrow F \text{ پایستار است}$$

$$\to \begin{cases} \Phi = \int P\,dx = \int 2\cos y\,dx = 2x\cos y \\ \Phi = \int Q\,dy = \int \left(\frac{1}{y} - 2x\sin y\right)dy = \ln y + 2x\cos y \\ \Phi = \int R\,dz = \int \frac{1}{z}\,dz = \ln z \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع جواب ها}}$$

$$\Phi = 2x\cos y + \ln y + \ln z$$

$$\to \int_{(0,2,\pi)}^{(2,\pi,4)} 2\cos y\,dx + \left(\frac{1}{y} - 2x\sin y\right)dy + \frac{1}{z}\,dz = \Phi\,(\text{انتهای مسیر}) - \Phi\,(\text{ابتدا})$$

$$= \Phi(2,\pi,4) - \Phi(0,2,\pi) = (4\cos\pi + \ln\pi + \ln 4) - (0 + \ln 2 + \ln\pi) = -4 + \ln 2$$

مثال. C قسمتی از منحنی

$$\begin{cases} x = e^{t^2} \\ y = \sqrt{1-t^2} \\ z = \ln(1+t) \end{cases}$$

به ازای $0 \le t \le 1$ است. مطلوبست حاصل

$$\int_C (2xy + 4yz)\,dx + (x^2 + 4xz - 2z^2)\,dy + (4xy - 4yz)\,dz$$

حل. داریم

$$F = (2xy + 4yz,\ x^2 + 4xz - 2z^2,\ 4xy - 4yz)$$

$$\to P_y = Q_x = 2x + 4z \ ,\ P_z = R_x = 4y \ ,\ Q_z = R_y = \cancel{2xy^2 - 2y^2z}\ 4x - 4z$$

$$\xrightarrow{F \text{ پایستار است}} \Phi = x^2y - 4xyz - 2yz^2$$

مقدار انتگرال به مسیر وابسته نیست و فقط به ابتدا و انتها وابسته است

$$\int_C F\,dr = \Phi\,(\text{انتها}) - \Phi\,(\text{ابتدا}) = \Phi(1,1,0) - \Phi(e,0,\ln 2)$$

$$\begin{cases} x(0)=e^0=1 \\ y(0)=\sqrt{1-0}=1 \\ z(0)=\ln(1+0)=0 \end{cases}$$

توجه شود ابتدای مسیر به ازای $z=0$ بدست می‌آید. لذا داریم

و ابتدای مسیر به ازای $z=1$ بدست می‌آید و داریم. ابتدای مسیر $=(e , 0 , \ln 2)$

نکته. اگر F یک میدان برداری پایستار باشد و ابتدا و انتهای مسیر یکسان باشند (مسیر بسته باشد) آن‌گاه مقدار انتگرال صفر است.

مثال حاصل انتگرال $\int_C (e^x \sin y+2y)dx+(e^x\cos y+2x-2y)dy$ را روی مسیر $4x^2+y^2=4$ بیابید.

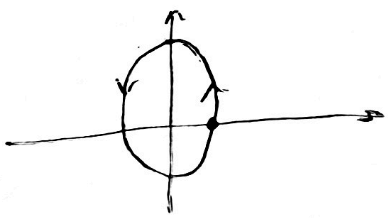
حل. داریم

$$F=(e^x \sin y+2y , e^x\cos y+2x-2y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y+2 \longrightarrow F=\text{پایستار}$$

$$\Rightarrow \int_C F\,dr=\Phi(\text{انتهای مسیر})-\Phi(\text{ابتدای مسیر})=0$$

چون مسیر یعنی $4x^2+y^2=4$ است و ابتدا و انتهای مسیر یکسان هستند.



توجه شود همه انتگرال فوق را می‌توان با پارامتری کردن مسیر به صورت $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ به صورت زیر نیز حل کرد.

$$\int_C (e^x \sin y+2y)dx+(e^x\cos y+2x-2y)dy=$$

$$\int_0^{2\pi}(e^{\cos t}\sin(2\sin t)+4\sin t)(-\sin t\,dt)+(e^{\cos t}\cos(2\sin t)+2\cos t-2\sin t)(2\cos t)\,dt=0$$

که قابل ذکر است که روش فوق بسیار طولانی و پیچیده خواهد بود.

مثال. حاصل $\oint (e^x \sin y + 3y)dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)dy$ را روی $4x^2+y^2=4$ بیابید.

حل. مشاهده می‌شود انتگرال فوق در در یک y با انتگرال مثال قبلی متفاوت است. لذا می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

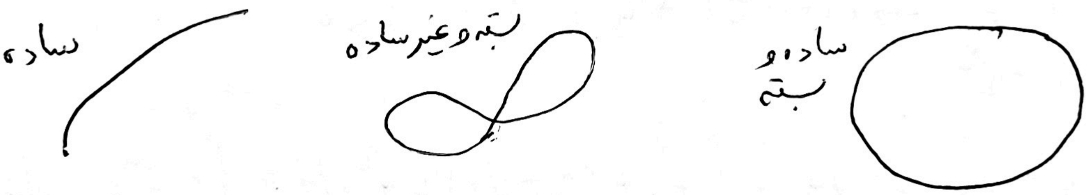
$$\oint (e^x \sin y + 3y)dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)dy = \underbrace{\boxed{\oint (e^x \sin y + 2y)dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)dy}}_{\text{صفر (بنا به مثال صفحه قبل)}} + \oint y\,dx = \oint y\,dx \xrightarrow[y=2\sin t]{x=\cos t}$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\sin t)(-\sin t)dt = -2\pi$$

تعریف: الف) منحنی C را ساده گویند هرگاه خودش را قطع نکند.

ب) منحنی C را بسته گویند هرگاه ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشد.

ج) منحنی C را ساده و بسته گویند هرگاه به جز در ابتدا و انتها خودش را قطع نکند.



قضیه گرین: فرض کنید C یک منحنی ساده و بسته با جهت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) که ناحیه D را محصور کرده است. فرض کنید $F=P(x,y)i+Q(x,y)j$ یک میدان برداری باشد به طوریکه مؤلفه‌های آن (P و Q) و مشتقات جزئی آن‌ها در D پیوسته باشند. آن‌گاه

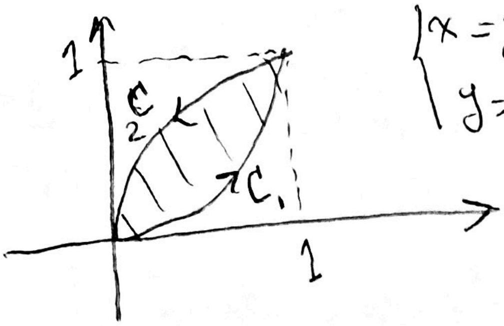
$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

نتیجه: اگر F یک میدان پایستار باشد، یعنی $Q_x = P_y$ آن‌گاه

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy = 0$$

مثال: درستی قضیه گرین را برای $\vec{F} = xy\vec{i} + y^2\vec{j}$ در ناحیه $x=y^2$ و $y=x^2$ بررسی کنید.

حل:



$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases} \longrightarrow x = x^4 \longrightarrow x = 0 , x = 1 \longrightarrow y = 0 , 1$$

باید نشان دهیم $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$

داریم:

$$\oint_C xy\,dx + y^2\,dy = \int_{C_1} xy\,dx + y^2\,dy + \int_{C_2} xy\,dx + y^2\,dy$$

$$C_1 : \begin{cases} y = x^2 \\ x = t \\ y = t^2 \end{cases} \longrightarrow r(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} \ , \quad 0 \le t \le 1$$

$$\leadsto \int_{C_1} xy\,dx + y^2\,dy = \int_0^1 t \cdot t^2\,dt + (t^2)^2(2t\,dt) = \int_0^1 (t^3 + 2t^5)\,dt = \frac{7}{12}$$

$$C_2 : \begin{cases} x = y^2 \\ y = t \\ x = t^2 \end{cases} \longrightarrow r(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j} \ , \quad 1 \le t \le 0$$

$$\leadsto \int_{C_2} xy\,dx + y^2\,dy = \int_1^0 t^2 \cdot t(2t\,dt) + t^2\,dt = \int_1^0 (2t^4 + t^2)\,dt = \frac{-11}{15}$$

$$\Rightarrow \int_C xy\,dx + y^2\,dy = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \frac{7}{12} - \frac{11}{15} = -\frac{3}{20}$$

روش گرین:

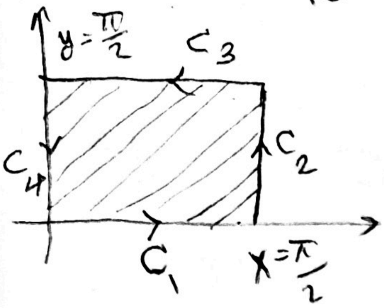
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (0 - x)\,dx\,dy = -\iint_D x\,dx\,dy$$

$$= -\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} x\,dx\,dy = -\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy = -\frac{3}{20}$$

$$\Longrightarrow \oint_C xy\,dx + y^2\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

184

مثال. فرض کنید $\vec{F} = -\sin y\,\vec{i} + x\cos y\,\vec{j}$ یک میدان برداری روی ناحیه‌ای باشد که توسط خطوط $x=\frac{\pi}{2}$ و $y=\frac{\pi}{2}$ از ناحیه اول جدا شده است. درستی قضیه گرین را ثابت کنید.



حل. باید نشان دهیم

$$\oint_C -\sin y\,dx + x\cos y\,dy = \iint_D (2\cos y)\,dx\,dy$$

$$C_1: \begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ y = 0 \\ \vec{r}_1(t) = t\vec{i} + 0\vec{j} \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$C_2: \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \\ \vec{r}_2(t) = \frac{\pi}{2}\vec{i} + t\vec{j} \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$C_3: \begin{cases} \frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ y = \frac{\pi}{2} \\ \vec{r}_3(t) = t\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j} \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \le t \le 0$$

$$C_4: \begin{cases} x = 0 \\ \frac{\pi}{2} \le y \le 0 \\ \vec{r}_4(t) = 0\vec{i} + t\vec{j} \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \le t \le 0$$

$$\to \oint_C -\sin y\,dx + x\cos y\,dy = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin 0)\,dt + (t\cos 0)\,0\,dt$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin t\,(0\,dt) + \frac{\pi}{2}\cos t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin\frac{\pi}{2}\,dt + \left(t\cos\frac{\pi}{2}\right)(0\,dt) +$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin t\,(0\,dt) + 0\cos t\,dt = \pi$$

روش قضیه گرین:

$$\oint_C -\sin y\,dx + x\cos y\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + \cos y)\,dx\,dy$$

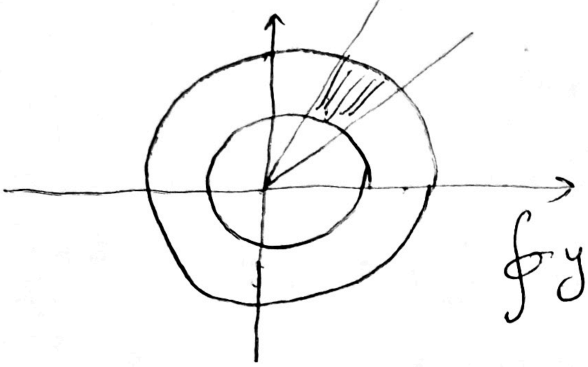
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos y\,dy = \pi$$

$$\Rightarrow \oint_C -\sin y\,dx + x\cos y\,dy = \iint 2\cos y\,dx\,dy = \pi$$

مثال. فرض کنید c ناحیه محدود به منحنی $y=\sqrt{1-x^2}$ و $y=\sqrt{9-x^2}$ و $y=x$ و $y=\sqrt{3}x$ باشد مطلوبست محاسبه

$$\oint y^3dx - x^3dy$$

حل. اگر بخواهیم به طور مستقیم انتگرال فوق را محاسبه کنیم بسیار پیچیده خواهد بود. لذا از قضیه گرین برای محاسبه آن کمک می‌گیریم.



داریم:

$$\oint y^3dx-x^3dy=\iint_D(-3x^2-3y^2)dxdy$$

$$=\iint -3(x^2+y^2)\,dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_1^3 -3r^2.r\,dr\,d\theta=\cdots$$

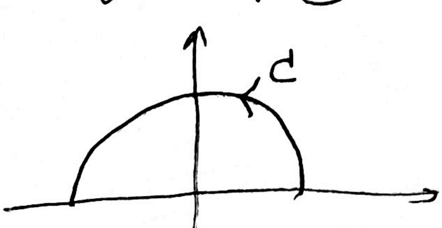
نحوه محاسبه کران های θ:

$$y=x\rightarrow \frac{y}{x}=1\rightarrow \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=1\rightarrow \tan\theta=1\rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$y=\sqrt{3}x\rightarrow \frac{y}{x}=\sqrt{3}\rightarrow \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\sqrt{3}\rightarrow \tan\theta=\sqrt{3}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

نکته: توجه شود که برای استفاده از قضیه گرین حتماً باید منحنی C بسته باشد. برخی مواقع که منحنی C بسته نباشد می‌توان با اضافه کردن منحنی دیگری مانند C' منحنی را به یک منحنی بسته تبدیل کرد و سپس قضیه گرین را به کار برد.

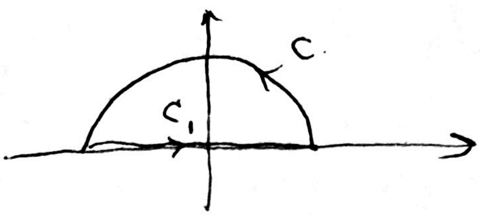
مثال. حاصل $\int(e^x\sin y-y)dx+(e^x\cos y-y)dy$ را روی نیم دایره بالای $x^2+y^2=1$ بیابید.



حل. باید حاصل انتگرال را روی مسیر زیر پیدا کرد.

با توجه به اینکه مسیر C بسته نیست نمی‌توان از قضیه گرین استفاده کرد. لذا اگر منحنی C' را مطابق شکل مقابل اضافه کنیم، منحنی حاصل بسته خواهد شد.

186



لذا داریم:

$$\oint_{C\cup C_1} (e^x \sin y - y)dx + (e^x \cos y - y)dy \overset{\text{گرین}}{=} \iint (e^x \cos y - e^x \cos y + 1)\, dx\, dy$$

$$= \iint dx\,dy = \int_0^{\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

اما داریم

$$\oint_{C\cup C_1} (e^x \sin y - y)dx + (e^x \cos y - y)dy = \int_C + \int_{C_1}$$

$$\rightarrow \int_C = \oint_{C\cup C_1} - \int_{C_1} = \frac{\pi}{2} - \int_{C_1} (e^x \sin y - y)dx + (e^x \cos y - y)dy$$

حال حاصل $\int_{C_1}(\dots)$ را می‌یابیم. داریم.

$$C_1 : \begin{cases} y = 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ x = t \end{cases} \rightarrow r(t) = ti + 0j$$

$$\rightarrow \int_{C_1} (e^x \sin y - y)dx + (e^x \cos y - y)dy = \int_{-1}^{1} (e^0 \sin 0 - 0)dt + (e^t \cos 0 - 0)\,0\,dt$$

$$= 0 \longrightarrow \int_C = \frac{\pi}{2}$$

مثال. حاصل $\oint_{x^2+y^2=9} (3y - e^{\sin x})dx + (7x + \sqrt{1+y^2})dy$ را بیابید.

حل. چون ناحیه بسته است بنابه قضیه گرین داریم:

$$\oint_C F\,dr = \iint (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint (7-3)\,dx\,dy = 4\iint dx\,dy$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\int_0^{3} dx\,dy = 24\pi$$

مثال. مطلوبست محاسبه $\oint \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$ که در آن

الف. C دایره‌ای است به مرکز $(0,0)$ و شعاع یک.

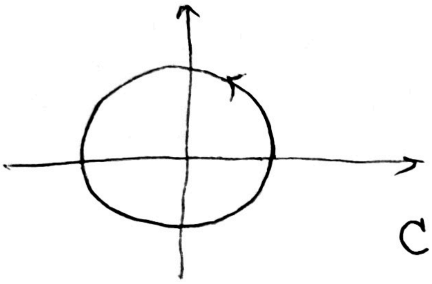
ب. C دایره‌ای است به مرکز $(0,0)$ و شعاع a

ج. C دایره‌ای است به مرکز $(2,0)$ و شعاع یک.

د. C هر منحنی ساده و بسته‌ای است که $(0,0)$ را درون خود دارد.

ه. C هر منحنی ساده و بسته‌ای است که $(0,0)$ را درون خود ندارد.

حل. الف. از قضیه گرین نمی‌توان استفاده کرد چون که P و Q در $(0,0)$ تعریف نشده‌اند. لذا انتگرال خط را به صورت مستقیم حساب می‌کنیم.



$$C: x^2+y^2=1 \longrightarrow \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases} \rightarrow r(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$$

$$\rightarrow \oint \frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy=\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sin^2 t+\cos^2 t}(-\sin t)dt-\frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(\cos t\,dt)$$

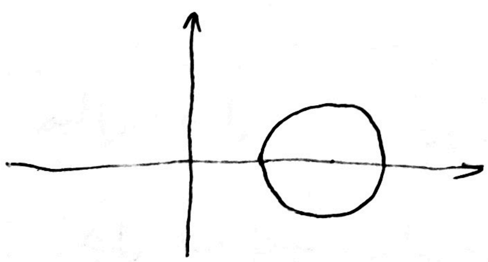
$$=-\int_0^{2\pi}(\sin^2 t\,dt+\cos^2 t\,dt)=-\int_0^{2\pi}dt=-2\pi$$

ب. همانند قسمت الف.

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$$

$$\oint \frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy=-\int_0^{2\pi}dt=-2\pi$$

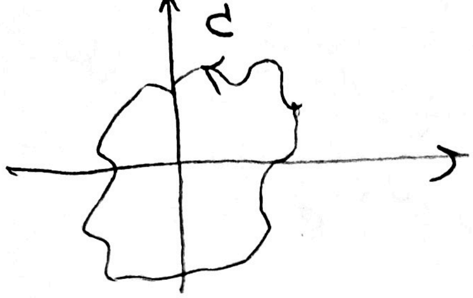
ج. در این حالت می‌توان از قضیه گرین استفاده کرد. داریم

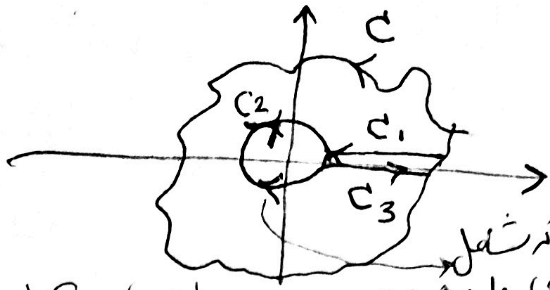


$$\oint \frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy=\iint (Q_x-P_y)\,dx\,dy$$

$$=\iint\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right)dx\,dy=0$$

۷)





بگونه‌ای حرکت می‌کنیم که شامل (۰،۰) باشد و بنا بر قاعده دست راست ($\gamma = C \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$ قرار می‌دهیم

لذا

$$\oint_\gamma F.dr = 0 \longrightarrow$$ چون (۰،۰) را شامل نمی‌شود.

اما

$$\oint_\gamma F.dr = \int_C Fdr + \int_{C_1} Fdr + \int_{C_2} Fdr + \int_{C_3} F.dr = 0$$

چون C_1 و C_3 در یک مسیر در جهت‌های مخالف هستند لذا

$$\int_{C_1} Fdr = -\int_{C_3} Fdr \longrightarrow \int_{C_1} Fdr + \int_{C_3} Fdr = 0$$

در نتیجه

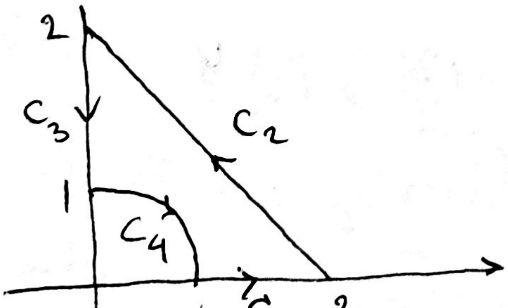
$$\oint_\gamma Fdr = \int_C F.dr + \int_{C_2} Fdr = 0 \longrightarrow \int_C Fdr = -\int_{C_2} Fdr$$

اما C_2 می‌تواند یک دایره به شعاع مثلاً یک و به مرکز (۰،۰) باشد. لذا بنا به قسمت الف $\int_{C_2} F\,dr = \underline{+2\pi}$

در نتیجه $\int_C Fdr = 2\pi$ ← توجه شود جهت C_2 مخالف جهت الف است لذا مقدار آن $+2\pi$ است.

و. صفر است چون $Q_x = P_y$. در نتیجه از قضیه گرین مقدار انتگرال صفر است.

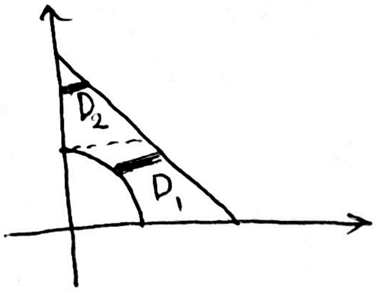
مثال. درستی قضیه گرین را برای میدان $F = -y^3 i + x^3 j$ و منحنی داده شده در شکل زیر تحقیق کنید.



حل:

$$\begin{cases} C_1: y=0,\ 1\leq x\leq 2 \to r_1(t) = t\vec{i} + 0j \\ C_2: x+y=2 \to r_2(t) = ti + (2-t)j \quad 2\leq t\leq 0 \\ C_3: x=0,\ 2\leq y\leq 1 \to r_3(t) = 0i + tj \quad 2\leq t\leq 1 \\ C_4: x^2+y^2=1 \to x=\cos t,\ y=\sin t \quad 0\leq t\leq \frac{\pi}{4} \\ \quad \to r_4(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} \end{cases}$$

$$\to \oint_C F.dr = \oint_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = 0 + 8 + 0 - \frac{3\pi}{8} = 8 - \frac{3\pi}{8}$$



حل از طریق قضیه گرین:

$$\iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint (3x^2+3y^2)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{D_1}(3x^2+3y^2)\,dx\,dy + \iint_{D_2}(3x^2+3y^2)\,dx\,dy =$$

$$\int_0^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^{2-y} 3(x^2+y^2)\,dx\,dy + \int_1^2\int_0^{2-y} 3(x^2+y^2)\,dx\,dy = 8-\frac{3\pi}{8}$$

محاسبه مساحت با استفاده از قضیه گرین:

اگر P و Q بگونه‌ای انتخاب شوند که $Q_x - P_y = 1$ آن‌گاه بنابر قضیه گرین داریم

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint dx\,dy = \text{مساحت ناحیه } D$$

به عنوان مثال اگر $P=0$ و $Q=x$ آن‌گاه،

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \oint x\,dy = \iint dx\,dy = \text{مساحت ناحیه } D$$

مثلا اگر $P=y$ و $Q=0$ آن‌گاه

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \oint P\,dx = \iint dx\,dy = \text{مساحت ناحیه } D$$

مثال. اگر $P=-\frac{1}{2}y$ و $Q=+\frac{x}{2}$ آن‌گاه.

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \oint -\frac{1}{2}y\,dx + \frac{1}{2}x\,dy = \iint dx\,dy = \text{مساحت ناحیه } D$$

مثال. مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را با کمک قضیه گرین بیابید.

حل. داریم

$$S = \iint dx\,dy = \oint x\,dy$$

از $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ داریم $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ لذا

$$\oint x\,dy = \int_0^{2\pi} a\cos t\, b\cos t\,dt = ab\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = ab\pi$$

تمرینات درس سیزدهم

1. حاصل $\int (x^2+y^2)\,ds$ را روی منحنی C بیابید که در آن

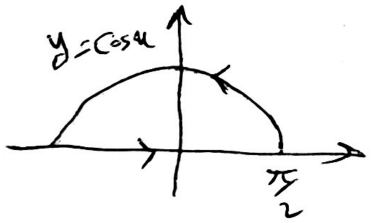
$$C:\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$$ و $0\le t\le 2\pi$

2. حاصل $\int \sqrt{x^2+y^2}\,ds$ را بیابید روی منحنی C که دایره $x^2+y^2=ax$ است

3. کار انجام شده توسط میدان برداری $F=(y-x^2)i+(z-y^2)j+(x-z^2)k$ را روی خم $C: r(t)=ti+t^2j+t^3k$ و $0\le t\le 1$ بیابید.

4. حاصل $\int_C -y\sec^2 x\,dx+\tan x\,dy$ را در مسیر C که مثلث با رئوس $(0,0)$ و $(\frac{\pi}{4},0)$ و $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ است را بیابید.

5. مطلوبست محاسبه $\int_C (y^2+e^x)dx+(2xy+6y^2)dy$ که در آن C مسیر زیر است

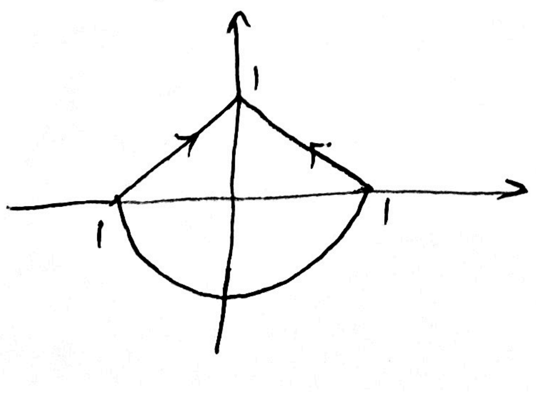


6. حاصل $\int_{(4,0,3)}^{(-1,1,2)} (yz+1)dx+(xz+1)dy+(xy+1)dz$ را بیابید.

7. درستی قضیه گرین را برای میدان برداری $F=(x^2+y^2)i+(2xy+3)j$ روی مسیر C مرز ناحیه تعریف شده توسط $x=8$ و $y^2=2x$ تحقیق کنید.

8. مساحت دایره $r(t)=a\cos t\,i+a\sin t\,j$ که $0\le t\le 2\pi$ را با کمک قضیه گرین بیابید.

9. حاصل $\int_C \frac{(x+y)dx+(y-x)dy}{x^2+y^2}$ که در آن C به صورت مقابل است را بیابید.



انتگرال سطح (انتگرال رویه‌ای)

فرض کنید S یک رویه دلخواه با ضابطه $z=g(x,y)$ باشد و تابع $f(x,y,z)$ با سطح S معین باشد. در اینصورت انتگرال سطح تابع چندمتغیره f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma$$

توجه شود که انتگرال سطح در واقع حالت دوبعدی از انتگرال خط است که در آن بجای منحنی C از یک سطح هموار استفاده می‌شود.

روش محاسبه انتگرال سطح:

اگر رویه S به صورت صریح $z=g(x,y)$ داده شده باشد، انتگرال سطح به صورت زیر است:

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma=\iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dx\,dy$$

که در آن D تصویر سطح S بروی صفحه xy (یعنی $z=0$) می‌باشد.

نکته: اگر رویه S به فرم صریح $y=g(x,z)$ داده شده باشد، آن‌گاه

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma=\iint_D f(x,g(x,z),z)\sqrt{1+g_x^2+g_z^2}\,dx\,dz$$

که در آن D تصویر سطح S بر صفحه xz است.

نکته: اگر رویه S به فرم صریح $x=g(y,z)$ داده شده باشد، آن‌گاه

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma=\iint_D f(g(y,z),y,z)\sqrt{1+g_y^2+g_z^2}\,dy\,dz$$

که D تصویر سطح S بر صفحه yz است.

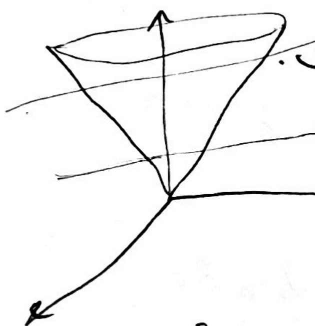
نکته: توجه شود که اگر S به صورت ضمنی $G(x,y,z)=0$ داده شده باشد آنگاه داریم:

$$d\sigma = \frac{\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}}{|G_z|}\,dx\,dy$$

و تصویر رویه را در صفحه xy می‌یابیم. لذا داریم:

$$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint f(x,y,z).\frac{\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}}{|G_z|}\,dx\,dy$$

مثال. حاصل $I=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,d\sigma$ را بیابید که در آن S قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است که توسط صفحات $z=1$ و $z=2$ جدا شده است.



حل.

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,d\sigma = \iint (x^2+y^2+$$

$$=\iint (x^2+y^2+(x^2+y^2))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$$

$$=\iint 2(x^2+y^2)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=\iint 2(x^2+y^2)\sqrt{\frac{x^2+y^2+x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\iint 2\sqrt{2}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_1^2 2\sqrt{2}\,r^2.r\,dr\,d\theta=\frac{15}{2}\pi$$

مثال. فرض کنید S قسمتی از رویه $z=4-(x^2+y^2)$ باشد که توسط صفحه $z=0$ قطع شده است. مطلوبست حاصل

$$\iint_S (x^2+y^2+z)\,d\sigma$$

حل:

$$\iint_S (x^2+y^2+z)\,d\sigma=\iint (x^2+y^2+4-x^2-y^2)\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\,dx\,dy$$

$$=\iint 4\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^2 4\sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr\,d\theta$$

توجه شود اگر رویه را به صورت $z-4+(x^2+y^2)=G(x,y,z)=0$ نیز در نظر بگیریم باز هم جواب یکسان است. داریم:

$$\iint_S (x^2+y^2+z)\,d\sigma=\iint (x^2+y^2+4-x^2-y^2)\frac{\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}}{|G_z|}\,dx\,dy$$

$$=\iint 4\,\frac{\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}}{1}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^2 4\sqrt{1+2r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

نکته: مهمترین کاربرد انتگرال سطح (انتگرال رویه‌ای) محاسبه سطح جانبی رویه S است.
به عبارت دیگر اگر $f(x,y,z)=1$ آنگاه $\iint_S d\sigma$ برابر مساحت جانبی رویه S است.

مثال. مساحت سطح کره به شعاع a را بیابید.
حل.

$$x^2+y^2+z^2=a^2\Rightarrow z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

$$\text{مساحت سطح}=\iint_S d\sigma=2\iint\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dx\,dy=2\iint\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}$$

$$=2\iint\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=2\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\,d\theta=4\pi a\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_0^a=4\pi a^2$$

مثال. مطلوبست مساحت رویه‌ای که صفحه $Z=2$ از سهمی‌وار $x^2+y^2-Z=0$ جدا می‌کند. 194

حل:

$$\text{مساحت سطح}=\iint d\sigma=\iint\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dx\,dy=\iint\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta=\frac{13}{3}\pi$$

مثال. مطلوبست مساحت سطح قسمتی که مخروط $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ از کره $x^2+y^2+Z^2=2$ جدا می‌کند.

حل.

$$\text{مساحت سطح}=\iint d\sigma=\iint\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dx\,dy=\iint\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=\iint\sqrt{2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta=\sqrt{2}\,\pi$$

کرانه‌ها:

$$\begin{cases}Z=\sqrt{x^2+y^2}\\ x^2+y^2+Z^2=2\end{cases}\longrightarrow x^2+y^2+x^2+y^2=2\longrightarrow x^2+y^2=1\longrightarrow$$ دایره به شعاع یک

مثال. مساحت ناحیه بریده شده از نیمکره $x^2+y^2+Z^2=4$ و $Z\geq 0$ توسط استوانه $x^2+y^2=2x$ را حساب کنید.

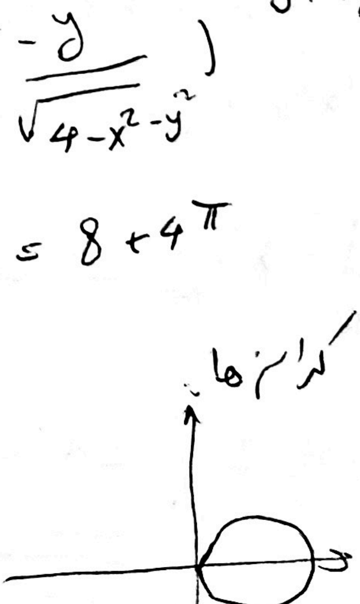
حل.

$$x^2+y^2+Z^2=4\longrightarrow Z=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$\text{مساحت سطح}=\iint_S d\sigma=\iint\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=\iint\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta=8+4\pi$$

کرانه‌ها:



$$x^2+y^2=2x\longrightarrow r^2=2r\cos\theta\longrightarrow r=2\cos\theta$$

$$x^2+y^2=2x\longrightarrow x^2+y^2-2x=0\longrightarrow(x-1)^2+y^2=1$$

انتگرال سطح نوع دوم: اگر F یک میدان برداری روی سطح جهت دار که با بردار نرمال $\vec{n}$ (رو به بیرون ناحیه) باشد. آن گاه انتگرال سطح F روی S را که به آن شار گذرنده توسط میدان F از رویه S در جهت n (یا شار برونسو) می گویند به صورت زیر تعریف می شود.

$$\text{شار برونسو} = \iint F.n \, d\sigma$$

محاسبه انتگرال سطح نوع دوم: اگر $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ و رویه S به فرم ضمنی $g(x,y,z) = 0$ داده شده باشد. آن گاه. داریم:

$$n = \pm \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{\pm(g_x, g_y, g_z)}{|\nabla g|} \quad \text{و} \quad d\sigma = \frac{|\nabla g|}{|g_z|} \, dx\,dy$$

$$\rightarrow \iint_S F \cdot n \, d\sigma = \iint (P,Q,R) \frac{(g_x, g_y, g_z)}{|\nabla g|} \frac{|\nabla g|}{|g_z|} \, dx\,dy$$

$$= \iint \frac{P.g_x + Qg_y + Rg_z}{|g_z|} \, dx\,dy$$

مثال. مطلوبست شار میدان برداری $F = zx\vec{i} + zy\vec{j} + z^2\vec{k}$ گذرنده از بخشی از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ واقع در $\frac{1}{8}$ اول فضا و در جهتی که از مبدأ دور می شود.

حل.

$$g = x^2+y^2+z^2-a^2 \longrightarrow n = \frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|} = \pm \cancel{\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

$$= \pm \frac{(2x, 2y, 2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} \quad \text{و} \quad d\sigma = \frac{|\nabla g|}{|g_z|} = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{|2z|}$$

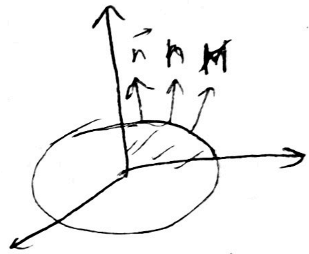
لذا

$$\text{شار} = \iint F.n\,dS = \iint (zx, zy, z^2)\frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} \cdot \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{|2z|}$$

$$= \iint \frac{(zx, zy, z^2)(2x,2y,2z)}{|2z|}\,dx\,dy$$

$$= \iint_S \frac{2x^2z + 2y^2z + 2z^3}{2z}\,dx\,dy = \iint (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy$$

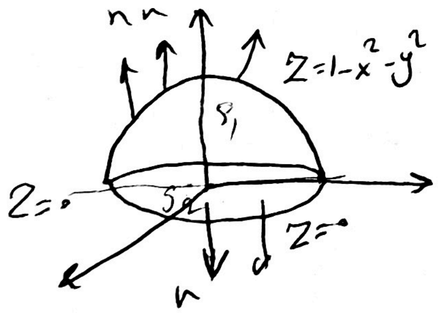
$$= \iint_{S'} a^2\,dx\,dy = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r\,dr\,d\theta = \frac{\pi a^4}{4}$$



مثال. حاصل شار برونسو ($\iint F.n\,dS$) را بیابید درحالیکه $F = yi + xj + zk$

و S رویه بسته توسط سهمیگون $z = 1 - x^2 - y^2$ و صفحه $z=0$ می باشد.

حل:



$$\iint_S F.n\,dS = \iint_{S_1} F.n\,dS + \iint_{S_2} F.n\,dS$$

$S_1 : z = 1 - x^2 - y^2$ و $S_2 : z = 0$

$$S_1 \rightarrow n = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \pm\frac{(-2x,-2y,-1)}{|\nabla g|} = -\frac{(-2x,-2y,-1)}{|\nabla g|} = \cancel{(2x,2y}$$

$$= \frac{(2x,2y,1)}{|\nabla g|} \quad , \quad dS = \frac{\nabla g}{|g_z|} = \frac{|\nabla g|}{1} = |\nabla g|$$

$$\rightarrow \iint_{S_1} F.n\,dS = \iint (y,x,z)\frac{(2x,2y,1)}{|\nabla g|}|\nabla g|\,dx\,dy =$$

$$=\iint (2xy+2xy+z)\,dx\,dy=\iint (4xy+1-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r\cos\theta . r\sin\theta+1-r^2)\,r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{S_2} F.n\,d\delta=\iint (y,x,z).(0,0,1)\,dx\,dy=-\iint z\,dx\,dy=0$$

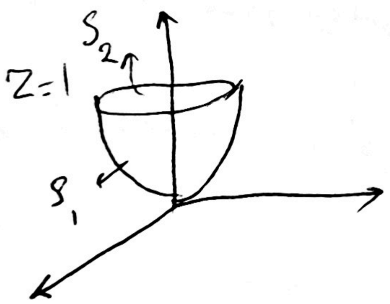
توجه شود روی سطح S_2 داریم

$$n=\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|}=\frac{\pm(0,0,1)}{|\nabla g|}=(0,0,-1)$$

$$\Rightarrow \iint_S F.n\,d\delta=\iint_{S_1} F.n\,d\delta+\iint_{S_2} F.n\,d\delta=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

مثال. اگر V ناحیه محدود به سطوح $z=x^2+y^2$ و $z=1$ باشد و S سطح خارجی آن باشد، برای تابع $F=xi+yj+2k$ مقدار شار برونسو را بیابید.

حل.



$$\iint_S F.n\,d\delta=\iint_{S_1} F.n\,d\delta+\iint_{S_2} F.n\,d\delta$$

$S_1: z-x^2-y^2=0$ و $S_2: z=1$

$$\iint_{S_1} F.n\,d\delta=? \qquad n=\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|}=\frac{\pm(-2x,-2y,1)}{|\nabla g|}=\frac{-(-2x,-2y,1)}{|\nabla g|}$$

$$\rightarrow n=\frac{(2x,2y,-1)}{|\nabla g|} \quad \text{و} \quad d\delta=\frac{|\nabla g|}{1}$$

$$\rightarrow \iint_{S_1} F.n\,d\delta=\iint (x,y,2)\frac{(2x,2y,-1)}{|\nabla g|}|\nabla g|\,dx\,dy=$$

$$\iint (2x^2+2y^2-2)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r^2-2)\,r\,dr\,d\theta=-\pi$$

$$S_2: z=1 \rightarrow n=\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|}=\frac{\pm(0,0,1)}{|\nabla g|}=(0,0,1)$$

$$\Rightarrow \iint_{S_2} F\cdot n\, dS = \iint (x,y,z)\cdot(0,0,1)\, dxdy = 2\iint dx\, dy \xrightarrow[\text{دایره}]{\text{مساحت} \times 2} 2\pi$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = 2\pi$$

$$\rightarrow \iint_S F\cdot n\, dS = \iint_{S_1} F\cdot n\, dS + \iint_{S_2} F\cdot n\, dS = 2\pi - \pi = \pi$$

تعاریف دیورژانس، کرل و گرادیان:

فرض کنید $f(x,y,z)$ یک تابع سه متغیره و $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ یک میدان برداری باشد. در این صورت داریم،

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = (f_x, f_y, f_z) \rightarrow$$ گرادیان f که برداراست

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \longrightarrow \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{div} F = \nabla\cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(P,Q,R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$\rightarrow \operatorname{div} F =$ دیورژانس F که یک تابع چند متغیره است

$$\operatorname{curl} F = \nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = i(R_y - Q_z) + j(P_z - R_x) + \vec{k}(Q_x - P_y)$$

خواص:

1. F پایستار است اگر و تنها اگر $\operatorname{curl} F = \vec{0}$
2. $\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = \nabla\cdot(\nabla\times F) = 0$
3. $\operatorname{curl} \nabla f = \nabla \times \nabla f = 0$
4. $\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla\cdot\nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \nabla^2 f$ ← به ∇^2 عملگر لاپلاس گوییم

۱۹۸

مثال. اگر $f=xy+yz+xz$ و $F=(x^2y,\ y^2z,\ xz^2)$ ، مطلوبست

حاصل. الف. $\operatorname{grad}(\operatorname{div} F)$

ب. $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f)$

ج. $\operatorname{curl}(\operatorname{curl} \vec{F})$

حل. الف.

$$\operatorname{div} F=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2y,\ y^2z,\ xz^2)$$

$$=P_x+Q_y+R_z=2xy+2yz+2xz$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} F)=\nabla(2xy+2yz+2xz)=$$

$$(2y+2z,\ 2x+2z,\ 2y+2x)$$

ب.

$$\operatorname{grad} f=\nabla f=(f_x,f_y,f_z)=(y+z,\ x+z,\ y+x)$$

$$\rightarrow \operatorname{curl}(\operatorname{grad} f)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y+z & x+z & y+x \end{vmatrix}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0}$$

ج.

$$\operatorname{curl} F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2y & y^2z & xz^2 \end{vmatrix}=(-y^2,\ -z^2,\ -x^2)$$

$$\rightarrow \operatorname{curl}(\operatorname{curl} F)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y^2 & -z^2 & -x^2 \end{vmatrix}=$$

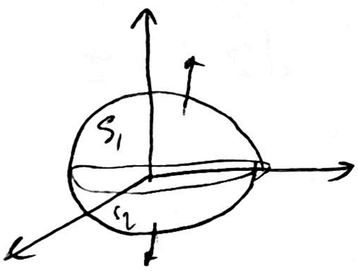
$$(+2z)i+j(2x)+k(2y)$$

قضیه دیورژانس (واگرایی): فرض کنید s یک سطح بسته و هموار باشد و $F = Pi + Qj + Rk$ یک میدان برداری باشد بطوریکه مولفه‌های F بر s دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند. فرض کنید $\vec{n}$ بردار یکه قائم بر سطح رویه s و رو به بیرون باشد. همچنین فرض کنید D ناحیه‌ای باشد که سطح s را محصور کرده است. در این صورت

$$\iint_S F\cdot n\, dS = \iiint_D \operatorname{div} F\, dV$$

$\iint_S F\cdot n\, dS \leftarrow$ شار برونسو

مثال. فرض کنید $F = xi + yj + zk$ و s سطح کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ باشد. درستی قضیه دیورژانس را بررسی کنید.



حل.

$$\iint_S F\cdot n\, dS = \iint_{S_1} F\cdot n\, dS + \iint_{S_2} F\cdot n\, dS = 2\iint_{S_1} F\cdot n\, dS$$

$$S_1:\ x^2+y^2+z^2=a^2 \rightarrow n = \frac{+(2x, 2y, 2z)}{|\nabla g|} \quad \text{و} \quad dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|} = \frac{|\nabla g|}{2z}$$

$$\rightarrow \iint_S F\cdot n\, dS = 2\iint (x, y, z)\frac{(2x, 2y, 2z)}{|\nabla g|}\,\frac{|\nabla g|}{2z}\, dx\, dy$$

$$= 2\iint \frac{x^2+y^2+z^2}{z}\, dx\, dy = 2\iint \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{a^2\cdot r}{\sqrt{a^2-r^2}}\, dr\, d\theta = 2a^2\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_0^a (2\pi) = 4\pi a^3$$

201

حال حاصل $\iiint \operatorname{div} F\, dv$ را حساب میکنیم. داریم

$\operatorname{div} F = P_x + Q_y + R_z = 1+1+1 = 3$

$\rightarrow \iiint \operatorname{div} v\, dv = \iiint 3\, dV = 3 \underbrace{\iiint dV}_{\text{حجم کره}} = 3V =$

$3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^3$

$\rightarrow \iint F.n\, d\delta = \iiint \operatorname{div} F$

مثال. حاصل $\iint_S F.n\, d\delta$ را بیابید که در آن $F = yi + xj + zk$ و S

رویه بسته توسط کمی های $z = 1 - x^2 - y^2$ و $z = 0$ است.

حل.

$\operatorname{div} F = P_x + Q_y + R_z = 0 + 0 + 1 = 1$

$\rightarrow \iint_S F.n\, d\delta = \iiint \operatorname{div} F\, dV = \iiint_D dV = \iiint_0^{1-x^2-y^2} dz\, dx\, dy$

$= \iint (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}$

مثال. فرض کنید V ناحیه‌ای است که داخل مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ و بین دو کره $x^2+y^2+z^2 = 4$ و $x^2+y^2+z^2 = 9$ واقع شده است. اگر S سطح خارجی ناحیه V باشد و $F = (x^3, y^3, z^3)$. مطلوبست شار گذرنده از آن توسط میدان F.

حل.

$\operatorname{div} F = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$

$\rightarrow \iiint \operatorname{div} F\, dV = \iiint 3(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_2^3 3\rho^2(\rho^2 \sin\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \cdots$

کران ها: $z = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \rho\cos\varphi = \rho\sin\varphi \rightarrow \tan\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

202

مثال. حاصل $\iint_S F\cdot n\,d\sigma$ را بیابید که در آن s سطح ناحیه E محدود به کمی گوس $z=1-x^2$ و صفحات $z=0$ و $y=0$ و $y+z=2$ می باشد. و F بصورت زیر است

حل. $F(x,y,z)=xyi+(y^2+e^{xz^2})j+\sin(xy)\vec{k}$

حل، داریم:

$$\operatorname{div}F=P_x+Q_y+R_z=y+2y=3y$$

$$\leadsto \iint_S F\cdot n\,d\sigma=\iiint \operatorname{div}F\,dv=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{2-z}3y\,dy\,dz\,dx=\frac{184}{35}$$

مثال. اگر $F=(z^2-x,\ xy,\ 3z)$ یک میدان برداری باشد و S سطح ناحیه ای قسمتی از رویه $z\geq 0$ و $z=4-y^2$ باشد که بین صفحات $x=0$ و $x=3$ قرار گرفته است حاصل انتگرال سطح $\iint F\cdot n\,d\sigma$ را بیابید.

حل:

$$\operatorname{div}F=P_x+Q_y+R_z=-1+x+3=2-x$$

$$\to \iint F\cdot n\,d\sigma=\iiint \operatorname{div}F\,dv=\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2}\int_{0}^{3}(2-x)\,dx\,dz\,dy$$

مثال. اگر V ناحیه محدود به سهمی گون $z=x^2+y^2$ و صفحه $z=1$ باشد و S سطح خارجی آن باشد. برای تابع $F=xi+yj+2k$ مقدار شار برون سو را بیابید.

حل

$$\operatorname{div}F=P_x+Q_y+R_z=1+1+0=2$$

$$\to \iint F\cdot n\,d\sigma=\iiint \operatorname{div}F\,dv=\iint\int_{x^2+y^2}^{1}2\,dz\,dx\,dy$$

$$=2\iint(1-x^2-y^2)\,dx\,dy=2\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta=\pi$$

203

مثال. فرض کنید V ناحیه محدود به کره $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ واقع در بالای صفحه $z=1$ باشد. اگر S سطح خارجی آن باشد و $F=(x+e^{z}, y+1+\cos z, 2z+1)$ حاصل $\iint_S F\cdot n\,dS$ را بیابید.

حل:
$$\operatorname{div}F = P_x+Q_y+R_z = 1+1+2=4$$

$$\to \iint F\cdot n\,dS = \iiint \operatorname{div}F\,dv = 4\iiint dV =$$

$$4(\text{حجم نیمکره}) = 4\left(\frac{2}{3}\pi(1)^3\right) = \frac{8}{3}\pi$$

مثال. V ناحیه محدود به دو کره $\rho=1$ و $\rho=2$ است و S سطح خارجی ناحیه V است. اگر
$F=(5x^3+12xy^2, y^3+e^y\sin z, 5z^3+e^y\cos z)$
یک میدان برداری باشد. شار برونسو را بیابید.

حل.
$$\operatorname{div}F = 15x^2+12y^2+3y^2+e^y\sin z+15z^2-e^y\sin z$$
$$=15(x^2+y^2+z^2)$$

$$\to \iint F\cdot n\,dS = \iiint \operatorname{div}F\,dv = \iiint (15(x^2+y^2+z^2))\,dv$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2} 15\rho^2(\rho^2\sin\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = 372\pi$$

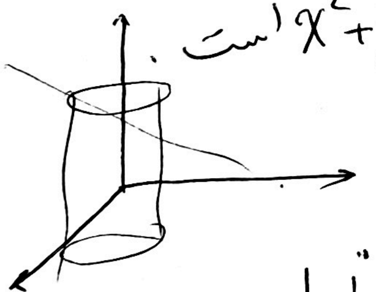
قضیه استوکس: فرض کنید S یک سطح هموار با مرز جهت دار $\vec{C}$ باشد و $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{K}$ یک میدان برداری باشد بطوریکه مولفه‌های F دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند و $\vec{n}$ بردار یکانی قائم بر سطح S و رو به خارج باشد. در این صورت داریم:

$$\oint_C F.dr = \iint_S (\mathrm{curl}F).n\, dS$$

نکته: توجه شود در حالتی که $F=P\vec{i}+Q\vec{j}$ قضیه استوکس همان قضیه گرین خواهد بود زیرا $\vec{n}=\vec{K}$ و $\mathrm{curl}F=(Q_x-P_y)\vec{K}$ لذا

$$\oint_C F dr = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

مثال. مطلوب است حاصل $\oint_C F.dr$ که در آن $F=-y^2i+xj+z^2K$ و C منحنی حاصل از تقاطع صفحه $y+z=2$ و استوانه $x^2+y^2=1$ است.



حل

$$\oint F dr = \iint (\mathrm{curl}F).n\, dS$$

داریم:

$$\mathrm{curl}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = 0i + 0j + (1-2y)\vec{k}$$

$$y+z=2 \rightarrow n = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{+(0,1,1)}{|\nabla g|} \quad \text{و} \quad dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|} = \frac{|\nabla g|}{1} = |\nabla g|$$

$$\Rightarrow \iint (\mathrm{curl}F).n\, dS = \iint (0,0,1-2y)\frac{(0,1,1)}{|\nabla g|}\frac{|\nabla g|}{1}\,dx\,dy$$

$$= \iint (1-2y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta = \pi \ldots$$

روش دوم:

$$\begin{cases} z+y=2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=2-\sin\theta \end{cases}$$

$$\longrightarrow r(t)=(\cos\theta, \sin\theta, 2-\sin\theta) \quad \text{و} \quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

$$\longrightarrow \oint_C F\cdot dr = \oint_C (-y^2)dx + x\,dy + z^2\,dz =$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta(-\sin\theta)d\theta + \cos\theta(\cos\theta)d\theta + (2-\sin\theta)^2(-\cos\theta)d\theta = \pi$$

مثال. فرض کنید $\vec{F}=-4y\vec{i}+2z\vec{j}+3x\vec{k}$ و C منحنی حاصل از تقاطع $z=10-x^2-y^2$ و $z=1$ باشد. درستی قضیه استوکس را بررسی کنید.

حل:

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_D \operatorname{curl} F\cdot n\, dS$$

طرف اول:

$$\begin{cases} z=10-x^2-y^2 \\ z=1 \end{cases} \longrightarrow x^2+y^2=9 \longrightarrow \begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=3\sin\theta \\ z=1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow r(\theta)=(3\cos\theta, 3\sin\theta, 1) \quad \text{و} \quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

$$\longrightarrow \oint_C F\,dr = \int -4y\,dx + 2z\,dy + 3x\,dz =$$

$$\int -12\sin\theta(-3\sin\theta)d\theta + 2(3\cos\theta)d\theta + 0 =$$

$$\int_0^{2\pi} (36\sin^2\theta + 6\cos\theta)\,d\theta = 36\pi$$

طرف دوم:

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -4y & 2z & 3x \end{vmatrix} = -2i - 3j + 4k$$

$$n = \frac{\pm \nabla g}{|\nabla g|} = \frac{\pm(-2x, -2y, -1)}{|\nabla g|} = \frac{(2x, 2y, 1)}{|\nabla g|}$$

$$dS = \frac{|\nabla g|}{|g_z|} = |\nabla g|$$

$$\Rightarrow \iint (\text{curl} F) \cdot n \, dS = \iint (-2, -3, 4) \frac{(2x, 2y, 1)}{|\nabla g|} |\nabla g| \, dx \, dy$$

$$= \iint (-4x - 6y + 4) \, dx \, dy = \iint_{x^2+y^2=9} (-4x - 6y + 4) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (-4r\cos\theta - 6r\sin\theta + 4) r \, dr \, d\theta = 36\pi$$

تمرینات درس چهاردهم

1. حاصل $\iint_S (x+y+z)\,d\sigma$ که S بخشی از $2x+2y+z=2$ واقع شده را بیابید.

2. مساحت قسمتی از سطح مخروط $x^2+y^2=z^2$ که بین دو صفحه $z=0$ و $x+2z=3$ قرار دارد را بیابید.

3. مطلوب است مساحت رویه‌ای که $y=0$ از کره‌ی واحد $x^2+y^2+z^2=1$ جدا می‌کند.

4. مقدار شار برونسو را برای $F=y^2\cos xz\,i+xe^{3yz}j-e^{-xyz}k$ و S به عنوان قسمتی از کره $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ بالای صفحه xy بیابید.

5. مقدار شار برونسوی $F=\dfrac{xi+yj+zk}{x^2+y^2+z^2}$ گذرنده از مرز ناحیه D به صورت $1\le x^2+y^2+z^2\le 4$ را محاسبه کنید.

6. مقدار شار برونسوی میدان F گذرنده از سطح بسته S را محاسبه کنید.

$$F=\ln(x^2+y^2)\,i+\left(2\arctan\frac{y}{x}\right)j+z\sqrt{x^2+y^2}\,k$$

$$S=\{(x,y,z)\mid 1\le x^2+y^2\le 2,\ -1\le z\le 2\}$$

7. فرض کنید R ناحیه بین دو مخروط $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ و $z=\sqrt{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2}$ و کره $x^2+y^2+z^2=1$ باشد. با فرض $\operatorname{div}F=e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ مقدار شار برونسوی F را بیابید.

8. اگر $F=xz\,i+xy\,j+y^2k$ و S قسمتی از استوانه $z=4-x^2$ باشد که توسط صفحات مختصات و صفحه $y=3$ قطع می‌شود، درستی قضیه استوکس را بررسی کنید.

~~9. اگر $F=4yi+2zj+3xk$ و S قسمتی از سطح کره ... z~~

پایان