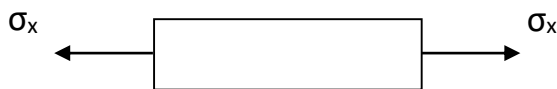


## الاستیسیته (کشسانی) همسان گرد

هر چند هدف از این درس، بررسی تغییرشکل پلاستیکی مواد است ولی بررسی روابط تنش-کرنش در ناحیه الاستیک از لحاظ فهم و درک تنش‌های باقیمانده (*residual stress*) و بازگشت فنری (*spring back*) در مواد سودمند است. همچنین با این بررسی، تفاوت بین روابط تنش-کرنش در ناحیه الاستیک و پلاستیک آشکار می‌شود.

روابط تنش-کرنش را روابط اصلی (نهادی) (*constitutive equations*) می‌نامند که به رفتار فلز وابسته بوده و برای هر ماده متفاوت است.

در کشسانی، این روابط همان روابط هوک است که در کشش تک‌محوری به صورت زیر بیان شد:



$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

در حالت بالا در اثر اعمال  $\sigma_x$ ، کرنش‌های انقباضی در جهات جانبی  $y$  و  $z$  ایجاد می‌شود و این کرنش نسبت مشخصی از کرنش در جهت طولی است:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$\nu$ : ضریب پواسون و نسبت کرنش جانبی به کرنش محوری یا طولی است.

$$\text{poisson's ratio} = \frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}}$$

برای یک ماده کشسان کاملاً همسان‌گرد  $\nu = 0.25$  ولی برای اکثر فلزات  $\nu = 0.33$ .

می‌توان روابط تنش-کرنش الاستیک را به حالت تنش‌های سه‌بعدی تعمیم داد (در حضور ۹ مؤلفه تنش، روابط بین تنش و کرنش‌های محوری:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

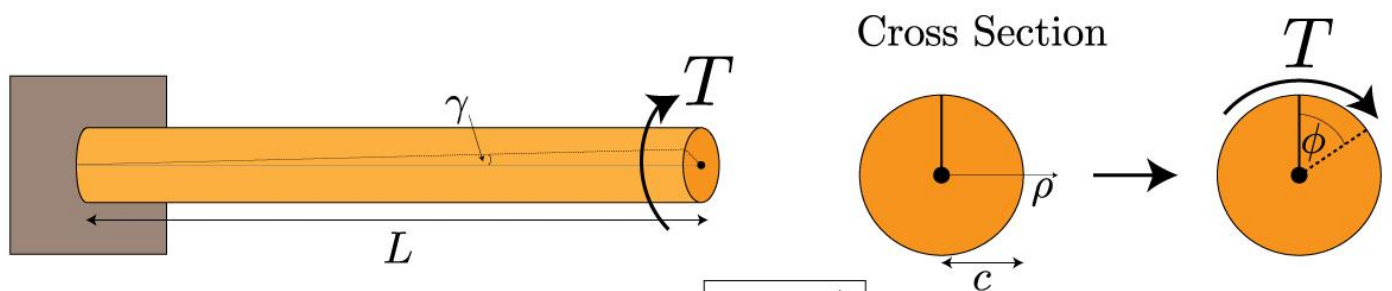
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

روابط بین تنش‌ها و کرنش‌های برشی:

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 2\varepsilon_{xy}$$

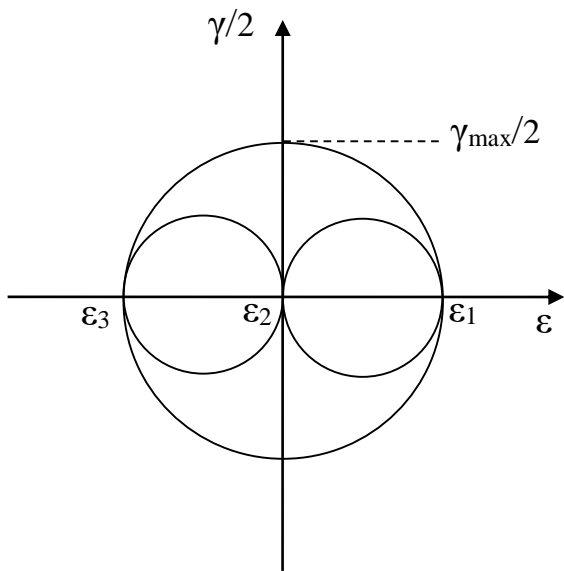
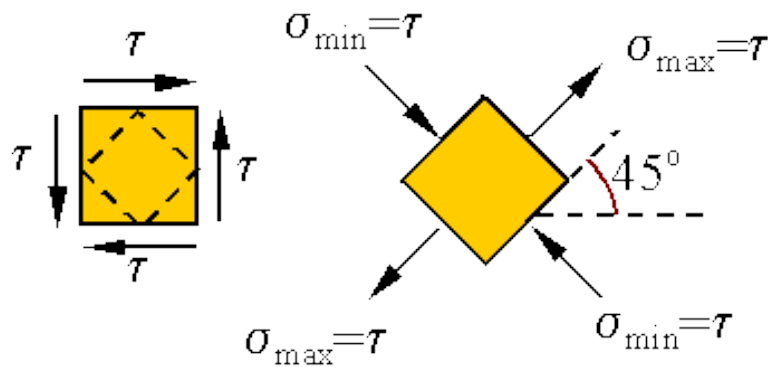
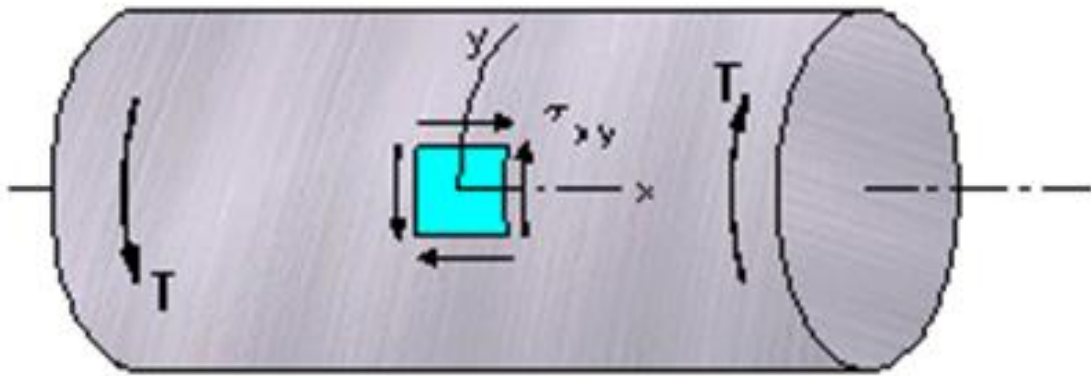
این روابط، مربوط به کرنش‌های مهندسی است که در ناحیه الاستیک با کرنش حقیقی برابر است.

$G$ : مدول برشی (مدول کشسانی در برش، مدول صلبیت) که از آزمون پیچش و به ترتیب زیر به دست می‌آید:

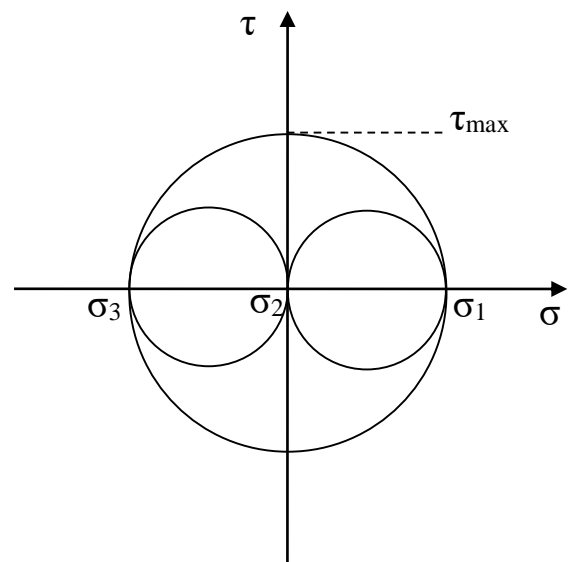


Shear Strain  $\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$

Shear Stress  $\tau = \frac{T\rho}{J}$



دایره مور کرنش



دایره مور تنش

$$\tau_{max} = \sigma_1 = -\sigma_3$$

$$\tau_{max} = G\gamma_{max} \Rightarrow G = \frac{\tau_{max}}{\gamma_{max}} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_1} \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (۲)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{از (۱) و (۲)}$$

برای تغییر شکل حجمی در ناحیه الاستیک داریم:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{dV}{V} = \frac{(1 - 2\nu)}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

در تغییر شکل الاستیک تغییر حجم صفر نیست ولی اندک است.

مدول حجمی هم علاوه بر مدول الاستیک و مدول برشی داریم که به شکل زیر تعریف می شود:

$$K = \frac{\sigma_m}{dV/V} = \frac{1}{\beta}$$

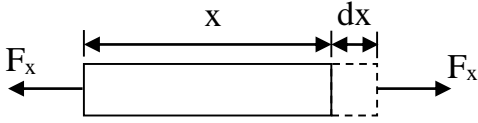
$\beta$ : قابلیت فشردگی (*compressibility*)

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{(1 - 2\nu)}{E} (3\sigma_m) \Rightarrow K = \frac{\sigma_m}{dV/V} \Rightarrow K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

## انرژی کرنشی یا کار کشسان:

در حالت اعمال نیروی کشش تک‌محوری  $F_x$  به میله‌ای با طول  $x$  و سطح مقطع  $A$  داریم:



$$dW = F_x \cdot dx \quad \text{کار جزئی در اثر افزایش طول } dx$$

این کار در واحد حجم برابر است با:

$$dw = \frac{dW}{xA} = \frac{F_x}{A} \cdot \left(\frac{dx}{x}\right) = \sigma_x \cdot d\varepsilon_x$$

با انتگرال‌گیری از رابطه بالا و با توجه به اینکه در ناحیه الاستیک  $\sigma_x = E\varepsilon_x$  داریم:

$$W = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} = \frac{E \varepsilon_x^2}{2} \quad \text{انرژی کرنش یا کار کشسان در واحد حجم}$$

در حالت اعمال تنش سه‌بعدی:

$$w = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz})$$

اگر از تنش‌های اصلی استفاده کنیم:

$$w = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

**1.6.** Three strain gauges are mounted on the surface of a part. Gauge A is parallel to the  $x$ -axis, and gauge C is parallel to the  $y$ -axis. The third gauge, B, is at  $30^\circ$  to gauge A. When the part is loaded, the gauges read

$$\text{Gauge A} \quad 3,000 \times 10^{-6}$$

$$\text{Gauge B} \quad 3,500 \times 10^{-6}$$

$$\text{Gauge C} \quad 1,000 \times 10^{-6}$$

- Find the value of  $\gamma_{xy}$ .
- Find the principal strains in the plane of the surface.
- Sketch the Mohr's circle diagram.

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

(الف)

$$3500 = \frac{3000 + 1000}{2} + \frac{3000 - 1000}{2} \cos 60 + \varepsilon_{xy} \sin 60$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \Rightarrow \gamma_{xy} = 2309 \times 10^{-6}$$

(ب)

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \left[ \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + (\varepsilon_{xy})^2 \right]^{1/2}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{3000 + 1000}{2} + \left[ \left( \frac{3000 - 1000}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = 3527.37$$

$$\varepsilon_2 = \frac{3000 + 1000}{2} - \left[ \left( \frac{3000 - 1000}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = 472.62$$

■

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (۱)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \cdot \partial z} \quad (۲)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \cdot \partial z} \quad (۳)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) \quad (۴)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) \quad (۵)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) \quad (۶)$$

اثبات ۱:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} \quad (a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 V}{\partial y \partial x^2} \quad (b)$$

$$(a)+(b): \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial y \partial x^2} \quad (c)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \Rightarrow 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} \quad (d)$$

$$(c)=(d): \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

وقتی کرنش، پارامتر متغیر  $x$ ،  $y$  و  $z$  داشته باشد این معادلات سودمند هستند.

## پلاستیسیته

در این قسمت از درس به بررسی شرایط انتقال ماده از ناحیه الاستیک به پلاستیک (شرایط تسلیم) و روابط بین تنش و کرنش در ناحیه پلاستیک پرداخته می‌شود.

### معیارهای تسلیم برای فلزات نرم:

هنگام اعمال تنش تک‌محوری به ماده دیدیم که تسلیم در تنش تسلیم ( $Y$ ) اتفاق می‌افتد (آزمون کشش). می‌خواهیم شرایط تسلیم ماده را هنگامی که تحت تنش‌های ترکیبی (چندبعدی) قرار دارد پیش‌بینی کنیم. دو معیار قابل قبول و معتبر بر اساس روابط تجربی و مشاهدات آزمایشگاهی وجود دارد. در حقیقت هیچ روش نظری برای پیش‌بینی شرایط تسلیم تحت تنش‌های چندبعدی وجود ندارد. دو معیار تسلیم موجود برای پیش‌بینی تسلیم، بر اساس این نکته بنا شده‌اند که فشار هیدرواستاتیک خالص در جامد باعث تسلیم نمی‌شود و شرایط تسلیم به اختلاف مقادیر تنش‌های اصلی و در نتیجه تنش‌های برشی حداکثر مربوط است.

### ۱- معیار ترسکا (*Tresca Criterion*)

طبق این معیار، تسلیم تحت تنش‌های ترکیبی و چند جهته زمانی اتفاق می‌افتد که تنش برشی حداکثر به یک مقدار بحرانی برسد:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = C \text{ (critical value)} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



برای یافتن مقدار بحرانی می‌توان حالت‌های خاصی را که شرایط تسلیم در آنها مشخص است در رابطه بالا قرار داد، به عنوان مثال در کشش یک‌بعدی زمانی اتفاق می‌افتد که:

$$\sigma_1 = Y \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{Y - 0}{2} = \frac{Y}{2}$$

یعنی هرگاه تنش برشی حداکثر برابر با  $\frac{Y}{2}$  شود تسلیم اتفاق می‌افتد. از آنجا که مقدار بحرانی معیار ترسکا به حالت تنش بستگی ندارد، می‌توان معیار تسلیم ترسکا را به صورت زیر نوشت:

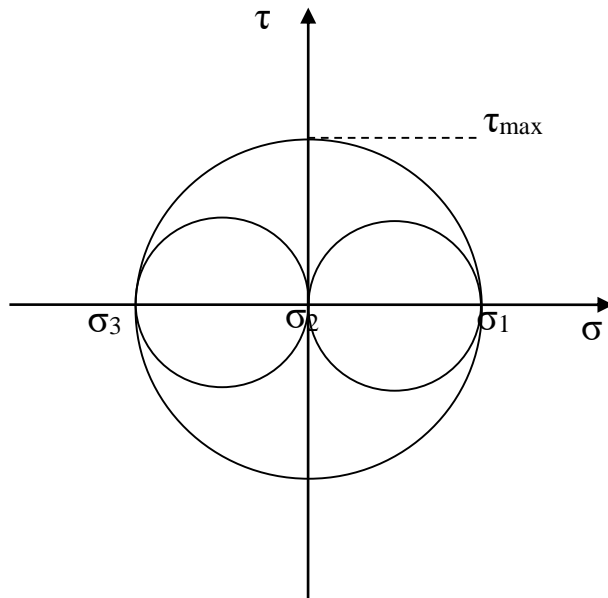
$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y$$

یعنی در همه حالت‌های تنشی وقتی  $\sigma_1 - \sigma_3$  به  $Y$  برسد، در ماده تسلیم اتفاق می‌افتد.

**مثال:** اگر استحکام تسلیم ماده در حالت کشش تک محوره برابر با  $200 \text{ MPa}$  باشد، آیا حالت تنشی زیر طبق معیار ترسکا باعث تسلیم آن می‌شود یا خیر؟

$$\begin{bmatrix} 750 & 150 & 0 \\ 150 & -150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■  
از طرفی چون شرایط تسلیم در آزمون پیچش (حالت برش خالص) نیز برای مواد مشخص است، می‌توان با داشتن تنش تسلیم ماده در این حالت، مقدار بحرانی رابطه ترسکا را پیدا کرد. در حالت برش خالص داریم:



$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{max} \quad , \quad \sigma_2 = 0$$

در این حالت تسلیم زمانی اتفاق می افتد که:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{max} = k \quad , \quad \sigma_2 = 0$$

$k$ : استحکام تسلیم در برش خالص

با قرار دادن این شرایط در رابطه ترسکا، مقدار بحرانی به دست می آید:

$$C = \frac{k - (-k)}{2} = k$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$$

یعنی در همه حالت های تنش، تسلیم زمانی اتفاق می افتد که  $\sigma_1 - \sigma_3$  به دو برابر مقدار استحکام تسلیم

ماده در برش خالص برسد.

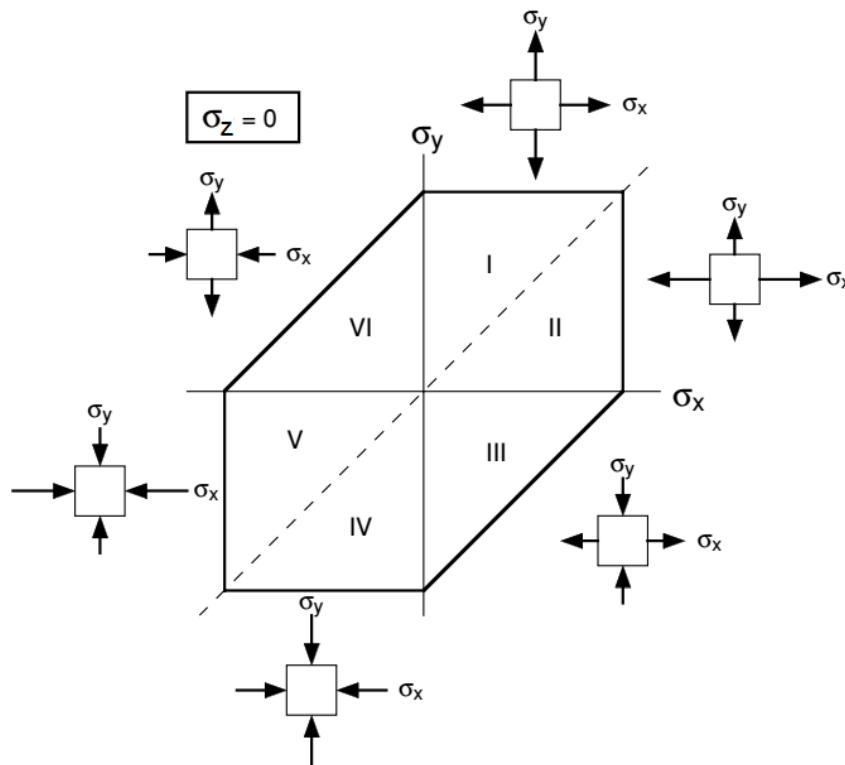
پس در حالت کلی، شرایط تسلیم ماده تحت تنش‌های اصلی  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$  طبق معیار ترسکا به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y = 2k$$

طبق این معیار  $k = \frac{Y}{2}$  (استحکام تسلیم در برش خالص، نصف استحکام تسلیم ماده تحت کشش تک‌محوری است).

### نمایش گرافیکی دوبعدی معیار ترسکا:

می‌خواهیم بدانیم با تغییر دو تنش اصلی معیار ترسکا چگونه تغییر می‌کند:



The Tresca criterion. In the six sectors the following conditions apply:

- I  $\sigma_y > \sigma_x > 0$  : so  $\sigma_y = Y$
- II  $\sigma_x > \sigma_y > 0$  : so  $\sigma_x = Y$
- III  $\sigma_x > 0 > \sigma_y$  : so  $\sigma_x - \sigma_y = Y$
- IV  $0 > \sigma_x > \sigma_y$  : so  $\sigma_y = -Y$
- V  $0 > \sigma_y > \sigma_x$  : so  $\sigma_x = -Y$
- VI  $\sigma_y > 0 > \sigma_x$  : so  $\sigma_y - \sigma_x = Y$

## ۲- معیار فون میزز (Von-Mises Criterion)

فون میزز بیان کرد که تحت تنش‌های چندبعدی، تسلیم هنگامی اتفاق می‌افتد که مقدار عبارت زیر  $(J_2)$ ، دومین نامتغیر تنش انحرافی) به یک مقدار بحرانی برسد:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]$$
$$= \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)] \quad *$$

\* (این رابطه باید برای همه حالت‌های تنشی صادق و مقدار بحرانی برای همه حالت‌های تنشی یکسان باشد.) \*

می‌توان با قرار دادن شرایط تسلیم خاص تنش تک‌محوره، مقدار بحرانی  $J_2$  را بر حسب تنش تسلیم در کشش تک محوره ( $Y$ ) به دست آورد:

شرایط تسلیم در کشش تک‌محوره  $\sigma_1 = Y$  و  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . با قرار دادن این مقادیر در رابطه بالا:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(Y - 0)^2 + (Y - 0)^2 + (0 - 0)^2] = \frac{Y^2}{3} \Rightarrow J_2 = \frac{Y^2}{3}$$

در نتیجه به جای  $J_2$  در رابطه \*، می‌توان  $\frac{Y^2}{3}$  قرار داد:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}}$$

یا می توان نوشت:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

پس طبق معیار فون میزز، تسلیم تحت تنش های ترکیبی زمانی اتفاق می افتد که سمت راست معادله های بالا به مقدار تنش تسلیم در حالت یک بعدی (سمت چپ معادله) برسد.

از طرفی با قرار دادن شرایط تسلیم در برش خالص (آزمون پیچش) می توان مقدار بحرانی  $J_2$  را بر حسب  $k$  (تنش تسلیم در برش خالص) به دست آورد. شرایط تسلیم در برش خالص:

$$\sigma_2 = 0 \text{ و } \tau_{max} = \sigma_1 = -\sigma_3 = k$$

$$6J_2 = k^2 + k^2 + 4k^2 \Rightarrow J_2 = k^2 \quad \text{در نتیجه داریم:}$$

یا:

$$k = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

یا در حالت کلی:

$$2Y^2 = 6k^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

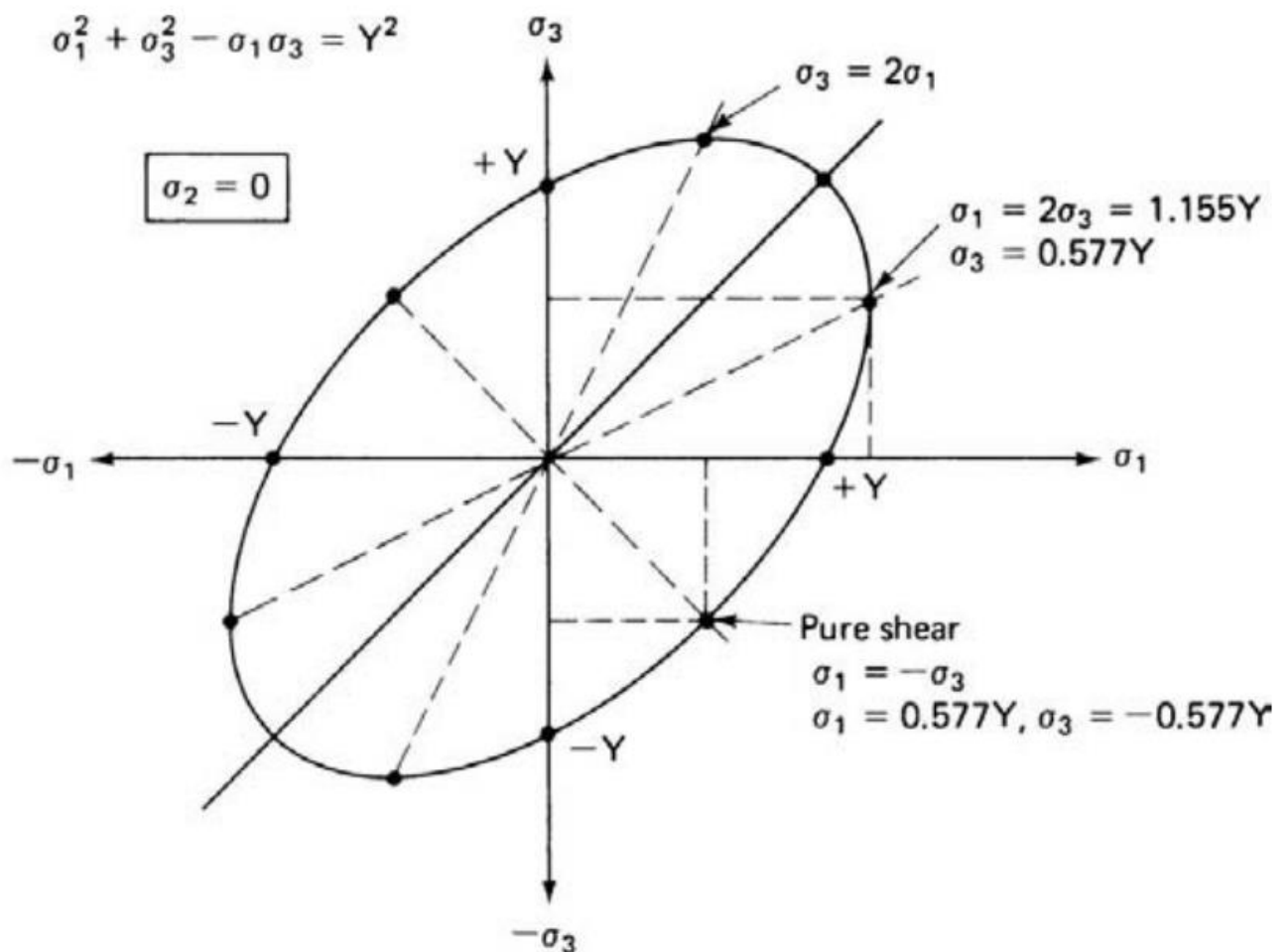
طبق معیار فون میزز  $k = \frac{Y}{\sqrt{3}}$  (با معیار ترسکا مقایسه کنید).

نکته: از هر دو معیار نتیجه می‌گیریم که تنش تسلیم ماده در برش خالص از تنش تسلیم در کشش تک‌محوره کمتر است. اما دو معیار، نسبت این دو تنش تسلیم را متفاوت پیش‌بینی می‌کنند.

### نمایش گرافیکی دوبعدی معیار فون میزز:

مشابه معیار ترسکا حالتی را در نظر می‌گیریم که  $\sigma_2 = 0$  و تغییرات  $\sigma_1$  و  $\sigma_3$  را بررسی می‌کنیم:

$$\sigma_2 = 0 \Rightarrow \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 = Y^2$$

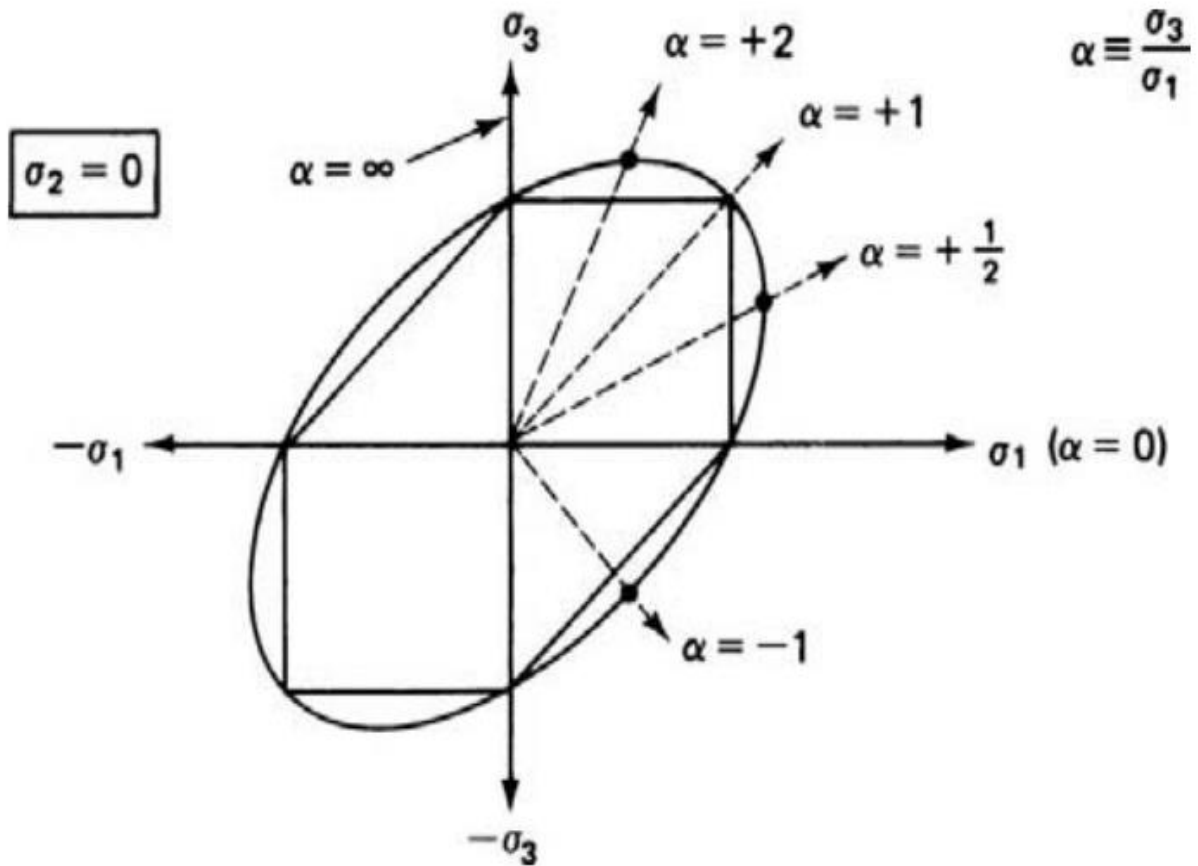


## مقایسه دو معیار:

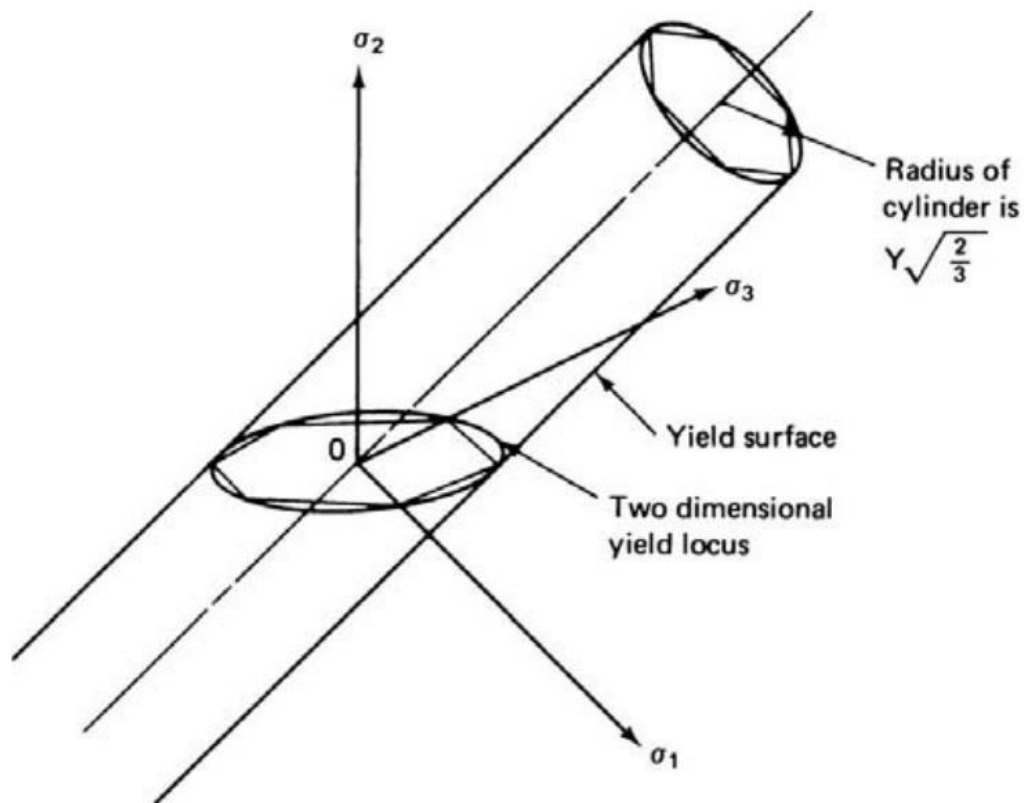
نمایش گرافیکی دو معیار را برای یک ماده با تنش تسلیم (Y) مشخص و در حالت  $\sigma_2 = 0$  رسم می‌کنیم:

اگر  $\alpha = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \Leftarrow$  بیشترین اختلاف در پیش‌بینی تسلیم توسط دو معیار در  $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot -1$  و کمترین

در  $\alpha = 0.1. \infty$  اتفاق می‌افتد.



## نمایش گرافیکی سه بعدی معیارهای ترسکا و فون میزز:



زوایای محور استوانه و منشور با محورهای  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$  برابر و عبارتند از:

$$OH: \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

اگر تنش‌های موجود  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$  را به صورت برداری با هم جمع کنیم، اگر نوک بردار روی سطح تسلیم و بیرون آن بیفتد، تسلیم رخ خواهد داد.

سطح تسلیم: سطح استوانه و منشور که نشان دهنده وقوع تسلیم است.

درون استوانه و منشور  $\Leftarrow$  ناحیه الاستیک ماده

بیرون استوانه و منشور  $\Leftarrow$  ناحیه پلاستیک ماده



با توجه به شکل داریم:

$$OP^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$$

$$OH = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$$

$$PH^2 = OP^2 + OH^2$$

$$\Rightarrow PH = \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left( \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow PH = \frac{1}{\sqrt{3}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow PH = \sqrt{\frac{2}{3}} Y$$

← مکان هندسی نقاطی در فضا که بخواهند در شرایط تسلیم باشند، نقاطی است که فاصله آنها از بردار

نرمال صفحه اکتاهدرال به اندازه  $\sqrt{\frac{2}{3}} Y$  باشد.

### محدودیت‌های معیار ترسکا:

۱- تنش اصلی میانی ( $\sigma_2$ ) هیچ نقشی در معیار ندارد، این یعنی نقشی در تسلیم ندارد که نادرست

است.

۲- این معیار تنها به سیستم مختصات تنش اصلی محدود می‌شود و در دیگر سیستم‌های مختصات

بسیار پیچیده است.

## مزایای معیار فون میزز:

۱- هر سه مؤلفه تنش اصلی با وزن یکسانی در رابطه پیش‌بینی تسلیم دخالت دارند.

۲- به هیچ پیش‌شرطی بین مؤلفه‌های تنش اصلی نیاز ندارد.

۳- به راحتی بر حسب نامتغیر دوم تنش انحرافی فرموله شده و به آسانی در همه سیستم‌های مختصات قابل استفاده است.

۴- تجربه آزمایشگاهی نشان می‌دهد که این معیار واقعیت تسلیم ماده را دقیق‌تر از معیار تسلیم ترسکاپیش‌بینی می‌کند.

در صنعت و در طراحی به دلیل اینکه می‌خواهیم ضریب اطمینان (factor of safety) بهتر داشته باشیم از معیار ترسکا استفاده می‌شود که تنش تسلیم را مقداری کمتر از فون میزز نشان می‌دهد ولی در تغییر شکل فلزات چون می‌خواهیم حتماً تغییر شکل مومسان رخ دهد، معیار فون میزز مناسب‌تر است.

چند نکته در مورد معیارهای تسلیم:

- در این معیارها اثر باوشینگر در نظر گرفته نمی‌شود، یعنی استحکام تسلیم در کشش و فشار برابر فرض می‌شود.

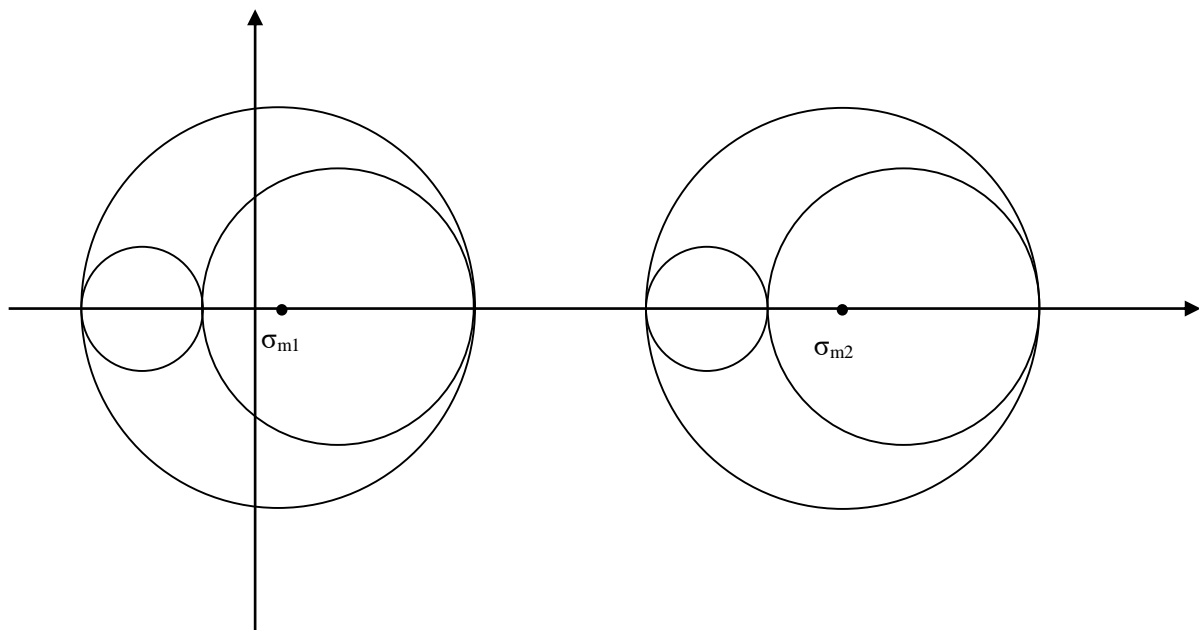
- حجم ثابت فرض می‌شود.

- ماده همسان‌گرد فرض می‌شود

- از آنجا که آهنگ یا نرخ کرنش و دما بر تسلیم ماده تأثیرگذار هستند، نرخ کرنش و دما ثابت فرض می‌شود.

- مقدار تنش میانگین ( $\sigma_m$ ) بر تسلیم تأثیر نمی‌گذارد. در واقع تسلیم به اندازه دایره مور بستگی دارد نه به مکان آن.

در حالت‌های تنشی زیر با اینکه  $\sigma_m$  تغییر می‌کند ولی چون اختلاف تنش‌های اصلی در آنها برابر است، از لحاظ تسلیم شدن یا نشدن ماده، دو حالت معادل‌اند.



**مثال:** تنش تسلیم در برش خالص برای ماده برابر با  $200 \text{ MPa}$  است. اگر دو تنش اصلی اعمالی بر ماده  $350 \text{ MPa}$  و  $175 \text{ MPa}$  باشند، تنش سوم چقدر باشد تا طبق معیار ترسکا تسلیم در ماده اتفاق بیفتد؟

**حل:**

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$$

حالت اول اینکه تنش اصلی مجهول بزرگتر از مقادیر  $350$  و  $175$  مگاپاسکال باشد

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 = 2k &\Rightarrow \sigma_1 - 175 = 2 \times 200 \Rightarrow \sigma_1 \\ &= 575 \text{ MPa} \end{aligned}$$

حالت دوم اینکه تنش اصلی مجهول بین مقادیر  $350$  و  $175$  مگاپاسکال باشد

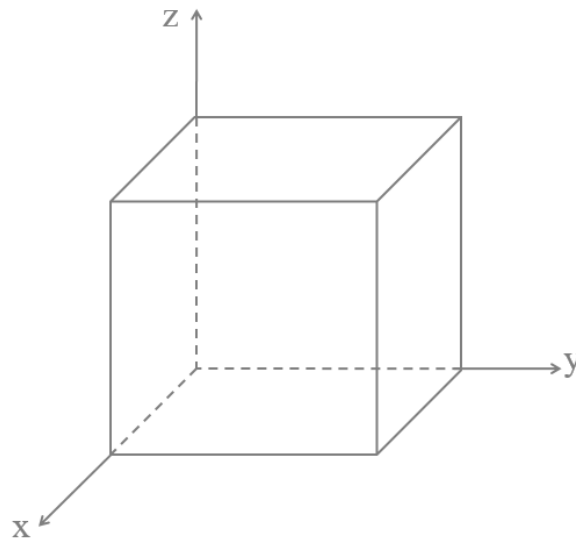
$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k \Rightarrow 350 - 175 < 2 \times 200$$

حالت سوم اینکه تنش اصلی مجهول کوچکتر از مقادیر ۳۵۰ و ۱۷۵ مگاپاسکال باشد

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k \quad \Rightarrow \quad 350 - \sigma_3 = 2 \times 200 \quad \Rightarrow \quad \sigma_3 = -50 \text{ MPa}$$

■

مثال: یک مکعب فلزی به ضلع ۸۰ mm که اضلاع آن عمود بر محورهای X، Y و Z هستند، می تواند در اثر اعمال نیروی کششی ۴۰۰۰ KN در راستای Y دچار تسلیم شود. اگر در یک بارگذاری، نیرویی کششی به اندازه ۲۰۰۰ KN و نیرویی فشاری به اندازه ۱۰۰۰ KN در راستاهای X و Z اعمال شوند، مقدار نیرو در راستای Y برای تسلیم طبق معیار ترسکا چقدر است؟



■

### مخازن تحت فشار جدار نازک (*Thin-walled pressure vessels*)

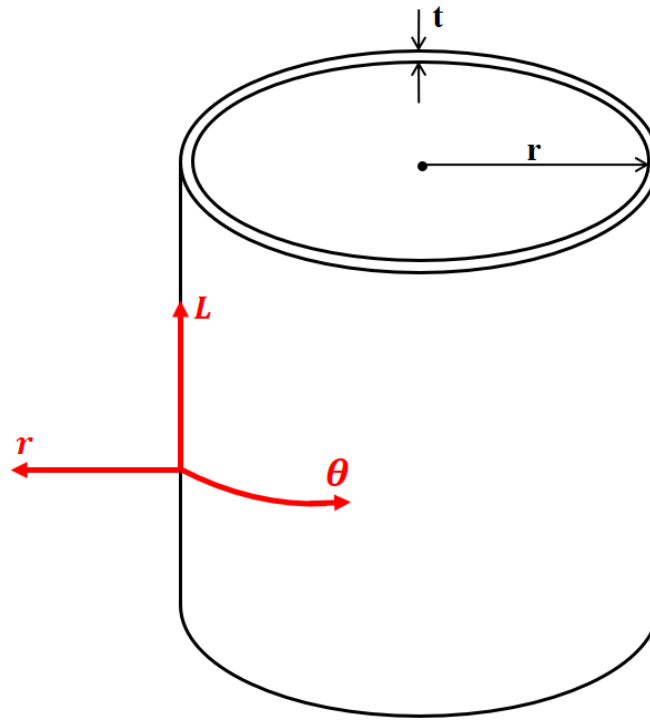
مخازن برای نگهداری و حمل سیالات (مایعات و گازها) در صنایعی مانند گاز و پتروشیمی استفاده می شوند.

مخازن: ۱- مخازن ذخیره سیال ۲- مخازن تحت فشار

یکی از پرکاربردترین مخازن، مخازن جدار نازک هستند که از ورقه‌های فلزی ساخته شده و نسبت شعاع مخزن به ضخامت جداره آن (گوشت دیواره) بیش از ده برابر است.

$$\frac{r}{t} \geq 10$$

$r$ : شعاع،  $t$ : ضخامت دیواره



شرایط: ۱- مخزن جداره نازک، ۲- سروته بسته، ۳- در آن فشار  $P$  سیال وجود داشته باشد.

تنش وارد بر دیواره مخزن در اثر فشار سیال  $P$ ؟

$$\sigma_{\theta} = \sigma_1 = \frac{P r}{t}$$

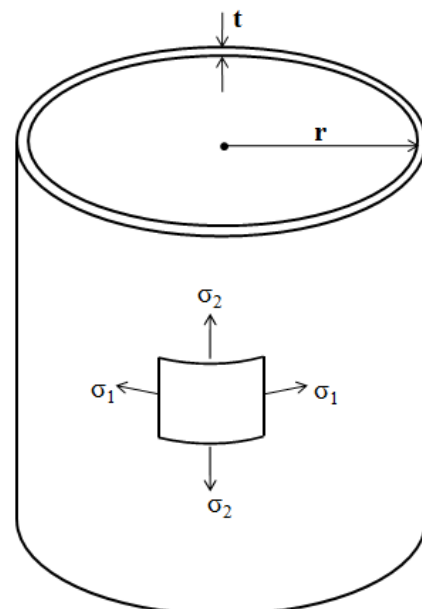
Hoop stress

$$\sigma_l = \sigma_2 = \frac{P r}{2t}$$

Axial stress

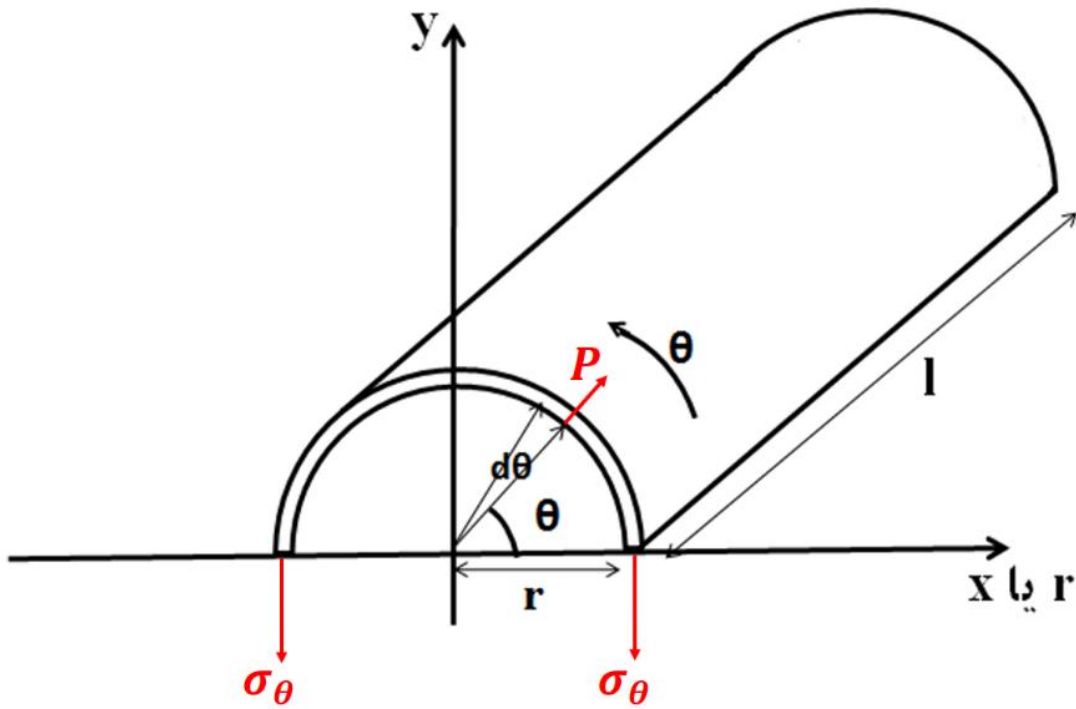
$$\sigma_r = \sigma_3 \approx 0$$

Radial stress



تعیین  $\sigma_\theta$ :

مخزن را در جهت طولی مقطع می‌زنیم.



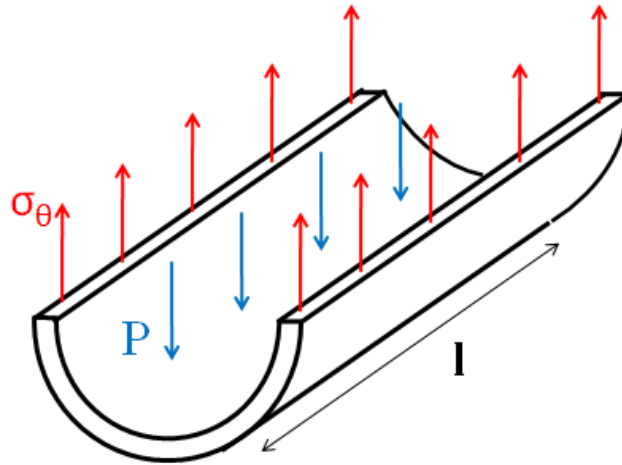
$$\sum F_y = 0: \int_0^\pi P \times \sin\theta \times l \times r \, d\theta - 2 \times \sigma_\theta \times l \times t = 0$$

$$\Rightarrow -P r \cos\theta \Big|_0^\pi - 2 \sigma_\theta t = 0$$

$$\Rightarrow -P r (\cos\pi - \cos 0) - 2 \sigma_\theta t = 0$$

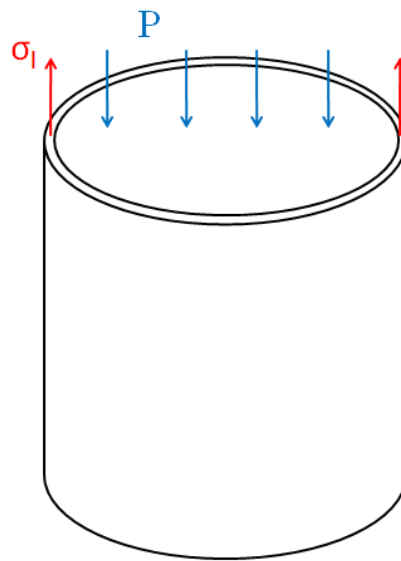
$$\Rightarrow 2 P r = 2 \sigma_\theta t \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{P r}{t}$$

از روش ساده‌تر زیر نیز می‌توان استفاده کرد:



$$P(2 r l) = 2(\sigma_{\theta} l t) \Rightarrow \sigma_{\theta} = \frac{P r}{t}$$

تعیین  $\sigma_l$ :



$$\Sigma F_z = 0$$

$$\sigma_l \times 2\pi r t - P \times \pi r^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_l = \frac{P r}{2t}$$

تعیین  $\sigma_r$ :

$$\Sigma F_r = 0 \Rightarrow P \times A - \sigma_r \times A = 0 \Rightarrow \sigma_r = p \approx 0$$

در اثر فشار  $P$  هیچ تنش برشی ایجاد نمی‌شود. سه تنش بالا در واقع سه تنش اصلی هستند.

$$\sigma_\theta = \sigma_1$$

$$\sigma_l = \sigma_2$$

$$\sigma_r = \sigma_3$$

معمولاً از تنش  $\sigma_r$  می‌توان در مقایسه با دو تنش دیگر صرف‌نظر کرد.

مثال:

$$\left. \begin{array}{l} r = 500 \text{ mm} \\ t = 10 \text{ mm} \end{array} \right\} \sigma_1 = \sigma_\theta = 50P. \quad \sigma_2 = \sigma_l = 25P. \quad \sigma_3 = \sigma_r = P$$

می‌توان از  $P$  در برابر  $25P$  و  $50P$  صرف‌نظر کرد. همه این تنش‌ها در درون جداره لوله ایجاد می‌شوند.

مثال: لوله‌ای جدار نازک با دو سر بسته در معرض فشار داخلی حداکثر  $5000 \text{ psi}$  قرار می‌گیرد. شعاع میانگین لوله  $12 \text{ inch}$  است.

الف) اگر استحکام تسلیم کششی ماده (Y) برابر  $100000 \text{ psi}$  باشد، ضخامت حداقل جداره بر اساس

معیار ترسکا چقدر باشد تا لوله در هیچ نقطه‌ای تسلیم نشود؟

ب) اگر استحکام تسلیم در برش خالص (k) برابر با  $40000 \text{ psi}$  باشد، قسمت (الف) را دوباره حل کنید.



حل: (الف)

$$\sigma_1 = \frac{p r}{t} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{p r}{2t} \quad , \quad \sigma_3 = 0$$

حالت تنش ( $\sigma_1$  و  $\frac{\sigma_1}{2}$  و 0)

$$\sigma_1 = \frac{5000 \times 12}{t}$$

$$Tresca: \quad \sigma_1 - 0 = Y \Rightarrow \frac{5000 \times 12}{t} = 100000$$

$$\Rightarrow t = 0.6 \text{ inch}$$

(ب)

$$\sigma_1 - 0 = 2k \Rightarrow \frac{5000 \times 12}{t} = 80000$$

$$\Rightarrow t = 0.75 \text{ inch}$$

مثال: مثال قبل را با استفاده از شرایط فون میزز حل کنید.

حل:

حالت تنش ( $\sigma_1$  و  $\frac{\sigma_1}{2}$  و 0)

$$\Rightarrow \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^2 + (\sigma_1)^2 = 2Y^2 = 6k^2$$

$$\Rightarrow \frac{3\sigma_1^2}{2} = 2Y^2 = 6k^2$$

$$\frac{3\sigma_1^2}{2} = 2Y^2 \Rightarrow \frac{3}{2} \left( \frac{5000 \times 12}{t} \right)^2 = 2 \times 1000^2 \Rightarrow t = 0.52 \text{ inch}$$

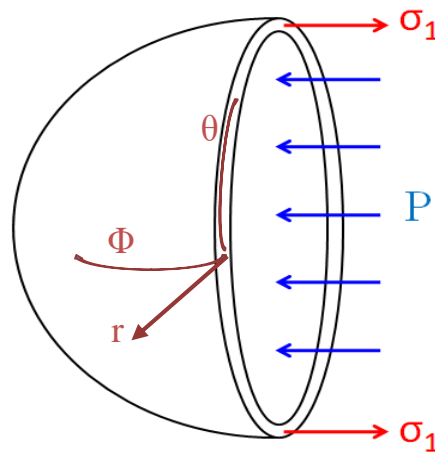
$$\frac{3\sigma_1^2}{2} = 6k_2 \Rightarrow \frac{3}{2} \left( \frac{5000 \times 12}{t} \right)^2 = 6 \times 4000^2 \Rightarrow t = 0.75 \text{ inch}$$

نتیجه: اگر  $Y$  را مورد استفاده قرار دهیم، معیار ترسکا محتاطانه تر بوده ولی اگر  $k$  مقدار مشخص باشد و

مورد استفاده قرار گیرد هر دو معیار مقادیر برابری داشته باشد و به یک اندازه محتاط هستند.

### مخازن تحت فشار جدار نازک کروی

شکل زیر دیاگرام جسم آزاد یک نیمه از مخزن کروی جدار نازک را نشان می دهد.



$$\sum F_{\Phi} = 0 \Rightarrow \pi r^2 \times P = 2\pi r \times t \times \sigma_1 \Rightarrow \sigma_{\Phi} = \sigma_1 = \frac{Pr}{2t}$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_2 = \frac{Pr}{2t}$$

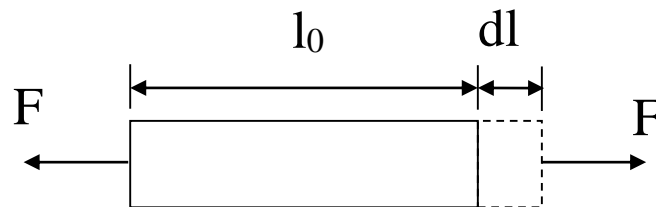
$$\sigma_r = \sigma_3 \approx 0$$

مخازن کروی در هر دو جهش تنش  $\frac{Pr}{2t}$  را تحمل می کنند، در حالی که مخازن استوانه‌ای در جهت محیطی تنش  $\frac{Pr}{t}$  را تحمل می کنند. مخازن کروی تنش‌های کمتری را تحمل می کنند و احتمال تسلیم شدن آنها کمتر است ولی ساختن آنها سخت‌تر است.

### کار پلاستیک (انرژی کرنش پلاستیک)

مشابه حالت الاستیک اگر میله‌ای به طول اولیه  $l_0$  در معرض نیروی  $F$  که بر سطح مقطع  $A$  وارد می شود قرار گرفته و طول آن به اندازه  $dl$  افزایش یابد، کار انجام شده برابر با  $F \cdot dl$  و کار انجام شده در واحد حجم برابر است با:

$$dw = \frac{F dl}{Al} = \frac{F}{A} \frac{dl}{l} = \sigma d\varepsilon$$



در حالت کلی اعمال تنش‌های سه‌بعدی:

$$dw = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz}$$

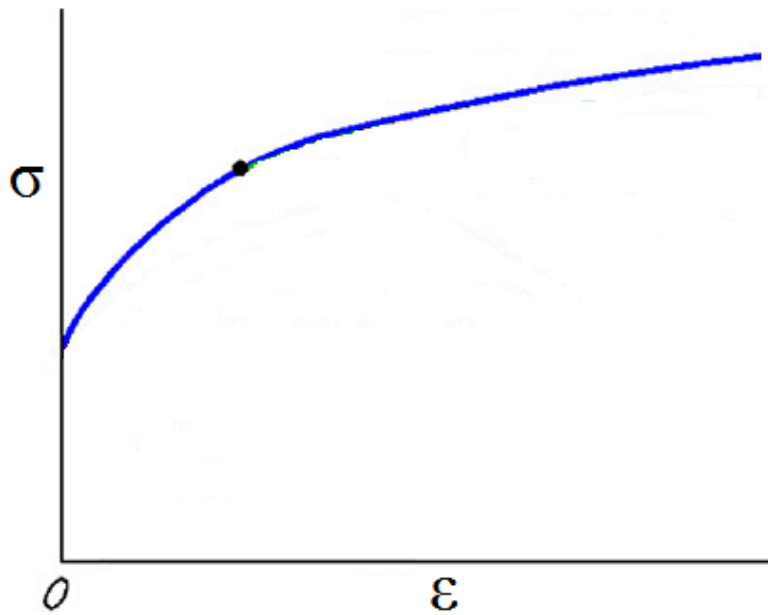
و بر حسب مؤلفه‌های اصلی تنش:

$$dw = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3$$

## تنش و کرنش مؤثر (effective)

در حالت اعمال تنش تک محوره به ماده دیدیم که منحنی تنش-کرنش مطابق شکل زیر است و برای این منحنی روابطی مانند رابطه هولمن ارائه شد:

$$\sigma = K \varepsilon^n$$



می خواهیم بدانیم اگر تنش های سه بعدی با حالات مختلف به ماده وارد شوند نیز می توان رابطه مشخصی بین تنش ها و کرنش های ایجاد شده بدست آورد.

مشخص شده است که اگر منحنی تنش-کرنش پلاستیک (منحنی جریان) بر حسب نامتغیرهای تنش و کرنش رسم شود، یک منحنی مشابه با حالت تنش یک بعدی بدست می آید.

**نامتغیرهای تنش (کرنش):** عباراتی بر حسب تنش (کرنش) که مقدار آنها با تغییر دستگاه مختصات تغییر نمی کند.

توابع نامتغیری که معمولاً استفاده می‌شوند، تنش و کرنش مؤثر (*effective*) نامیده شده و با معادلات زیر نشان داده می‌شوند.

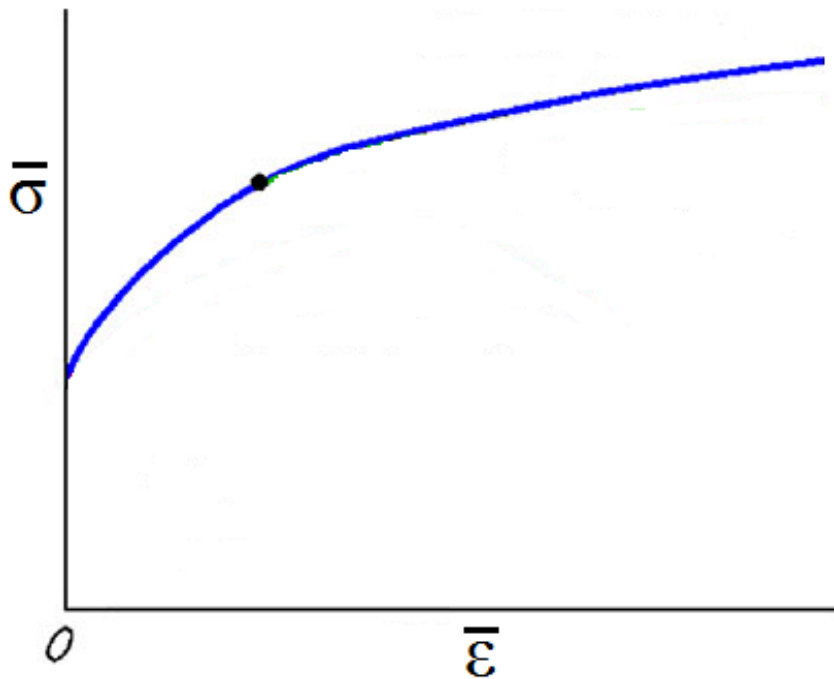
$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2]^{\frac{1}{2}}$$

**Or**

$$\bar{\varepsilon} = \left[ \frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

پس اگر  $\bar{\sigma}$  بر حسب  $\bar{\varepsilon}$  در هر ترکیب تنشی دلخواهی (کشش یک بعدی، فشار، پیچش دوبعدی) رسم شود، منحنی مشابه با منحنی جریان در حالت کشش یک بعدی بدست می‌آید.



از این به بعد در همه حالت‌های تنشی از تنش مؤثر برحسب کرنش مؤثر استفاده می‌شود، حتی آزمون کشش در حالت کشش تک محوری. اگر از روابط  $\bar{\sigma}$  و  $\bar{\varepsilon}$  استفاده کنیم و جای‌گذاری کنیم،  $\sigma$  و  $\varepsilon$  بدست می‌آیند.

اگر در حالت تک محوره، ماده از رابطه هولمن تبعیت کند  $\sigma = k\varepsilon^n$ ، در همه حالت‌های تنشی اعمالی به این ماده داریم:

$$\bar{\sigma} = k\bar{\varepsilon}^n$$

روابط تنش و کرنش مؤثر را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2)]^{\frac{1}{2}}$$

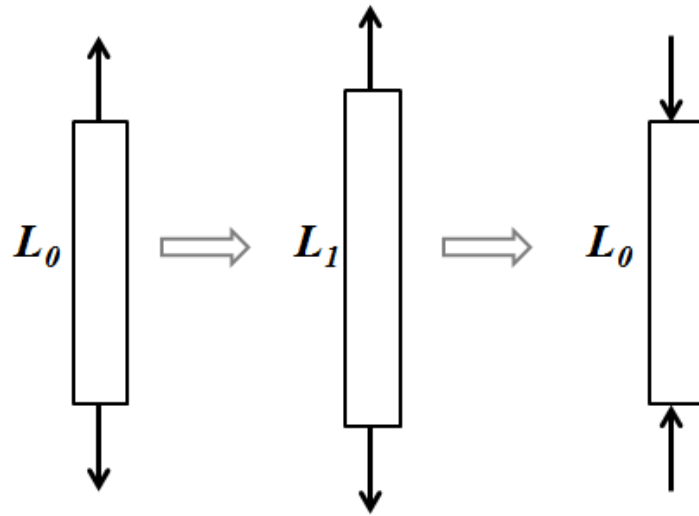
### روابط بین تنش و کرنش در ناحیه پلاستیک:

کرنش‌ها در اثر اعمال تنش‌های چند بعدی در ناحیه الاستیک، به طور مستقل از یکدیگر و بوسیله قانون هوک تعیین می‌شوند، مثلاً:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))]$$

در ناحیه پلاستیک، کرنش‌ها بطور مستقل از هم و به‌وسیله رابطه‌هایی برحسب تنش تعیین نمی‌شوند، بلکه کرنش‌ها با تاریخچه کامل بارگذاری ارتباط دارند.

## تفاوت ناحیه الاستیک و پلاستیک:



الاستیک: تغییر شکل کلی که ماده تحمل می کند صفر است.

پلاستیک: تغییر شکل کلی که ماده تحمل می کند  $2\ln\left(\frac{L_1}{L_0}\right)$  است.

در حقیقت در ناحیه پلاستیک، ابتدا تعیین مقادیر جزئی (دیفرانسیلی) با تغییرات کم کرنش پلاستیک در مسیر بارگذاری محاسبه شده و سپس محاسبه کرنش کل بوسیله انتگرال گیری یا جمع کردن مقادیر جزئی انجام می شود.

دو دسته روابط (۱) لوی-میزز و (۲) پیرانتل-ریوس بین تنش و کرنش در ناحیه پلاستیک ارائه می شود.

### **الف) روابط لوی میزز (برای جامد مومسان آرمانی) (Levy-Mises eq.)**

فرض اصلی در این روابط این است که ماده را پلاستیک آرمانی (صلب) در نظر می گیرند و چون کرنش الاستیک کم است از آن در برابر کرنش پلاستیک صرف نظر می کنند.

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^e + d\varepsilon_x^p \xrightarrow{d\varepsilon_x^e=0} d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^p$$

روابط بین تنش و کرنش برای یک جامد پلاستیک ایده‌آل یا آرمانی که کرنش الاستیک در آن قابل صرف‌نظر کردن است را قوانین جریان (*flow rules*) یا روابط لوی-میزز می‌گویند. (این روابط را جایی استفاده می‌کنیم که کرنش پلاستیک بسیار بزرگ باشد).

فرض دیگر روابط لوی میزز، انطباق محورهای اصلی کرنش جزئی و محورهای تنش اصلی است.

برای بدست آوردن روابط، حالت خاص اعمال تنش تک‌محوره را در نظر می‌گیریم:

$$\sigma_1 \neq 0 \quad \text{و} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1}{3} \Rightarrow \sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m = \frac{2\sigma_1}{3} \quad . \quad \sigma'_2 = \sigma'_3 = \frac{-\sigma_1}{3}$$

$$\Rightarrow \sigma'_1 = -2\sigma'_2 = -2\sigma'_3$$

با فرض‌های ذکر شده در بالا و فرض ثابت ماندن حجم در تغییر شکل پلاستیک:

$$d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad d\varepsilon_1 = -2d\varepsilon_2 = -2d\varepsilon_3$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = -2 = \frac{\sigma'_1}{\sigma'_2} \quad \text{بنابراین:}$$

که در حالت کلی این روابط به صورت زیر نوشته شده و به آنها روابط لوی-میزز می‌گویند:

$$\frac{d\varepsilon_1}{\sigma'_1} = \frac{d\varepsilon_2}{\sigma'_2} = \frac{d\varepsilon_3}{\sigma'_3} = d\lambda$$



یا در حالت کلی تر:

$$\frac{d\varepsilon_x}{\sigma'_x} = \frac{d\varepsilon_y}{\sigma'_y} = \frac{d\varepsilon_z}{\sigma'_z} = \frac{d\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{d\varepsilon_{xz}}{\tau_{xz}} = \frac{d\varepsilon_{yz}}{\tau_{yz}} = d\lambda$$

این روابط بیان می‌کنند که در هر لحظه تغییر شکل، نسبت کرنش جزئی پلاستیک به تنش انحرافی مربوط به آن، مقداری ثابت ( $d\lambda$ ) است.

$d\lambda$  یک عدد ثابت مثبت بوده و به مسیر بارگذاری بستگی دارد.

اگر در روابط از تنش‌های واقعی به جای تنش‌های انحرافی استفاده کنیم، داریم:

$$d\varepsilon_x = d\lambda\sigma'_x \Rightarrow d\varepsilon_x = d\lambda(\sigma_x - \sigma_m) \Rightarrow$$

$$d\varepsilon_x = \frac{2}{3}d\lambda \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

$$d\varepsilon_y = \frac{2}{3}d\lambda \left[ \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \right]$$

$$d\varepsilon_z = \frac{2}{3}d\lambda \left[ \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

$$d\varepsilon_{yz} = d\lambda\tau_{yz}$$

$$d\varepsilon_{xz} = d\lambda\tau_{xz}$$

$$d\varepsilon_{xy} = d\lambda\tau_{xy}$$

یا در مختصات اصلی:

$$d\varepsilon_1 = \frac{2}{3}d\lambda \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{2}{3}d\lambda \left[ \sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]$$

$$d\varepsilon_3 = \frac{2}{3}d\lambda \left[ \sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right]$$

$$d\varepsilon_1 = \frac{2}{3}d\lambda \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right]$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{2}{3}d\lambda \left[ \sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]$$

$$d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 = \frac{2}{3}d\lambda \left[ \frac{3}{2}\sigma_1 - \frac{3}{2}\sigma_2 \right] = d\lambda(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1)$$

به همین ترتیب:

$$d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3 = d\lambda(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (2)$$

$$d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3 = d\lambda(\sigma_2 - \sigma_3) \quad (3)$$

با به توان ۲ رساندن و جمع کردن روابط (۱) تا (۳):

$$\begin{aligned} \Rightarrow (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 \\ = d\lambda^2 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \\ \frac{9}{2}d\bar{\varepsilon}^2 = d\lambda^2 \times 2\bar{\sigma}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d\lambda^2 = \frac{9}{4} \frac{d\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\sigma}^2} \Rightarrow d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}$$

یک روش دیگر:

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} [(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_x - d\varepsilon_z)^2 \\ + 6(d\varepsilon_{xy}^2 + d\varepsilon_{yz}^2 + d\varepsilon_{xz}^2)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

با قرار دادن روابط بالای صفحه داریم:

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3} d\lambda \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3} d\lambda \bar{\sigma} \Rightarrow d\lambda = \frac{3 d\bar{\varepsilon}}{2 \bar{\sigma}}$$

بنابراین روابط به صورت زیر در می‌آیند:

$$d\varepsilon_x = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

$$d\varepsilon_y = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[ \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \right]$$

$$d\varepsilon_z = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

$$d\varepsilon_{yz} = \frac{3 d\bar{\varepsilon}}{2 \bar{\sigma}} \tau_{yz}$$

$$d\varepsilon_{xz} = \frac{3 d\bar{\varepsilon}}{2 \bar{\sigma}} \tau_{xz}$$

$$d\varepsilon_{xy} = \frac{3 d\bar{\varepsilon}}{2 \bar{\sigma}} \tau_{xy}$$

اگر این روابط را با رابطه هوک مقایسه کنیم:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

- معادل ضریب پواسون در ناحیه تغییر شکل پلاستیک  $\frac{1}{2}$  است.

- در حالی که در ناحیه الاستیک، مدول یانگ ( $E$ ) ثابت داریم، در ناحیه پلاستیک مدول مومسانی متغیر

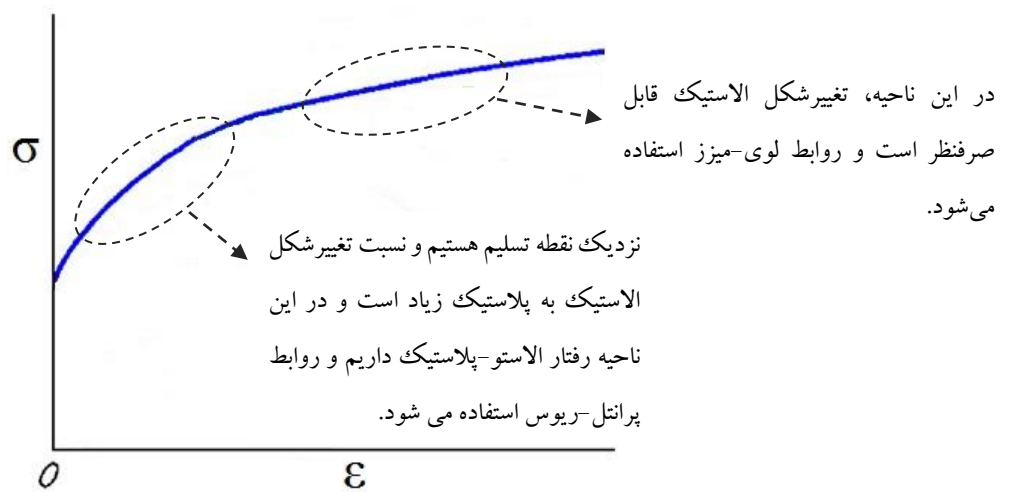
( $\frac{\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}}$ ) داریم که از منحنی تنش مؤثر- کرنش مؤثر بدست می‌آید، به جنس و ریز ساختار ماده بستگی

داشته و در یک جنس و ریز ساختار خاص، ثابت است.

با روش زیر،  $\frac{\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}}$  حذف شده و نیازی به آن نداریم:

$$d\epsilon_x : d\epsilon_y : d\epsilon_z \\ = \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] : \left[ \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \right] : \left[ \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

در بعضی مواقع میزان تغییر شکل الاستیک قابل صرف نظر نیست، جایی که تغییر شکل پلاستیک بسیار بزرگ نباشد. در این موارد از دسته دوم روابط یعنی روابط پرائنل ریوس استفاده می شود.



### (ب) روابط پرائنل-ریوس (*prandtl-Reuss eq.*)

جایی استفاده می شود که کرنش الاستیک در مقایسه با کرنش پلاستیک قابل صرف نظر کردن نباشد:

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p$$

مقدار  $d\epsilon^p$  از روابط لوی میزز و مقدار  $d\epsilon^e$  از روابط هوک (قسمت الاستیسیته) محاسبه و جای گذاری

می شود:

$$d\epsilon_x^p = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{1 + \nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

**مثال:** با فرض تغییر شکل مومسان در هر یک از حالت‌های تنش زیر، نشان دهید کار مومسان جزئی در واحد حجم  $dw$  که از رابطه  $dw = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3$  به دست می‌آید با کار محاسبه شده از رابطه  $dw = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}$  برابر است.

الف) کشش تک‌محوری در امتداد جهت ۱،

ب) فشار به حالت کرنش صفحه‌ای ( $\sigma_3 = 0, \varepsilon_2 = 0$ ).

**حل:** الف) در حالت کشش تک‌محوری:

$$\sigma_1 > 0 \quad . \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$d\varepsilon_1 > 0 \quad . \quad d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0 \Rightarrow d\varepsilon_1 = -2d\varepsilon_2 = -2d\varepsilon_3$$

$$dw = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3 = \sigma_1 d\varepsilon_1 + 0 \times d\varepsilon_2 + 0 \times d\varepsilon_3 = \sigma_1 d\varepsilon_1$$

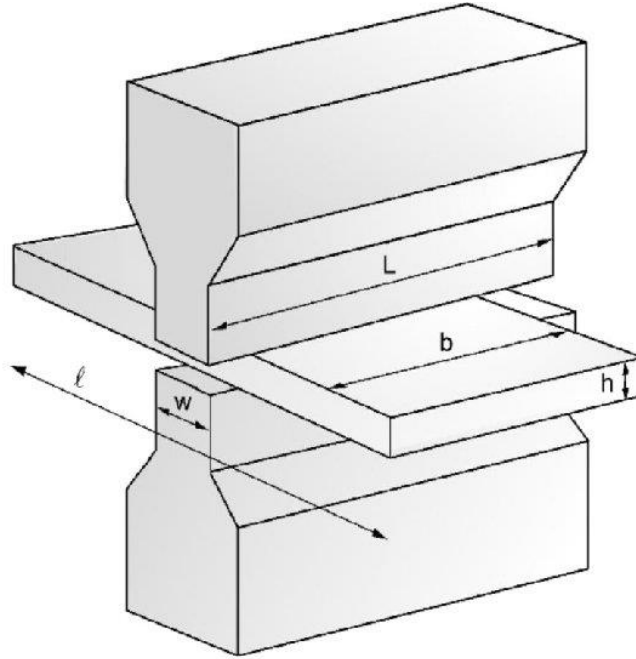
$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - 0)^2 + (\sigma_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2]^{\frac{1}{2}} = \sigma_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon} &= \left[ \frac{2}{3} (d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \frac{2}{3} (d\varepsilon_1^2 + (-\frac{1}{2}d\varepsilon_1)^2 + (-\frac{1}{2}d\varepsilon_1)^2) \right]^{\frac{1}{2}} = d\varepsilon_1 \end{aligned}$$

$$dw = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} = \sigma_1 d\varepsilon_1$$

ب) در حالت فشار کرنش صفحه‌ای ( $\sigma_3 = 0, \varepsilon_2 = 0$ ):

اگر جهت ۱ را جهت اعمال فشار به ماده ( $h$  در شکل) در نظر بگیریم، جهت ۲ جهتی که ماده تغییر ابعاد نمی‌دهد ( $b$  در شکل) و کرنش در آن جهت صفر است و جهت ۳ جهتی که ماده در آن برای ثابت ماندن حجم افزایش طول می‌یابد ( $l$  در شکل):



$$d\varepsilon_1 < 0 \quad . \quad d\varepsilon_2 = 0 \quad . \quad d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0 \Rightarrow d\varepsilon_3 = -d\varepsilon_1$$

$$\sigma_1 < 0 \quad . \quad \sigma_3 = 0 \quad . \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1}{2}$$

$$dw = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3 = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 \times 0 + 0 \times d\varepsilon_3 = \sigma_1 d\varepsilon_1$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_1}{2} - 0 \right)^2 + \left( \sigma_1 - 0 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1$$

$$\bar{\varepsilon} = \left[ \frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + (0)^2 + (-\varepsilon_1)^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_1$$

$$dw = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_1 = \sigma_1 d\varepsilon_1$$