



دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس ریاضی ۲ (۶ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / دوم) ۱۴۰۱ - ۱۴۰۲

گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۴۰۱/۸/۳۰

وقت : ۸۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : .....

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمائید.  
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.  
در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- معادله خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط  $l_1$  و  $l_2$  با معادلات زیر عبور کرده و موازی بردار  $a = (2, -3, 1)$  باشد.

۱۵ نمره

$$\begin{cases} l_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{2} \\ l_2: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{3} \end{cases}$$

۱۵ نمره

سوال ۲- رویه درجه دوم زیر را در دستگاه دکارتی رسم کنید.

$$4x^2 + y^2 - z^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

سوال ۳- تابع برداری  $\vec{r}(t) = ti + \frac{t^2}{2}\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{k}$  مفروض است.

بردارهای  $T$ ،  $N$  و  $B$  را در نقطه  $t=1$  بدست آورید.

۱۵ نمره

سوال ۴- فرض کنید  $z = f(u, v)$  و  $u = x^3 + y^3$  و  $v = x^4 y^3$ . مطلوب است محاسبه  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

۲۰ نمره

سوال ۵- نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی تابع  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$  را بدست آورید.

۱۵ نمره

موفق باشید

پاسخ سوال ۱: ابتدا نقطه برخورد دو خط  $l_1$  و  $l_2$  را پیدا می‌کنیم. معادله خط  $l_2$  را به صورت پارامتری نوشته و در معادله خط  $l_1$  قرار

$$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{3} = t \rightarrow x=2t, y=3t+3, z=3t$$

می‌دهیم.

$$\frac{2t+2}{2} = \frac{3t+3}{3} = \frac{3t-2}{2} \rightarrow t+1=t+1 = \frac{1}{2}(3t-2) \rightarrow t=4 \rightarrow A=(8,15,12)$$

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-15}{-3} = \frac{z-12}{1}$$

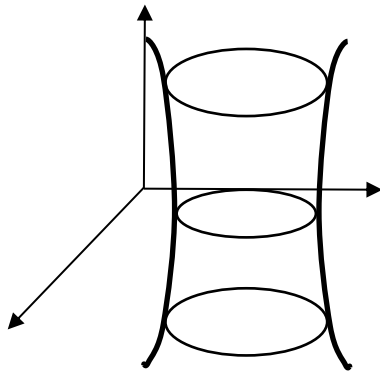
با معلوم بودن یک نقطه و بردار هادی خط مورد نظر، معادله آن نوشته می‌شود:

پاسخ سوال ۲: معادله رویه را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 - z^2 = 1 \rightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{(y-2)^2}{1} - \frac{z^2}{1} = 1$$

این رویه یک سهمیگون بیضوی یکپارچه است و اشتراک آن با صفحه  $z=0$

$$\text{بیضی } \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1 \text{ با مرکز } \left(\frac{1}{2}, 2\right) \text{ است}$$



پاسخ سوال ۳:  $r'(t) = (1, t, t^2) \rightarrow T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{(1, t, t^2)}{\sqrt{1+t^2+t^4}} \rightarrow T'(t) = \frac{(0, 1, 2t)}{\sqrt{1+t^2+t^4}} - \frac{(t+2t^3)(1, t, t^2)}{(\sqrt{1+t^2+t^4})^3}$

$$T(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \rightarrow T'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 2) - \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 0, 1) \rightarrow |T'(1)| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$N(1) = \frac{T'(1)}{|T'(1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \rightarrow B(1) = T(1) \times N(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 2) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$$

پاسخ سوال ۴: ابتدا  $\frac{\partial z}{\partial y}$  را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 \frac{\partial f}{\partial u} + 3x^2 y^2 \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (3y^2 \frac{\partial f}{\partial u} + 3x^2 y^2 \frac{\partial f}{\partial v}) = 3y^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) + 12x^2 y^2 \frac{\partial f}{\partial v} + 3x^2 y^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

$$= 3y^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \times \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 12x^2 y^2 \frac{\partial f}{\partial v} + 3x^2 y^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \times \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$= 3y^2 (3x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4x^2 y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}) + 12x^2 y^2 \frac{\partial f}{\partial v} + 3x^2 y^2 (3x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4x^2 y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2})$$

$$= 9x^2 y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 12x^2 y^5 \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + 12x^2 y^2 \frac{\partial f}{\partial v} + 9x^6 y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 12x^6 y^5 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

پاسخ سوال ۵: باید دستگاه معادله زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \rightarrow x^2 = x \rightarrow A = \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, B = \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

برای تعیین وضعیت این دو نقطه علامت  $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$  را تعیین می‌کنیم.

$$D(x, y) = 36xy - 9 \rightarrow D(A) = -9 < 0, D(B) = 27 > 0$$

نقطه  $A$  یک نقطه زینی و نقطه  $B$  یک نقطه مینیمم نسبی است.