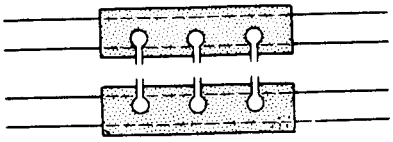
۱

خواص سیال



مکانیک سیالات یکی از علوم مهندسی است که با فهم خواص سیال، کاربرد قوانین بنیادی مکانیک و ترمودینامیک و انجام آزمایشهای منظم توسعه یافته است. در این فصل به‌شرح خواص سیال می‌پردازیم؛ جرم مخصوص، لزجت، کشش سطحی و فشار بخار را تشریح می‌کنیم. جرم مخصوص و لزجت سیال در جریان آن در مجاری باز و بسته و نیز در جریان آن در پیرامون اجسام نقش مهمی دارند. کشش سطحی در تشکیل قطرات مایع، در فوران جتهای باریک، در وضعیتهایی که سطح مشترکی بین مایع و گاز یا بین دو مایع مختلف وجود دارد و همچنین در ایجاد امواج مویینگی حائز اهمیت است. خاصیتِ فشار بخار که مربوط به‌تغییر فاز از مایع به‌گاز است در فشارهای کم، اهمیت می‌یابد.

در این فصل ابتدا سیال را تعریف می‌کنیم. سپس سیستم بین‌المللی آحاد را معرفی می‌نماییم. آنگاه به‌شرح خواص سیال و تعریف اصطلاحات مربوطه می‌پردازیم.

۱ ـ ۱ تعریف سیال

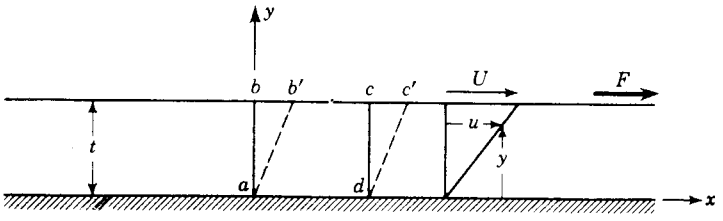
سیال ماده‌ای است که تحت اثر یک تنش برشی ـ هرچند هم که کوچک باشد ـ بی‌وقفه تغییرشکل

می‌دهد. یادآوری می‌کنیم که نیروی برشی، مؤلفهٔ مماسیِ نیروی وارد به‌سطح است. نسبت نیروی برشی به‌مساحت سطح، تنش برشی متوسط نامیده می‌شود. حدّ نسبت مزبور، هنگامی‌که سطح به‌سمت نقطه میل کند، تنش برشی در آن نقطه می‌باشد.

در شکل ۱ ـ ۱ دو صفحهٔ موازی نشان داده شده است. صفحات فاصلهٔ کمی با یکدیگر دارند و ماده‌ای بین آنها وجود دارد. صفحات بزرگ هستند و می‌توان اوضاعی را که در لبه‌های آنها وجود دارد، نادیده گرفت. صفحهٔ پایینی ثابت است. صفحهٔ بالایی را با نیروی F می‌کشیم. با این کار یک تنش برشی به‌اندازهٔ F/A به‌مادهٔ بین دو صفحه وارد می‌شود. A مساحت صفحهٔ بالایی است. اگرنیروی F ـ هرچند هم که کوچک باشد ـ باعث شود که صفحهٔ بالایی به‌طور دائمی حرکت کند، می‌توانیم نتیجه بگیریم که مادهٔ بین صفحات، سیال است.

بجز سیالات سایر مواد در تعریف فوق صدق نمی‌کنند. مثلاً مواد پلاستیک دارای یک تنش تسلیم هستند که اگر تنش برشی وارده از آن کمتر باشد، به‌طور بی‌وقفه تغییرشکل نمی‌دهند بلکه دچار تغییرشکلِ محدود و مشخصی می‌شوند که مقدار آن متناسب با مقدار تنش وارده است. اگر در بین صفحات ماسه وجود داشته باشد، هر نیروی ناچیزی نمی‌تواند صفحهٔ بالایی را به‌طور دائمی به‌حرکت درآورد، بلکه به‌علت اصطکاک خشکِ ذرات ماسه با یکدیگر، لازم است که برای این کار نیروی معینی به‌صفحه اعمال شود. بدین‌ترتیب مواد جامد و مواد پلاستیک از تعریف سیالات مستثنا می‌شوند. اگر در بین صفحات ماده‌ای وجود نداشته باشد (خلأکامل)، سرعت صفحهٔ بالایی مرتباً افزایش خواهد یافت.

ذراتی از سیال که با مرز جامد تماس دارند، سرعتشان با سرعت مرز برابر است. به‌عبارت دیگر درست در روی مرز، هیچگونه لغزشی بین جامد و سیال وجود ندارد [۱]*. عدم لغزش،



شکل ۱ ـ ۱ تغییرشکل ناشی از اعمال نیروی برشی ثابت.

* اعداد داخل قلاب شمارهٔ مراجع انتهای فصل است.

واقعیتی است تجربی که در آزمایشهای بیشمار با سیالات گوناگون و جامدات مختلف به‌تأیید رسیده است. در شکل ۱ ـ ۱ قطعه‌ای از سیال را در نظر بگیرید که در ابتدا به‌شکل $abcd$ است. با حرکت صفحهٔ بالایی، سیال جریان می‌یابد و ذرات آن به‌موازات صفحات حرکت می‌کنند. سرعت ذراتی که در روی صفحهٔ ساکن قرار دارند، صفر است و سرعت ذراتی که در روی صفحهٔ بالایی قرار دارند، U می‌باشد. سرعت ذراتِ بین دو صفحه از صفر تا U تغییر می‌کند. قطعهٔ مزبور لحظه‌ای بعد به‌شکل $ab'c'd$ درمی‌آید. آزمایش نشان می‌دهد که با ثابت نگه داشتن سایر کمیات، نیروی F با A و U تناسب مستقیم و با فاصلهٔ بین صفحات یعنی t، تناسب معکوس دارد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$F = \mu \frac{AU}{t}$$

ضریب تناسب را به μ (مو) نشان داده‌ایم. μ به‌جنس سیال بستگی دارد. با توجه به‌اینکه تنش برشی به‌صورت $\tau = F/A$ بیان می‌شود، داریم:

$$\tau = \mu \frac{U}{t}$$

نسبت U/t، سرعت زاویه‌ای خط ab یا نرخ تغییرشکل زاویه‌ای قطعه مزبور (یعنی نرخ کاهش زاویه bad) است. سرعت زاویه‌ای را به‌صورت du/dy نیز می‌توان بیان کرد. زیرا du/dy نیز مانند U/t بیانگر نسبتِ تغییرات سرعت است به‌فاصله‌ای که تغییرات سرعت را برای آن نوشته‌ایم. اما du/dy جنبهٔ کلی‌تری دارد، زیرا برای مواردی که سرعت زاویه‌ای و تنش برشی در امتداد y تغییر می‌کنند، نیز معتبر است. du/dy، گرادیان سرعت[1] نامیده می‌شود. گرادیان سرعت را می‌توان نرخ حرکت یک لایهٔ سیال نسبت به‌لایهٔ مجاور آن دانست. بنابراین به‌فرم دیفرانسیلی داریم:

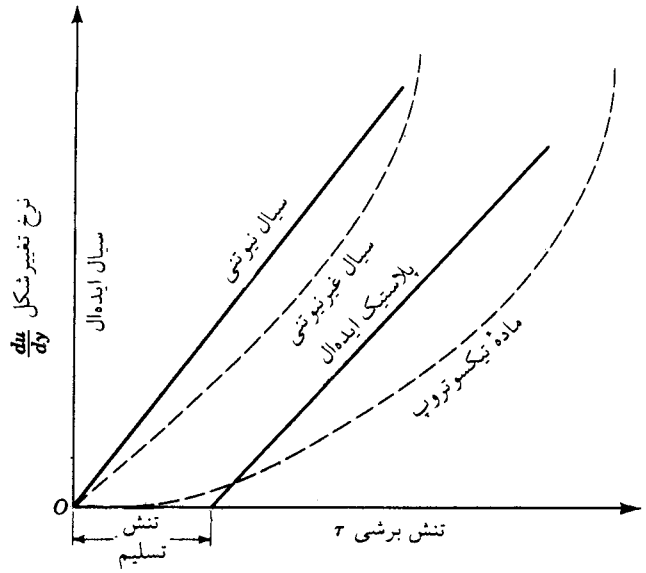
$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (۱ - ۱ - ۱)$$

معادلهٔ فوق رابطهٔ تنش برشی و نرخ تغییرشکل زاویه‌ای برای جریان یک‌بُعدی سیال است. این معادله به‌نام قانون لزجت نیوتن[2] معروف است. μ را لزجت یا ویسکوزیتهٔ[3] سیال گویند.

سیالات را می‌توان به‌دو دسته تقسیم‌بندی کرد؛ نیوتنی و غیرنیوتنی. در سیالات نیوتنی رابطهٔ تنش برشی و نرخ تغییرشکل، خطی است. این رابطهٔ خطی در شکل ۲ ـ ۱ با خط ممتد نشان داده شده است. به‌عبارت دیگر برای سیالات نیوتنی، در معادلهٔ (۱ ـ ۱ ـ ۱)، μ مقداری است ثابت. در سیالات غیرنیوتنی، رابطهٔ تنش برشی و نرخ تغییرشکل، غیرخطی است (منحنی خط‌چین در شکل

1– Velocity gradient
2– Newton's law of viscosity
3– Viscosity

۲ ـ ۱). پلاستیک ایده‌ال[4] طبق تعریف ماده‌ای است که به‌ازای تنش مشخصی تسلیم می‌شود و اگر تنش وارده از تنش تسلیم بیشتر شود، دائماً تغییرشکل می‌دهد به‌گونه‌ای که تغییرات du/dy با τ خطی است. لزجت مواد تیکسوتروپ[5]، مانند مرکب چاپ، به‌مقدار تغییرشکل زاویه‌ای آنها در یک لحظه قبل بستگی دارد و بطوریکه در شکل ۲ ـ ۱ مشهود است، با افزایش تنش برشی کاهش می‌یابد. این مواد در حالت سکون تمایل دارند که سفت شوند. گازها و مایعات رقیق عموماً نیوتنی هستند. هیدروکربنهای غلیظ با زنجیرهٔ بلند ممکن است غیرنیوتنی باشند.



شکل ۲ ـ ۱ نمودار نرخ تغییرشکل در مقابل تنش برشی (نمودار رئولوژیک).

در کارهای تحلیلی گاهی سیال را غیرلزج[6] فرض می‌کنند. یعنی لزجت آن را صفر می‌گیرند. با این فرض، تنش برشی علیرغم حرکت سیال همواره صفر خواهد بود. سیالِ غیرلزج و تراکم‌ناپذیر را سیال ایده‌ال[7] گویند. در شکل ۲ ـ ۱ محور قائم بیانگر رفتار سیال ایده‌ال است.

تمرینات

۱ ـ ۱ ـ ۱. سیال ماده‌ای است که □ الف) آنقدر منبسط می‌شود تا ظرف خود را پُر کند □ ب) عملاً تراکم‌ناپذیر است

4– Ideal plastic
5– Thixotrope
6– Nonviscous
7– Ideal fluid

□ ج) نمی‌تواند تحت‌اثر نیروهای برشی قرارگیرد □ د) تحت اثر نیروی برشی نمی‌تواند ساکن باقی بماند □ ه) قطع نظر از حرکتش در یک نقطه تنش برشی یکسانی دارد.

۲ ـ ۱ ـ ۱. قانون لزجت نیوتن چه کمیاتی را به‌هم مربوط می‌کند؟ □ الف) فشار، سرعت و لزجت □ ب) تنش برشی و نرخ تغییرشکل زاویه‌ای □ ج) تنش برشی، دما، لزجت و سرعت □ د) فشار، لزجت و نرخ تغییرشکل زاویه‌ای □ ه) تنش برشیِ تسلیم، نرخ تغییرشکل زاویه‌ای و لزجت.

۲ ـ ۱ واحدهای نیرو، جرم، طول و زمان

با انتخاب واحدهای سازگار برای نیرو، جرم، طول و زمان، حل مسائل مکانیک ساده‌تر می‌شود. همچنین در صورت استفاده از واحدهای سازگار، می‌توان عملیات جبری را بر روی معادلات انجام داد، بی‌آنکه ضرورتی برای مشخص کردن سیستم آحاد باشد. یک سیستم آحا[illegible]ورتی سازگار گویند که واحد نیرو به‌واحد جرم، شتاب واحد را بدهد. سیستم بین‌المللی آحاد[8] که با علامت اختصاری SI نشان داده می‌شود، سیستمی است سازگار که در بسیاری از کشورها پذیرفته شده است. در این سیستم، واحد نیرو، نیوتن (N) واحد جرم، کیلوگرم (kg) واحد طول، متر (m) و واحد زمان، ثانیه (s) است. اگر کیلوگرم، متر و ثانیه را به‌عنوان واحدهای مشخص و تعریف‌شدهٔ طول و جرم و زمان بپذیریم، واحد نیرو را قانون دوم نیوتن به‌دست می‌دهد؛ یک نیوتن نیرویی است که به‌جرم 1 kg شتابی برابر $1\ m/s^2$ بدهد:

$$1\ N \equiv 1\ kg\ \frac{1\ m}{s^2} \qquad (۱ - ۲ - ۱)$$

نیرویی که جاذبهٔ ثقل به‌یک جسم وارد می‌کند، وزن جسم نامیده می‌شود. جرم یک جسم، m، با تغییر موقعیت آن تغییر نمی‌کند. اما وزن آن، W، که برابر است با جرم ضربدر شتاب جاذبهٔ محل، g، یعنی:

$$W = mg \qquad (۱ - ۲ - ۲)$$

تابع موقعیت محلی جسم است. برای مثال در محلی که $g=9.806\ m/s^2$ است، اگر وزن جسمی 10 N باشد، بدین‌معناست که جرم آن $m=10/9.806\ kg$ می‌باشد. حال اگر همین جسم در محلی قرارگیرد که شتاب جاذبهٔ آن $g=9.7\ m/s^2$ است، وزن آن

$$W = \frac{10\ N}{9.806\ m/s^2}\ (9.7\ m/s^2) = 9.892\ N$$

خواهد بود. شتاب جاذبهٔ استاندارد در سیستم SI برابر $9.806\ m/s^2$ است. خواص سیال را غالباً در

8– International System of Units

شرایط استاندارد یعنی برای دمای 4°C و فشار 760 mmHg بیان می‌کنند.

در سیستم SI علامت اختصاریِ واحدهایی مانند ساعت (h) ، متر (m) و ثانیه (s) را با حروف کوچک نشان می‌دهند. برخی از واحدها به‌نام اشخاص نامگذاری شده‌اند. علامت اختصاری این واحدها مانند وات (W) ، پاسکال (Pa) و نیوتن (N) را با حروف بزرگ نشان می‌دهند. علامت اختصاری L که برای نمایش لیتر به‌کار می‌رود، یک استثناست که برای جلوگیری از اشتباه با حرف بزرگ نشان داده می‌شود. برای بیان اجزاء و اضعاف واحدها از پیشوندهایی به‌صورت توان 10 استفاده می‌شود که آنها نیز دارای علامت اختصاری‌اند. پیشوندهای متداول در جدول ۱ ـ ۱ آمده است. نباید از دو پیشوند مکرر استفاده کرد. مثلاً برای بیان 10^{-9} باید از پیشوند «نانو» استفاده کرد و بیان آن به‌صورت «میلی‌میکرو» که قبلاً مورد قبول بود، مجاز نیست.

جدول ۱ ـ ۱ پیشوند آحاد سیستم SI

ضریب	پیشوند	علامت اختصاری	ضریب	پیشوند	علامت اختصاری
10^{9}	جیگا	G	10^{-3}	میلی	m
10^{6}	مگا	M	10^{-6}	میکرو	μ
10^{3}	کیلو	k	10^{-9}	نانو	n
10^{-2}	سانتی	c	10^{-12}	پیکو	p

تمرینات

۱ ـ ۲ ـ ۱. یک ترازوی فنری وزن جسمی به‌جرم 2 kg را برابر 19 N نشان داده است. مقدار شتاب جاذبهٔ محل برحسب متر بر مجذور ثانیه چقدر است؟

□ الف) 0.105 □ ب) 2 □ ج) 9.5 □ د) 19 □ ه) هیچکدام.

۲ ـ ۲ ـ ۱. به‌جسمی به‌جرم 2 kg نیرویی برابر 10 N اثر می‌کند. شتاب حاصله برحسب m/s^2 چقدر است؟

□ الف) 0.2 □ ب) 2.0 □ ج) 5.0 □ د) 20.0 □ ه) هیچکدام.

۳ ـ ۲ ـ ۱. روی سیاره‌ای که شتاب جاذبهٔ آن $g=10\ m/s^2$ است، وزن جسمی به‌جرم 3 kg، برحسب نیوتن چقدر است؟

□ الف) 0.30 □ ب) 3.33 □ ج) 29.42 □ د) 30 □ ه) هیچکدام.

۴ ـ ۲ ـ ۱. فشار 10^9 Pa را به‌کدامیک از صورتهای زیر می‌توان نوشت؟

□ الف) gPa □ ب) GPa □ ج) k MPa □ د) MPa □ ه) هیچکدام.

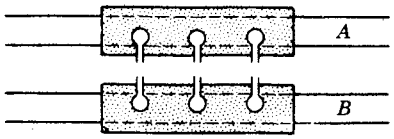
۱ـ۳ لزجت

در مطالعهٔ جریان سیال، لازم است که در بین تمام خواص سیال بیش از همه به‌لزجت توجه کنیم. در

این بخش ماهیت و مشخصه‌های لزجت را شرح می‌دهیم. لزجت خاصیتی است که سیال بواسطهٔ آن در مقابل تنش برشی مقاومت می‌کند. طبق قانون لزجت نیوتن [معادلهٔ (۱ ـ ۱ ـ ۱)] تنش برشی لازم برای ایجاد یک نرخ تغییرشکل زاویه‌ای معین با لزجت سیال تناسب مستقیم دارد. ملاس (شیرهٔ چغندر) و قیر نمونه‌هایی از مایعات بسیار لزج هستند. آب و هوا سیالاتی با لزجت بسیار کم هستند.

با افزایش دما، لزجت گازها افزایش می‌یابد اما لزجت مایعات کاهش می‌یابد. این تفاوت را می‌توان با بررسی عوامل لزوجت سیالات توضیح داد. لزوجت سیالات یعنی مقاومت آنها به‌تنش برشی ناشی از دو عامل است؛ نیروی جاذبهٔ ملکولی و تبادل مومنتم ملکولی. در مایعات فاصلهٔ ملکولها بسیار نزدیکتر از گازهاست. لذا نیروی جاذبهٔ ملکولی در مایعات بسیار بیشتر از گازهاست. به‌نظر می‌رسد که عامل اصلی لزوجت مایعات، نیروی جاذبهٔ ملکولی باشد. حال از آنجا که با افزایش دما نیروی جاذبهٔ ملکولی کاهش می‌یابد، لزجت مایع نیز کاهش می‌یابد. اما در گازها جاذبهٔ ملکولی بسیار کم است. مقاومت گازها به‌تنش برشی عمدتاً ناشی از تبادل مومنتم ملکولی است.

سؤالی که مطرح می‌شود این است که تبادل مومنتم ملکولها چگونه باعث ایجاد تنش برشی می‌شود. برای روشن شدن موضوع به‌شرح یک مدل تقریبی می‌پردازیم. دو واگن قطار را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۳ ـ ۱ روی خطوط آهن موازی قرار دارند. بار واگنها اسفنج است. هر واگن دارای یک مخزن آب و یک پمپ است. پمپ، آب را از طریق شیپوره‌هایی در امتداد عمود بر خط آهن می‌پاشد. ابتدا فرض کنید واگن A ساکن باشد و واگن B به‌طرف راست حرکت کند. آب از شیپوره‌های واگن B خارج شده، به‌واگن A برخورد می‌کند و توسط اسفنجهای آن جذب می‌شود. در اثر مؤلفهٔ مومنتم جت آب در امتداد خط آهن، واگن A به‌حرکت درمی‌آید. ظاهراً بین A و B یک نیروی برشی ایجاد شده است که A را به‌راست می‌راند. حال اگر از واگن A نیز آب با همان شدت



شکل ۳ ـ ۱ مدلی برای توضیح تبادل مومنتم ملکولی.

به‌طرف واگن B پاشیده شود، سرعت واگن B کُند می‌شود. یعنی یک نیروی برشی ظاهری دیگر ایجاد می‌شود که واگن B را به‌چپ می‌راند. نیروهای برشی فوق‌الذکر برابر و درخلاف جهت یکدیگرند. اگر واگنها هر دو ساکن باشند یا آنکه با سرعت یکسان حرکت کنند، عمل پمپاژ آب هیچ نیروی برشی بر روی واگنها اعمال نخواهد کرد.

در داخل سیال هر سطح خیالی که در نظر بگیریم، همواره تعدادی ملکول در حال عبور از آن هستند. وقتی لایه‌های سیالِ دوطرف این سطح نسبت به‌هم حرکت کنند، عبور ملکولها از سطح سبب انتقال مومنتم ملکولی می‌شود یعنی مومنتم را از یک طرف سطح به‌طرف دیگرِ آن منتقل می‌کند، به‌طوریکه یک تنش برشی ظاهری بوجود می‌آید که با حرکت دولایه نسبت به‌هم مخالفت می‌کند. این تنش برشی می‌خواهد به‌شیوه‌ای شبیه مدل فوق‌الذکر سرعت لایه‌های مجاور را برابر نماید.

در گازها، حرکات ملکولی باعث به‌وجود آمدن یک تنش برشی ظاهری می‌شود که مقدار آن بسیار بیشتر از تنش برشی ناشی از نیروهای جاذبهٔ ملکولی است. از آنجا که با افزایش دما، حرکات ملکولی تشدید می‌شود، لزجت گاز نیز با افزایش دما، افزایش می‌یابد.

در فشارهای معمولی، لزجت سیال مستقل از فشار است و فقط به‌دما بستگی دارد. در فشارهای بسیار زیاد نحوهٔ تغییر لزجت گازها و بیشتر مایعات با تغییر فشار نامنظم است.

اگر سیال ساکن باشد یا حرکت آن طوری باشد که در آن هیچ لایه‌ای نسبت به‌لایهٔ مجاور خود حرکت نکند، قطع‌نظر از آنکه لزجت سیال چقدر باشد، هیچ تنش برشی در آن ایجاد نمی‌شود زیرا در این حالت در تمام نقاط سیال du/dy صفر است. به‌همین دلیل در مطالعهٔ استاتیک سیالات کلاً تنشهای برشی را در نظر نمی‌گیریم - زیرا چنین تنشهایی اصلاً ایجاد نمی‌شوند - و فقط تنشهای عمودی را در نظر می‌گیریم. این امر مطالعهٔ استاتیک سیالات را بسیار ساده می‌کند، زیرا هر دیاگرام آزادی که از سیال رسم کنیم، بر روی آن غیر از نیروی جاذبهٔ ثقل و نیروهای سطحی عمودی، نیروی دیگری وجود نخواهد داشت.

برای تعیین دیمانسیون (بُعد) لزجت، قانون لزجت نیوتن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy}$$

با نمایش نیرو به F، طول به L و زمان به T داریم:

$$\tau : FL^{-2} \qquad u : LT^{-1} \qquad y : L$$

با جاگذاری این ابعاد در معادلهٔ فوق، دیمانسیون لزجت به‌صورت $FL^{-2}T$ به‌دست می‌آید. با استفاده از قانون دوم نیوتن دیمانسیون نیرو برحسب جرم به‌صورت $F=MLT^{-2}$ بیان می‌شود. لذا دیمانسیون لزجت را می‌توان به‌صورت $ML^{-1}T^{-1}$ نیز بیان کرد.

واحد لزجت در سیستم SI، نیوتن - ثانیه بر مترمربع ($N.s/m^2$) یا کیلوگرم بر متر - ثانیه (kg/m.s) است که نام خاصی ندارد. $N.s/m^2$ را می‌توان به‌صورت Pa.s (پاسکال ثانیه) نیز بیان کرد.

لزجت سینماتیک

نسبت لزجت به‌جرم مخصوص را لزجت سینماتیک[9] گوییم و به ν (نو) نشان می‌دهیم:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (۱-۳-۱)$$

گاهی μ را لزجت مطلق یا لزجت دینامیک می‌گویند تا با لزجت سینماتیک اشتباه نشود. لزجت سینماتیک در بسیاری از کاربردها مانند عددِ بی‌بُعد رینولدز مطرح می‌شود. عدد رینولدز برای حرکت یک جسم در سیال به‌صورت Vl/ν تعریف می‌شود که در آن V سرعت جسم است و l طولی است که نمایندهٔ اندازهٔ جسم می‌باشد. دیمانسیون لزجت سینماتیک L^2T^{-1} است. واحد لزجت سینماتیک در سیستم SI، m^2/s است.

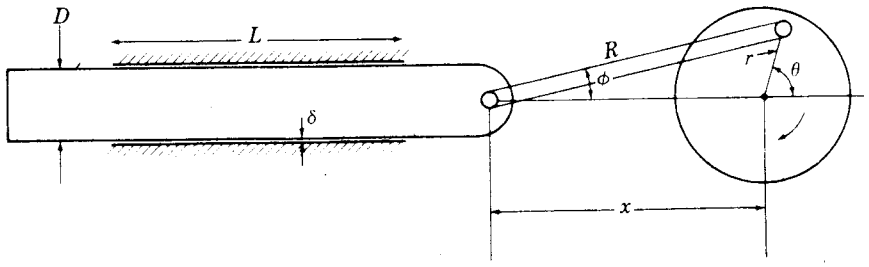
مثال ۱ - ۱. لزجت یک مایع 0.005 Pa.s و جرم مخصوص آن $850\ kg/m^3$ است. لزجت سینماتیک مایع را تعیین کنید.

حل.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.005\ kg/m \cdot s}{850\ kg/m^3} = 5.882\,\mu\ m^2/s$$

لزجت سیالات عملاً مستقل از فشار است و فقط به‌دما بستگی دارد. لزجت سینماتیک مایعات و گازها در یک فشار معین، اساساً تابع دماست. در پیوست ج نموداری در شکل ج - ۱ برای لزجت مطلق و نموداری در شکل ج - ۲ برای لزجت سینماتیک ارائه شده است.

مثال ۲ - ۱. در شکل ۴ - ۱ میل‌لنگ با سرعت ثابتی دوران می‌کند و در نتیجه میله در غلاف به‌صورت رفت و برگشتی حرکت می‌کند. میله و غلاف متحدالمحورند و درز بین آنها δ است. لزجت سیال بین میله و غلاف μ است. برنامه‌ای بنویسید که اتلاف توان در غلاف را به‌طور متوسط به‌دست دهد. اطلاعات مسأله



شکل ۴ - ۱ حرکت رفت و برگشتی میله در غلاف.

9– Kinematic viscosity

به‌قرار زیر است $D=20$ mm، $L=200$ mm، $\delta=0.025$ mm، $R=60$ cm، $r=15$ cm و $\mu=0.005$ Pa.s.
سرعت دورانی میل‌لنگ 1200rpm می‌باشد.

حل. به‌واسطهٔ لزجت سیال، با حرکت میله، روی سطح جانبی آن تنش برشی ایجاد می‌شود. اگر تنش برشی را در سطح جانبی میله ضرب کنیم، نیرویی به‌دست می‌آید که در مقابل حرکت میله مقاومت می‌کند. اتلاف انرژی برابر است با حاصلضرب نیروی مقاوم در جابه‌جایی میله. با توجه به‌شکل جابه‌جایی میله به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$x = R\cos\phi - r\cos\theta$$

با استفاده از قانون سینوسها، ϕ را حذف کرده، جابه‌جایی را برحسب θ به‌دست می‌آوریم:

$$x = R\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\sin^2\theta} - r\cos\theta$$

نیروی مقاوم به‌سرعت میله بستگی دارد. لذا از رابطهٔ فوق مشتق گرفته، سرعت را برحسب θ به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که $d\theta/dt$ سرعت زاویه‌ای میل‌لنگ یعنی ω است.

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega r\sin\theta\left[1 - \frac{r\cos\theta}{\sqrt{R^2-(r\sin\theta)^2}}\right]$$

حال می‌توانیم به‌ازای مقادیر مختلف θ سرعت را تعیین کرده، از قانون لزجت نیوتن تنش برشی و از روی آن نیروی مقاوم را به‌دست آوریم و بالاخره حاصلضرب نیروی مقاوم در جابه‌جایی میله را محاسبه نماییم. انتگرال این حاصلضرب در پریود حرکت، اتلاف انرژی در یک دور گردش میل‌لنگ را به‌دست می‌دهد. پریود حرکت یعنی T برابر $2\pi/\omega$ است. یک پریود را به n 2 فاصلهٔ زمانی تقسیم کرده، در هر فاصله نیروی F_i و موقعیت x_i را به‌دست می‌آوریم. سپس با استفاده از قانون ذوزنقه (پیوست ب ـ ۲) کار انجام‌شده در طی نیم‌پریود به‌دست می‌آید. لیست برنامه و جوابهای آن در شکل ۵ ـ ۱ آمده است.

```
10 REM B:EX12 EXAMPLE 1.2 ENERGY LOSS IN SLEEVE
20 CLEAR :   DEFINT I, N:   DIM F(36), X(36)
30 DEF FNX (TH) = R * SQR(1! - (RR * SIN(TH) / R) ^ 2) - RR * COS(TH)
40 DEF FNV (TH) = OM * RR * SIN(TH) * (1! - RR * COS(TH) / SQR(R ^ 2 - (RR * SIN(TH)) ^ 2))
50 READ R, RR, D, L, MU, DELTA, RPM, N, PI
60 DATA .6,.15,.02,.2,5E-3,.025E-3,1200,36,3.1416
70 PRINT " R, RR, D, L="; R; RR; D; L: PRINT "MU, DELTA, RPM, N, PI="; MU; DELTA; RPM; N; PI
80 OM = 2! * PI * RPM / 60!: PERIOD = 2! * PI / OM: DT = PERIOD / (2! * N)
90 C1 = MU * PI * D * L / DELTA: W = 0!                    'FORCE=F=C1*V
100 FOR I = 0 TO N:  TH1 = I * OM * DT: X(I) = FNX(TH1): F(I) = C1 * FNV(TH1): NEXT I
110 FOR I = 1 TO N                  'TRAPEZOIDAL RULE INTEGRATION FOR HALF PERIOD
120 W = W + .5 * (F(I) + F(I - 1)) * (X(I) - X(I - 1)): NEXT I
130 PRINT : POWER = W / (.5 * PERIOD)
140 PRINT "POWER="; POWER; "W"

R, RR, D, L = 0.6  0.15  0.02  0.2
MU, DELTA, RPM, N, PI = 0.005  0.000025  1200  36  3.1416

POWER = 453.093 W
```

شکل ۵ ـ ۱ لیست برنامهٔ مثال ۲ ـ ۱.

تمرینات

۱ ـ ۳ ـ ۱. دیمانسیون لزجت چیست؟ □ الف) $FL^{-2}T$ □ ب) $FL^{-1}T^{-1}$ □ ج) FLT^{-2} □ د) FL^2T □ ه) FLT^2

۲ ـ ۳ ـ ۱. کدامیک از عبارات زیر غلط است؟ نیروی برشی ظاهری، □ الف) هرگز در سیال ساکن ایجاد نمی‌شود □ ب) در مایع ساکن ممکن است به‌علت جاذبه ملکولی ایجاد شود □ ج) به‌تبادل مومنتم ملکولی بستگی دارد □ د) به‌نیروی جاذبه ملکولی بستگی دارد □ ه) هرگز در سیال غیرلزج ایجاد نمی‌شود.

۳ ـ ۳ ـ ۱. واحد لزجت مطلق به‌کدامیک از صورتهای زیر است؟

□ الف) m.s/kg □ ب) $N.m/s^2$ □ ج) kg.s/N □ د) kg/m.s □ ه) N.s/m.

۴ ـ ۳ ـ ۱. دیمانسیون لزجت سینماتیک به‌چه صورتی است؟

□ الف) $FL^{-2}T$ □ ب) $ML^{-1}T^{-1}$ □ ج) L^2T^2 □ د) L^2T^{-1} □ ه) L^2T^{-2}.

۵ ـ ۳ ـ ۱. در شکل ج ـ ۱ لزجت نفت سفید در دمای 20°C برحسب پاسکال ثانیه چقدر است؟

□ الف) 4×10^{-5} □ ب) 4×10^{-4} □ ج) 1.93×10^{-3} □ د) 1.93×10^{-2} □ ه) 1.8×10^{-2}.

۶ ـ ۳ ـ ۱. لزجت سینماتیک هوای خشک در دمای 30°C و فشار 760 mmHg برحسب مجذور متر بر ثانیه چقدر است؟

□ الف) 1.7×10^{-5} □ ب) 1.7×10^{-4} □ ج) 1.73×10^{-6} □ د) 1.92×10^{-5} □ ه) هیچکدام.

۷ ـ ۳ ـ ۱. اگر $\nu=3\times10^{-8}$ m²/s و $\rho=800$ kg/m³ باشد، μ برحسب پاسکال ثانیه چقدر است؟

□ الف) 3.75×10^{-11} □ ب) 2.4×10^{-5} □ ج) 2.4×10^{5} □ د) 2.4×10^{12} □ ه) هیچکدام.

۱ ـ ۴ محیط پیوسته

سیالات در واقع از عدهٔ بیشماری ملکول تشکیل شده‌اند که فضای بین آنها خالی است. اما برای بررسی ریاضی یا تحلیلی جریان سیال لازم است که فرض کنیم توزیع سیال در فضا پیوسته است و سیال را به‌صورت یک محیط پیوسته[10] تلقی کنیم. چراکه در محیط ملکولی واقعی، مثلاً سرعت در یک نقطه، نامعلوم است. زیرا همواره سرعت صفر است مگر آنکه یک ملکول دقیقاً در آن نقطه باشد ـ در آن لحظه نیز سرعت، سرعتِ ملکول است و نه سرعت متوسطِ جرمیِ ذراتی که در همسایگی آن قرار دارند. برای فرار از این تنگنا سرعت در یک نقطه را برابرسرعت متوسطِ تمام ملکولهای اطراف آن نقطه می‌گیریم. منظور از ملکولهای اطراف نقطه، ملکولهایی است که داخل کرهٔ کوچکی به‌مرکز نقطه قرار دارند که شعاع آن در قیاس با فاصلهٔ متوسط ملکولها بزرگ باشد. اگر در هر سانتی‌متر مکعب n ملکول وجود داشته باشد، فاصلهٔ متوسط ملکولها از مرتبهٔ $n^{-1/3}$ cm خواهد بود. به‌هر حال، برای محاسبهٔ خواصی از سیال که مربوط به‌حرکات ملکولی هستند (مانند لزجت) باید از تئوری ملکولی استفاده کرد. اما با داشتن نتایج محاسبات ملکولی می‌توان معادلات محیط پیوسته را به‌کار برد.

10– Continuum

در گازهای رقیق مانند اتمسفر زمین در ارتفاع 80 کیلومتری از سطح دریا، برای طبقه‌بندی انواع جریان از عدد خاصی استفاده می‌شود. این عدد عبارت است از نسبت مسیر متوسط آزاد گاز* به‌طول مشخصه‌ای از جسم یا مجرا. اگر این عدد بسیار کوچک باشد، رژیم جریان گاز دینامیک[11] نامیده می‌شود. اگر بسیار بزرگ باشد، جریان با ملکول آزاد[12] داریم. حالت بینابینی رژیم لغزشی[13] نام دارد. در این کتاب تنها رژیم گاز دینامیک را مطالعه می‌کنیم.

با نظریهٔ محیط پیوسته فرض می‌شود که در داخل سیال، جرم مخصوص، حجم مخصوص، فشار، سرعت و شتاب به‌طور پیوسته تغییر نمایند (یا ثابت باشند).

تمرین

۱ ـ ۴ ـ ۱. در کدامیک از رژیمهای جریان زیر، فرض محیط پیوسته قابل قبول است؟

۱) جریان با ملکول آزاد، ۲) جریان لغزشی، ۳) گاز دینامیک، ۴) خلأ کامل، ۵) جریان مایع.

□ الف) ۱ و ۲ □ ب) ۴ و ۱ □ ج) ۳ و ۲ □ د) ۵ و ۳ □ هـ) ۵ و ۱

۵ ـ ۱ جرم مخصوص، حجم مخصوص، وزن مخصوص، چگالی، فشار

جرم واحدِ حجم سیال را طبق تعریف جرم مخصوص یا دانسیته[14] سیال گویند. جرم مخصوص را به ρ(رو) نشان می‌دهیم. برای تعریف جرم مخصوص در یک نقطه، حجم کوچکی در اطراف نقطه در نظر می‌گیریم. جرمِ سیال داخل این حجم یعنی Δm را به‌حجم مزبور یعنی $\Delta \mathcal{V}$ تقسیم می‌کنیم و سپس حد این نسبت را هنگامی‌که $\Delta \mathcal{V}$ به‌سمت ϵ^3 میل می‌کند، به‌دست می‌آوریم. ϵ طول بسیار کوچکی است، اما در مقایسه با فاصله متوسط ملکولها بزرگ است.

$$\rho = \lim_{\Delta \mathcal{V} \to \epsilon^3} \frac{\Delta m}{\Delta \mathcal{V}} \qquad (۱ ـ ۵ ـ ۱)$$

جرم مخصوص آب در فشار استاندارد (760 mmHg) و دمای 4°C برابر $1000\ kg/m^3$ است.

عکس جرم مخصوص را حجم مخصوص[15] گویند. به‌عبارت دیگر حجم مخصوص، حجمی است که توسط واحدِ جرم سیال اشغال می‌شود. حجم مخصوص را به v_s نشان می‌دهیم:

$$v_s = \frac{1}{\rho} \qquad (۱ ـ ۵ ـ ۲)$$

---

* مسیر متوسط آزاد (mean free path) عبارت است از فاصلهٔ متوسطی که ملکولها در بین دو برخورد متوالی طی می‌کنند.

11– Gas dynamics
12– Free molecule flow
13– Slip flow
14– Density
15– Specific volume

وزن واحد حجم یک ماده را وزن مخصوص[16] گویند. وزن مخصوص را به γ (گاما) نشان می‌دهیم:

$$\gamma = \rho g \qquad (۱-۵-۳)$$

وزن مخصوص با تغییر محل، به‌علت تغییرشتاب جاذبه، تغییر می‌کند. در استاتیک سیالات و در جریانهای با سطح آزاد بهتر است از وزن مخصوص استفاده کنیم.

نسبت وزن مخصوص یک ماده به‌وزن آب هم حجم آن در شرایط استاندارد، چگالی نسبی یا به‌اختصار چگالی[17] نامیده می‌شود. چگالی را به S نشان می‌دهیم. چگالی را همچنین می‌توان نسبت جرم مخصوص ماده به‌جرم مخصوص آب و یا نسبت وزن مخصوص ماده به‌وزن مخصوص آب دانست.

فشار متوسط عبارت است از نسبت نیروی عمودی فشاری وارد به‌یک سطح مستوی به‌مساحت آن سطح. فشار در یک نقطه عبارت است از حد نسبت فوق، هنگامی‌که سطح به‌سمت سطح بسیار کوچکی محاط بر نقطه میل می‌کند. اگر سیال به‌دیواره‌های ظرف خود فشاری وارد کند، ظرف نیز عکس‌العمل آن را به‌سیال وارد می‌کند. مایعات می‌توانند فشارهای بسیار زیاد را تحمل کنند، اما در کشش بسیار ضعیفند ـ مگر آنکه بسیار خالص باشند. به‌همین دلیل اعدادی که در این کتاب برای فشار مطلق ذکر می‌شود، هیچگاه منفی نیستند، زیرا منفی بودن فشار مطلق به‌معنی آن است که سیال یک تنش کششی را تحمل می‌کند. دیمانسیون فشار، نیرو بر سطح و واحد آن نیوتن بر متر مربع است که پاسکال (Pa) نامیده می‌شود. به‌طوری‌که در بخش ۳ ـ ۲ نشان خواهیم داد، فشار را می‌توان با استفاده از رابطهٔ $p=\gamma h$ به‌صورت ارتفاع معادل یک ستون سیال، h، نیز بیان کرد.

۶ ـ ۱ گاز کامل

در این کتاب روابط ترمودینامیکی و مطالب مربوط به‌جریان سیال تراکم‌پذیر را فقط برای گازهای کامل ارائه می‌کنیم. در این بخش گاز کامل را تعریف می‌کنیم. در بخش ۱ ـ ۷ روابط مختلف گاز کامل با گرمای ویژه‌ها را ارائه خواهیم کرد.

گاز کامل را به‌عنوان ماده‌ای تعریف می‌کنیم که از قانون گاز کامل پیروی نماید و گرمای ویژه‌های آن ثابت باشد. قانون گاز کامل[18] به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$pv_s = RT \qquad (۱-۶-۱)$$

16– Specific weight

17– Specific gravity

18– Perfect gas law

p فشار مطلق، v_s حجم مخصوص، R ثابت گاز و T دمای مطلق است. نباید بی‌توجهی کرده، گاز کامل را سیال ایده‌ال دانست. سیال ایده‌ال، سیالی است غیرلزج و تراکم‌ناپذیر. در حالیکه گاز کامل سیالی است با لزجت مخالف صفر و بعلاوه طبق معادله (۱ ـ ۶ ـ ۱) تراکم‌پذیر نیز هست.

معادله (۱ ـ ۶ ـ ۱) معادله حالت گاز کامل است. این معادله به‌صورت زیر نیز قابل بیان است:

$$p = \rho RT \qquad (۱ - ۶ - ۲)$$

با معلوم بودن واحد سایر کمیات، می‌توان واحد R را از معادلهٔ فوق به‌دست آورد. اگر p برحسب پاسکال، ρ برحسب کیلوگرم بر متر مکعب و T برحسب کلوین (K)* باشد، داریم:

$$R = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{N}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \quad \text{یا} \quad \mathrm{m}\cdot\mathrm{N/kg}\cdot\mathrm{K}$$

مقدار R برای تعدادی از گازهای معمولی در جدول ج ـ ۲ از پیوست ج آمده است.

گازهای واقعی در فشارهای کمتر از فشار بحرانی و دماهای بیشتر از دمای بحرانی تقریباً از قانون گاز کامل پیروی می‌کنند. با افزایش فشار، انحراف رفتار گازهای واقعی از قانون گاز کامل افزایش می‌یابد و در نزدیکی نقطهٔ بحرانی چشمگیر می‌شود. قانون گاز کامل هم قانون شارل را شامل می‌شود و هم قانون بویل را. قانون شارل[19] بیان می‌کند که در فشارثابت، حجم جرم معینی از گاز با دمای مطلق آن متناسب است. قانون بویل[20] بیان می‌کند که در دمای ثابت، جرم مخصوص گاز با فشار مطلق آن متناسب است. حجم مقداری گاز به‌جرم m برابر است با mv_s. حجم را به $\mathcal{V}$ نشان می‌دهیم. بنابراین با ضرب طرفین معادلهٔ (۱ ـ ۶ ـ ۱) در m داریم:

$$p\mathcal{V} = mRT \qquad (۱ - ۶ - ۳)$$

با نوشتن قانون گاز کامل برای یک مول[21] گاز به‌نتایج ساده‌تری می‌رسیم. مقداری از گاز را که جرم آن برحسب کیلوگرم از نظر عددی با جرم ملکولی گاز برابر باشد، کیلوگرم مول گویند. مثلاً یک کیلوگرم مول گاز اکسیژن O_2 برابر 32 kg است. اگر حجم یک مول گاز را به $\bar{v}_s$ نشان دهیم، قانون گاز کامل برای یک مول گاز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$p\bar{v}_s = MRT \qquad (۱ - ۶ - ۴)$$

که M جرم ملکولی گاز است. به‌طورکلی اگر تعداد مولهای گاز در حجم $\mathcal{V}$ را به n نشان دهیم، داریم $nM=m$. بنابراین:

---

* در سال ۱۹۶۷ نام درجهٔ کلوین (°K) را به‌کلوین (K) تغییر دادند. (K=°C+273)

19– Charles' law

20– Boyle's law

21– Mole

$$p\mathcal{V} = nMRT \qquad (۱-۶-۵)$$

می‌دانیم که طبق قانون آووگادرو[۲۲] حجمهای یکسان گازهای مختلف در دمای مطلقِ یکسان و فشار یکسان، دارای تعداد ملکولهای یکسان هستند. بنابراین جرم آنها متناسب با جرم ملکولی آنهاست. لذا در معادلهٔ (۵ - ۶ - ۱) MR مقداری است ثابت. زیرا کمیت $p\mathcal{V}/nT$ برای تمام گازهای کامل یکسان است. MR ثابت جهانی گازها نامیده می‌شود و مقدار آن فقط به‌واحدهای به‌کار رفته بستگی دارد.

$$MR = 8312\ \mathrm{m \cdot N/kg \cdot mol \cdot K} \qquad (۱-۶-۶)$$

ثابت گاز را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$R = \frac{8312}{M}\ \mathrm{m \cdot N/kg \cdot K} \qquad (۱-۶-۷)$$

بنابراین با دانستن جرم ملکولی می‌توان مقدار R را تعیین کرد. در جدول ج - ۲ از پیوست ج جرم ملکولی چند گاز معمولی آمده است.

گرمای ویژه[۲۳] در حجم ثابت هر گاز، c_v ، عبارت است از مقدار گرمایی که باید به‌واحد جرم گاز داده‌شود تا دمای آن در حجم ثابت یک درجه افزایش یابد. گرمای ویژه در فشار ثابت هرگاز، c_p ، عبارت است از مقدار گرمایی که باید به‌واحد جرم گاز داده شود تا دمای آن در فشار ثابت یک درجه افزایش یابد. نسبت c_p c_v نسبت گرمای ویژه[۲۴] نامیده شده و به k نشان داده می‌شود. انرژی داخلی[۲۵] گاز ناشی از فاصلهٔ ملکولی و نیروهای بین‌ملکولی است و تابع p، ρ و T می‌باشد. انرژی داخلی واحد جرم را به u نشان می‌دهیم. انتالپی[۲۶] خاصیت مهمی از گاز است که به h نشان داده شده و با رابطهٔ $h=u+p/\rho$ تعریف می‌شود.

واحد گرمای ویژه‌ها ژول بر کیلوگرم - کلوین (J/kg.K) است. گرمای ویژه آب در شرایط استاندارد 4187 J/kg.K است. به‌عبارت دیگر با افزودن 4187 J انرژی به 1 kg آب در شرایط استاندارد دمای آن به‌اندازهٔ 1 K زیاد می‌شود. رابطهٔ بین c_p ، c_v و R به‌صورت زیر است:

$$c_p = c_v + R$$

سایر روابط و تعاریف مربوط به‌جریان گاز کامل را در فصول ۳ و ۷ ارائه خواهیم کرد.

مثال ۳ - ۱. گازی با جرم ملکولی 44 تحت فشار 0.9 MPa و دمای 20°C قرار دارد. دانسیتهٔ گاز را تعیین کنید.

22– Avogadro's law
23– Specific heat
24– Specific-heat ratio
25– Internal energy
26– Enthalpy

حل. ابتدا از معادلهٔ (۷ ـ ۶ ـ ۱) ثابت گاز را به‌دست می‌آوریم:

$$R = \frac{8312}{44} = 188.91\ \text{m} \cdot \text{N/kg} \cdot \text{K}$$

سپس از معادلهٔ (۲ ـ ۶ ـ ۱) دانسیتهٔ آن را تعیین می‌کنیم:

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{0.9 \times 10^6\ \text{N/m}^2}{(188.91\ \text{m} \cdot \text{N/kg} \cdot \text{K})(273 + 20\ \text{K})} = 16.26\ \text{kg/m}^3$$

تمرینات

۱ ـ ۶ ـ ۱. گاز کامل □ الف)لزجتش صفر است □ ب) لزجتش ثابت است □ ج) تراکم‌ناپذیر است □ د) در معادلهٔ $p\rho = RT$ صدق می‌کند □ هـ) هیچکدام.

۲ ـ ۶ ـ ۱. جرم ملکولی یک گاز 28 است. ثابت این گاز، R، برحسب متر ـ نیوتن بر کیلوگرم ـ کلوین چقدر است؟

□ الف) 29.7 □ ب) 297 □ ج) 2911 □ د) 8312 □ هـ) هیچکدام.

۳ ـ ۶ ـ ۱. دانسیتهٔ هوا در دمای 10°C و فشار مطلق 1 MPa چقدر است؟

□ الف) 1.231 □ ب) 12.31 □ ج) 65.0 □ د) 118.4 □ هـ) هیچکدام.

۴ ـ ۶ ـ ۱. جرم 100 L گاز مونوکسید کربن در دمای 20°C و فشار مطلق 200 kPa برحسب کیلوگرم چقدر است؟

□ الف) 0.00023 □ ب) 0.23 □ ج) 3.367 □ د) 3367 □ هـ) هیچکدام.

۵ ـ ۶ ـ ۱. مخزنی محتوی 1 kg هوا در دمای 30°C و فشار مطلق 9 MPa است. 1.5 kg هوای اضافی به‌مخزن افزوده می‌شود و دمای‌نهایی به 110°C می‌رسد. فشار مطلق نهایی چقدر خواهد شد؟ □ الف) 7.26 MPa □ ب) 25.3 MPa □ ج) 73.4 MPa □ د) با این اطلاعات قابل محاسبه نیست □ هـ) هیچکدام.

۱ ـ ۷ مدول الاستیسیتهٔ حجمی

در بخش قبل تراکم‌پذیری گاز کامل را با بیان قانون گاز کامل شرح دادیم. مایعات را در بیشتر موارد می‌توان تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت اما در مواردی که فشار به‌طور ناگهانی و یا بشدت تغییر می‌نماید، تراکم‌پذیری آنها اهمیت می‌یابد. همچنین است در مواردی که دما تغییر می‌کند ـ مثلاً در جابه‌جایی طبیعی. تراکم‌پذیری مایعات با خاصیتی به‌نام مدول الاستیسیتهٔ حجمی[۲۷] بیان می‌شود. یک واحد حجم از مایع را در نظر بگیرید. اگر فشار این مقدار مایع را به‌اندازهٔ dp افزایش دهیم، حجم آن به‌اندازهٔ $d\mathcal{V}$ کاهش خواهد یافت. نسبت $-dp/d\mathcal{V}$ را مدول الاستیسیتهٔ حجمی یا مدول بالک مایع گویند و به K نشان می‌دهند. برای حجم دلخواه $\mathcal{V}$ می‌توان نوشت:

$$K = -\frac{dp}{d\mathcal{V}/\mathcal{V}} \qquad (۱ ـ ۷ ـ ۱)$$

27– Bulk modulus of elasticity

چون $d\mathcal{V}/\mathcal{V}$ بی‌بُعد است، واحد K همان واحد فشار است. در دمای 20°C مدول بالک آب 2.2 GPa است (پیوست ج جدول ۱ ـ ج).

برای‌آنکه تصوری درمورد تراکم‌پذیری آب داشته‌باشیم، تأثیر فشارِ 0.1 MPa (حدود 1 atm) را بر کاهش حجم یک متر مکعب آب بررسی می‌کنیم:

$$-d\mathcal{V} = \frac{\mathcal{V}\,dp}{K} = \frac{(1.0\ \text{m}^3)(0.1\ \text{MPa})}{2.2\ \text{GPa}} = \frac{1}{22{,}000}\ \text{m}^3$$

یعنی کاهش حجم حدود $45.5\ \text{cm}^3$ است. مایعات هرچه متراکم‌تر شوند، مقاومتشان به‌تراکم بیشتر می‌شود. مدول بالک آب در فشار 3000 atm دو برابر می‌شود.

مثال ۴ ـ ۱. مقداری مایع را در یک سیلندر متراکم می‌کنند. حجم مایع در فشار $1\ \text{MN/m}^2$ برابر $1000\ \text{cm}^3$ و در فشار $2\ \text{MN/m}^2$ برابر $995\ \text{cm}^3$ است. مدول بالک این مایع چقدر است؟

حل.

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta\mathcal{V}/\mathcal{V}} = -\frac{2 - 1\ \text{MN/m}^2}{(995 - 1000)/1000} = 200\ \text{MPa}$$

تمرینات

۱ ـ ۷ ـ ۱. مدول الاستیسیتهٔ حجمی یک گاز در دمای ثابت T_0 با چه‌رابطه‌ای بیان‌می‌شود؟

□ الف) p/ρ □ ب) RT_0 □ ج) ρP □ د) ρRT_0 □ ه) هیچکدام.

۲ ـ ۷ ـ ۱. مدول الاستیسیتهٔ حجمی □ الف) مستقل از دماست □ ب) با افزایش فشار، افزایش می‌یابد □ ج) دارای دیمانسیون $1/p$ است □ د) هر چه مایع تراکم‌پذیرتر باشد، بزرگتر است □ ه) مستقل از فشار و لزجت است.

۳ ـ ۷ ـ ۱. اگر فشار آب به‌اندازهٔ 7 MPa افزایش یابد، دانسیتهٔ آن تقریباً چند درصد افزایش می‌یابد؟

□ الف) $\frac{1}{300}$ □ ب) $\frac{1}{30}$ □ ج) $\frac{1}{3}$ □ د) $\frac{1}{2}$ □ ه) هیچکدام.

۴ ـ ۷ ـ ۱. به 300 L مایع، فشار 1 MPa اعمال شده و حجم آن را به‌اندازهٔ 0.6 L کاهش می‌دهد. مدول بالک مایع برحسب GPa چقدر است؟

□ الف) -0.5 □ ب) 0.5 □ ج) 50 □ د) 500 □ ه) هیچکدام.

۸ ـ ۱ فشار بخار

مایعات در اثر فرار ملکولها از سطح مایع تبخیر می‌شوند. ملکولهای بخار یک فشار جزئی در فضا اعمال می‌کنند که فشار بخار[۲۸] نامیده می‌شود. اگر فضای بالای مایع محصور باشد، پس از مدتی تعداد ملکولهای بخار که به‌سطح مایع برخورد می‌کنند و تقطیر می‌شوند با تعداد ملکولهایی که از

28– Vapor pressure

سطح مایع می‌گریزند و تبخیر می‌شوند، برابر می‌شود و تعادل بوجود می‌آید. چون پدیدهٔ تبخیر به‌فعالیت ملکولی بستگی دارد و فعالیت ملکولها تابع دماست، فشار بخار مایع نیز به‌دما بستگی دارد. با افزایش دما، فشار بخار افزایش می‌یابد. هرگاه فشار حاکم بر روی مایع کاهش یافته به‌فشار بخار برسد، مایع می‌جوشد. مثلاً اگر فشار را به‌اندازهٔ کافی کم کنیم، آب حتی در دمای معمولی اتاق می‌جوشد. در دمای 20°C فشار بخار آب 2.447 kPa و فشار بخار جیوه 0.173 Pa است.

در تاسیسات آبی در بسیاری از موارد ممکن است در محلهای خاصی فشارهای بسیار کمی ایجاد شود. حال اگر فشار به‌فشار بخار مایع برسد و یا از آن کمتر شود، مایع به‌بخار تبدیل می‌شود. حبابهای بخار تشکیل‌شده، به‌سرعت منبسط می‌شوند. این پدیده کاویتاسیون[29] نامیده می‌شود. معمولاً حبابهای بخار از نقطهٔ تشکیل خود روفته شده و با جریان مایع به‌ناحیه‌ای برده می‌شوند که فشار آن از فشار بخار بیشتر است. در این ناحیه حبابها می‌ترکند. رشد و انهدام حبابهای بخار بر کارایی پمپها و توربینهای آبی اثر می‌گذارد و می‌تواند باعث خوردگی اجزاء فلزی آنها شود.

تمرین

۱ ـ ۸ ـ ۱. فشاربخار آب در دمای 30°C برحسب پاسکال چقدر است؟

□ الف) 0.44 □ ب) 7.18 □ ج) 223 □ د) 4315 □ ه) هیچکدام.

۹ ـ ۱ کشش سطحی

در سطح مشترک یک مایع و یک گاز، یا دو مایع غیرمحلول، به‌نظر می‌رسد که فیلم یا لایهٔ مخصوصی تشکیل می‌شود که ظاهراً ناشی از نیروی جاذبهٔ بین ملکولهایی است که روی سطح قرار دارند. با آزمایش ساده‌ای می‌توان به‌وجود این فیلم پی برد؛ سوزن کوچکی را به‌آرامی بر روی آب قرار دهید. ملاحظه می‌کنید که فیلم، سوزن را نگه می‌دارد.

تشکیل فیلم را می‌توان با انرژی سطحی[30] توجیه کرد. انرژی سطحی عبارت است از کار لازم برای بالا آوردن ملکولها به‌سطح مایع بر واحد سطح. کشش سطحی[31] عبارت است از نیروی کششی لازم برای تشکیل فیلم و برابر است با نسبت انرژی سطحی به‌واحد طول فیلم. کشش سطحی آب از حدود 0.074 N/m در دمای 20°C تا 0.059 N/m در دمای 100°C تغییر می‌کند. در جدول ۲ ـ ۱ کشش سطحی و سایر خواص تعدادی از مایعات معمولی آمده است.

29– Cavitation

30– Surface energy

31– Surface tension

جدول ۲ ـ ۱ خواص مایعات معمولی در دمای 20°C و فشار اتمسفر استاندارد

مایع	چگالی S	مدول بالک K GPa	فشار بخار p_v kPa	کشش سطحی σ^* N/m
الکل اتیلیک	0.79	1.21	5.86	0.023
بنزن	0.88	1.03	10.0	0.0289
تتراکلرید کربن	1.59	1.10	13.1	0.0267
نفت سفید	0.81	.....	....	0.023–0.032
جیوه	13.57	26.20	0.00017	0.51
روغن روانکاری	0.85–0.88	.....	....	0.035–0.038
نفت خام	0.85–0.93	.....	....	0.023–0.038
آب	1.00	2.07	2.45	0.074

* در تماس با هوا.

کشش سطحی باعث می‌شود که فشار داخل قطرات و جتهای باریک مایع از فشار محیط بیشتر باشد. یک قطرهٔ کروی به‌شعاع r را در نظر بگیرید. اگر دیاگرام آزاد نیمکره را رسم کنیم و تعادل نیروها را برای آن بنویسیم، فشار داخلی قطره به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p\pi r^2 = 2\pi r\sigma \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2\sigma}{r}$$

یک جت استوانه‌ای کوچک به‌شعاع r را در نظر بگیرید. اگر دیاگرام آزاد نیم‌استوانه را رسم کرده و تعادل نیروها را برای آن بنویسیم، فشار داخلی جت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$p = \frac{\sigma}{r}$$

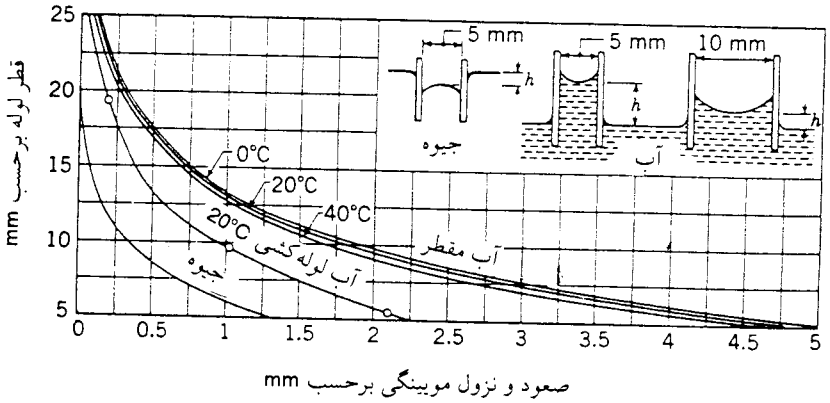
با توجه به‌معادلات فوق درمی‌یابیم که در قطرات و جتهای بسیار کوچک فشار داخلی بسیار زیاد است.

مویینگی

مویینگی[۳۲] ناشی از کشش سطحی و مقدار نسبی نیروهای چسبندگی و پیوستگی است. نیروی چسبندگی[۳۳]، نیروی جاذبه ملکولهای مایع و جامد است. نیروی پیوستگی[۳۴]، نیروی جاذبه ملکولهای مایع به‌یکدیگر است. اگر نیروی چسبندگی از نیروی پیوستگی بیشتر باشد، مایع جامد را

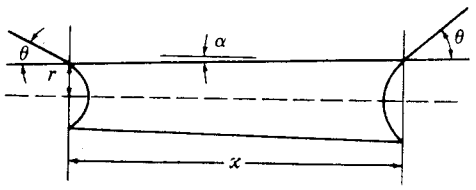
32– Capillarity
33– Adhesion
34– Cohesion

اصطلاحاً تَر می‌کند. هرگاه یک لوله مویین را به‌طور قائم در مایع فرو کنیم، اگر مایع ترکننده باشد، در اثر کشش سطحی در لوله مویین بالا می‌آید و اگر غیرترکننده باشد، در اثر کشش سطحی در لوله پایین می‌رود. وقتی زاویه تماس بین مایع و جامد معلوم باشد، می‌توان شکلی برای سطح مایع فرض نموده، صعود موییننگی را به‌دست آورد. شکل ۶ ـ ۱ صعود و نزول موییننگی در لوله‌های شیشه‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۶ ـ ۱ صعود و نزول موییننگی در لوله‌های شیشه‌ای.

مثال ۵ ـ ۱. در شکل ۷ ـ ۱ یک لولهٔ مخروطی نشان داده شده است که محتوی یک قطرهٔ مایع است. نیرویی که می‌خواهد قطره را به‌طرف راست براند، به‌دست آورید. اطلاعات عددی به‌شرح زیر است $r=3$ mm، $x=15$ mm، $\theta=25°$ و $\sigma=0.05$ N/m. مسأله را برای مقادیر α از 0 تا 12° حل کنید.



شکل ۷ ـ ۱ قطرهٔ مایع در لولهٔ مخروطی.

حل. نیروی موردنظر از نوشتن معادلهٔ تعادل نیروها در امتداد x به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$F = 2\pi\sigma[(r + x\tan\alpha)\cos(\theta+\alpha) - r\cos(\theta-\alpha)]$$

برای تعیین F به‌ازای مقادیر مختلف α برنامه‌ای نوشته‌ایم. لیست برنامه و جوابهای آن در شکل ۸ ـ ۱ آمده است.

```
10 REM B:EX15 EXAMPLE 1.5  FORCES ON DROPLET
20 CLEAR : DEF FNF (ALPHA) = 2! * PI * SIGMA * ((R + X * TAN(ALPHA)) * COS(TH + ALPHA) - R * COS(TH - ALPHA))
30 DEFINT I:  READ R, X, TH, PI, SIGMA: DATA .003,.015,25,3.1416,.05
40 PRINT : PRINT "R, X, TH, PI, SIGMA="; R; X; TH; PI; SIGMA
50 CONV = PI / 180!: TH = TH * CONV: PRINT "ALPHA ,DEG        FORCE ,N"
60 FOR I = 0 TO 12: AL = I * CONV
70 PRINT "  "; I; : PRINT "          "; FNF(AL)
80 NEXT I

R, X, TH, PI, SIGMA = 0.003  0.015  25  3.1416  0.05

ALPHA          FORCE
(DEG)          (N)
  0             0
  1             0.00006
  2             0.00011
  3             0.00017
  4             0.00023
  5             0.00028
  6             0.00034
  7             0.00039
  8             0.00044
  9             0.00049
  10            0.00054
  11            0.00058
  12            0.00063
```

شکل ۸ ـ ۱ لیست برنامهٔ مثال ۵ ـ ۱.

مسائل

۱ ـ ۱. در جدول زیر مقادیر نرخ تغییرشکل یک ماده و تنشهای برشی نظیر آنها ارائه شده است. این ماده را طبقه‌بندی کنید.

du/dy, rad/s	0	1	3	5
τ, kPa	15	20	30	40

۲ ـ ۱. موادی را که رفتار آنها (در دمای ثابت) در جداول زیر ارائه شده است، طبقه‌بندی کنید.

(الف)

du/dy, rad/s	0	3	4	6	5	4
τ, kPa	2	4	6	8	6	4

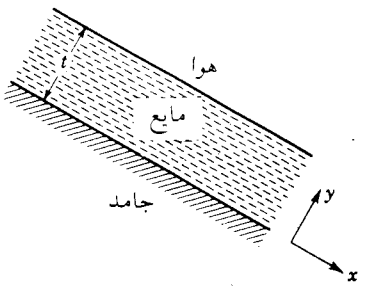
(ب)

du/dy, rad/s	0	0.5	1.1	1.8
τ, kPa	0	2	4	6

(ج)

du/dy, rad/s	0	0.3	0.6	0.9	1.2
τ, kPa	0	2	4	6	8

۳ ـ ۱. یک مایع نیوتنی مطابق شکل ۱.۹ بر روی یک صفحهٔ شیبدار به‌صورت لایه نازکی به‌ضخامت t جریان دارد. سطح آزاد مایع در تماس با هواست که تقریباً هیچگونه مقاومتی در مقابل جریان ندارد. از قانون لزجت نیوتن استفاده کنید و مقدار du/dy در روی سطح مایع را مشخص کنید. امتداد y عمود بر صفحهٔ شیبدار است. آیا انتظار می‌رود که تغییرات u با y خطی باشد؟



شکل ۹ ـ ۱ مسأله ۳ ـ ۱.

۴ ـ ۱. علمی که به‌الاستیسیته، ویسکوزیته و پلاستیسیتهٔ مواد می‌پردازد، رئولوژی[۳۵] نام دارد. رنگ و گریس از نظر رئولوژیکی چگونه موادی هستند؟

۵ ـ ۱. یک غلاف استوانه‌ای بر روی محوری سوار شده است. درز بین محور و غلاف حاوی سیال نیوتنی است. محور و غلاف متحدالمحورند. هرگاه غلاف را با نیروی 600 N در امتداد محور بکشیم، به‌سرعت 1 m/s می‌رسد. اگر آن را با نیروی 1500 N بکشیم، به‌چه سرعتی خواهد رسید؟ دمای غلاف ثابت می‌ماند.

۶ ـ ۱. وزن 3 kg جرم را به‌دست آورید. شتاب جاذبهٔ محل $9.7\ m/s^2$ است.

۷ ـ ۱. در محلی که شتاب جاذبه $9.7\ m/s^2$ است، با استفاده از ترازوی دوکفه‌ای و وزنه‌های استاندارد معلوم شده است که وزن یک جسم با وزن دو وزنهٔ 1 کیلوگرمی برابر است. یک ترازوی فنری که به‌درستی (برای سطح دریا) مدرج شده است، وزن جسم را چقدر نشان می‌دهد؟

۸ ـ ۱. وزن مخصوص آب در دمای 25°C چقدر است؟ $g=9.75\ m/s^2$.

۹ ـ ۱. شتاب جاذبه استاندارد در سطح یک سیاره $3\ m/s^2$ است. وزن 400 L مایع با جرم مخصوص $800\ kg/m^3$ در این سیاره چقدر است؟

۱۰ ـ ۱. در محلی دور از سطح زمین یک ترازوی فنری وزن جسمی به‌جرم 2 kg را برابر 17.0 N نشان می‌دهد. مقدار g دراین محل چقدر است؟ ترازو به‌طور صحیح مدرج شده است.

۱۱ ـ ۱. وزن یک کیسه آرد در سطح دریا 20 N است. در محلی که شتاب جاذبه‌اش $9.6\ m/s^2$ است، جرم آرد چقدر می‌باشد؟

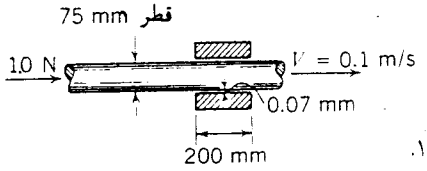
۱۲ ـ ۱. لزجت مایعی 0.002 Pa.s و چگالی آن 0.8 است. لزجت سینماتیک مایع را به‌دست آورید.

35– Rheology

۱۳ ـ ۱. نرخ تغییرشکل زاویه‌ای یک سیال نیوتنی تحت تنش برشی 4 mPa برابر 1 rad/s است. لزجت سیال را به‌دست آورید.

۱۴ ـ ۱. دو صفحهٔ موازی بفاصله 0.5 mm از یکدیگر قرار دارند و بین آن دو سیالی وجود دارد. یکی از صفحات ثابت است و دیگری با سرعت 0.25 m/s حرکت می‌کند. برای حفظ این سرعت بایستی نیرویی معادل 2 N به‌واحد سطح صفحهٔ متحرک وارد کرد، لزجت سیال چقدر است؟

۱۵ ـ ۱. لزجت سیال بین محور و غلاف را برای شکل ۱۰ ـ ۱ تعیین کنید.



شکل ۱۰ ـ ۱ مسأله ۱۵ ـ ۱.

۱۶ ـ ۱. وزن یک چرخ طیار 600 N و شعاع ژیراسیون آن 300 mm است. چرخ دارای محوری به‌قطر 20 mm است که در داخل غلافی به‌طول 50 mm دوران می‌کند. درز شعاعی بین محور و غلاف 0.05 mm است. هنگامی‌که چرخ با سرعت 600 rpm دوران می‌کند، در اثر لزجت سیال بین غلاف و محور، سرعتش در هر دقیقه به‌اندازهٔ 1 rpm کاهش می‌یابد. لزجت سیال چقدر است؟

۱۷ ـ ۱. یک استوانه فولادی به‌قطر 25 mm و طول 300 mm در داخل یک لولهٔ قائم قرار دارد و در اثر وزن خود با سرعت ثابت 0.1 m/s سقوط می‌کند. در درز بین استوانه و لوله یک لایه روغن کرچک با ضخامت ثابت وجود دارد. درز بین لوله و استوانه را تعیین کنید. دمای روغن 38°C است. چگالی فولاد 7.85 می‌باشد.

۱۸ ـ ۱. پیستونی به‌قطر 50.00 mm در داخل استوانه‌ای به‌قطر 50.10 mm حرکت می‌کند. مایع روانکاری نفت خام است که لزجت آن در شکل ج ـ ۱ از پیوست ج داده شده است. اگر نفت را گرم کرده و دمای آن را از 0°C به 120°C برسانیم، نیروی لازم برای حرکت دادن پیستون چند درصد کاهش می‌یابد؟

۱۹ ـ ۱. لزجت آب در دمای 0°C چند برابر لزجت آن در دمای 100°C است؟ لزجت سینماتیک آن چطور؟

۲۰ ـ ۱. لزجت مایعی 0.6 Pa.s و چگالی آن 0.7 است. لزجت سینماتیک مایع به‌دست آورید.

۲۱ ـ ۱. چگالی مایعی 0.78 و لزجت سینماتیک آن 1.0×10^{-6} m²/s است. لزجت مایع چقدر است؟

۲۲ ـ ۱. جسمی به‌وزن 500 N بر روی سطح شیبداری که با افق زاویهٔ 30° می‌سازد، با سرعت 1 m/s به‌طرف پایین می‌لغزد. بین جسم و سطح شیبدار لایهٔ نازکی از یک ماده روانکاری وجود دارد که لزجت آن 0.1 Pa.s است. ضخامت لایه را تعیین کنید. سطح تماس جسم و ماده روانکار 0.2 m² است.

۲۳ ـ ۱. لزجت بنزین در دمای 25°C چقدر است؟

۲۴ ـ ۱. لزجت سینماتیک بنزن در دمای 25°C چقدر است؟

۲۵ ـ ۱. جرم ملکولی یک گاز 44 است. ثابت گاز، R، چقدر است؟

۲۶ ـ ۱. چگالی مایعی 0.75 است. حجم مخصوص ماده را به‌دست آورید.

۲۷ ـ ۱. رابطهٔ بین حجم مخصوص و وزن مخصوص چیست؟

۲۸ ـ ۱. دانسیته ماده‌ای 2900 kg/m³ است. چگالی، حجم مخصوص و وزن مخصوص ماده تعیین کنید.

۲۹ ـ ۱. نیروی $\mathbf{F}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+9\mathbf{k}$ بر روی یک سطح مربعی به‌ابعاد 2 cm در 2 cm که در صفحه xy قرار دارد اثر می‌کند. نیرو را به‌یک مؤلفهٔ عمودی و یک مؤلفهٔ مماسی تجزیه کنید. فشار و تنش برشی را به‌دست آورید. محاسبات را برای نیروی $\mathbf{F}=-4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-9\mathbf{k}$ تکرار کنید.

۳۰ ـ ۱. گازی در دمای 20°C و فشار مطلق 0.2 MPa قرار دارد. دانسیتهٔ گاز را تعیین کنید. ثابت گاز $R=210\text{m.N/kg.K}$ است. اگر حجم گاز 40L باشد، جرم آن چقدر است؟

۳۱ ـ ۱. دانسیته هوا در فشار 400 kPa abs و دمای 30°C چقدر است؟

۳۲ ـ ۱. دانسیته بخار آب در فشار 0.3 kPa abs و دمای 30°C چقدر است؟

۳۳ ـ ۱. 100L از یک گاز با جرم ملکولی 28 تحت فشار 80 kPa abs و دمای 330K قرار دارد. حجم مخصوص و جرم مخصوص گاز چقدر است؟

۳۴ ـ ۱. یک کیلوگرم هیدروژن در ظرفی به‌حجم 150 L محبوس شده است. دمای هیدروژن 40°C− است. فشار آن چقدر است؟

۳۵ ـ ۱. مدول الاستیسیتهٔ حجمی را به‌جای تغییر حجم برحسب تغییر دانسیته بیان کنید.

۳۶ ـ ۱. نحوهٔ تغییر دانسیته یک مایع با تغییر فشار چگونه است؟ فرض کنید مدول الاستیسیته حجمی مایع ثابت بماند.

۳۷ ـ ۱. هرگاه فشار مایعی 0.6 MPa افزایش یابد، دانسیتهٔ آن 0.02 درصد افزایش می‌یابد. مدول بالک مایع را به‌دست آورید.

۳۸ ـ ۱. مدول الاستیسیتهٔ حجمی آب 2.2 GPa است. چه فشاری لازم است تا حجم آب 0.5 درصد کاهش یابد؟

۳۹ ـ ۱. یک مخزن فولادی محتوی 450 kg آب ($\rho=1000\ \text{kg/m}^3$) در فشار استاندارد 101.3 kPa است. چند کیلوگرم آب باید به‌مخزن افزود تا فشار به 70 MPa برسد. مدول بالک آب 2.06 GPa است. می‌دانیم که وقتی فشار داخل مخزن تا 70 MPa افزایش یابد، حجم داخلی آن 1 درصد افزایش می‌یابد.

۴۰ ـ ۱. مدول الاستیسیتهٔ حجمی ایزوترم هوا در فشار مطلق 0.4 MPa چقدر است؟

۴۱ ـ ۱. پمپی آب 20°C را منتقل می‌کند. در چه فشاری می‌توان انتظار داشت که در ورودی پمپ کاویتاسیون رخ دهد؟

۴۲ ـ ۱. قطر یک قطرهٔ آب 0.05 mm است. فشار داخلی قطره چقدر است؟ دمای قطره 20°C و فشار خارج آن فشار اتمسفر استاندارد یعنی 101.3 kPa می‌باشد.

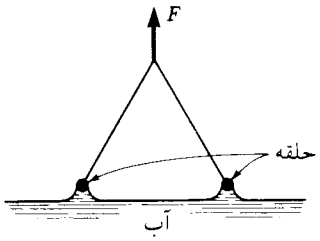
۴۳ ـ ۱. جت جیوه با مقطع دایره به‌قطر 0.1 mm از یک سوراخ خارج می‌شود. اختلاف فشار داخل و خارج چقدر است؟ دمای جیوه 20°C است.

۴۴ ـ ۱. صعود مویینگی آب مقطر در یک لولهٔ شیشه‌ای به‌قطر 6 mm چقدر است؟ دمای آب 40°C است.

۴۵ ـ ۱. می‌خواهیم صعود مویینگی آب در لولهٔ شیشه‌ای کمتر از 0.5 mm باشد. قطر لوله را تعیین کنید.

۴۶ ـ ۱. دو صفحهٔ شیشه‌ای موازی به‌فاصلهٔ 5 mm از یکدیگر، به‌طور قائم در آب لوله‌کشی شهر فرو برده می‌شوند. صعود مویینگی را تخمین بزنید. از داده‌های شکل ۶ ـ ۱ استفاده کنید.

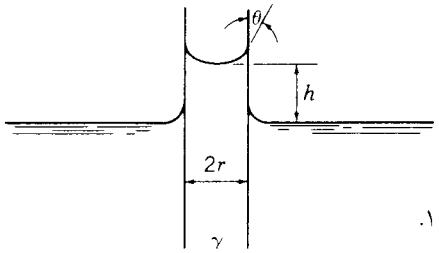
۴۷ ـ ۱. یکی از روشهای تعیین کشش سطحی مایعات اندازه‌گیری نیروی لازم برای بالاکشیدن یک سیم حلقوی پلاتینی از روی سطح مایع است (شکل ۱۱ ـ ۱). نیروی لازم برای جداکردن حلقه‌ای به‌قطر 20 mm از روی



شکل ۱۱ ـ ۱ مسأله ۴۷ ـ ۱.

سطح آب در دمای 20°C را تخمین بزنید.

۴۸ ـ ۱. برای لوله‌ای که در شکل ۱۲ ـ ۱ نشان داده شده، صعود موئینگی یعنی h را برحسب θ، σ، γ و r به‌دست آورید.



شکل ۱۲ ـ ۱ مسائل ۴۸ ـ ۱ و ۵۰ ـ ۱.

۴۹ ـ ۱. چرا فشار داخلی یک حباب به‌صورت $p=4\sigma/r$ بیان می‌شود در حالی‌که برای قطره داریم $p=2\sigma/r$. p فشار داخلی، σ کشش سطحی و r شعاع است.

۵۰ ـ ۱. در شکل ۱۲ ـ ۱ در اثر کشش سطحی نیرویی به‌لوله وارد می‌شود. نیروی قائم لازم برای نگهداری لوله را تعیین کنید. ضخامت دیوارهٔ لوله را ناچیز فرض کنید.

۵۱ ـ ۱. مکعبی به‌حجم 25 L و جرم 22.5 kg بر روی یک سطح شیبدار می‌لغزد. زاویهٔ سطح شیبدار با افق 30° است. بین سطح ساکن و مکعب لایه‌ای از سیال وجود دارد که در ابتدا ضخامت آن 0.25 mm و لزجت آن 0.1 kg/m.s است. پس از آنکه مکعب مسافتی برابر 3m طی کرد، در اثر گرم شدنِ سیال، ضخامت لایه به 0.2 mm و لزجت آن به 0.05 kg/m.s کاهش می‌یابد. از حل رانگ ـ کوتای مرتبهٔ دوم (پیوست ب) استفاده کنید و زمان لازم برای طی مسافت 3 m و سرعت نهایی مکعب را به‌دست آورید.

۵۲ ـ ۱. صعود موئینگی آب در لولهٔ قائم شیشه‌ای به‌قطر 5 mm برابر 2.25 mm است. زاویهٔ بین سطح آب و شیشه را تعیین کنید. کشش سطحی آب 0.074 N/m است.

۵۳ ـ ۱. فرمولی برای صعود موئینگی h بین دو لولهٔ شیشه‌ای متحدالمحور به‌شعاعهای R و r و زاویهٔ تماس θ به‌دست آورید.

مرجع

1. S. Goldstein, "Modern Developments in Fluid Dynamics," vol. II, pp. 676–680, Oxford University Press, London, 1938.