

Design and Analysis of Algorithms

محسن فرهادی

mfarhadi@shahroodut.ac.ir

References

1. Introduction to Algorithms, T. H. Cormen, C. E. Leiserson, L. Rivest , and C. Stein, MITPress, 2009. (3rd ed.)
2. Foundations of Algorithms Using C++ Pseudocode, E. Neapolitan and K. Naimipour, 2004 .
3. The Algorithm Design Manual, S. S. Skiena, 1997.
4. Algorithms, S. Dasgupta, C. Papadimitriou, and U. Vazirani, 2008.
5. The Design and Analysis of Computer Programs, Aho, Hopcroft, and Ullman, 1974.
6. Computer Algorithms: Introduction to design and Analysis, Brassard, Sara Baase, Allen Van Gelder, 2016.

ارزیابی

۴۰٪	امتحان پایان ترم
۳۰٪	امتحان میان ترم
۲۰٪	تمرین
۱۰٪	سمینار
۱۰٪	پروژه

پیش نیاز پاس شدن ، گرفتن حداقل ۳۵٪ از مجموع میان ترم و پایان ترم است.

تعريف الگوریتم

- An algorithm is a finite set of precise instructions for performing a calculation or solving a problem
 - ویژگی های مهم الگوریتم ها:
 - ورودی (Input)
 - خروجی (Output)
 - قطعیت (Definiteness)
 - صحت (Correctness)
 - متناهی باشد (Finiteness)
 - کارا باشد (Effectiveness)
 - قابلیت تعمیم (Generality)

اهداف

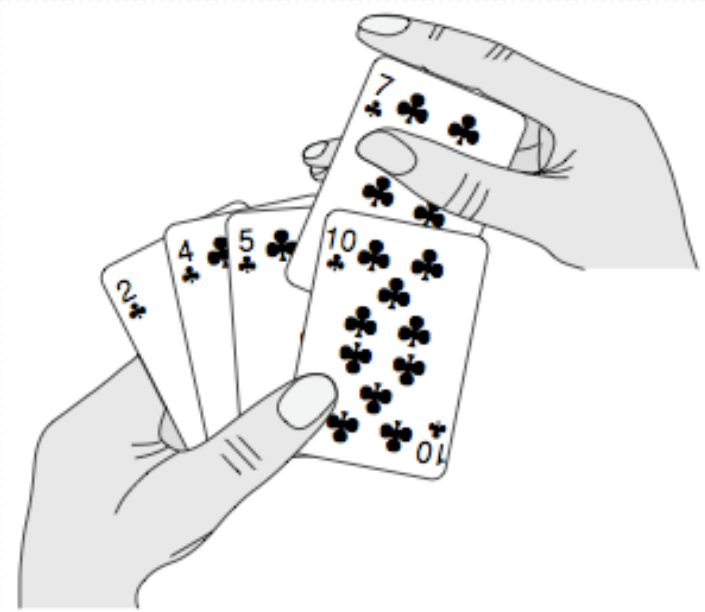
● اهداف این دوره:

1. داشتن ایده برای حل مساله.
2. چگونگی بیان الگوریتم؟
3. چگونگی تأیید الگوریتم؟
4. چگونه الگوریتم را تحلیل کنیم؟
5. چگونه الگوریتم را تست کنیم؟

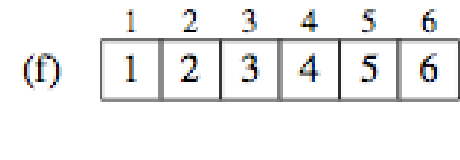
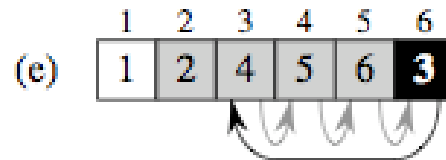
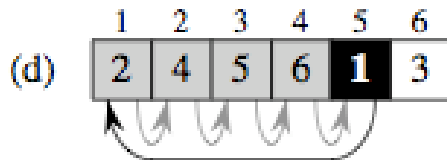
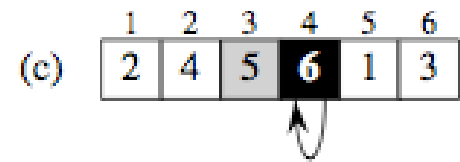
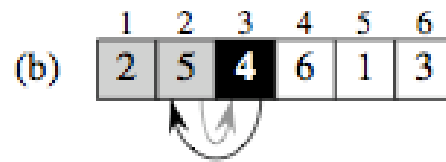
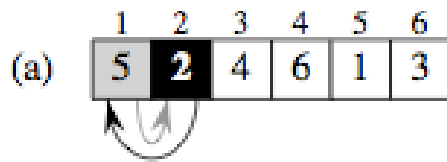
تکنیک هایی که در این دوره مورد بحث قرار خواهند گرفت:

- تقسیم و غلبه (Divide and Conquer)
- برنامه نویسی پویا (Dynamic Programming)
- الگوریتم های حریصانه (Greedy Algorithms)
- الگوریتم های عقبگرد (Back tracking Algorithms)
- الگوریتم های شاخه و قید (Branch and Bound Algorithms)

Insertion Sort: How to devise?



Insertion Sort: How to devise?



INSERTION SORT (A)

for $j \leftarrow 2$ length[A]

do key $\leftarrow A[j]$

 • Insert $A[j]$ into sorted sequence $A[1 \dots j-1]$.

$i \leftarrow j-1$

 while $i > 0$ and $A[i] > \text{key}$

 do $A[i+1] \leftarrow A[i]$

$i \leftarrow i-1$

$A[i+1] \leftarrow \text{key}$

Insertion Sort: How to validate?

Theorem

After the termination of Insertion Sort algorithm, the input array A is sorted.

Lemma

At the start of each iteration of the for loop of lines 1-8, the sub array $A[1..j-1]$ consists of the elements originally in $A[1..j-1]$ but in sorted order.

Proof.

Proof based on induction (Loop Invariant, in this case).

- Initialization: $j=2 \implies A[1..1]=A[1]$, which is sorted.
- Maintenance: $A[j]$ is inserted in the correct position, so $A[1..j]$ is sorted.
- Termination: This happens when $j=n+1$. So $A[1..j-1]=A[1..n]$ is an ordered array.

Insertion Sort: How to analyze;

Computing the amount of resources (Time, Space, etc.) needed by the algorithm.

INSERTION-SORT(<i>A</i>)	<i>cost</i>	<i>times</i>
1 for $j \leftarrow 2$ to $\text{length}[A]$	c_1	n
2 do $\text{key} \leftarrow A[j]$	c_2	$n - 1$
3 ▷ Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1..j - 1]$.	0	$n - 1$
4 $i \leftarrow j - 1$	c_4	$n - 1$
5 while $i > 0$ and $A[i] > \text{key}$	c_5	$\sum_{j=2}^n t_j$
6 do $A[i + 1] \leftarrow A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
7 $i \leftarrow i - 1$	c_7	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
8 $A[i + 1] \leftarrow \text{key}$	c_8	$n - 1$

where t_j is the number of times the while loop in line 5 is executed for that value of j . So:

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n - 1) + c_5 \sum_{j=2}^n t_j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^n t_j - 1.$$

Insertion Sort: How to analyze;

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n - 1) + c_5 \sum_{j=2}^n t_j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^n t_j - 1.$$

- **Best Case:** The input array is already sorted, so $t_j = 1$ and we have:

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n - 1) + c_5(n - 1) \\ &= (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8) \end{aligned}$$

- **Worse Case:** The input array is already sorted in reverse order, so $t_j = j$ and we have:

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)(n - 1) + c_5 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) \\ &\quad + (c_6 + c_7) \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \\ &= \left(\frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2} \right) n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{c_7}{2} + c_8 \right) n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8) \end{aligned}$$

Insertion Sort: How to Test;

- Just implement the pseudo code in any programming language and execute it with different instances of random arrays as input...

تمرین

● پاسخ به پنج سوال ذکر شده برای مسائل ادامه:

- A. Bubble Sort
- B. Sequential Search
- C. Binary Search

