گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۱/۱۰/۲۴**

وقت : **۱۳۵** دقیقه

نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان ترم درس **ریاضی۲ فنی** (۶ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۴۰۲**- ۱۴۰۱

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

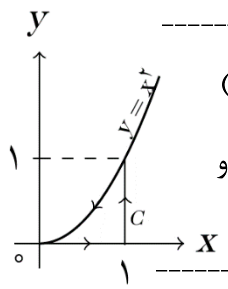
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

سوال ۱- مطلوب است محاسبه مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ در نقطه $A=(1,2,-2)$ و در امتداد بردار $\vec{v}=(1,4,-8)$. **(۱۵ نمره)**

سوال ۲- با رسم ناحیه انتگرالگیری، انتگرال دوگانه $I=\int_0^1\int_{2x}^{2} e^{y^2}\,dy\,dx$ را حل کنید. **(۱۵ نمره)**

سوال ۳- حجم ناحیه محصور بین رویه‌های $z=x^2+3y^2$ و $z=8-x^2-y^2$ را بدست آورید. **(۲۰ نمره)**

سوال ۴- مساحت قسمتی از منحنی $x^2+y^2+z^2=10z$ را بیابید که درون سهمیگون $z=x^2+y^2$ قرار دارد. **(۲۰ نمره)**



سوال ۵- انتگرال $\oint_C \sqrt{y}\,dx+\sqrt{x}\,dy$ را با استفاده از قضیه گرین (یا بطور مستقیم) محاسبه کنید. (مسیر C مرز ناحیه محدود به منحنی‌های $y=x^2$ ، $x=1$ و $y=0$ است که در شکل مقابل نشان داده شده است.) **(۲۰ نمره)**

سوال ۶- مطلوب است شارّ نیروی $\vec{F}=(x,y,1)$ روی سطح S که S قسمتی از رویه $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ است که توسط صفحه $z=1$ بریده می‌شود و $\vec{n}$ بردار یکه قائم رو به بالا می‌باشد. **(۱۵ نمره)**

سوال ۷- کار انجام شده توسط میدان برداری $\vec{F}=(3x^2y+4yz)\vec{i}+(x^3+4xz-2z^2)\vec{j}+(4xy-4yz)\vec{k}$ در راستای خم $R(t)=(e^{t^2},1-t^2,\ln(t+1))$ و در فاصله $0\le t\le 1$ را محاسبه کنید. **(۱۵ نمره)**

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان پایان‌ترم درس ریاضی۲ (۶ گروه هماهنگ) ۱۴۰۱/۱۰/۲۴

نیمسال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۱ سیدرضا موسوی

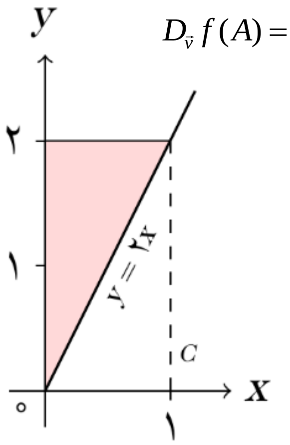
پاسخ سوال۱: ابتدا بردار گرادیان تابع f را در نقطه $A=(۱,۲,-۲)$ محاسبه می‌کنیم.

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}-\frac{x^۲}{(\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲})^۳},\frac{-xy}{(\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲})^۳},\frac{-xz}{(\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲})^۳}\right)$$

$$\rightarrow \quad \nabla f(A)=\nabla f(۱,۲,-۲)=\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲۷},\frac{-۲}{۲۷},\frac{۲}{۲۷}\right)=\frac{۲}{۲۷}(۴,-۱,۱)$$

اکنون می‌توانیم مشتق سویی تابع f در نقطه A و در امتداد بردار $\vec{v}$ را پیدا کنیم.

$$D_{\vec v}f(A)=\nabla f(A)\cdot\frac{\vec v}{|\vec v|}=\frac{۲}{۲۷}(۴,-۱,۱)\cdot\frac{۱}{۹}(۱,۴,-۸)=\frac{۲}{۲۴۳}\times(۴-۴-۸)=\frac{-۱۶}{۲۴۳}$$



پاسخ سوال۲: با توجه به شکل، ترتیب انتگرالگیری را عوض می‌کنیم.

$$I=\int_{x=۰}^{۱}\int_{y=۲x}^{۲}e^{y^۲}dydx=\int_{y=۰}^{۲}\int_{x=۰}^{\frac{۱}{۲}y}e^{y^۲}dxdy=\int_{y=۰}^{۲}\frac{۱}{۲}ye^{y^۲}dy=\frac{۱}{۴}e^{y^۲}\Big|_{۰}^{۲}=\frac{e^۴-۱}{۴}$$

پاسخ سوال۳: ابتدا محل برخورد دو رویه را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases}z=۸-x^۲-y^۲\\ z=x^۲+۳y^۲\end{cases}\rightarrow ۲x^۲+۴y^۲=۸\quad\rightarrow\quad\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۲}=۱$$

تصویر ناحیه مورد نظر بر روی صفحه xy بیضی $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۲}\le ۱$ است. حجم را به کمک انتگرال سه گانه و مختصات استوانه ای محاسبه می‌کنیم.

$$V=\iint_{\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۲}\le۱}\int_{z=x^۲+۳y^۲}^{۸-(x^۲+y^۲)}dzdxdy=\iint_{\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۲}\le۱}[۸-(۲x^۲+۴y^۲)]dxdy$$

اکنون از تغییر متغیر $\begin{cases}x=۲r\cos\theta\\ y=\sqrt{۲}r\sin\theta\end{cases}$ استفاده می‌کنیم. داریم $dxdy=۲\sqrt{۲}rdrd\theta$ و در نتیجه

$$V=\int_{r=۰}^{۱}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}۲\sqrt{۲}(۸-۸r^۲\cos^۲\theta-۸r^۲\sin^۲\theta)rd\theta dr=۳۲\sqrt{۲}\pi\int_{r=۰}^{۱}(r-r^۳)dr=۳۲\sqrt{۲}\pi\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}\right)=۸\sqrt{۲}\pi$$

پاسخ سوال۴: ابتدا محل برخورد دو رویه را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{cases}x^۲+y^۲+z^۲=۱۰z\\ z=x^۲+y^۲\end{cases}\rightarrow z+z^۲=۱۰z\ \rightarrow\begin{cases}z=۰\\ z=۹\end{cases}$$

سطح مورد نظر قسمتی از رویه است که در آن $z\ge۹$ و تصویر آن بر روی صفحه xy ، ناحیه درون دایره $x^۲+y^۲=۹$ است.

بردار یکه قائم این سطح عبارت است :

$$\vec n=\frac{(۲x,۲y,۲z-۱۰)}{\sqrt{(۲x)^۲+(۲y)^۲+(۲z-۱۰)^۲}}=\frac{۱}{۵}(x,y,z-۵)\ \rightarrow\ \cos\gamma=\frac{z-۵}{۵}$$

و در نتیجه :

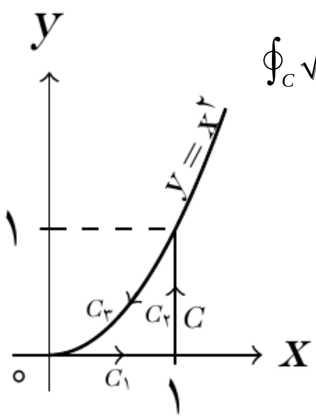
$$d\sigma=dS=\frac{dxdy}{\cos\gamma}=\frac{۵dxdy}{z-۵}=\frac{۵dxdy}{\sqrt{۲۵-(x^۲+y^۲)}}$$

مساحت سطح مورد نظر برابر است با $S=\iint_{x^۲+y^۲\le۹}\frac{۵dxdy}{\sqrt{۲۵-(x^۲+y^۲)}}$ که برای محاسبه آن از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$S=\iint_{x^۲+y^۲\le۹}\frac{۵dxdy}{\sqrt{۲۵-(x^۲+y^۲)}}=\int_{r=۰}^{۳}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}\frac{۵rdrd\theta}{\sqrt{۲۵-r^۲}}=۱۰\pi\int_{r=۰}^{۳}\frac{rdr}{\sqrt{۲۵-r^۲}}=-۱۰\pi\sqrt{۲۵-r^۲}\Big|_{۰}^{۳}=۱۰\pi$$

پاسخ سوال۵: روش اول : (محاسبه روی مسیر) مسیر C از ۳ قسمت مجزا تشکیل شده است.

روی هر قسمت جداگانه انتگرال می گیریم.



$$\oint_C \sqrt{y}dx+\sqrt{x}dy=\oint_{C_1}\sqrt{y}dx+\sqrt{x}dy+\oint_{C_2}\sqrt{y}dx+\sqrt{x}dy+\oint_{C_3}\sqrt{y}dx+\sqrt{x}dy$$

$$=\int_{x=0}^{1}(0dx+\sqrt{x}\times 0)+\int_{y=0}^{1}(\sqrt{y}\times 0+dy)+\int_{y=1}^{0}(2y\sqrt{y}dy+ydy)$$

$$=0+\int_{y=0}^{1}dy+\int_{y=1}^{0}(2y\sqrt{y}+y)dy=1+(-\frac{4}{5}-\frac{1}{2})=-\frac{3}{10}$$

روش دوم : (قضیه گرین) ناحیه محدود به مسیر C را R می‌نامیم و خواهیم داشت :

$$\oint_C \sqrt{y}dx+\sqrt{x}dy=\iint_R(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})dxdy$$

$$=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^2}(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{y}})dydx=\int_{x=0}^{1}(\frac{1}{2}x\sqrt{x}-x)dy=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{10}$$

پاسخ سوال۶: روش اول : تصویر سطح داده شده بر روی صفحه xy ناحیه $x^2+y^2\le 1$ است و بردار یکه عمود بر آن عبارت است $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1)$ و در نتیجه $dS=\sqrt{2}dxdy$. همچنین داریم $\vec{n}\cdot\vec{F}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2+y^2}+1)$

اکنون می‌توانیم شارّ خواسته شده را محاسبه کنیم. داریم : $\iint_S \vec{n}\cdot\vec{F}dS=\iint_{x^2+y^2\le 1}(\sqrt{x^2+y^2}+1)dxdy$

برای حل این انتگرال از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$\iint_S \vec{n}\cdot\vec{F}dS=\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}(r^2+r)d\theta dr=2\pi\int_{r=0}^{1}(r^2+r)dr=2\pi(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})=\frac{5\pi}{3}$$

روش دوم : اگر بخواهیم از قضیه دیورژانس استفاده کنیم باید قرص دایره‌ای $x^2+y^2\le 1, z=1$ را به سطح داده شده اضافه کنیم تا اینکه یک حجم بسته ساخته شود. سطح پایینی این دایره را S_0 و حجم محصور را V می‌نامیم. اکنون داریم

$$\iiint_V div\vec{F}dV=\iint_S \vec{n}\cdot\vec{F}dS+\iint_{S_0}\vec{n}\cdot\vec{F}dS$$

به جای محاسبه مستقیم $\iint_S \vec{n}\cdot\vec{F}dS$ دو انتگرال دیگر را محاسبه خواهیم کرد.

$$\iint_{S_0}\vec{n}\cdot\vec{F}dS=\iint_{x^2+y^2\le 1}(0,0,-1)\cdot(x,y,1)dxdy=-\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}rdrd\theta=-2\pi\int_{r=0}^{1}rdr=-\pi$$

در انتگرال سه گانه مشاهده می‌کنیم که $\iiint_V div\vec{F}dV=\iiint_V 2dV=2\iiint_V dV$. این مقدار دو برابر حجم ناحیه V است.

V یک مخروط به ارتفاع ۱ و شعاع قاعده ۱ است که حجم آن برابر $\frac{\pi}{3}$ می باشد بنابر این : $\iiint_V div\vec{F}dV=\frac{2\pi}{3}$

البته انتگرال سه‌گانه را به کمک مختصات استوانه‌ای هم می توانستیم حل کنیم.

$$\iiint_V div\vec{F}dV=2\iiint_V dV=2\int_{r=0}^{1}\int_{z=1}^{2-r}\int_{\theta=0}^{2\pi}rd\theta dzdr=4\pi\int_{r=0}^{1}\int_{z=1}^{2-r}rdzdr=4\pi\int_{r=0}^{1}(r-r^2)dr=4\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=\frac{2\pi}{3}$$

اکنون داریم :
$$\iint_S \vec{n}\cdot\vec{F}dS=\iiint_V div\vec{F}dV-\iint_{S_0}\vec{n}\cdot\vec{F}dS=\frac{2\pi}{3}-(-\pi)=\frac{5\pi}{3}$$

پاسخ سوال۷ : اگر منحنی داده شده را C بنامیم باید انتگرال منحنی الخط
$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{dr}=\int_C(3x^2y+4yz)dx+(x^3+4xz-2z^2)dy+(4xy-4yz)dz$$
را محاسبه کنیم. محاسبه مستقیم این انتگرال غیر ممکن یا بسیار سخت است. می‌توان دید که نیروی $\vec{F}$ یک نیروی پایستار است و کار انجام شده مستقل از مسیر خواهد بود. سعی می‌کنیم تابع f را بیابیم که $\vec{F}=\nabla f$. بنابر این داریم :
$$\begin{cases} f_x=3x^2y+4yz \;\to\; f=x^3y+4xyz+g_1(y,z) \\ f_y=x^3+4xz-2z^2 \;\to\; f=x^3y+4xyz-2yz^2+g_2(x,z) \\ f_z=4xy-4yz \;\to\; f=4xyz-2yz^2+g_3(x,y) \end{cases}$$
به این ترتیب باید داشته خواهیم داشت :
$$f(x,y,z)=x^3y+4xyz-2yz^2$$
و اکنون، چون ابتدای مسیر به ازای $t=0$ نقطه $(1,1,0)$ و انتهای مسیر به ازای $t=1$ نقطه $(e,0,\ln 2)$ داریم :
$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{dr}=f(e,0,\ln 2)-f(1,1,0)=-1$$