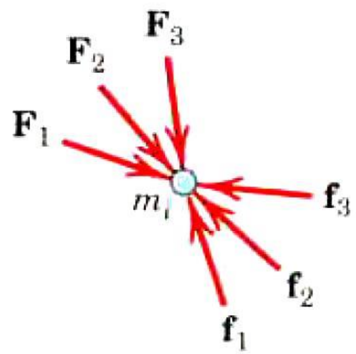
فصل چهارم

سینتیک سیستم های ذرات

فهرست مطالب فصل چهارم

- ✓ **تعمیم قانون دوم نیوتون**
- ✓ **کار-انرژی**
- ✓ **ضربه-اندازه حرکت**
- ✓ **پایستگی انرژی و اندازه حرکت**
- ✓ **جریان جرمی پایا**
- ✓ **جرم متغیر**

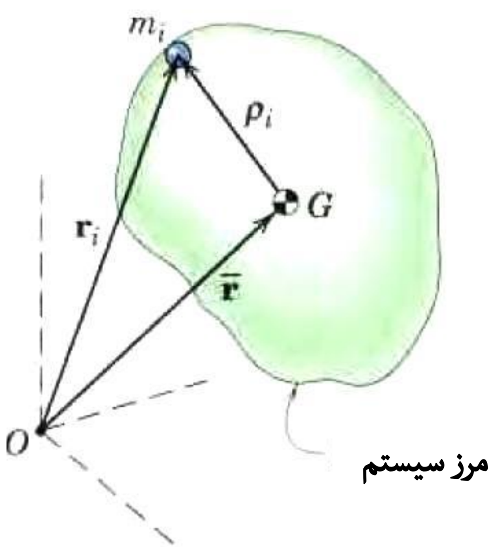
تعمیم قانون دوم نیوتون



یک سیستم توسط مرزش از جهان خارج جدا شده است.

نیروهای خارجی(Fi) از تماس با اجسام خارجی یا از نیروهای گرانشی ، الکتریکی یا مغناطیسی خارج از سیستم ناشی می شود.

نیروهای داخلی (fi) نیروهای واکنش با سایر جرم های ذره ای درون مرز سیستم اند



بردار مکان ذره

$\mathbf{r}_i$ بردار مکان مرکز جرم

$\bar{\mathbf{r}}$

$$m = \sum m_i$$

براساس تعریف مرکز جرم در استاتیک :

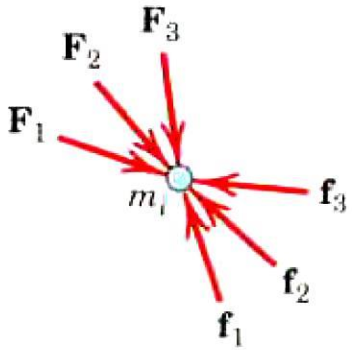
$$m\bar{\mathbf{r}} = \sum m_i \mathbf{r}_i$$

با بکارگیری قانون دوم نیوتون برای جرم m_i

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \cdots = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

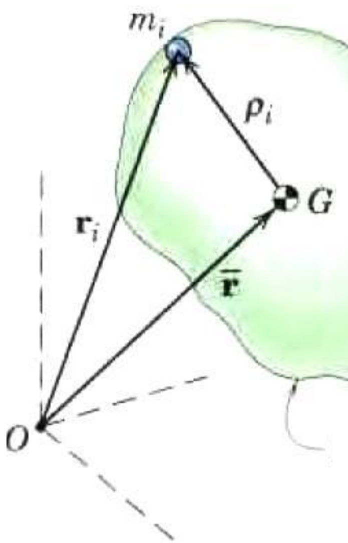
برای هر یک از ذرات سیستم می توان معادله مشابهی نوشت. با جمع بستن معادلات مربوط به همه ذرات خواهیم داشت :

$$\sum \mathbf{F} + \sum \mathbf{f} = \sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$



$$\sum \mathbf{F} + \sum \mathbf{f} = \sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

$\sum \mathbf{f} = 0 \leftarrow$ همه نیروهای داخلی بصورت زوج های مساوی و مخالف (کنش و واکنش) هستند که جمع همگی آن ها صفر است.



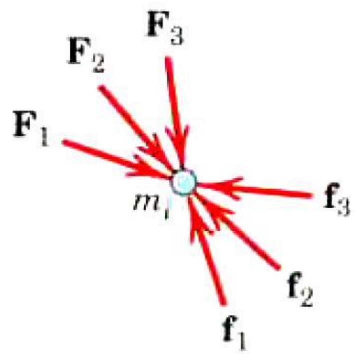
$$\left.\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= \sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \\ m_i \ddot{\bar{\mathbf{r}}} &= \sum m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\Sigma \mathbf{F} = m\ddot{\bar{\mathbf{r}}} \quad \text{or} \quad \Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}}$$

$\bar{\mathbf{a}}$ شتاب مرکز جرم است

اصل حرکت مرکز جرم : برایند نیروهای خارجی وارد بر هر سیستم از جرم ها ، برابر است با جرم کل سیستم ضرب در شتاب مرکز جرم سیستم

$$\begin{cases} \sum F_x = m\,\bar{a}_x \\ \sum F_y = m\,\bar{a}_y \\ \sum F_z = m\,\bar{a}_z \end{cases}$$

کار-انرژی



برای ذره ای به جرم m_i $\leftarrow$ $(U_{1-2})_i = \Delta T_i$

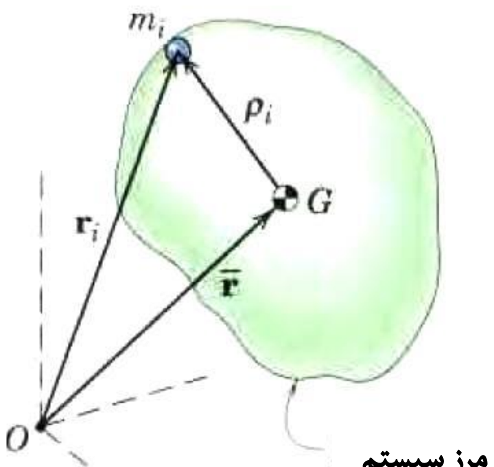
$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

برای کل سیستم :

$U_{1-2} = \sum (U_{1-2})_i$ کار انجام شده توسط همه نیروهای خارجی و داخلی روی همه ذرات سیستم

$T = \sum T_i$ انرژی جنبشی کل سیستم

$$\boxed{U_{1\text{-}2} = \Delta T \qquad \text{or} \qquad T_1 + U_{1\text{-}2} = T_2}$$



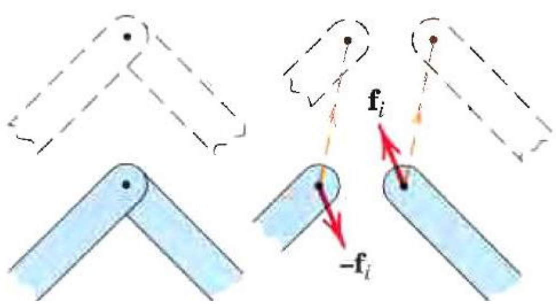
در سیستمی از اجسام صلب که توسط اتصال دهنده های ایده آل به هم متصل شده اند ، نیروهای برهم کنش کننده داخلی

یا لنگرهای آن ها در اتصال ها ، کار خالص انجام نمی دهند.

زیرا نقاط اثر آن ها مولفه های جابجایی یکسان دارند و نیروهای آن ها مساوی اما

در جهت مخالف اند. در این وضعیت U1-2 کاری است که فقط نیروهای خارجی

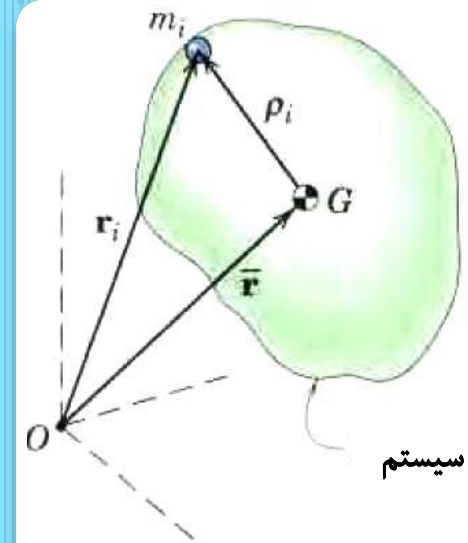
روی سیستم انجام می دهند.



$$\boxed{U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V}$$

$$\boxed{T_1 + V_1 + U'_{1\text{-}2} = T_2 + V_2}$$

عبارت انرژی جنبشی



سرعت ذره را می توان بدین صورت نوشت :

$$\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

که در آن $\bar{\mathbf{v}}$ سرعت مرکز جرم G و $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ سرعت m_i نسبت به چارچوب مرجع انتقالی است که با مرکز جرم G حرکت می کند.

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i . \mathbf{v}_i = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \right) . \left(\bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \right)$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \left| \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \right|^2 + \sum m_i \bar{\mathbf{v}} . \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

چون $\boldsymbol{\rho}_i$ از مرکز جرم اندازه گیری می شود :

$$\sum m_i \rho_i = 0$$

بنابراین جمله سوم برابر است با :

$$\bar{\mathbf{v}} . \sum m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \bar{\mathbf{v}} . \frac{d}{dt} \sum (m_i \boldsymbol{\rho}_i) = 0$$

بعلاوه :

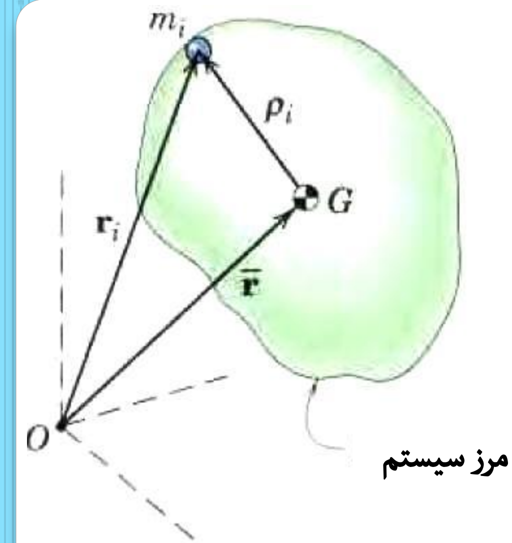
$$\sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \bar{v}^2 \sum m_i = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \Sigma \frac{1}{2} m_i |\dot{\rho}_i|^2}$$

انرژی جنبشی کل سیستمی از جرم ها برابر است با انرژی جنبشی انتقال مرکز جرم سیستم ، بعلاوه انرژی جنبشی ناشی از حرکت همه ذرات نسبت به مرکز جرم

ضربه- اندازه حرکت

برای ذره ای به جرم $m_i \rightarrow G_i = m_i v_i$



اندازه حرکت خطی سیستم بصورت جمع برداری اندازه حرکت های خطی همه ذرات سیستم است :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{G} &= \sum m_i \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_i &= \bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{G} = \sum m_i \left(\bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right) = \sum m_i \bar{\mathbf{v}} + \frac{d}{dt}\sum m_i \boldsymbol{\rho}_i = \bar{\mathbf{v}} \sum m_i + \frac{d}{dt}(0)$$

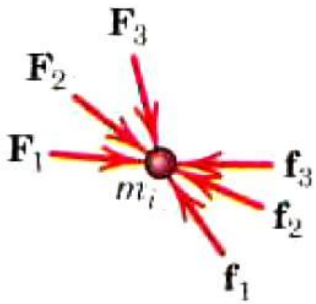
$$\boxed{\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}}$$

بنابراین اندازه حرکت خطی هر سیستم با جرم ثابت برابر است با حاصل ضرب جرم و سرعت مرکز جرم آن سیستم

مشتق زمانی G برابر است با $m\dot{\bar{\mathbf{v}}} = m\bar{\mathbf{a}} \rightarrow \boxed{\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}}$

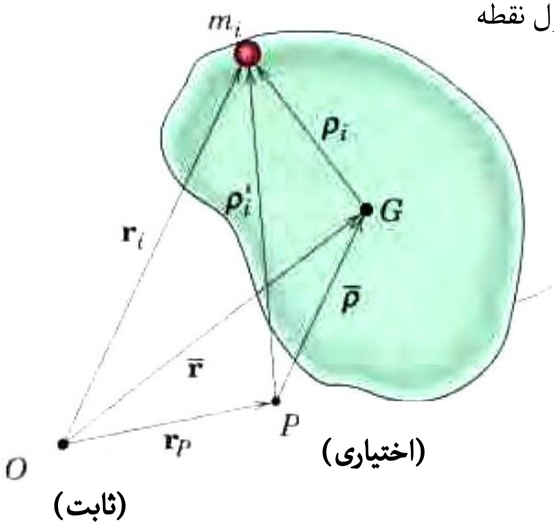
برایند نیروهای خارجی وارد بر هر سیستم از جرم ها ، با آهنگ زمانی تغییر اندازه حرکت سیستم برابر است

اندازه حرکت زاویه ای



حول نقطه ثابت O : برای ذره ای به جرم m_i $\leftarrow$ $(\mathbf{H}_O)_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$

اندازه حرکت زاویه ای سیستم جرمی حول نقطه O بصورت جمع برداری اندازه حرکت های زاویه ای همه ذرات سیستم حول نقطه O است :



مرز سیستم

$$\mathbf{H}_O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \sum \cancelto{0}{\dot{\mathbf{r}}_i} \times m_i \mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i$$

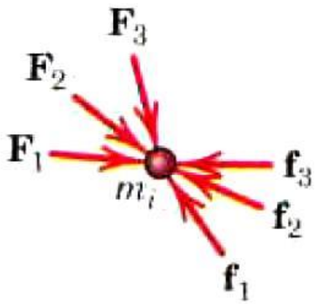
$$\Rightarrow \quad \dot{\mathbf{H}}_O = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O}$$

لنگر بردار برایند همه نیروهای خارجی وارد بر هر سیستم جرمی ، حول هر نقطه ثابت ، با آهنگ زمانی تغییر اندازه حرکت زاویه ای سیستم حول آن نقطه ثابت برابر است.

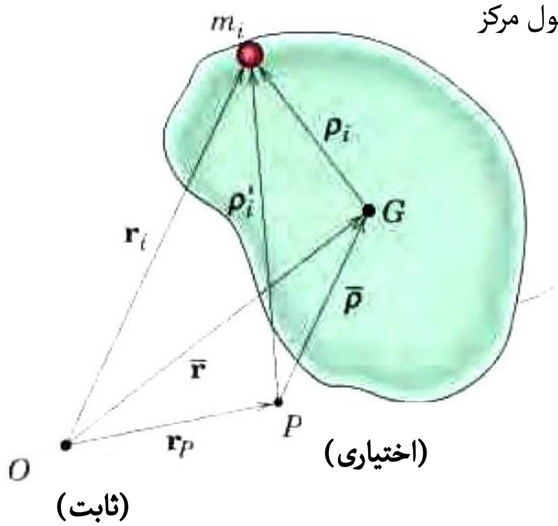
اندازه حرکت زاویه ای



حول مرکز جرم G : برای ذره ای به جرم m_i

$$(\mathbf{H}_G)_i = \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

اندازه حرکت زاویه ای سیستم جرمی حول مرکز جرم G برابر جمع برداری اندازه حرکت های زاویه ای همه ذرات سیستم حول مرکز جرم G است :



مرز سیستم

$$\mathbf{H}_G = \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i (\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i)$$

$$= \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}} + \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

$$-\dot{\bar{\mathbf{r}}} \times \sum m_i \boldsymbol{\rho}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{H}_G = \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \sum \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i \left(\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right) + \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

$$\sum \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}} + \cancelto{0}{\sum \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i}$$

$$-\dot{\bar{\mathbf{r}}} \times \frac{d}{dt} \sum m_i \boldsymbol{\rho}_i = 0$$

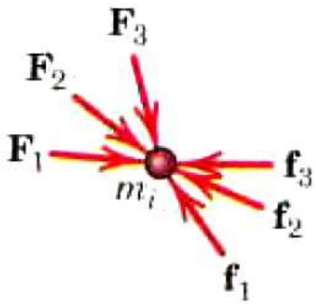
$$\sum \boldsymbol{\rho}_i \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) = \sum \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{M}_G$$

مجموع همه لنگرهای داخلی صفر است :

$$\sum \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{f}_i = 0$$

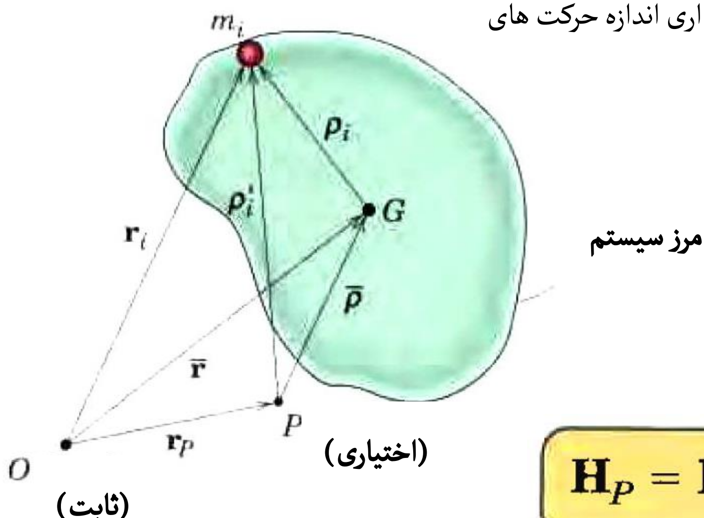
$$\Rightarrow \quad \boxed{\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G}$$

اندازه حرکت زاویه ای



حول نقطه اختیاری P : برای ذره ای به جرم m_i $\leftarrow$ $(\mathbf{H}_P)_i = \boldsymbol{\rho}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$

اندازه حرکت زاویه ای سیستم جرمی حول نقطه اختیاری P (که می تواند شتاب داشته باشد) برابر جمع برداری اندازه حرکت های زاویه ای همه ذرات سیستم حول نقطه اختیاری P است :



$$\mathbf{H}_P = \sum \boldsymbol{\rho}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum (\bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}_i) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

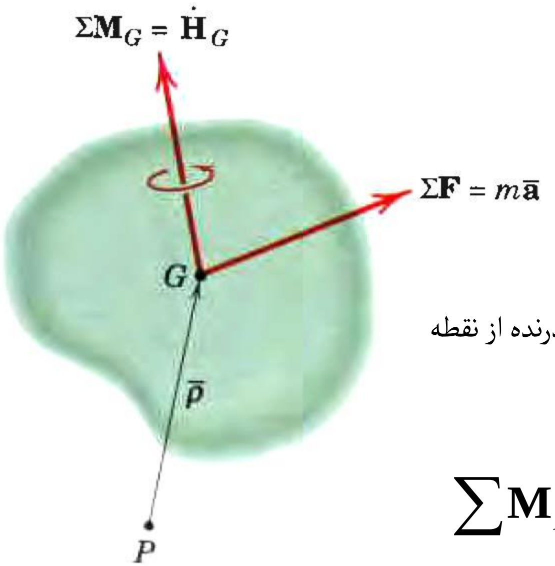
$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\rho}} \times \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \bar{\boldsymbol{\rho}} \times \sum m_i \mathbf{v}_i = \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m \bar{\mathbf{v}} \\ \sum \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{H}_G \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{H}_P = \mathbf{H}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{v}}}$$

اندازه حرکت زاویه ای مطلق حول هر نقطه اختیاری مانند P برابر است با اندازه حرکت زاویه ای حول G به علاوه لنگر اندازه حرکت خطی $m\bar{\mathbf{v}}$ سیستم متمرکز فرض شده در G ، حول نقطه P

اندازه حرکت زاویه ای



حول نقطه اختیاری P :

شکل مقابل برایند همه نیروها و گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم را نشان می دهد که بر حسب نیروی برایند گذرنده از نقطه G و کوپل متناظر $\sum \mathbf{F}$ بیان شده است. $\sum \mathbf{M}_G$

بنابراین گشتاور حول نقطه P برابر است با :

$$\sum \mathbf{M}_P = \sum \mathbf{M}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times \sum \mathbf{F}$$

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{a}}}$$

وقتی شتاب نقطه P مشخص باشد ، می توان از معادله زیر نیز استفاده نمود :

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_P = (\dot{\mathbf{H}}_P)_{\text{rel}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\mathbf{a}_P}$$

پایستگی انرژی و اندازه حرکت

برای کل سیستم :

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{G} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$$

اصل پایستگی اندازه حرکت خطی

$$\sum \mathbf{M}_O = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{H}_O = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

اصل پایستگی اندازه حرکت زاویه ای

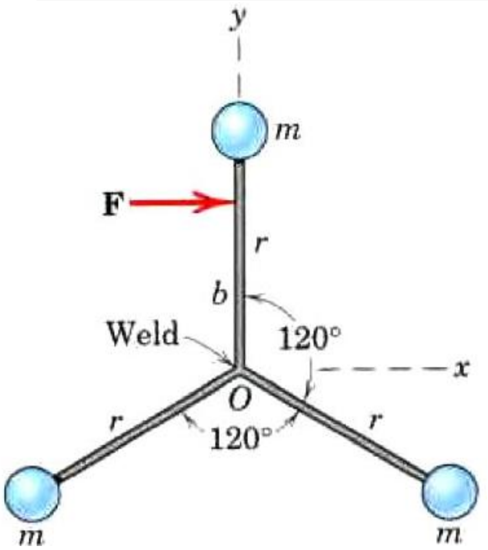
$$\sum \mathbf{M}_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{H}_G = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{H}_G)_1 = (\mathbf{H}_G)_2$$

$$\mathbf{U}'_{1-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta T + \Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

قانون پایستگی انرژی دینامیکی

مسئله نمونه 4-1

جرم هر یک از این سه گوی m است و به قاب مثلثی با جرم قابل چشم پوشی جوش داده شده اند. این مجموعه روی سطح افقی صاف قرار دارد. نیروی **F** به طور ناگهانی به یکی از میله ها ، مطابق شکل ، وارد می شود. مطلوب است تعیین الف) شتاب نقطه O و ب) شتاب زاویه ای قاب.



حل: الف)

$$\sum \mathbf{F} = m\,\bar{\mathbf{a}}$$

$$F\,\mathbf{i} = 3m\,\bar{\mathbf{a}} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_O = \frac{F}{3m}\mathbf{i}$$

ب)

$$\sum \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$$

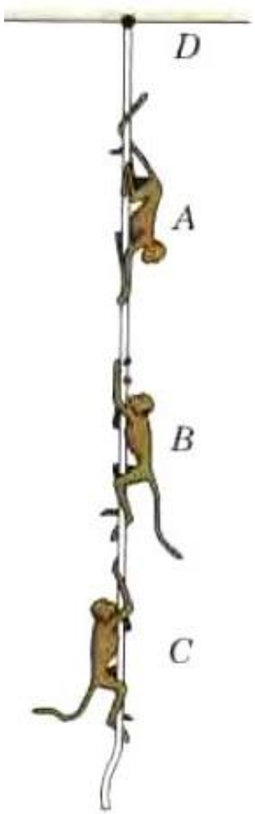
$$H_G = 3m(v)r = 3m(r\,\dot{\theta})r = 3mr^2\,\dot{\theta}$$

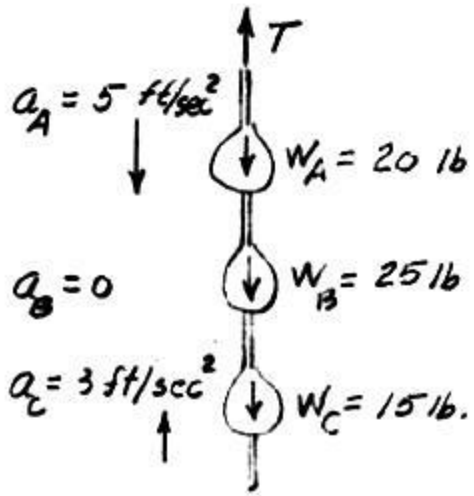
$$\sum \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad \Rightarrow \quad F\,b = \frac{d}{dt}\left(3m\,r^2\,\dot{\theta}\right) = 3m\,r^2\,\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{F\,b}{3m\,r^2}$$

مسئله 4-4

سه میمون A ، B و C به ترتیب به وزن 20 ، 25 و 15 lb از طناب آویزان شده اند. در لحظه ای مطابق شکل ، A با شتاب $5\ ft/sec^2$ از طناب پایین می آید و C با شتاب $3\ ft/sec^2$ خود را از طناب بالا می کشد. میمون B با سرعت ثابت 2 ft/sec از طناب بالا می رود. طناب و میمون ها را یک سیستم در نظر بگیرید و کشش T طناب را در نقطه D تعیین کنید.

حل:





$$\sum \mathbf{F} = \sum m_i\ \mathbf{a}_i$$

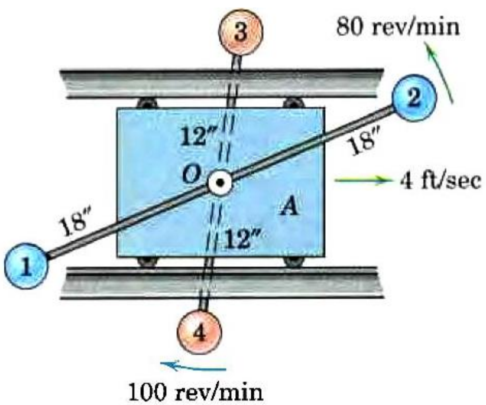
$$T - (20 + 25 + 15) = \frac{1}{32.2}\left(20(-5) + 15(3)\right)$$

$$T - 60 = -\frac{55}{32.2}$$

$$T = 60 - 1.708 = 58.3\ \ lb$$

مسئله نمونه 4-4

گاری A به وزن 32.2 lb در امتداد افقی و با سرعت 4 ft/sec در راهنمای افقی حرکت می کند و حامل دو مجموعه از گلوله ها و میله های سبک است که حول محوری در نقطه O روی گاری می چرخند. وزن هر یک از چهار گلوله 3.22 lb است. مجموعه ای که روی وجه جلو گاری قرار دارد با سرعت 80 rpm پادساعتگرد می چرخد و مجموعه ای که در پشت گاری واقع شده با سرعت 100 rpm ساعتگرد می چرخد. برای کل سیستم ، مطلوب است محاسبه الف) انرژی جنبشی T ، ب) اندازه G اندازه حرکت خطی ج) اندازه HO اندازه حرکت زاویه ای حول نقطه O.



حل: الف)

$$T=\frac{1}{2}m\bar{v}^2+\sum\frac{1}{2}m_i\left|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right|^2$$

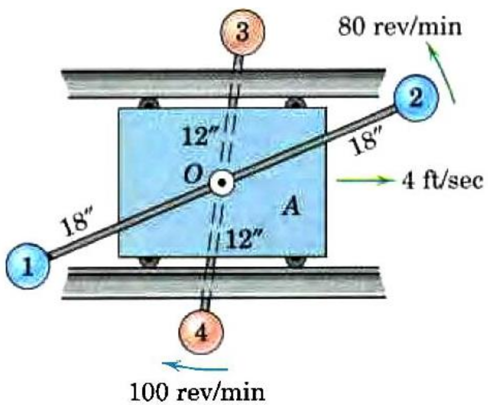
$$\left|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right|=v_{rel}=r\dot{\theta}\ \Longrightarrow\ \begin{aligned}(v_{rel})_{1,2}&=\frac{18}{12}\times\left(80\times\frac{2\pi}{60}\right)=12.57\ \ ft/\sec\\(v_{rel})_{3,4}&=\frac{12}{12}\times\left(100\times\frac{2\pi}{60}\right)=10.47\ \ ft/\sec\end{aligned}$$

$$\sum\frac{1}{2}m_i\left|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right|^2=2\left[\frac{1}{2}\times\frac{3.22}{32.2}\times 12.57^2\right]_{(1,2)}+2\left[\frac{1}{2}\times\frac{3.22}{32.2}\times 10.47^2\right]_{(3,4)}=15.8+10.96=26.8\ ft-lb$$

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2=\frac{1}{2}\times\left(\frac{32.2}{32.2}+4\times\frac{3.22}{32.2}\right)\times 4^2=11.2\ ft-lb\qquad\Rightarrow\ T=11.2+26.8=38\ ft-lb$$

مسئله نمونه 4-4

گاری A به وزن 32.2 lb در امتداد افقی و با سرعت 4 ft/sec در راهنمای افقی حرکت می کند و حامل دو مجموعه از گلوله ها و میله های سبک است که حول محوری در نقطه O روی گاری می چرخند. وزن هر یک از چهار گلوله 3.22 lb است. مجموعه ای که روی وجه جلو گاری قرار دارد با سرعت 80 rpm پادساعتگرد می چرخد و مجموعه ای که در پشت گاری واقع شده با سرعت 100 rpm ساعتگرد می چرخد. برای کل سیستم ، مطلوب است محاسبه الف) انرژی جنبشی T ، ب) اندازه G اندازه حرکت خطی ج) اندازه HO اندازه حرکت زاویه ای حول نقطه O.



ب)

$$\mathbf{G} = m\,\bar{\mathbf{v}} = \left(\frac{32.2}{32.2} + 4\times\frac{3.22}{32.2}\right)\times 4 = 5.6\ lb-\sec$$

ج) جهت پادساعتگرد را مثبت می گیریم

$$\mathbf{H}_O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i\,\mathbf{v}_i$$

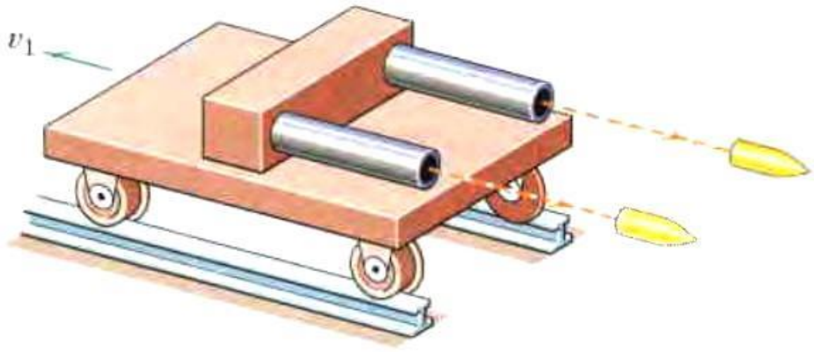
$$\mathbf{H}_O = 2\left[\frac{18}{12}\times\frac{3.22}{32.2}\times 12.57\right]_{(1,2)} - 2\left[\frac{12}{12}\times\frac{3.22}{32.2}\times 10.47\right]_{(3,4)}$$

$$= 3.77 - 2.09 = 1.676 \quad ft-lb-\sec$$

مسئله 17-4

دو پرتابه ، هر یک به وزن 20 lb به طور هم زمان از وسیله نقلیه ای مطابق شکل شلیک می شوند. وزن خودرو 2000 lb است و با سرعت اولیه $\upsilon 1=4$ ft/sec در امتدادی مخالف با امتداد شلیک حرکت می کند. سرعت دهانه ای هر پرتابه $\upsilon r=800$ ft/sec نسبت به لوله است. مطلوب است محاسبه سرعت $\upsilon 2$ وسیله نقلیه پس از شلیک پرتابه ها.

حل:



$$\Delta G_x = 0 \quad \Rightarrow \quad G_1 = G_2$$

$$G_1 = \left(\frac{2000 + 2\times 20}{32.2}\right)\times(4)$$

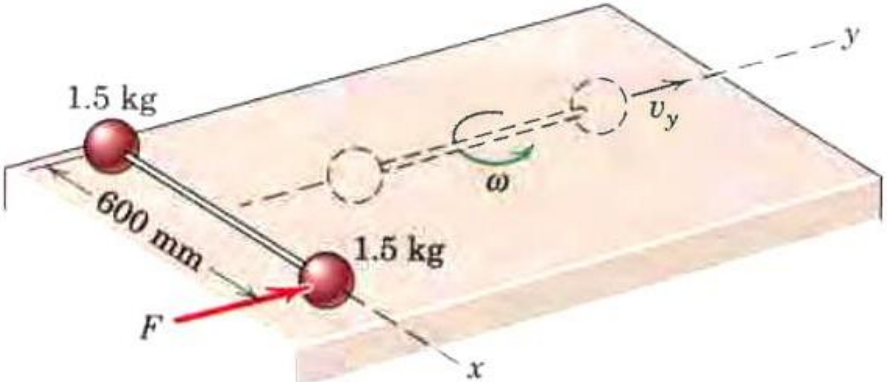
$$G_2 = \left(\frac{2000}{32.2}\right)\times(v_2) - 2\left(\frac{20}{32.2}\right)\times(800 - v_2)$$

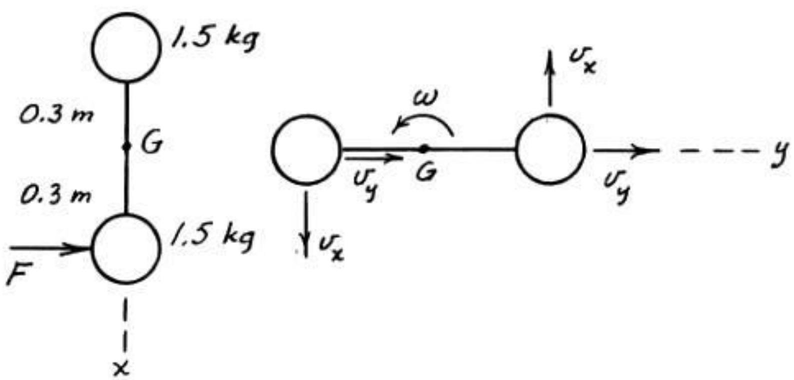
$$\left(\frac{2000 + 2\times 20}{32.2}\right)\times(4) = \left(\frac{2000}{32.2}\right)\times(v_2) - 2\left(\frac{20}{32.2}\right)\times(800 - v_2)$$

$$\Rightarrow \qquad v_2 = 19.69 \ ft/\sec$$

مسئله 4-22

دو کره بطور صلب به میله ای با جرم قابل چشم پوشی متصل شده اند و ابتدا روی سطح افقی صاف در حال سکون اند. ناگهان نیروی F در امتداد y به یکی از کره ها وارد می شود و در طول مدت کوتاهی یک ضربه 10 N.s به آن می زند. مطلوب است محاسبه سرعت هر کره ، هنگامی که از وضعیت نشان داده شده با خط چین عبور می کنند.





حل:

$$\int \sum F_x dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta G_x = 0$$

$$\int \sum F_y dt = \Delta G_y \quad \Rightarrow \quad 10 = 2\left[1.5 v_y\right]$$

$$v_y = 3.33\ m/s$$

$$\int \sum M_G dt = \Delta H_G \quad \Rightarrow \quad 10 \times 0.3 = 2\left[1.5 \times v_x \times 0.3\right]$$

$$v_x = 3.33\ m/s$$

$$v = 3.33 \times \sqrt{2} = 4.71\ m/s$$