فصل پنجم

سینماتیک صفحه ای اجسام صلب

مقدمه

جسم صلب : اگر حرکت های مرتبط با تغییر شکل در مقایسه با حرکت های کلی جسم بسیار ناچیز باشند.

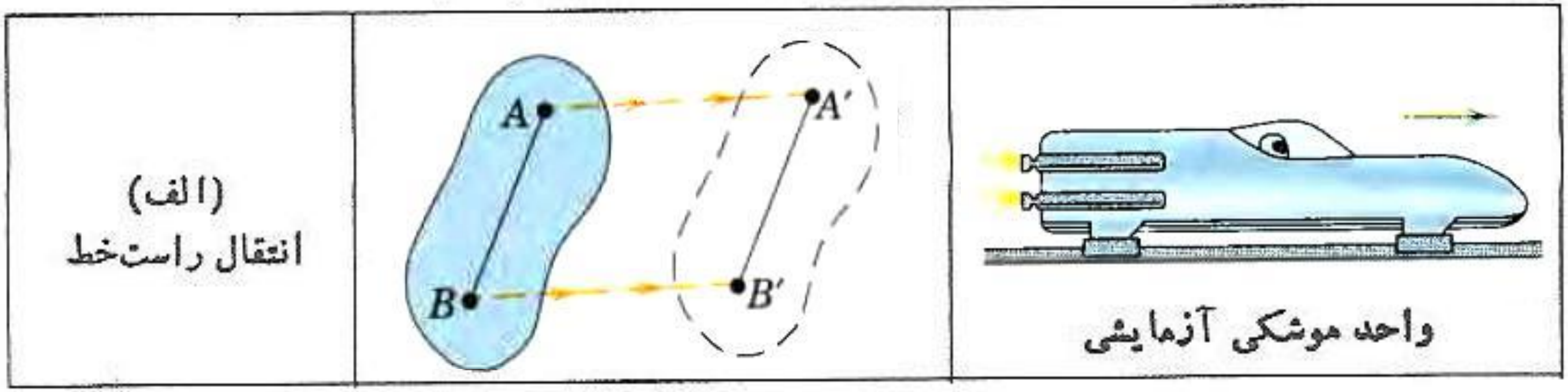
حرکت صفحه ای : هنگامی که همه بخش های جسم صلب در صفحه های موازی حرکت کنند.

انواع حرکت صفحه ای :

- **انتقال :** حرکتی است که در آن هر خط از جسم همواره با وضعیت اولیه خود موازی می ماند.
  هیچ یک از خطوط جسم چرخش ندارند.
  - انتقال راست خط
  - انتقال خمیده خط
- **چرخش :** همه ذرات جسم صلب در مسیرهای دایره ای حول محور چرخش حرکت می کنند.
- **حرکت صفحه ای کلی :** ترکیبی از انتقال و چرخش است.

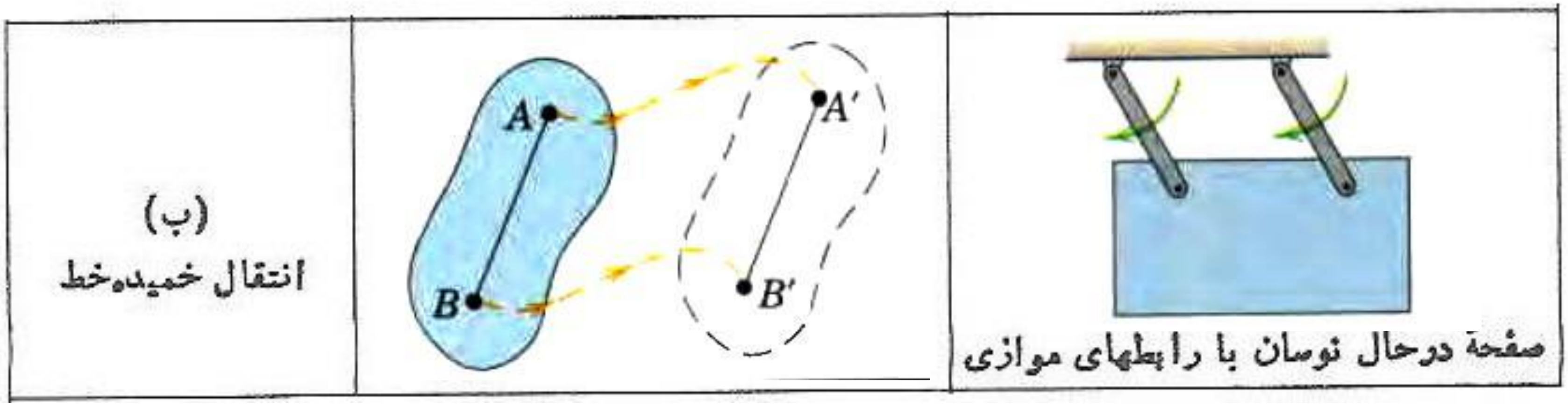
❑ انتقال

- انتقال راست خط



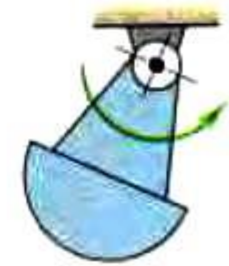
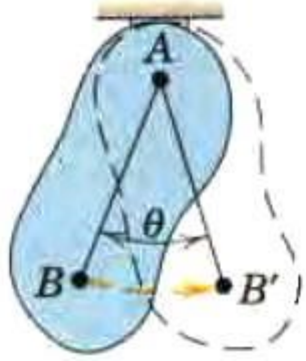
تمام نقاط جسم بر روی خطوط راست موازی حرکت می کنند.

- انتقال خمیده خط

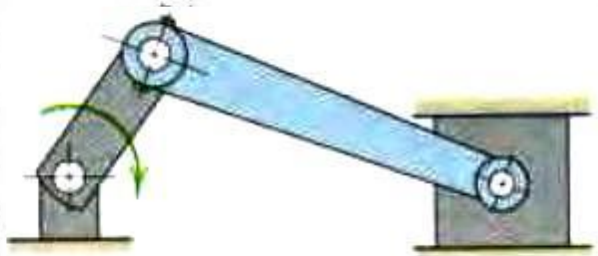
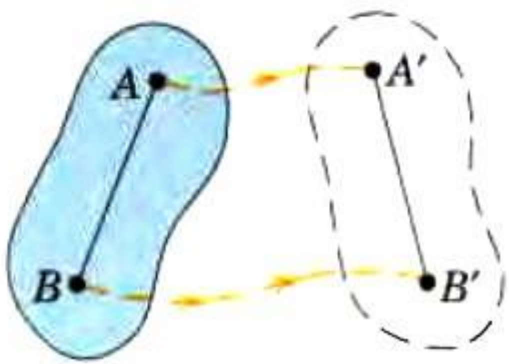


تمام نقاط جسم بر منحنی های موازی حرکت می کنند.

چرخش

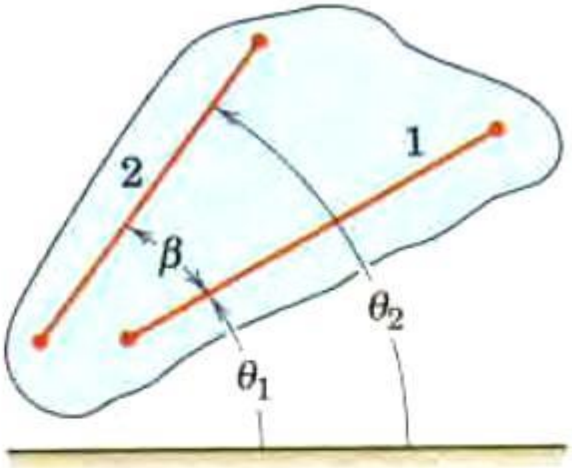
 آونگ مرکب		(ج) چرخش با محور ثابت

حرکت کلی صفحه ای

 میل‌رابطهای موتور رفت و برگشتی		(د) حرکت صفحه‌ای کلی

چرخش

چرخش جسم صلب با حرکت زاویه ای توصیف می شود.



$$\theta_2 = \theta_1 + \beta \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_1$$

تمام خط های واقع بر یک جسم صلب در صفحه حرکت :

- ✓ جابجایی زاویه ای یکسان
- ✓ سرعت زاویه ای یکسان
- ✓ و شتاب زاویه ای یکسان دارند

روابط حرکت زاویه ای : تمامی روابط مربوط به حرکت راست خط ، در اینجا نیز صادق است ، به شرطی که s ، v و a را با کمیت های زاویه ای متناظرشان ، به ترتیب ،

θ ، ω و α جایگزین کنیم.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \qquad \text{or} \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

$$\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \qquad \text{or} \qquad \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\, d\theta$$

$\Rightarrow$

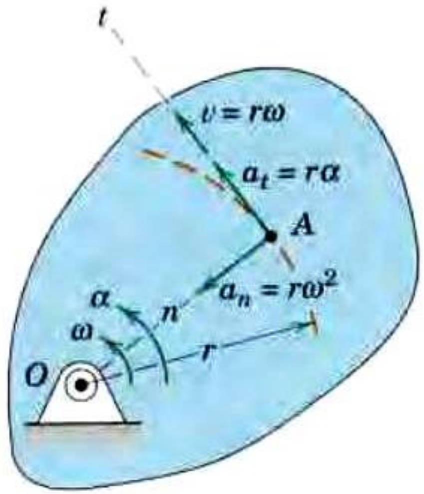
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

چرخش حول محور ثابت

هر نقطه مانند A روی دایره ای به شعاع r حرکت می کند.



$$\omega = \dot{\theta}$$

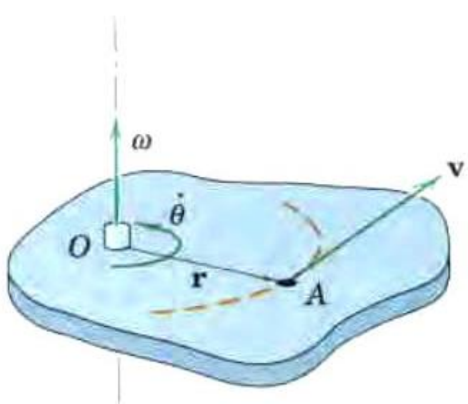
$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

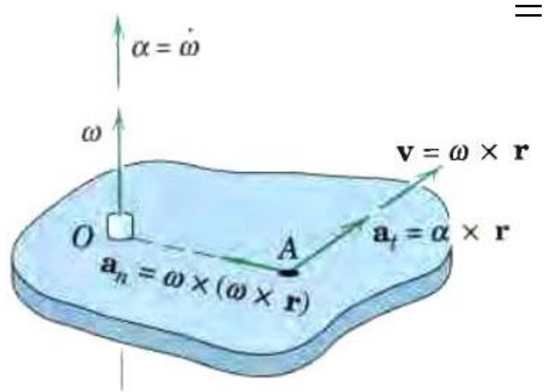
$$v = r\omega$$
$$a_n = r\omega^2 = v^2/r = v\omega$$
$$a_t = r\alpha$$

روش برداری :

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$

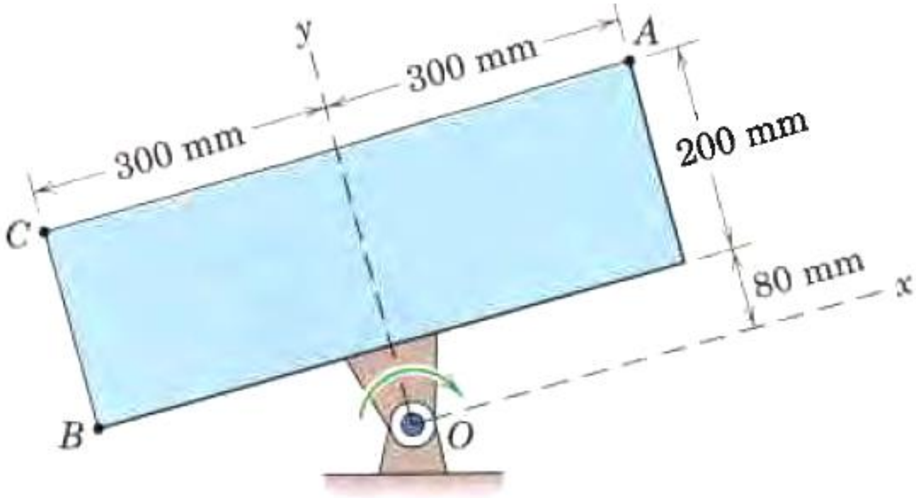




$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$
$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$

مسئله 14-5

صفحه مستطیلی حول بلبرینگ ثابت O چرخش ساعتگرد انجام می دهد. سرعت زاویه ای لبه BC ثابت و برابر 6 rad/s است. مطلوب است تعیین عبارت هایی برای بیان سرعت و شتاب نقطه A با استفاده از مختصات مفروض.



حل: سرعت زاویه ای همه خطوط موجود در جسم صلب برابر است :

$$\omega_{BC} = \omega_{OA} = 6\ rad/s$$

$$\boldsymbol{\omega} = -6\vec{\mathbf{k}}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = 0$$

$$\mathbf{r}_A = 0.3\,\vec{\mathbf{i}} + 0.28\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A$$
$$= \left(-6\vec{\mathbf{k}}\right) \times \left(0.3\,\vec{\mathbf{i}} + 0.28\,\vec{\mathbf{j}}\right)$$
$$= 1.68\,\vec{\mathbf{i}} - 1.8\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$
$$= (-6\vec{\mathbf{k}}) \times \left((-6\vec{\mathbf{k}}) \times (0.3\,\vec{\mathbf{i}} + 0.28\,\vec{\mathbf{j}})\right) + 0$$
$$= (-6\vec{\mathbf{k}}) \times \left(1.68\,\vec{\mathbf{i}} - 1.8\,\vec{\mathbf{j}}\right)$$
$$= -10.8\,\vec{\mathbf{i}} - 10.08\,\vec{\mathbf{j}}$$

مسئله نمونه 1-5

چرخ لنگری آزادانه با سرعت 1800 rpm ساعتگرد می چرخد و در معرض گشتاور پادساعتگرد متغیری قرار دارد‌که از زمان t=0 وارد می شود. این گشتاور شتاب زاویه ای پادساعتگرد $\alpha=4t\ rad/s^2$ ایجاد می کند که در آن t مدت زمان اعمال گشتاور برحسب ثانیه است. مطلوب است الف) زمان لازم برای کاهش سرعت زاویه ای ساعتگرد چرخ لنگر به 900 rpm ب) زمان لازم برای معکوس شدن جهت چرخش چرخ لنگر و ج) تعداد کل دورها ، ساعتگرد به علاوه پادساعتگرد ، که چرخ لنگر در 14 ثانیه نخست اعمال گشتاور می چرخد.

حل:

$$d\omega=\alpha\,dt \quad\Rightarrow\quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega=\int_0^t 4t\,dt \quad\Rightarrow\quad \omega-\omega_0=2t^2 \quad\Rightarrow\quad \omega=\omega_0+2t^2$$

الف) جهت پادساعتگرد مثبت در نظر گرفته می شود.

$$\omega_0=-1800\times\frac{2\pi}{60}=-60\pi\quad rad/s$$

$$\omega=-900\times\frac{2\pi}{60}=-30\pi\quad rad/s$$

$$\Rightarrow\quad -30\pi=-60\pi+2t^2 \quad\Rightarrow\quad t=6.86\quad s$$

ب)
$$\omega=0 \quad\Rightarrow\quad 0=-60\pi+2t^2 \quad\Rightarrow\quad t=9.71\quad s$$

ج) ابتدا تعداد دورهای ساعتگرد را قبل از معکوس شدن جهت حرکت محاسبه می کنیم

$$d\theta=\omega\,dt$$

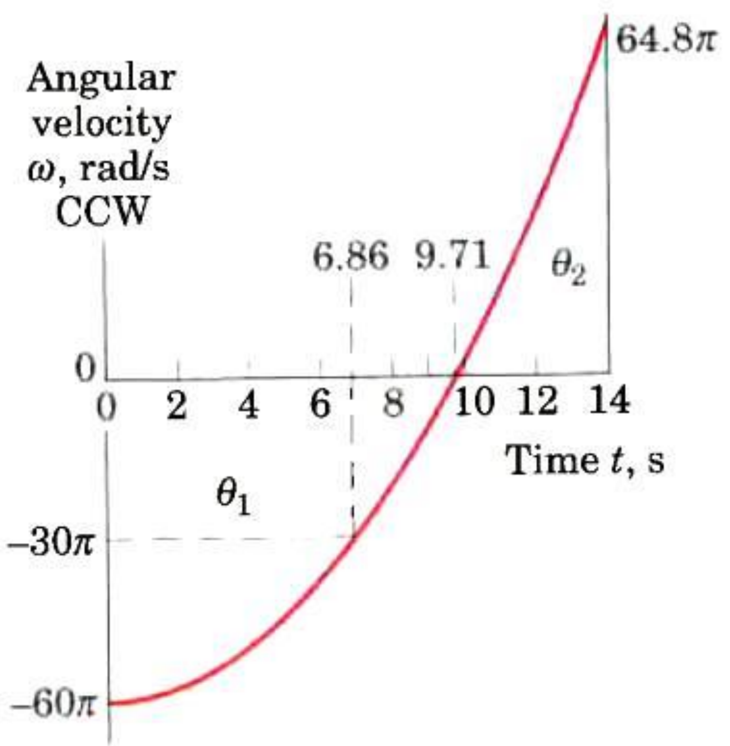
$$\Rightarrow\quad \int_0^{\theta_1} d\theta=\int_0^{9.71}\left(-60\pi+2t^2\right)dt \quad\Rightarrow\quad \theta_1=\left[-60\pi t+\frac{2}{3}t^3\right]_0^{9.71}=-1220\ rad$$

دور ساعتگرد
$$\Rightarrow\quad N_1=\frac{1220}{2\pi}=194.2$$

مسئله نمونه 1-5

چرخ لنگری آزادانه با سرعت 1800 rpm ساعتگرد می چرخد و در معرض گشتاور پادساعتگرد متغیری قرار داردکه از زمان t=0 وارد می شود. این گشتاور شتاب زاویه ای پادساعتگرد α=4t rad/s² ایجاد می کند که در آن t مدت زمان اعمال گشتاور برحسب ثانیه است. مطلوب است الف) زمان لازم برای کاهش سرعت زاویه ای ساعتگرد چرخ لنگر به 900 rpm ب) زمان لازم برای معکوس شدن جهت چرخش چرخ لنگر و ج) تعداد کل دورها ، ساعتگرد به علاوه پادساعتگرد ، که چرخ لنگر در 14 ثانیه نخست اعمال گشتاور می چرخد.

ج) و حال تعداد دورهای پادساعتگرد تا ثانیه 14 محاسبه می شود



$$\int_0^{\theta_2} d\theta = \int_{9.71}^{14} \left(-60\pi + 2t^2\right) dt$$

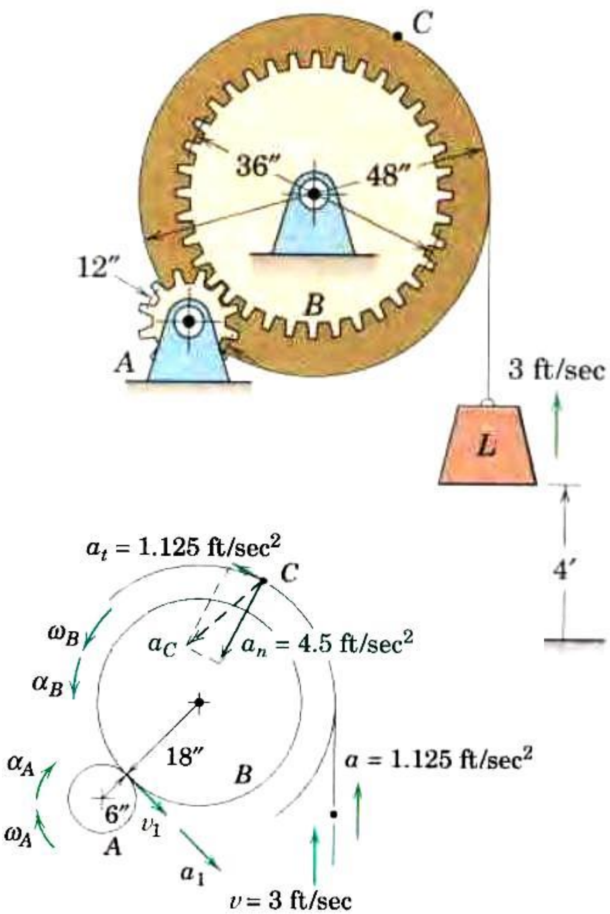
$$\Rightarrow \quad \theta_2 = \left[-60\pi t + \frac{2}{3}t^3\right]_{9.71}^{14} = 410\ rad$$

$$\Rightarrow \quad N_2 = \frac{410}{2\pi} = 65.3$$ دور پادساعتگرد

$$\Rightarrow \quad N = N_1 + N_2 = 194.2 + 65.3 = 259.5$$ دور

مسئله نمونه 5-2

پینیون A چرخدنده B را می چرخاند که به طبلک بالابر متصل است. بار L از وضعیت سکون بالا کشیده می شود و طی 4 ft صعود با شتاب ثابت ، سرعت رو به بالای 3 ft/sec را کسب می کند. وقتی بار از این مکان عبور می کند ، مطلوب است محاسبه الف) شتاب نقطه Cروی کابل و ب) سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای پینیون A .



حل : الف) اگر کابل روی طبلک نلغزد ، سرعت و شتاب عمودی بار L با سرعت مماسی v و شتاب مماسی at نقطه C برابر است. برای حرکت راست خط L با شتاب ثابت ، مولفه های n و t شتاب C برابرند با

$$v^2 - \cancel{v_0^2}^{\,0} = 2as \quad \Rightarrow \quad a = a_t = \frac{v^2}{2s} = \frac{3^2}{2\times 4} = 1.125 \;\; ft/\sec^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{3^2}{\frac{24}{12}} = 4.5 \;\; ft/\sec^2$$

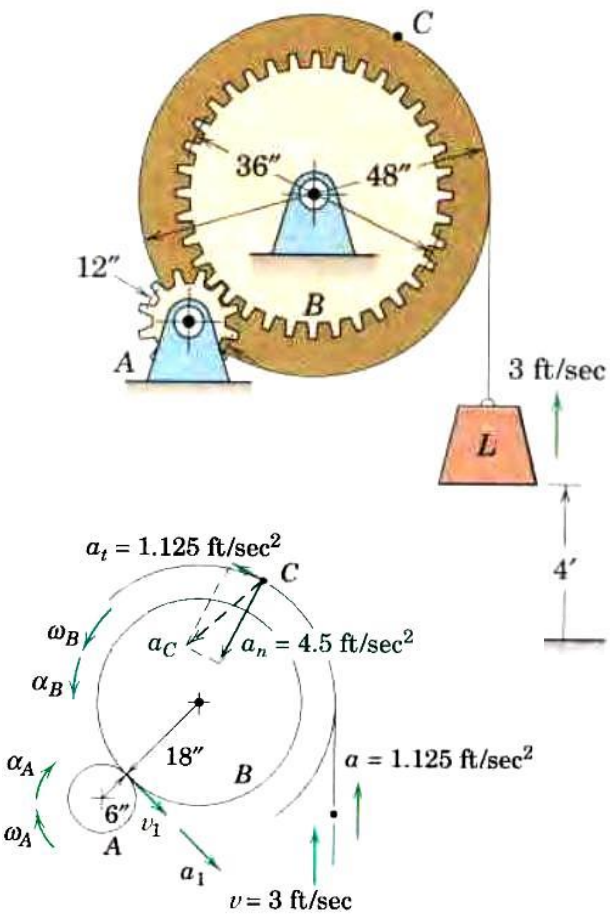
ب)

$$v = r\omega \quad \Rightarrow \quad \omega_B = \frac{v}{r} = \frac{3}{\frac{24}{12}} = 1.5 \;\; rad/\sec$$

$$a_t = r\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha_B = \frac{a_t}{r} = \frac{1.125}{\frac{24}{12}} = 0.56 \;\; rad/\sec^2$$

مسئله نمونه 5-2

پینیون A چرخدنده B را می چرخاند که به طبلک بالابر متصل است. بار L از وضعیت سکون بالا کشیده می شود و طی 4 ft صعود با شتاب ثابت ، سرعت رو به بالای 3 ft/sec را کسب می کند. وقتی بار از این مکان عبور می کند ، مطلوب است محاسبه الف) شتاب نقطه Cروی کابل و ب) سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای پینیون A .



حرکت زاویه ای چرخدنده A از روی حرکت زاویه ای چرخدنده B براساس تساوی سرعت و شتاب در نقطه تماس بدست می آید :

$$v_1 = r_A\omega_A = r_B\omega_B$$

$$\omega_A = \frac{r_B}{r_A}\omega_B = \frac{18}{6}\times 1.5 = 4.5\ rad/s\ \ (CW)$$

$$a_1 = r_A\alpha_A = r_B\alpha_B$$

$$\alpha_A = \frac{r_B}{r_A}\alpha_B = \frac{18}{6}\times 0.562 = 1.688\ rad/s^2\ \ (CW)$$

حرکت مطلق

در این رهیافت ، از روابط هندسی استفاده می کنیم که پیکربندی جسم را تعریف می کنند و سپس مشتق های زمانی این روابط زمانی را به دست می آوریم تا سرعت ها و شتاب ها حاصل شود.

رهیافت حرکت مطلق روشی نسبتا سرراست است ، به شرط آنکه توصیف هندسی جسم چندان پیچیده نباشد.

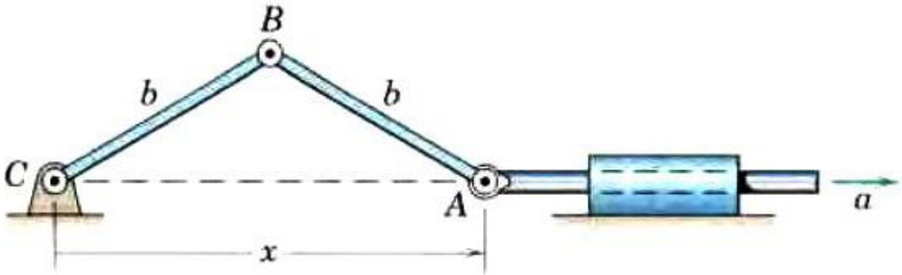
اگر پیکربندی شکل پیچیده و توصیف آن دشوار باشد ، ممکن است تحلیل با استفاده از اصول حرکت نسبی ترجیح داشته باشد

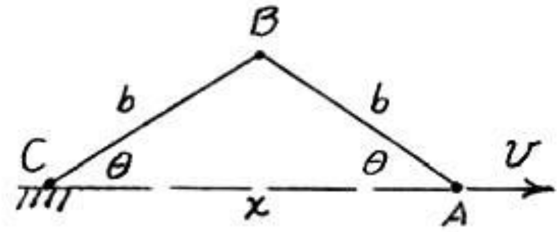
انتخاب بین یکی از این دو تحلیل ، پس از کسب تجربه در هر دو ، امکانپذیر است

مسئله 5-29

نقطه A شتاب ثابت a به سمت راست دارد که از حالت سکون با x مساوی صفر شروع می شود. مطلوب است تعیین سرعت زاویه ای ω میله AB برحسب x و a .

حل :





$$x = 2b\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = v = -2b\,\dot{\theta}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \omega = \dot{\theta} = \frac{-v}{2b\sin\theta}$$

برای شتاب ثابت $a = \ddot{x}$ می‌توان نوشت :

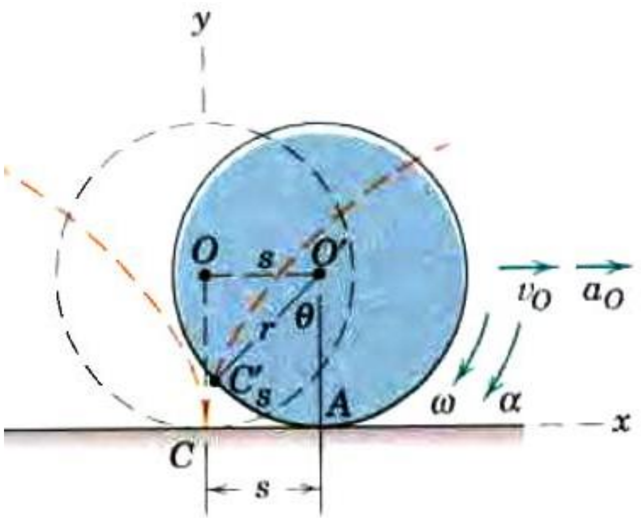
$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2ax}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{-\sqrt{2ax}}{2b\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{-\sqrt{2ax}}{\sqrt{4b^2 - x^2}}$$

مسئله نمونه 5-4

چرخی به شعاع r روی سطحی تخت غلتش بدون لغزش انجام می دهد. مطلوب است تعیین حرکت زاویه ای چرخ بر حسب حرکت خطی مرکز O آن.

شتاب نقطه ای واقع بر لبه چرخ را نیز ، هنگام تماس این نقطه با سطحی که چرخ روی آن می غلتد ، پیدا کنید.



حل: با توجه به دو وضعیت نشان داده شده ، جابجایی خطی مرکز O برابر s است.

خط شعاعی CO به اندازه زاویه θ می چرخد و به وضعیت جدید C′O′ می رسد.

در صورتی که چرخ لغزش نکند ، کمان C′A باید با فاصله s برابر باشد.

بنابراین از رابطه جابجایی و دو مشتق زمانی آن نتیجه می شود :

$$s = r\theta \;\Rightarrow\; \begin{aligned} v_O &= r\omega \\ a_O &= r\alpha \end{aligned}$$

در صورتی که سرعت چرخ کاهش یابد ، شتاب aO در جهت مخالف با جهت vO خواهد بود. در این حالت شتاب زاویه ای α جهتی مخالف با جهت ω دارد.

وقتی نقطه C در طول مسیر خود حرکت می کند و به C′ می رسد ، مختصات جدید آن و مشتق های زمانی آن ها عبارت است از :

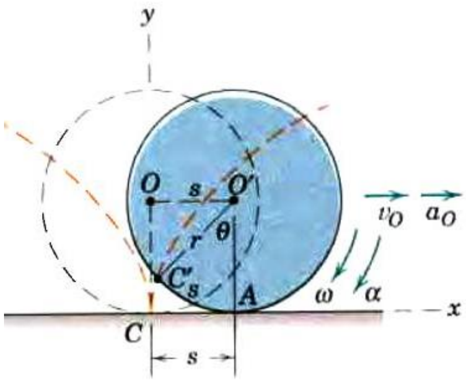
$$x = s - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$

$$y = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

مسئله نمونه 4-5

چرخی به شعاع r روی سطحی تخت غلتش بدون لغزش انجام می دهد. مطلوب است تعیین حرکت زاویه ای چرخ بر حسب حرکت خطی مرکز O آن.

شتاب نقطه ای واقع بر لبه چرخ را نیز ، هنگام تماس این نقطه با سطحی که چرخ روی آن می غلتد ، پیدا کنید.



$$y = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta)$$

$$x = s - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$

$$\dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta = v_O \sin\theta$$

$$\dot{x} = r\dot{\theta}(1-\cos\theta) = v_O(1-\cos\theta)$$

$$\ddot{y} = \dot{v}_O \sin\theta + v_O\dot{\theta}\cos\theta = a_O\sin\theta + r\omega^2\cos\theta$$

$$\ddot{x} = \dot{v}_O(1-\cos\theta) + v_O\dot{\theta}\sin\theta = a_O(1-\cos\theta) + r\omega^2\sin\theta$$

در لحظه تماس با سطح : $\theta = 0 \quad \Leftarrow$

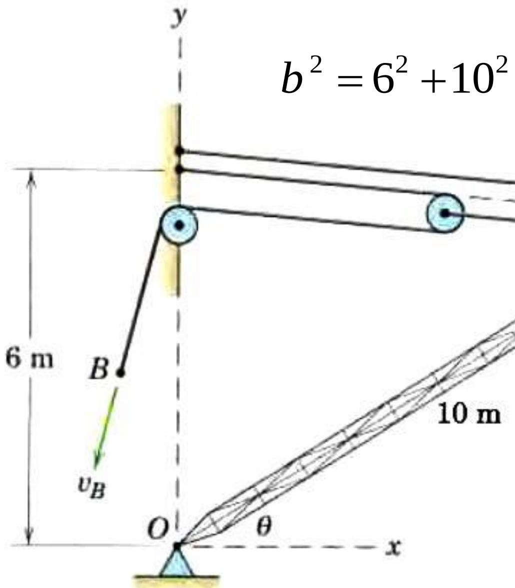
$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = r\omega^2$$

مسئله 5-38

بازوی OA توسط مکانیزم طناب و قرقره ای مطابق شکل بالا می رود. نقطه B طناب سرعت ثابت vB=3.2 m/s دارد. مطلوب است تعیین سرعت زاویه ای ω و شتاب زاویه ای α بازو به ازای θ=30º

حل :



$$b^2 = 6^2 + 10^2 - 2\times 10\times 6\times\cos(\pi-\theta) \quad\Rightarrow\quad b^2 = 136 - 120\sin\theta \qquad \boxed{1}$$

با مشتق گیری متوالی از رابطه فوق خواهیم داشت :

$$2b\dot{b} = -120\dot{\theta}\cos\theta \qquad \boxed{2}$$

$$2b\ddot{b} + 2\dot{b}^2 = -120\ddot{\theta}\cos\theta + 120\dot{\theta}^2\sin\theta \qquad \boxed{3}$$

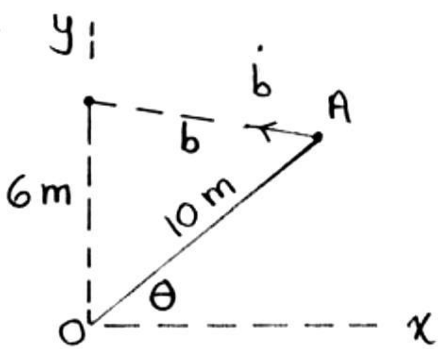
$$\boxed{\theta = 30^\circ} \quad\Rightarrow\quad \dot{b} = -\frac{v_B}{4} = -0.8\ m/s\ , \qquad \ddot{b} = 0$$

$$\boxed{1} \qquad b^2 = 136 - 120\sin 30^\circ = 76 \quad\Rightarrow\quad b = 8.72\ m$$

$$\boxed{2} \qquad \omega = \frac{2b\dot{b}}{-120\cos\theta} = \frac{2(8.72)(-0.8)}{-120\cos 30^\circ} = 0.1342\ rad/s$$

$$\boxed{3} \qquad \alpha = \frac{120\omega^2\sin\theta - 2\dot{b}^2}{120\cos\theta} = \frac{120(0.1342)^2\sin 30^\circ - 2(-0.8)^2}{120\cos 30^\circ}$$

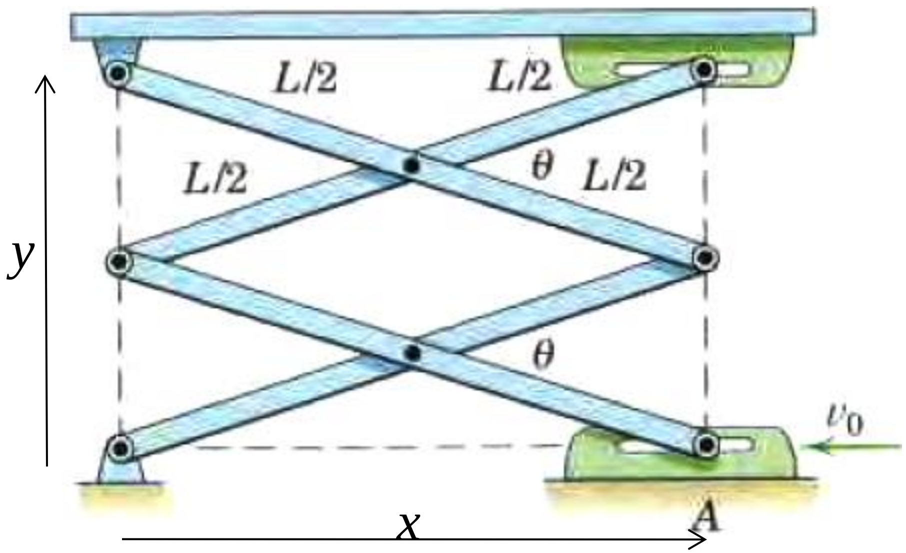
$$= -0.001916\ rad/s^2$$



مسئله 5-44

حرکت عمودی سکوی کار با حرکت افقی پین A کنترل می شود. پین A با سرعت v0 به سمت چپ حرکت می کند. مطلوب است تعیین سرعت عمودی v سکو به ازای هر مقدار θ .

حل :



$$y = 4\left(\frac{L}{2}\sin(\frac{\theta}{2})\right) = 2L\sin(\frac{\theta}{2})$$

$$V = \dot{y} = L\cos(\frac{\theta}{2})\dot{\theta}$$

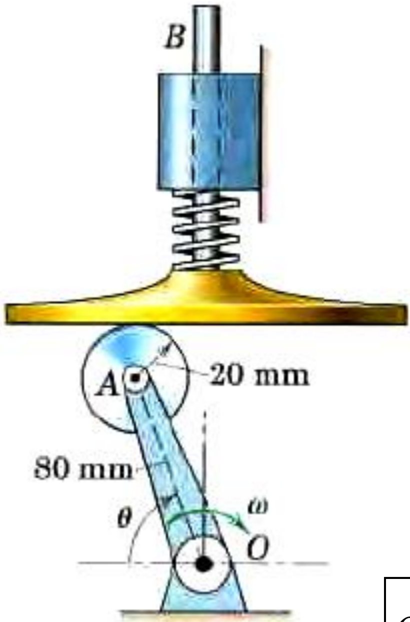
$$x = L\cos(\frac{\theta}{2}) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -v_0 = -\frac{L}{2}\sin(\frac{\theta}{2})\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{2v_0}{L\sin(\frac{\theta}{2})}$$

$$\Rightarrow \quad V = L\cos(\frac{\theta}{2})\left(\frac{2v_0}{L\sin(\frac{\theta}{2})}\right) = 2v_0\cot(\frac{\theta}{2})$$

مسئله 5-46

مطلوب است تعیین شتاب محور B به ازای $\theta = 60^\circ$، هرگاه لنگ OA شتاب زاویه ای $\alpha = 8\ rad/s^2$ داشته باشد و سرعت زاویه ای $\omega = 4\ rad/s$ باشد. تماس بین غلتک و سطح دیسک توسط فنر حفظ می شود.

حل :



$$y = 80\sin\theta + 20$$

$$\Rightarrow \quad \dot{y} = 80\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = 80\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

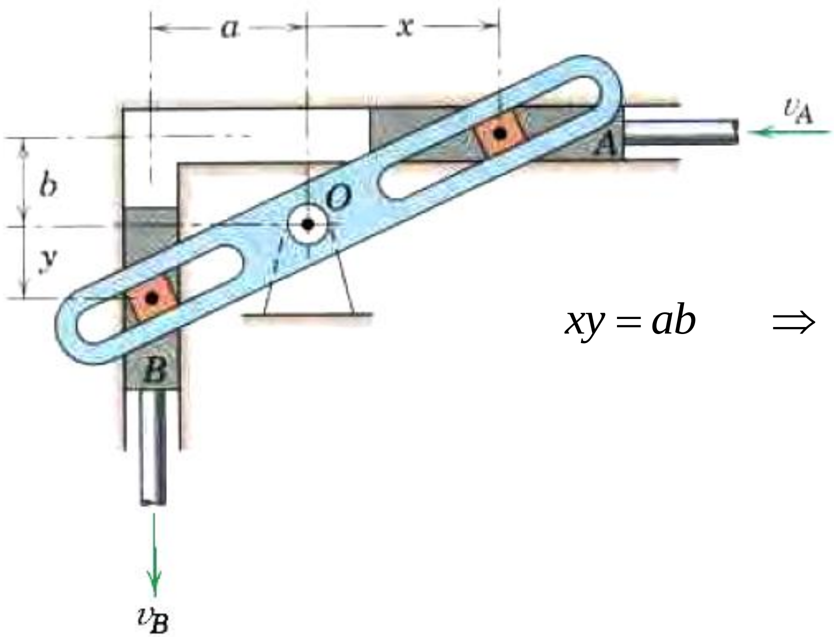
$$\boxed{\theta = 60^\circ, \quad \dot{\theta} = 4\ rad/s, \quad \ddot{\theta} = 8\ rad/s^2}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = 80\left(8\cos 60^\circ - (4)^2\sin 60^\circ\right) = -789\ mm/s \quad \downarrow$$

مسئله 5-47

بازوی شیاردار حول O لولا شده است و بین حرکت های لغزنده های A و B و میله های تنظیم آن ها رابطه برقرار می کند. هر قطعه کوچک لولا شده با پین به لغزنده مربوط به خود متصل است و مقید به لغزش در شیار چرخان است. نشان دهید که جابجایی x با عکس y متناسب است. سپس رابطه بین سرعت های vA و vB را تعیین کنید. فرض کنید vA در دوره کوتاهی از حرکت ثابت است و شتاب B را بدست آورید.

حل : با توجه به تانژانت زاویه بازو نسبت به افق خواهیم داشت :



$$\frac{b}{x}=\frac{y}{a} \Rightarrow \boxed{y=\frac{ab}{x}}$$

$$xy=ab \Rightarrow \dot{x}y+x\dot{y}=0 \Rightarrow \ddot{x}y+\dot{x}\dot{y}+\dot{x}\dot{y}+x\ddot{y}=0$$

$$\Downarrow$$

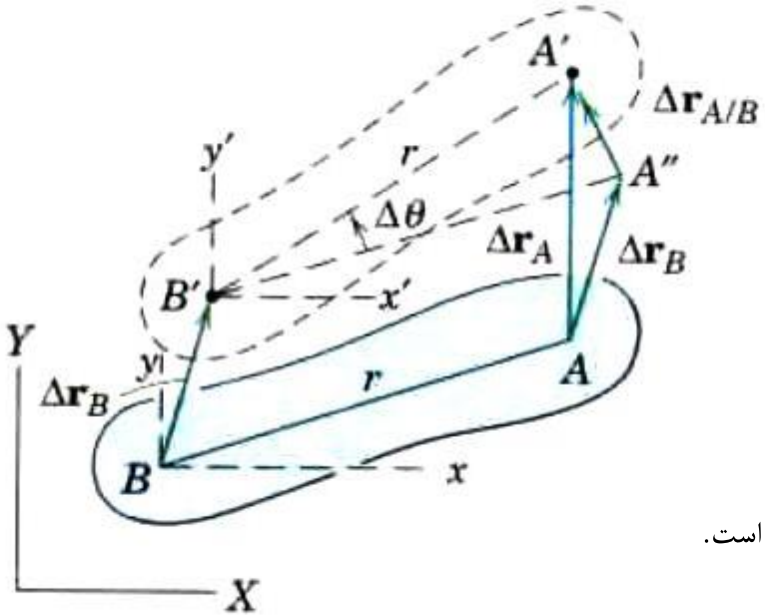
$$\dot{y}=-\frac{y}{x}\dot{x} \xrightarrow[\dot{y}=v_B]{\dot{x}=-v_A} \boxed{v_B=\frac{y}{x}v_A}$$

$$\ddot{x}y+\dot{x}\dot{y}+\dot{x}\dot{y}+x\ddot{y}=0 \Rightarrow \overset{0}{a_A}y-2v_Av_B+xa_B=0$$

$$\Rightarrow a_B=\frac{2v_Av_B}{x} \Rightarrow \boxed{a_B=\frac{2v_A^2y}{x^2}}$$

سرعت نسبی

رهیافت دوم برای حل مسائل سینماتیک جسم صلب استفاده از حرکت نسبی است.



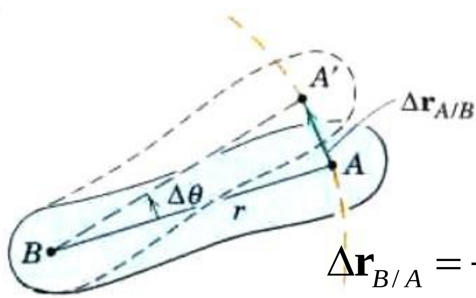
سرعت نسبی ناشی از چرخش

✓ دو نقطه واقع بر روی یک جسم صلب را به منزله دو ذره در نظر بگیرید.

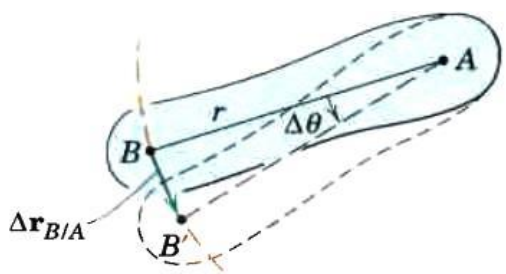
✓ در اینصورت ، حرکت یکی از نقطه ها ، از دید ناظری که همراه نقطه دیگر در حال انتقال است ، باید حرکت دایره ای باشد ، زیرا فاصله شعاعی از نقطه مرجع تا نقطه مشاهده شده ثابت است.

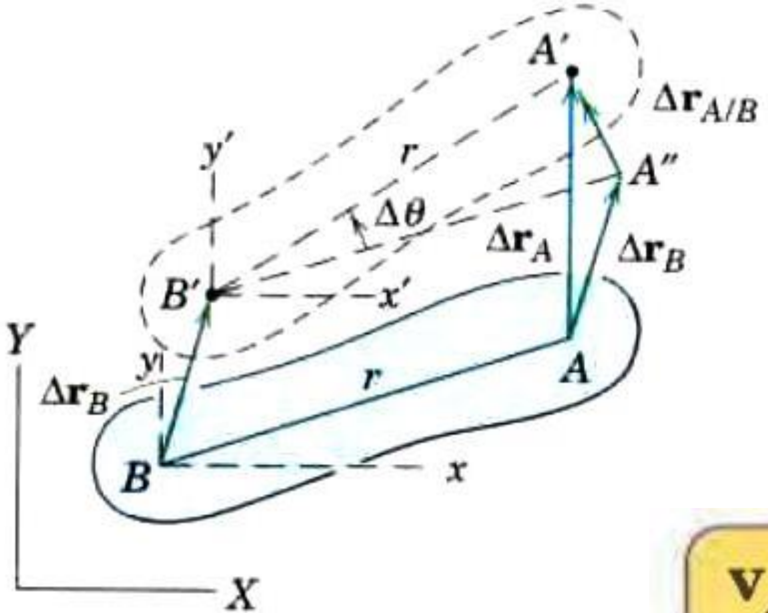
حرکت کلی از AB به $A'B'$	$\Longleftarrow$	انتقال مستقیم الخط از AB به $A''B'$	$+$	دوران حول B' از $A''B'$ به $A'B'$

از دید ناظر غیرچرخان متصل به B ، جسم حول B چرخش با محور ثابت انجام می دهد و حرکتی دایره ای دارد.



$$\Delta \mathbf{r}_{B/A} = -\Delta \mathbf{r}_{A/B}$$





$$\Delta \mathbf{r}_A = \Delta \mathbf{r}_B + \Delta \mathbf{r}_{A/B}$$

وقتی θ به سمت صفر میل می کند :

$$\Delta \mathbf{r}_{A/B} = r\Delta\theta$$

اگر عبارت $\Delta r A$ را بر فاصله زمانی متناظر Δt تقسیم کنیم و حد بگیریم ،

عبارت سرعت نسبی بدست می آید :

$$\boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}}$$

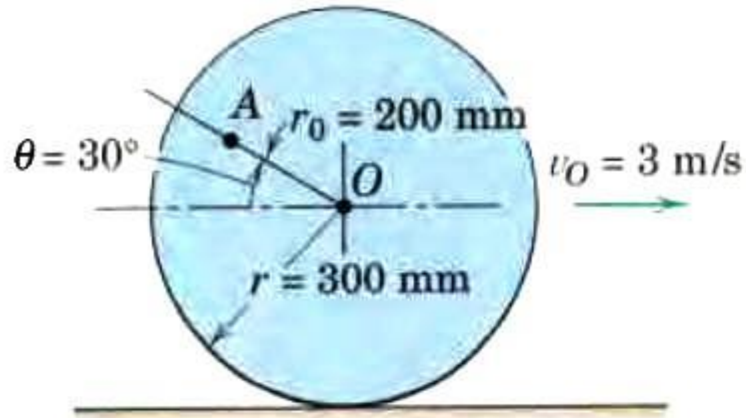
$$v_{A/B} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta \mathbf{r}_{A/B}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) \Rightarrow \boxed{v_{A/B} = r\omega} \quad \boxed{\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}}$$

سرعت خطی نسبی همواره بر خط واصل بین دو نقطه موردنظر عمود است.

برای حل معادله سرعت نسبی می توان از روش استفاده کرد : 1- حل با استفاده از جبر اسکالر ، 2- حل برداری و 3- حل ترسیمی

مسئله نمونه 5-7

چرخی به شعاع r=300 mm بدون لغزش به سمت راست غلتش می کند و سرعت مرکز آن O برابر vo=3 m/s است. مطلوب است محاسبه سرعت نقطه A واقع روی چرخ در لحظه ای مطابق شکل.



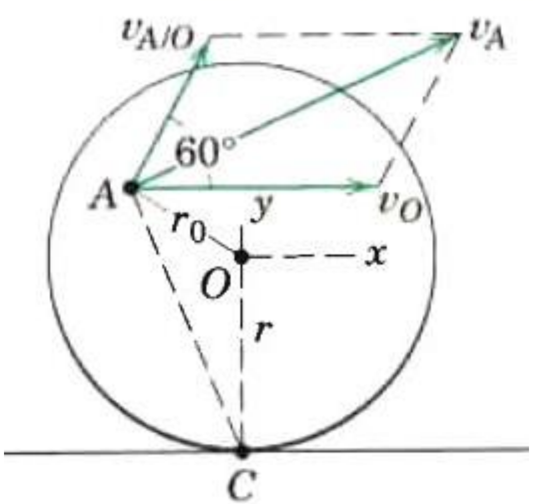
حل اسکالر

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O}$$

$$v_{A/O} = r_o \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad v_{A/O} = 0.2 \times 10 = 2\ m/s$$

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{v_O}{r} = \frac{3}{0.3} = 10\ rad/s$$

که مطابق شکل عمود بر خط OA است.



جمع برداری دو مولفه vO و vA/O ، سرعت کل vA را به ما می دهد.

با استفاده از قانون کسینوسها خواهیم داشت:

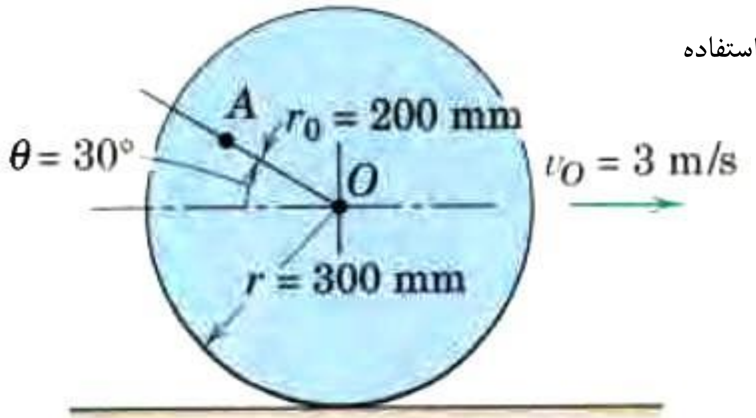
$$v_A^2 = 3^2 + 2^2 + 2(3)(2)\cos 60^\circ = 19$$

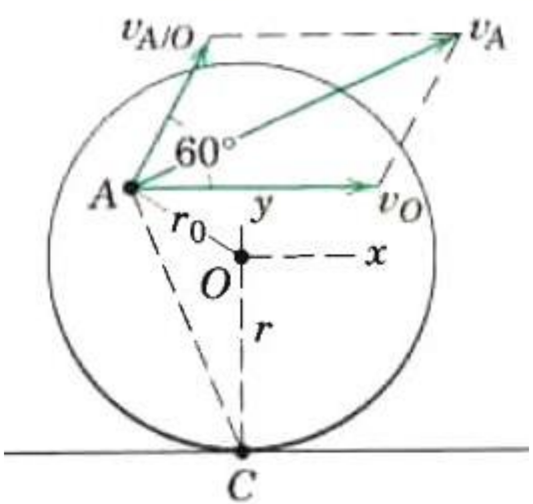
$$v_A = 4.36\ m/s$$

در صورت نیاز ، زاویه بردار سرعت vA با محور افقی را می توان با استفاده از قانون سینوسها بدست آورد.

مسئله نمونه 5-7

چرخی به شعاع r=300 mm بدون لغزش به سمت راست غلتش می کند و سرعت مرکز آن O برابر vo=3 m/s است. مطلوب است محاسبه سرعت نقطه A واقع روی چرخ در لحظه ای مطابق شکل.





سرعت نقطه تماس C بطور لحظه ای صفر است ، و می توان از این نقطه نیز به منزله نقطه مرجع استفاده

کرد. در این صورت :

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{A/C} = \mathbf{v}_{A/C}$$

$$v_{A/C} = \overline{AC}\,\omega$$

$$\overline{AC}^2 = 0.3^2 + 0.2^2 - 2(0.3)(0.2)\cos 120^\circ$$

$$\overline{AC} = 0.436\,m$$

$$v_A = v_{A/C} = 0.436 \times 10 = 4.36\ m/s$$

مشخص است که $\mathbf{v}_A$ بر AC عمود است. بدین معنی که A بطور لحظه ای حول نقطه C می چرخد.

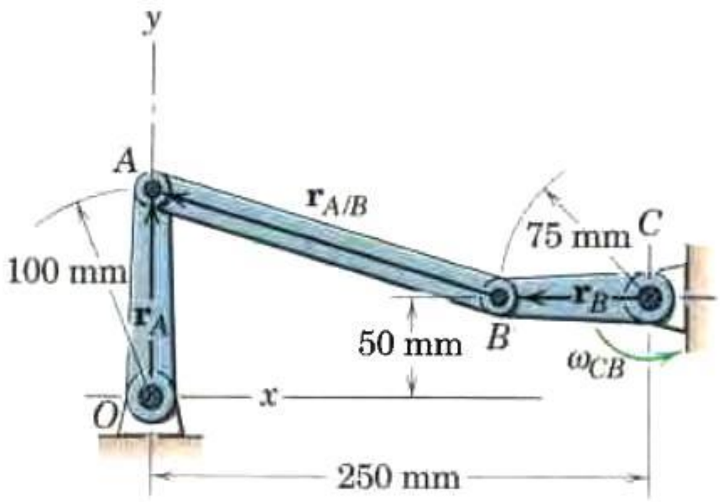
مسئله نمونه 5-8

لنگ CB در طول کمانی محدود ، حول نقطه C نوسان می کند و سبب می شود لنگ OA حول O نوسان کند. وقتی میله بندی از وضعیتی مطابق شکل می گذرد که در آن CB افقی و OA عمودی است ، سرعت زاویه ای CB برابر 2 rad/s و پادساعتگرد است. مطلوب است تعیین سرعت های زاویه ای OA و Ab در این لحظه.

حل برداری :

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{OA} \times \mathbf{r}_A = \boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B}$$



$$\boldsymbol{\omega}_{OA} = \omega_{OA}\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_A = 100\,\mathbf{j}\ (mm)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{CB} = 2\,\mathbf{k} \quad rad/s, \qquad \mathbf{r}_B = -75\,\mathbf{i}\ (mm)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_{A/B} = -175\,\mathbf{i} + 50\,\mathbf{j}\ (mm)$$

پس از جایگزینی خواهیم داشت :

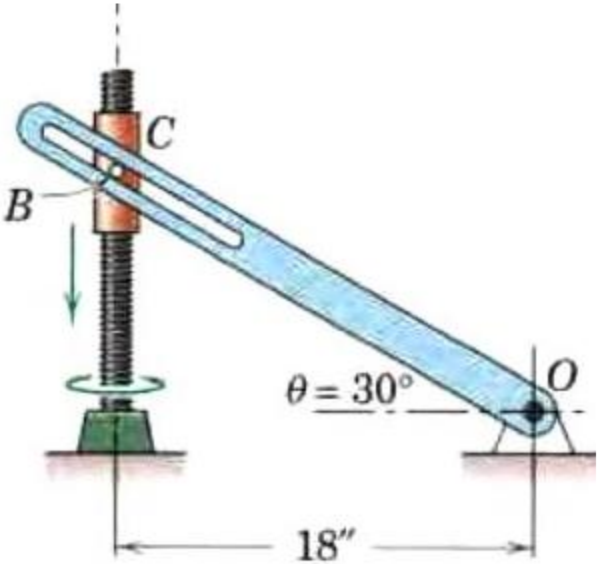
$$\omega_{OA}\mathbf{k} \times 100\mathbf{j} = 2\mathbf{k} \times (-75\mathbf{i}) + \omega_{AB}\mathbf{k} \times (-175\mathbf{i} + 50\mathbf{j})$$

$$-100\,\omega_{OA}\mathbf{i} = -150\mathbf{j} - 175\omega_{AB}\mathbf{j} - 50\omega_{AB}\mathbf{i}$$

$$\begin{cases} -100\,\omega_{OA} = -50\omega_{AB} \\ -150 - 175\omega_{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_{AB} &= -\frac{6}{7}\ rad/s \\ \omega_{OA} &= -\frac{3}{7}\ rad/s \end{aligned}$$

مسئله نمونه 5-10

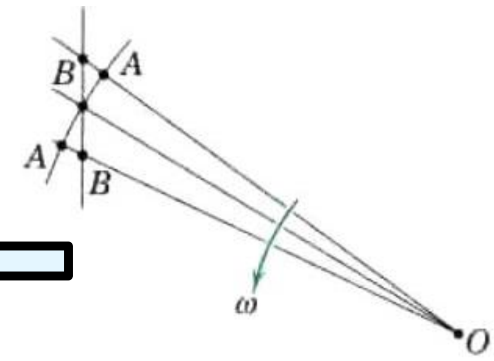
پیچ قدرتی مطابق شکل با سرعتی می پیچد که به طوقه رزوه شده سرعت 0.8 ft/sec در امتداد عمودی و رو به پایین بدهد. مطلوب است تعیین سرعت زاویه ای بازوی شیاردار ، وقتی $\theta=30^{\circ}$.



حل ترسیمی: نقطه A را روی بازو و منطبق بر پین B طوقه انتخاب می کنیم. اگر B را نقطه مرجع بگیریم :

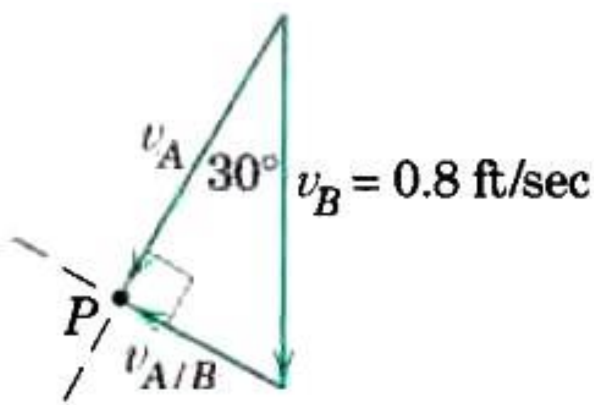
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

؟ ؟



سرعت نسبی در راستای شیار است.

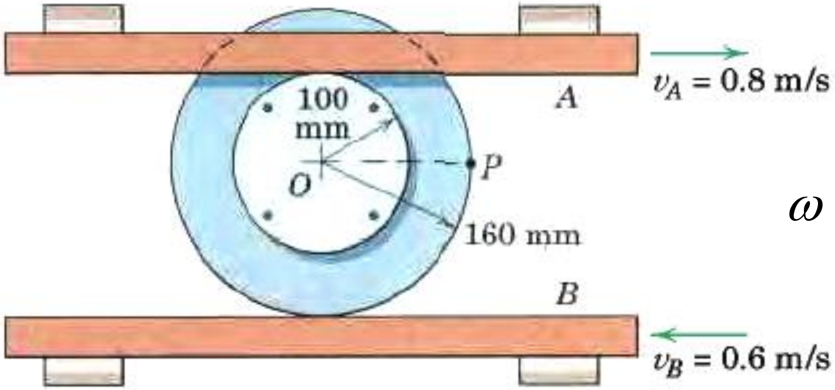
$$v_A = v_B \cos\theta = 0.8\times\cos 30^{\circ} = 0.693 \ \ ft/\sec$$



$$\omega = \frac{v_A}{\overline{OA}} = \frac{0.693}{(\frac{8}{12})/\cos 30^{\circ}} = 0.4 \ \ rad/s \ \ CCW$$

مسئله 5-75

هر یک از میله های لغزنده A و B با لبه یکی از چرخ های پرچ شده به هم ، بدون لغزش ، درگیر می شود. مطلوب است تعیین اندازه سرعت نقطه Pدر وضعیتی مطابق شکل.

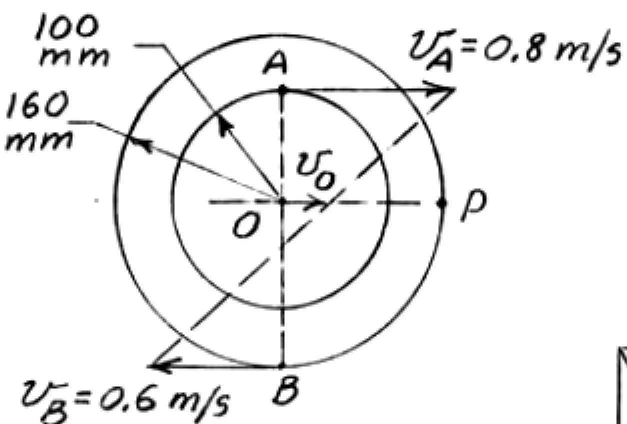


حل :

$$\omega = \frac{v_A + v_B}{\overline{AB}} = \frac{0.8+0.6}{0.1+0.16} = 5.38 \;\; rad/s \quad CW$$

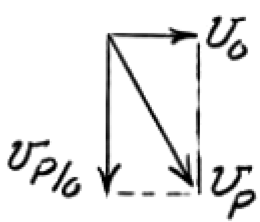
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O}$$

$$v_O = v_A - \overline{AO}\,\omega$$
$$= 0.8 - 0.1 \times 5.38 = 0.262 \;\; m/s$$



$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{P/O}$$

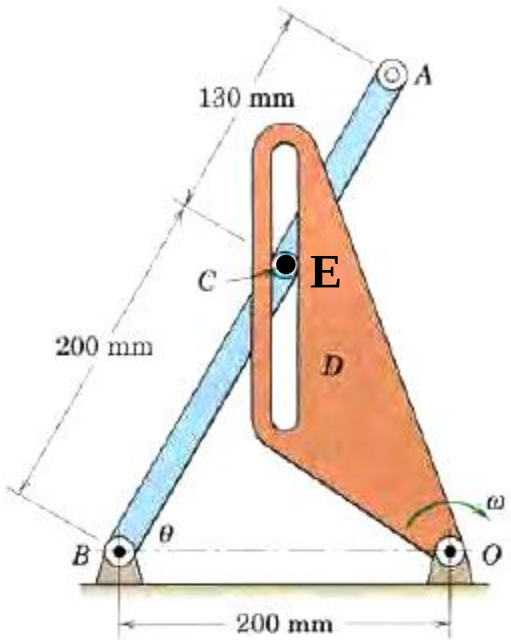
$$v_{P/O} = \overline{OP}\,\omega = 0.16 \times 5.38 = 0.862 \; m/s$$



$$v_P = \sqrt{0.262^2 + 0.862^2} = 0.9 \;\; m/s$$

مسئله 5-82

در لحظه ای مطابق شکل ، میله D با سرعت زاویه ای ω=2 rad/s می چرخد و شیار آن در امتداد عمودی است. به علاوه بطور لحظه ای ، θ=60° است. مطلوب است تعیین سرعت نقطه A از میله AB در این لحظه.



حل : نقطه E را روی جسم D و در محل لغزنده C در نظر می گیریم

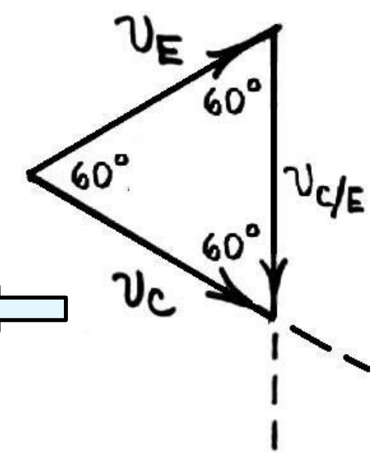
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{C/E}$$

$$v_E = \overline{EO}\omega = 0.2\times 2 = 0.4\ m/s$$

راستای این سرعت عمود بر خط OE و در جهت سرعت زاویه ای می باشد.

$$\underset{?}{\mathbf{v}_C} = \underset{0.4}{\mathbf{v}_E} + \underset{?}{\mathbf{v}_{C/E}}$$

حل ترسیمی

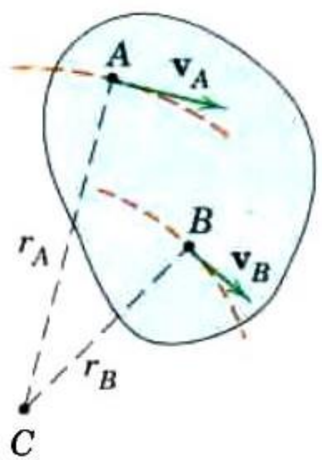


$$v_C = 0.4\ m/s$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_C}{\overline{BC}} = \frac{0.4}{0.2} = 2\ rad/s \Rightarrow v_A = \overline{AB}\,\omega_{AB} = 0.33\times 2 = 0.66\ m/s$$

مرکز آنی سرعت صفر

- همواره می توان جسم را در حال چرخش حول محوری در نظر گرفت که بر صفحه حرکت عمود است و از نقطه ای می گذرد که به مرکز آنی سرعت صفر شناخته می شود.



- وقتی جسم تغییر مکان می دهد ، مرکز آنی هم روی فضا و هم روی جسم تغییر مکان می دهد.
- این نقطه ممکن است داخل یا خارج از جسم باشد.
- شتاب این نقطه لزوماً برابر صفر نیست.
- اگر مرکز آنی دوران و سرعت یک نقطه از جسم صلبی مشخص باشد ، سرعت تمامی نقاط آن جسم صلب مشخص خواهد شد.

$$\omega = \frac{v_A}{r_A} \quad \Rightarrow \quad v_B = r_B\omega$$

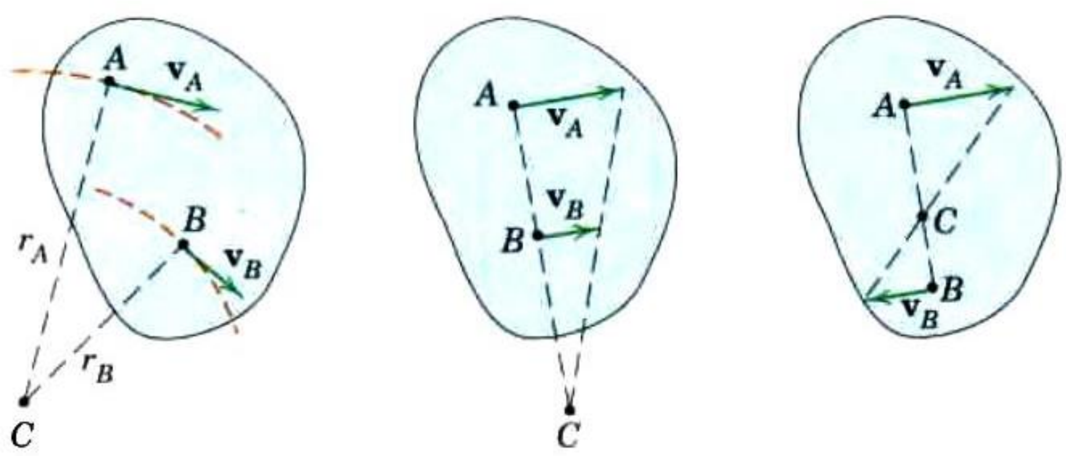
- جهت سرعت هر نقطه از جسم صلب ، بر خط واصل بیت آن نقطه و مرکز آنی ، عمود است. این خط عمود در جهت سرعت زاویه ای می باشد.

مرکز آنی سرعت صفر

اگر سرعت مطلق دو نقطه از یک جسم صلب مشخص باشد ، مکان مرکز آنی را می توان بدین طریق بدست آورد :

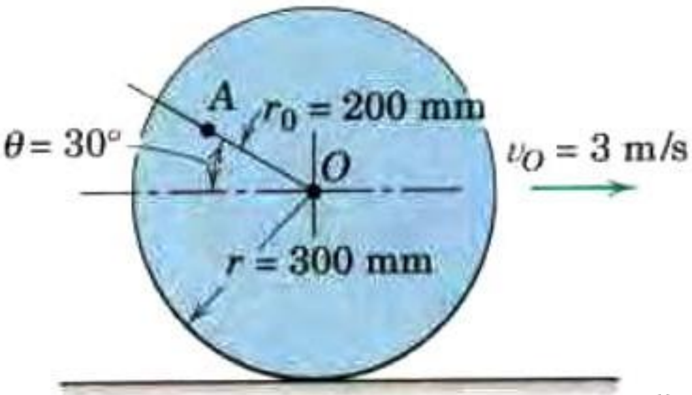
- دو راستا عمود بر دو سرعت معلوم رسم می کنیم ، هر جا که همدیگر را قطع کردند ، آن نقطه مرکز آنی است.
- اگر دو سرعت معلوم موازی هم باشند ، مکان مرکز آ نی با تناسب بندی مشخص می شود.

بدیهی است اگر اندازه سرعت های موازی برابر باشد ، مرکز آنی از جسم دور شده و در حد ، که جسم از چرخش باز می ایستد و فقط انتقال می یابد ، مرکز آنی به بینهایت می رود



مسئله نمونه 5-11

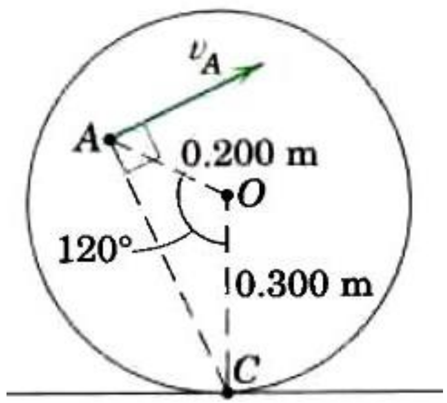
چرخ نشان داده شده بدون لغزش به سمت راست می غلتد. مرکز O این چرخ سرعت υ_O=3 m/s دارد. مرکز آنی سرعت صفر را مشخص کنید و با استفاده از آن سرعت نقطه A را در وضعیت نشان داده شده تعیین کنید.



حل : نقطه ای روی لبه چرخ که با زمین تماس دارد ، در صورتی که چرخ نلغزد ، سرعت صفر دارد.

بنابراین مرکز آنی سرعت صفر C است. سرعت زاویه ای چرخ برابر است با :

$$\omega = \frac{v}{r} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_O}{\overline{OC}} = \frac{3}{0.3} = 10 \;\; rad/s$$



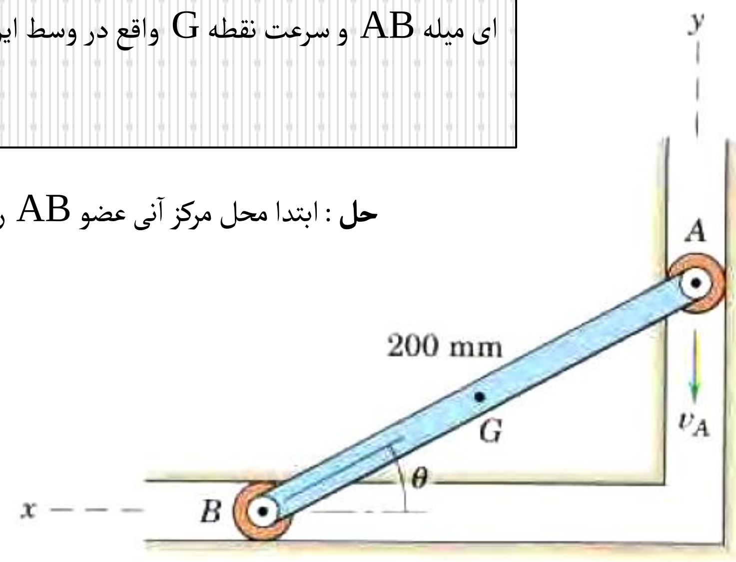
$$\overline{AC} = \sqrt{0.3^2 + 0.2^2 - 2(0.3)(0.2)\cos 120^\circ} = 0.436 \;\; m$$

$$v = r\omega \quad \Rightarrow \quad v_A = \overline{AC}\,\omega = 0.436 \times 10 = 4.36 \;\; m/s$$

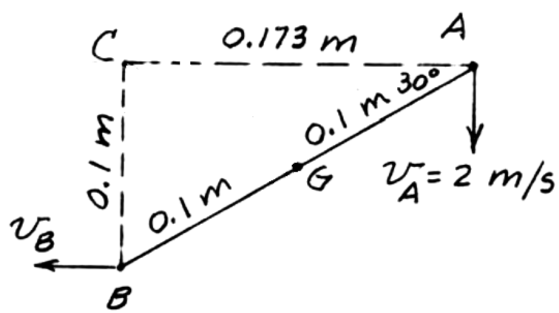
مطابق شکل ، امتداد این سرعت بر AC عمود است.

مسئله 5-94

میله مقید شکل زیر را در نظر بگیرید. سر A میله در بخش کوتاهی از حرکت خود سرعت رو به پایین vA برابر با 2 m/s دارد. سرعت زاویه ای میله AB و سرعت نقطه G واقع در وسط این میله را وقتی θ=0 است ، با استفاده از روش مرکز آنی بدست آورید.

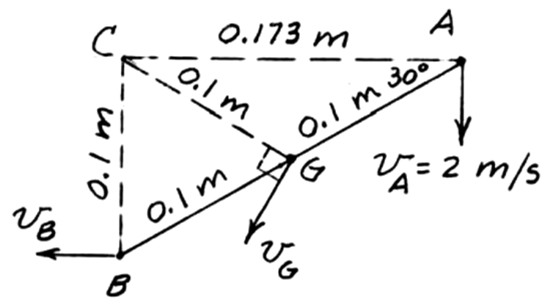


حل : ابتدا محل مرکز آنی عضو AB را با رسم عمود بر راستای سرعت نقاط A و B بدست می آوریم



از روی شکل مشخص است که جهت سرعت زاویه ای ساعتگرد است.

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{\overline{CA}} = \frac{2}{0.2\cos 30^\circ} = 11.55 \ \ rad/s \ \ \ CW$$

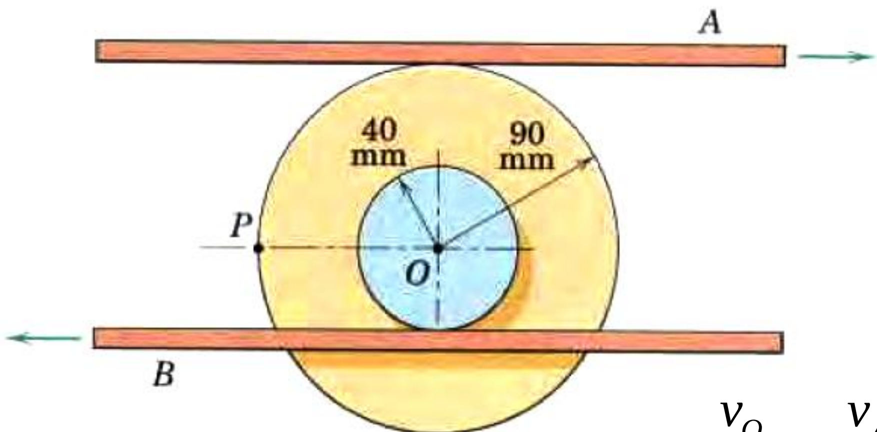


$$v_G = \overline{CG}\ \omega_{AB} = 0.1 \times 11.55 = 1.155 \ \ m/s$$

و جهت آن عمود بر خط CG می باشد.

مسئله 5-103

چرخ های متصل به هم روی صفحه های A و B غلتش بدون لغزش انجام می دهند. می دانیم که vA=60 mm/s به سمت راست و vB=200 mm/s به سمت چپ است. سرعت مرکز O و سرعت نقطه P در وضعیتی مطابق شکل را تعیین کنید.

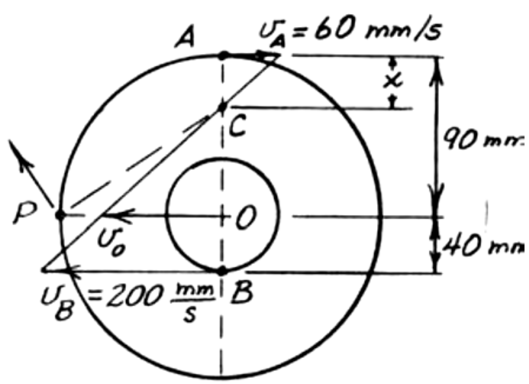


حل : ابتدا باید محل مرکز آنی را بدست آوریم

$$\frac{60}{x}=\frac{200}{90+40-x} \quad\Rightarrow\quad x=30\ mm$$

$$\omega=\frac{v_O}{CO}=\frac{v_A}{CA} \quad\Rightarrow\quad \frac{v_O}{60}=\frac{60}{30} \quad\Rightarrow\quad v_O=120\ m/s$$

و جهت آن عمود بر خط واصل CO می باشد.



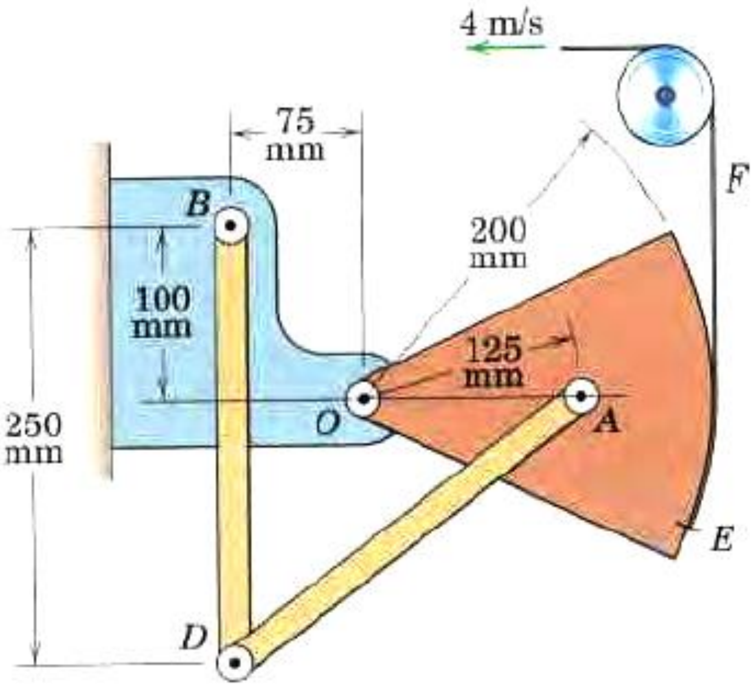
$$\overline{CP}=\sqrt{60^2+90^2}=108.2\ \ mm$$

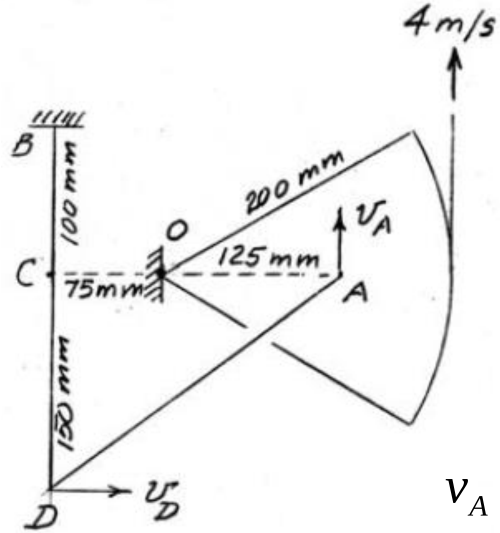
$$v_P=\overline{CP}\,\omega=\overline{CP}\,\frac{v_A}{CA}=108.2\times\frac{60}{30}=216.4\ \ mm/s$$

و جهت آن عمود بر خط واصل CP می باشد.

مسئله 5-118

نوار انعطاف پذیر F در نقطه E به قطاع چرخان متصل است و از روی قرقره راهنما می گذرد. مطلوب است تعیین سرعت زاویه ای میله های ADو BD در وضعیتی مطابق شکل ، هرگاه سرعت نوار 4m/s باشد.





حل : صفحه OA حول نقطه O دوران می کند. بنابراین این نقطه مرکز آنی آن می باشد.

در نتیجه ، سرعت نقطه A برابر است با :

$$v_A = \frac{125}{200}(4) = 2.5\ rad/s$$

با توجه به شکل فوق ، نقطه C نیز مرکز آنی عضو AD خواهد بود :

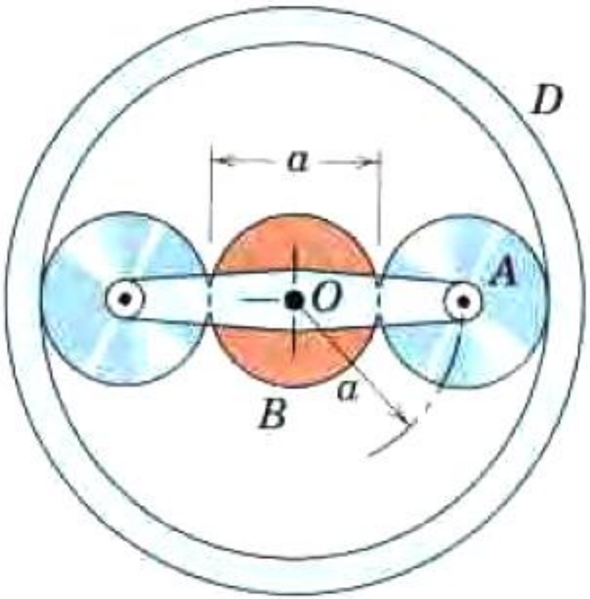
$$\omega_{AD} = \frac{v_A}{CA} = \frac{2.5}{0.2} = 12.5\ \ rad/s$$

$$v_A = \overline{CD}\ \omega_{AD} = 0.15 \times 12.5 = 1.875\ \ m/s$$

نقطه B نیز مرکز آنی عضو BD می باشد :

$$\Rightarrow \quad \omega_{BD} = \frac{v_D}{BD} = \frac{1.875}{0.25} = 7.5\ \ rad/s$$

بازوی OA با سرعت ساعتگرد 90 rpm حول محور O می چرخد. با استفاده از روش مرکز آنی سرعت صفر ، سرعت زاویه ای چرخدنده B را در دو حالت زیر بدست آورید. الف) چرخدنده داخلی D ثابت است و ب) چرخدنده D با سرعت پادساعتگرد 80 rpm حول O می چرخد.



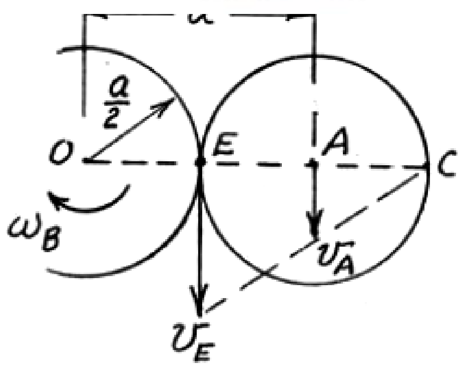
حل : الف) سرعت نقطه A روی میله برابر است با :

$$v_A = \omega_{OA} a$$

وقتی چرخدنده D ثابت باشد ، آنگاه چرخدنده A حول نقطه C دوران می کند و در واقع این نقطه مرکز آنی آن است. پس سرعت نقطه E برابر است با :

$$v_E = 2v_A = 2\omega_{OA} a$$

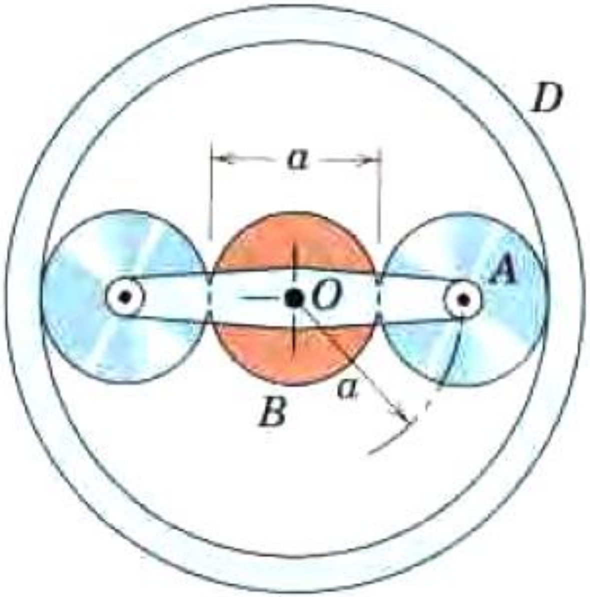
چرخدنده B هم حول O دوران می کند. بنابراین :



$$\omega_B = \frac{v_E}{\overline{OE}} = \frac{2\omega_{OA} a}{\frac{a}{2}} = 4\omega_{OA} = 4 \times 90 = 360 \ \ rpm$$

مسئله 5-118

بازوی OA با سرعت ساعتگرد 90 rpm حول محور O می چرخد. با استفاده از روش مرکز آنی سرعت صفر ، سرعت زاویه ای چرخدنده B را در دو حالت زیر بدست آورید. الف) چرخدنده داخلی D ثابت است و ب) چرخدنده D با سرعت پادساعتگرد 80 rpm حول O می چرخد.



حل : ب) حال ، سرعت نقطه C از روی سرعت چرخدنده D بدست می آید :

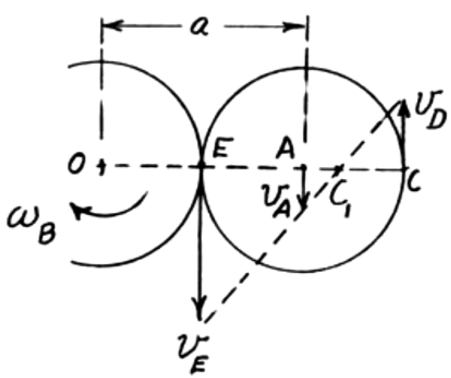
$$v_A = \omega_{OA} a = 90\,a \qquad v_C = \omega_D (1.5a) = 120\,a$$

چون جهت سرعت دو نقطه خلاف یکدیگر است ، پس مرکز آنی ،

بین A و C است (نقطه C1).

$$x \equiv \overline{c_1 c}$$

$$\frac{v_D}{x} = \frac{v_A}{\frac{a}{2} - x} \Rightarrow \frac{120\,a}{x} = \frac{90\,a}{\frac{a}{2} - x} \Rightarrow x = \frac{2}{7} a$$



$$\frac{v_E}{\frac{a}{2} + \frac{3}{14} a} = \frac{v_A}{\frac{3}{14} a} \Rightarrow v_E = \frac{10}{3} v_A = \frac{10}{3} \times 90\,a = 300\ a$$

$$\Rightarrow \omega_B = \frac{v_E}{\overline{OE}} = \frac{300a}{\frac{a}{2}} = 600\ \ rpm$$

شتاب نسبی

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{v}}_A = \dot{\mathbf{v}}_B + \dot{\mathbf{v}}_{A/B}$$

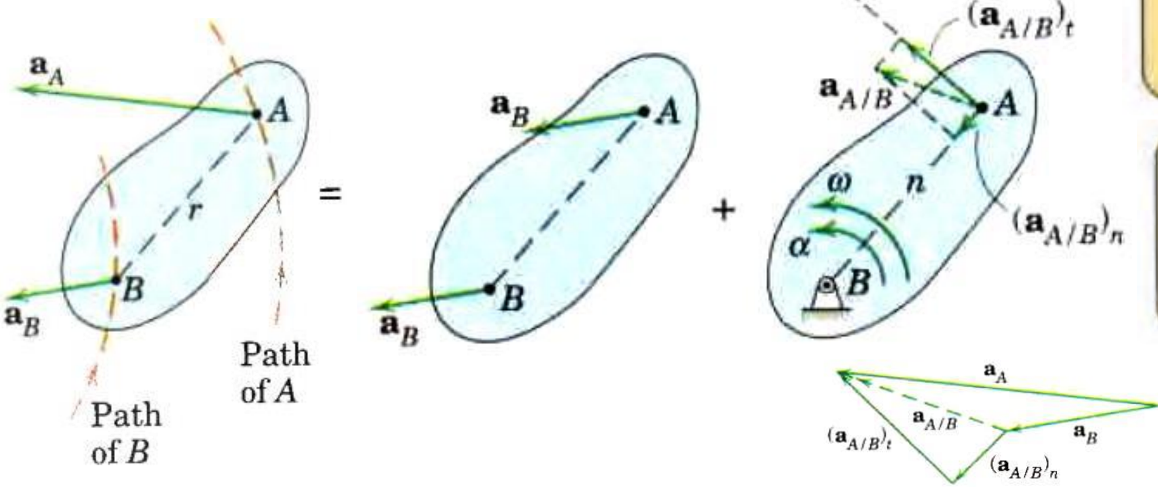
$$\boxed{\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}}$$

هرگاه نقاط A و B روی یک جسم صلب واقع باشند ، فاصله r بین آن ها ثابت است و از دید ناظر متحرک با B ، نقطه A حول B حرکت دایره ای انجام می دهد

$$\boxed{\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{A/B})_n + (\mathbf{a}_{A/B})_t}$$

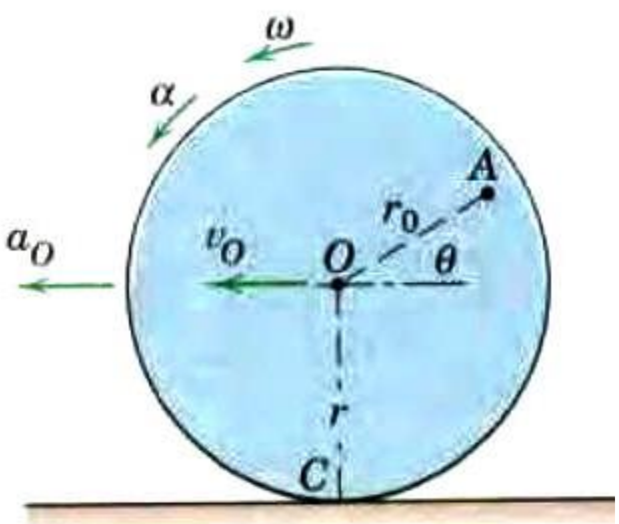
$$(a_{A/B})_n = {v_{A/B}}^2/r = r\omega^2$$
$$(a_{A/B})_t = \dot{v}_{A/B} = r\alpha$$

$$(\mathbf{a}_{A/B})_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$
$$(\mathbf{a}_{A/B})_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$



مسئله نمونه 5-13

چرخی به شعاع r بدون لغزش به سمت چپ غلتش می کند و در لحظه ای مطابق شکل ، سرعت مرکز O برابر vO و شتاب آن aO به سمت چپ است. مطلوب است تعیین شتاب نقاط A و C روی چرخ در این لحظه.



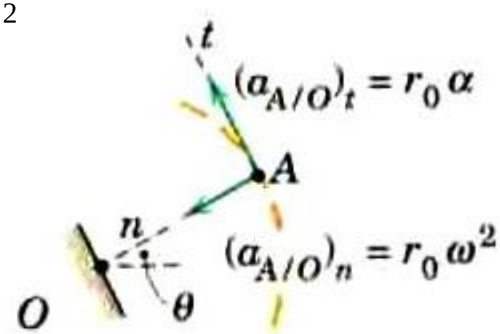
حل :

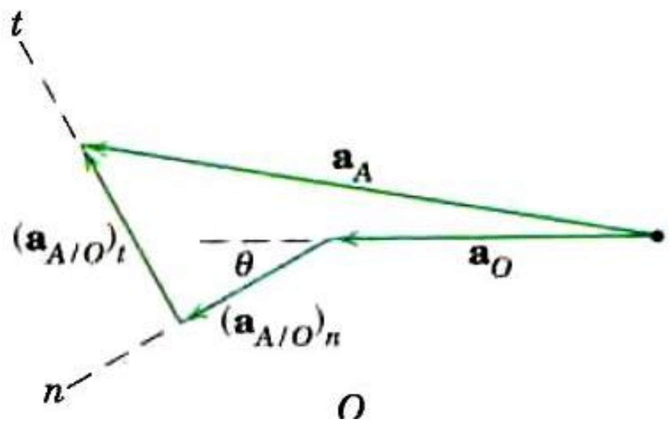
$$\omega = \frac{v_o}{r} \qquad \alpha = \frac{a_o}{r}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{A/O} = \mathbf{a}_O + \left(\mathbf{a}_{A/O}\right)_n + \left(\mathbf{a}_{A/O}\right)_t$$

$$\left(a_{A/O}\right)_n = r_0\omega^2 = r_0\left(\frac{v_O}{r}\right)^2$$

$$\left(a_{A/O}\right)_t = r_0\alpha = r_0\left(\frac{a_O}{r}\right)$$





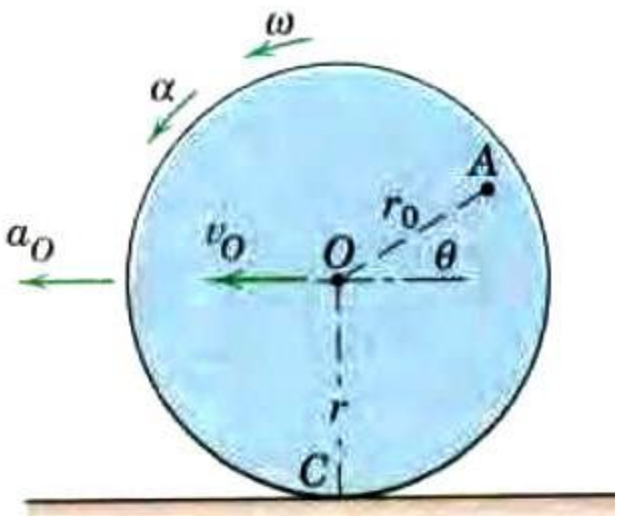
شکل مقابل نمایش برداری شتاب نقطه A را نشان می دهد.

در یک مسئله عددی ، می توان اندازه شتاب را بصورت جبری یا ترسیمی بدست آورد.

مسئله نمونه 5-13

چرخی به شعاع r بدون لغزش به سمت چپ غلتش می کند و در لحظه ای مطابق شکل ، سرعت مرکز O برابر vO و شتاب آن aO به سمت چپ است. مطلوب است تعیین شتاب نقاط A و C روی چرخ در این لحظه.

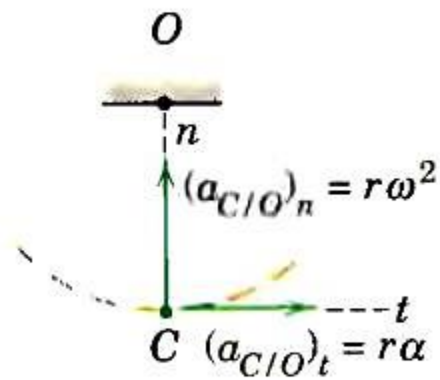
حل :



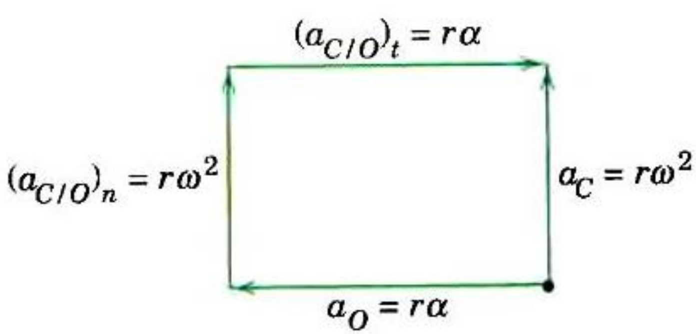
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{C/O} = \mathbf{a}_O + \left(\mathbf{a}_{C/O}\right)_n + \left(\mathbf{a}_{C/O}\right)_t$$

$$\left(a_{A/O}\right)_n = r\,\omega^2$$

$$\left(a_{A/O}\right)_t = r\,\alpha$$

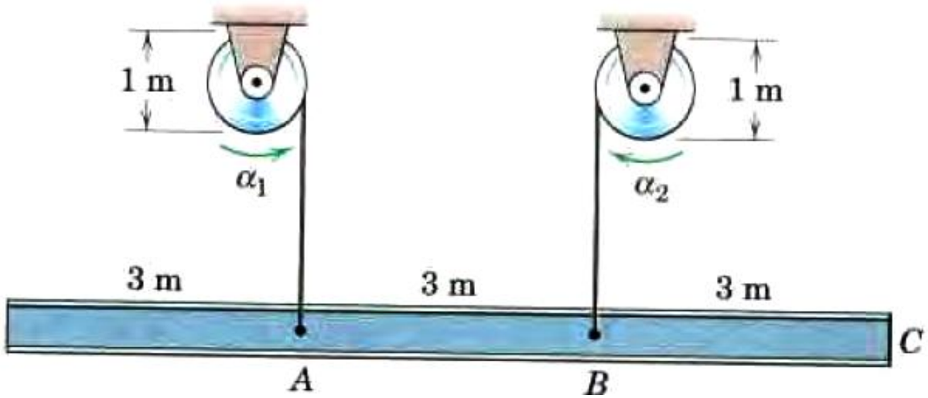


جمع برداری سه جمله ، شتاب نقطه C را خواهد داد . . .



مسئله 5-127

تیری فولادی به طول 9m را توسط دو کابل متصل به نقطه های A و B در وضعیت افقی بلند می کنند. شتاب زاویه ای اولیه طبلک بالابر $\alpha 1=0.5$ rad/s² و $\alpha 2=0.2$ rad/s² در جهتی مطابق شکل است. مطلوب است تعیین شتاب زاویه ای متناظر α تیر ، شتاب C و فاصله b از B تا نقطه P روی خط مرکزی تیر که شتاب ندارد.

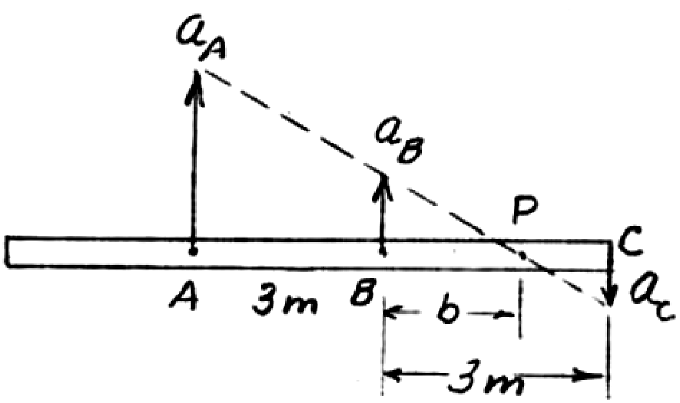


حل : در ابتدا می توان شتاب نقاط A و B تیر را بدست آورد

$$a_A = r\alpha_1 = 0.5\times 0.5 = 0.25\ m/s^2$$

$$a_B = r\alpha_2 = 0.5\times 0.2 = 0.1\ m/s^2$$

با توجه به شتاب این دو نقطه ، می توان شتاب زاویه ای تیر را بدست آورد :



$$\alpha = \frac{a_{A/B}}{AB} = \frac{a_A - a_B}{AB} = \frac{0.25-0.1}{3} = 0.05\ rad/s^2\ \ CW$$

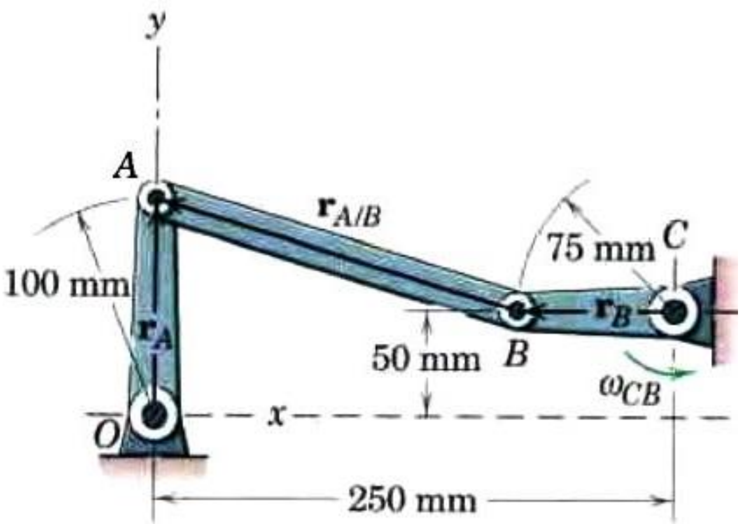
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{C/B}$$

$$a_C = 0.1 - 3\times 0.05 = -0.05\ m/s^2\ \downarrow$$

$$\frac{0.1}{b} = \frac{0.05}{3-b} \quad \Rightarrow \quad b = 2m$$

مسئله نمونه 14-5

لنگ CB در بخش کوتاهی از حرکت خود ، در وضعیتی مطابق شکل ، سرعت زاویه ای ثابت پادساعتگرد 2 rad/s دارد. مطلوب است تعیین شتاب زاویه ای میله های AB و OA در این وضعیت.



حل : از تحلیل سرعت مقادیر سرعت زاویه ای عضو ها بدست آمده بود

$$\omega_{OA} = -3.7 \ rad/s, \qquad \omega_{AB} = -6.7 \ rad/s$$

رابطه شتاب نسبی

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{A/B})_n + (\mathbf{a}_{A/B})_t$$

حل به روش برداری . . .

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_{CB} \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_{CB} \times (\boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_B)$$

$$= 0 + (2\mathbf{k}) \times (2\mathbf{k} \times [-75\mathbf{i}])$$

$$= 300\mathbf{i} \ \ mm/s^2$$

$$\mathbf{a}_A = \boldsymbol{\alpha}_{OA} \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega}_{OA} \times (\boldsymbol{\omega}_{OA} \times \mathbf{r}_A)$$

$$= \alpha_{OA}\mathbf{k} \times 100\,\mathbf{j} + \left(-\frac{3}{7}\mathbf{k}\right) \times \left(-\frac{3}{7}\mathbf{k} \times 100\,\mathbf{j}\right)$$

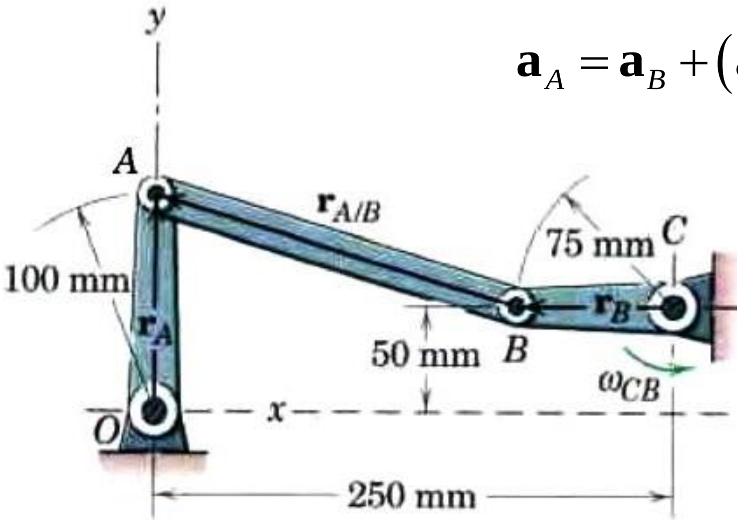
$$= -100\,\alpha_{OA}\mathbf{i} - 100\left(\frac{3}{7}\right)^2 \mathbf{j} \quad mm/s^2$$

مسئله نمونه 5-14

لنگ CB در بخش کوتاهی از حرکت خود ، در وضعیتی مطابق شکل ، سرعت زاویه ای ثابت پادساعتگرد 2 rad/s دارد. مطلوب است تعیین شتاب زاویه ای میله های AB و OA در این وضعیت.

حل :

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \left(\mathbf{a}_{A/B}\right)_n + \left(\mathbf{a}_{A/B}\right)_t$$



$$\left(\mathbf{a}_{A/B}\right)_n = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B}\right)$$

$$= -\frac{6}{7}\mathbf{k} \times \left(-\frac{6}{7}\mathbf{k} \times \left[-175\mathbf{i} + 50\mathbf{j}\right]\right)$$

$$= \left(\frac{6}{7}\right)^2 \left(175\mathbf{i} - 50\mathbf{j}\right) \quad mm/s^2$$

$$\left(\mathbf{a}_{A/B}\right)_t = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B} = \alpha_{AB}\mathbf{k} \times \left(-175\mathbf{i} + 50\mathbf{j}\right) = -50\alpha_{AB}\,\mathbf{i} - 175\alpha_{AB}\,\mathbf{j} \quad mm/s^2$$

حال این روابط را در جمله شتاب نسبی قرار می دهیم. ضرایب جملات i و j را مستقلا مساوی هم می گیریم :

$$-100\alpha_{OA} = 429 - 50\alpha_{AB}$$
$$-18.37 = -36.7 - 175\alpha_{AB}$$

$$\Rightarrow$$

$$\alpha_{AB} = -0.1050 \quad rad/s^2$$
$$\alpha_{OA} = -4.34 \quad rad/s^2$$

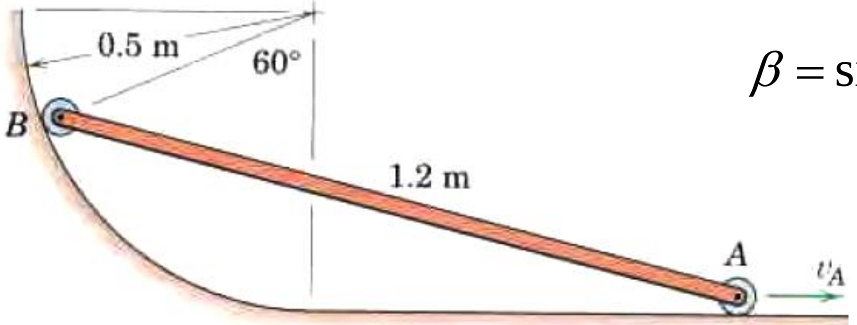
مسئله 5-135

در میله AB سرعت نقطه A برابر 3 m/s به سمت راست است و در فاصله ای شامل وضعیت نشان داده شده در شکل ثابت فرض می شود.

مطلوب است تعیین شتاب مماسی نقطه B در طول مسیر و شتاب زاویه ای میله.

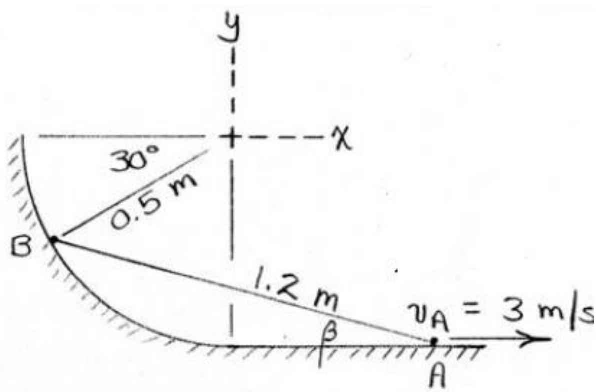
قبلا از تحلیل سرعت بدست آمده است : $v_B = 4.38\ m/s\ , \omega = 3.23\ rad/s$

حل :



$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{0.5 - 0.5\sin 30^\circ}{1.2}\right) = 12.02^\circ$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$$



$$a_{Bt}\left(\sin 30^\circ\mathbf{i} - \cos 30^\circ\mathbf{j}\right) + \frac{4.38^2}{0.5}\left(\cos 30^\circ\mathbf{i} + \sin 30^\circ\mathbf{j}\right) =$$

$$0 + \alpha\mathbf{k}\times 1.2\left(-\cos 12.02^\circ\mathbf{i} + \sin 12.02^\circ\mathbf{j}\right) -$$

$$3.23^2(1.2)\left(-\cos 12.02^\circ\mathbf{i} + \sin 12.02^\circ\mathbf{j}\right)$$

$$i : \frac{1}{2}a_{Bt} + 33.3 = -0.25\alpha + 12.28$$

$$j : -\frac{\sqrt{3}}{2}a_{Bt} + 19.21 = -1.174\alpha - 2.61$$

$$\Rightarrow$$

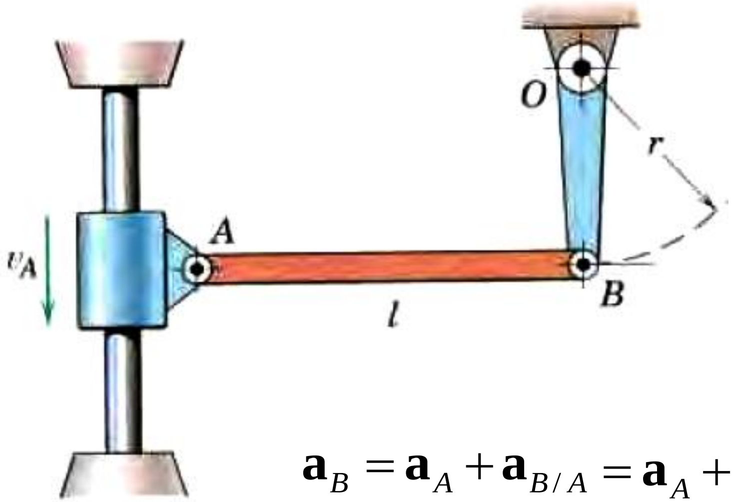
$$a_{Bt} = -23.9\ \ m/s^2$$

$$\alpha = -36.2\ \ rad/s^2$$

مسئله 5-139

طوقه لغزنده روی محور بالا و پایین می رود و سبب نوسان لنگ OB می شود. سرعت A در هنگام عبور از وضعیت خنثی که در آن AB افقی و OBعمودی است ، تغییر نمی کند. مطلوب است تعیین شتاب زاویه ای OB در این وضعیت.

حل : در این لحظه میله AB حول B دوران می کند. بنابراین :



$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{l}$$

$$v_B = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_B)_n = \frac{v_B^2}{r} = 0$$

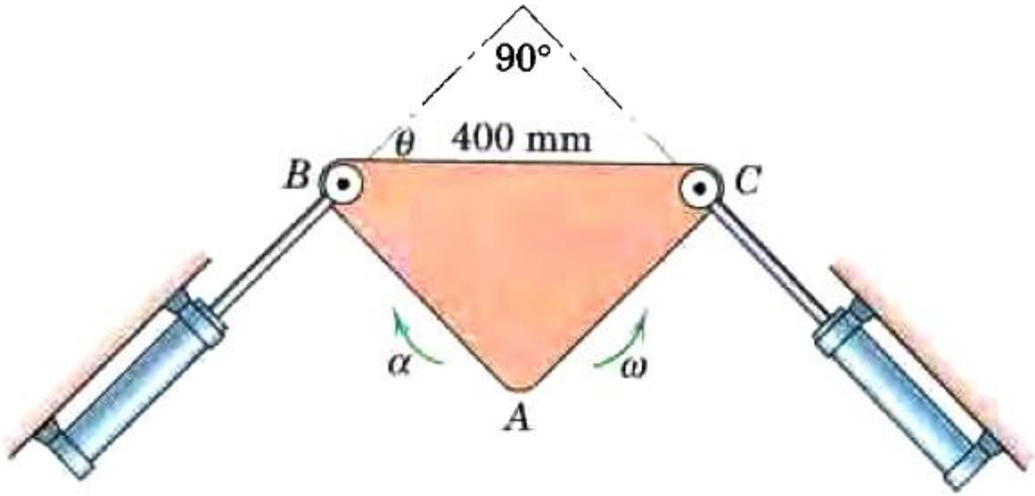
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_n + (\mathbf{a}_{B/A})_t$$

$$(\mathbf{a}_B)_t = 0 + (\mathbf{a}_{B/A})_n + 0 \ = l\,\omega_{AB}^2 = \frac{v_A^2}{l}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{OB} = \frac{(a_B)_t}{r} = \frac{v_A^2}{rl}$$

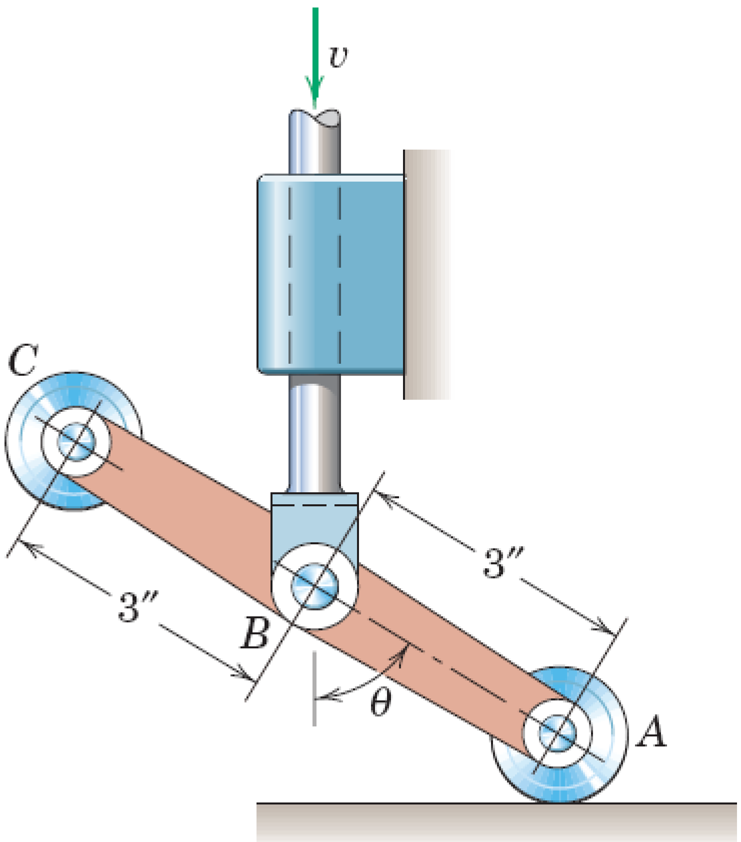
مسئله 5-142

در شکل زیر ، در زاویه $\theta=45°$ صفحه دارای سرعت زاویه ای 20 rad/s در جهت پادساعتگرد و شتاب زاویه ای 100 rad/s2 در جهت ساعتگرد است. اندازه سرعت و شتاب نقطه C را در این موقعیت بیابید.

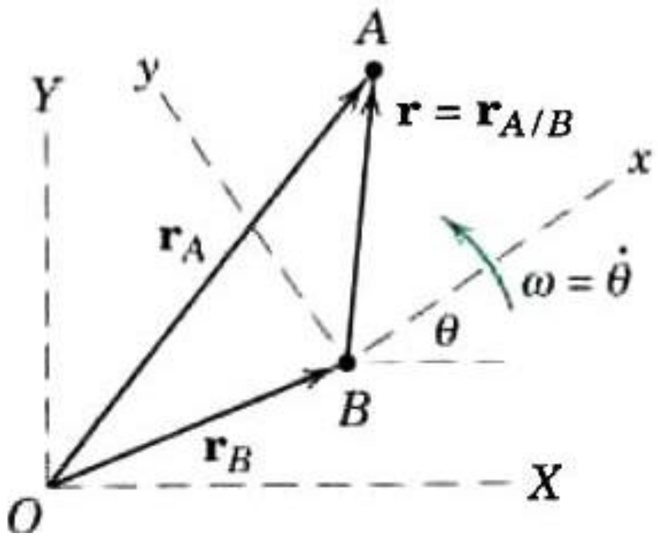


مسئله 5-156

در شکل زیر ، در زاویه $\theta=60^{\circ}$ میله کنترل قائم دارای سرعت 3 ft/sec به سمت پایین و شتاب 20 ft/sec2 به سمت بالاست. اگر غلتک A همواره با سطح افقی تماس داشته باشد ، مقدار شتاب C را در این موقعیت بیابید.



حرکت نسبت به محورهای چرخان



هرگاه نقاط A و B مستقل از یکدیگر فرض می شود.

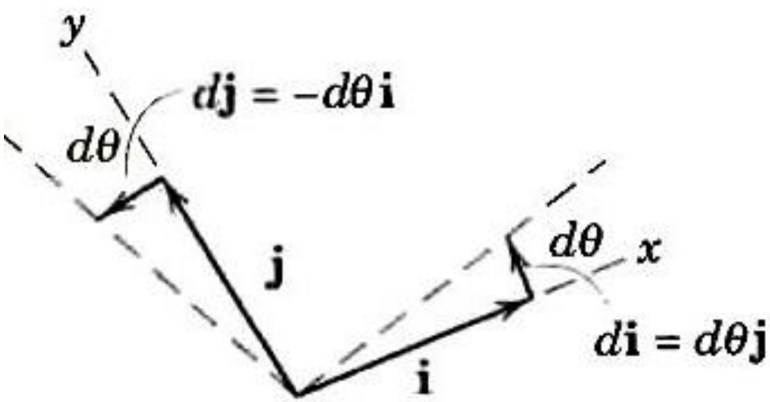
حرکت ذره A را از چارچوب مرجع متحرک x-y مشاهده می کنیم که مبدا آن به B متصل است و با سرعت زاویه ای ω می چرخد.

بردار مکان مطلق ذره A : $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_B + \left(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}\right)$

که $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بردارهای یکه متصل به دستگاه x-y اند.

این بردارهای یکه به همراه محورهای x و y می چرخند. بنابراین مشتق زمانی دارند.

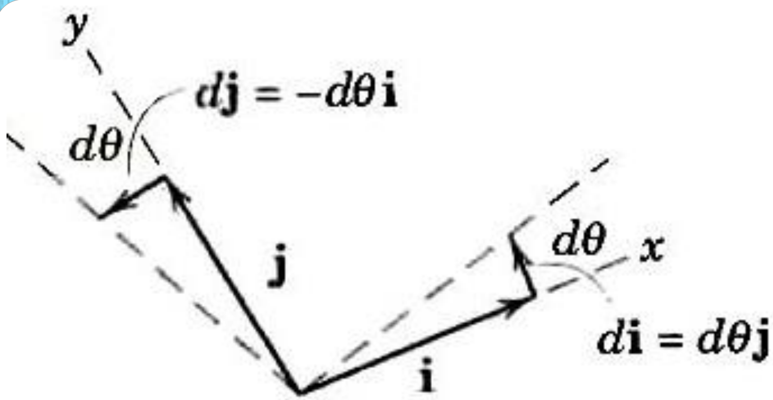
در مدت زمان dt ، بردارهای یکه به اندازه $d\theta = \omega\, d t$ می چرخند.



$$d\,\mathbf{i} = d\theta\,\mathbf{j}$$

$$d\,\mathbf{j} = -d\theta\,\mathbf{i}$$

حرکت نسبت به محورهای چرخان



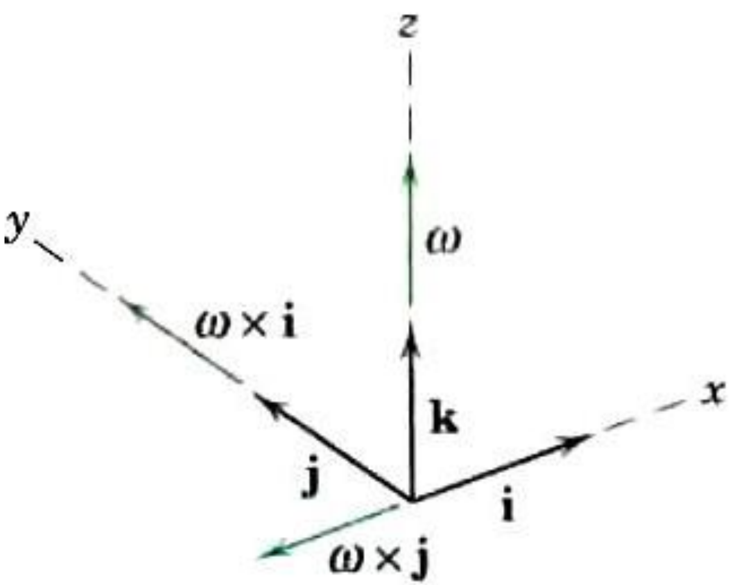
$$d\,\mathbf{i} = d\theta\,\mathbf{j}\,, \qquad d\,\mathbf{j} = -d\theta\,\mathbf{i}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\,\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{j}\,, \qquad \frac{d\,\mathbf{j}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{i}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{i}} = \omega\,\mathbf{j}\,, \qquad \dot{\mathbf{j}} = -\omega\,\mathbf{i}}$$



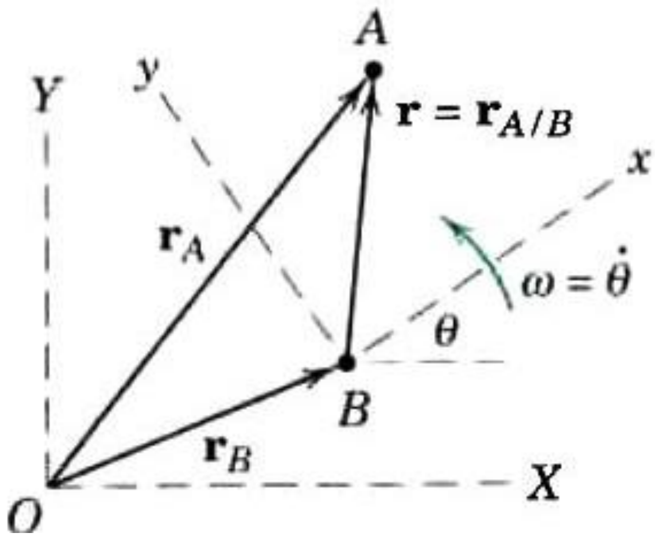
با توجه به شکل روبرو :

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i} = \omega\mathbf{j}$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j} = -\omega\mathbf{i}$$

$$\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i} \qquad \text{and} \qquad \dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}$$

سرعت نسبی



$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + \frac{d}{dt}\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + \left(x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}}\right) + \left(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}\right)$$

$$\left(x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}}\right) = \boldsymbol{\omega} \times x\mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} \times y\mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \times \left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = \mathbf{v}_{rel} \longrightarrow$$

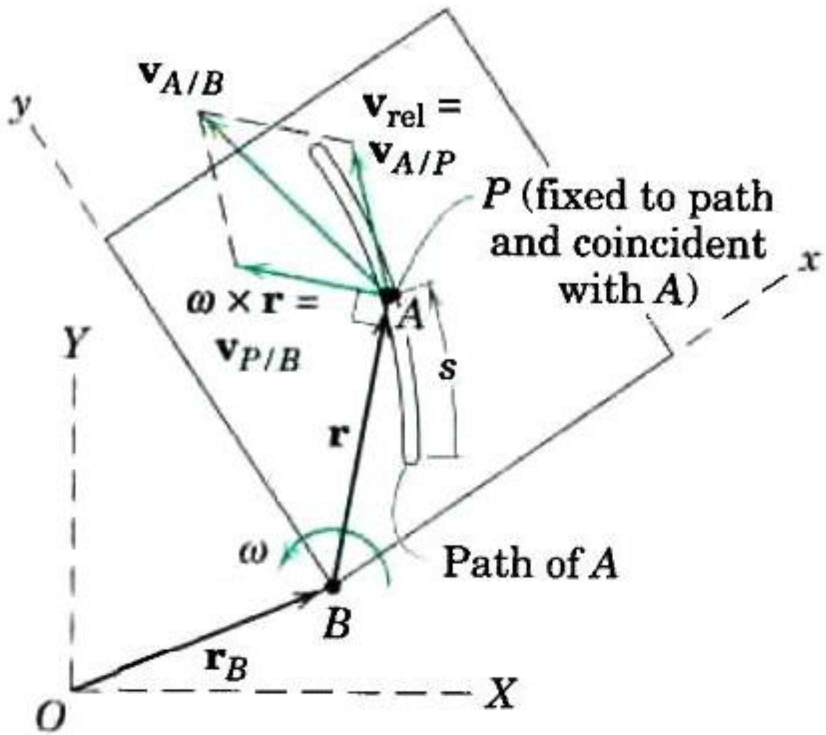
$$\boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}}}$$

$$\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}$$

$$\downarrow$$

این جمله ، تفاضل سرعت های نسبی اندازه گیری شده در دستگاه های غیرچرخان و چرخان است.

سرعت نسبی



$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}$$

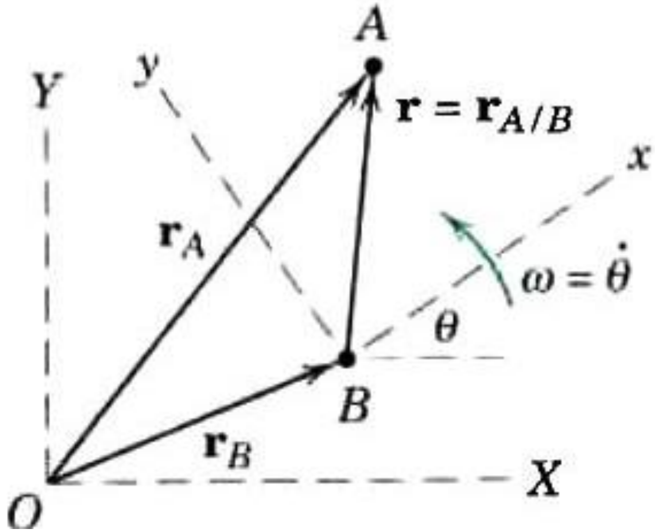
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{P/B} + \mathbf{v}_{A/P}$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{A/P}$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_{P/B} + \mathbf{v}_{A/P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}$$

شتاب نسبی



$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}}_{rel}$$

قبلا از تحلیل سرعت داشتیم :

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \left(x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}}\right) + \left(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}\right)$$
$$= \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}$$

بنابراین :

$$\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}) = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel}$$

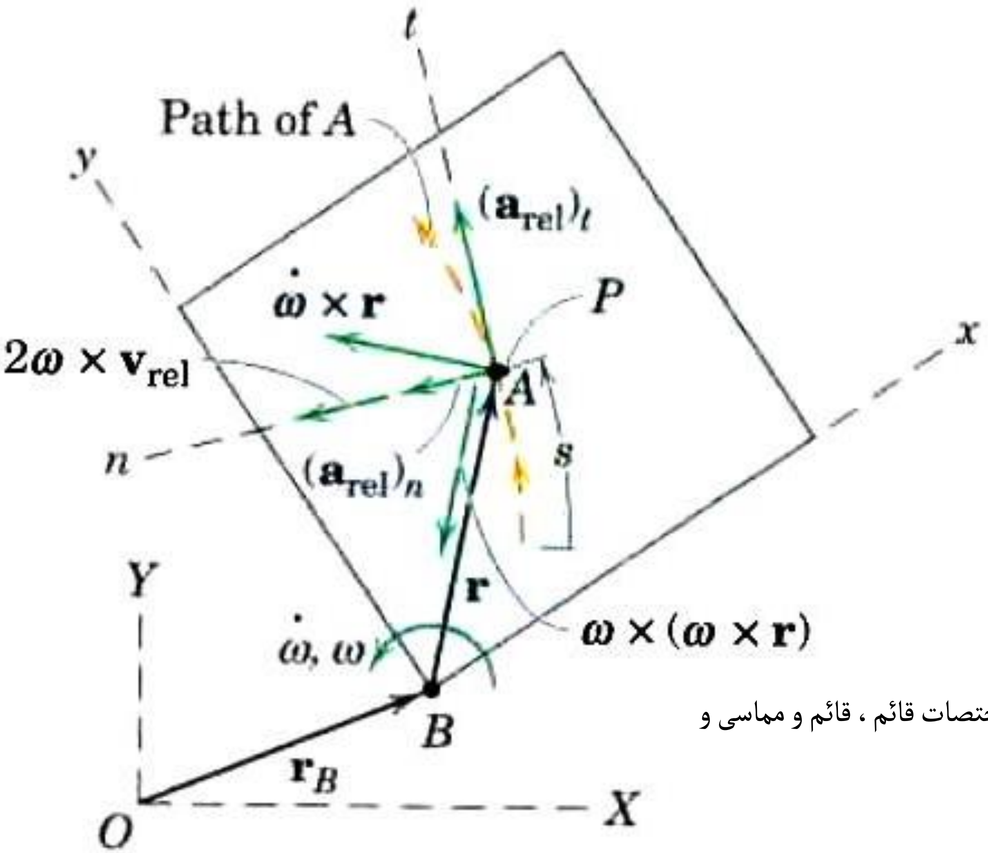
$$\dot{\mathbf{v}}_{rel} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}\right) = \left(\dot{x}\dot{\mathbf{i}} + \dot{y}\dot{\mathbf{j}}\right) + \left(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}\right) = \boldsymbol{\omega}\times\left(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}\right) + \left(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}\right) = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}$$

با قرار دادن این روابط در معادله شتاب خواهیم داشت :

$$\boxed{\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2\omega \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}$$

شتاب نسبی



$\dot{\omega} \times \mathbf{r}$ $\qquad$ $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$

مولفه های مماسی و قائم شتاب $\mathbf{a}_{P/B}$ را نشان می دهد.

$\mathbf{a}_{rel}$

شتاب A نسبت به صفحه در طول مسیر ، $\mathbf{a}_{rel}$ ، را می توان بر حسب مختصات قائم ، قائم و مماسی و

یا قطبی در دستگاه چرخان بیان نمود.

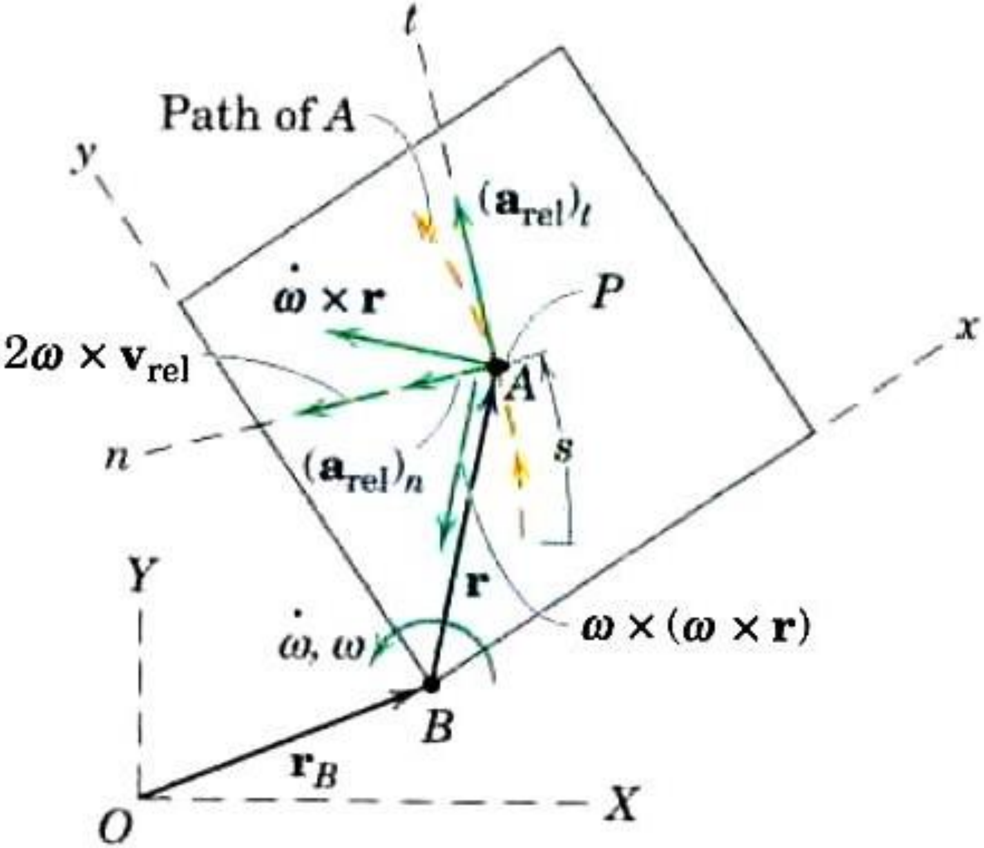
در شکل از مختصات n و t استفاده شده است.

$$(a_{rel})_t = \ddot{s}, \quad (a_{rel})_n = v_{rel}^2 / \rho$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

شتاب کریولیس

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel}$$



این جمله معرف اختلاف شتاب A نسبت به P است ،

وقتی در دو دستگاه مختصات غیرچرخان و چرخان اندازه گیری شود.

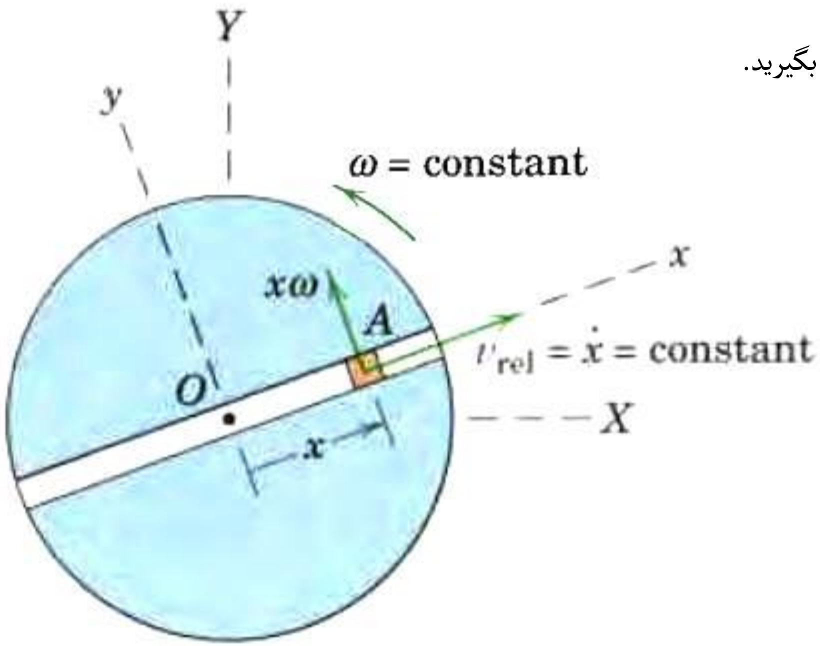
امتداد این جمله همواره بر بردار سرعت نسبی $\mathbf{v}_{rel}$ عمود است

و جهت آن با استفاده از قاعده دست راست تعیین می شود.

تجسم شتاب کریولیس دشوار است زیرا از دو اثر فیزیکی متفاوت تشکیل می شود.

شتاب کریولیس

برای کمک به تجسم این شتاب ، شکل مقابل را در نظر بگیرید.



سرعت ذره A دو مولفه دارد:

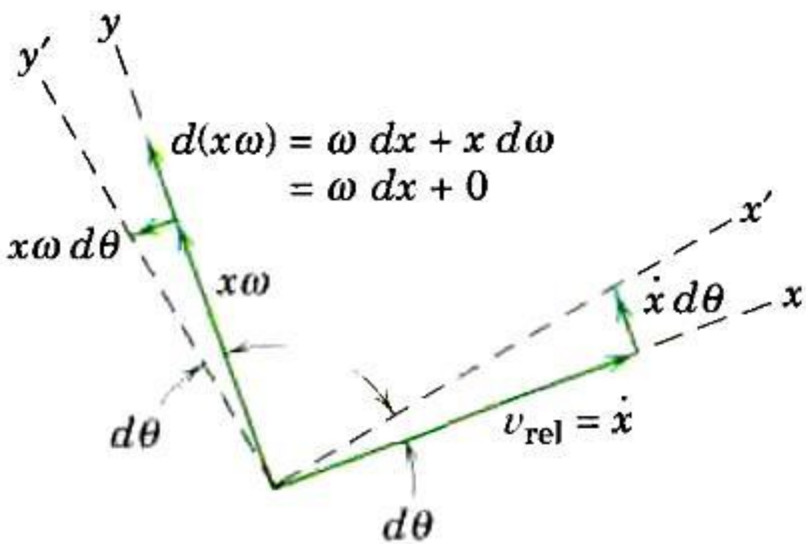
$\dot{x}$ ناشی از حرکت در طول شیار و $x\omega$ ناشی از چرخش شیار.

با رسم تغییرات این دو مولفه سرعت در فاصله dt خواهیم داشت :

$\dot{x}\,d\theta$ ⟵ ناشی از تغییر امتداد $\mathbf{v}_{rel}$

⟵ هر دو در جهت y

ωdx ⟵ ناشی از تغییر اندازه xω

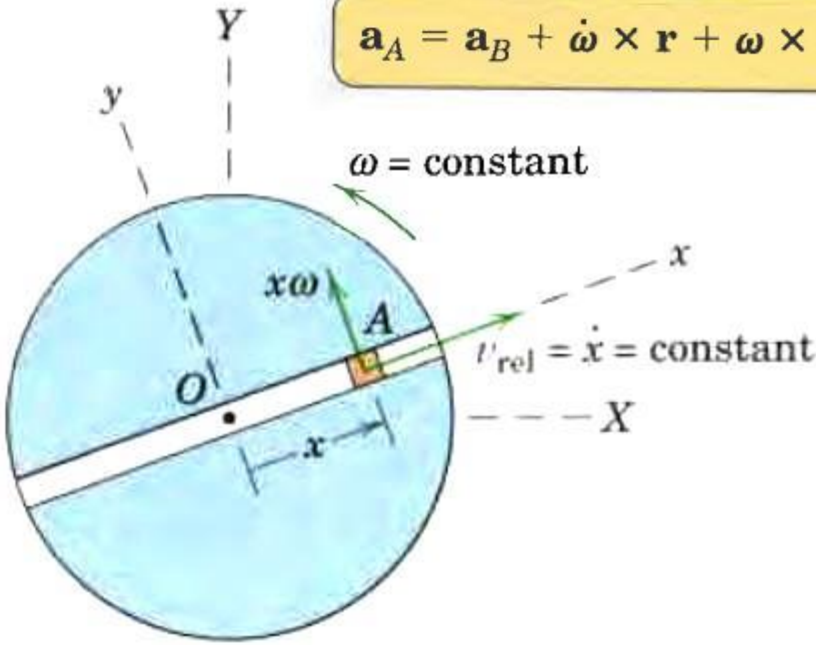


با تقسیم دو جمله بر dt و جمع کردن نتیجه می شود :

$$\dot{x}\frac{d\theta}{dt}+\omega\frac{dx}{dt}=\dot{x}\omega+\omega\dot{x}=2\omega\dot{x}$$

شتاب کریولیس

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}$$



با تقسیم تنها نمو باقیمانده در شکل $x\omega d\theta$ بر dt

شتاب نرمال نقطه P نسبت به نقطه O نتیجه می شود :

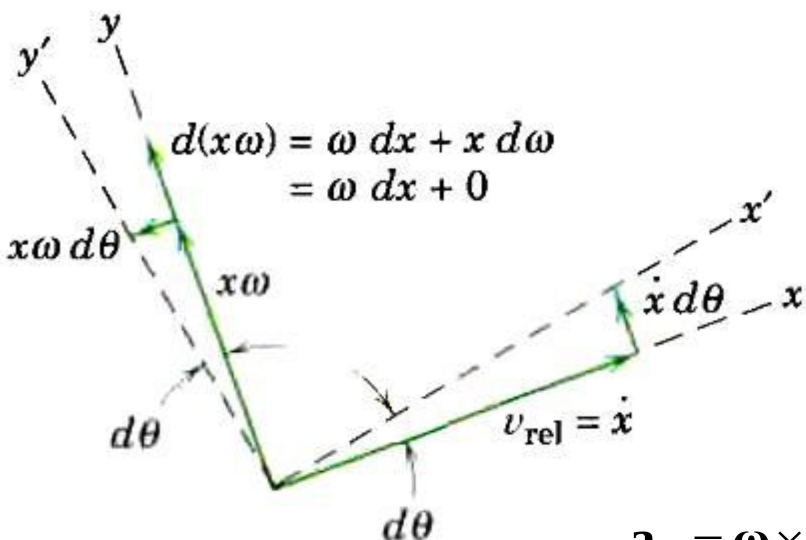
$$x\omega\frac{d\theta}{dt} = x\omega^2$$

بقیه جملات شتاب معادله بالای صفحه ، در این مثال صفر هستند :

مرکز O ثابت است : $\mathbf{a}_O = \mathbf{a}_B = 0$

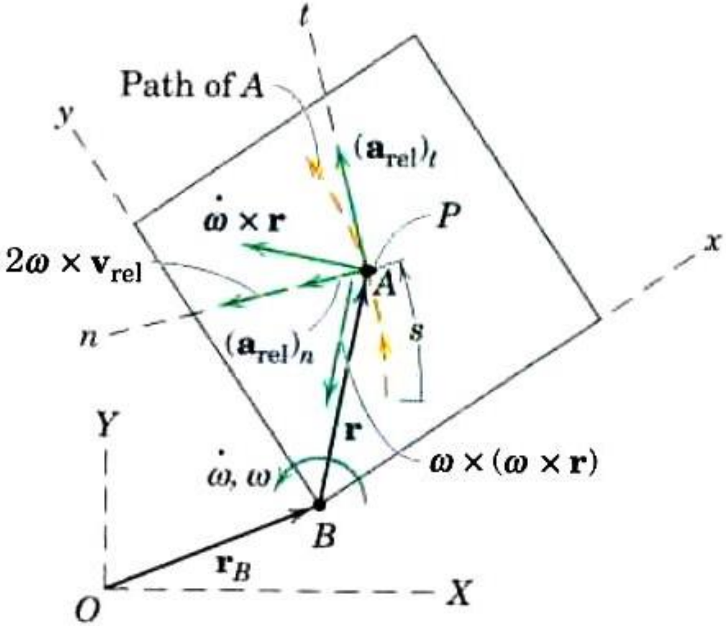
سرعت زاویه ای ثابت است : $\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} = 0$

اندازه $\mathbf{v}_{rel}$ است و شیار هم خمیدگی ندارد : $\mathbf{a}_{rel} = 0$



$$\mathbf{a}_A = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} = -x\omega^2\mathbf{i} + 2\omega\dot{x}\,\mathbf{j}$$

مقایسه دستگاه های چرخان و غیر چرخان



$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}}$$

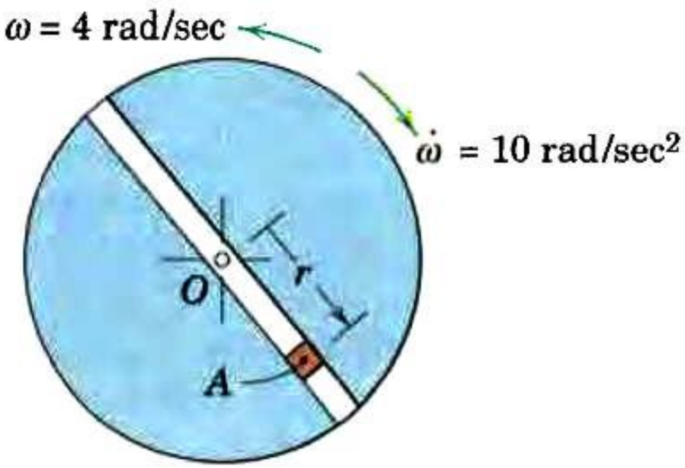
$$\mathbf{a}_A = \underbrace{\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{P/B}} + \mathbf{a}_{A/P}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_P \quad \underbrace{\quad + \mathbf{a}_{A/P}}$$

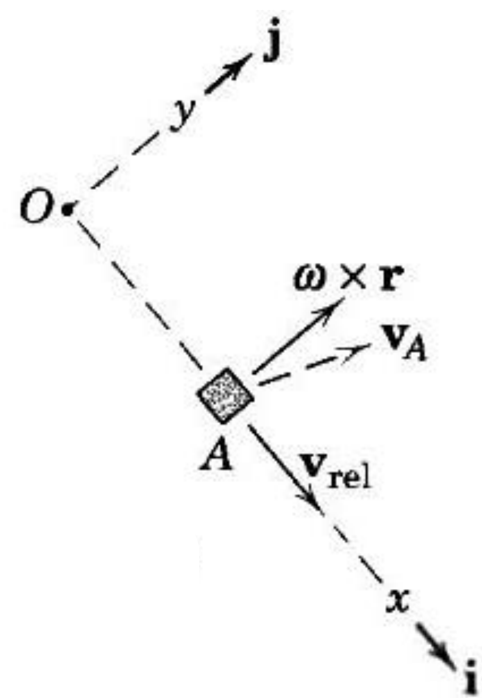
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$$

مسئله نمونه 5-16

در لحظه ای مطابق شکل ، دیسکی که شیار شعاعی دارد با سرعت زاویه ای پادساعتگرد 4 red/sec حول نقطه O می چرخد و سرعت آن با آهنگ $10\ \text{rad/sec}^2$ کاهش می یابد. حرکت لغزنده A بطور جداگانه کنترل می شود و در این لحظه $\ddot{r} = 81 in/\sec^2, \dot{r} = 5 in/\sec, r = 6 in$ است. مطلوب است تعیین سرعت مطلق و شتاب نقطه A در این وضعیت.



حل : دستگاه مختصات چرخان را به دیسک در نقطه O متصل می کنیم.



$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}$$

$$\mathbf{v}_A = 0 + 4\mathbf{k} \times 6\mathbf{i} + 5\mathbf{i} = 24\mathbf{j} + 5\mathbf{i}\ in/\sec$$

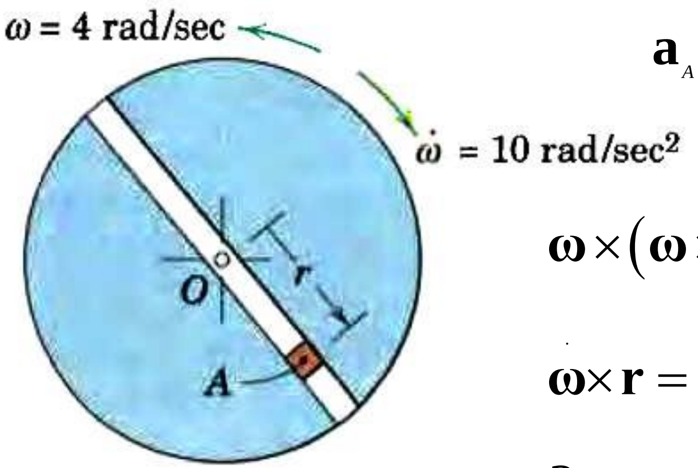
$$v_A = \sqrt{24^2 + 5^2} = 24.5\ in/\sec$$

مسئله نمونه 5-16

در لحظه ای مطابق شکل ، دیسکی که شیار شعاعی دارد با سرعت زاویه ای پادساعتگرد 4 red/sec حول نقطه O می چرخد و سرعت آن با آهنگ 10 rad/sec ² کاهش می یابد. حرکت لغزنده A بطور جداگانه کنترل می شود و در این لحظه

$\ddot{r} = 81 in/\sec^2,\ \dot{r} = 5 in/\sec,\ r = 6 in$

است. مطلوب است تعیین سرعت مطلق و شتاب نقطه A در این وضعیت.



$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}$$

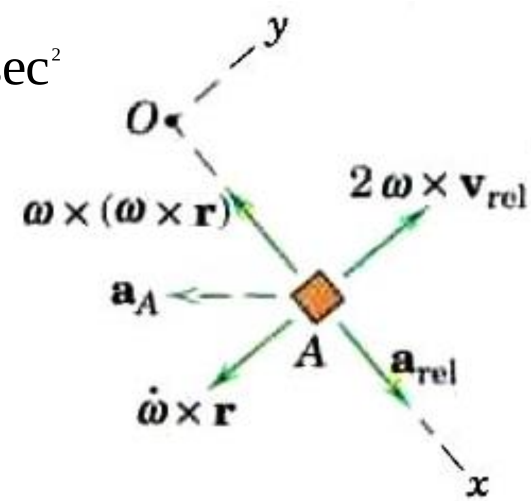
$$\mathbf{a}_O = 0$$

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = 4\mathbf{k}\times(4\mathbf{k}\times 6\mathbf{i}) = 4\mathbf{k}\times 24\mathbf{j} = -96\mathbf{i}\ in/\sec^2$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} = -10\mathbf{k}\times 6\mathbf{i} = -60\mathbf{j}\ in/\sec^2$$

$$2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} = 2(4\mathbf{k})\times 5\mathbf{i} = 40\mathbf{j}\ in/\sec^2$$

$$\mathbf{a}_{rel} = 81\mathbf{i}\ in/\sec^2$$



$$\mathbf{a}_A = (81-96)\mathbf{i} + (40-60)\mathbf{j} = -15\mathbf{i} - 20\mathbf{j}\ in/\sec^2$$

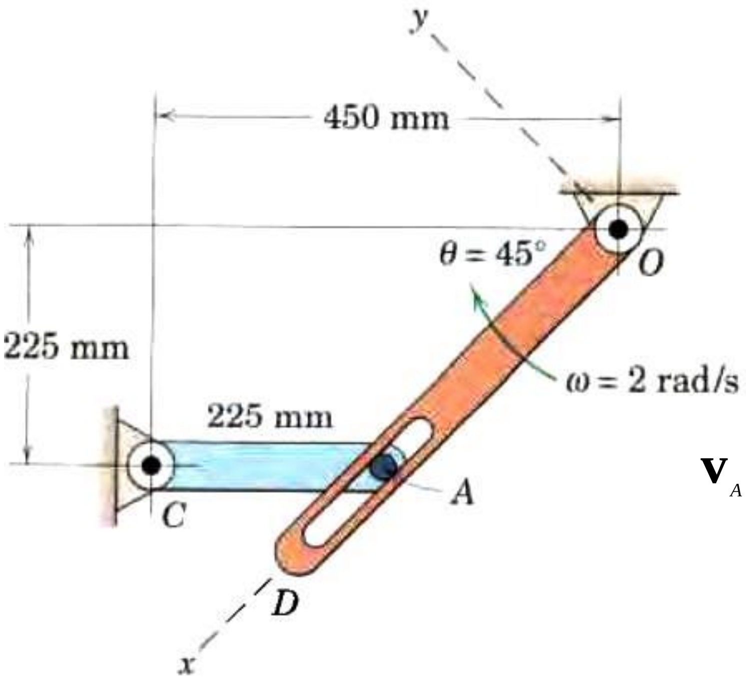
$$a_A = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25\ in/\sec^2$$

حرکت نسبت به محورهای چرخان : مسئله

فصل پنجم: سینماتیک صفحه ای اجسام صلب

مسئله نمونه 5-17

پین A میله لولایی AC به حرکت در شیار چرخان میله OD مقید است. سرعت زاویه ای OD برابر است با $\omega=2$ rad/s ساعتگرد و در فاصله ای از حرکت که با آن سروکار داریم ثابت است. در وضعیتی مطابق شکل که $\theta=45^{\circ}$ و AC افقی است ، سرعت پین A و سرعت A نسبت به شیار چرخان میله OD را تعیین کنید.



حل : دستگاه مختصات چرخان را به میله چرخان OD متصل می کنیم.

$$\mathbf{v}_A = \cancelto{0}{\mathbf{v}_O} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}$$

سرعت A در حرکت دایره ای خود حول نقطه C برابر است با :

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_{CA}\times\mathbf{r}_{CA} = \omega_{CA}\mathbf{k}\times\frac{225}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}-\mathbf{j}) = \frac{225}{\sqrt{2}}\underbrace{\omega_{CA}}_{\text{مجهول}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$$

بردار $\mathbf{r}$ که از مبدا به نقطه P روی بازوی OD ، منطبق بر A ، ترسیم می شود برابر است با :

$$\mathbf{v}_{rel} = \underbrace{\dot{x}}_{\text{مجهول}}\mathbf{i}$$

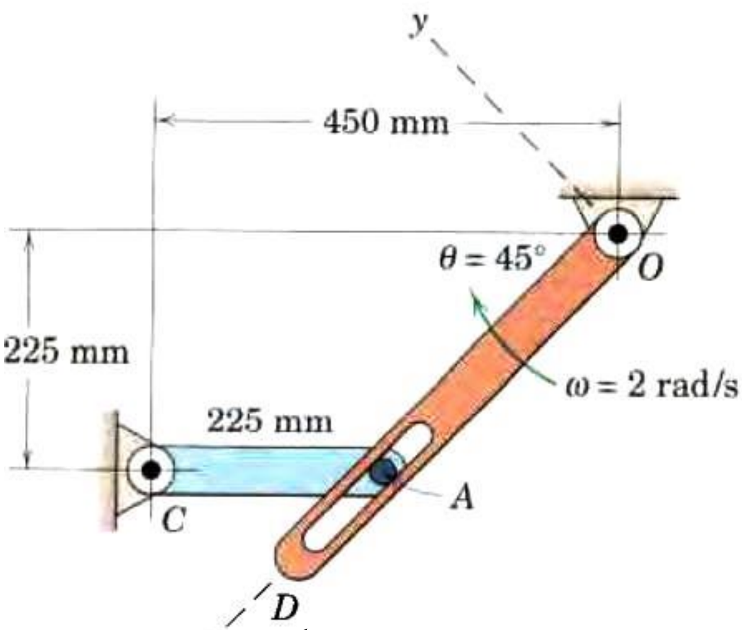
$$\mathbf{r} = \overline{OP}\,\mathbf{i} = \sqrt{225^2+225^2}\,\mathbf{i} = 225\sqrt{2}\,\mathbf{i}\ mm$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = 2\mathbf{k}\times225\sqrt{2}\,\mathbf{i} = 450\sqrt{2}\,\mathbf{j}\ mm/s$$

با قرار دادن روابط در معادله سرعت خواهیم داشت :

مسئله نمونه 5-17

پین A میله لولایی AC به حرکت در شیار چرخان میله OD مقید است. سرعت زاویه ای OD برابر است با ω=2 rad/s ساعتگرد و در فاصله ای از حرکت که با آن سروکار داریم ثابت است. در وضعیتی مطابق شکل که θ=45° و AC افقی است ، سرعت پین A و سرعت A نسبت به شیار چرخان میله OD را تعیین کنید.



$$\frac{225}{\sqrt{2}}\omega_{CA}(\mathbf{i}-\mathbf{j}) = 450\sqrt{2}\,\mathbf{j} + \dot{x}\,\mathbf{i}$$

با جدا کردن روابط مربوط به مولفه های i و j

$$\frac{225}{\sqrt{2}}\omega_{CA} = \dot{x}$$

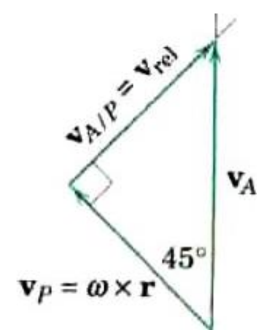
$$-\frac{225}{\sqrt{2}}\omega_{CA} = 450\sqrt{2}$$

$$\omega_{CA} = -4\,rad/s \qquad \dot{x} = v_{rel} = -450\sqrt{2}\,mm/s$$

مقدار ωCA منفی است ، بنابراین با توجه با دستگاه مختصات این سرعت زاویه ای پادساعتگرد است

$$\mathbf{v}_A = \frac{225}{\sqrt{2}}(-4)(\mathbf{i}-\mathbf{j}) = \frac{900}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

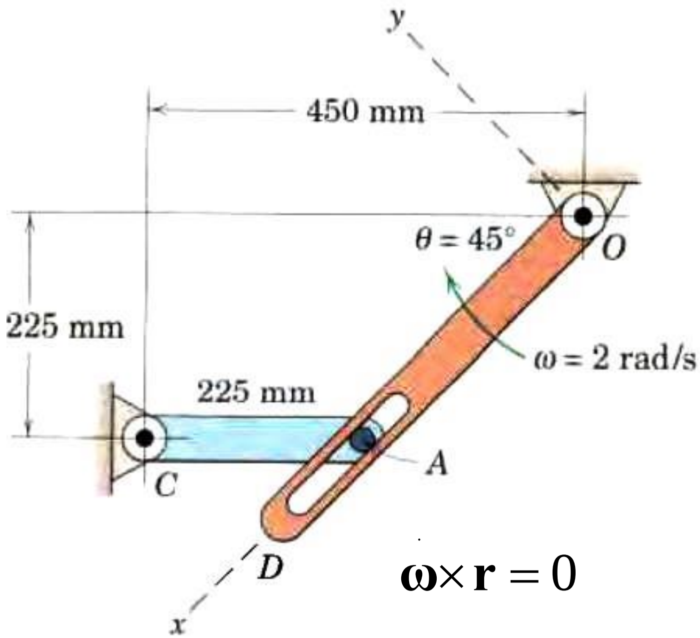
$$v_A = \frac{900}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 900\,mm/s$$



مسئله نمونه 5-18

در مسئله نمونه 5-17 ، مطلوب است تعیین شتاب زاویه ای AC و شتاب A نسبت به شیار چرخان بازوی OD.

حل : وقتی مبدا مختصات در نقطه ثابت باشد ، جمله $\mathbf{a}_B$ معادله شتاب صفر می شود.



$$\mathbf{a}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}$$

$$\mathbf{a}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{CA}\times\mathbf{r}_{CA} + \boldsymbol{\omega}_{CA}\times(\boldsymbol{\omega}_{CA}\times\mathbf{r}_{CA})$$

$$= \dot{\omega}_{CA}\,\mathbf{k}\times\frac{225}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}-\mathbf{j}) - 4\mathbf{k}\times\left(-4\mathbf{k}\times\frac{225}{\sqrt{2}}[-\mathbf{i}-\mathbf{j}]\right)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} = 0$$

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = 2\mathbf{k}\times\left(2\mathbf{k}\times225\sqrt{2}\,\mathbf{i}\right) = -900\sqrt{2}\,\mathbf{i}\ mm/s^2$$

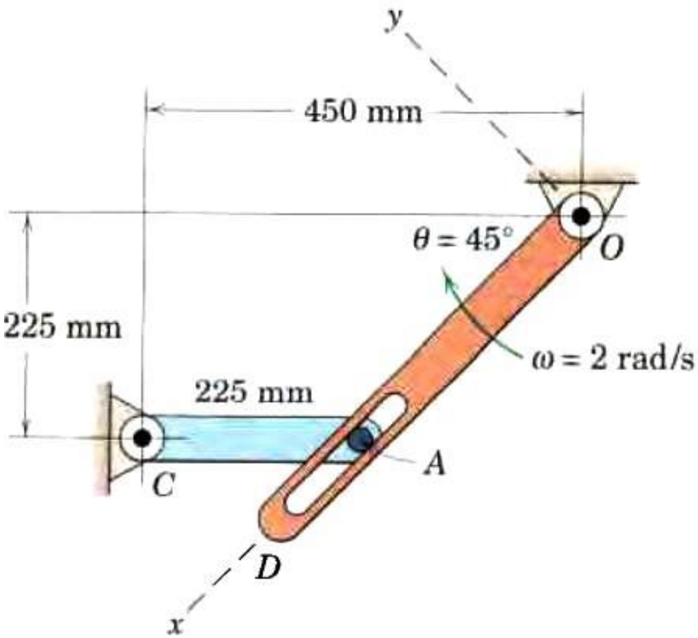
$$2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} = 2(2\mathbf{k})\times\left(-450\sqrt{2}\,\mathbf{i}\right) = -1800\sqrt{2}\,\mathbf{j}\ mm/s^2$$

$$\mathbf{a}_{rel} = \ddot{x}\,\mathbf{i}$$

با جایگزین کردن در معادله شتاب نسبی خواهیم داشت :

مسئله نمونه 5-18

در مسئله نمونه 5-17 ، مطلوب است تعیین شتاب زاویه ای AC و شتاب A نسبت به شیار چرخان بازوی OD.



$$\frac{1}{\sqrt{2}}(225\dot{\omega}_{CA}+3600)\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}(-225\dot{\omega}_{CA}+3600)\mathbf{j}=$$
$$-900\sqrt{2}\mathbf{i}-1800\sqrt{2}\mathbf{j}+\ddot{x}\mathbf{i}$$

جملات i و j را مستقلا برابر می گیریم :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(225\dot{\omega}_{CA}+3600)=-900\sqrt{2}+\ddot{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-225\dot{\omega}_{CA}+3600)\mathbf{j}=-1800\sqrt{2}$$

$$\dot{\omega}_{CA}=\alpha_{CA}=32\ rad/s^2$$

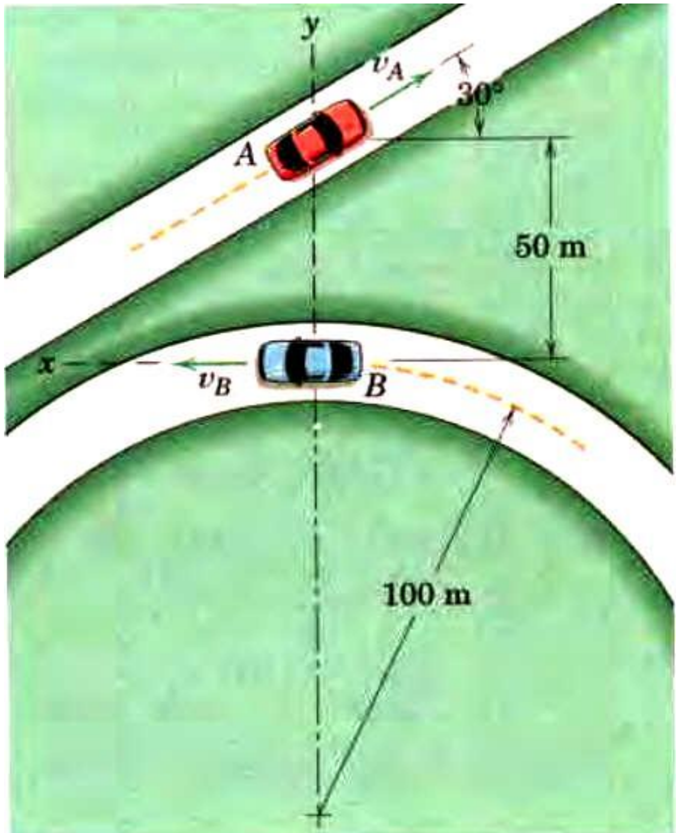
$$\ddot{x}=a_{rel}=8910\ mm/s$$

در صورت نیاز ، شتاب مطلق نقطه A نیز برابر است با :

$$\mathbf{a}_A=7640\mathbf{i}-2550\mathbf{j}\ mm/s^2$$

مسئله 5-180

هر یک از دو اتومبیل A و B با سرعت ثابت 72 km/h حرکت می کند. مطلوب است تعیین سرعت و شتاب اتومبیل A از دید سرنشین اتومبیل B وقتی اتومبیل ها در وضعیتی مطابق شکل اند. محورهای x-y به اتومبیل B متصل اند.



حل :

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}$$

$$72 \times \frac{1000}{3600} = 20\, m/s$$

$$\mathbf{v}_A = 20(-\cos 30^\circ\, \mathbf{i} + \sin 30^\circ\, \mathbf{j})$$

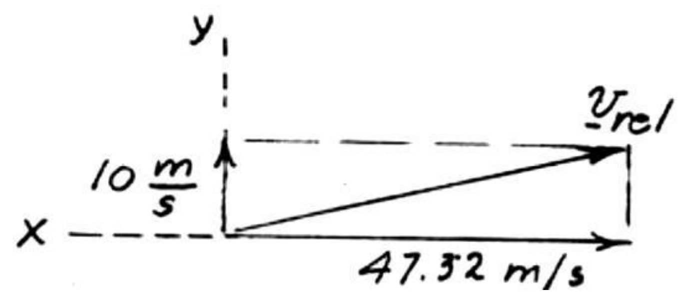
$$\mathbf{v}_B = 20\mathbf{i}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{20}{100}(-\mathbf{k}) = -0.2\mathbf{k}\ \ rad/s$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -0.2\mathbf{k} \times 50\mathbf{j} = 10\mathbf{i}$$

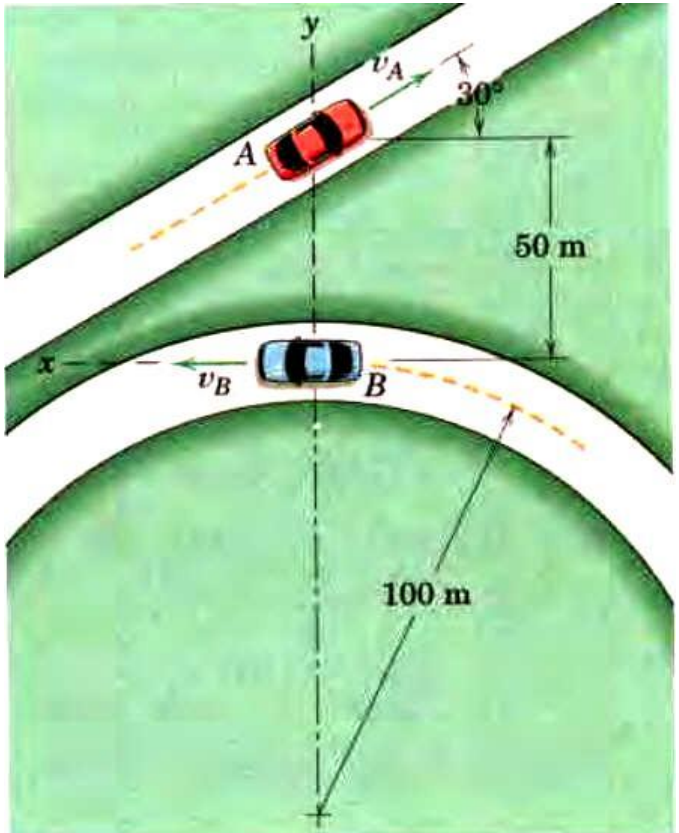
$$\mathbf{v}_{rel} = 20(-\cos 30^\circ\, \mathbf{i} + \sin 30^\circ\, \mathbf{j}) - 20\mathbf{i} - 10\mathbf{i}$$

$$\mathbf{v}_{rel} = -47.3\mathbf{i} + 10\mathbf{j}\ m/s$$



مسئله 5-180

هر یک از دو اتومبیل A و B با سرعت ثابت 72 km/h حرکت می کند. مطلوب است تعیین سرعت و شتاب اتومبیل A از دید سرنشین اتومبیل B وقتی اتومبیل ها در وضعیتی مطابق شکل اند. محورهای x-y به اتومبیل B متصل اند.



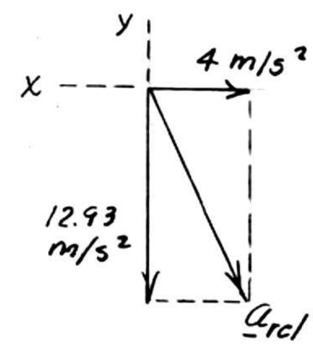
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}$$

$$\mathbf{a}_A = 0 \qquad \mathbf{a}_B = \frac{20^2}{100}(-\mathbf{j})$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0 \ \rightarrow \ \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} = 0$$

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = -0.2\mathbf{k}\times 10\mathbf{i} = -2\mathbf{j}$$

$$2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} = 2(-0.2\mathbf{k})\times(-47.3\mathbf{i}+10\mathbf{j})$$

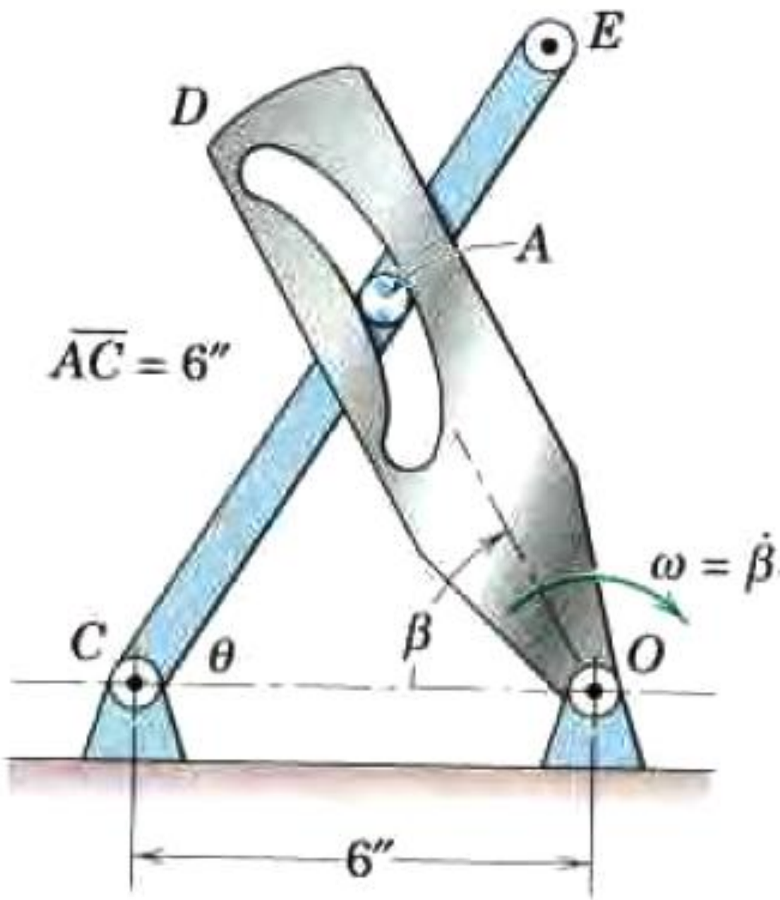


$$\mathbf{a}_{rel} = 4\mathbf{j} + 2\mathbf{j} - 2(-0.2\mathbf{k})\times(-47.3\mathbf{i}+10\mathbf{j})$$

$$\mathbf{a}_{rel} = -4\mathbf{i} + 12.93\mathbf{j}\ m/s^2$$

مسئله 5-185

شتاب زاویه ای عضو CE را در موقعیت نشان داده شده بیابید. شعاع انحنای شیار عضو OD برابر 6 in است و AO به موازات خطی ات که در نقطه تماس بر شیار مماس است.



$$\theta = \beta = 60^\circ$$

$$\dot{\beta} = 2\ rad\ /\sec$$

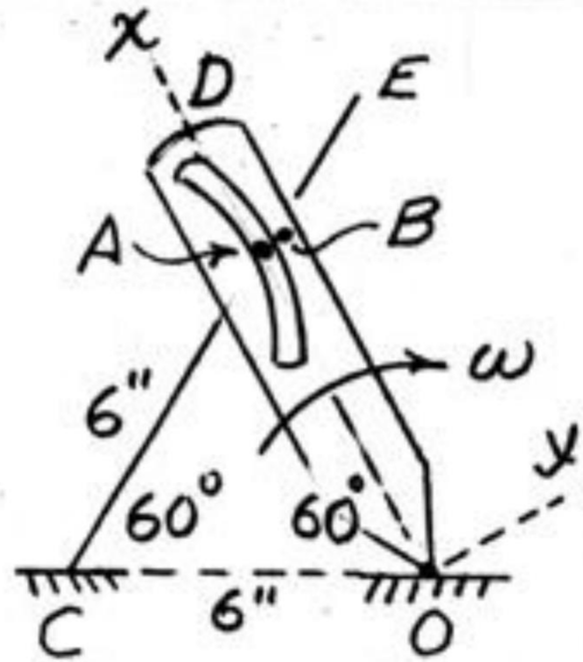
$$\ddot{\beta} = 6\ rad\ /\sec^2$$

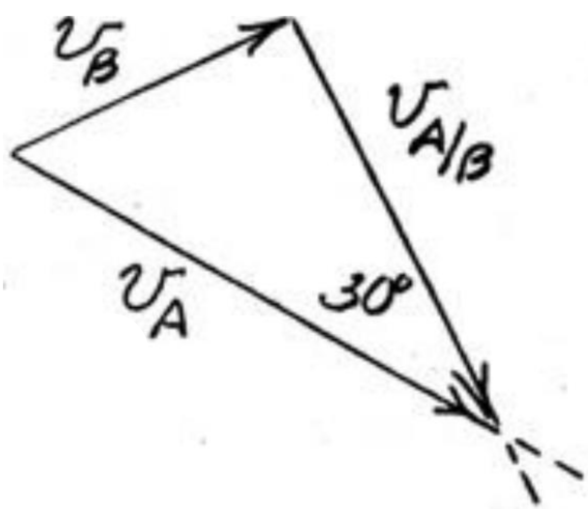
$$\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{v}_{A/B}$$

$$v_B = \frac{6}{12} 2 = 1 \text{ ft/sec}$$

$$v_{A/B} = v_{rel} = v_B / \tan 30°$$

$$v_A = 2 \text{ ft/sec}, \quad v_{rel} = \sqrt{3} \text{ ft/sec}$$





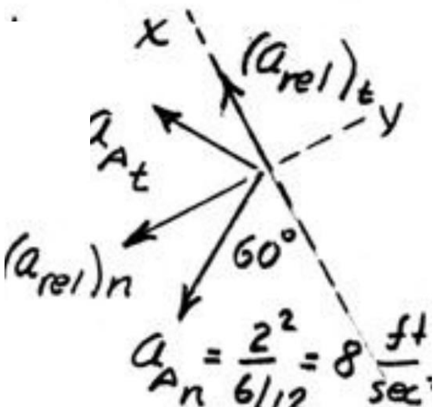
$$\underline{a}_A = \underline{a}_o + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + 2\underline{\omega} \times \underline{v}_{rel} + \underline{a}_{rel}$$

$$\underline{a}_o = 0, \quad \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} = 6\underline{k} \times \frac{6}{12}\underline{i} = 3\underline{j} \ ft/sec^2$$

$$\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = 2\underline{k} \times \left(2\underline{k} \times \frac{6}{12}\underline{i}\right) = -2\underline{i} \ ft/sec^2$$

$$2\underline{\omega} \times \underline{v}_{rel} = 4\underline{k} \times (-\sqrt{3}\,\underline{i}) = -4\sqrt{3}\,\underline{j} \ ft/sec^2$$

$$(\underline{a}_{rel})_n = \frac{v_{rel}^2}{\rho}(-\underline{j}) = -\frac{3}{6/12}\underline{j} = -6\underline{j} \ ft/sec^2$$



$$\underline{a}_{A_n} = -8\cos 60^\circ \underline{i} - 8 \sin 60^\circ \underline{j} \ \ ft/sec^2$$

$$\underline{a}_{A_t} = a_{A_t}\cos 30^\circ \underline{i} - a_{A_t}\sin 30^\circ \underline{j}$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_o + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + 2\underline{\omega} \times \underline{v}_{rel} + \underline{a}_{rel}$$

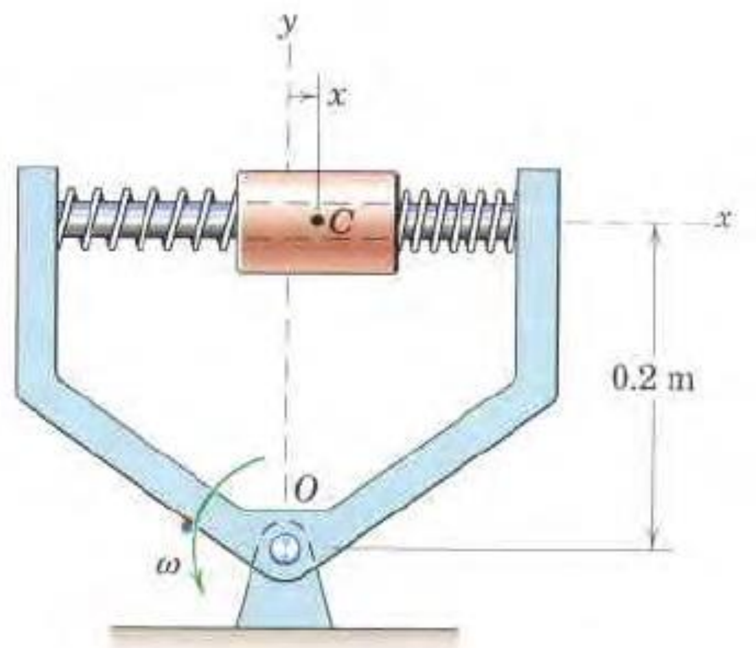
$$a_{A_t}\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{i} - a_{A_t}\frac{1}{2}\underline{j} - 4\underline{i} - 8\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{j} = 3\underline{j} - 2\underline{i} - 4\sqrt{3}\underline{j} - 6\underline{j} + (a_{rel})_t\underline{i}$$

$$\boxed{(a_{rel})_t = 3.20 \ ft/sec^2}$$

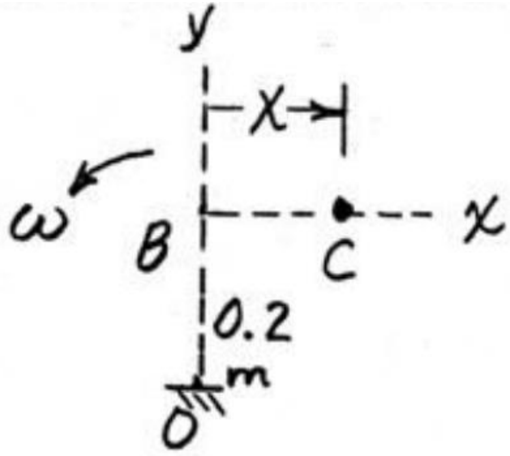
$$\boxed{(a_A)_t = 6 \ ft/sec^2}$$

$$\boxed{\alpha_{EC} = 6/6/12 = \underline{12 \ rad/sec^2 \ CCW}}$$

5/177 The spring-mounted collar oscillates on the shaft according to $x = 0.04 \sin \pi t$, where x is in meters and t is in seconds. Simultaneously the frame rotates about the bearing at O with an angular velocity $\omega = 2 \sin (\pi t/2)$ rad/s. Determine the acceleration of the center C of the collar (a) when $t = 3$ s and (b) when $t = 1/2$ s.



	(a) $t = 3$ s	(b) $t = 0.5$ s
$x = 0.04 \sin \pi t$ =	0	0.04
$\dot{x} = 0.04\pi \cos \pi t$ =	-0.04π	0
$\ddot{x} = -0.04\pi^2 \sin \pi t$ =	0	$-0.04\pi^2$
$\omega = 2 \sin \frac{\pi}{2} t$ =	-2	$\sqrt{2}$
$\dot{\omega} = \pi \cos \frac{\pi}{2} t$ =	0	$\pi/\sqrt{2}$



$$\underline{a}_C = \underline{a}_B + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) + 2\underline{\omega} \times \underline{v}_{rel} + \underline{a}_{rel}$$

(a) $\underline{a}_B = 0.2(-2)^2(-\underline{j}) + 0\underline{i} = -0.8\underline{j}\ m/s^2$

$\dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} = \underline{0}, \quad \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = -2\underline{k} \times (-2\underline{k} \times \underline{0}) = \underline{0}$

$2\underline{\omega} \times \underline{v}_{rel} = 2(-2\underline{k}) \times (-0.04\pi \underline{i}) = 0.503\underline{j}\ m/s^2, \quad \underline{a}_{rel} = \underline{0}$

Substitute & get $\underline{a}_c = -0.297\underline{j}\ m/s^2$

(b) $\underline{a}_B = -0.2\sqrt{2}^2\underline{j} - 0.2\frac{\pi}{2}\underline{i} = -0.444\underline{i} - 0.4\underline{j}\ m/s^2$

$\dot{\underline{\omega}} \times \underline{r} = \pi/\sqrt{2}\ \underline{k} \times 0.04\underline{i} = 0.0889\underline{j}\ m/s^2$

$\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = \sqrt{2}\underline{k} \times (\sqrt{2}\underline{k} \times 0.04\underline{i}) = -0.08\underline{i}\ m/s^2$

$2\underline{\omega} \times \underline{v}_{rel} = 2\sqrt{2}\underline{k} \times \underline{0} = \underline{0}, \quad \underline{a}_{rel} = -0.04\pi^2\underline{i} = -0.395\underline{i}\ \frac{m}{s^2}$

Substitute & get $\underline{a}_c = -0.919\underline{i} - 0.311\underline{j}\ m/s^2$