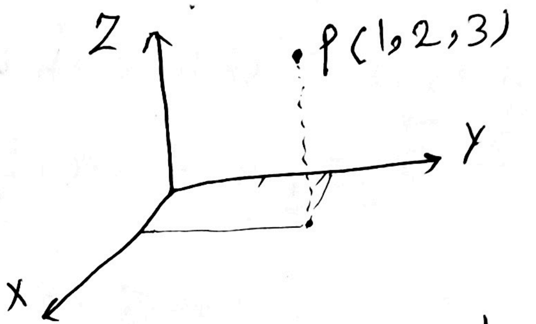
دانشکده علوم ریاضی

# ریاضی عمومی ۲

دکتر مهرداد غزنوی

# فصل اول: بردارها و هندسه تحلیلی

یک نقطه P در فضای سه بعدی XYZ، به صورت سه تایی مرتب $\vec{P}(a,b,c)$ نمایش داده می‌شود. برای نشان دادن P در فضای سه بعدی، ابتدا دوتایی مرتب $(a,b)$ را پیدا نموده و سپس به اندازه c واحد در امتداد محور $\vec{Z}$ حرکت می‌کنیم.




فاصله دو نقطه $P_1(a_1,b_1,c_1)$ و $P_2(a_2,b_2,c_2)$ برابر است با:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$$

مثال: فاصله دو نقطه $P_1(1,2,-1)$ و $P_2(0,4,2)$ را در فضا بیابید.

حل:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(0-1)^2+(4-2)^2+(2+1)^2} = \sqrt{14}$$

تعریف کمیت اسکالر: کمیت‌هایی مانند دما، زمان و جمعیت که فقط مقدار دارند را کمیت‌های اسکالر گویند.

تعریف بردار: کمیتی است که علاوه بر مقدار دارای جهت نیز می‌باشد. یک بردار را با حروف پررنگ و با علامت فلش بالای آن نمایش می‌دهند (مانند $\vec{a}$)

نکته: یک بردار در فضای $R^n$ را با n-تایی مرتب $\vec{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ نمایش می‌دهند.

طول بردار: طول یک بردار را اندازه یا نرم آن بردار گویند و با $|\vec{a}|$ نمایش می‌دهند و به صورت

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}$$

محاسبه می‌شود.

بردار یکه یا واحد: بردار با طول یک را بردار یکه یا یکانی گویند.

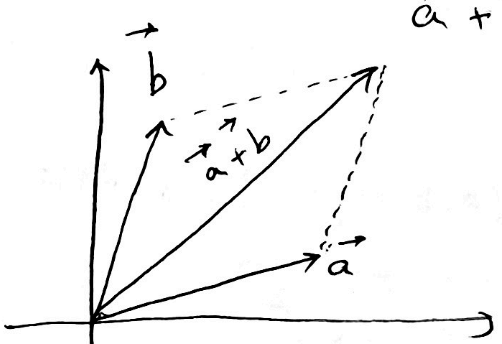
مثال: طول بردارهای $\vec{a}=(1,2,-2)$ و $\vec{b}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ را بیابید و نشان دهید بردار b واحد است:

حل: $|a|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$ $\qquad |b|=\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2+(-\frac{2}{3})^2}=1$

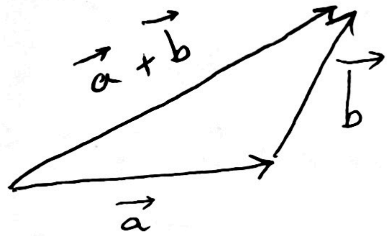
جمع دو بردار: اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در فضای $R^3$ باشند، جمع این دو بردار با $\vec{a}+\vec{b}$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

تعبیر هندسی:




روش متوازی الاضلاع



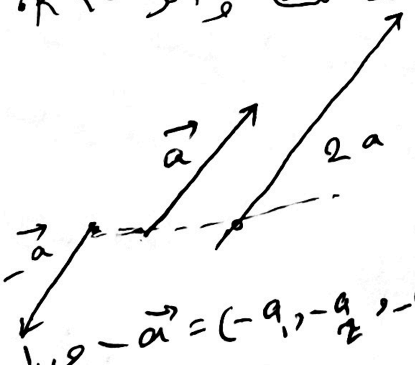

روش مثلثی

ضرب اسکالر در بردار: اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ یک بردار باشد و K یک عدد حقیقی دلخواه باشد در این صورت:

$K.\vec{a}=(Ka_1,Ka_2,Ka_3)$

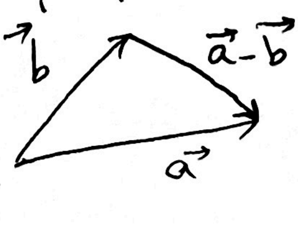
و اندازه K.a به صورت مقابل خواهد بود: $|Ka|=|K||a|$

توجه شود که اگر $K>0$ آنگاه K.a هم جهت $\vec{a}$ است و اگر $K<0$، آنگاه $K\vec{a}$ مخالف جهت $\vec{a}$ خواهد بود.




قرینه بردار $\vec{a}$: قرینه بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ به صورت $-\vec{a}=(-a_1,-a_2,-a_3)$ می‌باشد.

تفاضل دو بردار: اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ این دو بردار، در این صورت تفاضل این دو بردار به صورت $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$ خواهد بود.

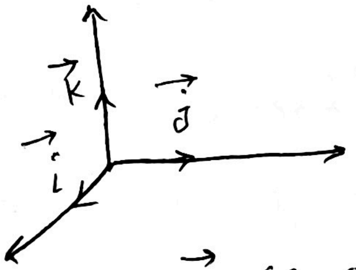


بردار با ابتدا و انتهای معلوم: یک بردار که نقطه ابتدای آن $P(x_1, y_1, z_1)$ و نقطه انتهای آن $Q(x_2, y_2, z_2)$ باشد را با $\overrightarrow{PQ} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ نمایش می‌دهیم. و اندازه آن عبارت است از

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

از روابط فوق مشخص است که نقاط ابتدا و انتهای بردارها مهم نیستند بلکه طول و جهت یک بردار مشخصه‌های اصلی آن هستند.

تعریف بردارهای یکه متعارف: در فضای $R^3$ بردارهای $\vec{i} = (1,0,0)$ و $\vec{j} = (0,1,0)$ و $\vec{k} = (0,0,1)$ را که به ترتیب در جهت مثبت محورهای $x$ و $y$ و $z$ قرار دارند را بردارهای یکه متعارف گویند و طول آن‌ها برابر یک می‌باشد.




تجزیه یک بردار برحسب بردارهای یکه متعارف: اگر $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ برداری دلخواه باشد، در این صورت داریم:

$$\vec a = (a_1,a_2,a_3) = (a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3) =$$
$$a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1) = a_1\vec i + a_2\vec j + a_3 \vec k$$

لذا هر بردار $\vec a = (a_1,a_2,a_3)$ را می‌توان به صورت $\vec a = a_1\vec i + a_2\vec j + a_3\vec k$ نیز نمایش داد.

بردار جهت: هر بردار غیرصفر $\vec a = a_1\vec i + a_2\vec j + a_3\vec k$ با تقسیم بر اندازه‌اش (یعنی $|a|$) به یک بردار واحد تبدیل می‌شود. بردار زیر را بردار جهت یا بردار نرمال $\vec a$ گویند:

$$e = \frac{\vec a}{|a|} = \frac{a_1\vec i + a_2\vec j + a_3\vec k}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

متوجه شوید که بردار $\vec e$ هم جهت بردار $\vec a$ و دارای طول واحد می‌باشد.

4

مثال: اگر $\vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ، برداری هم راستا با $\vec{a}$ و در خلاف جهت آن بیابید که اندازه آن برابر $\sqrt{3}$ باشد:

حل:

$$\vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow |\vec{a}| = 2$$

$$\Rightarrow e_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{1}{2} j - \frac{1}{2} k \longrightarrow |e_a| = 1$$

$e_a$ برداریکه متناظر با $\vec{a}$ می باشد. یعنی $-e_a$ $-\frac{\sqrt{2}}{2} i - \frac{1}{2} j + \frac{1}{2} k$

برداریکه در خلاف جهت $\vec{a}$ می باشد. لذا بردار زیر، یک بردار با اندازه $\sqrt{3}$ و در خلاف جهت $\vec{a}$ است:

$$b = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} i - \frac{1}{2} j + \frac{1}{2} k\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} i - \frac{\sqrt{3}}{2} j + \frac{\sqrt{3}}{2} k$$

تعریف کسینوس های هادی یک بردار: جهت یا راستای بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ را می توان با کمک زوایای $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ که این بردار با محورهای مختصات می سازد مشخص کرد. کسینوس این زوایا را کسینوس های هادی بردار $\vec{a}$ گویند و به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|a|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|a|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|a|}$$

لذا بردار جهت را می توان برحسب کسینوس های هادی بیان کرد:

$$e = \frac{\vec{a}}{|a|} = \frac{a_1}{|a|}\vec{i} + \frac{a_2}{|a|}\vec{j} + \frac{a_3}{|a|}\vec{k} = \left(\frac{a_1}{|a|}, \frac{a_2}{|a|}, \frac{a_3}{|a|}\right) \Rightarrow$$

$$e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

از طرفی داریم $|e| = 1$ لذا

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

مثال: بردار جهت $\vec{a} = (1,-1,\sqrt{2})$ و زوایای هادی $(\alpha, \beta, \gamma)$ این بردار را بیابید.

حل:

$$e = \frac{a}{|a|} = \frac{i - j + \sqrt{2}k}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|a|} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|a|} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \beta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|a|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \gamma = \frac{\pi}{4}$$

مثال: آیا زوایای $30^\circ$ و $150^\circ$ و $120^\circ$ زوایای هادی یک بردار می‌توانند باشند؟

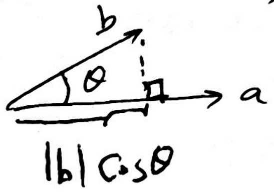
حل:

$$(\cos 30^\circ)^2 + (\cos 150^\circ)^2 + (\cos 120^\circ)^2 = \frac{7}{4} > 1$$

پس این زوایا نمی‌توانند زوایای هادی یک بردار باشند.

## ضرب داخلی دو بردار و ویژگی‌های آن

تعریف ضرب داخلی: فرض کنید $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ و $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ دو بردار دلخواه باشند، ضرب داخلی (یا ضرب نقطه‌ای) این دو بردار به صورت $a \cdot b = |a|\,|b| \cos\theta$ تعریف می‌شود که در آن $\theta$ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.




نکته: توجه شود که ضرب داخلی دو بردار همواره یک عدد است.

مثال: اگر $\vec{a} = (1,0,1)$ و $\vec{b} = (0,1,0)$ دو بردار و زاویه بین آن‌ها $\theta = \frac{\pi}{4}$ باشد، ضرب داخلی آن دو عبارت است از:

$$a \cdot b = |a|\,|b| \cos\theta = \sqrt{2} \times 1 \times \cos\frac{\pi}{4} = 1$$

نکته: توجه شود اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار دلخواه باشند، ضرب داخلی این دو بردار به صورت زیر نیز قابل محاسبه است:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

6

خواص ضرب داخلی:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |a|\,|a|\cos 0 = |a|^2$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \longleftrightarrow a \perp b$

3) $\vec{a}\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

4) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

5) $\text{IF } a\cdot b = a\cdot c \not\Longrightarrow \vec{b}=\vec{c}$ (خاصیت حذفی ندارد)

6) $\cos\theta = \dfrac{a\cdot b}{|a|\,|b|}$ (اندازه زاویه بین دو بردار)

7) $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

8) $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

مثال: اگر $a = (1,0,-1)$ و $b = (3,2,3)$ دو بردار باشند، ضرب داخلی دو بردار و زاویه بین آن دو را بیابید.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1,0,-1)\cdot(3,2,3) = 3+0-3 = 0$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\,|b|} = \dfrac{0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{22}} = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

مثال: مقدار m را طوری بیابید که دو بردار $a = (m+1, 2m, -2)$ و $b = (m, 3, 4)$ برهم عمود باشند.

حل:

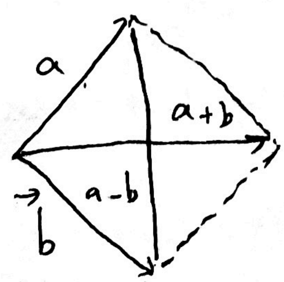
$a \perp b \longleftrightarrow a\cdot b = 0 \Rightarrow m(m+1) + 6m - 8 = 0$

$\longrightarrow m^2 + 7m - 8 = 0 \longrightarrow m = 1$ یا $-8$

مثال: ثابت کنید قطرهای یک لوزی برهم عمودند.

حل: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو ضلع مجاور یک لوزی باشند، آن گاه $a+b$ و $a-b$ دو قطر آن لوزی هستند.

نشان می‌دهیم که بر هم عمودند. یعنی: $(a+b)\cdot(a-b) = 0$




پس داریم:

$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a + a\cdot(-b) + b\cdot a + b\cdot(-b)$

$= |a|^2 - a\cdot b + a\cdot b - |b|^2 = |a|^2 - |b|$

اما چون در لوزی طول اضلاع باهم برابر است لذا $|a|=|b|$. درنتیجه

$$(a+b).(a-b)=|a|^2-|b|^2=0 \Rightarrow (a+b)\perp(a-b)$$

لذا قطرهای لوزی بر هم عمودند.

مثال: محیط و زوایای داخل مثلثی را بیابید که دارای رئوس $A(-1,1,2)$

و $B(1,-1,-3)$ و $C(0,1,-2)$ می‌باشد.

حل: داریم: $\vec{AB}=(2,-2,-5)$ و $\vec{AC}=(1,0,-4)$ $\vec{BC}=(-1,2,1)$

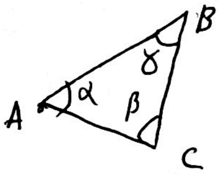
اکنون طول بردارهای فوق که همان اضلاع مثلث هستند را می‌یابیم. داریم:

$|\vec{AB}|=\sqrt{34}$ $\quad |\vec{AC}|=\sqrt{17}$ , $|\vec{AB}|=\sqrt{6}$

لذا محیط مثلث برابر است با $\sqrt{34}+\sqrt{17}+\sqrt{6}$

و زاویه بین بردارها $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ و $\vec{BC}$ همان زوایای مثلث است. مثلاً

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{AB}).(\vec{AC})}{|AB|\,|AC|}$$




مثال: اگر $|a|=2$ و $b=2i+2j-k$ و زاویه بین دو بردار $\theta=\frac{2\pi}{3}$ باشد،

مقدار $|a+b|$ چقدر است.

حل:

$$b=2i+2j-k \Rightarrow |b|=3$$

$$|a+b|^2=|a|^2+2a.b+|b|^2=4+2a.b+9=4-6+9=7$$

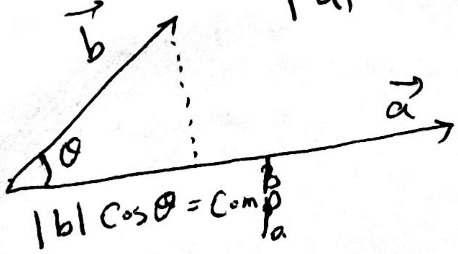
$$a.b=|a||b|\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{-6}{2}=-3$$

تعریف اسکالرو برداری:

تعریف تصویر اسکالر: تصویر اسکالر $\vec{b}$ روی بردار $\vec{a}$ را با $Comp_a^b$ نمایش می‌دهند و به صورت

$$Comp_a^b=\frac{a.b}{|a|}$$

تعریف می‌شود.




$$a.b=|a||b|\cos\theta$$

$$=|a|(\underbrace{|b|\cos\theta}_{\text{مؤلفه بردار b روی a}})$$

$$\Rightarrow |b|\cos\theta=\frac{a.b}{|a|} \Rightarrow |b|\cos\theta=Comp_a^b=\frac{a}{|a|}.b$$

تعریف تصویر برداری: تصویر برداری $\vec{b}$ روی $\vec{a}$ را با $Proj_{\vec{a}}\vec{b}$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Proj_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|}\cdot\frac{\vec{a}}{|a|} = \left(Comp_a^{\,b}\right)\frac{a}{|a|}$$

به عبارت دیگر تصویر برداری b روی a، برابر حاصلضرب تصویر اسکالر b روی a در بردار جهت a است.

مثال: فرض کنید $a=(a_1,a_2,a_3)$ برداری دلخواه در $R^3$ باشد. در این صورت داریم:

$$Proj_i^{\,a} = \frac{(1,0,0)\cdot(a_1,a_2,a_3)}{1}\cdot\frac{(1,0,0)}{|1|} = a_1(1,0,0) = (a_1,0,0)$$

$$Proj_j^{\,a} = (0,a_2,0) \qquad Proj_k^{\,a} = (0,0,a_3)$$

توجه شود که واضح است

$$i\cdot a = a_1 \quad \& \quad j\cdot a = a_2 \quad \& \quad k\cdot a = a_3$$

مثال: تصویر اسکالر و برداری بردار $b=(1,1,2)$ را روی بردار $a=(-2,3,1)$ بیابید.

$$Comp_a^{\,b} = \frac{a\cdot b}{|a|} = \frac{(-2)(1)+3(1)+1(2)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$Proj_a^{\,b} = \frac{3}{\sqrt{14}}\,\frac{a}{|a|} = \frac{3}{14}a = \left(-\frac{6}{14},\frac{9}{14},\frac{3}{14}\right)$$

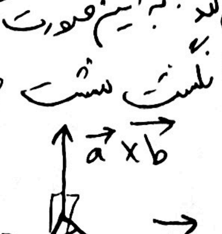
ضرب خارجی: اگر $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند، حاصلضرب خارجی دو بردار a و b را با $a\times b$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3-a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

نکته: حاصلضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم بر $\vec{a}$ و هم بر $\vec{b}$ عمود است و در واقع بر صفحه تشکیل دهنده $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است. یعنی

$$(a\times b)\cdot a = 0 \quad \& \quad (a\times b)\cdot b = 0$$

جهت $a\times b$ در $R^3$ از قانون دست راست پیروی می‌کند. به این صورت که هرگاه انگشت‌های دست راست از سمت بردار $\vec{a}$ به سمت بردار $\vec{b}$ تا شوند، انگشت شست جهت بردار $a\times b$ را نشان خواهد داد.



خواص ضرب خارجی: (دو بردار در امتدادشان یکسان می‌شوند و لذا ضربشان صفر است)

1) $\vec{a}\times\vec{a}=0$

2) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

توجه شود که $\vec{a}\times\vec{b}$ (ضرب خارجی دو بردار) یک بردار به ما می‌دهد که اندازه آن را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

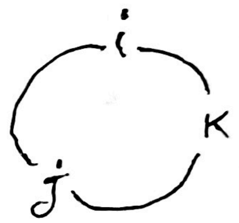
که در آن $\theta$ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

تعریف: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را موازی گویند هرگاه مضربی از یکدیگر باشند. لذا داریم:

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\longleftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$$

توجه شود که روابط زیر همواره برقرار است:

$$\begin{cases} i\times i=0\\ j\times j=0\\ k\times k=0\end{cases}\qquad \begin{cases} i\times j=k\\ j\times k=i\\ k\times i=j\end{cases}\qquad \begin{cases} j\times i=-k\\ k\times j=-i\\ i\times k=-j\end{cases}$$

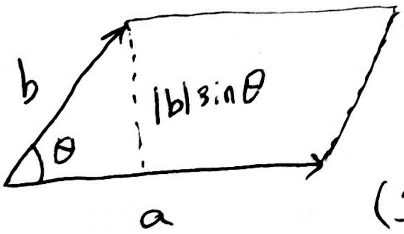



مثال: حاصل عبارت زیر را بیابید:

$$i\times(j+k)+(i+k)\times j+k\times(i-j)$$

$$=i\times j+i\times k+i\times j+k\times j+k\times i-k\times j=2(i\times j)=2k$$

تعبیر هندسی ضرب خارجی: اندازه ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ یعنی $|\vec{a}\times\vec{b}|$ برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که توسط $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود.




مساحت متوازی الاضلاع $(S)$ = قاعده × ارتفاع $=|a||b|\sin\theta$

$$\Rightarrow S=|\vec{a}\times\vec{b}|$$

نکته: مساحت مثلث حاصل از $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

مثال: مساحت مثلثی با رأس‌های $A(-1,1,2)$ و $B(1,-1,-3)$ و $C(0,1,-2)$ را بیابید.

$\vec{AB}=(2,-2,-5)$

$\vec{AC}=(1,0,-4)$

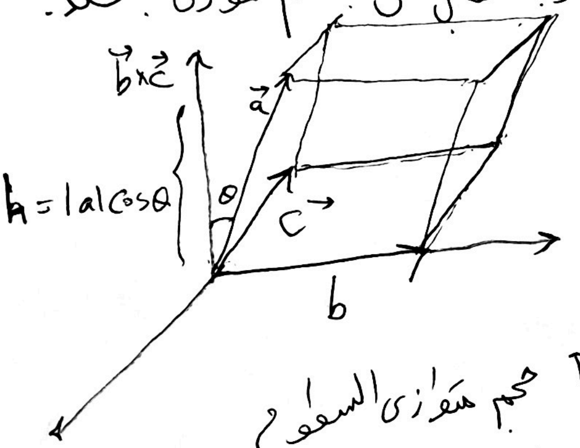
$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} i & j & k\\ 2 & -2 & -5\\ 1 & 0 & -4\end{matrix}\right|=\frac{\sqrt{77}}{2}$$

ضرب مختلط (اسکالر سه‌گانه): اگر ضرب داخلی و خارجی سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را ترکیب کنیم ضرب مختلط به وجود می‌آید.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

تعبیر هندسی ضرب مختلط: حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به دست می‌آید برابر اندازه ضرب مختلط این سه بردار است.

تعریف متوازی‌السطوح: یک شش‌وجهی که هر دو وجه مقابل آن با هم موازی باشند.




$V =$ حجم متوازی‌السطوح $=$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع $= |b\times c||a|\cos\theta = |a\cdot(b\times c)|$

نکته: سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار دارند اگر ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد. چون وقتی سه بردار در یک صفحه قرار گیرند حجمی تشکیل نمی‌شود.

مثال: حجم متوازی‌السطوحی که توسط بردارهای $a(1,4,-7)$ و $b(2,-1,4)$ و $c(0,-9,18)$ تشکیل شده است را بیابید.

$$V = a\cdot(b\times c) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix} = -18+36+4(-36)-7(-18)=0$$

لذا سه بردار فوق در یک صفحه قرار دارند.

تعریف ضرب برداری سه‌گانه: برای هر سه بردار $u$ و $\vec{V}$ و $w$ داریم:

$$(u \times \vec{V}) \times w = (u \cdot w) \times \vec{V} - (\vec{V} \cdot w) \times u \quad (*)$$

تمرینات درس اول:

1. فرض کنید $u$ و $\vec{V}$ دو بردار واحد باشند و $\theta$ زاویه بین آن دو باشد، نشان دهید $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{V})$

(راهنمایی $(u-v)^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta$

2: فرض کنید $\vec{u} + \vec{V} + \vec{w} = 0$ و $|u| = 3$ و $|V| = 5$ و $|w| = 7$. زاویه بین $u$ و $\vec{V}$ را بیابید. (راهنمایی $|u+v|^2 = |u|^2 + |V|^2 + 2|u||\vec{V}|\cos\theta$

3. فرض کنید $u$ و $\vec{V}$ و $w$ سه بردار دو به دو متعامد با اندازه‌های یکسان باشند، نشان دهید که بردار $S = u + \vec{V} + w$ با هر یک از بردارهای $u$ و $\vec{V}$ و $w$ زاویه یکسانی می‌سازد.

4: خاصیت ضرب برداری سه‌گانه را ثابت کنید.

5. تصویرهای اسکالر و برداری بردار $a$ روی بردار $b$ را بیابید:

$a = 2i - 3j + K \qquad b = i + 6j - 2K$

# معادلات خط و صفحه

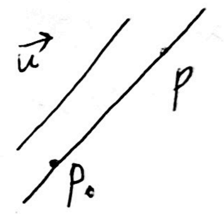
معادله خط در فضای $R^2$: در فضای $R^2$ معادله خطی که از نقطه $(x_0, y_0)$ می‌گذرد و دارای شیب $m$ می‌باشد به صورت زیر است:

$$y-y_0 = m(x-x_0)$$

معادله خط در فضای $R^3$: برای نوشتن معادله یک خط در فضای $R^3$ به یک نقطه از آن خط مانند $P_0(x_0, y_0, z_0)$ و برداری موازی با آن خط مانند $\vec{u}(a, b, c)$ نیاز داریم. به $\vec{u}$ بردار هادی خط گویند.

فرض کنید $P(x, y, z)$ نقطه‌ای دلخواه روی خط ما باشد، چون خط با بردار هادی $\vec{u}$ موازی است لذا بردارهای $\vec{u}$ و $\overrightarrow{P_0P}$ موازی هستند $(\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{u})$

لذا $\overrightarrow{P_0P} = t.\vec{u}$ ، درنتیجه داریم:




$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{u} \Rightarrow (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = t(a, b, c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-x_0 = a.t \\ y-y_0 = bt \\ z-z_0 = ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

به فرم فوق فرم پارامتری معادله خط را گویند. فرم دکارتی (کانونی) معادله خط به صورت زیر است:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

توجه شود که اگر یکی از ثابت‌های $a$ ، $b$ یا $c$ صفر باشند (مثلاً $a=0$) آن‌گاه معادله دکارتی به صورت زیر خواهد بود:

$$x = x_0 \quad , \quad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

نکته: معادله خط در فضای $R^2$ حالت خاصی از معادله خط در فضای $R^3$ است زیرا:

$$y-y_0 = m(x-x_0) \rightarrow y-y_0 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) \Rightarrow \frac{y-y_0}{\underbrace{y_1-y_0}_{b}} = \frac{x-x_0}{\underbrace{x_1-x_0}_{a}}$$

$$\rightarrow \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$$

مثال: معادله دکارتی و پارامتری خطی را بنویسید که از نقاط $A(1,-1,0)$ و $B(2,-1,3)$ بگذرد.

حل: $\vec{u} = \vec{AB} = (1,0,3) \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{z-0}{3}$ و $y=-1$ (کانونی)

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1 \\ z = 3t \end{cases}$$ (فرم پارامتری)

توجه شود که از هر یک از نقاط A یا B می‌توان به عنوان نقطه اولیه استفاده کرد.

مثال: معادله خطی را بیابید که از مبدأ می‌گذرد و با خط زیر موازی باشد:

$$x = 1+t \qquad y = -1+3t \qquad z = 5t$$

حل: بردار هادی خط فوق $\vec{u} = (1,3,5)$ می‌باشد. چون دو خط موازی یکدیگر هستند لذا $\vec{u}$ بردار هادی هر دو خط می‌باشد. لذا معادله خط مورد نظر عبارتست از:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-0}{5}$$

نکته: اگر یک خط با محورهای مختصات زوایای $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ بسازد، می‌توان بردار هادی این خط را همان $\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ در نظر گرفت.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(3,2,1)$ بگذرد و با محور $x$ها و $y$ها زاویه 60 بسازد.

حل: $\alpha = \beta = 60 \rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \rightarrow \cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\rightarrow u = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{x-3}{1/2} = \frac{y-2}{1/2} = \frac{z-1}{\pm\sqrt{2}/2}$$

زاویه بین دو خط $L_1$ و $L_2$: اگر $u_1(a_1,b_1,c_1)$ بردار هادی خط $L_1$ و $u_2(a_2,b_2,c_2)$ بردار هادی خط $L_2$ باشد در این صورت زاویه بین این دو خط زاویه بین بردارهای هادی آن دو می‌باشد.

مثال: زاویه بین دو خط $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{2\sqrt{6}}$ و $L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ را بیابید.

$$u_1 = (2,-2,2\sqrt{6}) \text{ و } u_2 = (2,2,2) \Rightarrow \cos\theta = \frac{u_1 \cdot u_2}{|u_1||u_2|} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 60$$

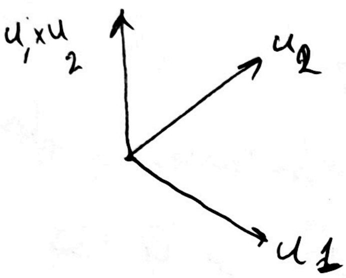
نکته: اگر خطی بر محور xها عمود باشد آن‌گاه این خط با صفحه $yoz$ موازی است و بردار هادی آن به صورت $u(0, b, c)$ خواهد بود و معادله آن به صورت زیر است

$$L: \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(1,2,3)$ بگذرد و بر دو خط $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{3} = 1-z$ و

$$L_2: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 5 \end{cases}$$

عمود باشد.




حل: داریم $u_1 = (2, \frac{3}{2}, -1)$ و $u_2 = (2, -1, 0)$

لذا $u_1 \times u_2 = (-1, -2, -5)$ بر هر دو خط عمود است و می‌تواند بردار هادی خط مورد نظر باشد. در نتیجه معادله خط به صورت زیر است:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$$

وضعیت دو خط نسبت به یکدیگر:

الف: اگر بردارهای هادی دو خط موازی باشند آن‌گاه دو خط موازی‌اند. $u_1 \parallel u_2 \to L_1 \parallel L_2$

ب: اگر بردارهای هادی دو خط عمود باشند آن‌گاه دو خط عمود بر یکدیگرند. $u_1 \perp u_2 \to L_1 \perp L_2$

ج: ممکن است دو خط همدیگر را قطع کنند.

د: اگر دو خط یکدیگر را قطع نکنند و موازی نباشند آن‌گاه متنافرند (در یک صفحه قرار ندارند)

مثال: بررسی کنید دو خط زیر چه وضعیتی نسبت به یکدیگر دارند.

$$L_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+3t \\ z = 4-t \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = 2s \\ y = 3+s \\ z = -3+4s \end{cases}$$

حل: داریم $u_1 = (1, 3, -1)$ و $u_2 = (2, 1, 4)$. چون $u_1 \cdot u_2 \neq 0$ و $u_1 \times u_2 \neq 0$

لذا این دو خط عمود بر یکدیگر یا موازی نیستند. حال بررسی می‌کنیم که متقاطع‌اند

یا متنافر. برای این منظور معادلات پارامتری هر یک از خطوط را با پارامترهای مختلف می‌نویسیم و در یک دستگاه قرار می‌دهیم که سه معادله و دو مجهول دارد. از دو تا از آن‌ها به دلخواه $t$ و $s$ را می‌یابیم و آن‌ها را در رابطه سومی قرار می‌دهیم. اگر صدق کرد که متقاطع‌اند و در غیر این صورت متنافرند.

$$L_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - t \quad (\mathrm{I}) \end{cases} \quad \& \quad L_2: \begin{cases} x = 2s \\ y = 3 + s \\ z = -3 + 4s \quad (\mathrm{II}) \end{cases} \xrightarrow[y=y]{x=x} \begin{cases} 1 + t = 2s \\ -2 + 3t = 3 + s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t - 2s = -1 \\ 3t - s = 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = \frac{11}{5} \\ s = \frac{8}{5} \end{cases}$$

حال $s$ و $t$ را در $(\mathrm{I})$ و $(\mathrm{II})$ جایگذاری می‌کنیم. داریم

$$\begin{cases} (\mathrm{I}) \quad z = \frac{9}{5} \\ (\mathrm{II}) \quad z = \frac{17}{5} \end{cases}$$

چون این دو باهم برابر نیستند لذا دو خط متنافرند.

نکته: دو خطی که باهم موازی هستند ممکن است برهم منطبق شوند. برای تشخیص اینکه آیا دو خط برهم منطبق‌اند یا خیر، یک نقطه دلخواه (مثلاً به ازای $t=0$) از یکی از دو خط انتخاب کرده و در معادله دیگر قرار می‌دهیم. اگر در آن معادله صدق کرد دو خط برهم منطبق‌اند در غیر این صورت موازی‌اند.

مثال: دو خط $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{3}$ و $\begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 6 \end{cases}$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

حل: داریم $u_1 = (2, 1, 3)$ و $u_2 = (2, 1, 3)$ لذا دو خط موازی‌اند. حال بررسی می‌کنیم که آیا منطبق هستند یا خیر. در معادله دوم $t=0$ قرار می‌دهیم داریم $(x, y, z) = (4, 2, 6)$. با جایگذاری این مقادیر در معادله اول داریم

$$\frac{4-2}{2} = \frac{2-1}{1} = \frac{6-3}{3}$$

لذا دو خط برهم منطبق‌اند.

مثال: دو هواپیمای $A_1$ و $A_2$ در لحظه $t$ روی خطوط زیر در حرکت اند:

$$L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3} \quad \& \quad L_2: x-1 = \frac{y}{2} = \frac{3-z}{2}$$

الف: آیا مسیر دو هواپیما یکدیگر را قطع می کنند؟

ب: آیا دو هواپیما با یکدیگر برخورد می کنند؟

حل: الف:

$$L_1: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1-t \\ z = 3t \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2s \\ z = 3-2s \end{cases} \xrightarrow[y=y]{x=x}$$

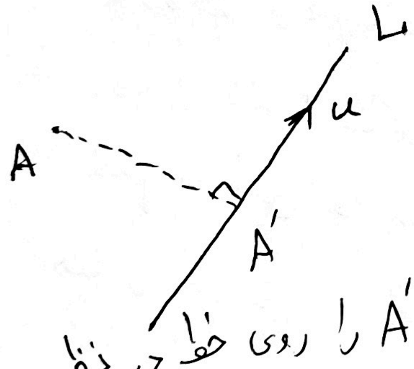
$$\begin{cases} -1+2t = 1+s \\ 1-t = 2s \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{سوم قرار می دهیم}]{\text{در معادله}} \begin{cases} z = 3t \to z = 3 \\ z = 3-2s \to z = 3 \end{cases}$$

لذا دو خط متقاطع اند و در نتیجه مسیر دو هواپیما یکدیگر را قطع می کنند.

ب: محل تقاطع دو خط نقطه $(1,0,3)$ است ($t=1$ را در $L_1$ قرار می دهیم)

چون هواپیمای اولی در $t=1$ و هواپیمای دومی در $t=0$ به این نقطه می رسند لذا با یکدیگر برخورد نمی کنند.

پیدا کردن تصویر نقطه A بر خط L:

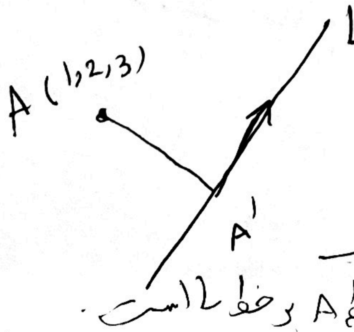



تصویر نقطه A بر خط L همان پای عمودی است که از نقطه A بر خط L وارد می شود. برای این منظور با استفاده از معادله خط نقطه $A'$ را روی خط در نظر می گیریم. سپس $AA'$ را پیدا کرده و با توجه به اینکه هادی خط $(u)$ بر $AA'$ عمود است داریم $u.AA'=0$. لذا $t$ را پیدا کرده و با جایگذاری، مقدار $A'$ بدست می آید.

مثال: تصویر نقطه $A(1,2,3)$ را روی خط $L: \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-8}{4}$ را بیابید.

حل:

$$x = 2t+4, \quad y = 3t+3, \quad z = 4t+8$$



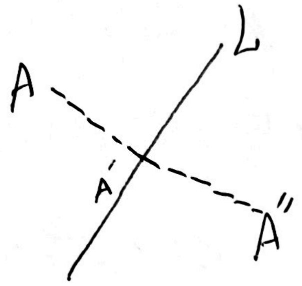

$$A' = (2t+4,\ 3t+3,\ 4t+8), \quad \vec{u} = (2,3,4)$$

$$AA' = (2t+3,\ 3t+1,\ 4t+5) \longrightarrow AA'.u = 0$$

$$\to (2,3,4)(2t+3,\ 3t+1,\ 4t+5) = 0 \longrightarrow t = -1$$

جایگذاری $t$ در $A'$ ← $A' = (2,0,4)$ تصویر نقطه A بر خط L است.

قرینه نقطه A بر روی خط L: ابتدا تصویر نقطه A بر روی خط L را مشابه روش قبلی می‌یابیم. بعد از پیدا کردن $A'$ قرینه نقطه A نسبت به $A'$ را می‌یابیم که با $A''$ نمایش می‌دهیم.




مثال: قرینه نقطه $A(1,2,3)$ نسبت به خط $L: \frac{x+7}{3}=\frac{10-y}{7}=\frac{z}{4}$ را بیابید.

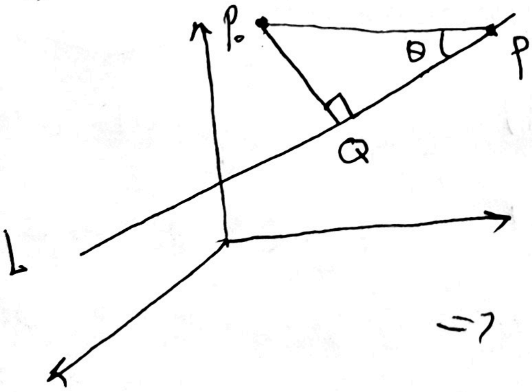
حل: با روش قبلی تصویر نقطه A روی خط L برابر $A'=(2,3,4)$ است. لذا کافیست قرینه نقطه A نسبت به $A'$ را بیابیم. فرض کنیم $A''=(a,b,c)$. لذا داریم:

$$\frac{a+1}{2}=2 \;,\; \frac{b+2}{2}=3 \;,\; \frac{c+3}{2}=4 \longrightarrow a=3 \,,\, b=4 \,,\, c=5$$

لذا $A''=(3,4,5)$ قرینه نقطه A نسبت به خط L است.

فاصله یک نقطه از یک خط: فرض کنید خط L دارای بردار هادی u باشد و نقطه $P_0$ خارج از خط L باشد. می‌خواهیم فاصله نقطه $P_0$ تا خط L را بیابیم. فرض کنید $\vec{P}$ نقطه‌ای دلخواه روی خط L باشد. نقطه $P_0$ را به P وصل می‌کنیم و از نقطه $P_0$ بر خط L عمود می‌کنیم تا خط L را در نقطه Q قطع کند. حال در مثلث $\overset{\triangle}{P_0QP}$ داریم:

$$\sin\theta=\frac{P_0Q}{|P_0P|} \rightarrow |\overrightarrow{P_0P}|\sin\theta=P_0Q \quad (I)$$




از طرفی داریم

$$|P_0P\times PQ|=|P_0P||PQ|\sin\theta$$

$$\Rightarrow |P_0P|\sin\theta=\frac{|P_0P\times PQ|}{|PQ|} \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) داریم:

$$P_0Q=\frac{|P_0P\times PQ|}{|PQ|}$$

(فاصله نقطه $P_0$ از خط L)

نکته: توجه شود که در فرمول فوق به جای بردار $PQ$ می‌توان بردار هادی $\vec{u}$ را قرار داد.

مثال: فاصله نقطه $P_0(1,1,3)$ را از خط $L$ به معادله $L: \begin{cases} x=3 \\ y+1=z \end{cases}$ بیابید.

حل: ابتدا نقطه دلخواه $P(3,-1,0)$ را روی خط $L$ در نظر می‌گیریم

(توجه شود معادله پارامتری خط $L$ عبارت است از $x=3$، $y=t-1$، $z=t$)

هم چنین داریم $\vec{PQ}=u=(0,1,1)$. لذا

$$P_0Q = \frac{|\vec{P_0P}\times\vec{PQ}|}{|\vec{PQ}|} = \frac{|(2,-2,-3)\times(0,1,1)|}{|u|}$$

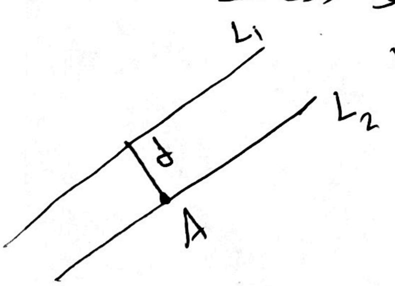
$$= \frac{|(1,-2,2)|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

مثال: فاصله نقطه $P_0(1,1,1)$ را از خط $x=y=z-1$ بیابید.

حل: نقطه $\vec{P}$ با مختصات $(0,0,1)$ و بردار $\vec{u}=(1,1,1)$ را در نظر می‌گیریم. داریم $\vec{P_0P}=(-1,-1,0)$. لذا

$$P_0Q = \frac{|\vec{P_0P}\times u|}{|u|} = \frac{|(-1,-1,0)\times(1,1,1)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

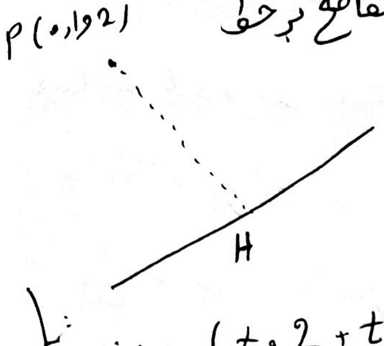
فاصله بین دو خط موازی: برای پیدا کردن فاصله کافی است یک نقطه دلخواه روی خط $L_2$ را انتخاب کنیم و فاصله آن نقطه تا خط $L_1$ را مطابق روش بالا بدست آوریم:




مثال: فاصله بین دو خط موازی $L_1: (x+y=1, z=1)$ و $L_2: (x+y=3, z=3)$ را بیابید.

حل: ابتدا یک نقطه دلخواه از خط $L_2$ می‌یابیم مثلاً $P_0(0,3,3)$، حال فاصله $P_0(0,3,3)$ با خط $L_1$ را می‌یابیم. نقطه دلخواه $P(0,1,1)$ روی خط $L_1$ و بردار هادی $\vec{u}(1,-1,0)$ را داریم. لذا

$$d = P_0Q = \frac{|\vec{P_0P}\times\vec{u}|}{|u|} = \frac{|(0,-2,-2)\times(1,-1,0)|}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$




مثال: معادله خط گذرا از نقطه $P(0,1,2)$ و عمود متقاطع بر خط $L: x = y-2 = z-1$ را بیابید.

حل:

$$L: \begin{cases} x = t \\ y = 2+t \\ z = 1+t \end{cases} \longrightarrow u = (1,1,1)$$

نقطه H در خط L صدق می‌کند، لذا مختصات آن به صورت $(t, 2+t, 1+t)$ می‌باشد.
اگر $u'$ بردار هادی خط مورد نظر باشد داریم:

$$u' \perp u \longrightarrow u \cdot u' = 0$$

داریم:

$$u' = PH = (t, t+1, t-1) \longrightarrow u \cdot u' = 0 \longrightarrow (1,1,1)(t, t+1, t-1) = 0$$

$$\longrightarrow 3t = 0 \longrightarrow t = 0 \longrightarrow H = (t, 2+t, 1+t) = (0,2,1)$$

$$\longrightarrow u' = (0,1,-1) \longrightarrow L': x = 0, \quad y-1 = \frac{z-2}{-1}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که در نقطه برخورد دو خط زیر بر هر دوی آن‌ها عمود باشد:

$$L_1: (1,-1,0) + \langle (1,2,3) \rangle$$

$$L_2: (0,-3,-3) + \langle (1,2,2) \rangle$$

نکته: عبارتی که داخل ⟨ ⟩ قرار داده می‌شود همان بردار هادی خط است.

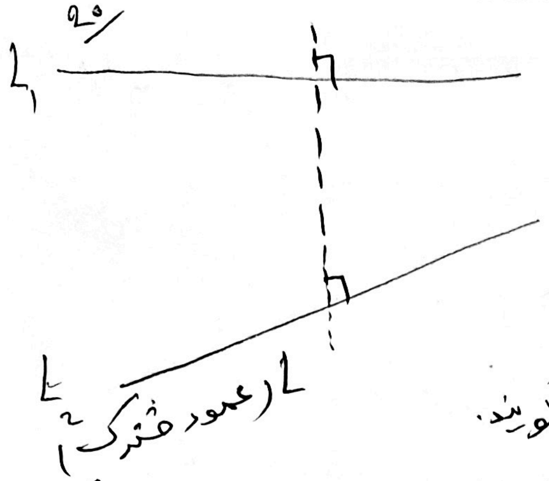
حل: فرض کنید u بردار هادی خط L باشد. لذا

$$\left.\begin{array}{l} u \perp u_1 \\ u \perp u_2 \end{array}\right\} \longrightarrow u = u_1 \times u_2 = (1,2,3) \times (1,2,2)$$

$$\longrightarrow u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2i + j \longrightarrow u = (-2,1,0)$$

$$L_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 3t \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = s \\ y = 2s-3 \\ z = 2s-3 \end{cases} \xrightarrow[z=z]{x=x} \begin{cases} s - t = 1 \\ 3t - 2s = -3 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} s = 0 \\ t = -1 \end{array}$$

$$\longrightarrow P(0,-3,-3) \longrightarrow L: \frac{x-0}{-2} = \frac{y+3}{1}, \quad z = -3$$




معادله عمود مشترک دو خط متنافر:

متنافر با دو خط متنافر $L_1$ و $L_2$ یک و تنها یک خط وجود دارد که بر هر دو خط $L_1$ و $L_2$ عمود است و هر دو خط را قطع می‌کند. به این خط، عمود مشترک دو خط $L_1$ و $L_2$ گویند.
برای بدست آوردن بردارهای خط $L$، بردارهای هادی دو خط $L_1$ و $L_2$ را در هم ضرب خارجی می‌کنیم.
طول عمود مشترک: فرض کنید $A$ و $B$ به ترتیب دو نقطه دلخواه روی خط $L_1$ و $L_2$ باشند، در این صورت طول عمود مشترک این دو خط از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\text{طول عمود مشترک} = \frac{|AB\cdot(u_1\times u_2)|}{|u_1\times u_2|}$$

مثال: معادله خط عمود مشترک دو خط متنافر $L_1:\begin{cases}x=2+t\\ y=2+2t\\ z=-1-3t\end{cases}$ و $L_2:\begin{cases}x=-2t\\ y=2+t\\ z=4+t\end{cases}$ را بیابید.

حل: فرض کنید $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $M_2(x_2,y_2,z_2)$ محل برخورد خط عمود مشترک با خطوط $L_1$ و $L_2$ باشند، لذا $M_1$ و $M_2$ جزئی از این خطوط هستند و $M_1M_2$ بر بردارهای هادی دو خط عمود می‌باشد.

$u_1=(1,2,-3)$ و $u_2=(-2,1,1)$ و $\vec{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

چون $M_1$ جزئی از خط $L_1$ است داریم:

$$x_1-2=\frac{y_1-2}{2}=\frac{z_1+1}{-3}\longrightarrow\begin{cases}z_1=-3x_1+5 & (1)\\ y_1=2x_1-2 & (2)\end{cases}$$

همچنین $M_2$ جزئی از خط $L_2$ است لذا:

$$\frac{x_2}{-2}=\frac{y_2-2}{1}=\frac{z_2-4}{1}\longrightarrow\begin{cases}x_2=-2z_2+8 & (3)\\ y_2=z_2-2 & (4)\end{cases}$$

$$\vec{M_1M_2}\perp\vec{u_1}\Rightarrow\vec{M_1M_2}\cdot\vec{u_1}=0\longrightarrow(x_2-x_1)+2(y_2-y_1)-3(z_2-z_1)=0\quad(5)$$

$$M_1M_2\perp u_2\longrightarrow M_1M_2\cdot u_2=0\longrightarrow-2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)+(z_2-z_1)=0\quad(6)$$

با جایگذاری روابط (1) تا (4) در معادلات (5) و (6) داریم $x_1=1$ و $z_2=3$ لذا داریم:

$z_1=2,\ y_1=0,\ x_2=2,\ y_2=1\longrightarrow M_1=(1,0,2)$ و $M_2=(2,1,3)$

$\vec{M_1M_2}=(1,1,1)$

معادله خط مشترک

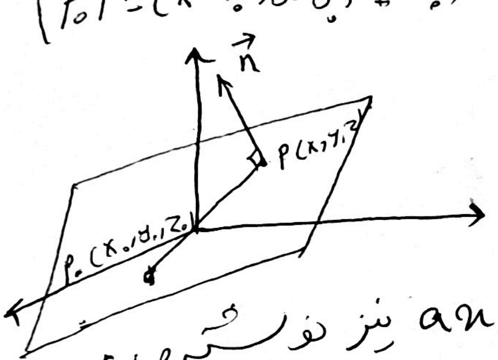
$$L:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-2}{1}$$

تمرین: طول عمود مشترک دو خط این مثال را بیابید.

# معادله صفحه

برای تعیین معادله یک صفحه به یک نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ از آن صفحه و بردار نرمال $\vec{n}$ که بر آن صفحه عمود است نیاز داریم. فرض کنیم صفحه مکان هندسی تمام نقاط $P(x,y,z)$ و شامل نقطه معلوم $P_0(x_0, y_0, z_0)$ باشد که دارای بردار نرمال $n=(a,b,c)$ باشد. در این صورت $\vec{P_0P}$ بر $\vec{n}$ عمود است. لذا داریم،

$$\begin{cases} \vec{P_0P} \perp n \\ \vec{P_0P}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{P_0P}=0 \Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$$




پس معادله کانونی یک صفحه به صورت زیر است:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

توجه شود که معادله صفحه به فرم $ax+by+cz=d$ نیز نوشته می‌شود که در آن

$$d=ax_0+by_0+cz_0$$

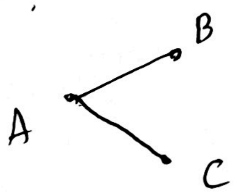
مثال: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $P_0(1,-2,3)$ بگذرد و بردار نرمال آن $\vec{n}(3,5,2)$ باشد.

حل:

$$3(x-1)+5(y+2)+2(z-3)=0 \longrightarrow 3x+5y+2z=-1$$

مثال: معادله صفحه‌ای را بیابید که از سه نقطه $A(1,0,-1)$ و $B(1,2,1)$ و $C(-3,2,4)$ بگذرد.

حل:




$$\vec{AB}=(0,2,2) \Rightarrow \vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=(6,-8,+8)$$

$$\vec{AC}=(-2,4,5)$$

لذا معادله صفحه عبارتست از:

$$6(x-1)-8(y-0)+8(z+1)=0$$

$$\longrightarrow 6x-8y+8z=-2$$

مثال: معادله صفحه‌ای را بیابید که محورهای مختصات را به ترتیب در نقاط a و b و c قطع کند.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} A(a,0,0) \\ B(0,b,0) \\ C(0,0,c) \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \vec{AB}=(-a,b,0) \\ \vec{AC}=(-a,0,c) \end{array} \longrightarrow \vec{AB}\times\vec{AC}=(bc,ac,ab)$$

$$\longrightarrow bc(x-a)+acy+abz=0 \longrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

مثال: محل تقاطع دو خط $L_1: \begin{cases} x=2t \\ y=3t-1 \\ z=4 \end{cases}$ و $L_2: \begin{cases} x=1+3t \\ y=t+4 \\ z=2t+2 \end{cases}$ را بیابید و سپس معادله صفحه شامل آن دو را بنویسید.

حل: همانند مثال های قبل از رابطه دوم و سوم داریم

$$\begin{cases} 2t+2=4 \to t=1 \\ t+4=3s-1 \to s=2 \end{cases}$$

لذا نقطه تقاطع به صورت $\vec{P}_0(4,5,3)$ خواهد بود.

از طرفی داریم

$$\vec{n}=\vec{u}_1 \times u_2 \xrightarrow[n \perp u_2]{\text{چون } n \perp u_1} n=(6,-4,-7)$$

لذا معادله صفحه عبارتست از

$$6(x-4)-4(y-5)-7(z-3)=0$$

$$\to 6x-4y-7z=-24$$

نکته: شرط لازم و کافی برای آنکه یک صفحه از مبدأ عبور کند آن است که نقطه $(0,0,0)$ در آن صدق کند.

نکته: اگر یکی از مؤلفه های بردار نرمال $\vec{n}$ صفر باشد آنگاه صفحه موازی محور مربوط به آن مؤلفه است. به عنوان مثال اگر صفحه ای موازی محور $y$ ها باشد معادله آن به فرم $ax+cz=d$ خواهد بود.

مثال: معادله صفحه گذرنده از نقطه $M(0,1,2)$ و شامل خط $\begin{cases} x=2+t \\ y=3-2t \\ z=1+3t \end{cases}$ را بنویسید.

حل: ابتدا یک نقطه از خط را می یابیم. مثلاً به ازای $t=0$ نقطه $H(2,3,1)$ نقطه ای از خط $L$ است و در نتیجه بردار نرمال صفحه برابر با حاصلضرب خارجی بردار هادی خط $(u)$ و $\vec{HM}$ خواهد بود.

$$\vec{HM}=(2,2,-1) \longrightarrow \vec{u} \times \vec{HM}=(4,-7,-6)$$

لذا معادله صفحه عبارتست از:

$$4(x-0)-7(y-1)-6(z-2)=0$$

مثال: نقطه ای که از خط $\frac{x-\frac{8}{3}}{2}=\frac{y}{-2}=z-1$ می گذرد و صفحه $3x-2y+6z=6$ را قطع می کند را بیابید.

$$L: \begin{cases} x=2t+\frac{8}{3} \\ y=-2t \\ z=t+1 \end{cases} \xrightarrow[\text{صفحه}]{\text{جایگذاری در}} 3\left(2t+\frac{8}{3}\right)-2(-2t)+6(t+1)=6$$

$$\Rightarrow t=-1 \longrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=2 \\ z=4 \end{cases}$$

وضعیت دو صفحه نسبت به یکدیگر

دو صفحه نسبت به یکدیگر ممکن است موازی یا متقاطع باشند. توجه شود که دو صفحه زمانی موازی اند که بردارهای نرمال آن دو صفحه موازی باشند، یعنی اگر $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ و $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ نرمال های دو صفحه باشند، آن گاه برای آن که دو صفحه موازی باشند باید

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

نکته: توجه شود که دو صفحه موازی زمانی برهم منطبق هستند که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

نکته: اگر بردارهای نرمال دو صفحه عمود بر یکدیگر باشند، آن گاه آن دو صفحه بر یکدیگر عمودند.

فصل مشترک دو صفحه: اگر دو صفحه یکدیگر را قطع کنند محل تقاطع آن ها یک خط خواهد بود که به آن فصل مشترک دو صفحه گویند و بردار هادی آن خط می باشد که $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ و $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$ بردارهای نرمال این دو صفحه هستند.

مثال: زاویه بین دو صفحه $x - 2y + 3z = 1$ و $x + y + z = 1$ را بیابید و معادله خط فصل مشترک آن ها را بیابید.

حل:

$$\vec{n}_1(1, -2, 3), \quad \vec{n}_2(1, 1, 1) \longrightarrow \cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|n_1||n_2|} = \frac{2}{\sqrt{42}} \longrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)$$

برای نوشتن معادله خط فصل مشترک این صفحات بردار هادی خط را می یابیم. داریم:

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5i + 2j + 3k = (-5, 2, 3)$$

حال باید یک نقطه در این خط هم داشته باشیم. برای این منظور به یکی از مؤلفه های هر دو صفحه یک مقدار ثابت نسبت می دهیم و مؤلفه های دیگر را می یابیم. مثلاً اگر قرار دهیم $z = 0$ داریم

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \longrightarrow x = 1, \ y = 0$$

لذا نقطه $(1, 0, 0)$ در خط مورد نظر است. لذا معادله خط به صورت

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

خواهد بود.

مثال: معادله صفحه‌ای که از فصل مشترک دو صفحه با معادله های $7x-4y+4z+16=0$ و $4x+3y-2z+13=0$ می‌گذرد و عمود بر صفحه $x-y-2z+5=0$ است را بیابید.

حل:

$P_1: 7x-4y+4z+16 \rightarrow n_1=(7,-4,4)$

$P_2: 4x+3y-2z+13 \rightarrow n_2=(4,3,-2)$

$P_3: x-y-2z+5=0 \rightarrow n_3=(1,-1,-2)$

بردار هادی خط فصل مشترک:

$$\vec{u}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-4i+30j+37k \rightarrow \vec{u}=(-4,30,37)$$

نقطه‌ای روی خط فصل مشترک:

$$\text{if } z=0 \rightarrow \begin{cases} 7x-4y=-16 \\ 4x+3y=-13 \end{cases} \rightarrow x=-\frac{100}{37} \text{ و } y=-\frac{27}{37}$$

اگر $n_4$ بردار نرمال صفحه مورد نظر باشد آنگاه

$$\left.\begin{array}{l} n_4 \perp u \\ n_4 \perp n_3 \end{array}\right\} \rightarrow n_4=u\times n_3=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 30 & 37 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(-23,29,-26)$$

$$\rightarrow -23\left(x+\frac{100}{37}\right)+29\left(y+\frac{27}{37}\right)-26(z-0)=0$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(1,-1,1)$ می‌گذرد و بر خط $3x=2y=z$ عمود و با صفحه $x+y-z=0$ موازی است.

حل:

$u_1=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right)$ و $n=(1,1,-1)$

اگر $u$ بردار هادی خط باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l} u \perp u_1 \\ u \perp n \end{array}\right. \rightarrow u=\vec{u_1}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\left(-\frac{3}{2},\frac{4}{3},-\frac{1}{4}\right)$$

لذا معادله خط عبارتست از:

$$\frac{x-1}{-3/2}=\frac{y+1}{4/3}=\frac{z-1}{-1/4}$$

فاصله یک نقطه از یک صفحه: فاصله نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه $P: ax+by+cz=d$ به صورت زیر است:

$$D = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

یک حالت خاص: فاصله مبدأ از صفحه $P: ax+by+cz=d$ به صورت زیر است:

$$D = \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

فاصله بین دو صفحه موازی: فاصله بین دو صفحه موازی $P_1: ax+by+cz=d_1$ و $P_2: ax+by+cz=d_2$ عبارت است از:

$$D = \frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال: معادله کره‌ای به مرکز $A(2,3,5)$ و مماس بر صفحه $2x+2y-z+7=0$ را بیابید.

حل: می‌دانیم معادله کره به مرکز $(x_0, y_0, z_0)$ و شعاع $r$ عبارت است از:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

چون کره بر صفحه مماس است لذا شعاع کره برابر با فاصله بین مرکز کره تا صفحه خواهد بود. لذا

$$r = D = \frac{|4+6-5+7|}{\sqrt{4+4+1}} = 4$$

لذا معادله کره عبارت است از:

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=16$$

# تمرینات درس دهم

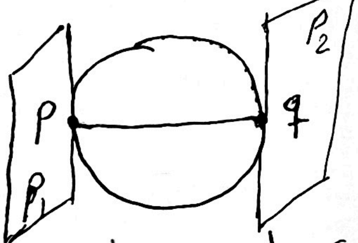
1. معادله خطی را بنویسید که در نقطه برخورد دو خط زیر بر هر دوی آن‌ها عمود باشد.

$$L_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3} \qquad L_2: x=\frac{y+3}{2}=\frac{z+3}{2}$$

2. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترک دو صفحه $P_1: 7x-4y+7z+5=0$ و $P_2: 4x+3y-2z+6=0$ بگذرد و بر صفحه $P_3: x-y-2z+5=0$ عمود باشد.

3. معادله کره‌ای را بنویسید که از نقطه $P(3,-4,2)$ بگذرد و بر صفحات $P_1: x-2y+2z=15$ و $P_2: x-2y+2z=-3$ مماس باشد.

(راهنمایی: نقطه $P$ در معادله صفحه $P_1$ صدق می‌کند و دو صفحه موازی هستند. فاصله دو صفحه قطر کره است. کافیست در شکل زیر مختصات نقطه $q$ بدست آید تا مرکز کره حاصل شود)




4. معادله خط گذرا از نقطه $P(0,1,2)$ و عمود متقاطع بر خط $L: x=y-2=z-1$ را بیابید.

5. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از دو نقطه $(1,0,-1)$ و $(-1,2,1)$ بگذرد و با فصل مشترک دو صفحه $3x+y-2z=6$ و $4x-y+3z=0$ موازی باشد.

6. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترک صفحات $x-z=1$ و $y+2z=3$ عبور کند و عمود بر صفحه $x+y-2z=1$ باشد.

7. فاصله خط $x=2+t$ و $y=1+t$ و $z=-0.5-0.5t$ را از صفحه $x+2y+6z=10$ را بیابید.

8. معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(2,3,0)$ بگذرد و بر بردارهای $a=i+2j+3k$ و $b=3i+4j+5k$ عمود باشد.

# مقدمه‌ای بر ماتریس‌ها

ماتریس: هر ماتریس دارای تعدادی سطر و تعدادی ستون است و با $A_{m\times n}$ نمایش داده می‌شود که در آن $m$ تعداد سطرها و $n$ تعداد ستون‌ها است. و $a_{ij}$ مؤلفه سطر iام و ستون jام ماتریس $A$ است.

ماتریس مثلثی و ماتریس قطری:

ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و تعداد ستون‌های آن برابر باشند.

ماتریس قطری: ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های بجز قطر اصلی آن صفر هستند.

ماتریس بالا مثلثی: ماتریسی که تمام درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر هستند.

جمع دو ماتریس: مجموع دو ماتریس هم مرتبه $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$ یک ماتریس جدید $C_{m\times n}$ است که اعضای آن به صورت $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad \forall i,j$ تعریف می‌شوند.

ضرب دو ماتریس: ضرب دو ماتریس زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های ماتریس سمت چپ علامت ضرب با تعداد سطرهای ماتریس سمت راست آن برابر باشد یعنی

$$C_{m\times n} = A_{m\times p}\times B_{p\times n}$$

مثال: حاصلضرب دو ماتریس $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$ را بیابید.

حل: واضح است که $A\times B$ تعریف نمی‌شود. اما می‌توان $B\times A$ را بدست آورد. داریم:

$$B\times A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&2\\0&3&1\end{pmatrix}$$

نکته: واضح است که حاصلضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد یعنی در حالت کلی $AB\neq BA$

نکته: ضرب هر ماتریس در ماتریس همانی همان ماتریس می‌شود یعنی $AI=IA=A$

ترانهاده یک ماتریس: اگر در یک ماتریس جای سطرها و ستون‌ها عوض شود، ماتریس حاصل را ترانهاده ماتریس اول گویند. به عنوان مثال، در مثال فوق داریم $A^T=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}$.

خواص ترانهاده ماتریس:

1) $(A^T)^T=A$ 2) $(A+B)^T=A^T+B^T$

3) $(AB)^T=B^T\cdot A^T$

وارون ماتریس: ماتریس مربعی $A$ را وارون پذیر (معکوس پذیر) گویند اگر ماتریس مانند $B$ وجود داشته باشد به طوری که

$$AB = I = BA$$

وارون ماتریس $A$ را با $A^{-1}$ نمایش می دهند.

معکوس ماتریس $2\times 2$ به صورت $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:
اگر $ad-bc \neq 0$ در این صورت

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

معکوس ماتریس قطری: معکوس یک ماتریس قطری (با قطر اصلی مخالف صفر) ماتریسی است قطری که عناصر روی قطر اصلی آن معکوس عناصر روی قطر اصلی ماتریس می باشد.

خواص معکوس یک ماتریس:

1) $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ 2) $(A^{-1})^{-1} = A$

دترمینان: تابعی است که به هر ماتریس $A$ یک عدد نسبت می دهد. دترمینان ماتریس $A$ را با $|A|$ نمایش می دهند.

دترمینان ماتریس $2\times 2$:

$$\text{If } A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

دترمینان ماتریس $3\times 3$ به کمک بسط توسط یک سطر یا یک ستون برحسب دترمینان های مرتبه دوم بدست می آید. مثلاً دترمینان یک ماتریس $3\times 3$ با بسط روی سطر اول به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

نکته: دترمینان ماتریس فوق با بسط روی سطر به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= -b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1)$$

مثال: دترمینان ماتریس $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ را بیابید.

حل: دترمینان با بسط روی سطر اول:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$0(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(0+2) - 2(0+3) + 0(0-3) = -2$$

دترمینان با بسط روی ستون دوم:

$$|A| = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -6 + 0 + 4 = -2$$

دترمینان ماتریس های مراتب بالاتر: همانند محاسبه دترمینان ماتریس های مرتبه سه، دترمینان ماتریس های مراتب بالاتر با استفاده از دترمینان ماتریس های مراتب پایین تر به صورت بازگشتی محاسبه می شوند.

مثال: دترمینان ماتریس $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ را بیابید.

$$|A| = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 48$$

خواص دترمینان:

1: دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترانهاده آن برابر است یعنی $|A| = |A^T|$

2. اگر جای دو سطر یا دو ستون ماتریس تغییر کند، علامت دترمینان عوض می شود.

3: اگر همه درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس صفر باشد، حاصل دترمینان صفر است.

4. اگر همه درایه های یک سطر یا یک ستون A را در یک عدد غیر صفر ضرب کنیم، حاصل دترمینان در آن عدد ضرب می شود.

5. دترمینان هر ماتریس قطری و مثلثی برابر است با حاصلضرب درایه های روی قطر اصلی آن ماتریس.

6. اگر A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند، آنگاه $|A \times B| = |A| \times |B|$

7: اگر دو سطر یا دو ستون ماتریس A برابر باشند، دترمینان آن ماتریس صفر خواهد بود.

8: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

# دستگاه معادلات خطی

صورت کلی یک دستگاه دو معادله و 2 مجهولی خطی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

که در آن $a_{ij}$ ها ضرایب معلوم و $b_1$ و $b_2$ ثابت های معلوم و $x_1$ و $x_2$ متغیرهای مجهول هستند.

در حالت کلی یک دستگاه n معادله با n مجهول خطی به صورت زیر می باشد:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow AX = b \qquad (I)$$

در دستگاه فوق اگر $b = 0$ آنگاه به دستگاه فوق دستگاه خطی همگن گویند.

قضیه وجود و یکتایی جواب دستگاه خطی:

فرض کنید A ماتریس ضرایب دستگاه (I) باشد، گزاره های زیر هم ارزند:

الف: دستگاه جواب یکتا دارد.

ب: ماتریس ضرایب A معکوس پذیر است (یعنی $A^{-1}$ موجود است)

ج: دستگاه همگن $AX = 0$ جواب بدیهی $x = 0$ دارد.

د: دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر است ($\det(A) \neq 0$)

روش های حل یک دستگاه معادلات خطی:

روش معکوس ماتریس ضرایب: اگر A معکوس پذیر باشد، جواب دستگاه خطی $Ax = b$ با ضرب طرفین در $A^{-1}$ برابر $x = A^{-1} \cdot b$ خواهد بود.

مثال: دستگاه $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 7x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$ را از طریق محاسبه معکوس ماتریس ضرایب بیابید.

حل: داریم $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. لذا

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

روش کرامر: اگر $A$ معکوس پذیر باشد آن گاه $|A| \neq 0$. در این صورت جواب دستگاه خطی $Ax=b$ را می توان با روش کرامر به صورت زیر تعیین کرد:

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|} \quad , \quad k=1,2,\dots,n$$

که در آن $|A_k|$ دترمینان ماتریس $A_k$ است که شکل آن از جایگذینی بردار ستونی $b$ به جای ستون $k$ ام ماتریس $A$ حاصل می شود.

مثال: دستگاه زیر را با روش کرامر حل کنید:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

حل: داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \;\&\; |A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 , \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

لذا جواب ها عبارت اند از:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1}{5} = 0.2$$

حل دستگاه های مثلثی: اگر ماتریس ضرایب در دستگاه خطی، بالا مثلثی یا پایین مثلثی و یا قطری باشد جواب دستگاه به سادگی بدست می آید.

مثال: دستگاه سه معادله سه مجهول

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

را حل کنید.

حل: با شروع از معادله آخر داریم:

$$\begin{cases} -x_3 = -1 \longrightarrow x_3 = 1 \\ 3x_2 + 2x_3 = 2 \longrightarrow x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \longrightarrow x_1 = -1 \end{cases}$$

روش حذفی گاوس: همان طور که مشاهده شد حل دستگاه های بالا مثلثی بسیار ساده است. لذا برای حل یک دستگاه خطی کافی است با عملیات سطری مقدماتی مجاز که در زیر اشاره می شود ماتریس ضرایب $A$ را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم و بعد مانند روش مثال قبلی جواب را بیابیم.

اعمال سطری مقدماتی مجاز:

۱- جابجایی دو معادله (دو سطر)

2. ضرب یک معادله در یک عدد ثابت $K$

3. افزودن $K$ برابر یک معادله به معادله دیگر:

مثال: دستگاه سه معادله سه مجهول

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3=-1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=1 \\ 2x_2+\frac{1}{3}x_3=\frac{1}{3} \end{cases}$$

را با کمک روش حذفی گاوس حل کنید.

حل:

$$\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{قطر اصلی (یعنی عدد 2) را به صفر تبدیل می کنیم.}]{\text{با این کار عنصر اول زیر : } -E_1+E_2\rightarrow E_2}$$

$$\begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{3}E_2+E_3\rightarrow E_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_3=1 \\ x_2=0 \\ x_1=-1 \end{cases}$$

روش گاوس جردن: این روش در ادامه روند حذفی گاوس می باشد به این صورت که عملیات سطری مقدماتی روی دستگاه بالا مثلثی در ماتریس افزوده ادامه می یابد تا به یک دستگاه قطری تبدیل شود. این روش برای حل دستگاه در عمل توصیه نمی شود.

روش گاوس جردن برای محاسبه معکوس یک ماتریس:

$$[A|I] \xrightarrow{\text{روش گاوس جردن}} [I|A^{-1}]$$

مثال: معکوس ماتریس $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ را با روش گاوس جردن بیابید.

33/ حل:

$$(A \mid I) = \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}E_1 + E_3 \to E_3]{-\frac{3}{2}E_1 + E_2 \to E_2}$$

$$\begin{array}{c} E_1 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{E_1}{2} \to E_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}E_2 \to E_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & +1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2 + E_3 \to E_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{4}{5}E_3 \to E_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}E_3 + E_1 \to E_1]{-\frac{7}{4}E_3 + E_2 \to E_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{10} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$\to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & -\frac{2}{10} & -\frac{7}{5} \\ -1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ 1 & -0.2 & -1.4 \\ -1 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$$

مقادیر و بردارهای ویژه: می خواهیم بردار ناصفر $x \neq 0$ را چنان تعیین کنیم که بردار $Ax$ مضربی از خود $x$ باشد. به عبارت دیگر پارامتر $\lambda$ را به گونه ای می یابیم که بردار غیرصفر $x$ جواب دستگاه زیر باشد:

$$Ax = \lambda x \implies (A - \lambda I)x = 0 \qquad (II)$$

مقادیری از پارامتر $\lambda$ و بردار غیرصفر $x$ را که در دستگاه فوق صدق می کند را به ترتیب مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A$ گویند.

واضح است که دستگاه $(II)$ زمانی جواب غیربدیهی دارد که

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

این رابطه یک چندجمله ای درجه $n$ برحسب $\lambda$ به صورت زیر می باشد:

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_0 = 0$$

که به آن معادله مشخصه گویند. ریشه های این معادله مشخصه مقادیر ویژه ماتریس $A$ هستند.

مثال: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 0.75 & 1.25 \end{pmatrix}$ را بیابید.

حل: چندجمله ای مشخصه ماتریس $A$ عبارت است از:

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1.25-\lambda & 0.75 \\ 0.75 & 1.25-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2.5\lambda + 1 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0.5$$

برای تعیین مقادیر ویژه کافی است دو دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{pmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 0.75 & 1.25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 0.75 & 1.25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

بعد از حل دو دستگاه فوق بردار ویژه های $X^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $X^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ متناظر با $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 0.5$ بدست می آیند.

مثال: مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&1&-1\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ را بیابید.

حل: داریم:

$$\det(A-\lambda I)=0 \rightarrow \begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\2&1-\lambda&-1\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=0 \rightarrow \lambda^3-\lambda^2-\lambda-3=0$$

$$\rightarrow (\lambda+1)^2(\lambda-3)=0 \rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=3$$

برای تعیین بردارهای ویژه باید دو دستگاه زیر را حل کنیم.

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\2&1&-1\\-1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix}2&1&1\\2&1&-1\\-1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

بعد از حل دو دستگاه فوق بردار ویژه‌های $X^1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ و $X^2=\begin{pmatrix}5\\6\\-1\end{pmatrix}$ متناظر با $\lambda_1=-1$ و $\lambda_3=3$ بدست می‌آیند.

روش دیگر برای محاسبه معکوس یک ماتریس:

اگر $A$ ماتریس $n\times n$ باشد آن گاه $A^{-1}=\dfrac{adj(A)}{|A|}$ که در آن $adj(A)$ ترانهاده ماتریس کهاد $A$ است. فرض کنید $C$ ماتریس کهاد باشد. در این صورت داریم:

$$C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}$$

که در آن $c_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ که $M_{ij}$ ماتریسی است که از حذف سطر $i$ام و ستون $j$ام ماتریس $A$ بدست می‌آید.

مثال: معکوس ماتریس $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&2&5\\1&-1&0\end{pmatrix}$ را بیابید.

حل:

$$|A|=5 \text{ و } c_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&5\\-1&0\end{vmatrix}=5,\quad c_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&5\\1&0\end{vmatrix}=5$$

$$c_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&2\\1&-1\end{vmatrix}=-5 \text{ و } c_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}=-1,\quad c_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$$

$$c_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&0\\1&-1\end{vmatrix}=2 \text{ و } c_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}0&1\\2&5\end{vmatrix}=-2 \ \& \ C=\begin{pmatrix}+5&+5&-5\\-1&-1&2\\-2&-7&4\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}5&-1&-2\\5&-1&-7\\-5&2&4\end{pmatrix}}{5}$$

$$c_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}2&1\\3&5\end{vmatrix}=-7 \text{ و } c_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}2&0\\3&2\end{vmatrix}=4$$

# تمرینات درس سوم:

1: دترمینان ماتریس $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ را محاسبه کنید.

2: تساوی $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(c-b)$ را نشان دهید.

3: دستگاه زیر را به کمک روش کرامر حل کنید:

$$\begin{cases} 14x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 5x_3 = 15 \end{cases}$$

4: دستگاه زیر را به کمک روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = -16 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 36 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 20 \end{cases}$$

5: معکوس ماتریس زیر را با کمک روش های گاوس جردن و ماتریس کهاد حساب کنید:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

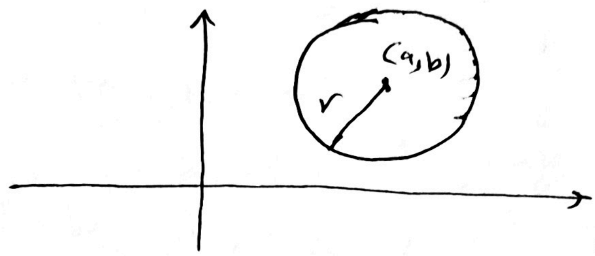
6: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{pmatrix}$$

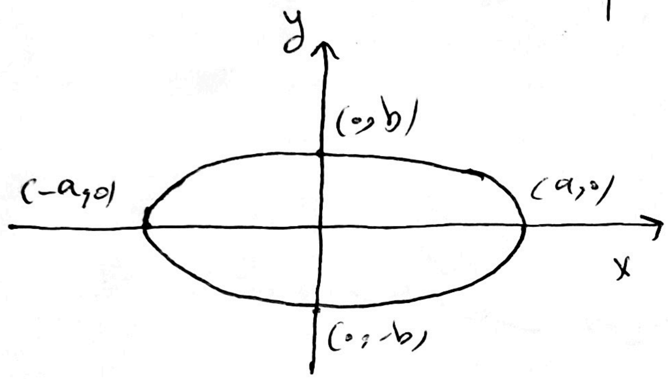
# فصل دوم: رویه های فضایی

## یادآوری مقاطع مخروطی:

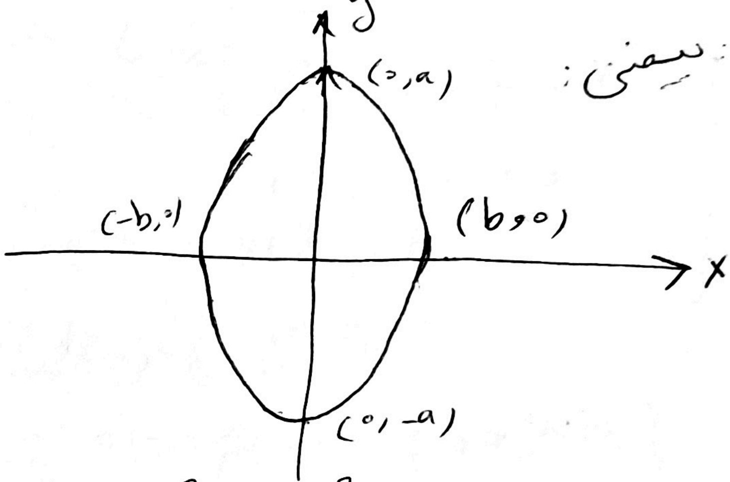
1: دایره: معادله آن به صورت $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ می باشد.




2: بیضی:

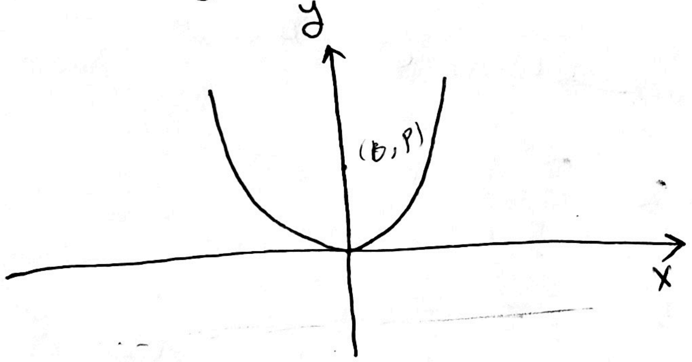



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ , \quad a\geq b$$

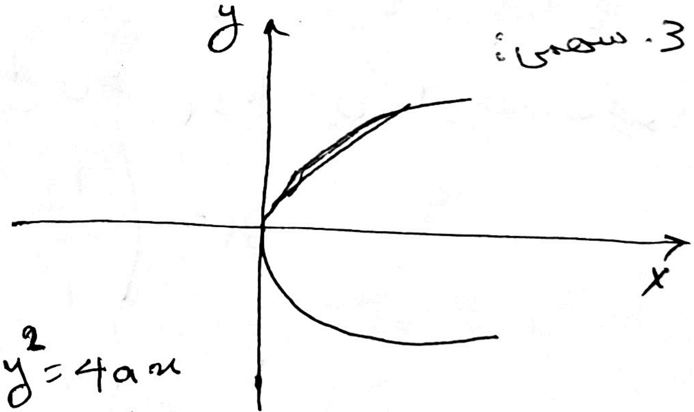



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \text{و} \quad a\geq b$$

3. سهمی:

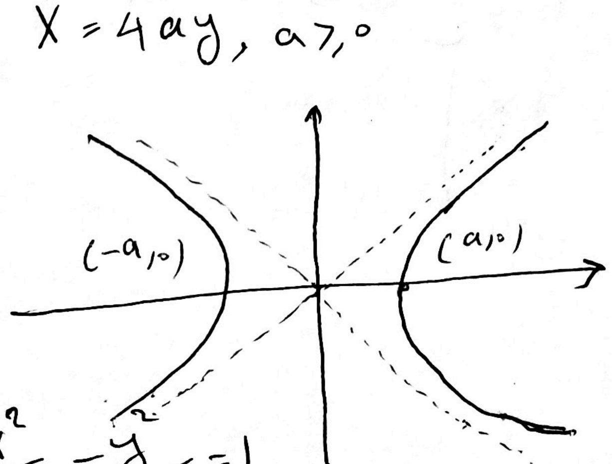



$$x^2=4ay \ , \quad a>0$$

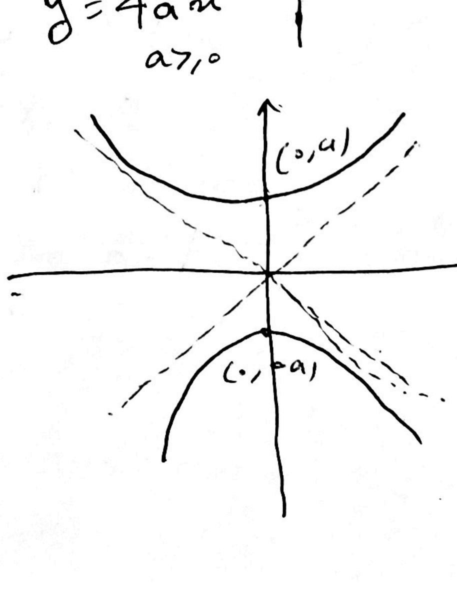



$$y^2=4ax \quad a>0$$

4. هذلولی:



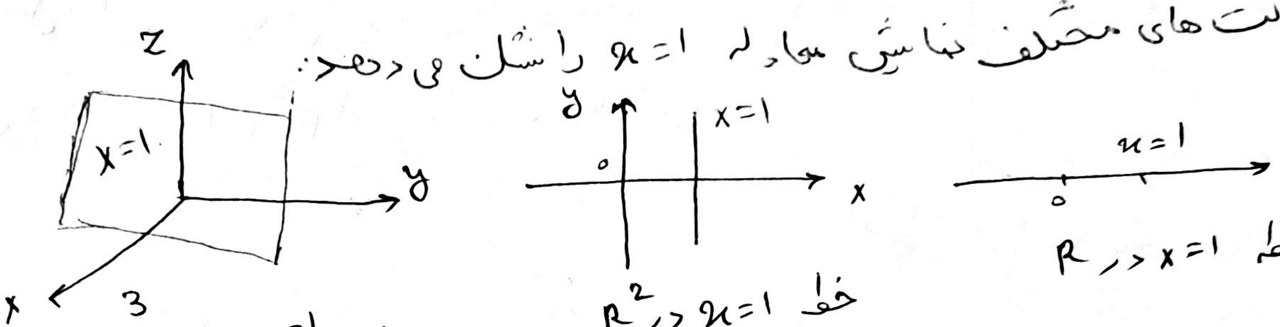

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$




$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

تعریف رویه: مکان هندسی تمام نقاطی در $R^3$ است که در رابطه $f(x,y,z)=0$ صدق می‌کند.

توجه شود که وقتی معادله‌ای داده می‌شود باید مشخص کرد که منظور از این معادله یک نقطه در $R$، یک منحنی در $R^2$ یا یک رویه در فضای $R^3$ است. به عنوان مثال شکل زیر حالت های مختلف نمایش معادله $x=1$ را نشان می دهد:




رویه $x=1$ در $R^3$ — خط $x=1$ در $R^2$ — نقطه $x=1$ در $R$

تعریف استوانه: مکان هندسی خطوطی است که از تمام نقاط یک منحنی مسطح به نام هادی استوانه بگذرد و با خط ثابتی به نام مولد استوانه موازی باشد. استوانه‌ای که منحنی هادی آن یک بیضی باشد، استوانه بیضوی نامیده می‌شود.

استوانه‌ای که منحنی هادی آن یک سهمی باشد، استوانه سهموی نامیده می‌شود.

استوانه‌ای که منحنی هادی آن یک هذلولی باشد، استوانه هذلولوی نامیده می‌شود.

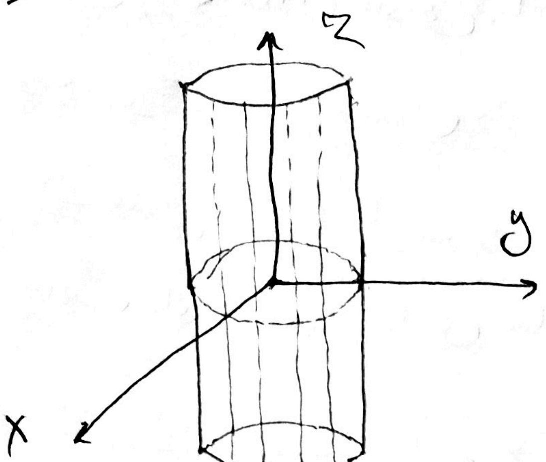
استوانه‌ای که منحنی هادی آن یک دایره باشد، استوانه دوار (یا مستدیر) نامیده می‌شود.

نکته: در حالت کلی معادلات $f(x,y)=0$ و $f(x,z)=0$ و $f(y,z)=0$ به ترتیب رویه‌های استوانه‌ای موازی محورهای $z$، $y$ و $x$ هستند. به عبارت دیگر هر معادله‌ای در $R^3$ که شامل یکی از متغیرها نباشد معادله یک استوانه است و آن متغیری که وجود ندارد نشان دهنده محور استوانه خواهد بود.

نکته: منظور از استوانه قائم، استوانه‌ای است که محورش به موازات یکی از سه محور $x$، $y$ یا $z$ باشد.

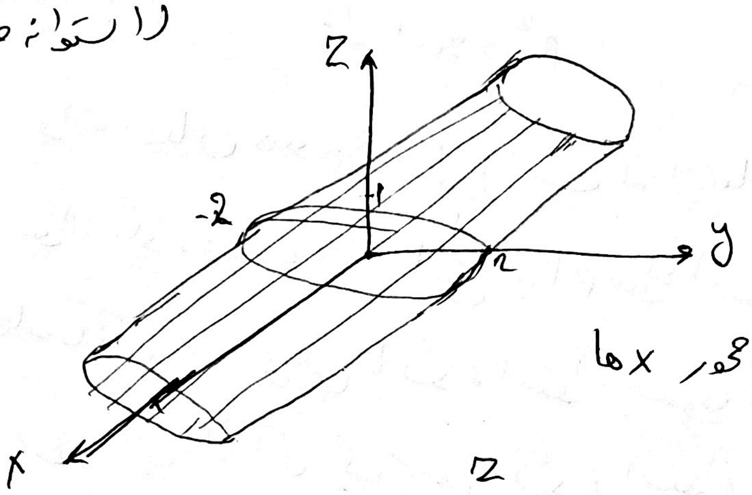
مثال: $x^2+y^2=1$

این معادله فاقد $z$ است و تقاطع آن با صفحه $xy$ یک دایره است که با حرکت در جهت محور $z$ استوانه‌ای مشابه شکل مقابل بدست می‌آید. توجه شود که $x^2+y^2=1$ در فضای $R^3$ استوانه است و نه دایره.



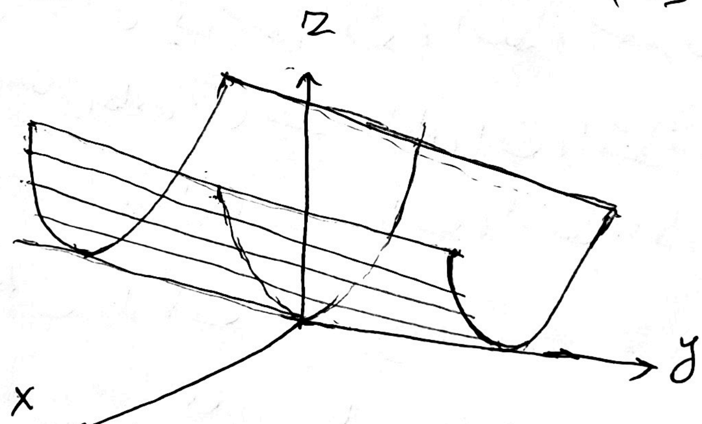

استوانه در راستای محور $z$ها
(استوانه مدور)

مثال: $\frac{y^2}{4}+z^2=1$



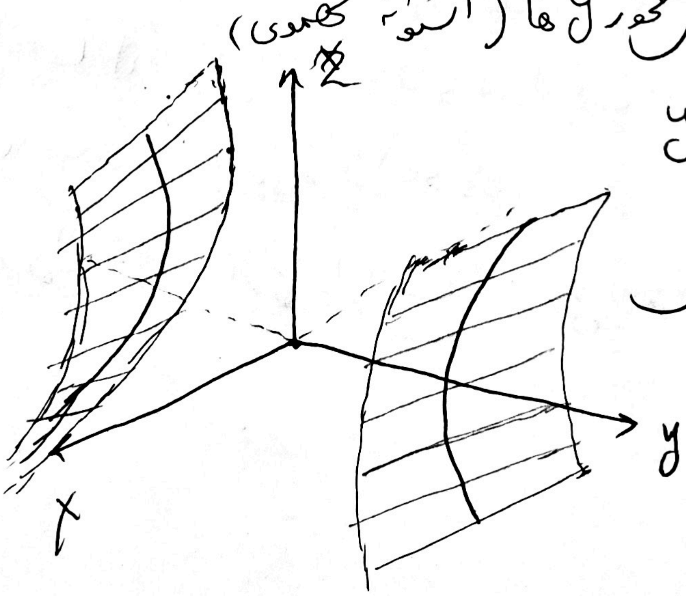

استوانه‌ای در راستای محور $x$ها
(استوانه بیضوی)

مثال: $z=x^2$




استوانه‌ای در راستای محور $y$ها (استوانه سهموی)

مثال: $y^2-z^2=1$




استوانه‌ای در راستای محور $x$ها
(استوانه هذلولوی)

رویه های درجه دوم: فرم کلی رویه های درجه دوم به صورت زیر می باشد:

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz+gx+hy+iz+j=0$$

بسته به اینکه پارامترهای $a$ و $b$ و ... و $j$ چه مقادیری داشته باشند رویه های درجه دوم مختلفی خواهیم داشت که در ادامه بررسی می شوند:

1: بیضی گون (بیضی وار): فرم کلی یک بیضی گون به صورت زیر می باشد:

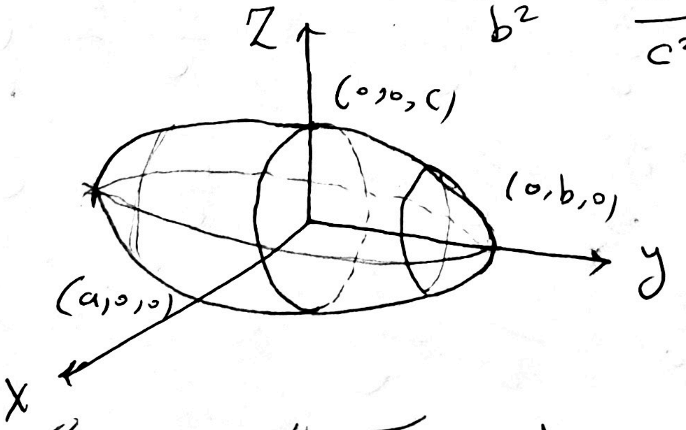
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

مقطع بیضی گون با محورهای مختلف:

$$\begin{cases} \text{محور } x \text{ ها} \longrightarrow y=z=0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \longrightarrow x=\pm a \\ \text{محور } y \text{ ها} \longrightarrow x=z=0 \longrightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \longrightarrow y=\pm b \\ \text{محور } z \text{ ها} \longrightarrow x=y=0 \longrightarrow \frac{z^2}{c^2}=1 \longrightarrow z=\pm c \end{cases}$$

نقاط برخورد با صفحات مختصات

$$\begin{cases} \text{صفحه } xy \longrightarrow z=0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \longrightarrow \text{بیضی} \\ \text{صفحه } xz \longrightarrow y=0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \longrightarrow \text{بیضی} \\ \text{صفحه } yz \longrightarrow x=0 \longrightarrow \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \longrightarrow \text{بیضی} \end{cases}$$




نکته: توجه شود که اگر $a=b=c$ آنگاه معادله بیضی گون به صورت $x^2+y^2+z^2=a^2$ است که یک کره می باشد.

مثال: معادله زیر چه رویه‌ای است:

$$2x^2+y^2+3z^2-12z+11=0$$

حل: داریم:

$$2x^2+y^2+3(z^2-4z+4-4)=-11$$

$$\to 2x^2+y^2+3(z-2)^2=1 \longrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}}+y^2+\frac{(z-2)^2}{\frac{1}{3}}=1$$

معادله یک بیضی‌گون به مرکز $(0,0,2)$ با پارامترهای $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b=1$ و $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

۲. سهمی‌گون بیضوی: هر رویه به شکل زیر یک سهمی‌گون بیضوی است:

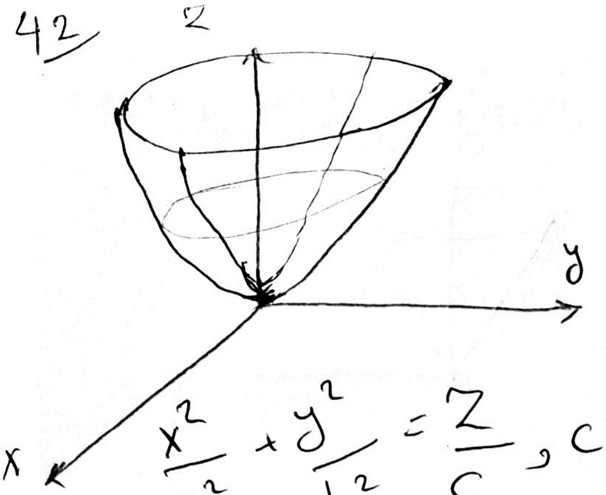
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

مقطع با محورها:

$$\begin{cases} x \text{ محورها} \longrightarrow y=z=0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}=0 \longrightarrow x=0 \\ y \text{ محورها} \longrightarrow x=z=0 \longrightarrow \frac{y^2}{b^2}=0 \longrightarrow y=0 \\ z \text{ محورها} \longrightarrow x=y=0 \longrightarrow \frac{z}{c}=0 \longrightarrow z=c \end{cases}$$

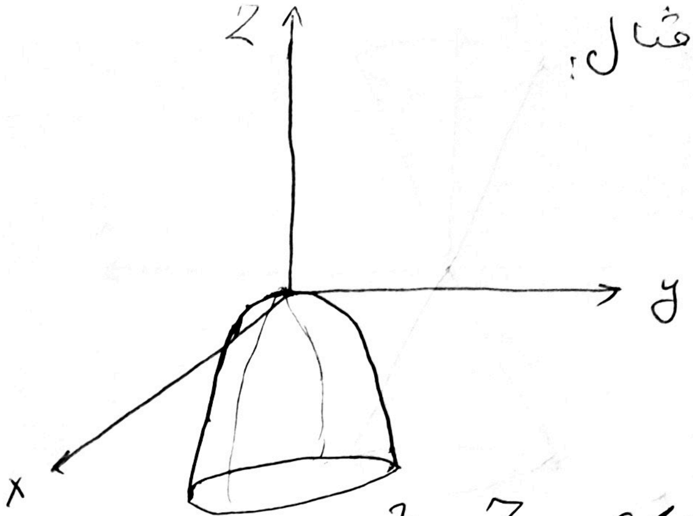
مقطع با صفحات مختصات:

$$\begin{cases} xy \text{ صفحه} \longrightarrow z=0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \longrightarrow x=y=0 \\ xz \text{ صفحه} \longrightarrow y=0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c} \longrightarrow x^2=\frac{a^2}{c}z \quad (\text{سهمی}) \\ yz \text{ صفحه} \longrightarrow x=0 \longrightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c} \longrightarrow y^2=\frac{b^2}{c}z \quad (\text{سهمی}) \\ \text{If } z=\beta \neq 0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\beta}{c} \quad (\text{بیضی}) \end{cases}$$

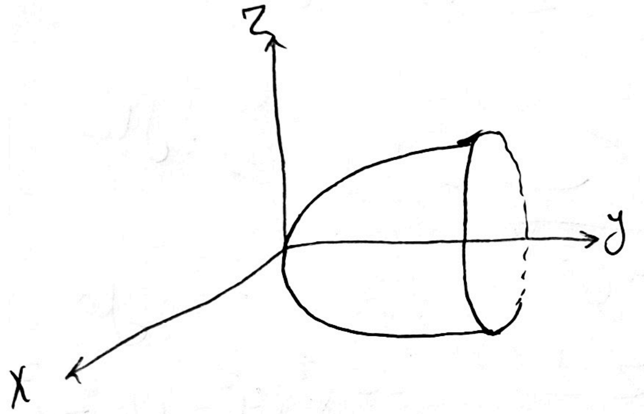


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c} \quad \text{و} \quad c>0$$

مثال:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c} \quad \text{و} \quad c<0$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{y}{b} \quad \text{و} \quad b>0$$

3- مخروط بیضوی: هر رویه به فرم زیر یک مخروط بیضوی نامیده می‌شود:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

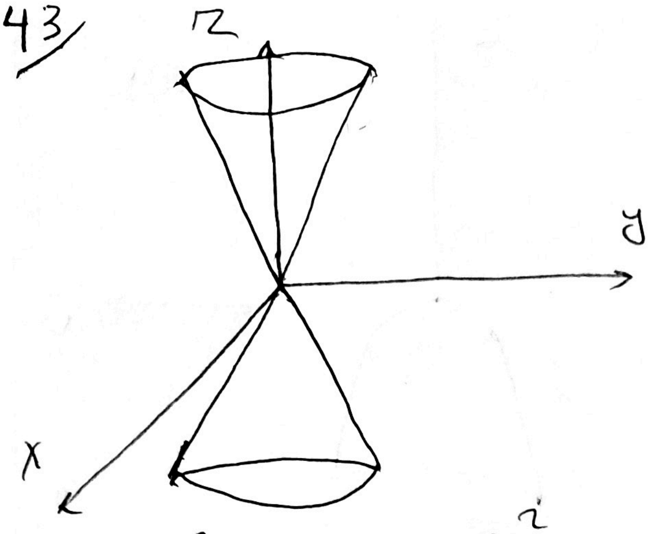
محل تقاطع با محورها:

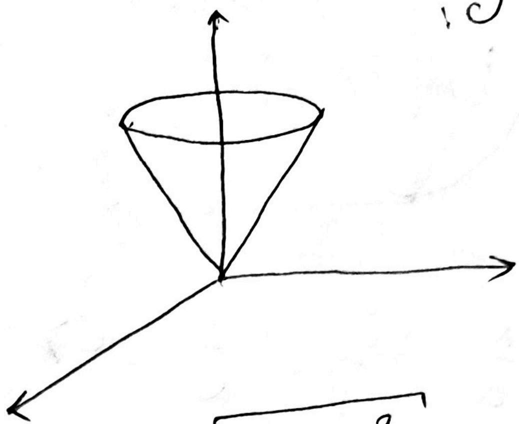
- محور $x$ ها $\longrightarrow y=z=0 \longrightarrow x=0$
- محور $y$ ها $\longrightarrow x=z=0 \longrightarrow y=0$
- محور $z$ ها $\longrightarrow x=y=0 \longrightarrow z=0$

مقطع با صفحات مختصات:

- صفحه $xy \longrightarrow z=0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \longrightarrow x=y=0$
- صفحه $xz \longrightarrow y=0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2} \longrightarrow x=\pm\frac{a}{c}z \longrightarrow$ دو خط متقاطع در مبدأ
- صفحه $yz \longrightarrow x=0 \longrightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \longrightarrow y=\pm\frac{b}{c}z \longrightarrow$ دو خط متقاطع در مبدأ
- If $z=\beta\neq 0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\beta^2}{c} \longrightarrow$ بیضی

مثال:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \qquad z=\sqrt{x^2+y^2}$$

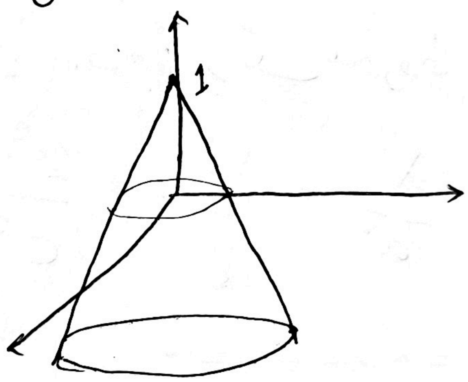
مثال: رویه زیر را توصیف کنید

$$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$$

حل:

$$z=1-\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=1-z \xrightarrow{1-z\geq 0} x^2+y^2=(1-z)^2$$

$$\begin{cases} \text{If } z=0 \longrightarrow x^2+y^2=1 \\ \text{If } z=1 \longrightarrow x=y=0 \end{cases}$$




4. هذلولی گون یک پارچه: هر رویه به شکل زیر را یک هذلولی گون یک پارچه گویند.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

محل تقاطع با محورها:

$$\begin{cases} \text{محور } x \text{ ها} \longrightarrow y=z=0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \longrightarrow x=\pm a \\ \text{محور } y \text{ ها} \longrightarrow x=z=0 \longrightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \longrightarrow y=\pm b \\ \text{محور } z \text{ ها} \longrightarrow x=y=0 \longrightarrow \frac{z^2}{c^2}=-1 \longrightarrow \text{محور } z \text{ ها را قطع نمی کند} \end{cases}$$

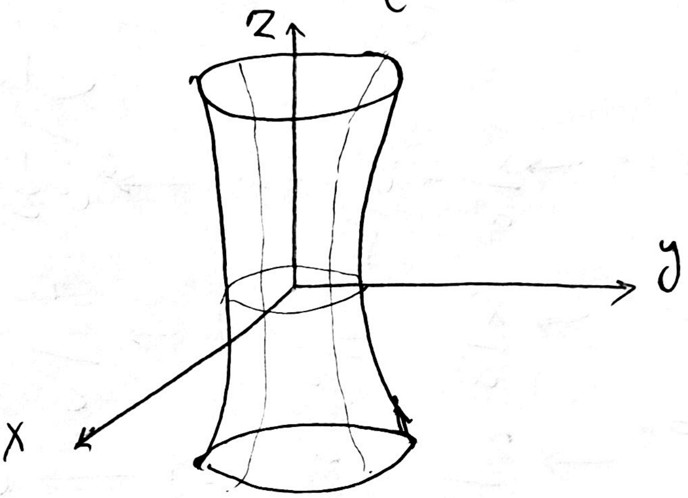
مقطع با صفحات مختصات:

صفحه $yz \rightarrow x=0 \rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$ هذلولی

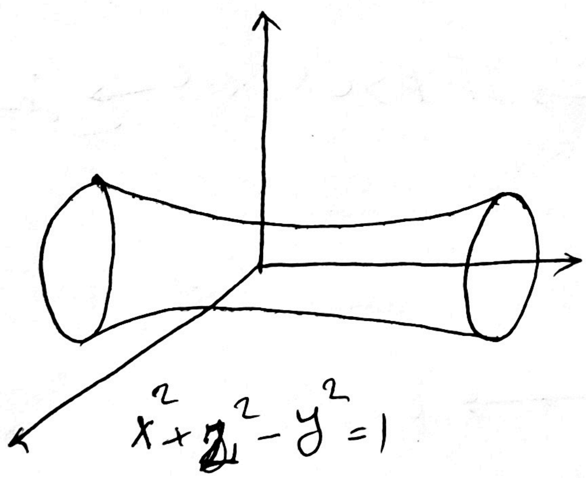
صفحه $xz \rightarrow y=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$ هذلولی

صفحه $xy \rightarrow z=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ بیضی

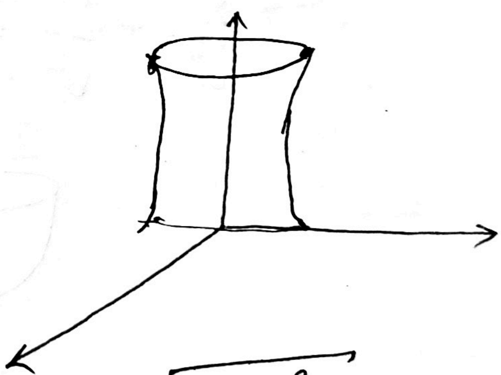
If $z = \beta \neq 0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\beta^2}{c^2} \rightarrow$ بیضی




مثال:



$x^2 + z^2 - y^2 = 1$



$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

5. هذلولی‌گون دوپارچه: هر رویه به شکل زیر را یک هذلولی‌گون دوپارچه گویند:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

محل تقاطع با محورها:

محور $x$ ها $\rightarrow y=z=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}=-1 \rightarrow$ محور $x$ ها را قطع نمی‌کند

محور $y$ ها $\rightarrow x=z=0 \rightarrow \frac{y^2}{b^2}=-1 \rightarrow$ محور $y$ ها را قطع نمی‌کند

محور $z$ ها $\rightarrow x=y=0 \rightarrow \frac{z^2}{c^2}=1 \rightarrow z=\pm c$

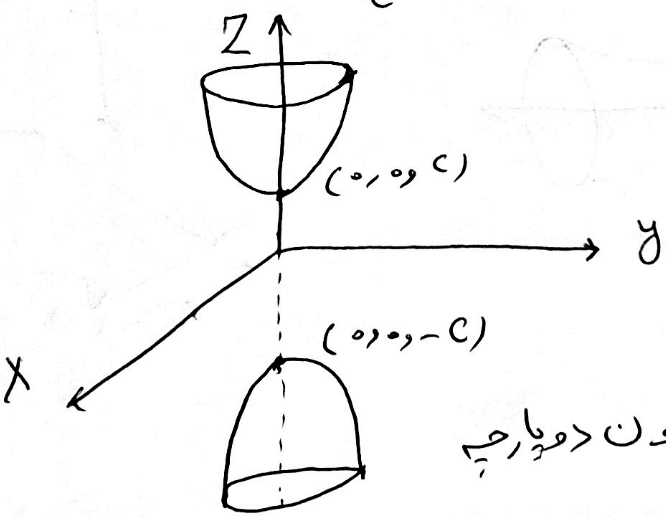
مقطع با صفحات مختصات:

صفحه $xy$ $\rightarrow z=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \rightarrow$ صفحه $xy$ را قطع نمی‌کند

صفحه $xz$ $\rightarrow y=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \rightarrow \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \rightarrow$ هذلولی

صفحه $yz$ $\rightarrow x=0 \rightarrow \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow$ هذلولی

If $z=\beta \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{\beta^2}{c^2} \rightarrow$ If $\beta>c$ یا $\beta<-c \rightarrow$ بیضی




هذلولی‌گون دوپارچه

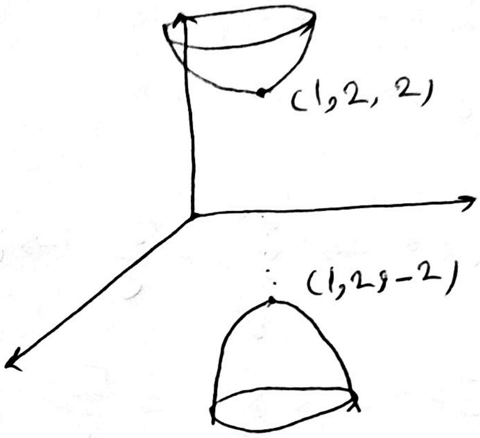
مثال: رویه $\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=z^2-4$ را رسم کنید.

حل: داریم:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2-z^2=-4 \to \frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{z^2}{4}=-1$$

هذلولی گون دو پارچه با مرکز $(1,2,0)$.

If $z=\pm 2 \to x=1, y=2$



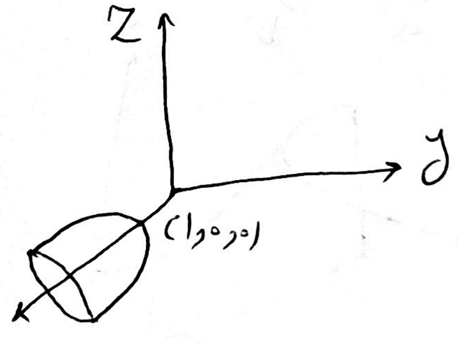

مثال: رویه زیر را رسم کنید:

$$x=\sqrt{1+y^2+z^2}$$

حل:

$$x=\sqrt{1+y^2+z^2} \to x^2=1+y^2+z^2 \to y^2+z^2-x^2=-1 \quad (x\geq 0)$$

If $x=1 \to y=z=0$




مثال: رویه زیر را توصیف کنید

$$x^2-y^2+2z^2+4x-8y+3=0$$

حل:

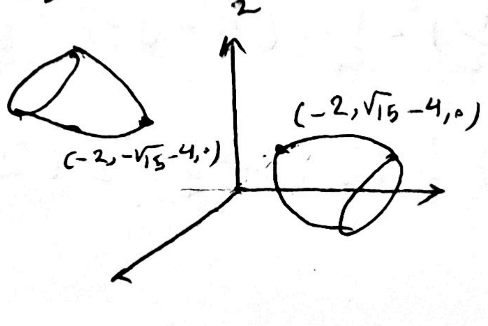
$$(x+2)^2-4-(y+4)^2+16+2z^2+3=0$$

$$\to (x+2)^2-(y+4)^2+2z^2=-15 \to \frac{(x+2)^2}{15}+\frac{z^2}{\frac{15}{2}}-\frac{(y+4)^2}{15}=-1$$

If $\frac{(y+4)^2}{15}=1 \to x=-2, z=0$

$\to$ If $y=\pm\sqrt{15}-4 \to x=-2, z=0$

$\to (-2,\sqrt{15}-4,0)\ (-2,-\sqrt{15}-4,0)$



۶: سهمی گون هذلولوی (زین اسبی): هر رویه به شکل زیر را یک زین اسبی گویند:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

محل تقاطع با محورها:

محور xها $\rightarrow y=z=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}=0 \rightarrow x=0$

محور yها $\rightarrow x=z=0 \rightarrow y=0$

محور zها $\rightarrow x=y=0 \rightarrow z=0$

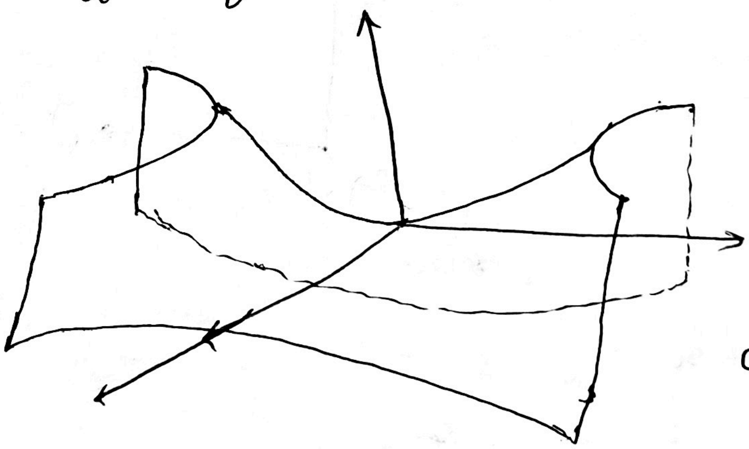
مقطع با صفحات مختصات:

صفحه yz $\rightarrow x=0 \rightarrow -\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c} \rightarrow y^2=-\frac{b^2}{c}z \rightarrow$ سهمی

صفحه xz $\rightarrow y=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c} \rightarrow x^2=\frac{a^2}{c}z \rightarrow$ سهمی

صفحه xy $\rightarrow z=0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$ دو خط راست

If $z=\beta \rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{\beta}{c} \rightarrow$ هذلولی



زین اسبی

مثال: رویه زیر را توصیف کنید:

$$x^2+x-y^2+y+z=1$$

حل:

$$(x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}-(y^2-y+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4})+z=1 \rightarrow (x+\tfrac{1}{2})^2-(y-\tfrac{1}{2})^2+z=1$$

$\rightarrow (y-\tfrac{1}{2})^2-(x+\tfrac{1}{2})^2=(z-1) \rightarrow$ زین اسبی

# تمرینات درس چهارم

1- رویه های زیر را توصیف کرده و به شکل تقریبی رسم کنید:

الف: $y = \sin x$

ب. $4x^2 + y^2 = 36$

ج. $x^2 + 2z^2 - 2x - y + 3 = 0$

چ. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x = 0$

ح. $x^2 + y^2 + 4y + z = 4$

خ. $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13$

د. $9x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$

جهت درک بهتر رویه ها می توانید به سایت زیر مراجعه کنید:

https://faculty.math.illinois.edu/~nmd/quadratics/index.html

https://nmd.pages.math.illinois.edu//quadrics/index.html

# دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی

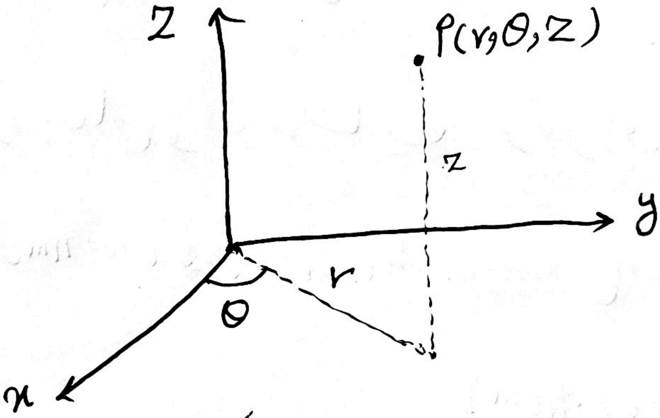
در فضای سه بعدی دستگاه‌های مختصات زیر را داریم:

الف: دستگاه مختصات دکارتی

ب: دستگاه مختصات استوانه‌ای

ج: دستگاه مختصات کروی

دستگاه مختصات استوانه‌ای: هر نقطه $P(x,y,z)$ در دستگاه مختصات دکارتی را می‌توان به فرم سه‌تایی $(r,\theta,z)$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای نمایش داد. که در آن $r$ و $\theta$ همان مؤلفه‌های مختصات قطبی تصویر نقطه $P(x,y,z)$ در صفحه $xy$ هستند و $z$ فاصله جهت‌دار از صفحه $xy$ تا نقطه $P$ است.

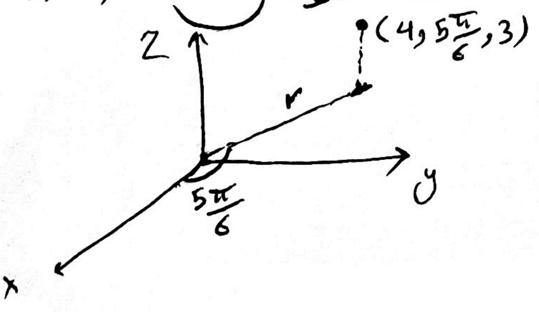



برای تبدیل مختصات استوانه‌ای به دکارتی و بالعکس از روابط زیر استفاده می‌شود:

استوانه‌ای به دکارتی
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

دکارتی به استوانه‌ای
$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ r = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ r \geq 0 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

مثال: مختصات دکارتی نقطه $(4,\frac{5\pi}{6},3)$ و مختصات استوانه‌ای نقطه $(1,\sqrt{3},2)$ را بیابید.




حل:
$$P=(4,\tfrac{5\pi}{6},3) \rightarrow \begin{cases} x = 4\cos\frac{5\pi}{6} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3} \\ y = 4\sin\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

لذا $(-2\sqrt{3}, 2, 3)$ نقطه متناظر در مختصات دکارتی است.

حال مختصات استوانه‌ای نقطه $(1, \sqrt{3}, 2)$ را می‌یابیم.

$r^2 = x^2 + y^2 \to r^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \to r = 2$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \to \theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \to \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, \ n \in Z$

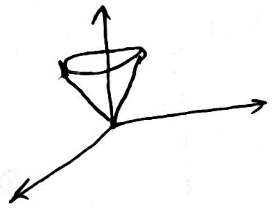
$Z = 2$ لذا نقطه $(2, 2n\pi + \frac{\pi}{3}, 2)$ مختصات استوانه‌ای نقطه $(1, \sqrt{3}, 2)$ است.

مثال: رویه‌های زیر را توصیف کنید.

1) $r = 2$ دستگاه مختصات استوانه‌ای $\Rightarrow r^2 = 4 \to x^2 + y^2 = 4 \to$ استوانه مدور

2) $r = Z$ دستگاه مختصات استوانه‌ای $\Rightarrow Z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ Z \geq 0 \to Z^2 = x^2 + y^2$

$\to$ مخروط



3) $Z = r^2 \longrightarrow Z = x^2 + y^2 \longrightarrow$ سهمی‌گون بیضوی

4) $r = 2\cos\theta \to r^2 = 2r\cos\theta \to x^2 + y^2 = 2x$

$\to x^2 - 2x + y^2 = 0 \to (x-1)^2 - 1 + y^2 = 0 \to (x-1)^2 + y^2 = 1$ استوانه

5) $r^2 - r(2\cos\theta + 3\sin\theta) + 2Z^2 - Z + 2 = 0$

$\Rightarrow r^2 - 2r\cos\theta - 3r\sin\theta + 2Z^2 - Z + 2 = 0 \to x^2 + y^2 - 2x - 3y$

$+ 2Z^2 - Z + 2 = 0 \to (x-1)^2 - 1 + (y - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 2(Z - \frac{1}{4})^2$

$- \frac{1}{8} + 2 = 0 \to \frac{(x-1)^2}{11/8} + \frac{(y - 3/2)^2}{11/8} + \frac{(Z - 1/4)^2}{11/16} = 2$

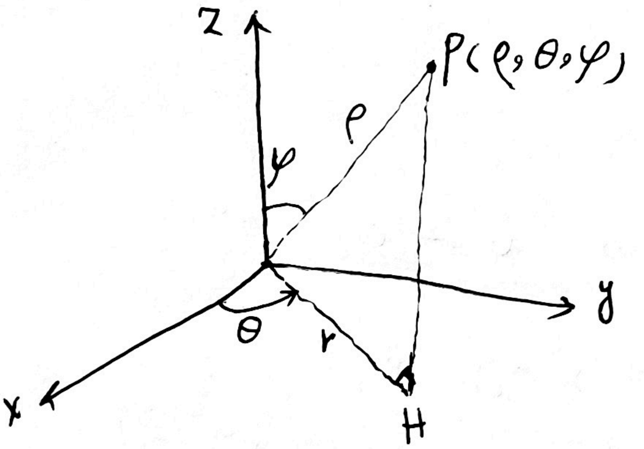
بیضی‌گون با مرکز $(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{4})$

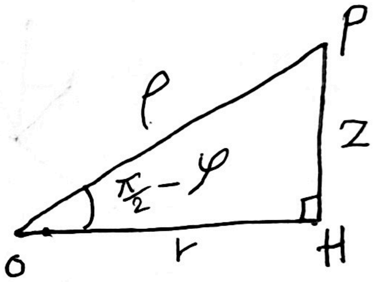
61) $Z^2 = r^2\cos 2\theta \longrightarrow Z^2 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$\longrightarrow Z^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta \longrightarrow Z^2 = x^2 - y^2 \longrightarrow Z^2 + y^2 = x^2 \longrightarrow$ مخروط

دستگاه مختصات کروی: هر نقطه $P(x,y,z)$ در دستگاه مختصات دکارتی را می‌توان به صورت سه‌تایی مرتب $(\rho,\theta,\varphi)$ در دستگاه مختصات کروی نشان داد که در آن $\rho$ فاصله نقطه $P$ تا مبدأ (یعنی $|OP|$)، $\theta$ همان زاویه در مختصات استوانه‌ای و $\varphi$ زاویه بین خط $OP$ با سمت مثبت محور $z$ هاست.

توجه شود که $\rho \geq 0$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $0 \leq \varphi \leq \pi$




از مثلث $OHP$ داریم:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{Z}{\rho} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{r}{\rho} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Z = \rho\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \Rightarrow Z = \rho\cos\varphi \\ r = \rho\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \longrightarrow r = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

درنتیجه بنابر رابطه $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ داریم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \longrightarrow x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\theta \longrightarrow y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ Z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad (*)$$

از روابط (*) داریم:

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\varphi$$

$$=\rho^2\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\rho^2\cos^2\varphi=\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi$$

$$=\rho^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=\rho^2$$

$$\Rightarrow\quad x^2+y^2+z^2=\rho^2\longrightarrow\boxed{\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

لذا برای تبدیل دستگاه مختصات دکارتی به کروی داریم:

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \cos\varphi=\dfrac{z}{\rho}\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\rightarrow\varphi=\cos^{-1}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}\longrightarrow\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\end{cases}$$

مثال: $P(1,1,0)$ را از دستگاه دکارتی به دستگاه مختصات کروی تبدیل کنید.

$$P=(1,1,0)\longrightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}\\ \theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\tan^{-1}(1)=\dfrac{\pi}{4}\\ \varphi=\cos^{-1}\left(\dfrac{0}{\sqrt{2}}\right)=\cos^{-1}(0)=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\longrightarrow P\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)=P(\rho,\theta,\varphi)$$

مثال: نقطهٔ $\left(2,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$ را از مختصات کروی به دکارتی تبدیل کنید.

حل:

$$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta=2\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta=2\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=2\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\\ z=\rho\cos\varphi=2\cos\dfrac{\pi}{3}=2\left(\dfrac{1}{2}\right)=1\end{cases}$$

لذا $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}},1\right)$ نقطهٔ متناظر در مختصات دکارتی می‌باشد.

مثال: معادله هذلولی گون دوپارچه $x^2-y^2-z^2=1$ را در مختصات کروی بنویسید.

حل: $x^2-y^2-z^2=1 \rightarrow \rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta-\rho^2\cos^2\varphi=1$

$$\Rightarrow \rho^2(\sin^2\varphi\cos 2\theta-\cos^2\varphi)=1$$

مثال: رویه $\rho=\sin\theta.\sin\varphi$ را توصیف کنید.

حل:

$$\rho=\sin\theta.\sin\varphi \longrightarrow \rho^2=\rho\sin\varphi\sin\theta$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=y \rightarrow x^2+y^2-y+z^2=0 \Rightarrow$$

$$x^2+(y-\tfrac{1}{2})^2+z^2=\tfrac{1}{4} \longrightarrow$$ کره به مرکز $(0,\tfrac{1}{2},0)$ و شعاع $\tfrac{1}{2}$

مثال رویه $2\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta+3\rho\sin^2\varphi\sin^2\theta-6\cos\varphi=0$ را توصیف کنید.

حل: با ضرب طرفین رویه فوق در $\rho$ داریم:

$$2\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+3\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta-6\rho\cos\varphi=0$$

$$\rightarrow 2x^2+3y^2-6z=0 \longrightarrow$$ سهمی گون بیضوی

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-z=0$$

مثال: رویه های زیر را توصیف کنید.

1) $\rho=2 \longrightarrow x^2+y^2+z^2=4 \longrightarrow$ کره به مرکز $(0,0,0)$ و شعاع $2$

2) $\rho=2\cos\varphi \xrightarrow{\times\rho} \rho^2=2\rho\cos\varphi \rightarrow x^2+y^2+z^2=2z$

$\rightarrow x^2+y^2+(z-1)^2=1 \longrightarrow$ کره به مرکز $(0,0,1)$ و شعاع یک

3) $\varphi=\frac{\pi}{4} \rightarrow \varphi=\cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{4}=\cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right)$

$$\rightarrow \cos\frac{\pi}{4}=\frac{z}{\rho} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=2z^2$$

$\longrightarrow x^2+y^2=z^2 \longrightarrow$ مخروط $\longrightarrow$ چون $z\geq 0$ نیم مخروط بالایی

مثال: رویه زیر را توصیف کنید:

$$\rho \sec\theta = \sin\varphi(1+\tan\theta) + \cos\varphi \cdot \sec\theta$$

حل:

$$\frac{\rho}{\cos\theta} = \sin\varphi + \sin\varphi \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \xrightarrow{\times \rho\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \rho^2 = \rho\sin\varphi\cos\theta + \rho\sin\varphi\sin\theta + \rho\cos\varphi \Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2 = x+y+z \to (x-\tfrac{1}{2})^2+(y-\tfrac{1}{2})^2+(z-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{3}{4}$$

کره ای به مرکز $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال: رویه زیر را توصیف کنید:

$$r = \frac{2}{2-\cos\theta}$$

حل:

$$r = \frac{2}{2-\cos\theta} \Rightarrow 2r - r\cos\theta = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2} - x = 2$$

$$\to 2\sqrt{x^2+y^2} = 2+x \Rightarrow 4x^2+4y^2 = (x+2)^2$$

$$\to 4x^2+4y^2 = x^2+4x+4 \longrightarrow 3x^2+4y^2-4x=4$$

استوانه ای که مولد آن محور z ها است.

مثال: رویه زیر را توصیف کنید:

$$r^2+z^2 = 4r\cos\theta + 6r\sin\theta + 2z$$

حل:

$$x^2+y^2+z^2 = 4x+6y+2z \longrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=14 \to \text{کره}$$

مثال: رویه $x^2-y^2=z^2$ را در مختصات کروی بیان کنید.

حل:

$$x^2-y^2=z^2 \longrightarrow \rho^2\cos^2\theta\cdot\sin^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta = \rho^2\cos^2\varphi$$

$$\Rightarrow \sin^2\varphi(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = \cos^2\varphi \Rightarrow \cos 2\theta = \cot^2\varphi$$

# تمرینات درس پنجم

1: رویه $z^2 = r^2 + (r^2+z^2)^{3/2}$ را در دستگاه مختصات کروی بنویسید.

2: رویه $\rho^2 = -\sec 2\varphi$ را توصیف و رسم کنید.

3. رویه زیر را توصیف و رسم کنید.

$$\sec\theta(\cos 2\theta - \cot^2\varphi) = \frac{\csc\varphi}{\rho}$$

4. فاصله بین دو نقطه $P(x,y,z)$ و $P'(x',y',z')$ را برحسب مختصات استوانه‌ای و کروی بیابید.

5. رویه $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ را توصیف و رسم کنید.

6. دستگاه همزمانی $\begin{cases} z = r \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ را توصیف کنید.

7. دستگاه همزمانی $\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{4} \\ \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ را توصیف کنید.

(راهنمایی $r = \rho\sin\varphi$ و $z = \rho\cos\varphi$)

8. دستگاه همزمانی $\begin{cases} \rho = 4\cos\varphi \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ را توصیف کنید.

# فصل سوم: توابع برداری

تعریف تابع برداری: هر تابع $r: R \longrightarrow R^n$ که دامنه آن در $R$ و برد آن در $R^n$ باشد را یک تابع برداری گویند که در حالت کلی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$r(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

که در آن $f_i$ ها به ازای $i=1,\dots,n$ توابع حقیقی از $R$ به $R$ هستند و به توابع مؤلفه‌ای معروف‌اند.

یک تابع برداری سه‌بعدی $r: R \longrightarrow R^3$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$r(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

که به هر عدد حقیقی مانند $t$ یک بردار در فضا و صفحه نسبت می‌دهد. به $r(t)$ معادله پارامتری خم نیز گویند.

تعبیر هندسی: هنگامی که جسمی در فضا حرکت می‌کند معادلات

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

که بیانگر مختصات جسم به عنوان تابعی از زمان هستند به صورت پارامتری برای توصیف مسیر حرکت جسم به کار می‌روند که آن‌ها را می‌توان به فرم $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ نوشت و موقعیت ذره را به عنوان تابعی از زمان نشان می‌دهند. به این‌گونه توابع معادلات حرکت نیز می‌گویند.

دامنه تابع برداری: اشتراک دامنه توابع مؤلفه‌ای متناظر، دامنه تابع برداری را تشکیل می‌دهد. یعنی

$$D_{r(t)} = D_{f_1(t)} \cap D_{f_2(t)} \cap \dots \cap D_{f_n(t)}$$

مثال. دامنه تابع برداری $r(t) = (t^3, \ln(3-t), \sqrt{t})$ را بیابید.

حل: داریم:

$$D(t^3) = R \quad , \quad D(\ln(3-t)) = (-\infty, 3) \quad , \quad D(\sqrt{t}) = [0, \infty)$$

لذا

$$D_{r(t)} = R \cap (-\infty, 3) \cap [0, \infty) = [0, 3)$$

نمودار توابع برداری: اگر $t_0$ یک نقطه از ناحیه تعریف شده تابع برداری $r(t)$ باشد آن‌گاه

$$r(t_0) = (f(t_0), g(t_0), h(t_0))$$

یک بردار ثابت در فضا است که موقعیت نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ با

$$\begin{cases} x_0 = f(t_0) \\ y_0 = g(t_0) \\ z_0 = h(t_0) \end{cases}$$

را مشخص می‌کند.

مجموعه C تشکیل شده از همه نقاط $(x,y,z)$ به صورت
$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases}$$
را یک منحنی فضایی گویند. در واقع مجموعه C اثر حرکت یک ذره در هر لحظه از زمان $t$ است که در موقعیت $(f(t),g(t),h(t))$ قرار دارد و $r(t)$ بردار موقعیت ذره در هر لحظه $t$ است.

مثال: منحنی تابع برداری $r(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$ را رسم کنید.

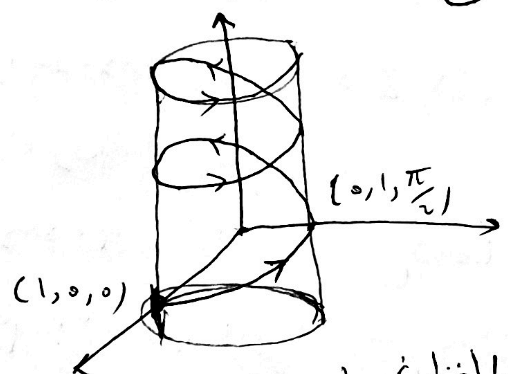
حل: معادله پارامتری این منحنی عبارت است از
$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=t \end{cases}$$
چون $x^2+y^2=1$ لذا منحنی روی استوانه دایره‌ای $x^2+y^2=1$ قرار دارد.

به ازای $t$ های مختلف مختصات $r(t)$ را می‌یابیم.

$t=0 \rightarrow r(t)=(1,0,0)$

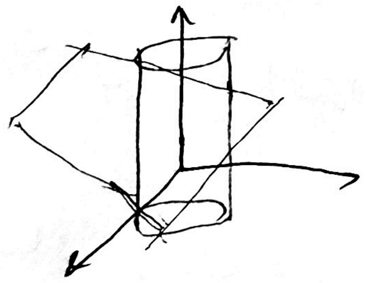
$t=\frac{\pi}{2} \rightarrow r(t)=(0,1,\frac{\pi}{2})$

$t=\pi \rightarrow r(t)=(-1,0,\pi)$




در نتیجه منحنی مورد نظر یک مارپیچ دوار رو به بالا با افزایش $t$ می‌باشد.

مثال: معادله تابع برداری که نشان دهنده منحنی حاصل از محل تقاطع صفحه $y+z=2$ با استوانه $x^2+y^2=1$ است را بیابید.



حل: چون $x^2+y^2=1$ لذا تصویر منحنی C در صفحه $xy$، دایره $x^2+y^2=1$ با $z=0$ است یعنی

$x=\cos t$ و $y=\sin t$ $\quad 0\le t\le 2\pi$

از طرفی از معادله صفحه داریم

$z=2-y=2-\sin t$

لذا معادله پارامتری منحنی C به صورت زیر است:

$x=\cos t$ و $y=\sin t,\ z=2-\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$

در نتیجه معادله برداری متناظر عبارت است از

$r(t)=(\cos t, \sin t, 2-\sin t)$

مثال: معادله $2y^2-x^2=3$ را پارامتری کنید.

حل:
$$2y^2-x^2=3 \rightarrow \frac{2y^2}{3}-\frac{x^2}{3}=1 \rightarrow \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)^2-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=1$$
$$\rightarrow \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\cosh t \rightarrow y=\sqrt{\frac{3}{2}}\cosh t \\ \frac{x}{\sqrt{3}}=\sinh t \rightarrow x=\sqrt{3}\sinh t \end{cases} \rightarrow r(t)=(x(t),y(t))=\sqrt{3}\sinh t\,\vec{i}+\sqrt{\frac{3}{2}}\cosh t\,\vec{j}$$

مثال: بیضی $3x^2+4y^2=4$ را پارامتری کنید.

حل:

$$3x^2+4y^2=4 \to \frac{x^2}{\frac{4}{3}}+y^2=1 \to \left(\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2+y^2=1$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\cos t \to x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \to r(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$$

مثال: فصل مشترک دو رویه $\begin{cases} x+2y+4z=4 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ را بیابید.

حل:

$$x^2+4y^2=4 \to \frac{x^2}{4}+y^2=1 \to x=2\cos t \,,\, y=\sin t$$

$$x+2y+4z=4 \to z=\frac{1}{4}(4-x-2y)=1-\frac{1}{4}(2\cos t+2\sin t)$$

لذا فصل مشترک به صورت $r(t):R\longrightarrow R^3$ و به صورت زیر است

$$r(t)=\left(2\cos t,\ \sin t,\ 1-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)\right)$$

حد توابع برداری: اگر $r(t)=(f(t),g(t),h(t))$ یک تابع برداری باشد آنگاه

$$\lim_{t\to t_0} r(t)=\left(\lim_{t\to t_0} f(t),\ \lim_{t\to t_0} g(t),\ \lim_{t\to t_0} h(t)\right)$$

یعنی حد تابع برداری $r$ در نقطه $t=t_0$ برابر با حد توابع مولفه متناظر در $t=t_0$ است.

مثال: اگر $r(t)=(1+t^3)i+te^{-t^2}j+\frac{\sin t}{t}k$ مطلوبست $\lim_{t\to 0} r(t)$

حل: داریم

$$\lim_{t\to 0} r(t)=\left(\lim_{t\to 0}(1+t^3)\right)\vec{i}+\lim_{t\to 0}(te^{-t^2})\vec{j}+\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\vec{k}$$

$$=\vec{i}+0\vec{j}+\vec{k}$$

مثال: $\lim_{t\to 1} r(t)$ را برای بیابید که در آن

$$r(t)=\left(\frac{t^2-1}{t-1}\right)\vec{i}+\frac{e^{t-1}}{t}\vec{j}+\frac{t}{1-t}\vec{k}$$

حل: چون $\lim_{t\to 1}\frac{t}{1-t}$ موجود نمی‌باشد. لذا $\lim_{t\to 1} r(t)$ موجود نیست.

پیوستگی توابع برداری: تابع برداری $r(t)=(x(t), y(t), z(t))$ در نقطه $t=t_0$ از دامنه پیوسته است اگر حد $r(t)$ در $t=t_0$ موجود و با مقدار آن در نقطه $t=t_0$ برابر باشد یعنی

$$\lim_{t\to t_0} r(t) = r(t_0)$$

توجه شود که تابع برداری $r(t)$ در $t=t_0$ پیوسته است اگر و فقط اگر مؤلفه‌های متناظر در $t=t_0$ پیوسته باشند.

مثال: پیوستگی تابع $r(t)=\frac{1}{2t-1}\vec{i}+\frac{\sin t}{t}\vec{j}+e^{t^2}\vec{k}$ را بررسی کنید.

حل: تابع $e^{t^2}$ همه جا پیوسته است و $\frac{\sin t}{t}$ در $t\neq 0$ و $\frac{1}{2t-1}$ در $t\neq\frac{1}{2}$ پیوسته هستند. لذا دامنه پیوستگی عبارت است از $R-\{0, \frac{1}{2}\}$.

مشتق تابع برداری: مشتق تابع برداری $r(t)$ با شرط وجود حد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r'(t)=\frac{dr}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{r(t+h)-r(t)}{h}$$

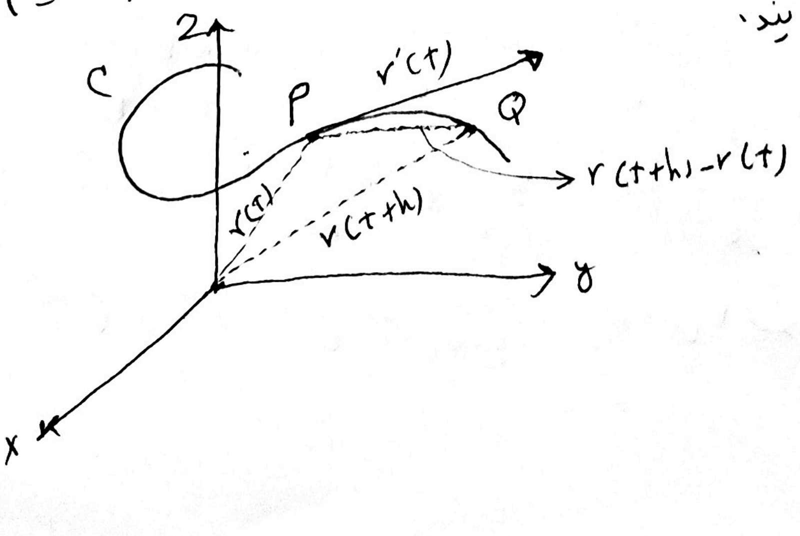
نکته: اگر $r(t)=(f(t), g(t), h(t))$ آن‌گاه $r'(t)=(f'(t), g'(t), h'(t))$

مثال: مشتق تابع برداری $r(t)=\sin 3t\, i+e^{-2t}j+\frac{2}{t^2}\vec{k}$ را در $t=1$ بیابید.

حل:

$$r'(t)=3\cos 3t\,\vec{i}-2e^{-2t}j-\frac{4}{t^3}\vec{k}\xrightarrow{t=1} r'(1)=(3\cos 3, -2e^{-2}, -4)$$

تعبیر هندسی مشتق تابع برداری: اگر $P$ و $Q$ وضعیت بردارهای $r(t)$ و $r(t+h)$ باشند، بردار $\vec{PQ}$ نمایش بردار $\Delta r=r(t+h)-r(t)$ می‌باشد و برای $h>0$ بردار $\frac{\Delta r}{r}$ بردار همسو روی منحنی در نقطه $Q$ است. اگر $h\to 0$ بردار روی خط مماس در نقطه $P$ قرار می‌گیرد، به همین دلیل $r'(t)$ بردار مماس گویند.



قواعد مشتق گیری: فرض کنید $r_1(t)$ و $r_2(t)$ توابع برداری مشتق پذیر از $t$ باشند و $f(t)$ یک تابع اسکالر مشتق پذیر و $c$ یک عدد ثابت باشد، در این صورت داریم:

1) $\frac{d}{dt}(c\,r(t)) = c\frac{dr(t)}{dt}$

2) $\frac{d}{dt}(r_1(t) \pm r_2(t)) = \frac{dr_1(t)}{dt} \pm \frac{dr_2(t)}{dt}$

3) $\frac{d}{dt}(r_1(t)\cdot r_2(t)) = \frac{dr_1(t)}{dt}\cdot r_2(t) + r_1(t)\frac{d}{dt}r_2(t)$

4) $\frac{d}{dt}(r_1(t)\times r_2(t)) = \frac{dr_1(t)}{dt}\times r_2(t) + r_1(t)\times\frac{dr_2(t)}{dt}$

5) $\frac{d}{dt}(f\cdot r_1(t)) = \frac{df}{dt}r_1(t) + f\frac{dr_1(t)}{dt}$

قاعده زنجیره‌ای: اگر $r(t)$ یک تابع برداری مشتق پذیر از $t$ و $t$ خود تابعی مشتق پذیر از $s$ باشد، آن گاه

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$$

مثال، اگر $r_1(t) = e^t\vec{i} + (2t+1)\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$ و $r_2(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + 2t\vec{k}$ حاصل $\frac{d}{dt}(r_1(t)\times r_2(t))$ را در $z=0$ حساب کنید.

حل:

$r_1'(t) = e^t\vec{i} + 2\vec{j} - \sin t\,\vec{k} \longrightarrow r_1'(0) = i + 2j$

$r_2'(t) = -2\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + 2\vec{k} \Longrightarrow r_2'(0) = 2\vec{j} + 2\vec{k}$

$\frac{d}{dt}(r_1(0)\times r_2(0)) = r_1'(0)\times r_2(0) + r_1(0)\times r_2'(0)$

$r_1(0) = i + j + k$ و $r_2(0) = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(r_1(0)\times r_2(0)) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2j - 2k$$

سرعت و شتاب: فرض کنید $r(t)$ بردار موقعیت مسیر حرکت باشد. در این صورت بردار سرعت در زمان $t$ برابر $V(t) = r'(t)$ است. بنابراین بردار سرعت در هر نقطه مماس بر مسیر حرکت در جهت بردار مماس است.

شتاب: شتاب یک ذره نیز برابر با مشتق سرعت تعریف می‌شود:

$$a(t) = V'(t) = r''(t)$$

مثال: برای یک ذره با بردار وضعیت $r(t)=(1+t, t^2, -2t)$ بردار سرعت، شتاب و اندازه سرعت را بیابید.

حل: داریم:

$$V(t)=r'(t)=i+2tj-2k \rightarrow$$
$$a(t)=v'(t)=2j \rightarrow$$
$$|\bar{V}(t)|=\sqrt{1+4t^2+4}=\sqrt{5+4t^2}$$

مثال: اگر $r(t)=(t-\sin t, 1-\cos t)$، $0<t<2\pi$ در چه لحظه‌ای سرعت و شتاب بر هم عمودند؟

حل: داریم

$$V(t)=r'(t)=(1-\cos t)\vec{i}+\sin t\vec{j}$$
$$a(t)=(\sin t)\vec{i}+(\cos t)\vec{j}$$
$$a(t).\bar{V}(t)=0 \longrightarrow (1-\cos t).\sin t+\sin t.\cos t=0 \longrightarrow \sin t=0$$
$$\longrightarrow t=\pi$$

قضیه: هرگاه $r(t)$ یک تابع برداری با اندازه ثابت باشد، آن گاه $r'(t)$ و $r(t)$ بر هم عمودند.

$$|r(t)|=c \longrightarrow r(t)\perp r'(t)$$

اثبات: فرض کنید اندازه $r(t)$ ثابت باشد

$$r(t).r(t)=|r(t)|^2=c^2 \longrightarrow \frac{d}{dt}(r(t).r(t))=0$$
$$\longrightarrow r'(t).r(t)+r(t).r'(t)=0 \longrightarrow 2r'(t).r(t)=0 \longrightarrow r(t).r'(t)=0$$
$$\longrightarrow r(t)\perp r'(t)$$

مثال: فرض کنید $r(t)=\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}$ داریم $|r(t)|=1$. لذا $r(t)$ دارای اندازه ثابت است. داریم $r'(t)=\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}$. واضح است که

$$r(t)\perp r'(t) \longrightarrow r(t).r'(t)=0$$

انتگرال گیری از توابع برداری: اگر $r(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ آن گاه

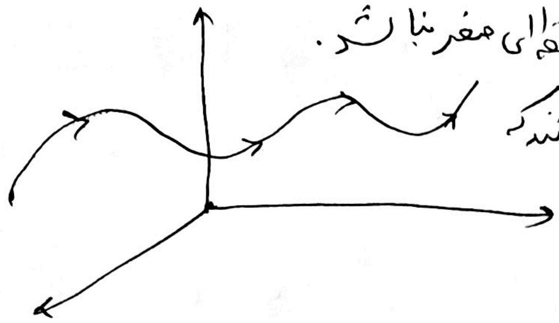
$$\int r(t)dt=\int f(t)dt\,\vec{i}+\int g(t)dt\,\vec{j}+\int h(t)dt\,\vec{k}+C$$

مثال: اگر $r'(t)=\cos t\vec{i}-\sin t j+k$. بردار موقعیت ذره $(r(t))$ را در صورتیکه $r(0)=2i+k$ بیابید.

حل:

$$r'(t)=\cos t\vec{i}-\sin t j+k \longrightarrow r(t)=\int r'(t)dt=\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+tk+C$$
$$\xrightarrow{r(0)=2i+k} 2i+k=\sin 0\,\vec{i}+\cos 0\,\vec{j}+0\vec{k}+C \longrightarrow 2i+k=C+j$$
$$\longrightarrow C=2i-j+k \longrightarrow r(t)=(\sin t+2)\vec{i}+(\cos t-1)\vec{j}+(t+1)k$$

تعریف: مسیر پیموده شده توسط تابع برداری $r(t)$ را یک مسیر (منحنی) هموار گوییم درصورتیکه $r(t)$ دارای مشتق پیوسته باشد و مشتق آن در هیچ نقطه‌ای صفر نباشد.



تذکر: منحنی‌های هموار (توابع برداری هموار) منحنی‌هایی هستند که دارای شکستگی و گوشه تیز نیستند.

طول قوس: فرض کنید ذره‌ای در مسیر $r(t)=(f(t), g(t), h(t))$ ، $a \leq t \leq b$ در حال حرکت است. درحالتی که $f'$ و $g'$ و $h'$ پیوسته باشند، طول مسافتی که ذره فوق از مکان $a$ تا مکان $b$ را می‌پیماید طول قوس گویند و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$L=\int_a^b |r'(t)|\,dt=\int_a^b |V(t)|\,dt=\int_a^b \sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2+h'(t)^2}\,dt$$

مثال: طول یک دور گردش (طول قوس) مارپیچ زیر را حساب کنید

$$r(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin\,\vec{j}+t\,\vec{k} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

حل: هنگامی که $t$ از $0$ تا $2\pi$ تغییر کند مارپیچ یک دور کامل می‌زند.

$$L=\int_0^{2\pi} |r'(t)|\,dt=\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1}\,dt=\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt=2\pi\sqrt{2}$$

پارامتر سازی تابع برداری برحسب طول قوس:

تابع طول قوس: $S(t)=\int_{t_0}^{t} |V(\tau)|\,d\tau=\int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(\tau)^2+y'(\tau)^2+z'(\tau)^2}\,d\tau$

در ت $\dfrac{ds}{dt}=|V(t)|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}>0 \longrightarrow \dfrac{ds}{dt}=|\vec{V}(t)|$

درنتیجه $s$ تابع صعودی از متغیر $t$ است. لذا یک به یک است و درنتیجه معکوس پذیر است. و داریم

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{|V(t)|}$$

مثال: اگر $t_0 = 0$ باشد پارامتر طول قوس در طول مارپیچ $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$

از $t_0$ تا $t$ را بیابید و سپس $r(t)$ را برحسب $s$ پارامتری کنید.

حل. داریم:

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} |V(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{2}\, d\tau = \sqrt{2}\, t$$

واضح است که آنگاه $t = 2\pi$ آنگاه $S(2\pi) = 2\pi\sqrt{2}$.

داریم:

$$S(t) = \sqrt{2}\, t \longrightarrow t = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

$$\longrightarrow r(S) = \left(\cos\frac{S}{\sqrt{2}}\right)\vec{i} + \sin\frac{S}{\sqrt{2}}\,\vec{j} + \frac{S}{\sqrt{2}}\,\vec{k}$$

مثال: طول خم $y = f(x)$، $a \leq x \leq b$ را بدست آورید.

حل: ابتدا خم را پارامتری می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \longrightarrow r(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b$$

$$\rightarrow L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

مثال: محیط یک دایره به شعاع $a$ را محاسبه کنید.

حل: داریم $x^2 + y^2 = a^2$ لذا قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \longrightarrow r(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$$

$$\rightarrow \text{محیط} = \text{طول خم} = L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2}\, dt = 2\pi a$$

# کنج فرنه (دستگاه TNB)

برای بررسی حرکت یک جسم در فضا سه بردار دوبه‌دو متعامد را معرفی می‌کنیم که همراه با منحنی در فضا حرکت می‌کنند.

1. بردار مماس: فرض کنید $r(t)$ یک منحنی فضایی باشد، در این صورت بردار مماس یکانی بر منحنی در هر نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} \qquad (\mathrm{I})$$

توجه شود چون بردار مماس $T$ یکانی است $(|T|=1)$ داریم:

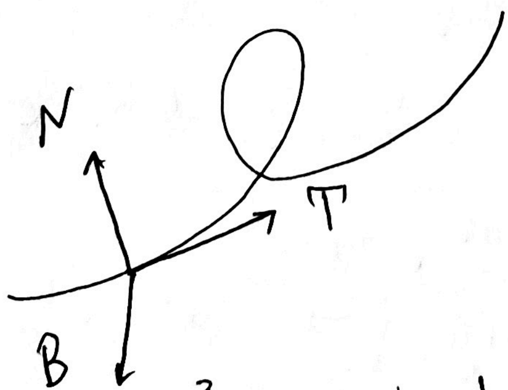
$$T\cdot T = 1 \rightarrow (T\cdot T)' = 0 \rightarrow T'\cdot T + T\cdot T' = 0 \Rightarrow T \perp T'$$

2. در نتیجه بردار $T'$ بر $T$ عمود است. لذا بردار یکانی زیر که به آن بردار قائم اول گویند بر $T$ عمود است:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} \qquad (\mathrm{II})$$

3. همچنین با توجه به خاصیت ضرب خارجی، بردار یکانی زیر بر بردارهای $T$ و $N$ عمود است که به آن بردار قائم دوم گویند:

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$




نکته: سه تایی $T$، $N$ و $B$ که یک پایه برای فضای $R^3$ تشکیل می‌دهند را دستگاه TNB یا کنج فرنه گویند.

مثال: دستگاه $TNB$ را برای منحنی زیر بیابید:

$$r(t)=(t+\cos t)\vec{i}+(t-\cos t)\vec{j}+\sqrt{2}\sin t\,\vec{k}$$

حل: داریم:

$$r'(t)=(1-\sin t)\vec{i}+(1+\sin t)\vec{j}+\sqrt{2}\cos t\,\vec{k}$$

$$|r'(t)|=\sqrt{(1-\sin t)^2+(1+\sin t)^2+(\sqrt{2}\cos t)^2}=2$$

لذا

$$T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=\frac{1}{2}(1-\sin t)\vec{i}+\frac{1}{2}(1+\sin t)\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\,\vec{k}$$

همچنین داریم:

$$T'(t)=-\frac{\cos t}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\cos t\,\vec{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\,\vec{k} \quad \text{و} \quad |T'(t)|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

لذا

$$N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\vec{j}-\sin t\,\vec{k}$$

بردار قائم اول است.

همچنین بردار قائم دوم از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$B(t)=T(t)\times N(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-\sin t & 1+\sin t & \sqrt{2}\cos t \\ -\cos t & \cos t & -\sqrt{2}\sin t \end{vmatrix}=$$

$$-\frac{(1+\sin t)}{2}i-\frac{(1-\sin t)}{2}j+\frac{\cos t}{\sqrt{2}}k$$

مثال: کنج خزنده مارپیچ زیر را در $z=0$ بیابید.

$$r(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+bt\,\vec{k}$$

حل: بردار یکانی مماس:

$$T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=\frac{-a\sin t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j}+b\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$T(0)=\frac{a\vec{j}+b\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\left(0,\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

بردار قائم اول:

$$N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}=\frac{\frac{-a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i}-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{j}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

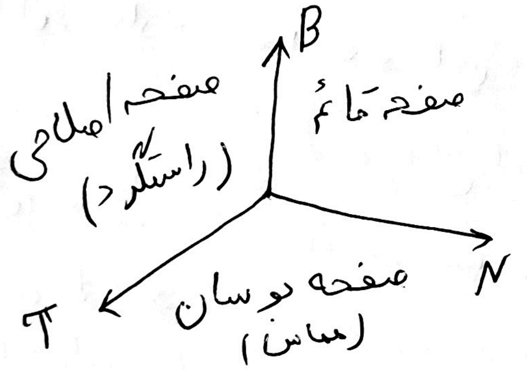
$$\rightarrow N(t)=-\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}\Longrightarrow N(0)=-\vec{i}$$

$$\rightarrow B(t)=T(t)\times N(t)=\cdots$$

$$B(0)=T(0)\times N(0)=\left(0,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\times(-1,0,0)$$

$$=\left(0,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

سه بردار $T$ و $N$ و $B$ سه صفحه به شکل زیر بوجود می‌آورند:




صفحه بوسان: توسط $T$ و $N$ بوجود می‌آید و $B$ بردار نرمال آن است

صفحه قائم: توسط $B$ و $N$ بوجود می‌آید و $T$ بردار قائم بر آن است.

صفحه اصلاحی: توسط $T$ و $B$ بدست می‌آید و $N$ بردار قائم بر آن است.

توجه شود که داریم: $T\times N=B,\quad N\times B=T,\quad B\times T=N$

مثال: معادله صفحه بوسان خم $r(t)=-3\cos t\,\vec{i}+3\sin t\,\vec{j}+4t\,\vec{k}$ را در $z=\frac{\pi}{2}$ بیابید.

حل: مشابه مثال قبل داریم:

$$r'(t)=3\sin t\,\vec{i}+3\cos t\,\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\rightarrow T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=\frac{3}{5}\sin t\,\vec{i}+\frac{3}{5}\cos t\,\vec{j}+\frac{4}{5}\vec{k}$$

$$N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}=\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}$$

$$B=T\times N=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{3}{5}\sin t & \frac{3}{5}\cos t & \frac{4}{5} \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}=\frac{4}{5}\sin t\,\vec{i}+\frac{4}{5}\cos t\,\vec{j}-\frac{3}{5}\vec{k}$$

$$B\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{5}i-\frac{3}{5}k$$

لذا بردار نرمال صفحه بوسان $\left(\frac{4}{5},0,-\frac{3}{5}\right)$ است. همچنین در $t=\frac{\pi}{2}$ داریم

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\vec{i}+3\vec{j}+2\pi\vec{k}$$

لذا نقطه $P_0(0,3,2\pi)$ یک نقطه از صفحه مورد نظر است.

در نتیجه معادله صفحه بوسان عبارتست از

$$\frac{4}{5}(x-0)+0(y-3)-\frac{3}{5}(z-2\pi)=0$$

مثال: معادله صفحات بوسان، قائم و راستگرد مارپیچ زیر را در $t=0$ بیابید.

$$r(t)=2\cos t\,\vec{i}+2\sin t\,\vec{j}+t\,\vec{k}$$

حل: نقطه مورد نظر در صفحات ذکر شده

$r(0)=(2,0,0)$ می باشد.

از طرفی داریم:

$$T(t)=\frac{-2}{\sqrt5}\sin t\,\vec{i}+\frac{2}{\sqrt5}\cos t\,\vec{j}+\frac{1}{\sqrt5}\vec{k}\longrightarrow T(0)=\frac{2}{\sqrt5}j+\frac{1}{\sqrt5}\vec{k}$$

$$N(t)=-\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}\longrightarrow N(0)=-\vec{i}$$

$$B(0)=T(0)\times N(0)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{\sqrt5}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt5}\vec{k}$$

$$\begin{cases} \text{صفحه بوسان}: 0(x-2)-\frac{1}{\sqrt5}(y-0)+\frac{2}{\sqrt5}(z-0)=0\longrightarrow -\frac{1}{\sqrt5}y+\frac{2}{\sqrt5}z=0 \\ \text{صفحه قائم}: 0(x-2)+\frac{2}{\sqrt5}(y-0)+\frac{1}{\sqrt5}(z-0)=0\rightarrow \frac{2}{\sqrt5}y+\frac{1}{\sqrt5}z=0 \\ \text{صفحه راستگرد}: -1(x-2)+0(y-0)+0(z-0)=0\longrightarrow x=2 \end{cases}$$

# تمرینات درس ششم

1. طول قوس منحنی زیر را بیابید:

$$r(t) = t\cos t\,\vec{i} + t\sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

2. مشتق تابع برداری زیر را بیابید:

$$r(t) = \left(\int_0^t e^{x^2}dx\right)\vec{i} + \left(\int_1^{t^2} \frac{1}{1+x^2}\,dx\right)\vec{j} + \left(\int_1^{t^3} \sin(x^2 t)\,dx\right)\vec{k}$$

راهنمایی:

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,dt\right)' = v' f(x,v) - u' f(x,u) + \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

3. هموار بودن تابع برداری زیر را بررسی کنید:

$$r(t) = e^t \sin t\,\vec{i} + e^t \cos t\,\vec{j}$$

4. مارپیچ زیر را بر حسب طول قوس پارامتری کنید:

$$r(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$$

5. مطلوبست محاسبه $T$ و $N$ و $B$ (کنج فرنه) تابع برداری زیر در $t=0$.

$$r(t) = \left(\int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx\right)\vec{i} + \left(\int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx\right)\vec{j} + \sqrt{3}\,t\,\vec{k}$$

6. کنج فرنه منحنی حاصل از تقاطع دو منحنی زیر را بیابید. به علاوه صفحه بوسان، صفحه قائم و صفحه راستگرد تابع پارامتری حاصل را در $z=2$ بیابید.

(راهنمایی. از روابط فوق داریم $x=\pm 1$)

$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases}$$

# انحنا و تاب

انحنا: نشان می‌دهد که یک ذره چه اندازه به چپ یا راست متمایل می‌شود. به عبارت دیگر میزان انحراف یک منحنی از خط مماس را انحنای منحنی (خمیدگی) در هر نقطه گوییم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K = \left|\frac{dT}{ds}\right| \quad (\text{کاپا})$$

توجه شود که:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = T'(t)\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

اما چون $\frac{ds}{dt} = |r'(t)|$ (بنا به رابطه تابع طول قوس). لذا داریم:

$$K = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}$$

مثال. انحنای یک خط را بیابید.

حل: می‌دانیم فرم پارامتری خط به صورت

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

است

لذا معادله برداری خط به صورت

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
$$= (x_0 + at)\vec{i} + (y_0 + bt)\vec{j} + (z_0 + ct)\vec{K}$$

است.

لذا

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{ai + bj + ck}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

لذا

$$K(t) = \left|\frac{T'(t)}{r'(t)}\right| = \frac{0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 0$$

بنابراین انحنا (خمیدگی) یک خط برابر صفر است.

مثال: انحنای یک دایره به شعاع $a$ را بیابید.

حل: می‌دانیم معادله پارامتری دایره به صورت

$$r(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$$

است. لذا

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{-a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j}}{a} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$$

$$\rightarrow T'(t) = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} \Longrightarrow |T'(t)| = 1$$

$$\rightarrow K = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|} = \frac{1}{a}$$

شعاع انحنا: شعاع انحنای یک منحنی از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\rho = 1/K$$

از معادله انحنای دایره مشخص است که هرچه مقدار شعاع دایره بیشتر باشد انحنای آن کمتر است و هرچه شعاع کمتر باشد انحنای آن بیشتر خواهد بود.

مثال: انحنای مارپیچ زیر را بیابید.

$$r(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$$

حل: مشابه با مثال قبلی، انحنا را می‌توان بدست آورد و داریم:

$$K = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

مثال: انحنای حاصل از معادله پارامتری مقطع رویه‌های زیر را در نقطه $(1, 2, 3)$ بیابید

$$\begin{cases} xy = 2 \\ yz = 3 \end{cases}$$

حل: قرار می‌دهیم $x = t$. لذا داریم $y = \frac{2}{t}$ و از رابطه دوم داریم

$$z = 3/y \longrightarrow z = \frac{3}{2}t$$

لذا معادله پارامتری مقطع این رویه‌ها عبارتست از

$$r(t) = t\,\vec{i} + \frac{2}{t}\,\vec{j} + \frac{3}{2}t\,\vec{k}$$

71

از آنجایی که $x=t$ لذا انحنا را باید در $t=2$ بدست آوریم.

داریم:

$$r(t) = t\vec{i} + \frac{2}{t}\vec{j} + \frac{3}{2}t\vec{k}$$

$$\rightarrow r'(t) = \vec{i} - \frac{2}{t^2}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k} \rightarrow |r'(t)| = \sqrt{1+\frac{4}{t^4}+\frac{9}{4}}$$

$$\rightarrow |r'(t)| = |r'(2)| = \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$\rightarrow T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{4}{\sqrt{14}\,t^2}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

$$\rightarrow T'(t) = \frac{8}{\sqrt{14}\,t^3}\vec{j} \longrightarrow |T'(t)| = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\rightarrow k = \frac{|T'(2)|}{|r'(2)|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{14}}}{\frac{\sqrt{14}}{2}} = 2$$

مثال: اگر $a>0$، انحنا و شعاع انحنای منحنی زیر را بیابید.

$$r = a\cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + a\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j}$$

حل: (نکته) توجه شود:

$$T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{\frac{dr}{dt}}{|r'(t)|} = \frac{\frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}}{|r'(t)|} = \frac{\frac{dr}{ds}\cdot|r'(t)|}{|r'(t)|}$$

$$\longrightarrow \boxed{T = \frac{dr}{ds}} \Rightarrow k = \left|\frac{dT}{ds}\right|$$

$$\rightarrow T = -\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j} \Rightarrow \frac{dT}{ds} = -\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a}\,\vec{i} - \frac{1}{a}\sin\frac{s}{a}$$

$$\rightarrow k = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\left(\frac{s}{a}\right) + \frac{1}{a^2}\sin^2\left(\frac{s}{a}\right)} = \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow \rho = \frac{1}{k} = a$$

نکته: انحنای یک منحنی داده شده با تابع برداری $r(t)$ به صورت زیر نیز محاسبه می‌شود:

$$K = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \frac{|V(t) \times a(t)|}{|V(t)|^3} \quad (*)$$

مثال: انحنای خم مسطح زیر را در $t=1$ بیابید.

$$r(t) = 2\ln t\,\vec{i} - \left(t + \frac{1}{t}\right)\vec{j}$$

حل:

$$r(t) = 2\ln t\,\vec{i} - \left(t+\frac{1}{t}\right)\vec{j} \longrightarrow V(t) = r'(t) = \frac{2}{t}\vec{i} + \left(-1+\frac{1}{t^2}\right)\vec{j}$$

$$\longrightarrow a(t) = r''(t) = -\frac{2}{t^2}\vec{i} - \frac{2}{t^3}\vec{j}$$

$$V(1) = 2\vec{i} \longrightarrow |V| = 2$$

$$|V \times a(1)| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right\| = |-4\vec{k}| = 4$$

$$\rightsquigarrow K = \frac{|V\times a|}{|V|^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

انحنا منحنی در صفحه: اگر یک منحنی با معادله $y=f(x)$ داده شده باشد می‌توان آن را به صورت $r(x) = x\,i + f(x)\,j$ پارامتری کرد. لذا داریم $r'(x) = i + f'(x)\,j$ و $r''(x) = f''(x)\,j$. درنتیجه با جایگذاری این مقادیر در معادله $K = \frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{|1+f'(x)^2|^{3/2}}$$

مثال: مقدار انحنای تابع $y=e^x$ را بیابید و بررسی کنید در چه نقطه‌ای انحنای آن بیشینه است

حل:

$$K = \frac{|f''(x)|}{|1+f'(x)^2|^{3/2}} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$$

برای بررسی اینکه انحنا در چه نقطه‌ای مینیمم می‌شود مشتق انحنا را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا نقاط بحرانی بدست آیند و از بین آن‌ها مینیمم را انتخاب می‌کنیم.

$$\frac{dK}{dx}=0 \longrightarrow \frac{dK}{dx}=\frac{e^{x}(1+e^{2x})^{3/2}-\frac{3}{2}\times 2e^{2x}e^{x}(1+e^{2x})^{1/2}}{(1+e^{2x})^{3}}$$

$$\longrightarrow e^{x}(1+e^{2x})^{3/2}=3e^{3x}(1+e^{2x})^{1/2}\longrightarrow 1+e^{2x}=3e^{2x}$$

$$\rightsquigarrow e^{2x}=\frac{1}{2}\rightarrow 2x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\rightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

لذا در نقطه فوق $K$ مینیمم می‌شود.

انحنای یک منحنی پارامتری: اگر منحنی به فرم پارامتری $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ داده شده باشد

در این حالت بنا به رابطه $(*)$ انحنا به صورت زیر بدست می‌آید:

$$K(t)=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

اثبات:

$$r(t)=x(t)i+y(t)j\rightarrow r'=x'i+y'j\rightarrow r''=x''i+y''j$$

$$\rightsquigarrow K=\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^{3}}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k\\ x' & y' & 0\\ x'' & y'' & 0\end{vmatrix}\right\|}{\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^{3/2}}=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

مثال: انحنای منحنی $\begin{cases}x=t\sin t\\ y=t\cos t\end{cases}$ را بیابید.

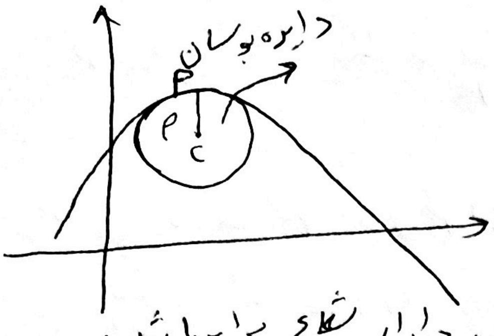
حل:

$$\begin{cases}x=t\sin t\rightarrow x'=\sin t+t\cos t\rightarrow x''=2\cos t-t\sin t\\ y=t\cos t\rightarrow y'=\cos t-t\sin t\rightarrow y''=-2\sin t-t\cos t\end{cases}$$

$$x'^2+y'^2=(\sin t+t\cos t)^2+(\cos t-t\sin t)^2=1+t^2$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} K=\frac{2+t^2}{(1+t^2)^{3/2}}$$

دایره بوسان (دایره انحنا): دایره‌ای است که شعاع آن شعاع انحنای منحنی بوده و در جهت تقعر منحنی، بر منحنی مماس است




منحنی $y=f(x)$ را در نظر بگیرید اگر در نقطه $P$ از منحنی یک دایره در جهت تقعر منحنی، بر منحنی مماس کنیم و این دایره دارای شعاعی برابر با شعاع انحنا ($r=\rho$) باشد به آن دایره بوسان گویند. داریم:

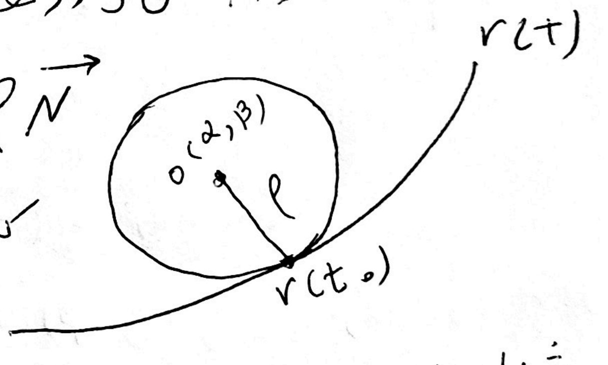
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$

روش پیدا کردن مرکز دایره بوسان:

راه اول: می‌توان نشان داد که در نقطه $P$، مشتق اول و دوم دایره بوسان با منحنی برابر است. لذا یک دستگاه دو معادله دو مجهول داریم که از آن $\alpha$ و $\beta$ بدست می‌آیند.

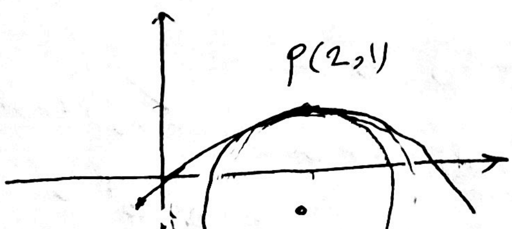
راه دوم: اگر $r(t)$ تابع برداری متناظر با منحنی مورد نظر باشد. در این صورت اگر بخواهیم دایره بوسان را در نقطه‌ی $t_0$ بیابیم مرکز آن برابر است با

$$(\alpha,\beta)=\vec{r}(t_0)+\rho\vec{N}$$




که در آن $\rho$ شعاع انحنا در $t=t_0$ و $N$ بردار قائم اول در $t=t_0$ می‌باشد.

مثال: انحنای منحنی $y=-\frac{1}{4}x^2+x$ را حساب و در نقطه $(2,1)$ دایره بوسان را بیابید




حل: چون $y'=-\frac{1}{2}x+1$ و $y''=-\frac{1}{2}$ از فرمول‌های قبلی داریم

$$K=\frac{|f''(x)|}{(1+f'^2)^{3/2}}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow K=\frac{1/2}{\left(2-x+\frac{x^2}{4}\right)^{3/2}}$$

مقدار انحنا در $x=2$ عبارت است از $K(2)=\frac{1}{2}$. لذا شعاع انحنای دایره بوسان $\rho=\frac{1}{K}=2$ خواهد بود. لذا دایره بوسان به فرم زیر است.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2=4$$

برای پیدا کردن $\alpha$ و $\beta$ از فرمول روش اول استفاده می‌کنیم:

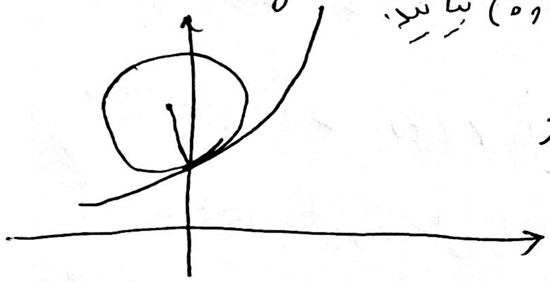
$$\begin{cases}2(x-\alpha)+2y'(y-\beta)=0\\ 2+2y''(y-\beta)+2y'^2=0\end{cases}\xrightarrow{(2,1)}\begin{cases}2(2-\alpha)+2\times 0(1-\beta)=0\\ 2+2(-\frac{1}{2})(1-\beta)+2\times 0=0\end{cases}$$

$\to \alpha=2,\ \beta=-1$

لذا معادله دایره بوسان به فرم زیر است

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4$$

مثال: معادله دایره بوسان $y=e^x$ را در نقطه $(0,1)$ بیابید.




حل: داریم

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}}$$

$$\to K(0)=\frac{1}{(1+1)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\to \rho=\frac{1}{K}=\sqrt{8}\longrightarrow$$ شعاع انحنا

دایره بوسان:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$

مرکز را از روش اول می‌یابیم:

$$\begin{cases}2(x-\alpha)+2y'(y-\beta)=0\\ 2+2y''(y-\beta)+2y'^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\alpha+2\times 1(1-\beta)=0\\ 2+2\times 1(1-\beta)+2\times(1)^2=0\end{cases}$$

$$\to \alpha=-2,\ \beta=3 \xleftrightarrow{\text{دایره بوسان}} (x+2)^2+(y-3)^2=8$$

توجه شود که اگر بخواهیم مرکز را از روش دوم بیابیم می‌توانیم تابع پارامتری را با قرار دادن $x=t$ و $y=e^t$ به صورت $r(t)=ti+e^tj$ تشکیل دهیم لذا دایره بوسان را در $t_0=x_0=0$ می‌خواهیم. از رابطه فوق داریم $\rho=\sqrt{8}$ و $r(t_0)=r(0)=(0,1)$

همچنین اگر مقدار $N$ را حساب کنیم داریم $N(0)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ لذا

$$(\alpha,\beta)=r(t_0)+\rho.N(t_0)=(0,1)+\sqrt{8}(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=(-2,3)$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2 \quad (\text{کره بوسان}) \\ + \\ \text{صفحه بوسان}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{دایره بوسان}$$

یعنی اگر صفحه بوسان، کره بوسان را قطع کند، سطح مقطع دایره بوسان را بدست می دهد
برای محاسبه مرکز کره بوسان از رابطه روبرو استفاده می کنیم

$$O(\alpha,\beta,\gamma)=r(t_0)+\rho\vec{N}$$

مثال. مطلوبست دایره بوسان معادله زیر در $t=0$.

$$r(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$$

حل: داریم

$$r(0)=(1,0,0)$$

(قبلاً این روا برای مثال های قبلی حساب شده است)

$$K=\frac{1}{2}\longrightarrow \rho=2$$

$$N(0)=(-1,0,0)$$ و $$\text{صفحه بوسان} \Rightarrow y=z$$

لذا

$$O(\alpha,\beta,\gamma)=(1,0,0)+2(-1,0,0)=(-1,0,0)$$

معادله کره بوسان:

$$(x+1)^2+y^2+z^2=4$$

$$\text{دایره بوسان}\left\{\begin{array}{l}(x+1)^2+y^2+z^2=4 \\ \text{تقاطع با} \\ y=z\end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{(x+1)^2+2y^2=4}_{\text{دایره بوسان}}$$

(توجه شود که این معادله به خودی خود دایره است اما وقتی روی صفحه $xy$ تصویر شود بیضی می شود)

تعریف تاب منحنی (پیچش): در هر نقطه $r(s)$ از منحنی $C$، آهنگ تغییر جهت بردار قائم دوم $(B)$ نسبت به فاصله جهت دار $s$ را تاب گویند. یعنی

$$(\text{تاو})\quad \tau=\left|\frac{dB}{ds}\right|$$

مثال: قطاری را در نظر بگیرید که در مسیر خود روی یک مسیر خمیده به بالا می رود. آهنگ چرخش نور چراغ جلو انحنا را نشان می دهد و آهنگ چرخش کف قطار یا میله عمود بر کف قطار همان تاب مورد نظر است. در واقع تاب میزان تاب خوردن را نشان می دهد.

محاسبه تاب برحسب $r(t)$: تاب که میزان انحراف منحنی از صفحه را نشان می‌دهد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tau = \pm\frac{(r' \times r'') \cdot r'''}{|r' \times r''|^2}$$

توجه شود که همواره $\tau \geq 0$.

نکته: اگر در تمام لحظه‌ها تاب برابر صفر شود می‌توان نتیجه گرفت که منحنی مسطح است.

مثال: تاب مارپیچ دایره‌ای زیر را بیابید.

$$r(t) = \cos t\, i + \sin t\, j + t\, k$$

حل: داریم:

$$r'(t) = -\sin t\, i + \cos t\, j + k$$

$$r''(t) = -\cos t\, i - \sin t\, j \Longrightarrow r'''(t) = \sin t\, i - \cos t\, j$$

$$(r' \times r'') \cdot r''' = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$r' \times r'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = -\sin t\, i + \cos t\, j + k \rightarrow |r' \times r''| = \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \tau = \frac{(r' \times r'') \cdot r'''}{|r' \times r''|^2} = \frac{1}{2}$$

مثال: تاب منحنی زیر را بیابید.

$$r(t) = \cos t\, \vec{i} + \sin t\, \vec{j} + \cos t\, \vec{k}$$

حل: $r'(t) = (-\sin t, \cos t, -\sin t) \Longrightarrow r''(t) = (-\cos t, -\sin t, -\cos t)$

$$\rightarrow r'''(t) = (+\sin t, -\cos t, \sin t)$$

$$\rightarrow (r' \times r'') \cdot r''' = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \\ \sin t & -\cos t & \sin t \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \tau = \frac{(r' \times r'') \cdot r'''}{|r' \times r''|^2} = 0 \longrightarrow$$ لذا منحنی مسطح است.

مثال: تاب منحنی حاصل از تقاطع رویه های زیر را بیابید.

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=z \end{cases}$$

حل: چون $x^2+y^2=1$ لذا داریم $x=\cos t$ و $y=\sin t$ و از طرف از $x=z$ داریم $z=\cos t$. در نتیجه تابع پارامتری به صورت زیر خواهد بود

$$r(t)=\cos t\, i+\sin t\, j+\cos t\, \vec{k}$$

بنا بر مثال قبلی داریم $\tau=0$.

مؤلفه های مماسی و قائم شتاب:

قبل از محاسبه مؤلفه های شتاب رابطه زیر را داریم:

$$N=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}=\frac{\frac{dT}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}}{\left|\frac{dT}{ds}\right|\left|\frac{ds}{dt}\right|}\Rightarrow N=\frac{\frac{dT}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}}{K\left|\frac{ds}{dt}\right|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dT}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=KN\left(\frac{ds}{dt}\right)} \quad (*)$$

فرض کنید تابع برداری $r(t)$ بردار مکان یک متحرک باشد. در این صورت $V(t)=r'(t)$ را بردار سرعت و $a(t)=r''(t)$ را بردار شتاب گویند. فرض کنید جسمی شتاب می گیرد. می خواهیم بدانیم که شتاب در جهت مماس بر مسیر یعنی $T$ چقدر است

$$V=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=T\cdot\frac{ds}{dt}$$

داریم $\left(T=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=\frac{\frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{dr}{ds}\right)$

با مشتق گیری از طرفین رابطه فوق داریم:

$$a=\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\left(T\cdot\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}T+\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dT}{dt}$$

$$=\frac{d^2s}{dt^2}T+\frac{ds}{dt}\left(\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}\right)\overset{(*)}{=}\frac{d^2s}{dt^2}T+\frac{ds}{dt}\left(KN\frac{ds}{dt}\right)$$

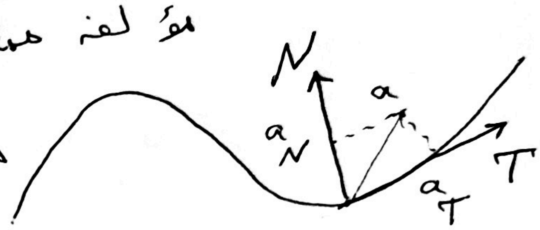
$$\Rightarrow a = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K N = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)\vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K\vec{N}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(|V(t)|\right)\vec{T} + |V|^2 K\vec{N} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}} \quad (**)$$

که در آن

$$\begin{cases} a_T = \frac{d}{dt}|V(t)| \longrightarrow \text{مؤلفه مماسی شتاب} \\ a_N = K|V|^2 \longrightarrow \text{مؤلفه قائم شتاب} \end{cases}$$




توجه شود که از رابطه $(**)$ داریم:

$$|a| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \quad (***)$$

مثال: مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب تابع برداری زیر را بیابید.

$$r(t) = (\cos t + t\sin t)\,i + (\sin t - t\cos t)\,\vec{j}$$

حل: داریم

$$V(t) = r'(t) = t\cos t\,\vec{i} + t\sin t\,\vec{j}$$

$$\rightarrow |V(t)| = t \Rightarrow a_t = \frac{d}{dt}(t) = 1$$

$$a(t) = V'(t) = (\cos t - t\sin t)\,i + (\sin t + t\cos t)\,\vec{j}$$

$$\rightarrow |a|^2 = t^2 + 1 \xrightarrow{\text{از رابطه } (***)} a_N = \sqrt{|a|^2 - a_t^2}$$

$$\rightarrow a_N = \sqrt{t^2 + 1 - 1} = t \Rightarrow a = a_t\vec{T} + a_N\vec{N}$$

$$\rightarrow a = \vec{T} + t\vec{N}$$

نکته: توجه شود که مؤلفه قائم شتاب برابر حاصلضرب انحنا در مربع سرعت است.
این موضوع نشان می‌دهد که چرا در هنگام رانندگی باید مواظب پیچهای تند $(K)$ و سرعت بالا بود.

مثال : مؤلفه‌های مماس و قائم شتاب را برای خم $f(t)=(t,t^2,2t)$ بیابید.

حل. داریم ; $V(t)=f'(t)=(1,2t,2) \longrightarrow |f(t)|=\sqrt{5+4t^2}$

$$\rightarrow a_T=\frac{d}{dt}|f(t)|=\frac{4t}{\sqrt{5+4t^2}}$$

$$a=f''(t)=(0,2,0) \longrightarrow |a|^2=4 \Rightarrow a=\sqrt{a_t^2+a_N^2}$$

$$\rightarrow 16=\frac{16t^2}{5+4t^2}+a_N^2 \longrightarrow a_N=\sqrt{16-\frac{16t^2}{5+4t^2}}$$

$$\rightarrow a=a_t\vec{T}+a_N\vec{N}$$

مثال: اگر $r(t)=t\cos t\,\vec{i}+t\sin t\,\vec{j}+t^2k$ مسیر حرکت یک منحنی باشد شتاب آن را در لحظه $t=0$ به صورت مجموع مؤلفه‌های مماسی و قائم بنویسید.

حل:

$$V(t)=r'(t)=(\cos t-t\sin t,\ \sin t+t\cos t,\ 2t)$$

$$\rightarrow |V(t)|=\sqrt{1+5t^2} \longrightarrow a_T=\frac{d}{dt}|V(t)|=\frac{5t}{\sqrt{1+5t^2}}$$

$$\rightarrow a_T(0)=0$$

$$a(t)=(-2\sin t-t\cos t)i+(2\cos t-t\sin t)j+2k$$

$$\rightarrow a(0)=2j+2k \longrightarrow |a(0)|=\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow a_N(0)=\sqrt{|a(0)|^2-a_T(0)^2}=\sqrt{8} \Rightarrow a=\sqrt{8}\vec{N}$$

# تمرینات درس هفتم

1. انحنای تابع برداری حاصل از تقاطع رویه‌های $x^2+y^2=1$ و $Z=x^2$ را بیابید.

2. معادله دایره بوسان منحنی $x=-y^2+y$ را در نقطه (۰و۱) بیابید.

3. انحنا و تاب منحنی حاصل از برخورد رویه‌های $x^2+y^2=1$ و $x+y+z=0$ را در نقطه $A$ (۰و۱و۱-) بیابید.

4. بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ را در نظر بگیرید و max انحنای آن را بیابید.

5. منحنی C با تابع برداری $\vec{r}(t)=e^t\cos t\,\vec{i}+e^t\sin t\,\vec{j}+e^t\,\vec{k}$ داده شده است

الف. انحنای منحنی را در $t=0$ بیابید.

ب. شتاب‌های مماسی و قائم را در $t=0$ بیابید.

ج. دایره بوسان را به ازای $t=0$ حساب کنید.

6. منحنی به معادله $y=x^2-\sin x$ مفروض است معادله دایره بوسان را بیابید.

7. نشان دهید مقدار تاب منحنی $r(t)=e^t i+\sqrt{2}t j+e^{-t}k$ برابر $\sqrt{2}(e^t+e^{-t})^{-2}$ است

8. فرض کنید $r=f(\theta)$ معادلات یک منحنی در فضای قطبی باشد. نشان دهید انحنای آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$K(\theta)=\frac{|2f'(\theta)^2+f(\theta)^2-f(\theta)f''(\theta)|}{|f'(\theta)^2+f(\theta)^2|^{3/2}}$$

پس مقدار انحنای منحنی $r=\sin\theta$ را بیابید.

# فصل چهارم: توابع چندمتغیره

یک تابع چندمتغیره $f$، قانونی است که به هر $n$تایی مرتب $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ از مجموعه $D_f \subseteq R^n$ عدد یکتای $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را نسبت می‌دهد. لذا دامنه تعریف تابع چندمتغیره $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ زیرمجموعه‌ای از $R^n$ و برد آن زیرمجموعه‌ای از $R$ است.

دامنه و برد توابع چندمتغیره: برای تعیین دامنه توابع چندمتغیره حقیقی باید به همان نکات مربوط به تعیین دامنه توابع تک‌متغیره توجه داشت.

مثال: دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \implies D_f = R^2 \,,\quad R_f = [0, \infty)$

2) $f(x,y) = \dfrac{1}{y^2 - x^2} \longrightarrow y^2 - x^2 = 0 \longrightarrow D_f = R^2 - \{(x,y) / y^2 = x^2\}$

$,\ R_f = R \setminus \{0\}$

3) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \longrightarrow x^2+y^2+z^2 > 0 \longrightarrow (x,y,z) \neq (0,0,0)$

$\longrightarrow D_f = R^3 - \{(0,0,0)\} \,,\quad R_f = [0, \infty)$

4) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2} \longrightarrow D_f = R^2 - \{(0,0)\}$

$\forall (x,y) \neq (0,0) \longrightarrow f = \dfrac{(x^2+y^2) - 2y^2}{x^2+y^2} = 1 - \dfrac{2y^2}{x^2+y^2} \leq 1$

$\forall (x,y) \neq (0,0) \longrightarrow f = \dfrac{-(x^2+y^2) + 2x^2}{x^2+y^2} = -1 + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} \geq -1$

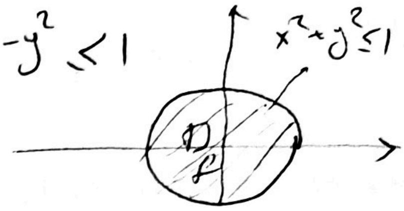
$\implies R_f = [-1, 1]$

5) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2} \longrightarrow 1-x^2-y^2 \geq 0 \longrightarrow x^2+y^2 \leq 1$

$\longrightarrow D_f=\{(x,y)\in R^2 / \ x^2+y^2\leq 1\}$ = نقاط درون یا روی دایره واحد

$\forall \ (x,y)\in D_f \rightarrow \quad 0\leq x^2+y^2\leq 1 \longrightarrow 0\leq 1-x^2-y^2\leq 1$

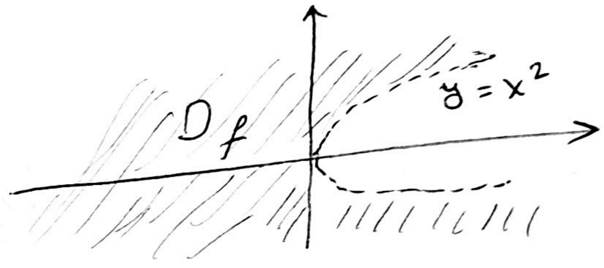
$\longrightarrow R_f=[0,1]$




6) $f(x,y)=x\cdot \ln(y^2-x) \longrightarrow D_f=\{(x,y) / \ y^2-x>0\}$

$\rightarrow D_f=\{(x,y)\in R^2 / \ y^2>x\}$

$R_f=(-\infty,\infty)$




منحنی های تراز: اگر $f$ یک تابع دو متغیره باشد و $c$ یک عدد ثابت حقیقی باشد مجموعه نقاط زیر منحنی تراز متناظر با $c$ نامیده می‌شود.

$$S_c=\{(x,y)\subset R^2 \mid f(x,y)=c\}$$

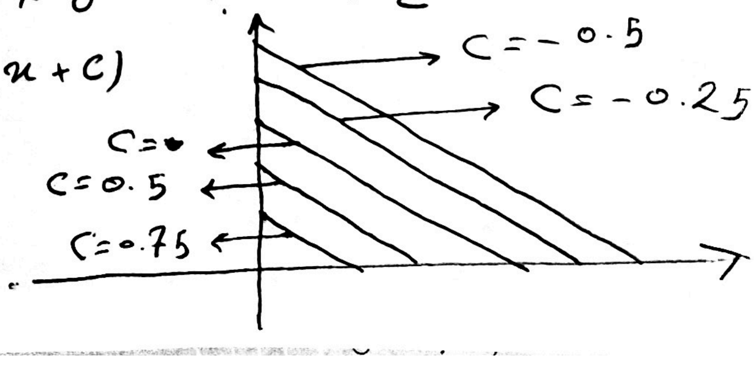
یعنی یک منحنی تراز تابع دو متغیره $f(x,y)$ منحنی است در صفحه $xy$ که توابع در تمام نقاط روی آن منحنی دارای مقادیر ثابت است.

رویه تراز (سطح تراز) توابع سه متغیره، برای توابع سه متغیره نمودار توصیف نمی‌شود. زیرا این کار مستلزم تجسم هندسی از یک فضای چهار بعدی هست. ولی برای این توابع نیز رویه تراز را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

رویه تراز به ازای مقدار ثابت $c$ $=\{(x,y,z)\in R^3 \mid f(x,y,z)=c\}$

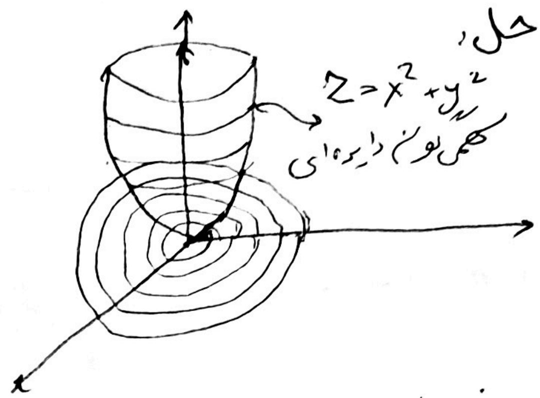
مثال. برای تابع $f$ با ضابطه $f(x,y)=1-x-y$ منحنی های تراز آن را رسم کنید.

$f(x,y)=c \longrightarrow 1-x-y=c \rightarrow y=1-(x+c)$



مثال: نمودار تابع $z=f(x,y)=x^2+y^2$ را به کمک منحنی های تراز رسم کنید.

حل:




$f(x,y)=C \longrightarrow x^2+y^2=C$

If $C<0 \longrightarrow$ (منحنی تراز وجود ندارد (تهی

If $C=0 \longrightarrow x^2+y^2=0 \longrightarrow x=y=0$

If $C>0 \longrightarrow x^2+y^2=C \longrightarrow$ دایره ای به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{C}$

مثال: رویه های تراز را در دامنه توابع مفروض مشخص کنید.

1) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} \longrightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}=C \longrightarrow x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{C}$

$C\in R^+\setminus\{0\} \longrightarrow$ رویه های تراز، کره های به مرکز مبدأ و شعاع $\dfrac{1}{\sqrt{C}}$ هستند

2) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9} \longrightarrow \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9}=C$

رویه های تراز بیضی وار $\dfrac{x^2}{25C}+\dfrac{y^2}{16C}+\dfrac{z^2}{9C}=1$ هستند.

3) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2) \longrightarrow \ln(x^2+y^2+z^2)=C$

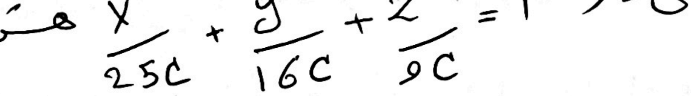
$\longrightarrow x^2+y^2+z^2=e^C \longrightarrow$ رویه های تراز کره های به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{e^C}$ هستند

حد و پیوستگی توابع چند متغیره:

مفهوم همسایگی در فضای $R^n$:

If $n=1 \longrightarrow x\in R^1 \longrightarrow N_r(\bar{x})=\{x\in R^1 \,/\, |x-\bar{x}|<r\}$

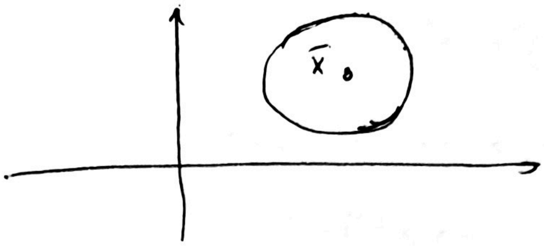
$\longrightarrow$ یک بازه.




If $n=2 \longrightarrow x\in R^2 \longrightarrow N_r(\bar{x})=\{x\in R^2 \,/\, \|x-\bar{x}\|<r\}$

$=\{(x_1,x_2)\in R^2 \,|\, \sqrt{(x_1-\bar{x}_1)^2+(x_2-\bar{x}_2)^2}<r\}$

یک دایره $= \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid (x_1-\bar{x}_1)^2 + (x_2-\bar{x}_2)^2 < r^2\} =$




If $n=3 \longrightarrow x \in R^3 \longrightarrow N_r(\bar{x}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid (x_1-\bar{x}_1)^2 + (x_2-\bar{x}_2)^2 + (x_3-\bar{x}_3)^2 < r^2\}$

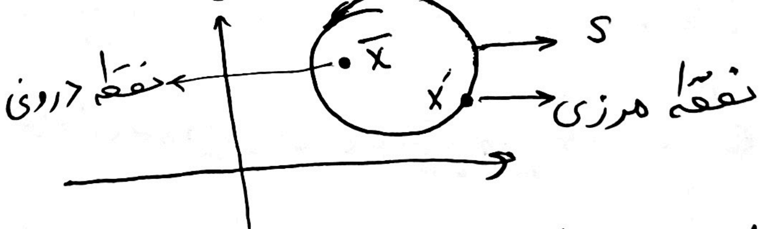
← یک کره

در حالت کلی اگر $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ ، آنگاه همسایگی به مرکز $\bar{X}$ و شعاع r به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_r(\bar{X}) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \mid \|x - \bar{X}\| < r\}$$

$$= \{x \in R^n \mid \sqrt{(x_1-\bar{x}_1)^2 + (x_2-\bar{x}_2)^2 + \dots + (x_n-\bar{x}_n)^2} < r\}$$

نقطه درونی: فرض کنید S یک مجموعه داده شده باشد. نقطه $\bar{X}$ یک نقطه درونی S است هرگاه بتوانیم یک همسایگی حول نقطه $\bar{X}$ بیابیم که تماماً در S واقع شود و نقطه $\bar{X}$ را مرزی گویند هرگاه هر همسایگی حول $\bar{X}$ شامل نقاطی از S و نقاطی خارج از S باشد.




همسایگی محذوف: با حذف نقطه $\bar{X}$ از همسایگی $N_r(\bar{X})$ ، همسایگی محذوف حاصل می‌شود.

تعریف حد: فرض کنید یک تابع n متغیره f در یک همسایگی محذوف نقطه $\bar{X} \in R^n$ تعریف شده باشد. در این صورت گوییم

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$$

هرگاه

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ s.t. if $\|x - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = \frac{0-0+3}{0+0-1} = -3$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} (x^2y+\sin xy) = 1^2\pi+\sin\pi = \pi$$

3) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-xy}{x^2-y^2} = \lim \frac{x\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x-y)}(x+y)} = \frac{1}{2}$$

4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{0}{0} \overset{\text{مبهم}}{=} \lim \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \times \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$= \lim \frac{x\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{x-y}} = 0$$

5) $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x} = \frac{0}{0} = \lim \left(\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x}\right) \times \left(\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}\right)$$

$$= \lim \frac{x+y-y}{x(\sqrt{x+y}+\sqrt{y})} = \frac{1}{2}$$

مثال: با تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

حل:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad s.t. \quad \|(x,y)-(0,0)\|<\delta \to \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\to \forall \varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad s.t. \quad \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta \to \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$$

داریم:

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| |y| \leq 1 \cdot |y| = |y| = \sqrt{y^2}$$

$$< \sqrt{x^2+y^2} < \delta \xrightarrow[\text{قرار دهیم}]{\text{لذا کافیست}} \delta \leq \varepsilon$$

مثال: نشان دهید

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3}{x^2+y^2} = 0$$

حل: فرض کنید $\varepsilon > 0$. باید $\delta > 0$ را چنان تعیین کنیم که اگر $\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$ آنگاه

$$\left|\frac{3x^3}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists \delta > 0 \ ; \ \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta \to \left|\frac{3x^3}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\xrightarrow{\text{داریم}} \left|\frac{3x^3}{x^2+y^2}\right| = 3\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right||x| \leq 3|x| \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta$$

$$< \varepsilon \longrightarrow \delta < \varepsilon/3$$

مثال: نشان دهید

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,2)} 3x - y + 4z = 12$$

حل:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{s.t.} \ \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2} < \delta$$

$$\Rightarrow |3x - y + 4z - 12| < \varepsilon$$

$$|3x-y+4z-12| = |3(x-1) - (y+1) + 4(z-2)|$$

$$\leq 3|x-1| + |y+1| + 4|z-2| = 3\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(y+1)^2} + 4\sqrt{(z-2)^2}$$

$$\leq 3\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2} + 4\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}$$

$$\leq 3\delta + \delta + 4\delta \leq \varepsilon \longrightarrow 8\delta \leq \varepsilon \longrightarrow \delta \leq \varepsilon/8$$

مثال: نشان دهید

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} = 0$$

حل:

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0 \quad s.t. \quad \sqrt{x^2+y^2} < \delta \rightarrow \left| \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\xrightarrow{\text{داریم}} \left| \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} \right| \leqslant \frac{|x-y|^2}{|x|+|y|} \leqslant \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = |x|+|y|$$

$$\leqslant \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2\delta \leqslant \varepsilon \longrightarrow \delta \leqslant \varepsilon/2$$

یادآوری:

$$|\sin x| \leqslant |x| \quad , \quad \begin{cases} |x-y| \leqslant |x|+|y| \\ |x+y| \leqslant |x|+|y| \end{cases}$$

مثال: نشان دهید

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = 0$$

حل:

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0 \ ; \ \sqrt{x^2+y^2} < \delta \longrightarrow \left| \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\rightarrow \left| \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right| \leqslant |x||y| \left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \leqslant |x||y| \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right|$$

$$+ |x||y| \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leqslant |x||y| + |x||y| = 2|x||y|$$

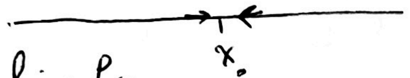
$$\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2\delta \cdot \delta \leqslant \varepsilon \longrightarrow 2\delta^2 \leqslant \varepsilon$$

$$\rightarrow \delta \leqslant \sqrt{\varepsilon/2}$$

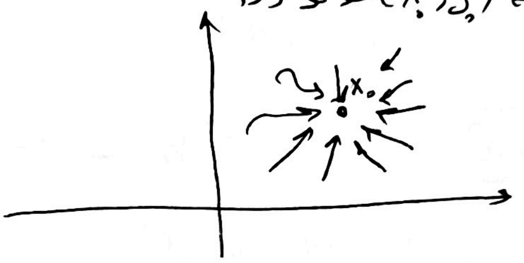
قضیه: حد توابع چند متغیره در صورت وجود منحصر بفرد است.

نکته (شرایط وجود حد): تابع $f(x,y)$ در نقطه $(x_0,y_0)$ حد دارد اگر روی هر مسیری که $(x,y)$ به $(x_0,y_0)$ میل می‌کند، مقدار تابع به یک عدد ثابت منحصر بفرد نزدیک شود.

نتیجه: اگر روی دو مسیر متفاوت منتهی به $(x_0,y_0)$ مقادیر تابع به 2 عدد متفاوت نزدیک شوند آن گاه تابع در نقطه $(x_0,y_0)$ حد ندارد.




$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$




بررسی عدم وجود حد در توابع چند متغیره:

تعریف: تابع دو متغیره $f(x,y)$ را در نظر بگیرید، حدهای مکرر این تابع وقتی $(x,y)$ به سمت $(a,b)$ میل می‌کند به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L_1=\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \quad , \quad L_2=\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$$

قضیه: اگر $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ موجود باشد آن گاه حدهای مکرر هم موجود و با هم برابر هستند یعنی $L_1=L_2$.

نتیجه: اگر $L_1\neq L_2$، آن گاه تابع چند متغیره $f(x,y)$ حد ندارد.

نکته: اگر $L_1=L_2$، آن گاه راجع به وجود حد نمی‌توان اظهار نظر کرد.

مثال: وجود حد زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

حل:

$$L_1=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right)=1$$

$$L_2=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{-y}{y}\right)=-1$$

$\Rightarrow L_1\neq L_2$ لا حد ندارد.

مثال: وجود حد را بررسی کنید.

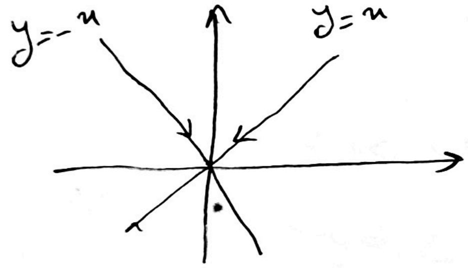
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

حل: داریم:

$$L_1=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right)=0$$

$$L_2=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right)=0$$

توجه شود که از $L_1=L_2$ نمی‌توان نتیجه گرفت که حد وجود دارد. اکنون مسیرهای دیگری را هم امتحان می‌کنیم. اگر دو مسیر وجود داشته باشد که حدهای مختلفی داشته باشد گوییم تابع حد ندارد.




$$\text{If } y=x \longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

لذا حد موجود نمی‌باشد.

نکته: مهم‌ترین مسیرهایی که از مبدأ می‌گذرند و می‌توان آن‌ها را امتحان کرد به صورت زیر هستند:

$y=0$ و $x=0$، $y=x$، $y=-x$، $y=mx$ و $y=x^2$

و $y=x^3$، $y=x^n$، $y=\sin x$، $y=e^x-1$، $y=1-\cos x$، ....

تذکر: اگر از مسیر $y=mx$ برای حدهایی که $(x,y)\to(0,0)$ استفاده کنیم و جواب حد به $m$ وابسته باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که حد موجود نمی‌باشد، اما اگر مقدار حد به $m$ وابسته نباشد نمی‌توان اظهار نظر کرد.

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2}=\lim\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

به $m$ وابسته است لذا حد ندارد.

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

حل: $L_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\right) = 0$

$$L_2 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\right) = 0$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{mx^3}{x^2+m^4x^4}\right) = 0 \qquad (y=mx)$$

$$\xrightarrow{\text{If } x=y^2} L_4 = \lim_{y\to 0}\left(\frac{y^4}{y^4+y^4}\right) = \frac{1}{2}$$

$\to L_1 = L_2 = L_3 \neq L_4 \longrightarrow$ حد ندارد.

چون به ازای مسیرهای مختلف جواب حد یکی نشد.

نکته: در چنین حدهایی بهتر است مسیری را انتخاب کنیم که درجه صورت را با درجه مخرج یکسان کند.

مثال:

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6} \Rightarrow L_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy^3}{x^2+y^6}\right) = 0$

$\xrightarrow{\text{If } x=y^3} \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{y^6+y^6} = \frac{1}{2}$

حد ندارد

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2} \to \begin{cases} y=0 \to l_1 = 0 \\ \xrightarrow{y=x^3} \lim \frac{x^6}{x^6+x^6} = \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow$ حد ندارد

3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x^4+y^4} \to \begin{cases} L_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{3xy}{x^4+y^4}\right) = 0 \\ \xrightarrow{y=x^3} \lim \frac{3x^4}{x^4+x^{12}} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{1+x^8} = 3 \end{cases}$

حد ندارد.

نکته: اگر با امتحان مسیرهای مختلف نتیجه از زیابی یکسان و برابر $L$ بدست آمده آن‌گاه برای اثبات ادعا باید از تعریف حد استفاده کرد.

مثال: درصورت وجود حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ را بیابید.

حل: اگر از حدهای مکرر استفاده کنیم می‌بینیم که $L_1=L_2=0$. به همین ترتیب اگر مسیرهای مختلف مانند $y=x^2$ یا $x=y^2$ یا $y=mx$ و ... را امتحان کنیم می‌بینیم مقدار حد صفر است. لذا امید داریم بتوانیم ثابت کنیم که حد برابر صفر است.

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \sqrt{x^2+y^2}<\delta \longrightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\longrightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = 3\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right||y| \leq 3|y| \leq 3\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\leq 3\delta \leq \varepsilon \longrightarrow \delta \leq \varepsilon/_2$$

نکته: در یک مسئله چندمتغیره اگر $(x,y)\to(a,b)$ که $(a,b)$ لزوماً $(0,0)$ نیستند آن‌گاه با تغییر متغیر
$$\begin{cases} x' = x-a \\ y' = y-b \end{cases}$$
می‌توان مسئله را به فرم $(x',y')\to(0,0)$ تبدیل کرد و سپس از حقنایای فوق برای وجود یا عدم وجود حد استفاده کرد.

مثال: درباره وجود یا عدم وجود حد زیر بحث کنید:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$$

حل: حدس ما این است که جواب حد یک می‌شود. اما این طور نیست چون نمی‌توان یک همسایگی پیدا کرد که در همسایگی محذوف نقطه $(0,0)$ تعریف شده باشد. زیرا هر همسایگی نقطه $(0,0)$ دارای نقاطی روی محورهای $x$ و $y$ هست. درحالیکه روی این محورها یا $x=0$ و یا $y=0$، پس مخرج کسر صفر شده و درنتیجه تعریف شده نمی‌باشد.

قضیه: فرض کنید $f$ و $g$ توابع چند متغیره باشند. در صورت وجود حد داریم:

$$\lim_{x\to\bar{x}} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to\bar{x}} f(x) \pm \lim_{x\to\bar{x}} g(x)$$

قضیه: فرض کنید تابع $f$ در یک همسایگی محذوف حول $x\in R^n$ کراندار باشد و $\lim_{x\to\bar{x}} g(x)=0$ در این صورت

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x)\cdot g(x)=0$$

مثال:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot \lim_{y\to 0} y$$ = کراندار $x$ صفر = صفر

مثال. فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}1 & xy\neq 0\\ 0 & x.y=0\end{cases}$. مطلوبست $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(x+y).f(x,y)$

حل: توجه شود که $f(x,y)$ حد ندارد. اما $f * \sin(x+y)$ حد دارد

$$\lim f(x,y).\sin(x+y) = \lim f(x,y)\times \lim \sin(x+y)$$ = کراندار $x$

صفر = صفر

قضیه فشردگی: اگر $g(x,y)\leq f(x,y)\leq h(x,y)$ و $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)=L$

آنگاه.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

مثال: مطلوبست حاصل حد مقابل:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2-x^3}{x^2+y^2}$$

حل: می‌دانیم $-y^2-x^2\leq y^2-x^2\leq y^2+x^2$. لذا داریم

$$-\frac{(y^2+x^2)}{x^2+y^2}\leq \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\leq \frac{y^2+x^2}{y^2+x^2} \Rightarrow -1\leq \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\leq 1$$

$$\xrightarrow{\times x} \lim -x \leq \lim \frac{xy^2-x^3}{x^2+y^2}\leq \lim x \xrightarrow[\text{فشردگی}]{\text{قضیه}} 0\leq \lim \frac{xy^2-x^3}{x^2+y^2}\leq 0 \to L=0$$

## پیوستگی توابع دو متغیره و بالاتر

پیوستگی توابع دو متغیره: تابع $f(x,y)$ در نقطه $(x_0,y_0)$ از دامنه $f$ پیوسته است، اگر

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

و تابع $f$ روی دامنه $D$ پیوسته است اگر $f$ در هر نقطه $(x_0,y_0)$ از $D$ پیوسته باشد.

در حالت کلی تابع $f$ در نقطه $\bar{x}\in R^n$ پیوسته است هرگاه.

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

مثال: پیوستگی تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+y^2}{y^3+x^3} & (x,y)\neq(-1,1)\\[2mm] \dfrac{2}{3} & (x,y)=(-1,1)\end{cases}$$

در نقطه $(-1,1)$

حل:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{y^2-x^2}{y^3+x^3} = \lim \frac{(y-x)\cancel{(y+x)}}{\cancel{(y+x)}(y^2-xy+x^2)} = \frac{2}{3}$$

$= f(-1,1) \longrightarrow$ تابع پیوسته است.

مثال. پیوستگی تابع زیر را در نقطه $(0,0)$ بررسی کنید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حل: ابتدا وجود حد را بررسی می‌کنیم.

$$L_1=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{xy^3}{x^2+y^6}\right)=0$$

$\underrightarrow{\text{if } x=y^3}$ $L_2=\lim \dfrac{y^6}{y^6+y^6}=\dfrac{1}{2}$

$L_1\neq L_2 \longrightarrow$ تابع حد ندارد

لذا پیوسته نمی‌باشد.

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه $(0,0)$ بررسی کنید:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2y^2-3xy}{\sqrt{x^4+y^4}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حل: ابتدا وجود حد را بررسی می‌کنیم. داریم

$$L_1=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2y^2-3xy}{\sqrt{x^4+y^4}}=0$$

$$\xrightarrow{\text{If } y=x} L_2=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-3x^2}{\sqrt{x^4+x^4}}=\lim\frac{-x^2}{\sqrt{2}\,x^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

لذا تابع حد ندارد در نتیجه پیوسته نیست.

مثال: مقدار $f(0,0)$ را به گونه‌ای بیابید که تابع زیر در صفر پیوسته باشد.

$$f(x,y)=Ln\left|\frac{3x^2+3y^2+x^2y^2}{x^2+y^2}\right|$$

حل: داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}Ln\left|\frac{3x^2+3y^2+x^2y^2}{x^2+y^2}\right|=\lim_{(x,y)\to(0,0)}Ln\left|3+\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|$$

$$=\ln|3|$$

لذا اگر قرار دهیم $f(0,0)=Ln|3|$ آنگاه تابع $f$ در $(0,0)$ پیوسته می‌شود.

مثال. پیوستگی تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

را بررسی کنید.

حل. داریم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=\text{صفر}\times\text{کراندار}=\text{صفر}$$

$$\text{و}\quad f(0,0)=0$$

لذا تابع $f$ در نقطه $(0,0)$ پیوسته است.

قضیه پیوستگی توابع مرکب: هرگاه $g$ یک تابع دو متغیره پیوسته در $(x_0, y_0)$ و $h$ یک تابع یک متغیره پیوسته در $g(x_0, y_0)$ باشد. آنگاه $f(x,y) = h(g(x,y))$ در نقطه $(x_0, y_0)$ پیوسته است و

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(g(x,y)) = h(g(x_0,y_0)) = f(x_0,y_0)$$

مثال: پیوستگی توابع دو متغیره زیر را روی $R^2$ بررسی کنید.

الف. $e^{-(x^2+y^2)}$ ب. $\log|\cos(x^2+y^2)|$

حل. الف. چون تابع $g(x,y) = x^2+y^2$ همه جا پیوسته است و همچنین $h(t) = e^{-t}$ نیز در همه نقاط $R$ پیوسته است. لذا ترکیب آنها یعنی $h(g(x,y))$ در همه جا پیوسته است.

حل. ب. چون تابع $g(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ همه جا پیوسته است و همچنین $h(t) = \log(t)$ برای $t>0$ پیوسته است لذا این تابع در تمام نقاطی که $x^2+y^2$ مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ نباشند پیوسته است.

# تمرینات درس هشتم

1: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2)$

ب. $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4}}$

2. خم های تراز و سطوح تراز زیر را توصیف کنید.

الف. $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

ب. $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

ج. $f(x,y,z)=x+y+3z$

3. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

الف. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(4x+8y)=8$

ب. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0$

4. با ذکر دلیل مشخص کنید که توابع زیر در مبدأ حد دارند یا خیر.

الف $\dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}$ ب. $\dfrac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}$ ج. $\dfrac{xye^{xy}}{x^2+y^2}$ د) $\dfrac{x^9y}{(x^6+y^2)^2}$

5. پیوستگی توابع داده شده در نقاط مشخص شده را بررسی کنید.

الف $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+xy}{x^3+y^3} & (x,y)\neq(1,-1)\\[2mm] \dfrac{1}{3} & (x,y)=(1,-1)\end{cases}$

ب) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

## مشتقات جزئی توابع چندمتغیره

مشتقات جزئی تابع دو متغیره: فرض کنید تابع دو متغیره $f(x,y)$ در همسایگی نقطه $(x_0,y_0)$ تعریف شده باشد. در این صورت مشتقات جزئی تابع $f$ نسبت به $x$ و نسبت به $y$ در نقطه $(x_0,y_0)$ را به ترتیب با $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

در حالت کلی اگر $f(x,y)$ تابعی دو متغیره باشد، مشتقات جزئی آن نسبت به $x$ و $y$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

مثال. اگر $f(x,y)=4-x^2-2y^2$ مطلوبست محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,1)-f(1,1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4-(1+\Delta x)^2-2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4-1-\Delta^2 x-2\Delta x-3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x(\Delta x+2)}{\Delta x}=-2$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,1+\Delta y)-f(1,1)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{4-1^2-2(1+\Delta y)^2-1}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-2\Delta^2 y-4\Delta y}{\Delta y}=-4$$

نکته: توجه شود که $\frac{\partial f}{\partial x}$ را با $f_x$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را با $f_y$ نمایش می‌دهند.

مثال. مطلوبست $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ برای تابع زیر:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\frac{\frac{0}{\Delta x^2}-0}{\Delta x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\frac{\frac{0}{\Delta y^2}-0}{\Delta y}=0$$

توجه شود که این تابع در نقطه $(0,0)$ پیوسته نیست. این مثال نشان می‌دهد که ممکن است یک تابع پیوسته نباشد اما مشتقات جزئی آن موجود باشد.

مثال مطلوبست $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ برای تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حل.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\frac{\frac{\sin^2(\Delta x)}{|\Delta x|}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin^2\Delta x}{\Delta x|\Delta x|}$$

$$=\begin{cases}1 & \text{if } \Delta x\to 0^+\\ -1 & \text{if } \Delta x\to 0^-\end{cases}$$

لذا $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ موجود نمی باشد. بهمین ترتیب می توان نشان داد $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ موجود نمی باشد. لذا این مثال نشان می دهد که با آنکه تابع در نقطه $(0,0)$ پیوسته است اما مشتقات جزئی آن ممکن است وجود نداشته باشند.

نتیجه: پیوستگی و داشتن حد ارتباطی با مشتقات جزئی ندارد.

مثال: $f_x$ و $f_y$ را برای توابع زیر بیابید.

1) $f(x,y) = x^2\cos xy$

$$f_x = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy$$

$$f_y = x^2(-x\sin xy)$$

2) $f(x,y,z) = zy^2 e^{x/y}$

$$f_x = zy^2\left(\frac{1}{y}e^{x/y}\right) = zye^{x/y}$$

$$f_y = 2zye^{x/y} + zy^2\left(\frac{-x}{y^2}e^{x/y}\right)$$

$$f_z = y^2 e^{x/y}$$

مثال. اگر $f(x,y) = xy\tan\left(\frac{y}{x}\right)$ نشان دهید $xf_x + yf_y = 2f(x,y)$

حل. داریم

$$f_x = y\tan\left(\frac{y}{x}\right) + xy\left(\frac{-y}{x^2}\right)\left(1+\tan^2\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow xf_x = xy\tan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2\left(1+\tan^2\frac{y}{x}\right) \qquad (I)$$

$$f_y = x\tan\left(\frac{y}{x}\right) + xy\left(\frac{1}{x}\right)\left(1+\tan^2\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow y.f_y = xy\tan\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\left(1+\tan^2\left(\frac{y}{x}\right)\right) \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)+(II)} xf_x + yf_y = 2xy\tan\left(\frac{y}{x}\right) = 2f(x,y)$$

مثال: نشان دهید $z = \frac{1}{x^2+y^2}$ در معادله $xz_x + yz_y = -2z$ صدق میکند.

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

همچنین

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} \longrightarrow y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow xz_x + yz_y = \frac{-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2}{x^2+y^2} = -2z$$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر: می دانیم یک تابع $n$ متغیره دارای $n$ مشتق جزئی مرتبه اول است. این مشتق‌های جزئی خود توابعی $n$ متغیره هستند که مشتق‌های جزئی آن ها درصورت وجود مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع نامیده می‌شوند.

برای توابع دو متغیره مشتقات جزئی مرتبه دوم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

توجه شود که نماد $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ یا $f_{xy}$ به این معنی است که ابتدا نسبت به $x$ و سپس از نتیجه نسبت به $y$ مشتق جزئی گرفته شود.

مثال. فرض کنید $f(x,y)=xy^2+e^{xy}$ در این صورت داریم:

$$f_x=y^2+ye^{xy} \quad ; \quad f_y=2xy+xe^{xy}$$

$$f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}(f_y)=\frac{\partial}{\partial x}(2xy+xe^{xy})=2y+e^{xy}+xye^{xy}$$

$$f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(f_x)=\frac{\partial}{\partial y}(y^2+ye^{xy})=2y+e^{xy}+xye^{xy}$$

$$f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}(f_y)=\frac{\partial}{\partial y}(2xy+xe^{xy})=2x+x^2e^{xy}$$

نکته: توجه شود که در حالت کلی ممکن است $f_{xy}$ با $f_{yx}$ برابر نباشد.

مثال. برای تابع $f$ با ضابطه زیر مقدار $f_{xy}(0,0)$ و $f_{yx}(0,0)$ را بیابید.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

حل. بنا به تعریف مشتق جزئی می‌توان نشان داد $f_x(0,y)=-y$ و $f_y(x,0)=x$

بنابراین داریم:

$$f_{xy}(0,0)=\lim \frac{f_x(0,0+k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k}=-1$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$

لذا

$$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$$

قضیه. فرض کنید تابع دو متغیره $f$ روی قرص باز $D$ شامل $(x_0,y_0)$ تعریف شده باشد. اگر $f_{xy}$ و $f_{yx}$ موجود و پیوسته باشند آن‌گاه.

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

مثال. اگر $f(x,y,z)=x^2 e^{yz^2}+\sin(yz)+\tan^{-1}(1+y^2z^4)$

مطلوبست محاسبه $\dfrac{\partial^{100} f}{\partial y^{10}\partial x^3 \partial z^{87}}$

حل. چون تابع $f$ پیوسته است و مشتقات آن موجود و پیوسته هستند بنابر قضیه فوق می توان آن ها را جابجا کرد. لذا داریم:

$$\frac{\partial^{100} f}{\partial y^{10}\partial x^3 \partial z^{87}}=\frac{\partial}{\partial y^{10}}\left(\frac{\partial}{\partial z^{87}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}(f(x,y,z))\right)\right)=0$$

مثال. تابع $f(x,y)=\sin^{-1}xy$ مفروض است. مطلوبست محاسبه $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

حل.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\longrightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)=y\left(\frac{\frac{2xy^2}{2\sqrt{1-x^2y^2}}}{1-x^2y^2}\right)=\frac{xy^3}{(1-x^2y^2)^{3/2}}$$

تعریف. تابع $f(x,y)$ را هارمونیک (همساز) گویند هرگاه در معادله لاپلاس $f_{xx}+f_{yy}=0$ صدق کند.

مثال. نشان دهید تابع $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ هارمونیک است.

حل. داریم:

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f_x=\dfrac{x}{x^2+y^2}\longrightarrow f_{xx}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\[2ex] f_y=\dfrac{y}{x^2+y^2}\longrightarrow f_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{xx}+f_{yy}=0$$