نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

دانشکده علوم ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۱/۸/۲۳**

وقت : **۹۰** دقیقه

امتحان میان‌ترم درس **معادلات دیفرانسیل** (۸ گروه هماهنگ)

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۴۰۲-۱۴۰۱**

توجه :

پاسخ‌ها را توسط نرم‌افزاری مانند Camscanner به صورت یک فایل PDF با حجم مناسب در آورده و از طریق سامانه LMS ارسال نمایید.

ارسال فایل‌ها را به دقایق آخر موکول نکنید چون سامانه راس ساعت بسته خواهد شد.

سوال ۱- مسیرهای قائم متناظر خانواده منحنی‌های زیر را بدست آورید. **۱۵ نمره**

$$y=\frac{۱}{c-x^{۲}}\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

سوال ۲- معادله مرتبه اول زیر را حل کنید. **۱۵ نمره**

$$۲y'-\frac{۱}{x}y=-y^{۳}\cos x$$

سوال ۳- جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را بدست آورید. **۱۵ نمره**

$$(xy+y^{۲}+y)dx+(x^{۲}+۳xy+۲x+\frac{\sin y}{y})dy=۰$$

سوال ۴- معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل کنید. **۱۵ نمره**

$$y'=\frac{۲x+y+۱}{x-۲y+۱}$$

سوال ۵- تابع $y_{۱}=x$ یک جواب برای معادله همگن متناظر معادله دیفرانسیل ناهمگن زیر می‌باشد.

$$x^{۲}y''+۳xy'-۳y=x\quad ,\ x>۰$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل ناهمگن را بیابید. **۲۰ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : ابتدا معادله دیفرانسیل این دسته منحنی‌ها پیدا می‌کنیم : $y' = \dfrac{2x}{(c-x^2)^2} = 2xy^2 \ \rightarrow\ y' = 2xy$

با جایگذاری $\dfrac{-1}{y'}$ به جای y' داریم $\dfrac{-1}{y'} = 2xy^2$ که معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های قائم خواهد بود. این معادله دیفرانسیل یک معادله جدایی پذیر است و به راحتی حل می‌شود : $2ydy^2 = \dfrac{-1}{x}dx \ \rightarrow\ \int 2y^2dy = \int \dfrac{-1}{x}dx \ \rightarrow \boxed{\dfrac{2}{3}y^3 = -\ln x + c}$

پاسخ سوال۲ : این یک معادله برنولی است. دو طرف معادله را بر y^3 تقسیم می‌کنیم. $\dfrac{2y'}{y^3} - \dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{y^2} = -\cos x$

اکنون از تغییر متغیر $u = \dfrac{1}{y^2}$ استفاده می‌کنیم. $-u' - \dfrac{1}{x}\times u = -\cos x \ \rightarrow\ u' + \dfrac{1}{x}u = \cos x$

یک معادله خطی مرتبه اول ساخته شده است که جواب عمومی آن عبارت است از:

$$u = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(c + \int (\cos x)e^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right) \rightarrow u = \frac{1}{x}\left(c + \int x\cos x dx\right) \ \rightarrow\ u = \frac{1}{x}(c + x\sin x + \cos x)$$

و در نهایت داریم : $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{x}(c + x\sin x + \cos x) \ \rightarrow \boxed{x = y^2(c + x\sin x + \cos x)}$

پاسخ سوال۳ : قرار می‌دهیم : $M = xy + y^2 + y \ ,\ N = x^2 + 3xy + 2x + \dfrac{\sin y}{y}$ و داریم :

$$M_y = x + 2y + 1 \ ,\ N_x = 2x + 3y + 2$$

چون $M_y \neq N_x$ پس این معادله کامل نیست. اما مشاهده می‌کنیم که $\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{x+y+1}{xy+y^2+y} = \dfrac{1}{y}$ یک تابع فاقد x است.

یعنی این معادله یک عامل انتگرالساز یک متغیره $\mu = e^{\int \frac{1}{y}dy} = y$ دارد. دو طرف معادله را در این عامل انتگرالساز ضرب می‌کنیم.

$$(xy^2 + y^3 + y^2)dx + (x^2y + 3xy^2 + 2xy + \sin y)dy = 0$$

این معادله یک معادله کامل است و داریم :

$$f(x,y) = \int (x^2y + 3xy^2 + 2xy + \sin y)dy = \frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 - \cos y + h(x)$$

می‌توان دید که $h(x) = 0$ و جواب معادله عبارت است از : $\boxed{\dfrac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 - \cos y = c}$

پاسخ سوال۴ : برای تبدیل این معادله به یک معادله همگن ، تغییر متغیر $x = X + a \ ,\ y = Y + b$ را اعمال می‌کنیم :

$$Y' = \frac{2X + Y + (2a + b + 1)}{X - 2Y + (a - 2b + 1)}$$

اکنون باید داشته باشیم $2a + b + 1 = 0 \ ,\ a - 2b + 1 = 0$ که نتیجه می‌دهد : $a = \dfrac{-3}{5}\ ,\ b = \dfrac{1}{5}$

با جایگذاری این مقادیر، به معادله همگن $Y' = \dfrac{2X+Y}{X-2Y}$ می‌رسیم و تغییر متغیر $Y = Xu$ را اعمال می‌کنیم.

$$u + Xu' = \frac{2X + Xu}{X - 2Xu} \ \rightarrow\ Xu' = \frac{2+u}{1-2u} - u \ \rightarrow\ X\frac{du}{dX} = \frac{2(1+u^2)}{1-2u} \ \rightarrow\ \frac{(1-2u)}{2(1+u^2)}du = \frac{dX}{X}$$

این یک معادله جدایی پذیر است و داریم :

$$\int \frac{(1-2u)}{2(1+u^2)}du = \int \frac{dX}{X} \quad \to \quad \frac{1}{2}(\arctan u - \ln(1+u^2)) = \ln X + c$$

$$\arctan\frac{Y}{X} = \ln[X^2(1+\frac{Y^2}{X^2})] + 2c \quad \to \quad \arctan\frac{Y}{X} = \ln(X^2+Y^2)+2c$$

$$\to \boxed{\arctan\frac{5y-1}{5x+3} = \ln[(5x+3)^2+(5y-1)^2]+c_0}$$

پاسخ سوال۵ : چون $y_1 = x$ یک جواب معادله خطی مرتبه دوم است، تغییر متغیر $y = y_1u = xu$ را در نظر می‌گیریم.

$$x^2(2u'+xu'')+3x(u+xu')-3xu = x \quad \to \quad x^3u''+5x^2u' = x$$

به یک معادله مرتبه دوم بر حسب مجهول u رسیده ایم که فاقد u می باشد. اکنون تغییر متغیر $v = u'$ را اعمال می‌کنیم.

$$x^3v'+5x^2v = x \quad \to \quad v'+\frac{5}{x}v = \frac{1}{x^2} \quad \to \quad v = e^{-\int\frac{5}{x}dx}(c+\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{5}{x}dx}dx) \quad \to v = \frac{1}{x^5}(c+\int x^3dx)$$

$$v = \frac{1}{x^5}(c+\frac{1}{4}x^4) \quad \to v = \frac{c}{x^5}+\frac{1}{4x} \quad \to \quad u' = \frac{c}{x^5}+\frac{1}{4x} \quad \to \quad u = \frac{-c}{4x^4}+\frac{1}{4}\ln x + c_0$$

جواب نهایی معادله عبارت است از : $\boxed{y = c_0x+\frac{c_1}{x^3}+\frac{x}{4}\ln x}$