دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده معدن، نفت و ژئوفیزیک

کنترل زمین و نگهداری

Ground Control & Support

مدرس
مرتضی جوادی اصطهباناتی

پاییز و زمستان ۱۳۹۶

رئوس مطالب

- مقدمه

تئوری تیر و ستون

سنگ های رسوبی بصورت لایه های مستوی با گسترش زیاد هستند.

هر یک از لایه های سنگ رسوبی را می توان بصورت مشابه یک تیر یا ستون (با توجه به شیب لایه) در نظر گرفت.

سیستم نگهداری در فضاهای معدنی (مثل راهروها و کارگاه های استخراج) را نیز بصورت تیر در نظر گرفت.

سیستم نگهداری قائم (مثل جک، پیلار، ستون های هیدرولیکی) را می توان بصورت ستون در نظر گرفت.

برای گالری ها و تونل های دارای سقف قوسی، می توان سیستم نگهداری را بصورت تیر قوسی (آرک) در نظر گرفت.

هر چند، تئوری تیر و ستون با فرضیات ساده کننده ای (در رابطه با نیروهای وارده از طرف زمین) هستند، استفاده از این تئوری ها برای ارزیابی های اولیه مفید است

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

تیر: المان سازه ای که بارگذاری آن بصورت عرضی (transversely) است. بعبارت دیگر، بار وارده در راستای عمود بر محور طولی المان است.

صفحه: المان سازه ای مشابه با تیر بوده که عرض آن دارای مقداری معادل و یا تقریبا معادل (same order of magnitude) با طول تیر باشد.

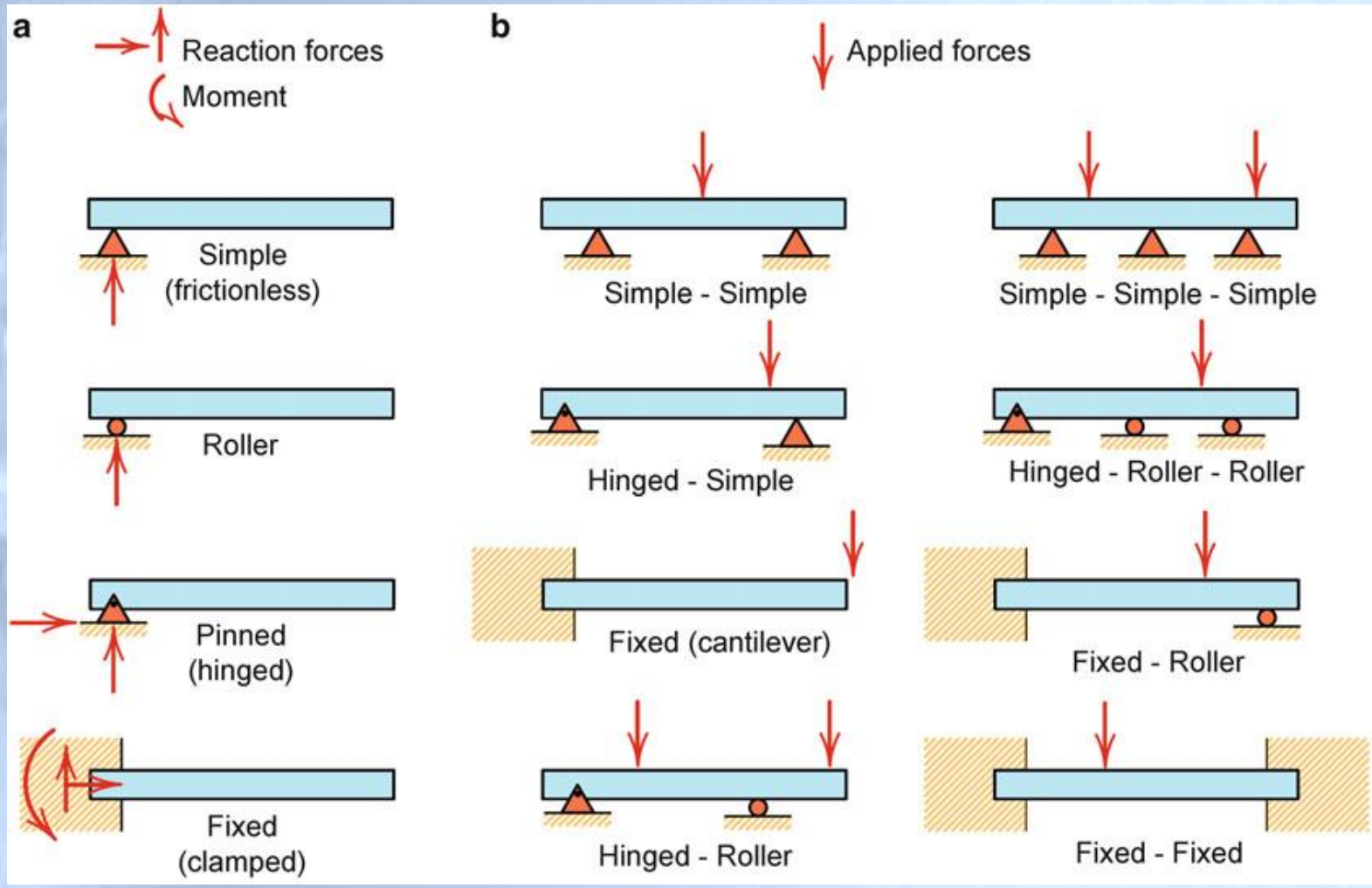
ستون: المان سازه ای که بارگذاری آن بصورت طولی (longitudinally) است. بعبارت دیگر، بار وارده در راستای موازی بر محور طولی المان بوده و این بار عمدتا بصورت فشاری است.

تیر-ستون: المان سازه ای که بارگذاری آن هم بصورت عرضی و هم بصورت طولی است. لایه های سنگ عمدتا دارای چنین عملکردی بوده و ترکیبی از بارهای عرضی و طولی به لایه ها وارد می شود.

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

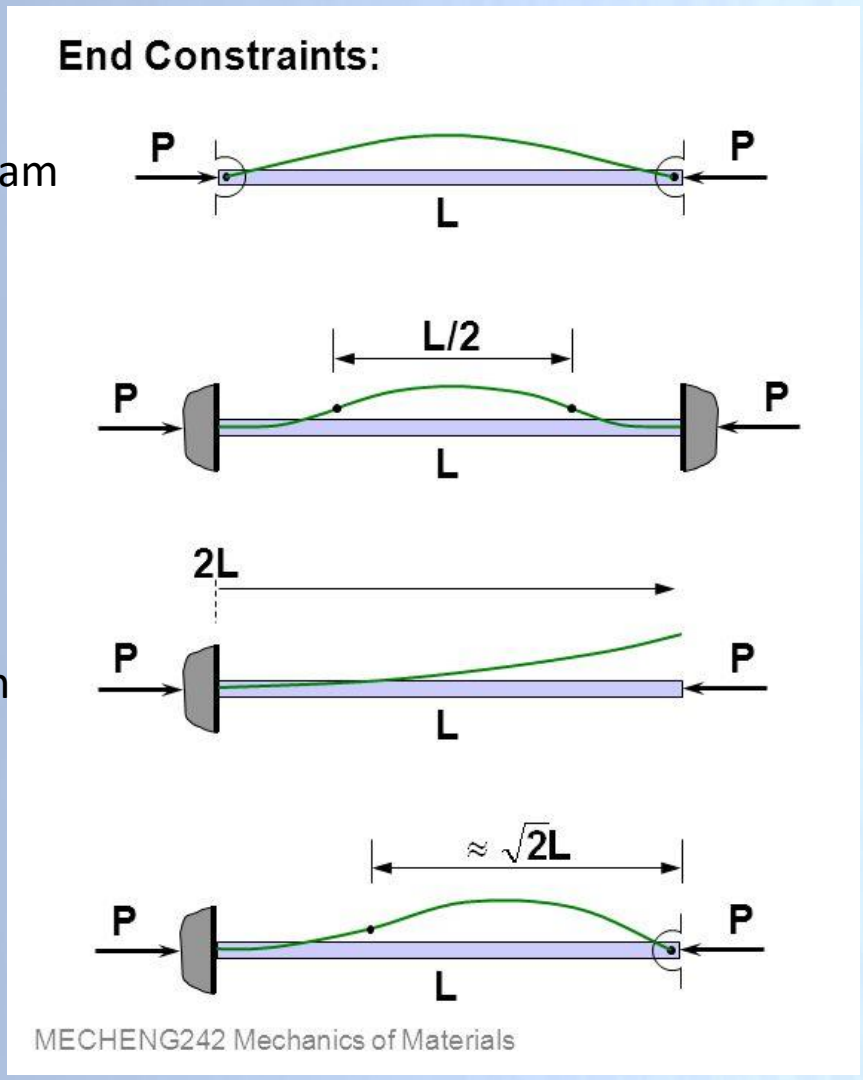
انواع تکیه گاه: غلطکی (roller)، اتصالی (pinned or hinged) و گیردار (Fixed)



REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

انواع تکیه گاه: غلطکی (roller)، اتصالی (pinned or hinged) و گیردار (Fixed)



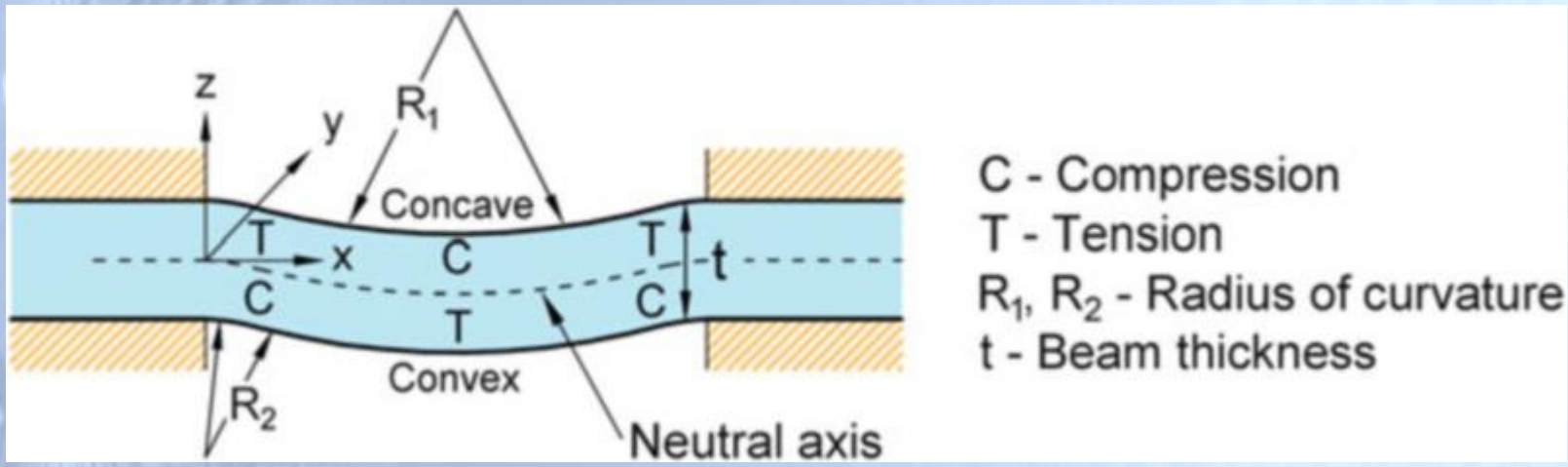
simply supported beam — تیر ساده

تیر دو سر گیردار

cantilevered beam — تیر یک سر گیردار یا طره

تئوری تیر و ستون

تیر



مفاهیم:

تار خنثی

محدوده کشش

محدوده فشار

t: ضخامت تیر

بار گسترده ناشی از وزن تیر (برای عمق واحد)

$$q = \rho g t = \gamma t \quad (N)$$ q, per unit width

$\gamma = unit\ weight\ of\ the\ beam$

$t = beam\ thickness$

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

تیر

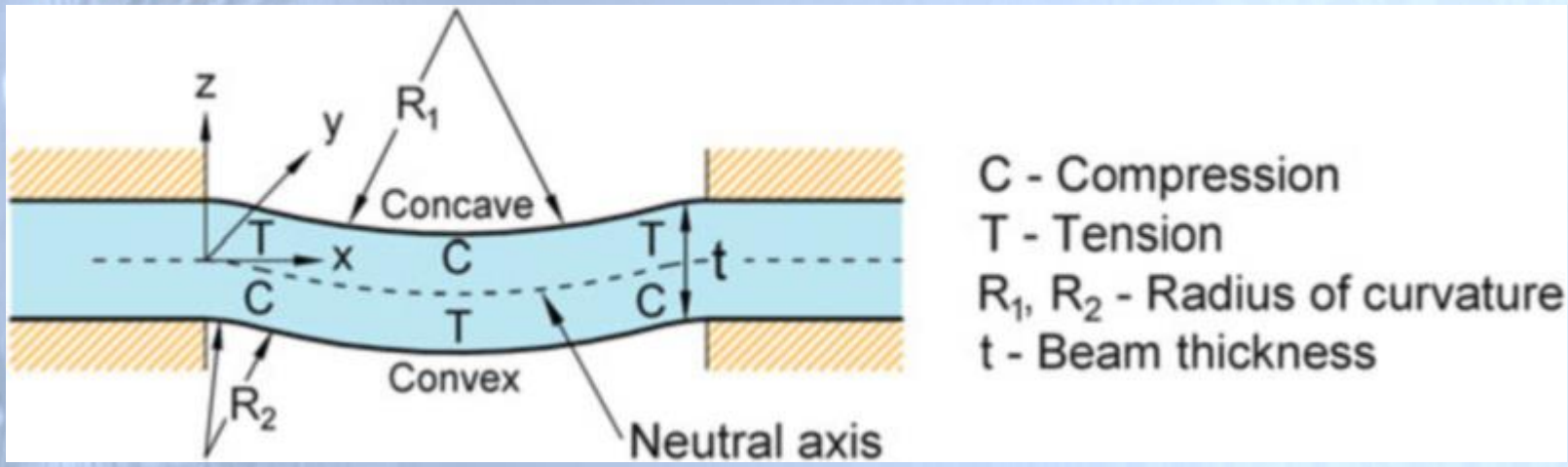
مفاهیم:

تار خنثی

محدوده کشش

محدوده فشار

t: ضخامت تیر



ممان اینرسی تیر

$$I = \frac{bt^3}{12} \qquad (m^4)$$

$b = beam\ width\ (usually\ taken\ to\ be\ unit\ width)$

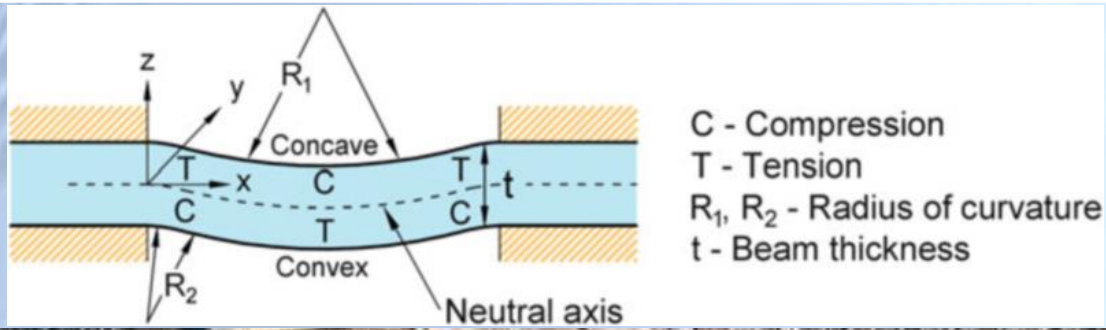
سختی خمشی تیر

bending stiffness or flexural rigidity

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

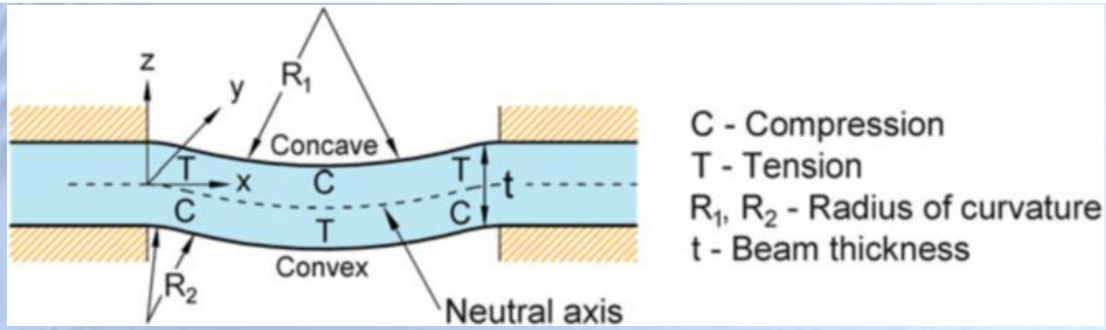
- تیر دو سرگیردار



REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

- تیر یک سرگیردار

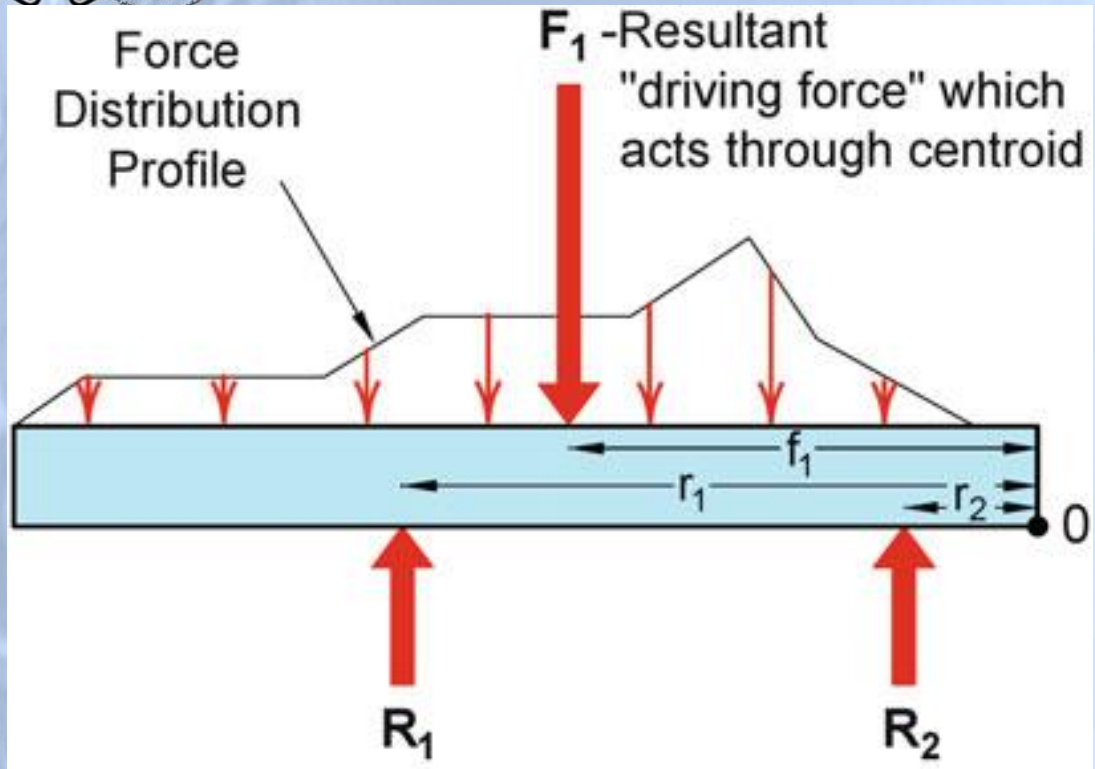


REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

➢ تیر تحت بارگذاری

۱- تعادل استاتیکی



For Equilibrium

$\Sigma F = 0 \quad \therefore R_1 + R_2 - F_1 = 0$

$\Sigma M = 0 \quad \therefore R_1 r_1 + R_2 r_2 - F_1 f_1 = 0$

Solve for R_1, R_2

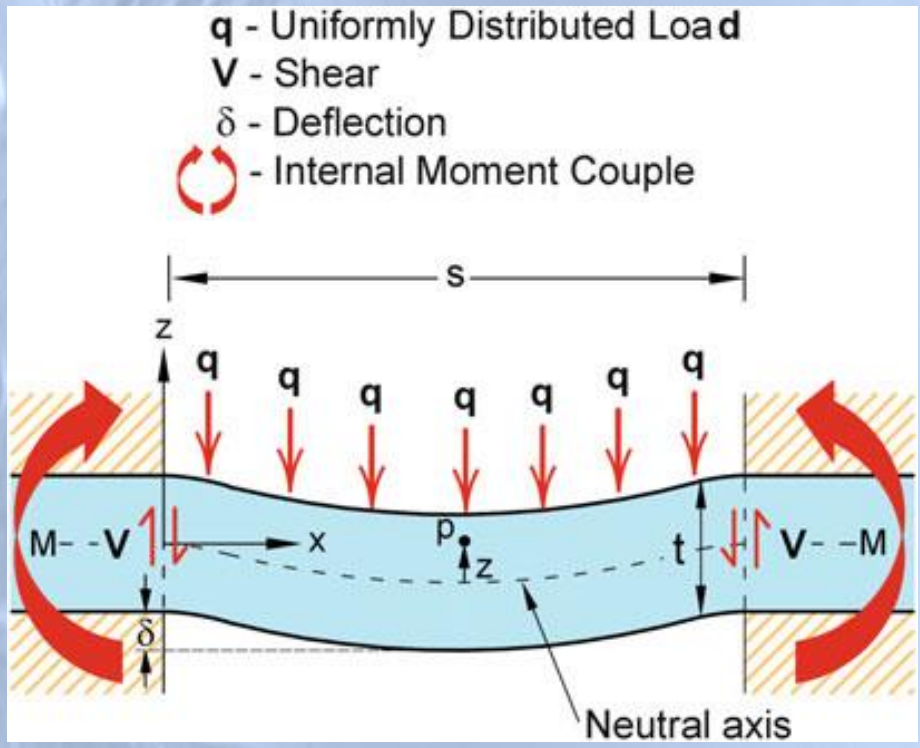
REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

➢ تیر تحت بارگذاری گسترده

۲- تعادل داخلی (نیروهای داخلی)

- برش

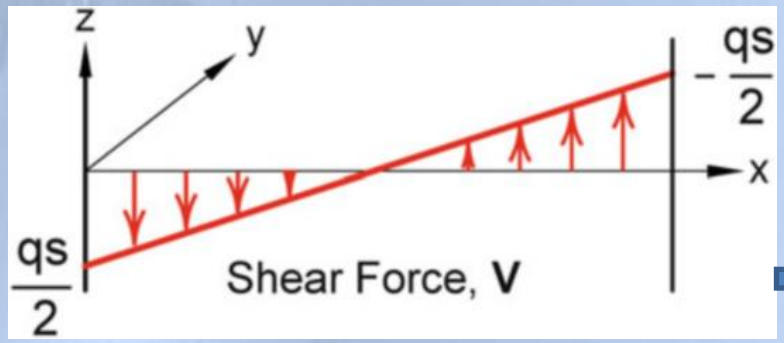


Average shear stress

$$\tau_{xz\ ave} = \frac{V}{A}$$

$\tau_{xz\ ave}$ = *average stress acting in z direction on the yz plane*

V = *transverse shear force acting on the yz plane*



نمودار نیروی برشی برای تیر با هر دو نوع تکه گاه ساده و گیردار

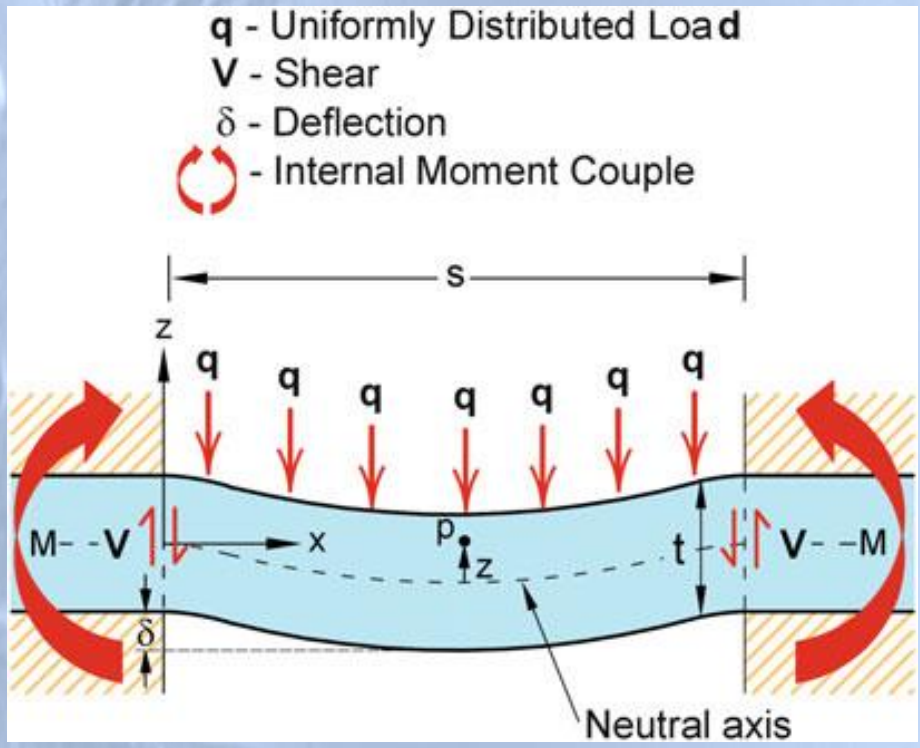
REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

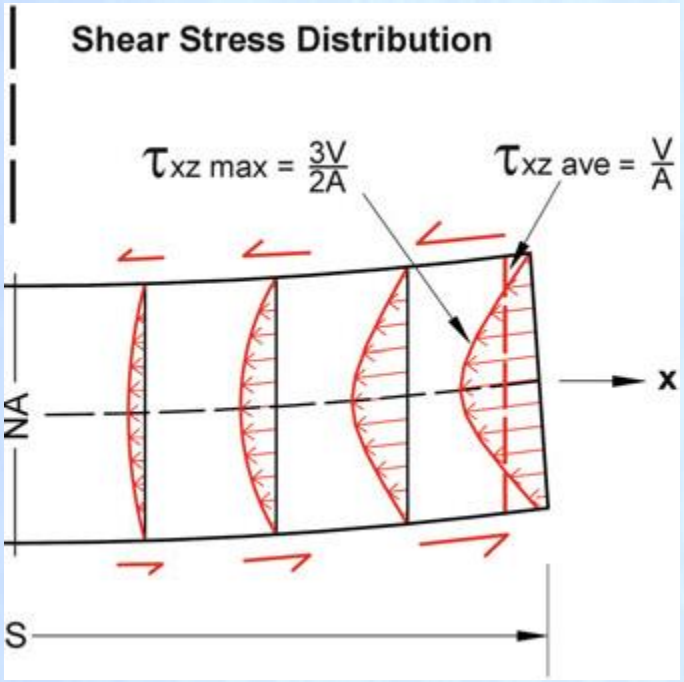
تئوری تیر و ستون

➢ تیر تحت بارگذاری گسترده

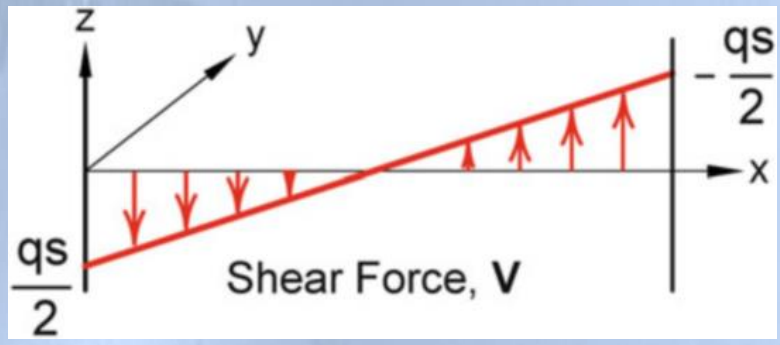
۲- تعادل داخلی (نیروهای داخلی)

- برش

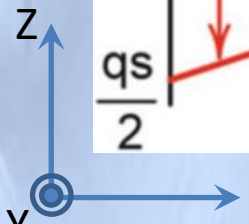




توزیع تنش برشی در مقطع



حداکثر تنش برشی در مقطع ۱/۵ برابر مقدار متوسط



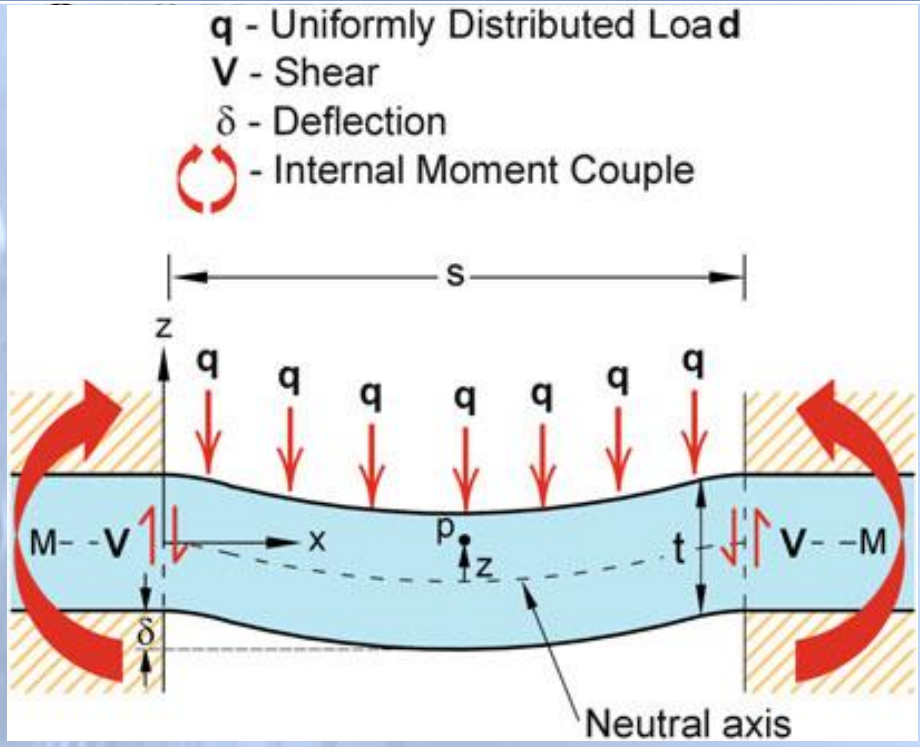
REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

➢ تیر تحت بارگذاری گسترده

۲- تعادل داخلی (نیروهای داخلی)

- نیرو (تنش) محوری



نیروهای محوری (کشش و فشار) در طرفین تار خنثی

نیروهای محوری باعث ایجاد انحنا (خمش) و ممان خمشی می شوند.

ممان خمشی در هر نقطه از تا خنثی تنش محوری زیر را ایجاد می کند:

fibre stress, σf

$$\sigma_f = \frac{Mz}{I}$$

M = bending moment at point p

z = the normal distance from the neutral axis to point p

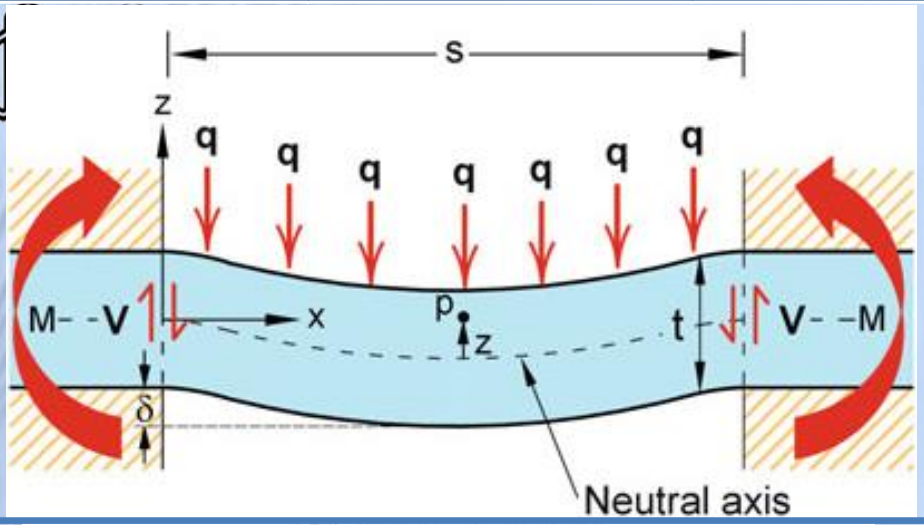
REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

➢ تیر تحت بارگذاری گسترده

۲- تعادل داخلی (نیروهای داخلی)

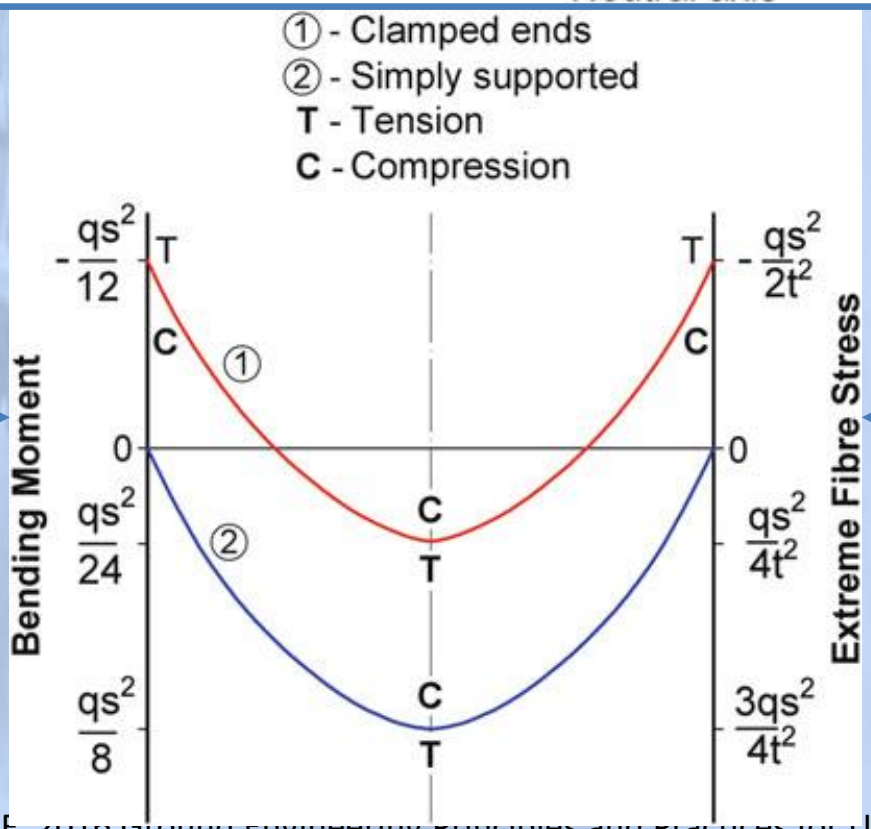
- نیرو (تنش) محوری



ممان خمشی در هر نقطه از تا خنثی تنش محوری زیر را ایجاد می کند:

$$\sigma_f = \frac{Mz}{I}$$

بیشترین تنش محوری در حالت z=0.5 t

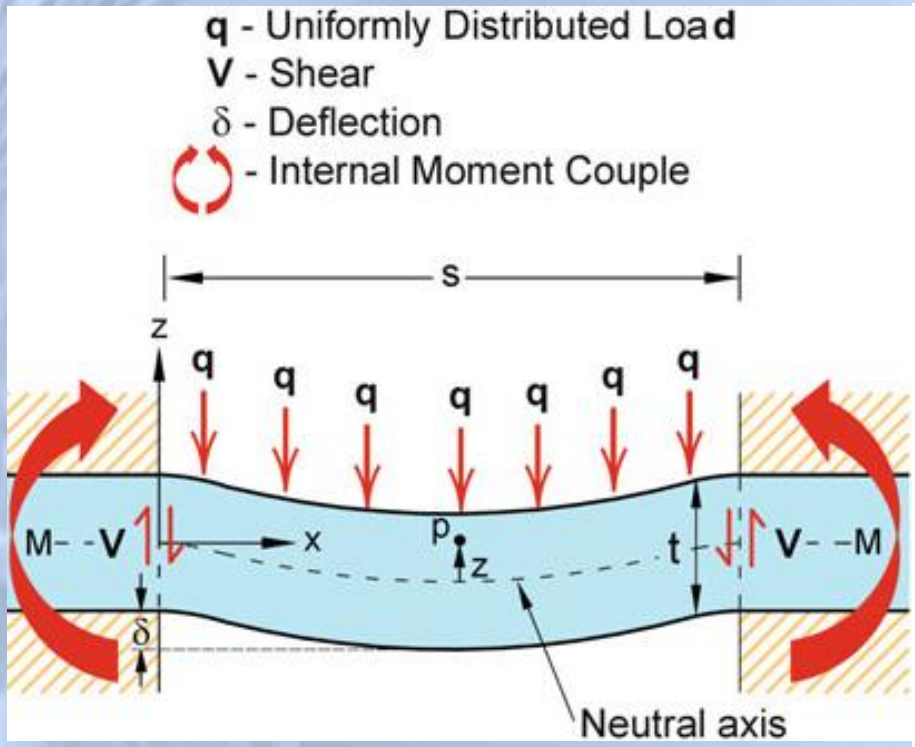


در نمودار روبرو:
(۱) مربوط به تیر با تکیه گاه گیردار است
(۲) مربوط به تیر با تکیه گاه ساده است.

در نمودار روبرو:
عرض یا عمق تیر واحد در نظر گرفته شده است.

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

➢ تیر تحت بارگذاری گسترده (خلاصه روابط): تعریف پارامترها



Symbol	Parameter
p	point of interest
s	span of beam (m)
x	longitudinal distance from end of beam to point p (m)
t	thickness of beam (m)
z	normal (transverse) distance from neutral axis to point p (m)
q	load per unit width acting on beam (N)
γ	unit weight of beam (N/m^3)
δ_x	deflection of beam at a distance of 'x' from the beam end (m)
E	elastic modulus of beam (N/m^2)
I	moment of inertia (m^4)
M_x	bending moment at a distance of 'x' from the beam end (N m)
σ_x	bending stress at a distance of 'x' from the beam end (N/m^2)
V_x	shear force at a distance of 'x' from the beam end (N)
τ_{xz}	shear stress generated by shear force V_x (N/m^2)

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

➢ تیر با دو تکیه گاه گیردار تحت بارگذاری گسترده (خلاصه روابط)

Table A3.2 Formulations and maximum values for deformation parameters associated with a uniformly loaded, clamped beam of rectangular cross-section and unit width

Parameter	Formula		Maximum value	
Deflection δ_x	$\delta_x = \frac{qx^2(s-x)^2}{24EI} = \frac{\gamma x^2(s-x)^2}{2Et^2}$	Eq. A3.1	$\frac{\gamma s^4}{32Et^2}$ at $\frac{s}{2}$	Eq. A3.2
Bending Moment M_x	$M_x = \frac{q(6sx - 6x^2 - s^2)}{12}$	Eq. A3.3	$-\frac{qs^2}{12}$ at abutment	Eq. A3.4
Moment of Inertia	$I = \frac{bt^3}{12} = \frac{t^3}{12}$ for unit width	Eq. A3.5	–	–
Bending Stress σ_x	$\sigma_x = \frac{M_x z}{I} = \frac{12M_x z}{t^3}$	Eq. A3.6	$\frac{qs^2}{2t^2} = \frac{\gamma s^2}{2t}$ at abutment	Eq. A3.7
Shear Force V_x	$V_x = q\left(\frac{s}{2} - x\right)$	Eq. A3.8	$\frac{qs}{2}$ at abutment	Eq. A3.9
Shear Stress τ_{xz}	$\tau_{xy} = \frac{3V_x}{2}\left(\frac{t^2 - 4z^2}{t^3}\right)$	Eq. A3.10	$\frac{3qs}{4t} = \frac{3\gamma s}{4}$ in neutral axis at abutments	Eq. A3.11

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

➢ تیر با دو تکیه گاه ساده تحت بارگذاری گسترده (خلاصه روابط)

Table A3.3 Formulations and maximum values for deformation parameters associated with a uniformly loaded, simply supported beam of rectangular cross-section and unit width

Parameter	Formula		Maximum value	
Deflection δ_x	$\delta_x = \frac{qx(s^3 - 2sx^2 + s^3)}{24EI} = \frac{\gamma x(s^3 - 2sx^2 + s^3)}{2Et^2}$	Eq. A3.12	$\frac{5\gamma s^4}{32Et^2}$ at $\frac{s}{2}$	Eq. A3.13
Bending Moment M_x	$M_x = \frac{qx(s - x)}{2}$	Eq. A3.14	$-\frac{qs^2}{8}$ at $\frac{s}{2}$	Eq. A3.15
Moment of Inertia	$I = \frac{bt^3}{12} = \frac{t^3}{12}$ for unit width	–	–	–
Bending Stress σ_x	$\sigma_x = \frac{M_x z}{I} = \frac{12M_x z}{t^3}$	Eq. A3.16	$\frac{3qs^2}{4t^2} = \frac{3\gamma s^2}{4t}$ at $\frac{s}{2}$	Eq. A3.17
Shear Force V_x	$V_x = q\left(\frac{s}{2} - x\right)$	Eq. A3.18	$\frac{qs}{2}$ at abutment	Eq. A3.19
Shear Stress τ_{xz}	$\tau_{xy} = \frac{3V_x}{2}\left(\frac{t^2 - 4z^2}{t^3}\right)$	Eq. A3.10	$\frac{3qs}{4t} = \frac{3\gamma s}{4}$ in neutral axis at abutments	Eq. A3.11

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

ستون ها

بار محوری می تواند هم بر روی محور اصلی و هم خارج از محور اصلی اعمال شود.

بار محوری می تواند باعث خیز ستون شود که به آن کمانش گفته می شود.

عملکرد ستون به نوع تکیه گاه های ستون وابسته است.

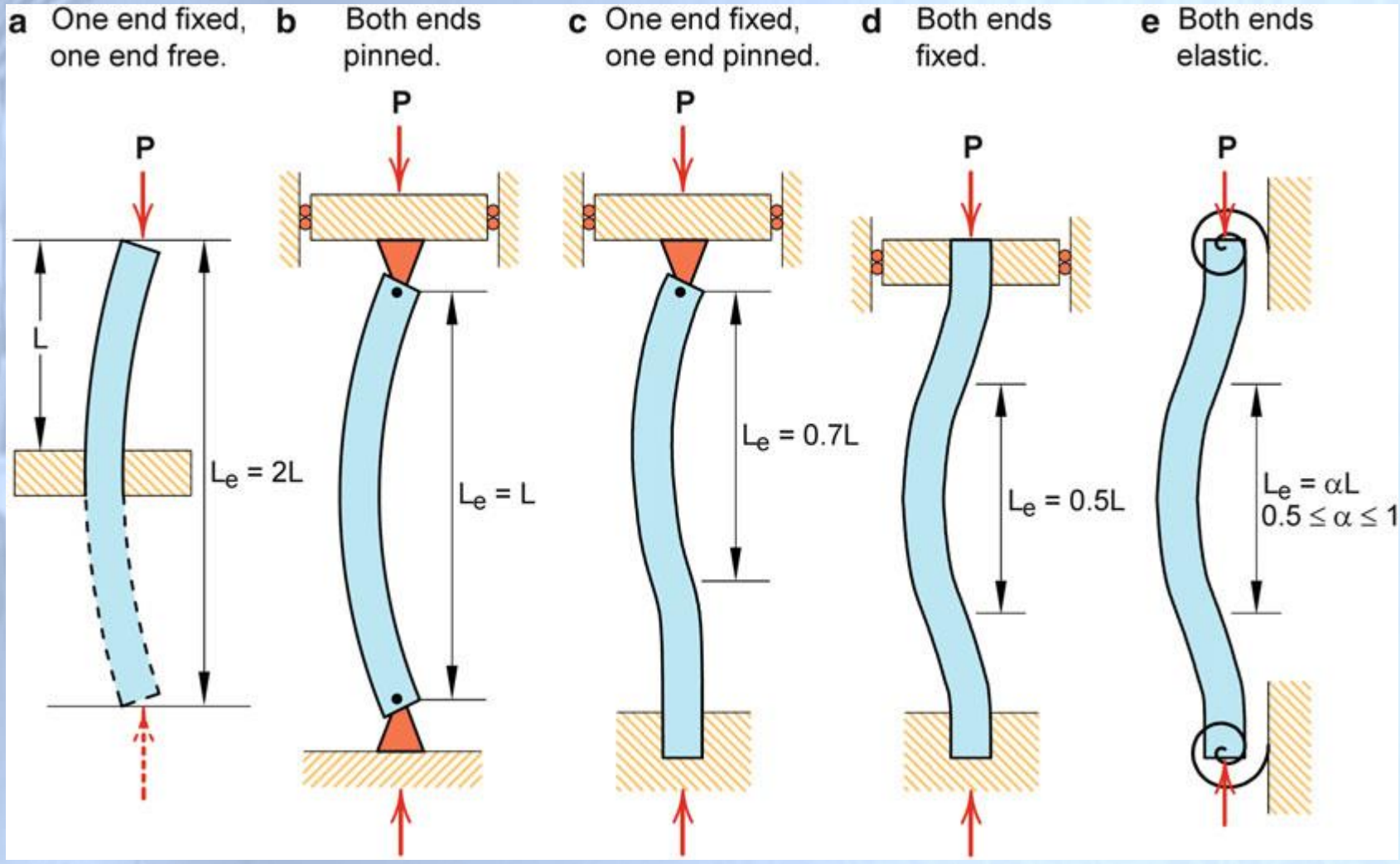
طولی از ستون که بین دو نقطه بدون ممان قرار گرفته را طول موثر ستون می نامند

در حقیقت، برای حذف اثر تکیه گاه های مختلف، از طول موثر استفاده می شود. در این حالت، رفتار ستون در محدوده واقع بین نقاط بدون ممان(محدوده موثر ستون) برای تکیه گاه های مختلف یکسان خواهد بود.

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

ستون ها (انواع تکیه گاه و طول موثر)



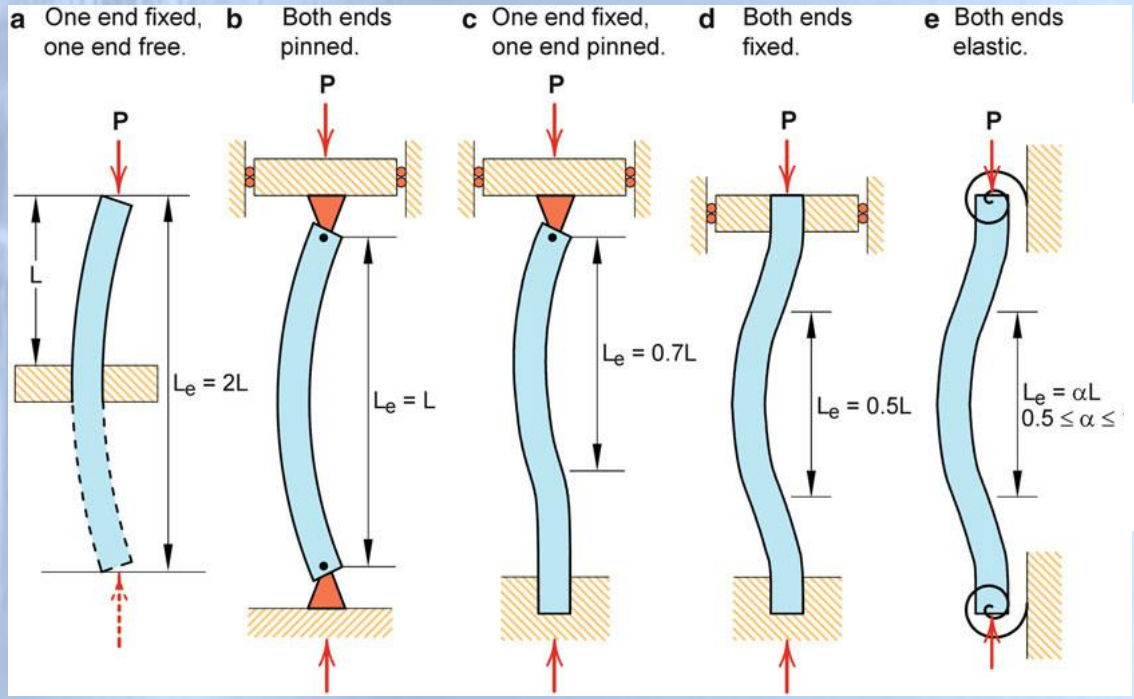
REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

➢ ستون ها (انواع تکیه گاه و طول موثر)

طولی از ستون که بین دو نقطه بدون ممان قرار گرفته را طول موثر ستون می نامند

در حقیقت، برای حذف اثر تکیه گاه های مختلف، از طول موثر استفاده می شود. در این حالت، رفتار ستون در محدوده واقع بین نقاط بدون ممان(محدوده موثر ستون) برای تکیه گاه های مختلف یکسان خواهد بود.



$$Effective\ Length = L_e = KL$$

where

K = *effective length coefficient*
= 1 *for both ends pinned*
= 0.5 *for both ends fixed (clamped)*
= *2.0 for one end fixed and the other free to move laterally*

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

ستون ها

ضریب رعنایی یا کمال ستون (ارتباط بین ارتفاع ستون و ممان ستون)

ضریب رعنایی بیان کننده مقاومت ستون در برابر کمانش است.

ضریب رعنایی بصورت نسبت ارتفاع ستون به شعاع ژیراسیون تعریف می شود.

$$Slenderness\ ratio = \lambda = L/r$$

$$r = the\ least\ radius\ of\ gyration = \sqrt{I/A}$$

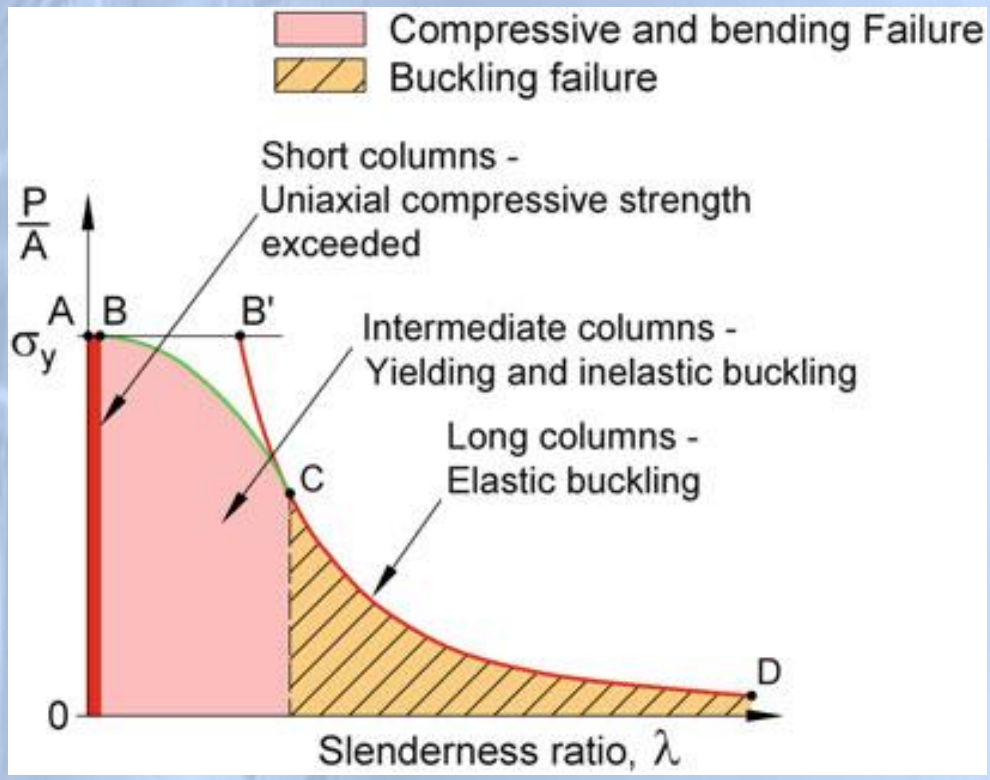
REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

$$Slenderness\ ratio = \lambda = L/r$$

ستون ها

بر اساس ضریب رعنایی، ستون ها به سه دسته: کوتاه، متوسط و بلند تقسیم می شوند.



ستون کوتاه: فقط تحت بار قائم بوده و کمانش ندارند. با افزایش بار قائم، با رسیدن تنش به حد الاستیک، ستون دچار شکست می شود.

ستون متوسط: تحت بار قائم و کمانش (شکست در تنش قائم کمتری اتفاق می افتد)

ستون بلند: شکست عمدتا بدلیل کمانش و در بار محوری بسیار کمتری اتفاق می افتد

شکست ناشی از کمانش (خمش ناشی از لنگر) در ستون های بلند و متوسط، **Euler Buckling** نامیده می شود. در حقیقت، خیز جانبی و نیروی خارج از محور باعث این نوع شکست می شود.

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

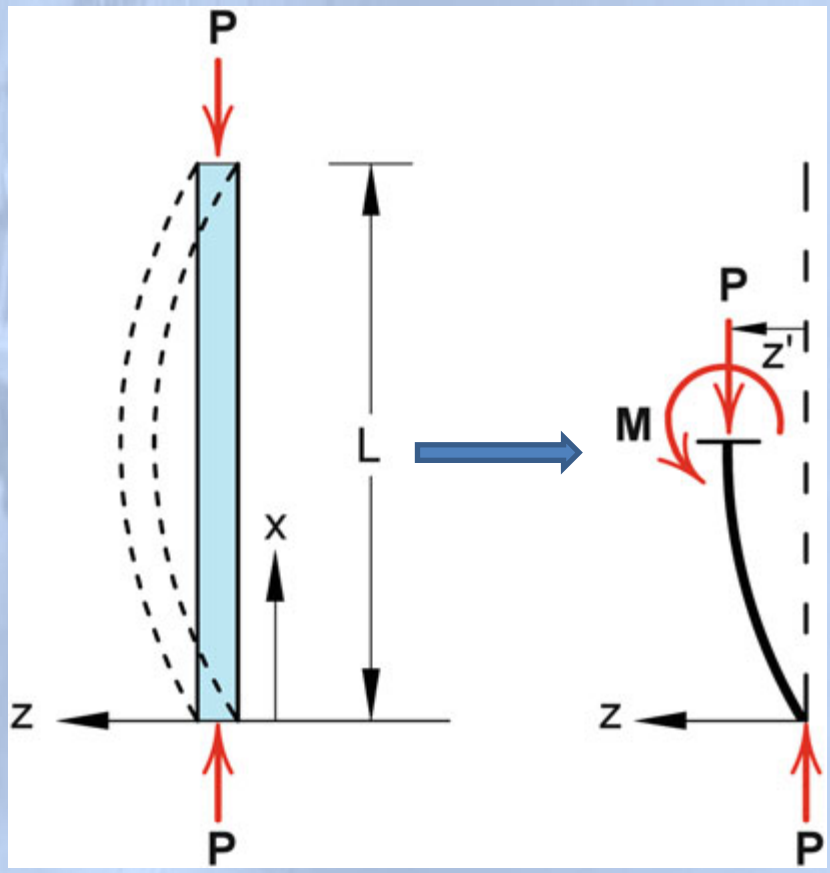
تئوری تیر و ستون

$$Slenderness\ ratio = \lambda = L/r$$

ستون ها

خیز جانبی (کمانش) ستون باعث ایجاد یک ممان (گشتاور) در ستون می شود.

اگر مقدار خیز جانبی (کمانش) برابر با z’ باشد، مقدار ممان P z’ در ستون ایجاد می شود.



ممان P z’ بعنوان ممان خارجی به ستون اعمال می شود

ممان داخلی نیز در ستون وجود دارد (تحت لنگر داخلی)

شرط تعادل ستون، برابر بودن ممان داخلی و خارجی است:

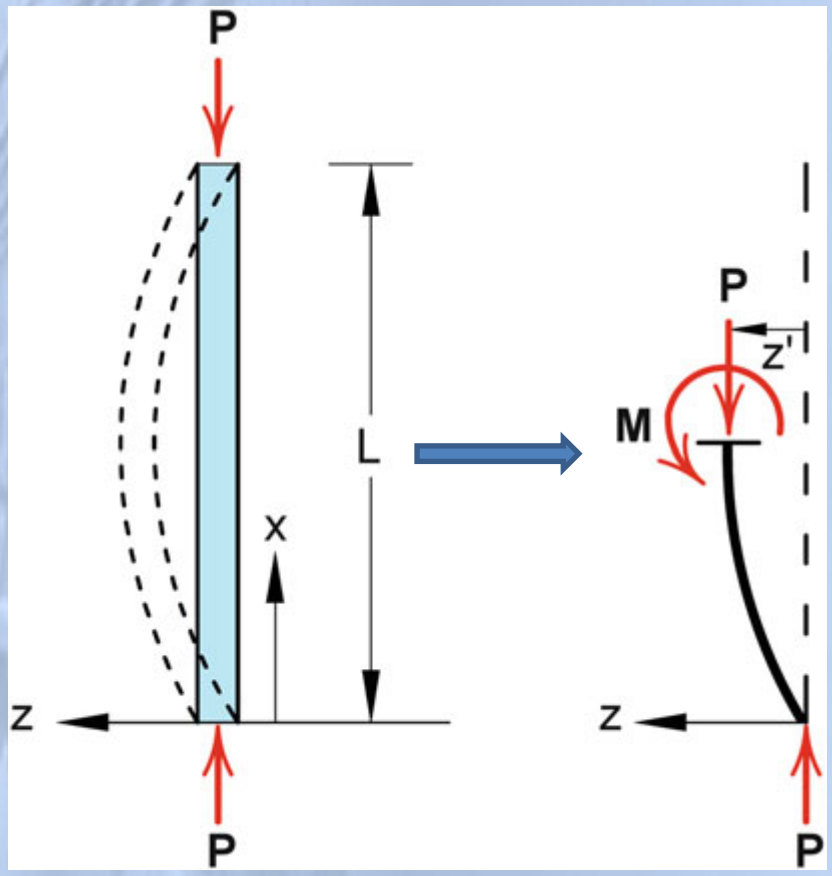
$$\sum M_{int} + \sum M_{ext} = 0$$

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

$$Slenderness\ ratio = \lambda = L/r$$

ستون ها



شرط تعادل ستون، برابر بودن ممان داخلی و خارجی است.

$$\sum M_{int} + \sum M_{ext} = 0$$

ممان خارجی (ناشی از خیز جانبی یا کمانش ستون در مقداری از بار قائم (P) به مقدار ممان داخلی می رسد. این مقدار از بار قائم تحت عنوان «نیروی محوری بحرانی» Pcr نامیده می شود.

$$\sum M_{int} + \sum M_{ext} = 0$$

$$\therefore M_{int} + P_{cr}.z' = EI\frac{d^2z}{dx^2} + P_{cr}.z' = 0$$

$$\therefore EI\frac{d^2z}{dx^2} = -P_{cr}.z'$$

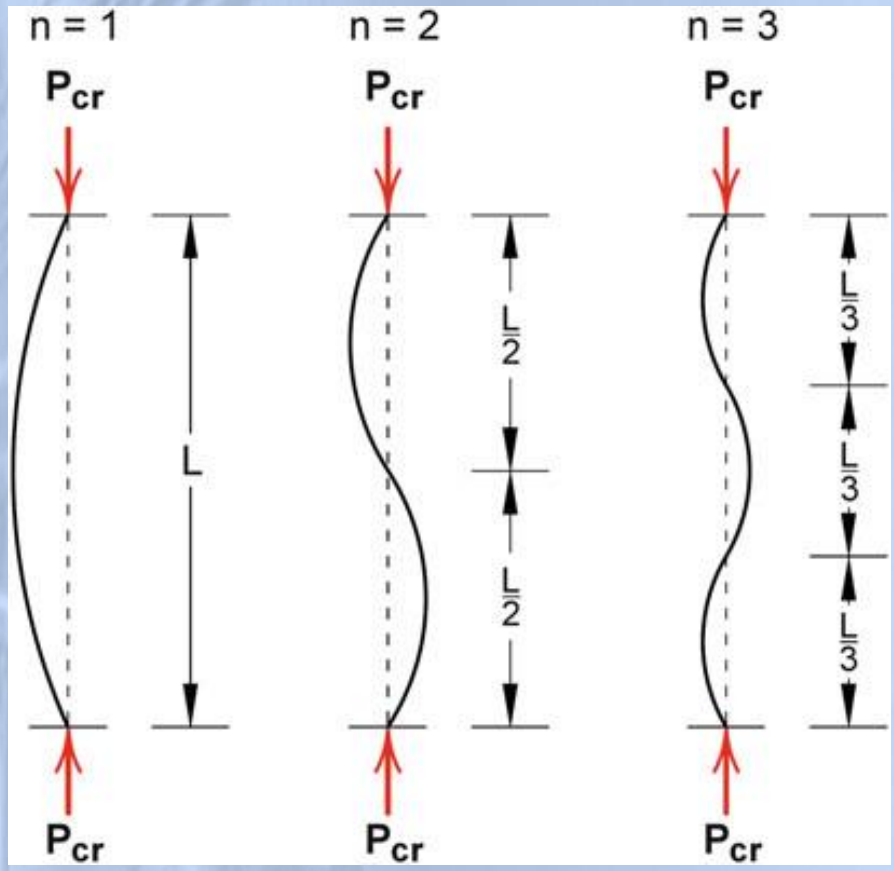
حل معادله

$$P_{cr} = \frac{n^2\pi^2EI}{(KL)^2}$$

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

ستون ها

$$Slenderness\ ratio = \lambda = L/r$$



$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{(KL)^2}$$

n = the number of possible elastic instability modes

$$Effective\ Length = L_e = KL \qquad (2.42)$$

where

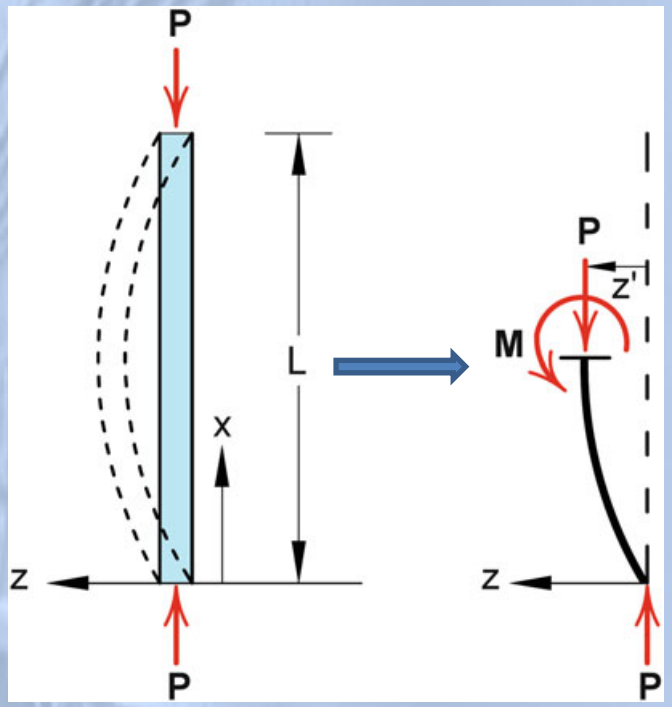
K = *effective length coefficient*
= 1 *for both ends pinned*
= 0.5 *for both ends fixed (clamped)*
= *2.0 for one end fixed and the other free to move laterally*

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

ستون ها

$$Slenderness\ ratio = \lambda = L/r$$



$$P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

$$n = 1 \longrightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A(KL)^2} = \frac{\pi^2 Er^2 A}{A(KL)^2} = \frac{\pi^2 E}{(K\lambda)^2} = \frac{\pi^2 Er^2}{(L_e)^2}$$

critical stress و یا تنش تسلیم بحرانی ستون

بهترین حالت یک ستون این است که تنش تسلیم بحرانی (ناشی از کمانش) برابر با تنش تسلیم ماده تشکیل دهنده ستون (σ_y) باشد. برای این هدف باید:

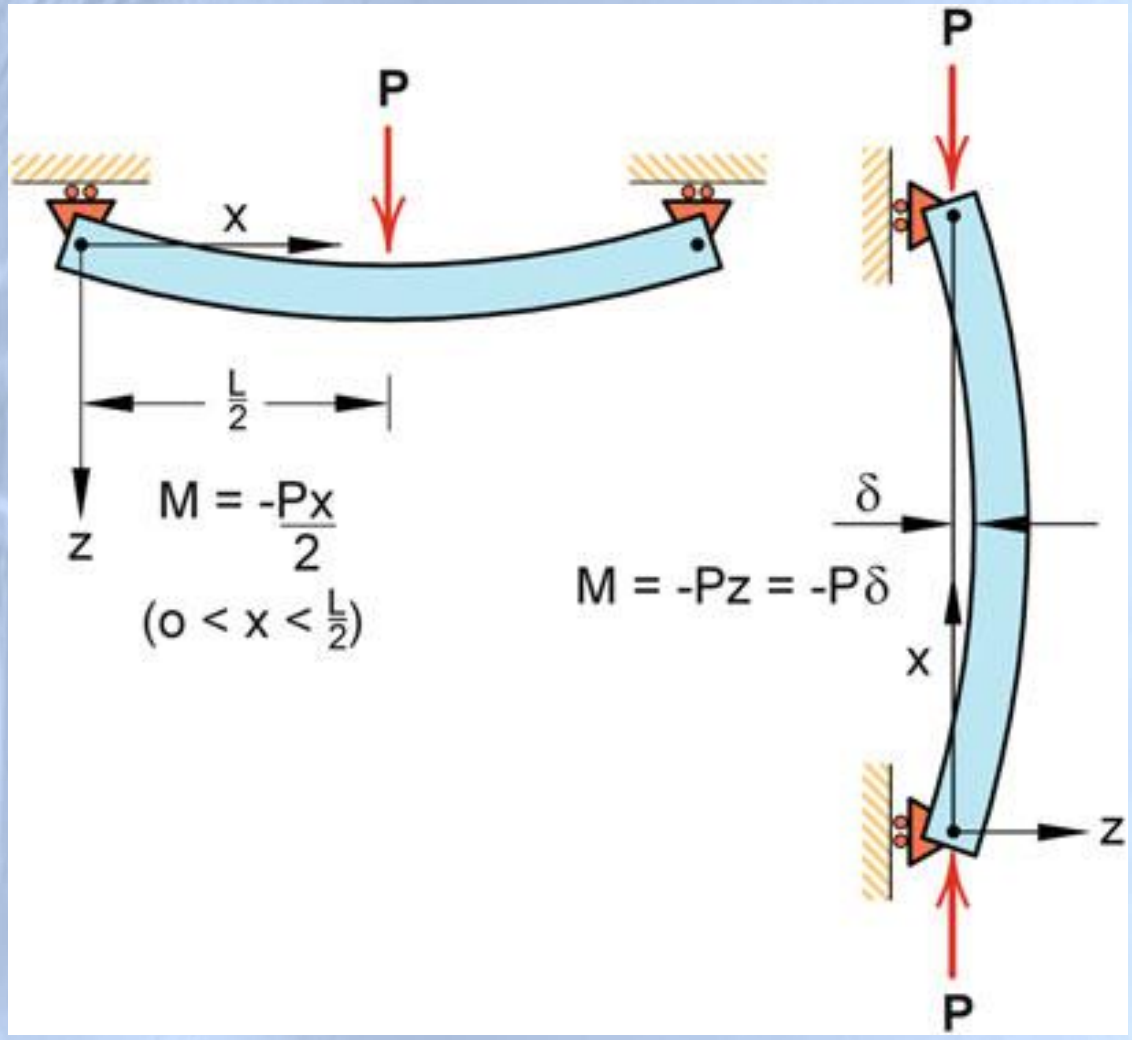
$$\frac{L_e}{r} \geq \sqrt{\frac{E\pi^2}{\sigma_y}}$$

r شعاع ژیراسیون، E مدول الاستیک ماده

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining

تئوری تیر و ستون

➢ تیر و ستون تحت بارگذاری طولی و عرضی



$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I}$$

M =maximum bending moment due to the combined effect of axial and transverse loads

REF: 2016 Ground Engineering Principles and Practices for Underground Coal Mining