فصل سوم

سینتیک ذرات

فهرست مطالب فصل سوم

✓ الف) نیرو ، جرم و شتاب

- قانون دوم نیوتون
- معادله حرکت و حل مسئله
- حرکت راست خط
- حرکت خمیده خط

✓ ب) کار و انرژی

- کار و انرژی جنبشی
- انرژی پتانسیل

✓ ج) ضربه و اندازه حرکت

- ضربه خطی و اندازه حرکت خطی
- ضربه زاویه ای و اندازه حرکت زاویه ای

✓ د) کاربردهای خاص

- برخورد
- حرکت با نیروی مرکزی
- حرکت نسبی

سینتیک ، علم بررسی روابط بین نیروهای نامتوازن و تغییراتی است که این نیروها در حرکت ایجاد می کنند.

سه روش كلي براي حل مسئله‌هاي سينتيك وجود دارد.

الف) بكارگيري مستقيم قانون دوم نيوتون (روش نيرو- جرم - شتاب)

ب) روش کار و انرژی

ج) حل به روش ضربه و اندازه حرکت

الف) نیرو ، جرم و شتاب

قانون دوم نيوتون: تجربه نشان داده است كه نسبت نيرو به شتاب حاصل از آن ثابت بوده كه اين ثابت لختي (اينرسي) ذره ، يعني مقاومت آن در برابر آهنگ تغيير سرعت است.

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

جرم m بعنوان اندازه كمي لختي بكار مي‌رود.

همچنين تجربه نشان داده است كه شتاب هميشه با نيرو هم جهت است. يعني رابطه بين اين دو برداري است.

انواع مسائل ديناميكي:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

شتاب مشخص است ← از معادله فوق نيرو نيز مشخص مي‌شود.

نيروها مشخص هستند← حركت برآيند خواسته شده است.

وقتي نيروها تابع زمان ، مكان ، سرعت يا شتاب باشند معادله فوق به يك معادله ديفرانسيل تبديل مي‌شود كه معمولاً پيچيده‌تر از مسائل نوع اول مي‌باشند.

معمولا با استفاده از یکی از دستگاه های مختصاتی که در فصل قبل معرفی شدند ، رابطه فوق بصورت مولفه های اسکالر بیان می شود.

انتخاب دستگاه مختصات مناسب به نوع حرکتی که با آن سروکار داریم وابسته است و گامی مهم در فرمول بندی هر مسئله بشمار می رود.

تنها راه قابل اعتماد برای در نظر گرفتن همه نیروها ، مجزا کردن ذره از همه اجسامی است که با آن تماس دارند یا بر آن تاثیر می گذارند.

$\downarrow$

رسم نمودار پیکر آزاد جسم

free- body diagram

حرکت راست خط

اگر امتداد X را به عنوان امتداد حرکت راست خط ذره ای به جرم m انتخاب کنیم ، آنگاه خواهیم داشت :

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma F_z = 0$$

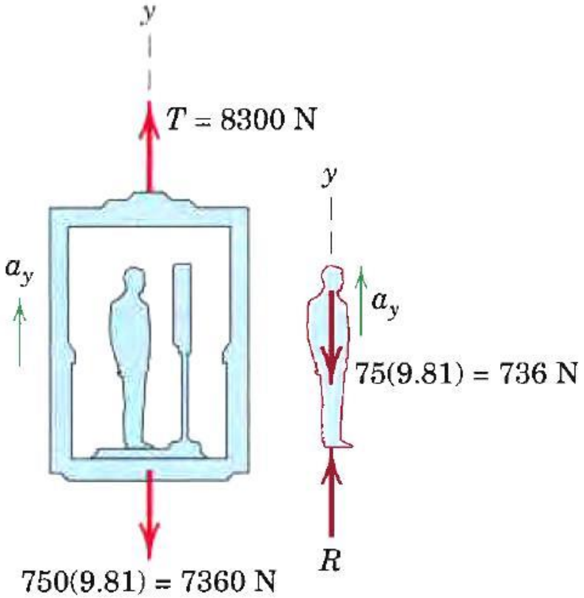
در مواردی که نمی توان امتداد مختصات را در امتداد حرکت فرض نمود ،

در حالت کلی با هر سه معادله مولفه ای سر و کار داریم :

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$\Sigma F_z = ma_z$$

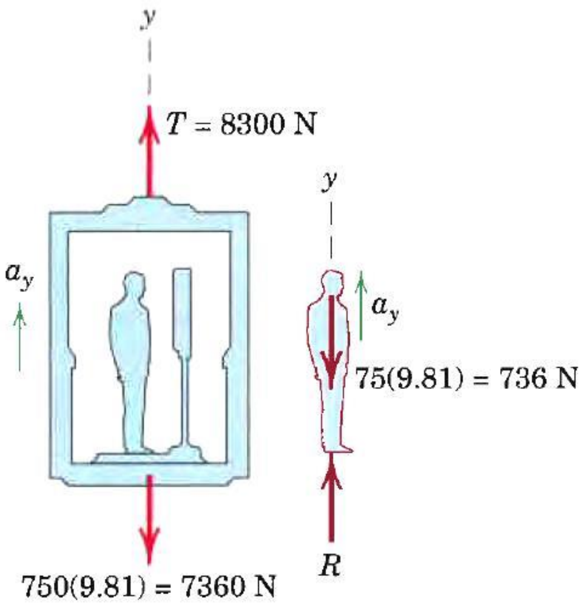
$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$
$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$$
$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k}$$
$$|\Sigma\mathbf{F}| = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}$$

مردی به جرم $75\ kg$ روی ترازوی فنری واقع در آسانسور ایستاده است. در طی 3 ثانیه نخست حرکت از حالت سکون ، کشش T در کابل آسانسور $8300\ N$ است. مطلوب است تعیین عدد R برحسب نیوتون که ترازو در این فاصله زمانی نشان می دهد و v سرعت رو به بالای آسانسور در پایان این 3 ثانیه. جرم کل آسانسور ، مرد و ترازو $750\ kg$ است.



مسئله نمونه 3-1

مردی به جرم 75 kg روی ترازوی فنری واقع در آسانسور ایستاده است. در طی 3 ثانیه نخست حرکت از حالت سکون ، کشش T در کابل آسانسور 8300 N است. مطلوب است تعیین عدد R برحسب نیوتون که ترازو در این فاصله زمانی نشان می دهد و v سرعت رو به بالای آسانسور در پایان این 3 ثانیه. جرم کل آسانسور ، مرد و ترازو 750 kg است.



حل :

برای آسانسور

$$\sum F_y = m\,a_y$$

$$8300 - 7360 = 750 a_y \longrightarrow a_y = 1.275 m/s^2$$

برای مرد

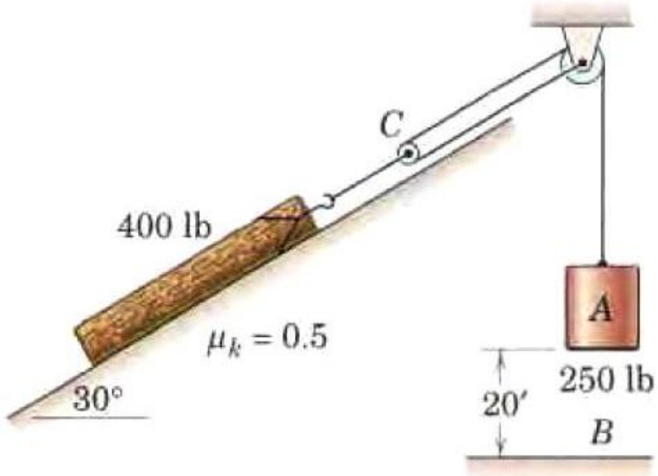
$$\sum F_y = m\,a_y$$

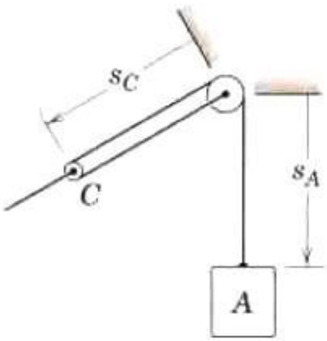
$$R - 736 = 75 \times 1.275 \longrightarrow R = 830 N$$

سرعت در پایان ثانیه سوم

$$\Delta v = \int a\,dt \;\rightarrow\; v - 0 = \int_0^3 1.275\,dt \;\rightarrow\; v = 3.77\;\; m/s$$

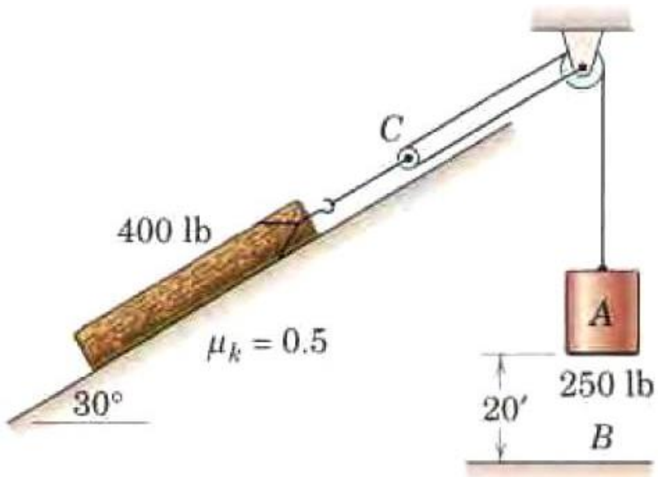
قطعه بتنی A به وزن 250 lb از حالت سکون در وضعیتی مطابق شکل رها می شود و قطعه چوبی 400 lb را روی شیب 30° بالا می کشد. ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه چوبی و سطح شیب دار 0.5 است. مطلوب است تعیین سرعت قطعه A ، وقتی در نقطه B با زمین برخورد می کند.





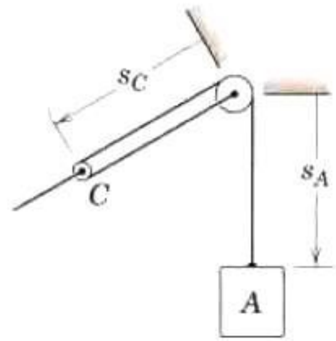
مسئله نمونه 3-3

قطعه بتنی A به وزن 250 lb از حالت سکون در وضعیتی مطابق شکل رها می شود و قطعه چوبی 400 lb را روی شیب 30^{o} بالا می کشد. ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه چوبی و سطح شیب دار 0.5 است. مطلوب است تعیین سرعت قطعه A ، وقتی در نقطه B با زمین برخورد می کند.



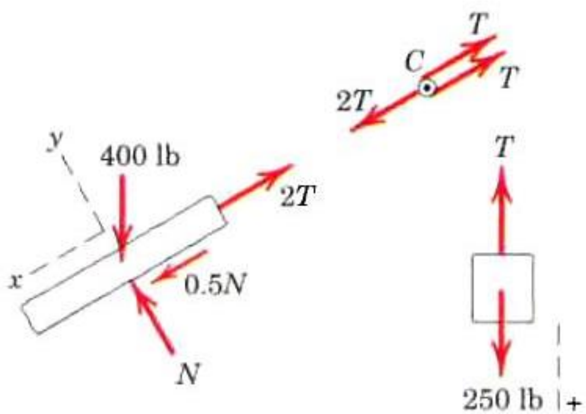
حل :

$$L = 2s_c + s_A + const. \longrightarrow 0 = 2a_c + a_A \qquad \boxed{1}$$



شتاب قطعه چوبی به سمت بالای سطح شیب دار ، نصف شتاب رو به پایین A است.

با فرض چشم پوشی از جرم و اصطکاک در قرقره ها ، دیاگرام آزاد دو قطعه برابر است با :

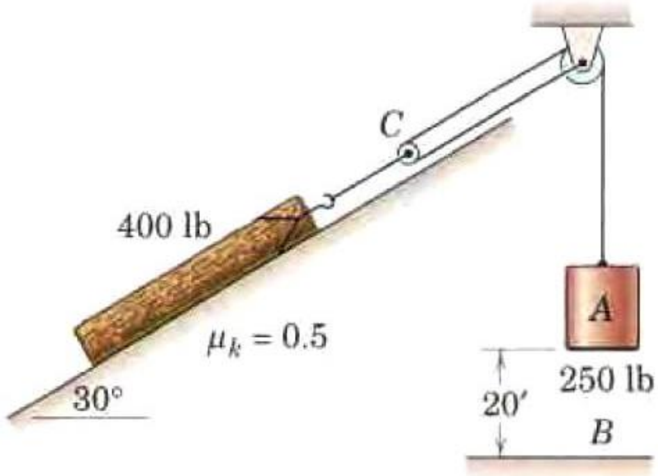


$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - 400 \times \cos 30^{\circ} = 0 \rightarrow N = 346\,lb$$

$$\sum F_x = m\,a_x \rightarrow 0.5 \times 346 - 2T + 400 \sin 30^{\circ} = \frac{400}{32.2} a_c \qquad \boxed{2}$$

مسئله نمونه 3-3

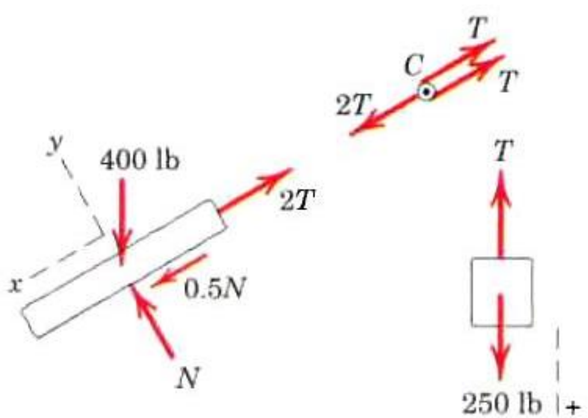
قطعه بتنی A به وزن 250 lb از حالت سکون در وضعیتی مطابق شکل رها می شود و قطعه چوبی 400 lb را روی شیب 30° بالا می کشد. ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه چوبی و سطح شیب دار 0.5 است. مطلوب است تعیین سرعت قطعه A ، وقتی در نقطه B با زمین برخورد می کند.



برای قطعه A : $+\downarrow \sum F = m\,a$

$$\Downarrow$$

$$250 - T = \frac{250}{32.2} a_A \qquad \boxed{3}$$



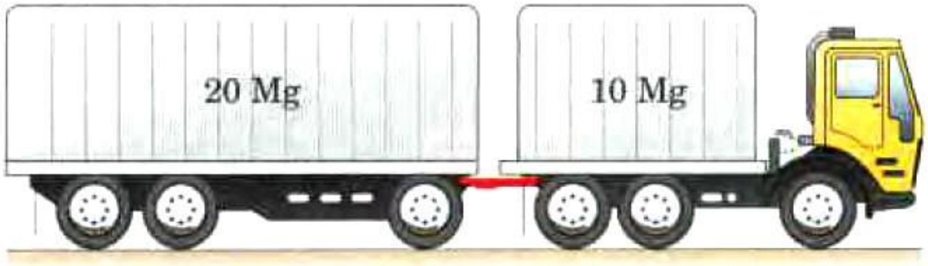
با حل این سه معادله ، مجهولات بصورت زیر بدست می آیند :

$$a_A = 5.83\ ft/\sec^2$$
$$a_C = -2.92\ ft/\sec^2$$
$$T = 205\ lb$$

وقتی قطعه با شتاب ثابت به اندازه 20 ft سقوط کند ، سرعت آن برابر است با:

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2\times5.83\times20} = 15.27\ ft/\sec$$

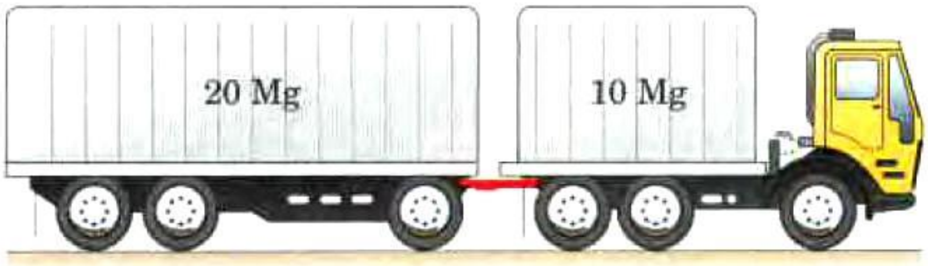
کامیون 10 Mg تریلر 20 Mg را بدنبال خود می کشد. فرض می شود ، این واحد ، با نیروی کشنده 20 kN بین چرخ های محرک کامیون و سطح جاده ، از حالت توقف روی سطح جاده کفی به حرکت در می آید. مطلوب است محاسبه کشش T در میل بکسل افقی و شتاب مجموعه.



مسئله 3-5

کامیون 10 Mg تریلر 20 Mg را بدنبال خود می کشد. فرض می شود ، این واحد ، با نیروی کشنده 20 kN بین چرخ های محرک کامیون و سطح جاده ، از حالت توقف روی سطح جاده کفی به حرکت در می آید. مطلوب است محاسبه کشش T در میل بکسل افقی و شتاب مجموعه.

حل :



a →

30 Mg → 20 kN

برای کل مجموعه

$$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{20\times10^3}{30\times10^3} = 0.667\ m/s^2$$

a = 0.667 →

20 Mg → T

برای تریلر

$$F = ma$$

$$F = 20\times10^3\times0.667 = 13340\ N = 13.34\ kN$$

حرکت خمیده خطی

انتخاب دستگاه مختصات مناسب به شرایط مسئله وابسته است و از تصمیم های مهمی است که باید در هنگام حل مسئله های حرکت خمیده خط گرفت.

مختصات قائم

$$\boxed{\begin{aligned}\sum F_x &= m\,a_x\\ \sum F_y &= m\,a_y\end{aligned}} \Rightarrow \begin{aligned} a_x &= \ddot{x}\\ a_y &= \ddot{y}\end{aligned}$$

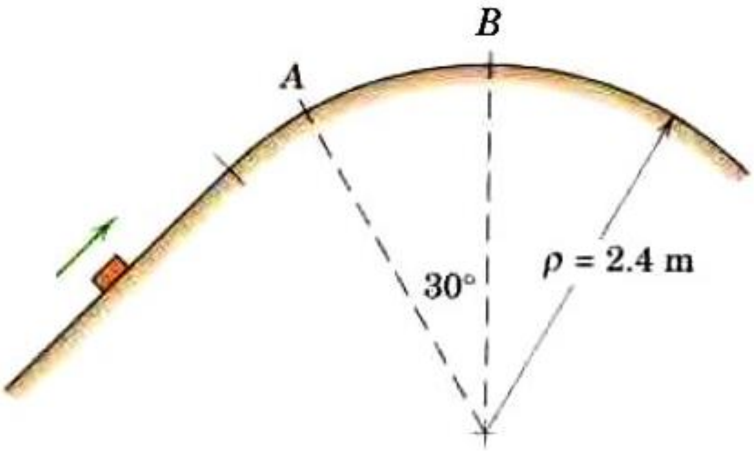
مختصات قائم و مماسی

$$\boxed{\begin{aligned}\sum F_n &= m\,a_n\\ \sum F_t &= m\,a_t\end{aligned}} \Rightarrow \begin{aligned} a_n &= \rho\,\dot{\beta}^2 = \frac{v^2}{\rho} = v\,\dot{\beta}\\ a_t &= \dot{v}\,, \quad v = \rho\,\dot{\beta}\end{aligned}$$

مختصات قطبی

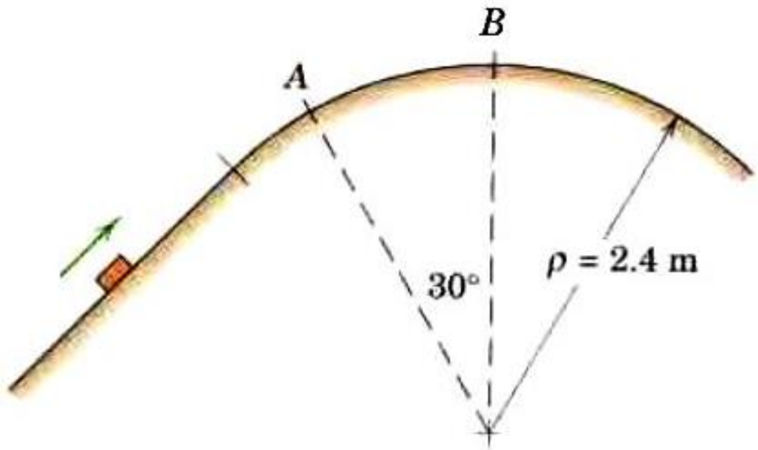
$$\boxed{\begin{aligned}\sum F_r &= m\,a_r\\ \sum F_\theta &= m\,a_\theta\end{aligned}} \Rightarrow \begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\\ a_\theta &= r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}\end{aligned}$$

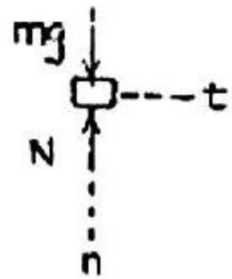
قطعه 2 kg با سرعت 3.5 m/s از نقطه B واقع در بالای بخش دایره ای مسیر می گذرد. مطلوب است تعیین اندازه N_B نیروی قائمی که مسیر بر قطعه وارد می کند. ماکزیمم سرعت v ، که قطعه می تواند در نقطه A داشته باشد بدون اینکه تماس آن با مسیر قطع شود ، چقدر است ؟



مسئله 3-51

قطعه 2 kg با سرعت 3.5 m/s از نقطه B واقع در بالای بخش دایره ای مسیر می گذرد. مطلوب است تعیین اندازه N_B نیروی قائمی که مسیر بر قطعه وارد می کند. ماکزیمم سرعت v ، که قطعه می تواند در نقطه A داشته باشد بدون اینکه تماس آن با مسیر قطع شود ، چقدر است ؟



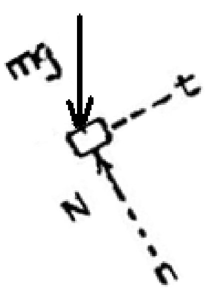


حل :

$$\sum F_n = m\,a_n$$

$$mg - N = m\frac{v^2}{\rho}$$

$$N = 2\times 9.81 - 2\times\frac{3.5^2}{2.4} = 9.41N$$

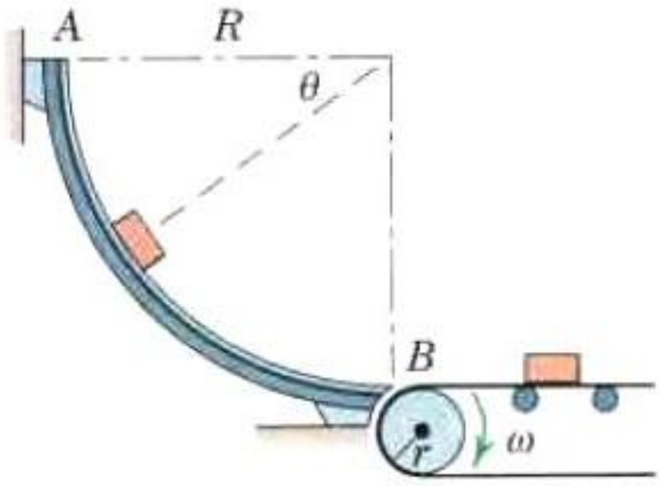


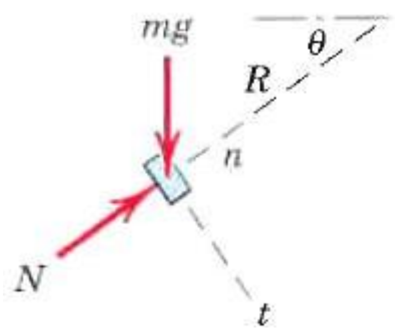
در نقطه A

$$mg\cos 30^\circ - N = m\frac{v^2}{\rho} \quad \boxed{N = 0}$$

$$v = \sqrt{\rho g\cos 30^\circ} = \sqrt{2.4\times 9.81\times\cos 30^\circ} = 4.516\ m/s$$

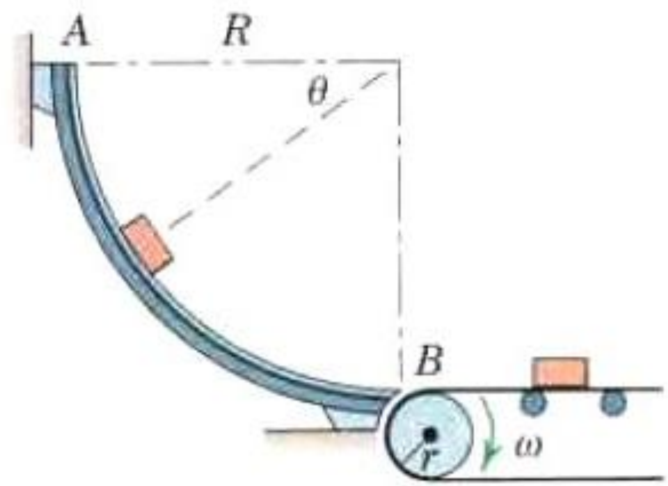
قطعات کوچک را از حالت سکون در نقطه A رها می کنند تا روی سطح دایره ای هموار به شعاع R بطرف پایین بلغزند و به تسمه نقاله B برسند. مطلوب است تعیین عبارتی برای بیان نیروی تماس قائم بین راهنما و هر جسم ، بر حسب θ و مشخص کردن سرعت زاویه ای ω قرقره تسمه نقاله به شعاع r ، برای جلوگیری از لغزش قطعه روی تسمه نقاله ، در هنگامی که به آن منتقل می شود.

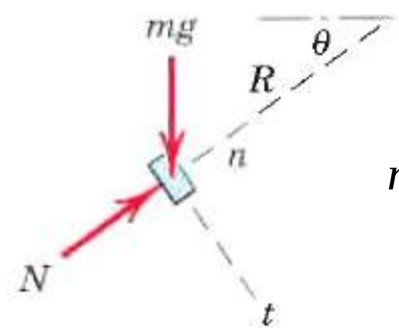




مسئله نمونه 3-7

قطعات کوچک را از حالت سکون در نقطه A رها می کنند تا روی سطح دایره ای هموار به شعاع R بطرف پایین بلغزند و به تسمه نقاله B برسند. مطلوب است تعیین عبارتی برای بیان نیروی تماس قائم بین راهنما و هر جسم ، بر حسب θ و مشخص کردن سرعت زاویه ای ω قرقره تسمه نقاله به شعاع r ، برای جلوگیری از لغزش قطعه روی تسمه نقاله ، در هنگامی که به آن منتقل می شود.





حل :

$$\sum F_t = m\,a_t$$

$$mg\cos\theta = m\,a_t \;\rightarrow\; a_t = g\cos\theta$$

$$[v\,dv = a_t\,ds] \;\rightarrow\; \int_0^v v\,dv = \int_0^\theta (g\cos\theta)\,d(R\theta)$$

$$\searrow \quad v^2 = 2gR\sin\theta$$

$$\sum F_n = m\,a_n \;\rightarrow\; N - mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R} \;\rightarrow\; N = 3mg\sin\theta$$

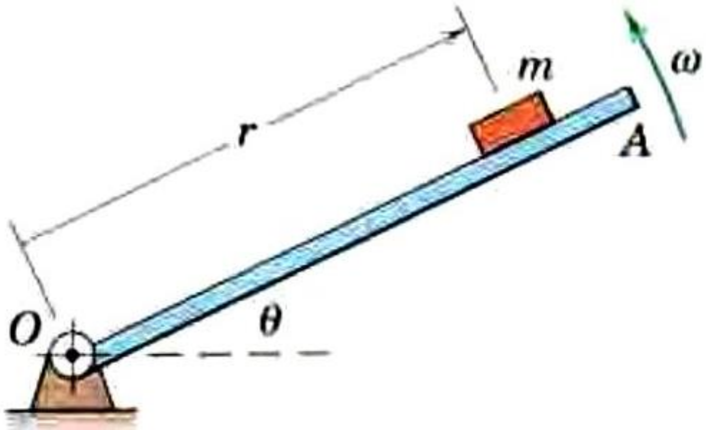
$$\theta = \frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; v = \sqrt{2gR}$$

سرعت تسمه نقاله $v = r\omega$

$$\Rightarrow \quad r\omega = \sqrt{2gR} \;\Rightarrow\; \omega = \frac{\sqrt{2gR}}{r}$$

عضو OA در نقطه O با سرعت ثابت پادساعتگرد $\omega=3\ rad/sec$ حول محوری افقی می چرخد. هنگامی که این عضو از وضعیت $\theta=0$ عبور می کند قطعه کوچکی به جرم m ، در شعاع $r=18\ in$ ، روی آن قرار می دهند. در این حالت ، وقتی $\theta=50^o$ قطعه شروع به لغزش می کند.

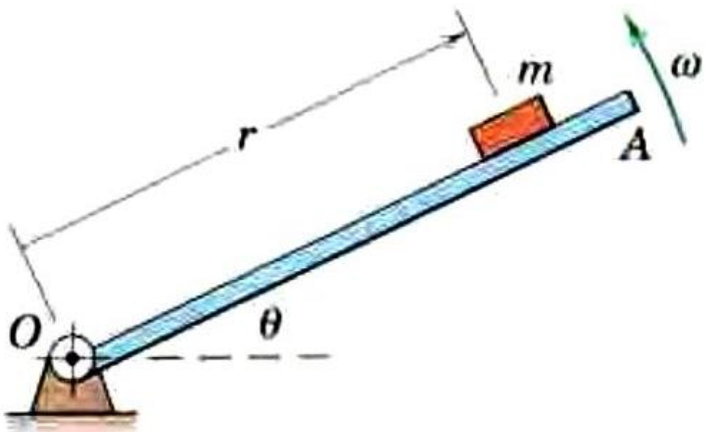
مطلوب است تعیین ضریب اصطکاک استاتیکی μs بین قطعه و عضو.



مسئله 3-58

عضو OA در نقطه O با سرعت ثابت پادساعتگرد ω=3 rad/sec حول محوری افقی می چرخد. هنگامی که این عضو از وضعیت θ=0 عبور می کند قطعه کوچکی به جرم m ، در شعاع r=18 in ، روی آن قرار می دهند. در این حالت ، وقتی θ=50° قطعه شروع به لغزش می کند. مطلوب است تعیین ضریب اصطکاک استاتیکی μs بین قطعه و عضو.

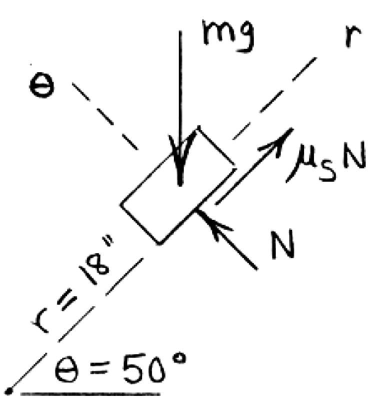
حل :



$$\sum F_\theta = m\,a_\theta$$

$$N - mg\cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg\cos\theta$$

$$\sum F_r = m\,a_r$$

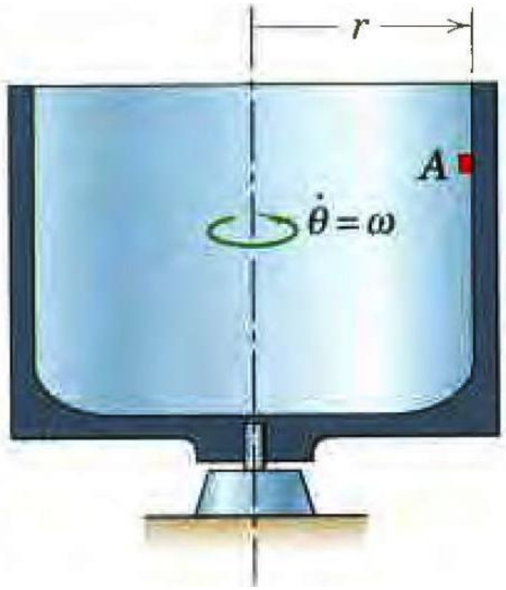


$$\mu_s N - mg\sin\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\mu_s mg\cos\theta - mg\sin\theta = m(0 - r\omega^2)$$

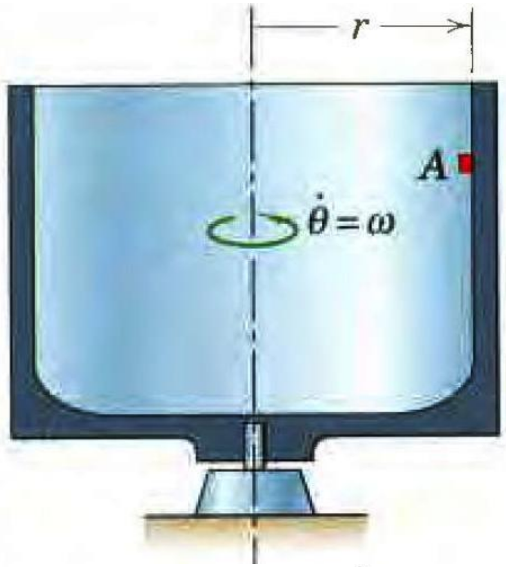
$$\mu_s = \tan\theta - \frac{r\omega^2}{g\cos\theta} = \tan 50^\circ - \frac{(18/12)\times 3^2}{32.2\times\cos 50^\circ} = 0.54$$

جسم کوچک A روی دیواره داخلی سیلندر دوار به شعاع r قرار گفته است. اگر ضریب اصطکاك ایستائي بین شي و محفظه μs باشد ، مطلوب است تعیین عبارتي براي مینیمم آهنگ چرخش $\dot{\theta} = \omega$ محفظه که مانع پائین لغزیدن شي در جهت قائم مي شود.



مسئله 3-75

جسم کوچک A روی دیواره داخلی سیلندر دوار به شعاع r قرار گفته است. اگر ضریب اصطكاك ایستائي بین شي و محفظه μs باشد ، مطلوب است تعیین عبارتي براي مینیمم آهنگ چرخش $\dot{\theta}=\omega$ محفظه که مانع پائین لغزیدن شي در جهت قائم مي‌شود.



حل : - انتخاب دستگاه مختصات استوانه ای (r-θ-z)

$$\sum F_r = m\,a_r$$

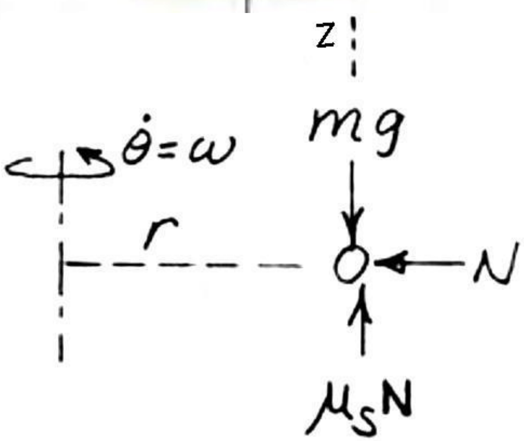
$$-N = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \rightarrow -N = m(0 - r\omega^2)$$

$$N = mr\omega^2$$

$$\sum F_z = m\,a_z$$

$$mg - \mu_s N = 0 \rightarrow \mu_s m r\omega^2 = mg$$

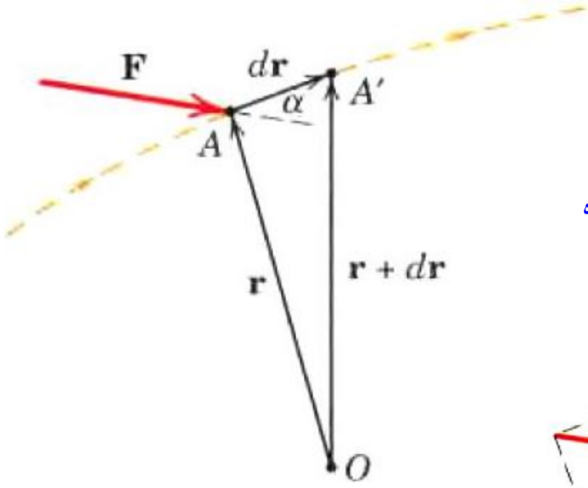
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}}$$



ب) کار و انرژی جنبشی

تعریف کار

$$dU = \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$



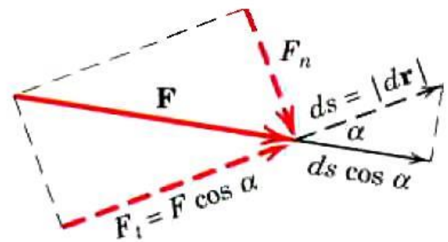
کار کمیتی اسکالر است.

اندازه $dU = F\,ds\cos\alpha$

یا

$$F_t = F\cos\alpha$$

$$dU = F_t\,ds$$



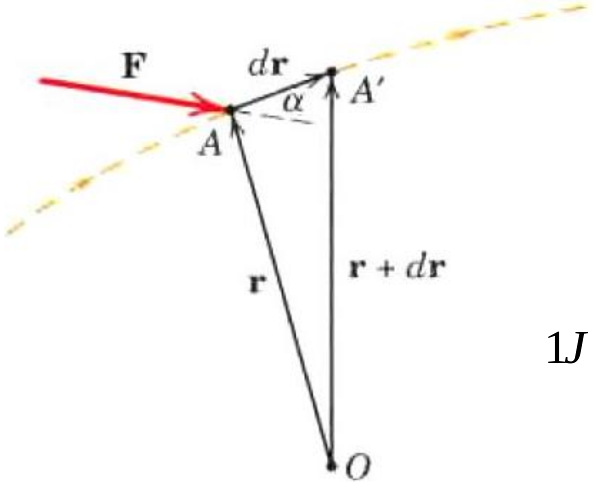
مولفه $F_n = F\sin\alpha$ که بر جابجای عمود است ، کار انجام نمی دهد.

هرگاه مولفه Ft در جهت جابجایی باشد ، کار مثبت است و اگر در جهت مخالف باشد ، کار منفی است.

نیروهایی که کار انجام می دهند نیروهای فعال نامیده می شوند.

نیروهای مقید کننده که کار انجام نمی دهند نیروهای واکنشی نام دارند.

تعریف کار



واحد کار در سیستم SI ژول (J) است و آن را بصورت کاری تعریف می کنند

که نیروی 1N در فاصله جابجایی 1m در امتداد نیرو انجام می دهد.

$$1J \equiv 1N\,.1m$$

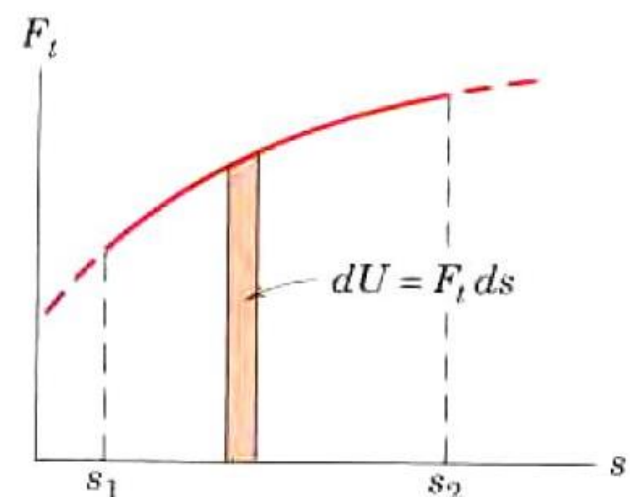
محاسبه کار

در حین حرکت متناهی نقطه اثر یک نیرو ، مقداری کار انجام می شود که برابر است با :

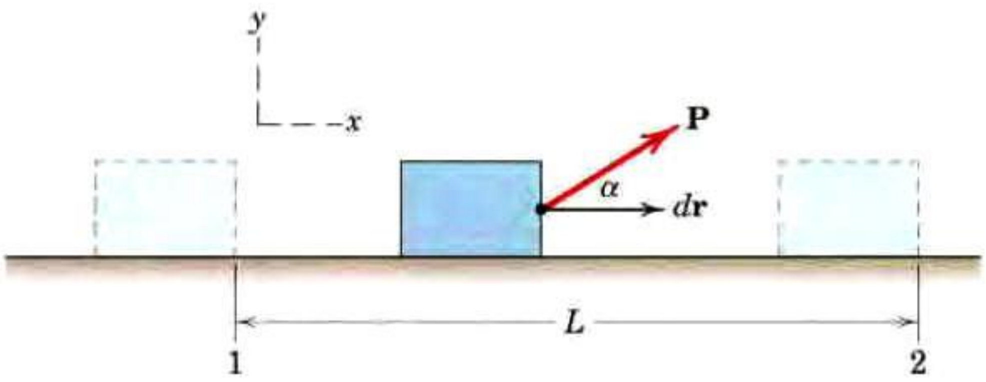
$$U=\int_{S_1}^{S_2} F_t ds$$

یا

$$U=\int_1^2 \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\int_1^2 (F_x dx+F_y dy+F_z dz)$$



1) کار نیروی خارجی ثابت



$$\mathbf{F} = (P\cos\alpha)\mathbf{i} + (P\sin\alpha)\mathbf{j}$$
$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}$$

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_1^2 [(P\cos\alpha)\mathbf{i} + (P\sin\alpha)\mathbf{j}].dx\mathbf{i}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} P\cos\alpha dx = P\cos\alpha(x_2 - x_1) = PL\cos\alpha$$

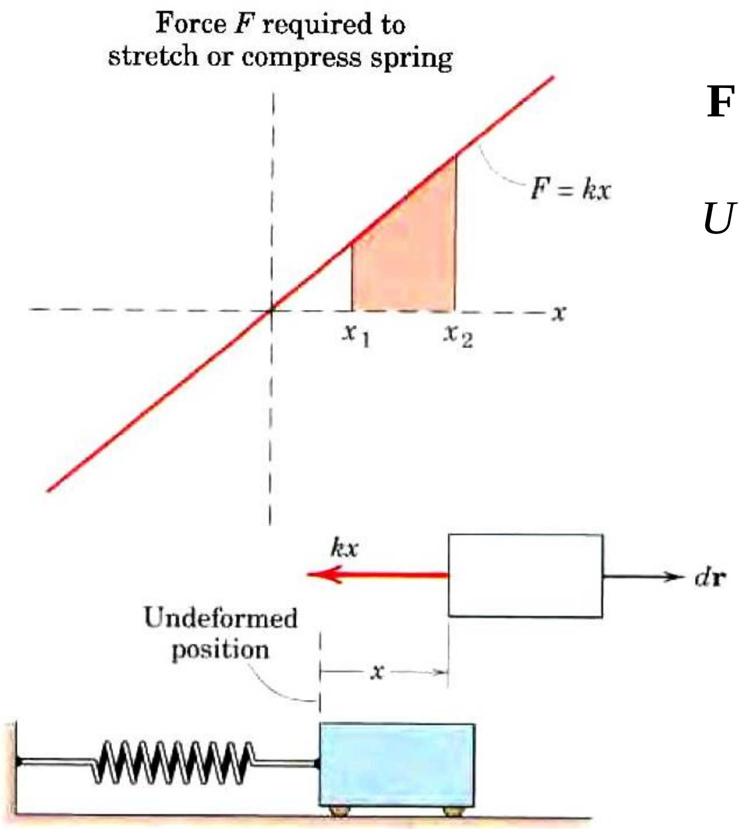
این عبارت را می توان بصورت حاصلضرب مولفه افقی نیرو $P\cos\alpha$ در فاصله طی شده L تعبیر کرد.

در صورتیکه α بین 90^o و 270^o باشد ، کار منفی خواهد بود.

مولفه دیگر نیرو $P\sin\alpha$ در امتداد عمود بر جابجایی ، کار انجام نمی دهد.

2) کار نیروی فنر

فنر معمولی خطی با ضریب سفتی k را در نظر می گیریم که در آن نیروی لازم برای کشیدن یا فشردن فنر با تغییرشکل x مناسب است.



$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$$

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_1^2 (-kx\mathbf{i}).dx\mathbf{i} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\, dx = \frac{1}{2}k\,(x_1^2 - x_2^2)$$

✓هرگاه مکان اولیه مکانی باشد که در آن تغییر شکل فنر صفر است و x1=0 ،

آنگاه برای هر مکان نهایی x2≠0 ، کار منفی خواهد بود.

✓از طرف دیگر اگر از مکان اولیه اختیاری x1≠0 به مکان نهایی تغییرشکل نیافته

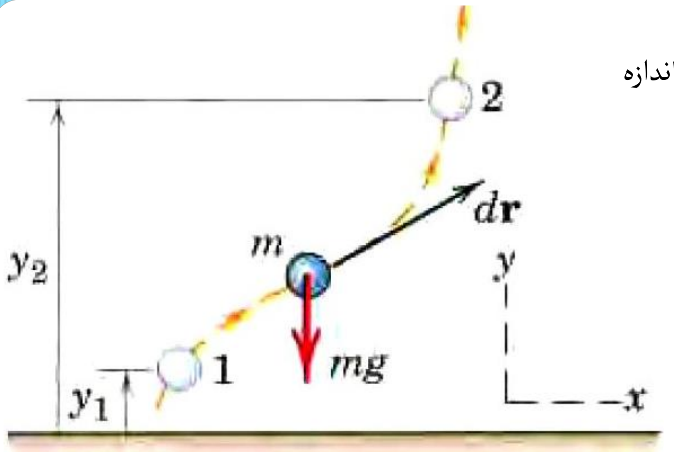
x2=0 برویم ، مشاهده می کنیم که کار مثبت است.

زیرا در هر حرکت به سمت مکان فنر قبل از تغییر شکل ، نیروی فنر و جابجایی در یک جهت اند.

✓اگر x برحسب متر (یا فوت) باشد ، k باید برحسب N/m (lb/ft) خواهد بود.

در واقع اندازه کار برابر است با مساحت ذوزنقه هاشور خورده در شکل فوق

3) کار نیروی وزن



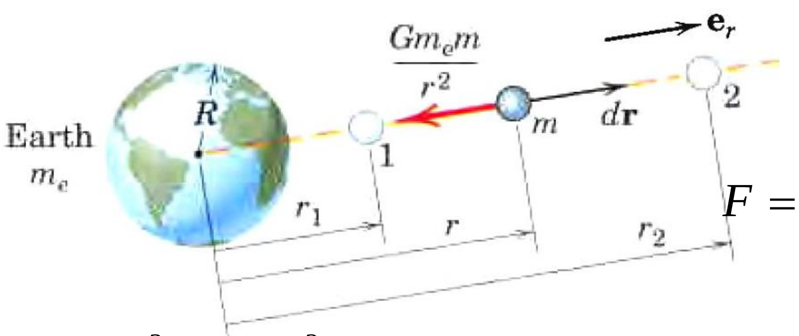
الف) g = مقدار ثابت ⟵ در تغییر ارتفاع های به اندازه کافی کوچک

$$U_{1-2}=\int_1^2 \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\int_1^2(-mg\ \mathbf{j}).(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j})$$

$$=-mg\int_{y_1}^{y_2}dy=-mg\,(y_2-y_1)$$

مشاهده می کنیم که حرکت افقی سهمی در این کار ندارد. . . .

هرگاه جسم بالا برود ، آنگاه $(y_2-y_1)>0$ و این کار منفی است. اگر جسم سقوط کند $(y_2-y_1)<0$ و کار مثبت است.



ب) $g \neq$ مقدار ثابت ⟵ اگر تغییرات فاحشی در ارتفاع ایجاد شود . . .

$$F=\frac{Gm_e m}{r^2}$$

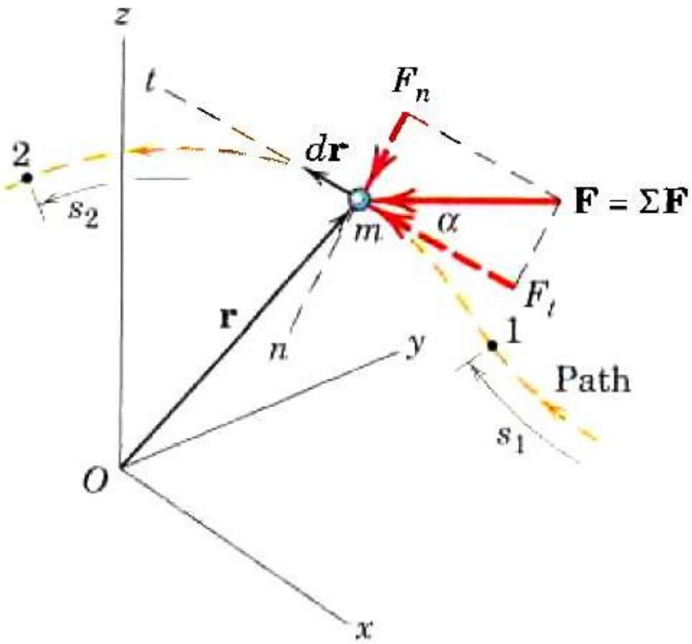
$$\boxed{Gm_e=gR^2}$$

$$U_{1-2}=\int_1^2\mathbf{F}.d\mathbf{r}=\int_1^2\frac{-Gm_e m}{r^2}\mathbf{e}_r.dr\,\mathbf{e}_r=-Gm_e m\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}=Gm_e m\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=mgR^2\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

در اینجا نیز اگر جسم به ارتفاع بالاتر برود $(r_2>r_1)$ این کار منفی است. اگر جسم سقوط کند $(r_2<r_1)$ کار مثبت است.

r معرف فاصله شعاعی از مرکز زمین است نه ارتفاع از سطح زمین. $h = r - R$

کار و حرکت خمیده خطی



$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds$$

با جایگزینی قانون دوم نیوتون :

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_1^2 m\mathbf{a}.d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}.d\mathbf{r} = a_t ds \qquad \& \qquad a_t ds = v\,dv$$

$$\Rightarrow \quad U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

اصل کار و انرژی جنبشی

انرژی جنبشی یک ذره بصورت زیر تعریف می شود :

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

و برابر است با کار کل که باید روی ذره انجام شود تا آن را از حالت سکون به حالت حرکت با سرعت V برساند.

انرژی جنبشی کمیتی اسکالر است که در سیستم SI با یکاهای N.m یا ژول (J) و در سیستم اینچی با یکای ft-lb بیان می شود.

انرژی جنبشی صرفنظر از امتداد سرعت ، همیشه مثبت است.

$$U_{1-2} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1 = \Delta T$$

معادله کار-انرژی جنبشی ذره : کار کل انجام شده توسط همه نیروهای وارد بر ذره ای که از نقطه 1 به نقطه 2 می رود ، برابر است با تغییر انرژی جنبشی ذره در طی این حرکت.

$$T_1 + U_{1\text{-}2} = T_2$$

مزایای روش کار و انرژی

مزیت عمده این روش در این است که نیازی به محاسبه شتاب در این روش نیست و تغییرات سرعت بصورت تابعی از نیروهایی که کار انجام می دهند ، مستقیما بدست می آید.

در سیستمی که از چندین ذره تشکیل شده است :

✓ کار نیروهای داخلی (نیروهای عمل و عکس العملی که ذرات به هم وارد می کنند) صفر است.

✓بنابراین معادله کار-انرژی جنبشی را باید برای کل سیستم بکار برد و در آن U_{1-2} کار کل یا خالصی است که نیروهای خارجی روی سیستم انجام می دهند و تغییر انرژی جنبشی در کل سیستم است.

✓انرژی جنبشی کل برابر است با مجموع انرژی های جنبشی همه عضوهای سیستم.

بنابراین مزیت دیگر این روش این است که می توان سیستمی از ذرات به هم متصل را بدون نیاز به جدا کردن عضوها ، تحلیل نمود.

توان

توانایی هر ماشین را با آهنگ زمانی انجام کار یا تحویل انرژی توسط آن ماشین می سنجند.

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F}.d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}.\mathbf{v}$$

توان کمیتی اسکالر است و در سیستم SI با یکاهای N.m/s=J/s بیان می شود.

یکای خاص توان وات (W) است که با 1 ژول بر ثانیه معادل است.

در سیستم اینچی یکای توان مکانیکی اسب بخار (hp) است.

$$1W = 1J/s$$

$$1hp = 550 \ ft - lb/\sec$$

$$1hp = 746W = 0.746kW$$

بازده مکانیکی

نسبت کار انجام شده توسط یک ماشین ، به کار انجام شده روی آن ، در همان فاصله زمانی ،

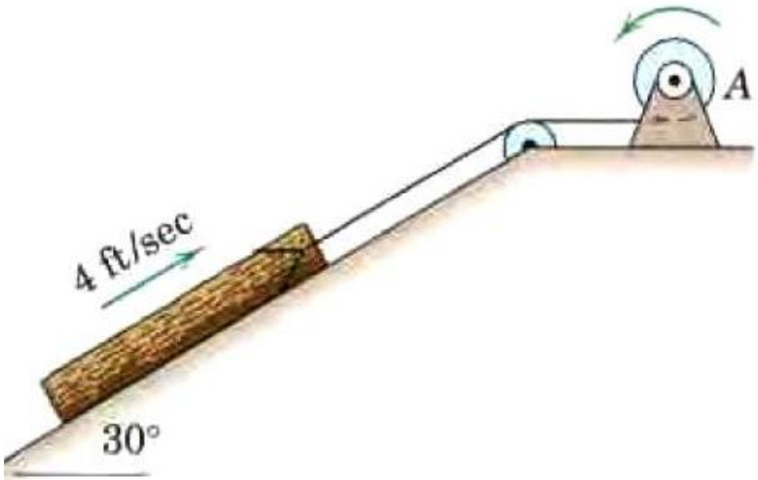
بازده مکانیکی em آن ماشین نامیده می شود.

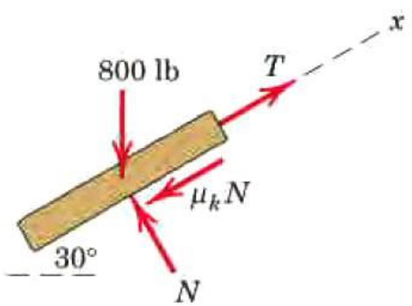
بازده همواره از واحد کمتر است ، زیرا هر وسیله ای در هنگام کارکردن مقداری انرژی به سبب اصطکاک تلف می کند.

$$\boxed{e_m = \frac{P_{out}}{P_{in}}}$$

وینچ موتوری A گرده بینه 800 lb را با سرعت 4 ft/sec از شیب 30 بالا می کشد. توان خروجی وینچ را 6 hp بگیرید و ضریب اصطکاک جنبشی μk بین گرده بینه و سطح شیب دار را محاسبه کنید.

اگر توان وینچ ناگهان به 8 hp افزایش پیدا کند ، شتاب لحظه ای متناظر a گرده بینه چقدر است؟



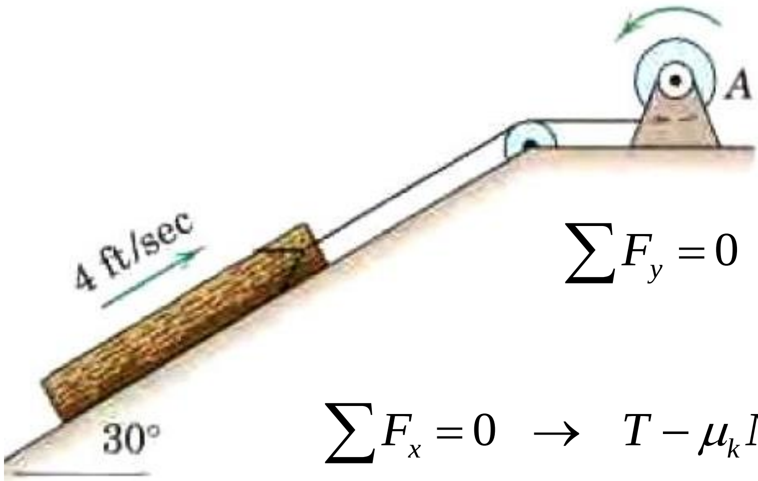


مسئله نمونه 14-3

وینچ موتوری A گرده بینه 800 lb را با سرعت 4 ft/sec از شیب 30 بالا می کشد. توان خروجی وینچ را 6 hp بگیرید و ضریب اصطکاک جنبشی μk بین گرده بینه و سطح شیب دار را محاسبه کنید.

اگر توان وینچ ناگهان به 8 hp افزایش پیدا کند ، شتاب لحظه ای متناظر a گرده بینه چقدر است؟

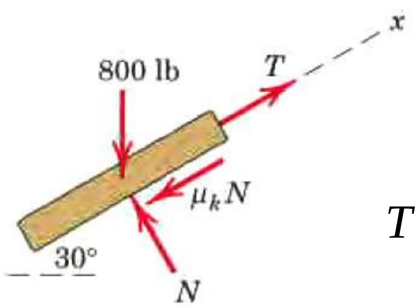
حل :



$$P = Tv \rightarrow T = \frac{P}{v} = \frac{6\times 550}{4} = 825\,lb$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - 800\cos 30^\circ = 0 \rightarrow N = 693\ lb$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow T - \mu_k N - 800\sin 30^\circ = 0$$

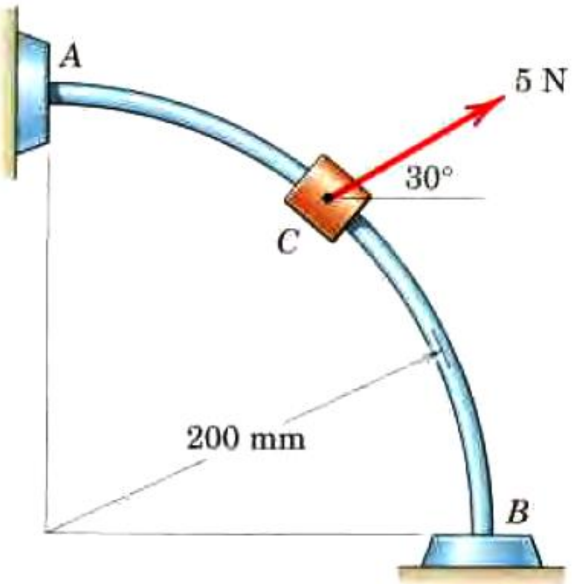


$$\mu_k = \frac{T-400}{N} = \frac{825-400}{693} = 0.613$$

$$T = \frac{P}{v} = \frac{8\times 550}{4} = 1100\ lb$$

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow 1100 - 0.613\times 693 - 800\sin 30^\circ = \frac{800}{32.2}a_x \rightarrow a_x = 11.07\ ft/\sec^2$$

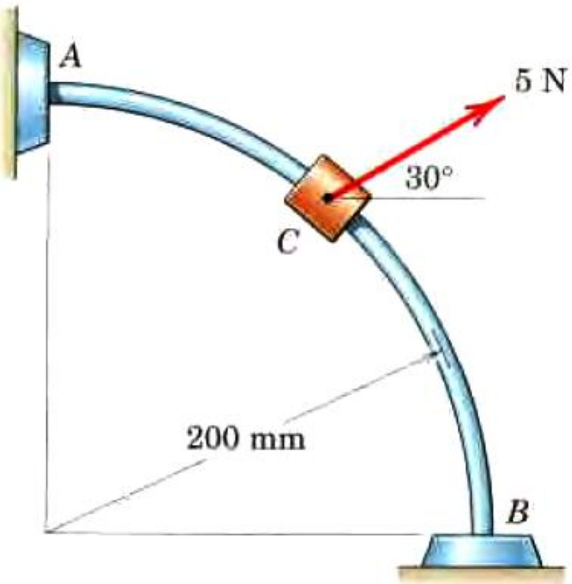
طوقه C به جرم 0.5 kg از حالت سکون در نقطه A به حرکت در می آید و با اصطکاک قابل چشم پوشی ، در صفحه عمودی روی میله ثابت می لغزد. مطلوب است تعیین سرعت برخورد طوقه با سکوی B تحت اثر نیروی 5 N که امتداد ثابت دارد.

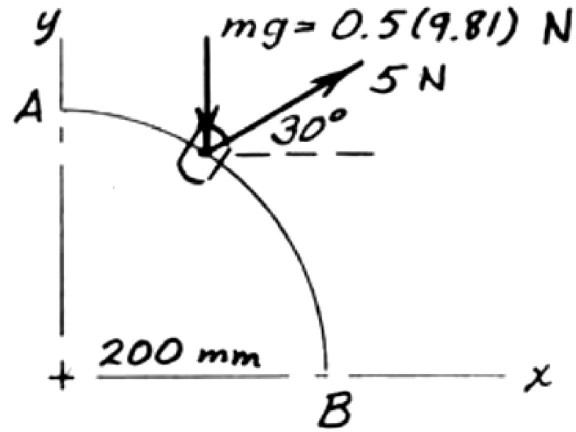


مسئله 3-107

طوقه C به جرم 0.5 kg از حالت سکون در نقطه A به حرکت در می آید و با اصطکاک قابل چشم پوشی ، در صفحه عمودی روی میله ثابت می لغزد. مطلوب است تعیین سرعت برخورد طوقه با سکوی B تحت اثر نیروی 5 N که امتداد ثابت دارد.

حل :





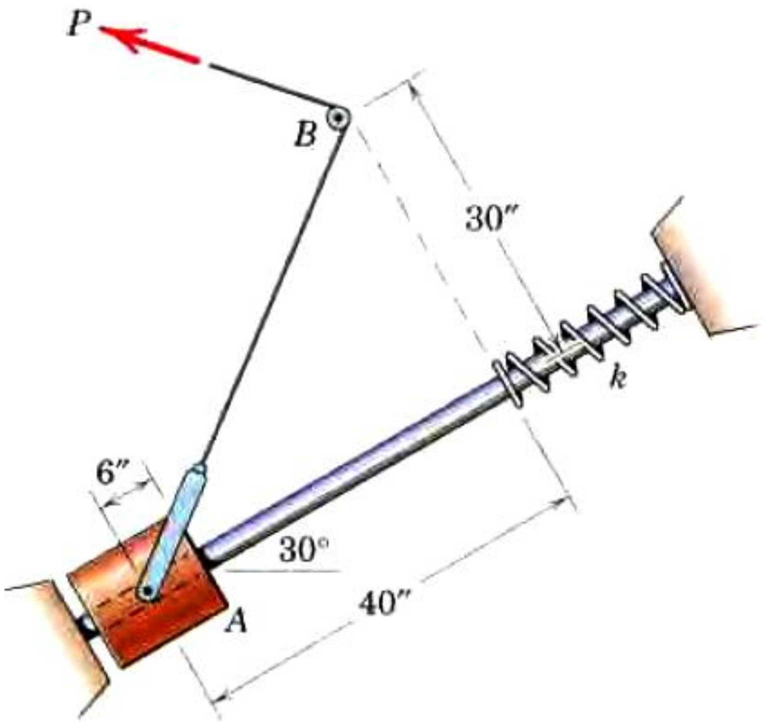
$$U = \Delta T$$

$$U = 5\times\cos 30^\circ \times 0.2 - 5\times\sin 30^\circ \times 0.2 + 0.5\times 9.81\times 0.2$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\times 0.5\times (v^2 - 0)$$

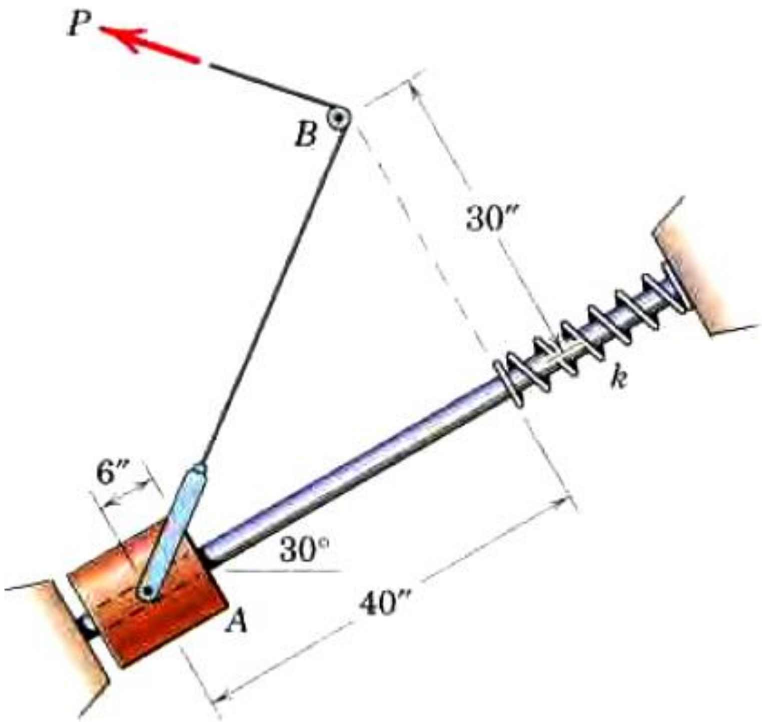
$$v^2 = 5.39 \quad \rightarrow \quad v = 2.32\, m/s$$

لغزنده A به وزن 30 lb از حالت سکون در وضعیتی مطابق شکل رها می شود و با اصطکاک قابل چشم پوشی ، تحت اثر نیروی P=50 lbثابت که به کابل وارد می شود ، رو به بالای میله ثابت با شیب 30° لغزش می کند. مطلوب است محاسبه سفتی فنر بطوری که تغییر طول ماکزیمم آن 6inشود. قرقره کوچک B ثابت است.



مسئله 3-110

لغزنده A به وزن 30 lb از حالت سکون در وضعیتی مطابق شکل رها می شود و با اصطکاک قابل چشم پوشی ، تحت اثر نیروی P=50 lbثابت که به کابل وارد می شود ، رو به بالای میله ثابت با شیب 30° لغزش می کند. مطلوب است محاسبه سفتی فنر بطوری که تغییر طول ماکزیمم آن 6inشود. قرقره کوچک B ثابت است.



حل :

$$U = \Delta T = 0$$

$$U_P = P\,\Delta L_{cable} = 50\times(\frac{50-30}{12}) = 83.33 \quad J$$

$$U_w = -W\Delta h = -30\times(\frac{40}{12}\sin 30^\circ) = -50 \quad J$$

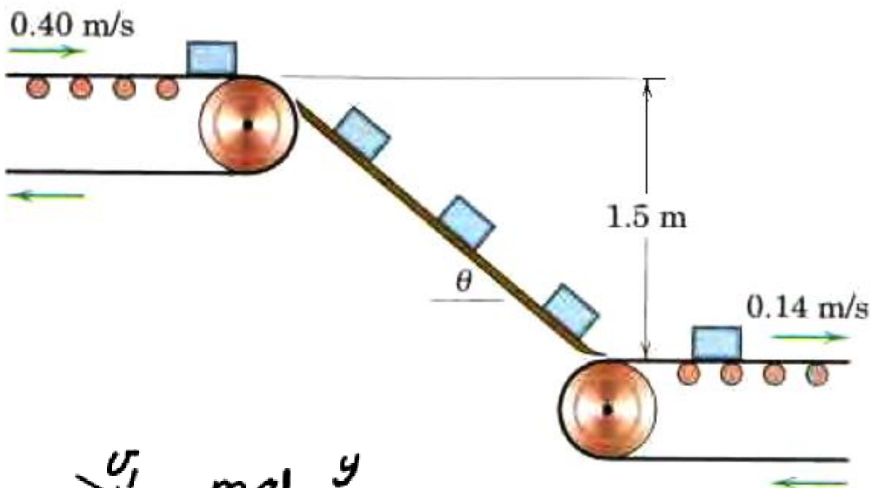
$$U_k = -\frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}k(\frac{6}{12})^2 = -0.125k \quad J$$

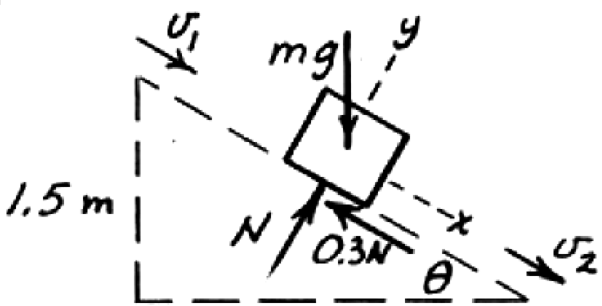
$$U = U_p + U_w + U_k = 0 \quad \rightarrow \quad k = 267\,lb/ft$$

مسئله 3-115

در یک سیستم تسمه نقاله ، قطعات فلزی کوچک با سرعت $0.4\ m/s$ از تسمه نقاله بالایی روی سطح شیب داری تخلیه می شوند. ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعات و سطح شیب دار 0.3 است. مطلوب است محاسبه زاویه θ که سطح شیب دار باید با امتداد افقی تشکیل دهد تا قطعات بدون لغزیدن ، به تسمه نقاله پایینی که با سرعت $0.14\ m/s$ در حرکت است ، منتقل شوند.

حل :





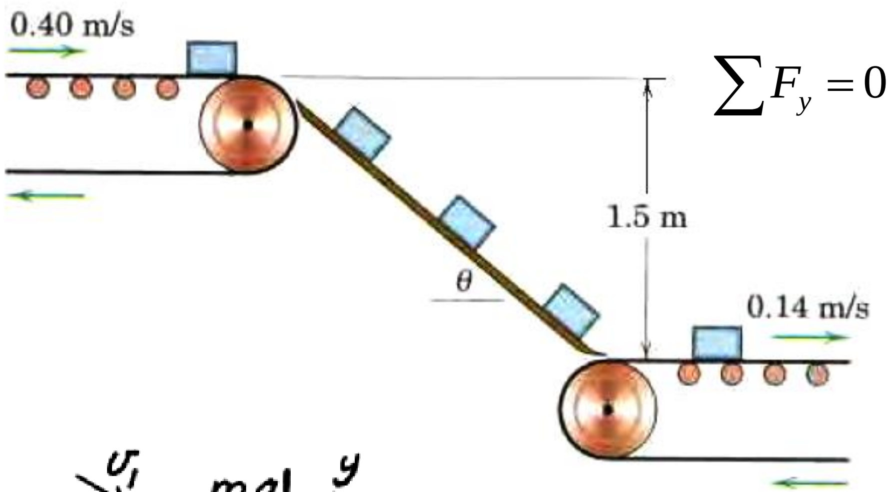
$v_1 = 0.40\ m/s$

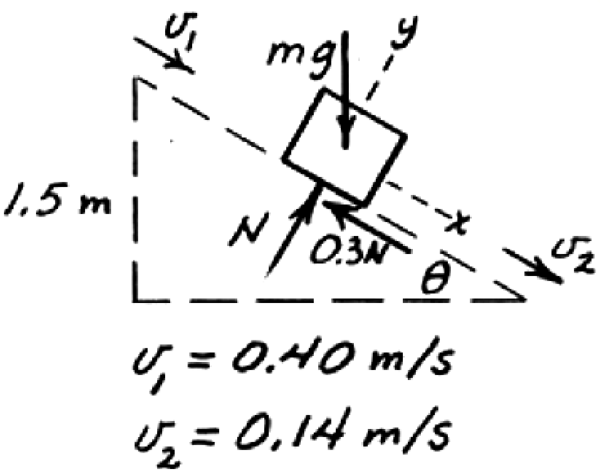
$v_2 = 0.14\ m/s$

مسئله 3-115

در یک سیستم تسمه نقاله ، قطعات فلزی کوچک با سرعت 0.4 m/s از تسمه نقاله بالایی روی سطح شیب داری تخلیه می شوند. ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعات و سطح شیب دار 0.3 است. مطلوب است محاسبه زاویه θ که سطح شیب دار باید با امتداد افقی تشکیل دهد تا قطعات بدون لغزیدن ، به تسمه نقاله پایینی که با سرعت 0.14 m/s در حرکت است ، منتقل شوند.

حل :





$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg\cos\theta$$

$$U = \Delta T$$

$$U = \left(mg\sin\theta - 0.3mg\cos\theta\right)\times\frac{1.5}{\sin\theta}$$

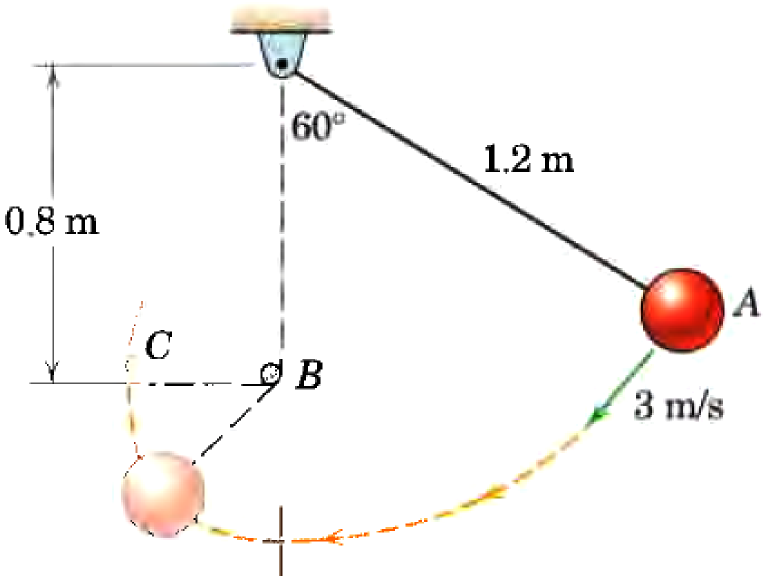
$$\Delta T = \frac{1}{2}m(0.14^2 - 0.4^2)$$

$$1.5\times 9.81\times\left(1-\frac{0.3}{\tan\theta}\right) = -0.0702$$

$$\tan\theta = 0.299 \quad \rightarrow \quad \theta = 16.62^\circ$$

گلوله ای با سرعت اولیه $3\ m/s$ از نقطه A رها می شودو در صفحه عمودی نوسان می کند. هنگامی که گلوله به پایین ترین نقطه مسیر خود می رسد ، طناب به میله واقع در نقطه B برخورد می کند و پس از آن گلوله کمانی مطابق شکل را می پیماید. مطلوب است محاسبه سرعت v_C گلوله هنگامی که از نقطه C می گذرد.

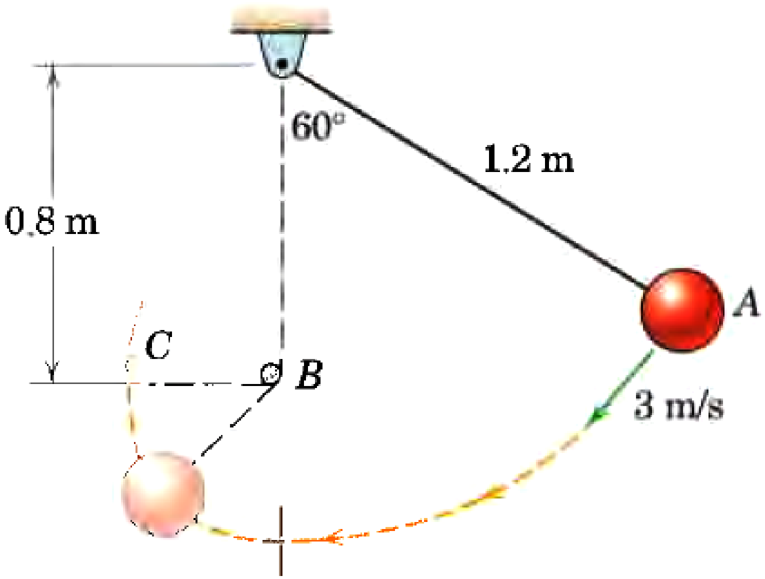
حل :



مسئله 3-126

گلوله ای با سرعت اولیه 3 m/s از نقطه A رها می شودو در صفحه عمودی نوسان می کند. هنگامی که گلوله به پایین ترین نقطه مسیر خود می رسد ، طناب به میله واقع در نقطه B برخورد می کند و پس از آن گلوله کمانی مطابق شکل را می پیماید. مطلوب است محاسبه سرعت vcگلوله هنگامی که از نقطه C می گذرد.

حل :



$$U_{A-C} = \Delta T$$

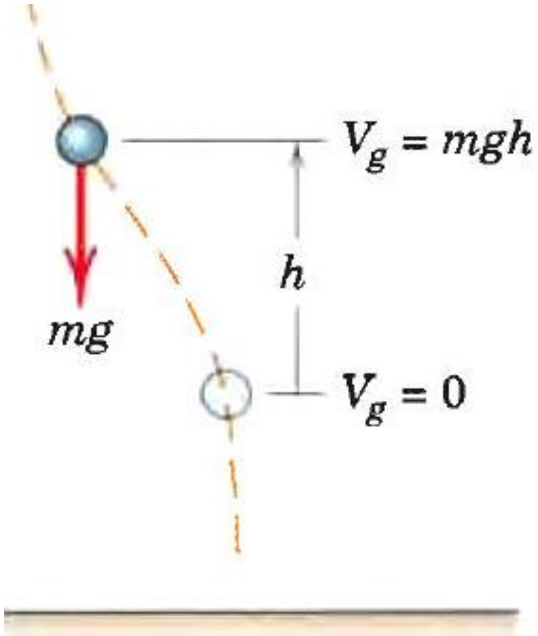
$$mg(0.8 - 1.2\cos 60^\circ) = \frac{1}{2} m(v_c^2 - v_A^2)$$

$$9.81 \times 0.2 = \frac{1}{2}(v_c^2 - 9)$$

$$v_c^2 = 12.92 \quad \rightarrow \quad v_c = 3.59\ m/s$$

انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل گرانشی



ابتدا حرکت ذره ای را در مجاورت سطح زمین ، که نیروی جاذبه گرانشی (وزن) mg ثابت است ، بررسی می کنیم.

$$V_g = mgh$$

در حالت کلی ، در هنگام رفتن ذره از یک ارتفاع $h=h_1$ به ارتفاع بالاتر $h=h_2$،

تغییر انرژی پتانسیل را می توان چنین نوشت :

$$\Delta V_g = mg\left(h_2 - h_1\right) = mg\Delta h$$

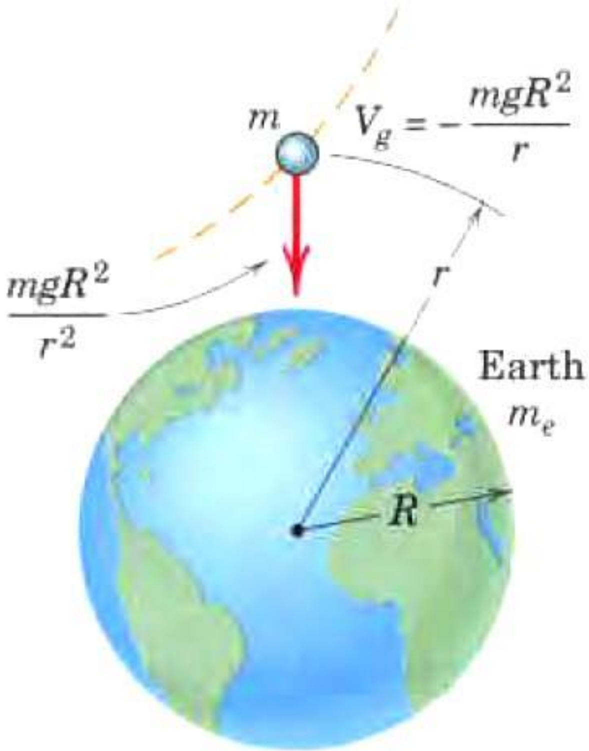
کار متناظری که نیروی گرانشی روی ذره انجام می دهد برابر $-mg\Delta h$ است.

بنابراین کاری که توسط نیروی گرانشی انجام می شود منفی تغییر انرژی پتانسیل است.

$$\boxed{U_g = -\Delta V_g}$$

انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل گرانشی



وقتی با تغییرات زیاد ارتفاع سروکار داشته باشیم ، نیروی گرانشی دیگر ثابت نیست

$$\frac{Gmm_e}{r^2} = \frac{mgR^2}{r^2}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} mgR^2 \frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \left(V_g\right)_2 - \left(V_g\right)_1$$

$$\boxed{V_g = -\frac{mgR^2}{r}} \longrightarrow \Delta V_g = mgR^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

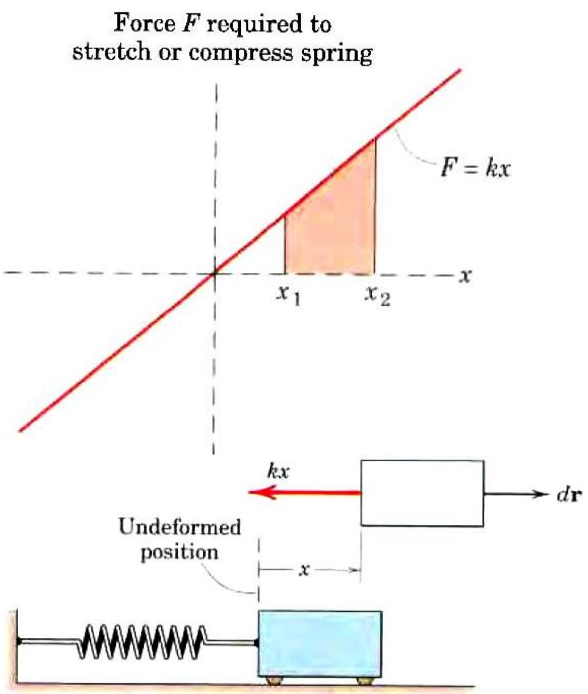
باز هم این تغییر در انرژی پتانسیل ، منفی کار انجام شده توسط نیروی گرانشی است.

مشاهده می شود که انرژی پتانسیل گرانشی ذره ای مفروض ، فقط به مکان h یا r آن وابسته است و به مسیری که در رسیدن به این مکان می پیماید وابستگی ندارد.

انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل کشسان

کاری که روی فنر انجام می شود تا آن را تغییر شکل دهد ، در آن ذخیره می شود و این انرژی ذخیره شده را انرژی پتانسیل کشسان گویند.



این انرژی بصورت کاری که فنر روی جسم متصل به سر متحرک آن ، در حین رها شدن تغییر شکل ، انجام می دهد قابل بازیابی است.

$$F = k\,x$$

$$V_e = \int_0^x k\,x\,dx = \frac{1}{2}k\,x^2$$

اگر تغییر شکل فنر ، خواه کششی و خواه فشاری ، در طول حرکت از x1 به x2 افزایش یابد ، آنگاه تغییر انرژی پتانسیل فنر برابر است با مقدار نهایی آن منهای مقدار اولیه آن ، یا

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

که مثبت است.

برعکس ، اگر تغییرشکل فنر در طول حرکت کاهش یابد ، آنگاه تغییر انرژی پتانسیل فنر منفی می شود.

در اینجا نیز ، کار U را که فنر روی جسم انجام می دهد ، با ΔVe- ، منفی تغییر انرژی پتانسیل فنر برابر خواهد بود.

$$\boxed{U_e = -\Delta V_e}$$

معادله کار-انرژی

$$U_{1-2} = \Delta T$$

$$U_{1-2} = U'_{1-2} + U_e + U_g$$

$$U_{1-2} = U'_{1-2} + \left(-\Delta V_e\right) + \left(-\Delta V_g\right)$$

$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V}$$

که در آن ΔV تغییر انرژی پتانسیل کل (گرانشی به علاوه کشسان) است.

استفاده از این معادله ساده تر است ، زیرا کار نیروهای گرانش و فنر با تمرکز روی وضعیت های نهایی ذره و طول های نهایی فنر کشسان ، در محاسبات منظور می شود. مسیری که بین این وضعیت های نهایی طی می شود تاثیری در محاسبه ΔV نخواهد داشت.

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_1 + V_1 + U'_{1-2} = T_2 + V_2}$$

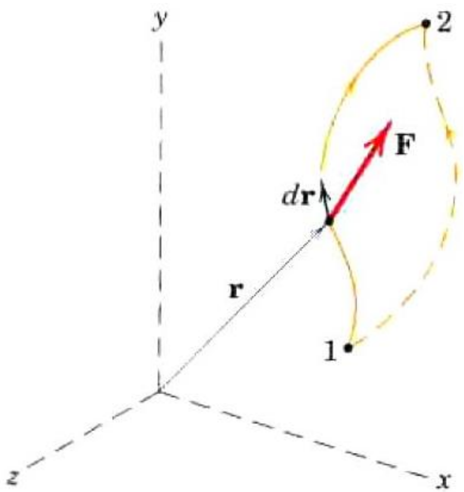
اگر نیروی خارجی وارد بر سیستم صفر باشد ، آنگاه انرژی مکانیکی کل (جمع انرژی های جنبشی و پتانسیل) ثابت خواهد ماند :

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_1 = E_2}$$

قانون پایستگی انرژی

میدان های نیروی پایستار

دیدیم کاری که در مقابله با نیروی گرانشی یا نیروی کشسان انجام می شود ، فقط به تغییر خالص مکان وابسته است و به مسیر رسیده به مکان جدید وابسته نیست. نیروهایی با این مشخصه ها به میدان های نیروی پایستار مربوط اند.



میدان نیرویی را در نظر بگیرید که در آن نیروی $\mathbf{F}$ تابعی از مختصات است.

$$U = \int_1^2 \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

انتگرال فوق در حالت کلی به مسیر پیموده شده بین هر دو نقطه 1 و 2 در فضا وابسته است.

اما اگر $\mathbf{F}.d\mathbf{r}$ **دیفرانسیل کامل** تابع اسکالر V باشد ، آنگاه :

$$U_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} -dV = -(V_2 - V_1)$$

که فقط به نقاط انتهایی حرکت وابسته است و از مسیر حرکت مستقل است.

میدان های نیروی پایستار

اگر V موجود باشد ، آنگاه تغییر جزیی V عبارت است از

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

از طرفی :

$$-dV = \mathbf{F}.d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

از مقایسه دو معادله نتیجه می شود :

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

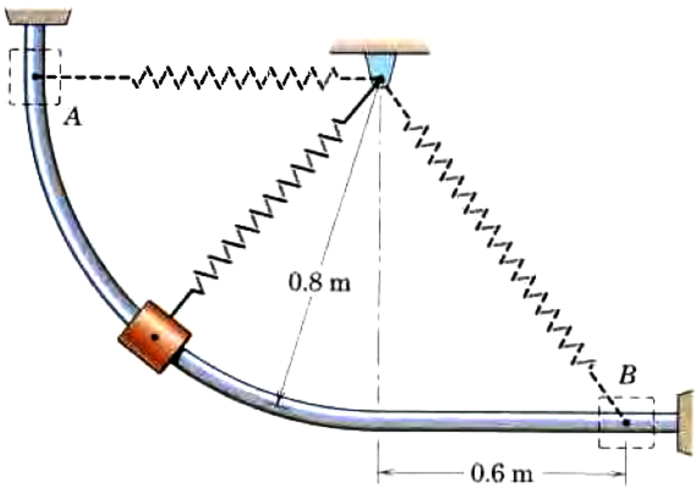
عملگر برداری "دل" :

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = -\nabla V$$

عملگر V را **تابع پتانسیل** می نامند و ∇V **گرادیان تابع پتانسیل** است.

طول فنر در حالت آزاد $0.4\ m$ و سفتی آن $200\ N/m$ است. لغزنده $3\ kg$ و فنر متصل به آن از حالت سکون در A رها می شوند و در صفحه عمودی به حرکت در می آیند. مطلوب است محاسبه سرعت v لغزنده در غیاب اصطکاک ، هنگامی که به نقطه B می رسد.

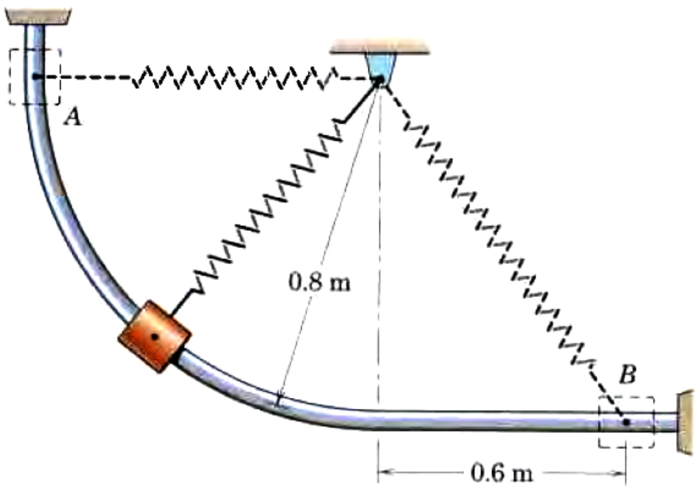
حل :



مسئله 3-147

طول فنر در حالت آزاد 0.4 m و سفتی آن 200 N/m است. لغزنده 3 kg و فنر متصل به آن از حالت سکون در A رها می شوند و در صفحه عمودی به حرکت در می آیند. مطلوب است محاسبه سرعت υ لغزنده در غیاب اصطکاک ، هنگامی که به نقطه B می رسد.

حل :



$$U'_{1-2} = 0 = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

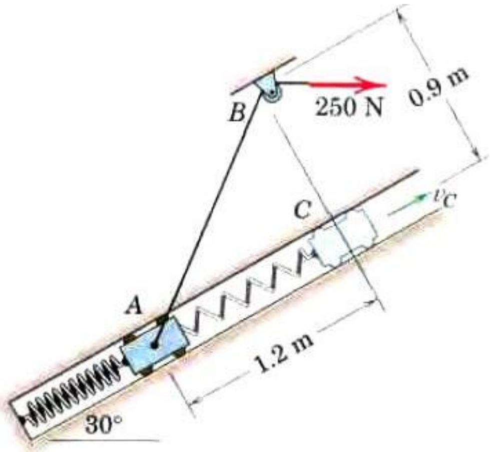
$$\Delta T = \frac{1}{2} \times 3 \times (v^2 - 0)$$

$$\Delta V_g = 3 \times 9.81 \times (-0.8) = -23.5 \ J$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} \times 200 \times \left((\sqrt{0.8^2 + 0.6^2} - 0.4)^2 - (0.8 - 0.4)^2 \right) = 20 \ J$$

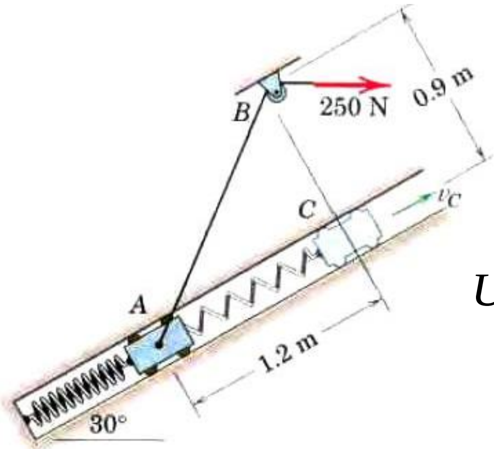
$$0 = \frac{3}{2} v^2 - 23.5 + 20 \qquad \rightarrow \qquad v = 1.537 \ m/s$$

لغزنده 10 kg با اصطکاک قابل چشم پوشی روی راهنمای شیاردار بطرف بالا لغزش می کند. سفتی فنر متصل به لغزنده 60 N/m است و در وضعیت A که لغزنده از حالت سکون رها می شود ، به اندازه 0.6 m کشیده شده است. نیروی 250 N ثابت است و از مقاومت ناچیز قرقره در برابر حرکت طناب چشم پوشی می کنیم. مطلوب است محاسبه سرعت لغزنده در هنگام عبور از نقطه C



مسئله نمونه 3-17

لغزنده $10\ kg$ با اصطکاک قابل چشم پوشی روی راهنمای شیاردار بطرف بالا لغزش می کند. سفتی فنر متصل به لغزنده 60 N/mاست و در وضعیت A که لغزنده از حالت سکون رها می شود ، به اندازه $0.6\ m$ کشیده شده است. نیروی $250\ N$ ثابت است و از مقاومت ناچیز قرقره در برابر حرکت طناب چشم پوشی می کنیم. مطلوب است محاسبه سرعت لغزنده در هنگام عبور از نقطه C



حل : لغزنده ، طناب و فنر متصل به لغزنده را به عنوان یک سیستم تحلیل می کنیم.

تنها نیروی غیرپتانسیلی که روی این سیستم کار انجام می دهد کشش $250\ N$ وارد بر طناب است

بنابراین کار این نیرو برابر است با :

$$U'_{1-2} = F\Delta L = 250\times\left(\sqrt{1.2^2+0.9^2}-0.9\right)$$

$$= 250\times 0.6 = 150\ J$$

اگر سطح مبنا را در نقطه تعریف کنیم ، انرژی پتانسیل گرانشی اولیه و نهایی برابر است با :

$$V_{g1} = 0$$

$$V_{g2} = mgh = 10\times 9.81\times\left(1.2\sin 30^\circ\right) = 58.9\ J$$

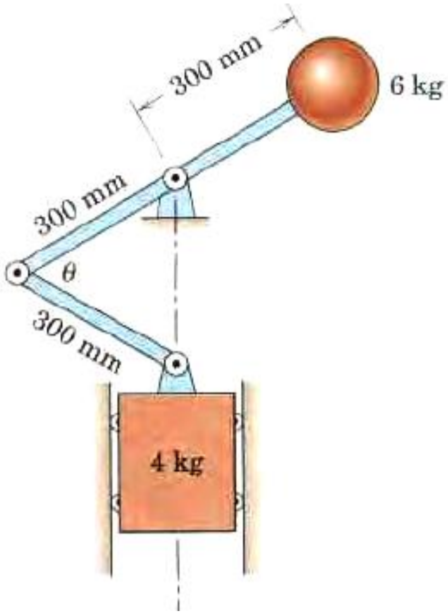
$$V_{e1} = \frac{1}{2}k\,x_A^2 = \frac{1}{2}\times 60\times 0.6^2 = 10.8\ J$$

$$V_{e2} = \frac{1}{2}k\,x_C^2 = \frac{1}{2}\times 60\times\left(0.6+1.2\right)^2 = 97.2\ J$$

$$T_1 + V_1 + U'_{1-2} = T_2 + V_2 \quad\Rightarrow\quad 0+0+10.8+150 = \frac{1}{2}(10)v_C^2 + 58.9 + 97.2$$

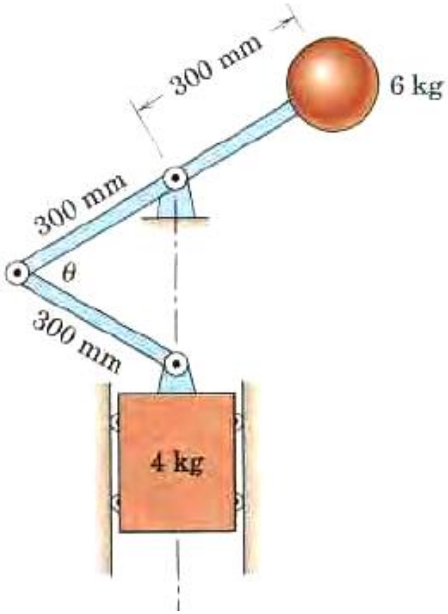
$$\searrow v_C = 0.974\ m/s$$

هنگامیکه مکانیزمی مطابق شکل از حالت سکوندر وضعیت $\theta=60^{o}$ رها می شود ، گاری 4 kg پایین می آید و کره 6 kg بالا می رود. مطلوب است تعیین سرعت v کره در هنگامیکه $\theta=180^{o}$. از جرم میله ها چشم پوشی کنید.



مسئله 3-161

هنگامیکه مکانیزمی مطابق شکل از حالت سکون در وضعیت $\theta=60^{\circ}$ رها می شود ، گاری 4 kg پایین می آید و کره 6 kg بالا می رود. مطلوب است تعیین سرعت v کره در هنگامیکه $\theta=180^{\circ}$. از جرم میله ها چشم پوشی کنید.



حل : به غیر از نیروی وزن ، هیچ نیروی خارجی وجود ندارد. بنابراین :

$$\Delta E = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta T + \Delta V = 0$$

$$\Delta V_{4kg} = mg(\Delta h) = 4\times 9.81\times(-0.3) = -11.772 \ J$$

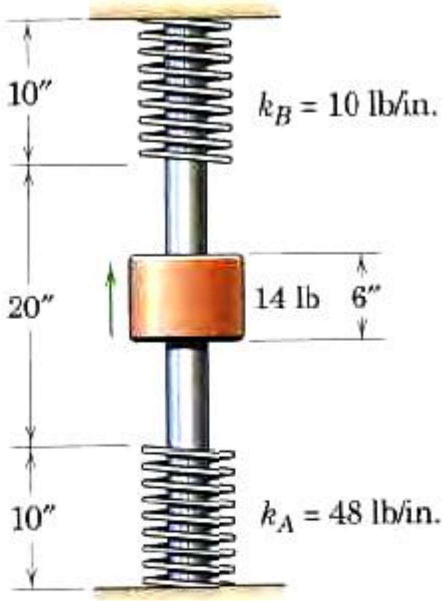
$$\Delta V_{6kg} = mg(\Delta h) = 6\times 9.81\times 0.3(1-\sin 30^{\circ}) = 8.829 \ J$$

$$\Delta T_{4kg} = 0$$

$$\Delta T_{6kg} = \frac{1}{2}(6)V^2 = 3V^2$$

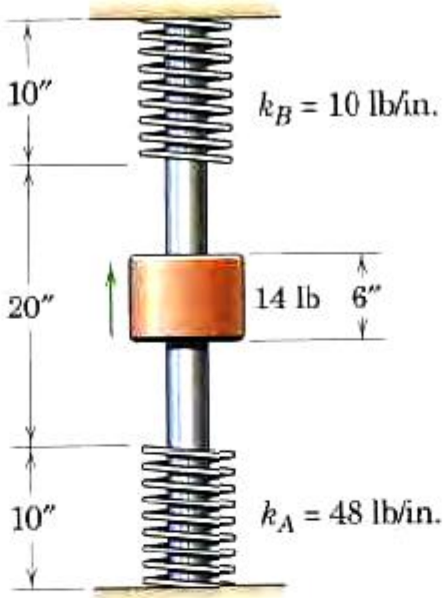
$$3V^2 - 11.772 + 8.829 = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 0.99 \ m/s$$

در وضعیتی مطابق شکل ، فنرها تغییرشکل نیافته اند. لغزنده به وزن 14 lb از حالت سکون در وضعیتی که در آن فنر پایینی به اندازه 5 inفشرده شده است رها می شود. مطلوب است تعیین فشردگی حداکثر XB فنر بالایی.



مسئله 3-162

در وضعیتی مطابق شکل ، فنرها تغییرشکل نیافته اند. لغزنده به وزن 14 lb از حالت سکون در وضعیتی که در آن فنر پایینی به اندازه 5 inفشرده شده است رها می شود. مطلوب است تعیین فشردگی حداکثر XB فنر بالایی.



حل : به غیر از نیروی فنر و نیروی وزن ، هیچ نیروی خارجی وجود ندارد. بنابراین :

$$E_A = E_B \quad \Rightarrow \quad T_A + V_A = T_B + V_B$$

$$T_A = 0 \qquad T_B = 0$$

$$V_A = \frac{1}{2}k_A x_A^2 = \frac{1}{2}(48\times12)\left(\frac{5}{12}\right)^2$$

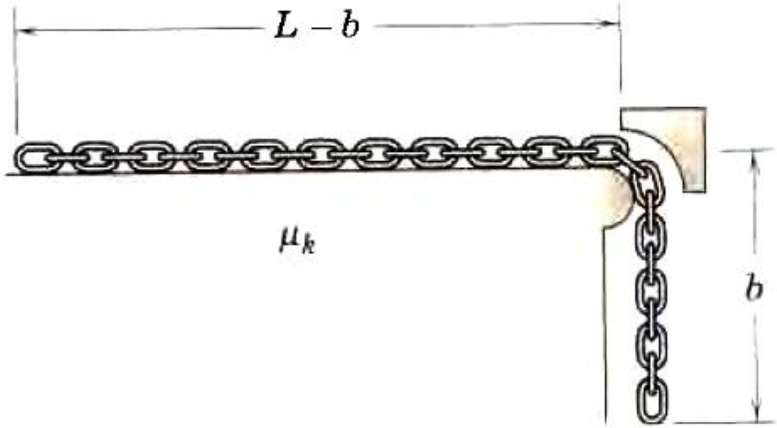
$$V_B = mg(\frac{x_A + (20-6) + x_B}{12}) + \frac{1}{2}k_B\left(\frac{x_B}{12}\right)^2 = 14(\frac{5+14+x_B}{12}) + \frac{1}{2}(10\times12)\left(\frac{x_B}{12}\right)^2$$

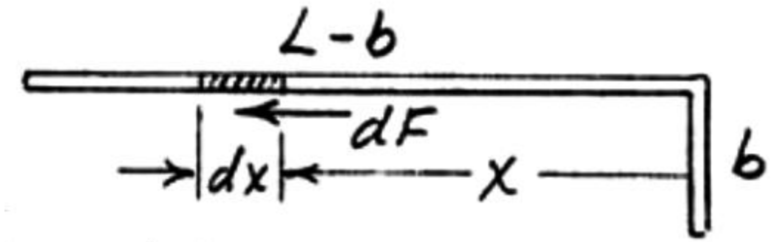
$$\frac{1}{2}(48\times12)\left(\frac{5}{12}\right)^2 = 14(\frac{5+14+x_B}{12}) + \frac{1}{2}(10\times12)\left(\frac{x_B}{12}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 0.4167x_B^2 + 1.167x_B = 27.83$$

با حل این معادله درجه دوم نتیجه می شود :

$$x_B = 6.89\ in$$

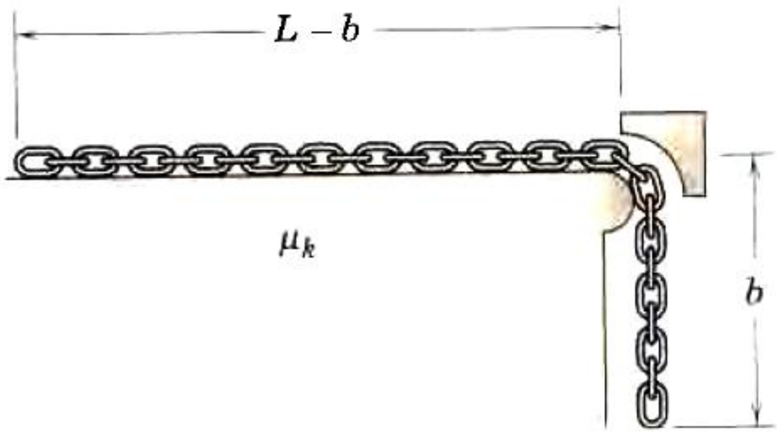
زنجیر نشان داده شده از حالت سکون به حرکت در می آید . تعداد حلقه های آویزان برای راه انداختن حرکت و غلبه بر اصطکاک باقیمانده زنجیر و سطح نگه دارنده کافی است. V سرعت زنجیر را در هنگام ترک آخرین حلقه بدست آورید:

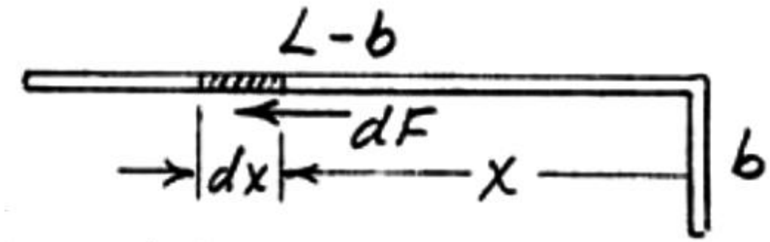




مسئله 3-179

زنجیر نشان داده شده از حالت سکون به حرکت در می آید . تعداد حلقه های آویزان برای راه انداختن حرکت و غلبه بر اصطکاک باقیمانده زنجیر و سطح نگه دارنده کافی است. V سرعت زنجیر را در هنگام ترک آخرین حلقه بدست آورید:





$$U = \Delta T + \Delta V_g$$

$$-\frac{\mu_k \rho g}{2}(L-b)^2 = \frac{1}{2}(\rho L)V^2 - \rho g (L-b)(\frac{L+b}{2})$$

$$V^2 = g(1-\frac{b}{L})\left(-\mu_k (L-b) + L + b\right)$$

برای شروع حرکت ، باید وزن قسمت b بر اصطکاک غلبه نماید:

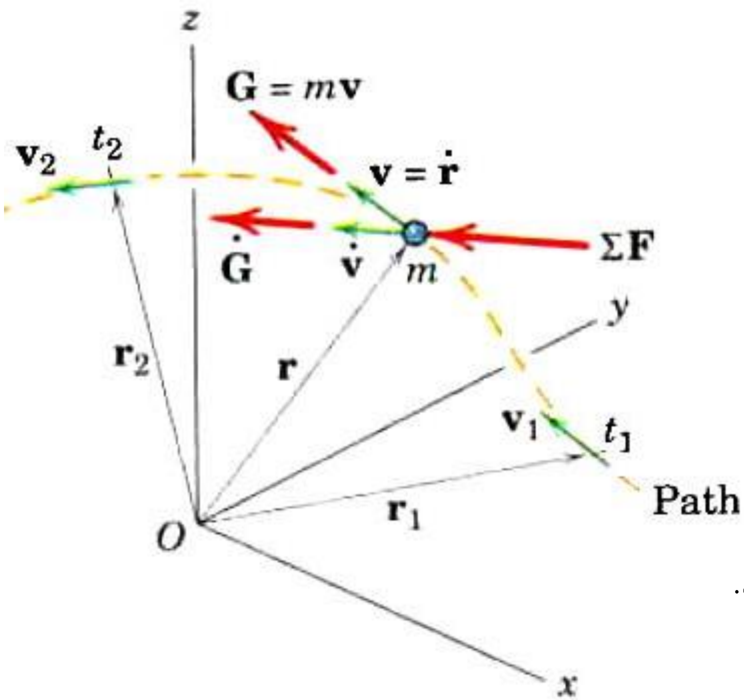
$$\rho b g = \mu_k \rho (L-b) g \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\mu_k L}{1+\mu_k}$$

با جایگزینی b در رابطه سرعت خواهیم داشت :

$$V^2 = g(1-\frac{\mu_k}{1+\mu_k})\left(-\mu_k (L - \frac{\mu_k L}{1+\mu_k}) + L + \frac{\mu_k L}{1+\mu_k}\right) = \frac{gL}{1+\mu_k} \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{gL}{1+\mu_k}}$$

ج) ضربه و اندازه حرکت

ضربه خطی و اندازه حرکت خطی



$$\sum F = m\dot{v} = \frac{d}{dt}(mv) \longrightarrow \boxed{\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}}$$

$\mathbf{G} = m\mathbf{v} \leftarrow$ حاصلضرب جرم و سرعت بصورت **اندازه حرکت خطی** ذره تعریف می شود.

$\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}} \leftarrow$ برایند همه نیروهای وارد بر هر ذره برابر است با آهنگ زمانی تغییر اندازه حرکت خطی آن.

رابطه فوق یک معادله برداری بوده و تا زمانی معتبر است که جرم ذره با زمان تغییر نمی کند.

$$\sum F_x = \dot{G}_x \qquad \sum F_y = \dot{G}_y \qquad \sum F_z = \dot{G}_z$$

معادلات فوق را می توان بصورت مستقل بکار برد.

اصل ضربه- اندازه حرکت خطی

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} \quad \rightarrow \quad \sum \mathbf{F}\, dt = d\mathbf{G}$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه فوق خواهیم داشت :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F}\, dt = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 = \Delta \mathbf{G}$$

$$\mathbf{G}_1 = m\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{G}_2 = m\mathbf{v}_2$$

حاصلضرب نیرو و زمان بصورت **ضربه خطی** نیرو تعریف می شود.

به موجب معادله فوق ، ضربه خطی کل وارد بر m با تغییر متناظر در اندازه حرکت خطی m برابر است.

$$\boxed{\mathbf{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{F}\, dt = \mathbf{G}_2} \quad \Rightarrow$$

$$m(v_1)_x + \int_{t_1}^{t_2} \sum F_x\, dt = m(v_2)_x$$

$$m(v_1)_y + \int_{t_1}^{t_2} \sum F_y\, dt = m(v_2)_y$$

$$m(v_1)_z + \int_{t_1}^{t_2} \sum F_z\, dt = m(v_2)_z$$

این سه معادله اسکالر ضربه-اندازه حرکت کاملا از یکدیگر مستقل اند.

پایستگی اندازه حرکت خطی

هرگاه برایند نیروهای وارد بر یک ذره در طی یک فاصله زمانی صفر باشد ، آنگاه اندازه حرکت خطی $\mathbf{G}$ ثابت می ماند.

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F}\, dt = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta \mathbf{G} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$$

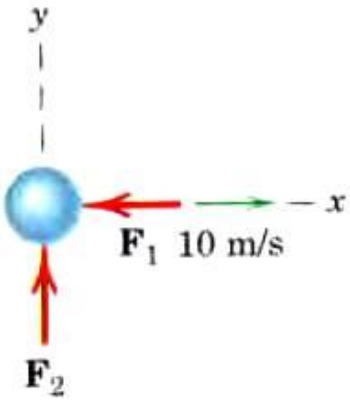
در این حالت می گویند اندازه حرکت خطی ذره پایسته است.

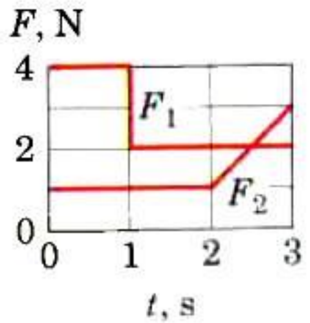
ممکن است اندازه حرکت خطی در یک امتداد مختصات ، مانند x پایسته باشد ، اما معلوم نیست در امتدادهای y یا z هم پایسته باشد.

اصل پایستگی اندازه حرکت خطی :

$$\boxed{\Delta \mathbf{G} = 0 \qquad \text{or} \qquad \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2}$$

سرعت ذره ای به جرم $0.5\ kg$ در زمان $t=0$ برابر $10\ m/s$ در امتداد x است. نیروهای $F1$ و $F2$ بر ذره وارد می شوند و اندازه های آن ها ، طبق نمودار ، با زمان تغییر می کند. مطلوب است تعیین سرعت $v2$ ذره در پایان فاصله زمانی$3s$. حرکت در صفحه افقی $x\text{-}y$انجام می شود.

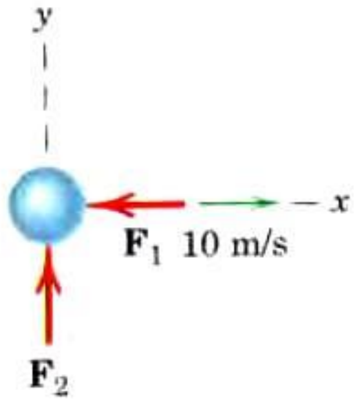


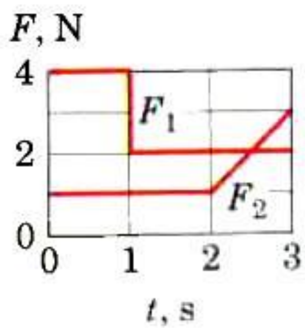


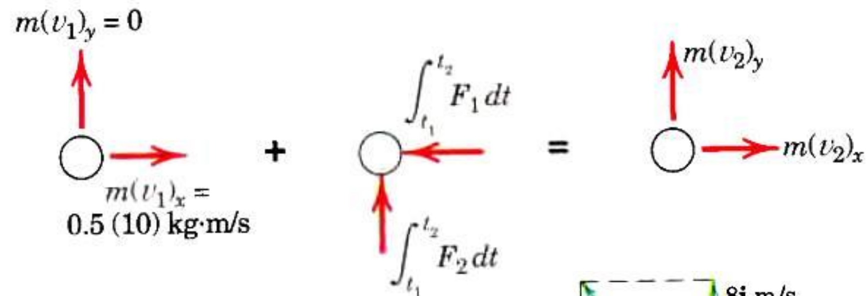
مسئله نمونه 3-21

سرعت ذره ای به جرم 0.5 kg در زمان t=0 برابر 10 m/s در امتداد x است. نیروهای F1 و F2 بر ذره وارد می شوند و اندازه های آن ها ، طبق نمودار ، با زمان تغییر می کند. مطلوب است تعیین سرعت v2 ذره در پایان فاصله زمانی3s . حرکت در صفحه افقی x-yانجام می شود.

حل : ابتدا نمودارهای ضربه-اندازه حرکت را ترسیم می کنیم.





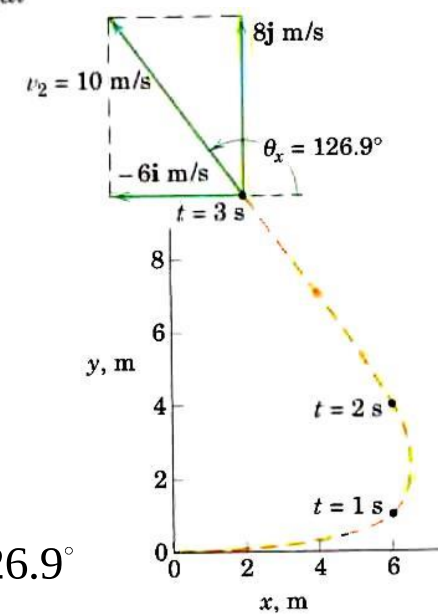


$$m(v_1)_x + \int_{t_1}^{t_2} \sum F_x\,dt = m(v_2)_x \quad \rightarrow \quad 0.5(10) - [8] = 0.5(v_2)_x$$

$$\rightarrow \quad (v_2)_x = -6\ m/s$$

$$m(v_1)_y + \int_{t_1}^{t_2} \sum F_y\,dt = m(v_2)_y \quad \rightarrow \quad 0.5(0) + [4] = 0.5(v_2)_y$$

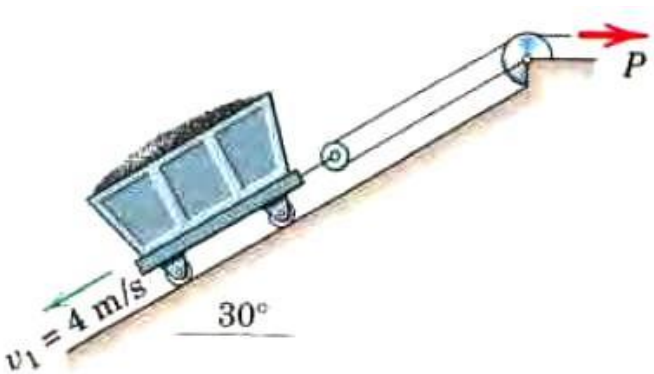
$$\rightarrow \quad (v_2)_y = 8\ m/s$$

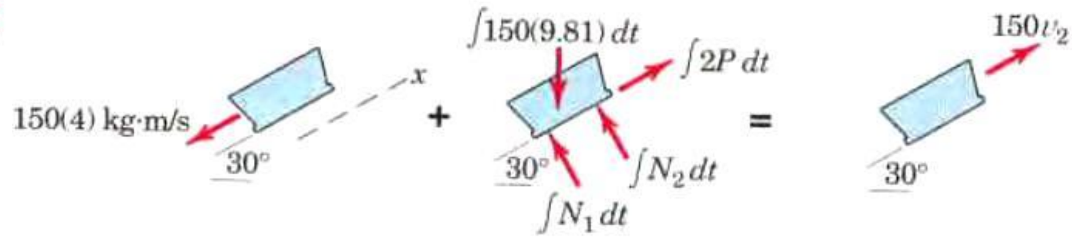


$$\mathbf{v}_2 = -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} \quad \rightarrow \quad v_2 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ m/s \qquad \theta_x = \tan^{-1}\left(\frac{8}{-6}\right) = 126.9^\circ$$

واگن 150 kg با سرعت 4 m/s از سطح شیب دار پایین می آید که نیروی P در زمان t=0، مطابق شکل بر کابل وارد می شود. نیروی P بطور یکنواخت با زمان افزایش می یابد تا در زمان t=4 s به 600 N می رسد و پس از آن ثابت می ماند. مطلوب است محاسبه الف) زمان ´t که جهت حرکت واگن معکوس می شود و ب) سرعت v واگن در زمان t=8 s. واگن را ذره فرض کنید.

حل :

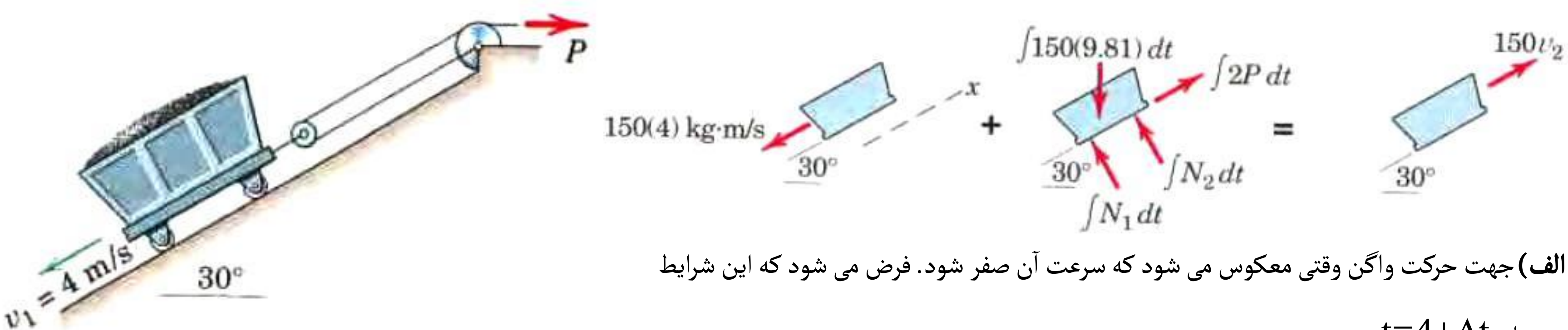




مسئله نمونه 3-22

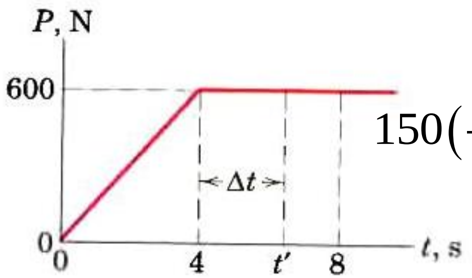
واگن 150 kg با سرعت 4 m/s از سطح شیب دار پایین می آید که نیروی P در زمان t=0، مطابق شکل بر کابل وارد می شود. نیروی P بطور یکنواخت با زمان افزایش می یابد تا در زمان t=4 s به 600 N می رسد و پس از آن ثابت می ماند. مطلوب است محاسبه الف) زمان ´t که جهت حرکت واگن معکوس می شود و ب) سرعت v واگن در زمان t=8 s. واگن را ذره فرض کنید.

حل :



الف) جهت حرکت واگن وقتی معکوس می شود که سرعت آن صفر شود. فرض می شود که این شرایط در زمان t=4+Δt روی می دهد.

$$m(v_1)_x + \int \sum F_x \, dt = m(v_2)_x$$



$$150(-4) + \frac{1}{2}(4)(2\times 600) + (2\times 600)\Delta t - 150(9.81)\sin 30^\circ (4+\Delta t) = 150(0)$$

$$\Delta t = 2.46\ s \quad \rightarrow \quad t' = 4 + 2.46 = 6.46\ s$$

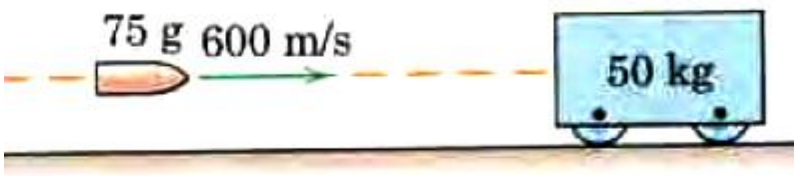
ب)

$$m(v_1)_x + \int \sum F_x \, dt = m(v_2)_x$$

$$150(-4) + \frac{1}{2}(4)(2\times 600) + 4\times(2\times 600) - 150(9.81)\sin 30^\circ (8) = 150(v_2)_x$$

$$(v_2)_x = 4.76\ m/s$$

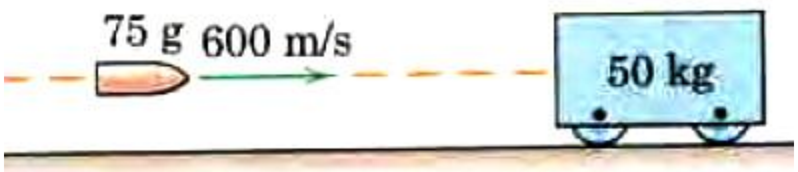
پرتابه ای 75 kg که با سرعت 600 m/s در حرکت است به قطعه 50 kg برخورد می کند و در آن فرو می رود. قطعه ابتدا ساکن است. مطلوب است محاسبه اتلاف انرژی در حین برخورد. جواب را برحسب مقدار مطلق $|\Delta E|$ و به صورت درصد n انرژی اولیه سیستم ، E ، بیان کنید.



مسئله 187-3

پرتابه ای 75 kg که با سرعت 600 m/s در حرکت است به قطعه 50 kg برخورد می کند و در آن فرو می رود. قطعه ابتدا ساکن است. مطلوب است محاسبه اتلاف انرژی در حین برخورد. جواب را برحسب مقدار مطلق $|\Delta E|$ و به صورت درصد n انرژی اولیه سیستم، E، بیان کنید.

حل : با توجه به پایستگی اندازه حرکت خطی :



$$G_1 = G_2 \rightarrow 0.075 \times 600 = (50 + 0.075) v_2 \Rightarrow v_2 = 0.899\ m/s$$

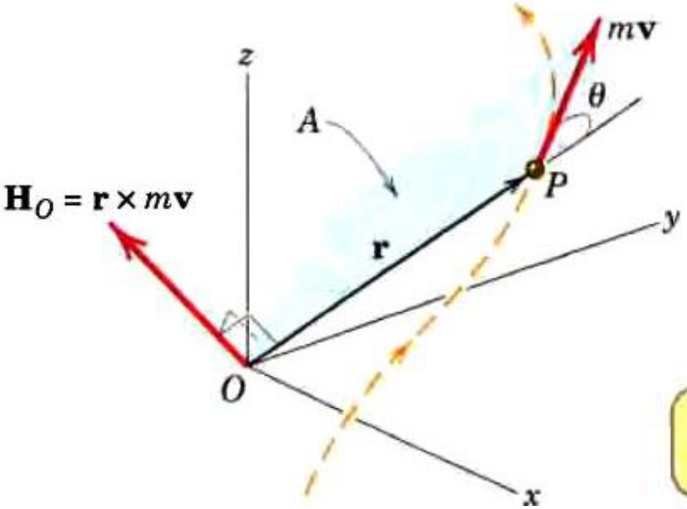
انرژی اولیه سیستم :
$$T_1 = \frac{1}{2}(0.075)(600)^2 = 13500\ J$$

انرژی نهایی سیستم :
$$T_2 = \frac{1}{2}(50.075)(0.899)^2 = 220\ J$$

مقدار اتلاف انرژی :
$$|\Delta E| = E_1 - E_2 = 13500 - 20.2 = 13480\ J$$

$$n = \frac{|\Delta E|}{T_1} = \frac{13480}{13500} \times 100 = 99.9\%$$

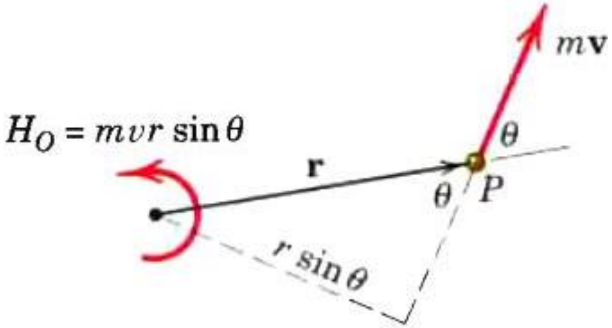
ضربه زاویه ای و و اندازه حرکت زاویه ای



بردار لنگر اندازه حرکت خطی mv حول مبدا O

بصورت **اندازه حرکت زاویه ای** Ho ذره P حول مبدا O تعریف می شود :

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$



View in plane A

بنابراین اندازه حرکت زاویه ای عمود بر صفحه A است که با **r** و **v** تعریف می شود.

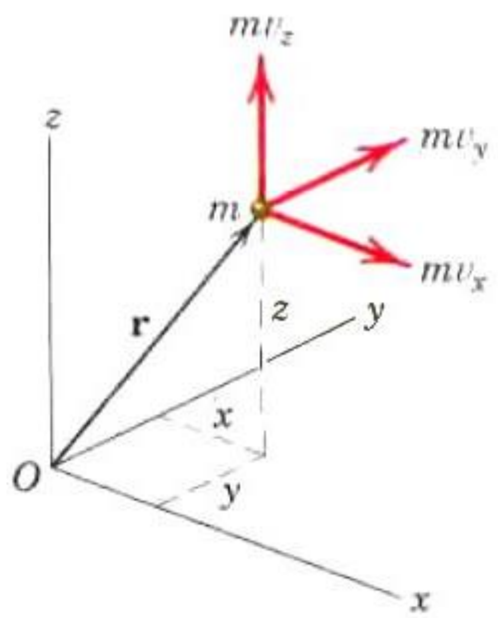
$$H_O = m\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$H_x = m\left(v_z y - v_y z\right)$$

$$H_y = m\left(v_x z - v_z x\right)$$

$$H_z = m\left(v_y x - v_x y\right)$$



آهنگ تغییر اندازه حرکت زاویه ای

$$\boxed{\mathbf{v}\times m\mathbf{v}=0}$$

$$H_O=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}\;\rightarrow\;\dot{H}_O=\dot{\mathbf{r}}\times m\mathbf{v}+\mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{v}}$$

از طرفی :

$$\sum\mathbf{M}_O=\mathbf{r}\times\sum\mathbf{F}=\mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{v}}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\Sigma\mathbf{M}_O=\dot{\mathbf{H}}_O}$$

لنگر همه نیروهای وارد بر جسم m حول نقطه ثابت O ، برابر است

با آهنگ زمانی تغییر اندازه حرکت زاویه ای m حول O

$$\sum M_{O_x}=\dot{H}_{O_x}$$

$$\sum M_{O_y}=\dot{H}_{O_y}$$

$$\sum M_{O_z}=\dot{H}_{O_z}$$

اصل ضربه-اندازه حرکت زاویه ای

معادله فوق رابطه لحظه ای بین لنگر و آهنگ زمانی تغییر اندازه حرکت زاویه ای را نشان می دهد.

برای بدست آوردن اثر لنگر بر اندازه حرکت زاویه ای ذره ، در فاصله زمانی متناهی ، از معادله فوق نسبت به زمان انتگرال می گیریم :

$$\sum\mathbf{M}_O\,dt=d\mathbf{H}_O\;\rightarrow\;\int_{t_1}^{t_2}\sum\mathbf{M}_O dt=\left(\mathbf{H}_O\right)_2-\left(\mathbf{H}_O\right)_1=\Delta\mathbf{H}_O$$

$$\sum \mathbf{M}_O \, dt = d\mathbf{H}_O \quad \rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1 = \Delta \mathbf{H}_O$$

اصل ضربه-اندازه حرکت زاویه ای

حاصلضرب لنگر و زمان ضربه زاویه ای نامیده می شود

$$(\mathbf{H}_O)_1 = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1$$

$$(\mathbf{H}_O)_2 = \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2$$

ضربه زاویه ای کل وارد بر m حول نقطه ثابت O ، برابر است با تغییر متناظر در اندازه حرکت زاویه ای m حول O

$$\boxed{(\mathbf{H}_O)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{M}_O \, dt = (\mathbf{H}_O)_2} \Rightarrow$$

اندازه حرکت زاویه ای نهایی = ضربه زاویه ای + اندازه حرکت زاویه ای اولیه

$$(\mathbf{H}_{O_x})_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum M_{O_x} dt = (\mathbf{H}_{O_x})_2 \quad \Rightarrow \quad m(v_z y - v_y z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum M_{O_x} dt = m(v_z y - v_y z)_2$$

عبارات مشابهی برای مولفه های y و z معادله ضربه-اندازه حرکت زاویه ای وجود دارد.

پایستگی اندازه حرکت زاویه ای

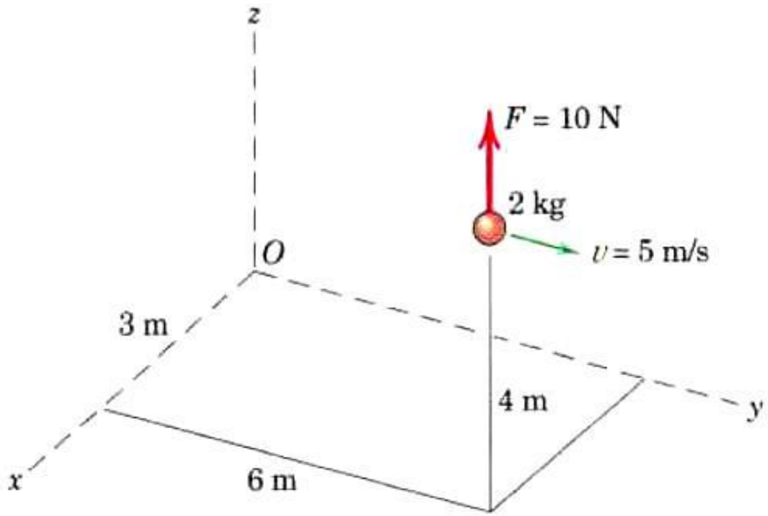
$$\sum M_O = \dot{H}_O$$

اگر لنگر برایند همه نیروهای وارد بر یک ذره در یک فاصله زمانی ، حول نقطه ثابت O **صفر** باشد ، معادله فوق ایجاب می کند که اندازه حرکت زاویه ای HO حول آن نقطه **ثابت** بماند.

$$\Delta \mathbf{H}_O = 0 \quad \text{or} \quad (\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

اصل پایستگی اندازه حرکت زاویه ای

مکان و سرعت کره ای کوچک مطابق شکل است و نیروی F بر آن وارد می شود. مطلوب است تعیین اندازه حرکت زاویه ای HO حول نقطه O و مشتق زمانی $\dot{H}_O$

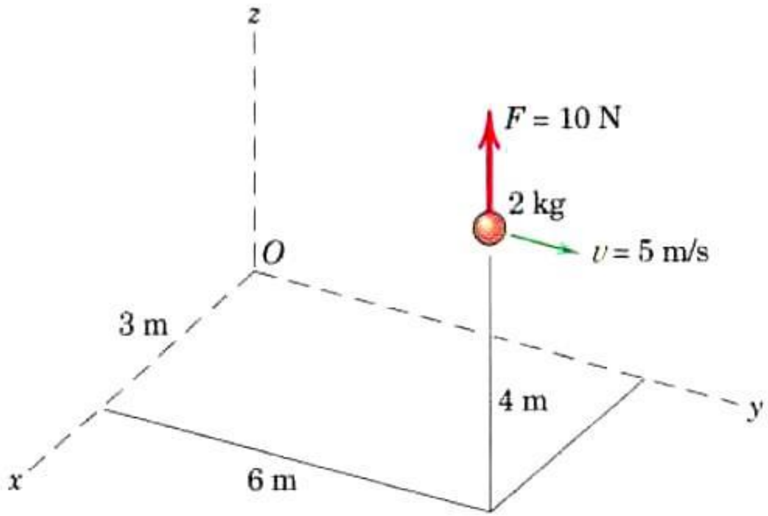


حل :

مسئله نمونه 3-24

مکان و سرعت کره ای کوچک مطابق شکل است و نیروی F بر آن وارد می شود. مطلوب است تعیین اندازه حرکت زاویه ای HO حول نقطه O و مشتق زمانی $\dot{H}_O$

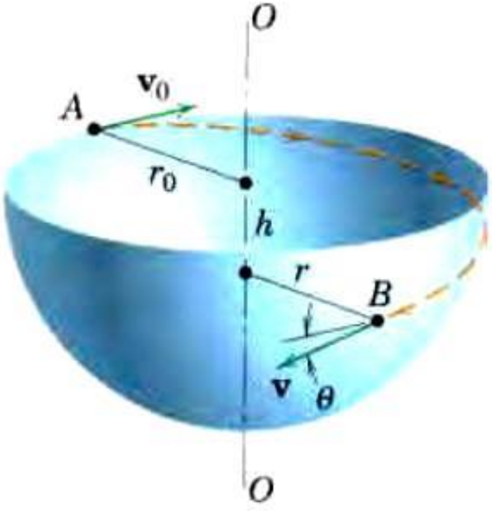
حل :



$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$
$$= (3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \times 2(5\mathbf{j})$$
$$= -40\mathbf{i} + 30\mathbf{k} \quad N.m/s$$

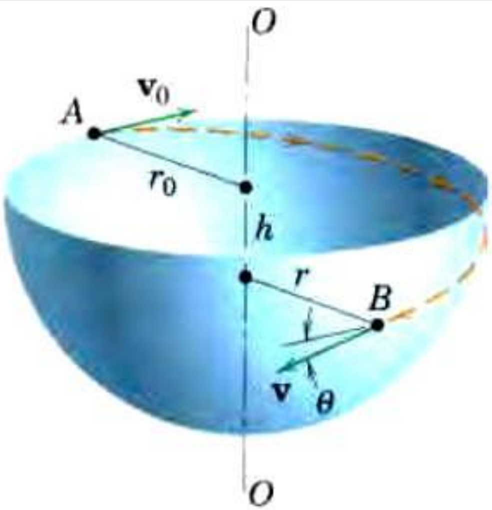
$$\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O$$
$$= \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$
$$= (3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \times 10\mathbf{k}$$
$$= 60\mathbf{i} - 30\mathbf{j} \quad N.m$$

ذره ای با جرم اندک ، سرعت اولیه v_0 مماس بر لبه افقی کاسه نیم کره ای صاف ، در شعاع r_0 از خط مرکزی عمودی آن دارد که در نقطه A روی شکل دیده می شود. وقتی ذره روی سطح کاسه می لغزد و از نقطه B به فاصله h در زیر نقطه A و به فاصله شعاعی r از خط مرکزی عمودی عبور می کند ، سرعت آن v ، با مماس افقی بر کاسه و گذرا از نقطه B زاویه θ تشکیل می دهد. θ را تعیین کنید.



مسئله نمونه 3-27

ذره ای با جرم اندک ، سرعت اولیه vo مماس بر لبه افقی کاسه نیم کره ای صاف ، در شعاع ro از خط مرکزی عمودی آن دارد که در نقطه Aروی شکل دیده می شود. وقتی ذره روی سطح کاسه می لغزد و از نقطه B به فاصله h در زیر نقطه A و به فاصله شعاعی r از خط مرکزی عمودی عبور می کند ، سرعت آن v ، با مماس افقی بر کاسه و گذرا از نقطه B زاویه θ تشکیل می دهد. θ را تعیین کنید.



حل : نیروهای وارد بر ذره عبارتند از نیروی وزن و نیروی واکنش قائم سطح بر ذره که هیچ یک حول محور لنگر ایجاد نمی کنند.

بنابراین اندازه حرکت زاویه ای حول این محور پایسته است :

$$(H_O)_1 = (H_O)_2 \quad \rightarrow \quad mv_0 r_0 = mvr\cos\theta \qquad \boxed{\mathrm{I}}$$

بعلاوه انرژی نیز پایسته است ، بطوری که :

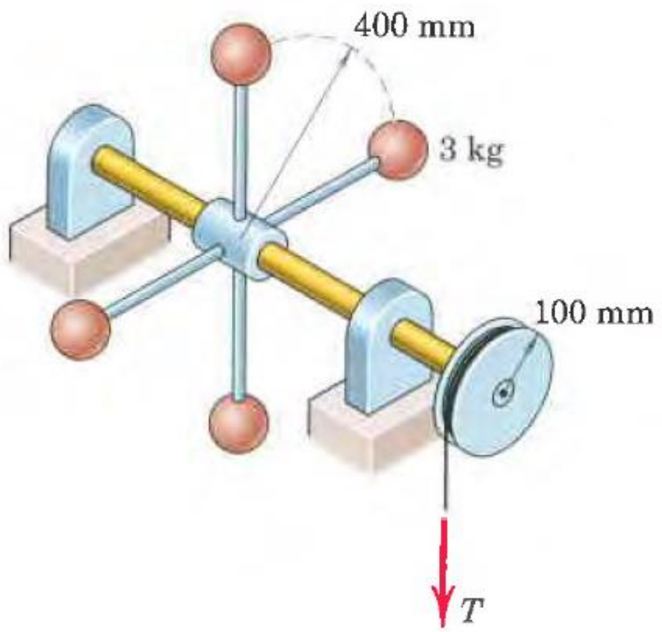
$$E_1 = E_2$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

$$\boxed{\mathrm{I}} \quad v_0 r_0 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\sqrt{r_0^2 - h^2}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}}\sqrt{1-\frac{h^2}{r_0^2}}}\right)$$

مجموعه ای مطابق شکل از حالت سکون به حرکت در می آید و تحت اثر نیروی T با اندازه 20 N که به مدت t ثانیه به نخ وارد می شود ، به سرعت زاویه ای 150 rpm می رسد. مطلوب است تعیین t.

از اصطکاک و همه جرمها چشم پوشی کنید ، به استثنای جرم چهار کره 3kg که می توان آنها را ذره فرض کرد.

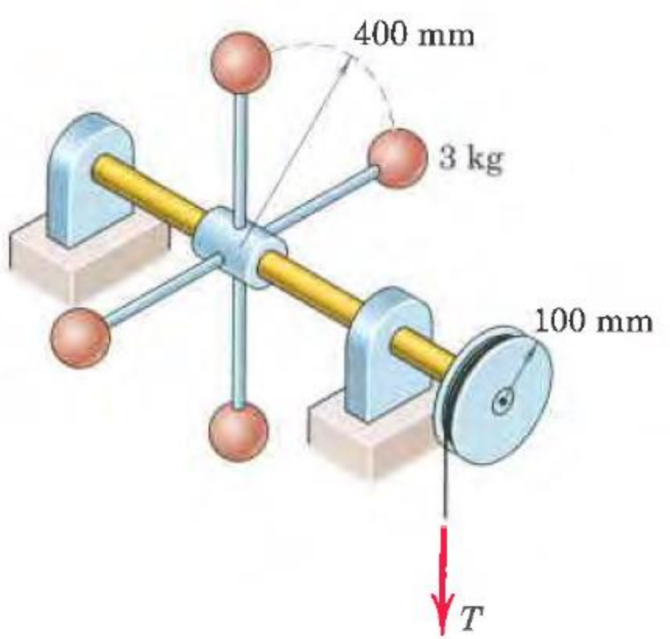


مسئله 3-233

مجموعه ای مطابق شکل از حالت سکون به حرکت در می آید و تحت اثر نیروی T با اندازه 20 N که به مدت t ثانیه به نخ وارد می شود ، به سرعت زاویه ای 150 rpm می رسد. مطلوب است تعیین t.

از اصطکاک و همه جرمها چشم پوشی کنید ، به استثنای جرم چهار کره 3kg که می توان آنها را ذره فرض کرد.

حل :



$$\omega = 150\ rpm = 150 \times \frac{2\pi}{60} = 15.7\ rad/s$$

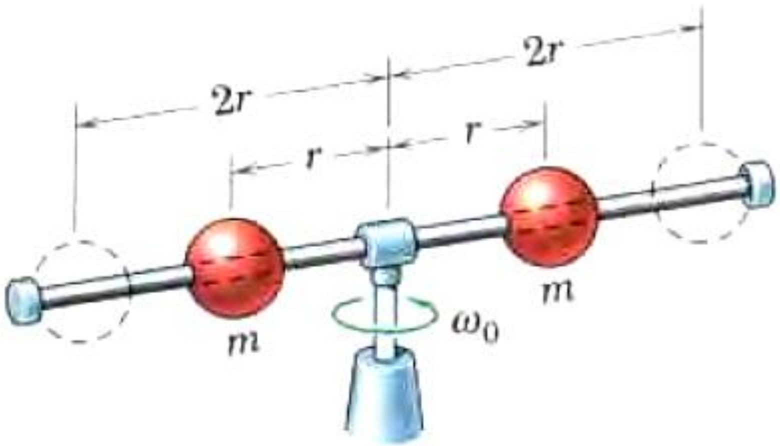
$$H_1 + \int_0^t M\,dt = H_2$$

$$0 + \int_0^t (0.1T)\,dt = 4(mvr)$$

$$0 + (20 \times 0.1)t = 4 \times (3 \times (0.4 \times 15.7) \times 0.4)$$

$$\Rightarrow \qquad t = 15.08\ s$$

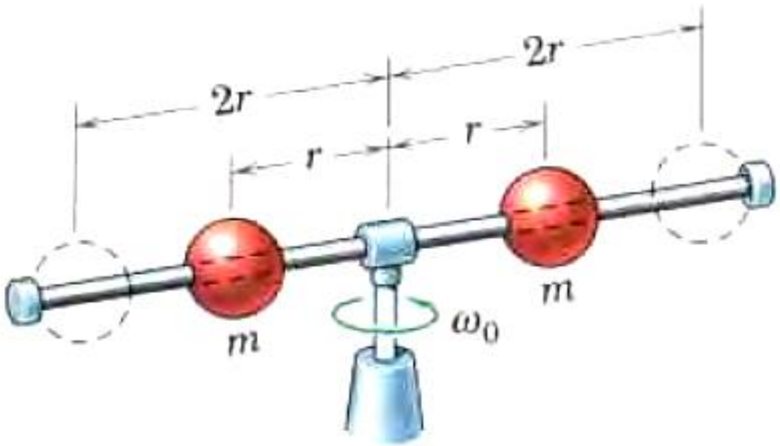
دو کره با جرم های مساوی m می توانند در طول میله افقی چرخان بلغزند. این کره ها در ابتدا در فاصله r از محور چرخان قرار دارند و مجموعه آزادانه با سرعت زاویه ای ω_0 می چرخد. مطلوب است تعیین سرعت زاویه ای ω جدید پس از رها شدن کره ها و قرارگرفتن آن ها در دو سر میله در فاصله شعاعی $2r$. درصد اتلاف انرژی جنبشی اولیه سیستم را نیز تعیین کنید. از جرم اندک میله و محور چشم پوشی کنید.



مسئله 3-239

دو کره با جرم های مساوی m می توانند در طول میله افقی چرخان بلغزند. این کره ها در ابتدا در فاصله r از محور چرخان قرار دارند و مجموعه آزادانه با سرعت زاویه ای ωo می چرخد. مطلوب است تعیین سرعت زاویه ای ω جدید پس از رها شدن کره ها و قرارگرفتن آن ها در دو سر میله در فاصله شعاعی 2r. درصد اتلاف انرژی جنبشی اولیه سیستم را نیز تعیین کنید. از جرم اندک میله و محور چشم پوشی کنید.

حل :



$$\Delta H = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 = H_2$$

$$2\left[mr\left(r\omega_{\circ}\right)\right] = 2\left[m2r\left(2r\omega\right)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{4}$$

$$T_1 = 2\left[\frac{1}{2}m\left(r\omega_0\right)^2\right] = mr^2\omega_0^2$$

$$T_2 = 2\left[\frac{1}{2}m\left(2r\omega\right)^2\right] = 4mr^2\omega^2 = \frac{mr^2\omega_0^2}{4}$$

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{3}{4}mr^2\omega_0^2$$

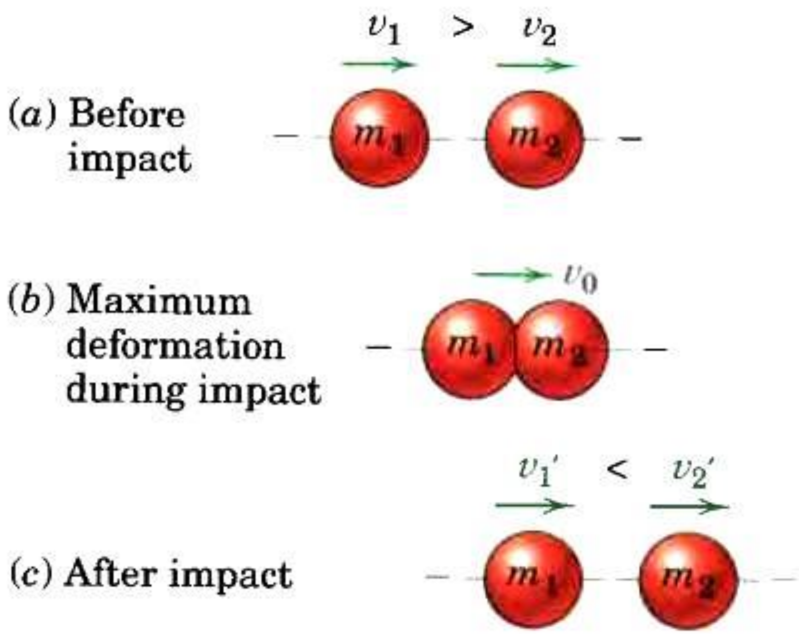
$$n = \frac{\Delta T}{T_1}\times 100 = \frac{3}{4}\times 100 = 75\%$$

د) کاربردهای خاص

- ✓ برخورد
- ✓ حرکت با نیروی مرکزی
- ✓ حرکت نسبی

برخورد

اصل ضربه و اندازه حرکت در توصیف رفتار اجسامی که با هم برخورد می کنند کاربرد مهمی دارد.



برخورد مرکزی مستقیم

همانند برخورد دو کره که امتداد نیروهای تماس همان امتداد خط

مرکزهای دو کره است.

چون نیروهای تماس در حین برخورد مساوی و مخالف اند ،

اندازه حرکت خطی سیستم ثابت می ماند:

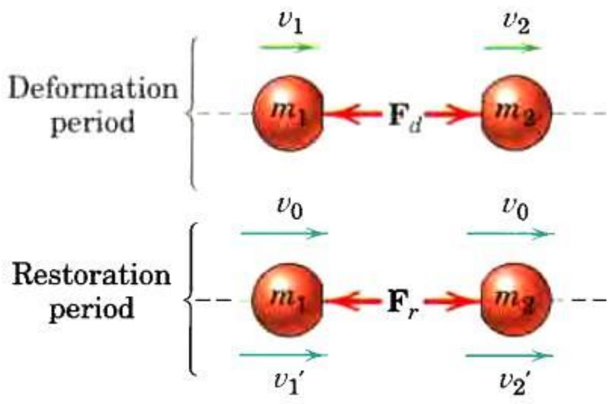
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

فرض می شود که: در فاصله زمانی کوتاه برخورد ، تغییر درخور اعتنایی در مکان مرکز جرم کره ها ایجاد نمی شود.

ساير نيروهاي اعمال شده بر جسم در مقايسه با نيروي برخورد كوچك هستند

ضریب استرداد

برای جرم ها و شرایط اولیه مفروض ، معادله اندازه حرکت دو مجهول دارد : $v_1^{'}, v_2^{'}$



بدیهی است برای یافتن سرعت های نهایی به رابطه دیگر نیاز داریم.

ضریب استرداد توانایی اجسام تماس یابنده را برای بازیابی پس از برخورد نشان می دهد

و میتوان آن را بصورت نسبت اندازه ضربه برگشت به اندازه ضربه تغییرشکل بیان نمود.

برای ذره 1 می توان نوشت :

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r\, dt}{\int_{t_0}^{t} F_d\, dt} = \frac{-m_1\left[v_1^{'} - (v_0)\right]}{-m_1\left[v_0 - (v_1)\right]} = \frac{v_0 - v_1^{'}}{v_1 - v_0}$$

و برای ذره 2 :

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r\, dt}{\int_{t_0}^{t} F_d\, dt} = \frac{m_2\left[v_2^{'} - v_0\right]}{m_2\left[v_0 - v_2)\right]} = \frac{v_2^{'} - v_0}{v_0 - v_2}$$

با حذف V0 بین دو عبارت

$$e = \frac{v_2^{'} - v_1^{'}}{v_1 - v_2} = \frac{\text{سرعت نسبی جدا شدن}}{\text{سرعت نسبی نزدیک شدن}}$$

اتلاف انرژی در حین برخورد

پدیده های برخورد تقریبا همواره با اتلاف انرژی همراه اند.

این اتلاف انرژی را می توان با تفریق کردن انرژی جنبشی سیستم درست پس از برخورد ، از مقدار آن درست پیش از برخورد محاسبه نمود.

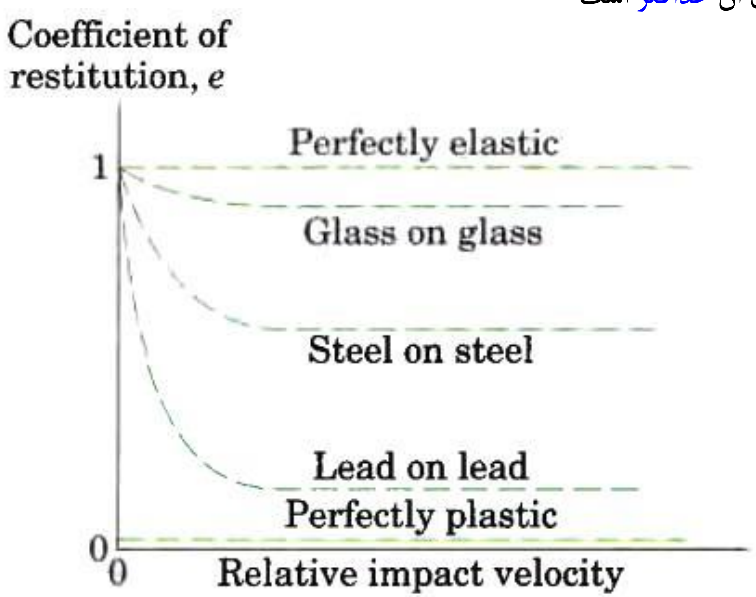
برخورد کشسان : $e = 1$

توانایی دو ذره برای بازیابی پس از برخورد با تمایل آنها به تغییرشکل مساوی است.

برخورد کشسان بدون اتلاف انرژی است

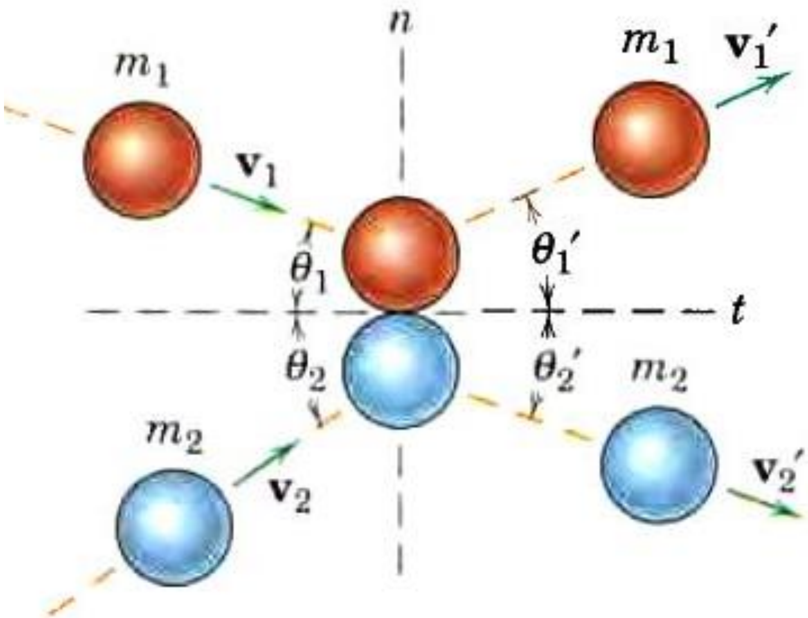
برخورد مومسان : $e = 0$

ذرات پس از برخورد به هم می چسبند و اتلاف انرژی آن حداکثر است



همه برخوردها در نقطه ای بین این دو وضعیت حدی واقع می شوند.

برخورد مرکزی مایل

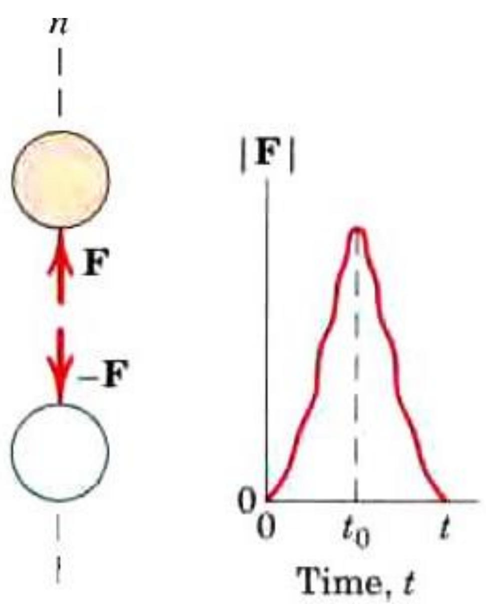


$$(v_1)_n = -v_1 \sin\theta_1 \qquad (v_2)_n = v_2 \sin\theta_2$$

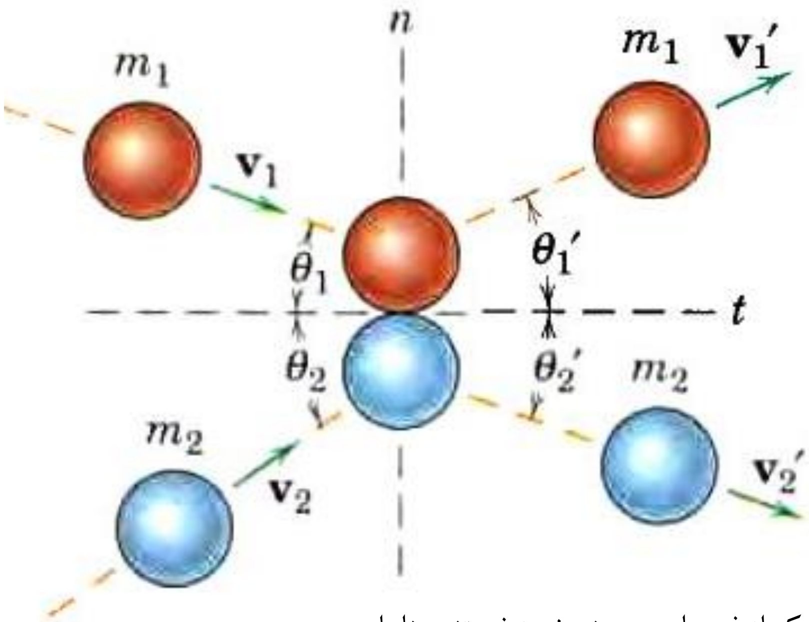
$$(v_1)_t = v_1 \cos\theta_1 \qquad (v_2)_t = v_2 \cos\theta_2$$

با توجه به شرایط اولیه مفروض : $m_1 \,, m_2 \,, (v_1)_n \,, (v_1)_t \,, (v_2)_n \,, (v_2)_t$

چهار مجهول داریم : $(v_1')_n \,, (v_1')_t \,, (v_2')_n \,, (v_2')_t$



برای بدست آوردن این چهار مجهول به چهار معادله نیازمندیم.



برخورد مرکزی مایل

معادله اول: اندازه حرکت سیستم در راستای n پایسته است:

$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(v_1')_n + m_2(v_2')_n$$

معادله دوم و سوم : اندازه حرکت هر ذره در امتداد t پایسته است ، زیرا در این امتداد هیچ یک از ذره ها در معرض ضربه نیستند. بنابراین :

$$m_1(v_1)_t = m_1(v_1')_t$$

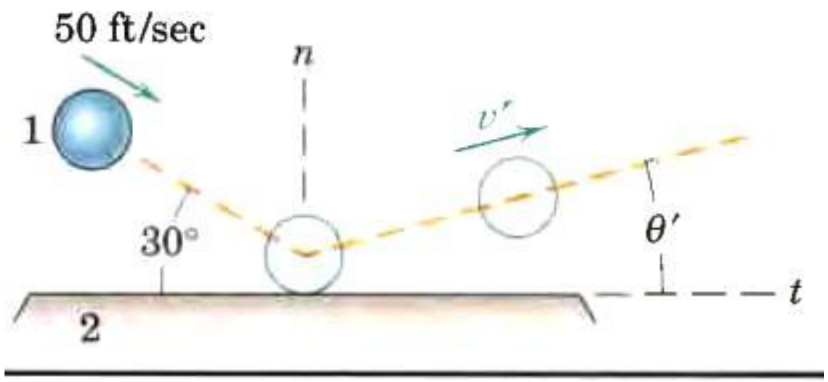
$$m_2(v_2)_t = m_2(v_2')_t$$

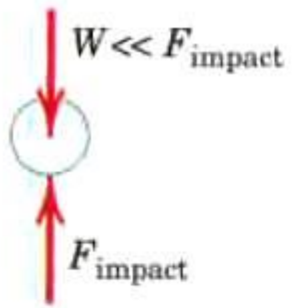
معادله چهارم: ضریب استرداد برای سرعت های در راستای n

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

مسئله نمونه 3-29

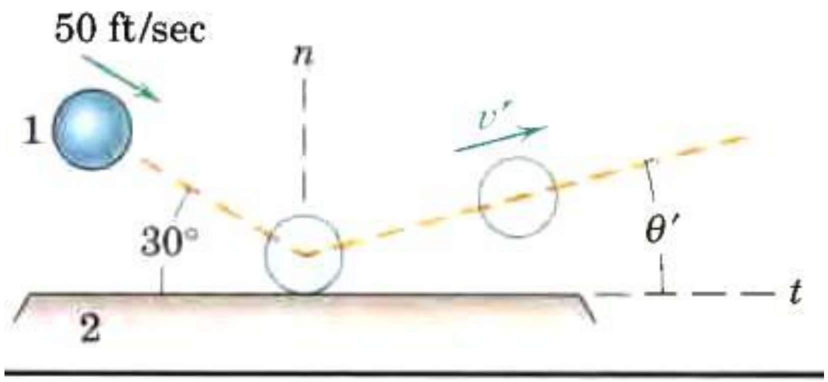
توپی با سرعت 50 ft/sec ، تحت زاویه 30° ، مطابق شکل روی صفحه ای سنگین پرتاب می شود. ضریب استرداد موثر 0.5 است. مطلوب است محاسبه سرعت واجهش v' و زاویه θ' آن.

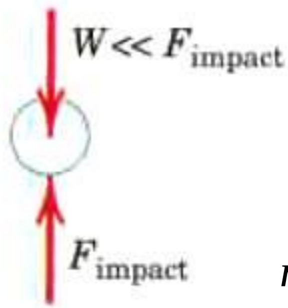




مسئله نمونه 3-29

توپی با سرعت 50 ft/sec ، تحت زاویه 30° ، مطابق شکل روی صفحه ای سنگین پرتاب می شود. ضریب استرداد موثر 0.5 است. مطلوب است محاسبه سرعت واجهش V' و زاویه θ' آن.





حل : توپ را جسم 1 و صفحه سنگین را جسم 2 می نامیم.

جرم صفحه سنگین بینهایت و سرعت آن پس از برخورد هم صفر است.

$$e=\frac{\left(v_2'\right)_n-\left(v_1'\right)_n}{\left(v_1\right)_n-\left(v_2\right)_n} \qquad 0.5=\frac{0-\left(v_1'\right)_n}{-50\sin 30^\circ-0}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(v_1'\right)_n=12.5\ ft/\sec$$

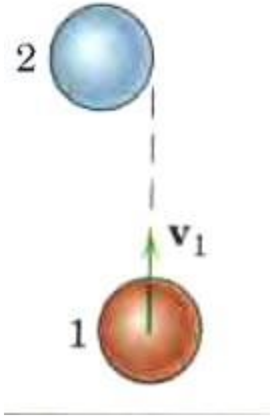
اندازه حرکت توپ در راستای تغییر نمی کند. زیرا در این راستا نیرویی بر توپ وارد نمی شود :

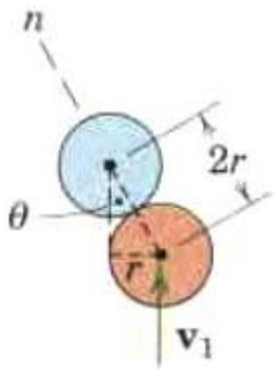
$$m_1\left(v_1\right)_t=m_1\left(v_1'\right)_t \qquad \Rightarrow \qquad \left(v_1'\right)_t=\left(v_1\right)_t=50\cos 30^\circ=43.3\ \ ft/\sec$$

$$v'=\sqrt{\left(v_1'\right)_n^2+\left(v_1'\right)_t^2}=\sqrt{12.5^2+43.3^2}=45.1\ ft/\sec$$

$$\theta'=\tan^{-1}\left(\frac{\left(v_1'\right)_n}{\left(v_1'\right)_t}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{12.5}{43.3}\right)=16.1^\circ$$

ذره کروی 1 با سرعت $v1=0.6\ m/s$ در امتدادی مطابق شکل در حرکت است که به ذره کروی 2 ، با جرم و قطر مساوی برخورد می کند که ابتدا در حال سکون است. ضریب استرداد در این شرایط برابر $e=0.6$ است. مطلوب است تعیین مشخصه های حرکت هر ذره پس از برخورد. درصد اتلاف انرژی ناشی از برخورد را نیز محاسبه کنید.

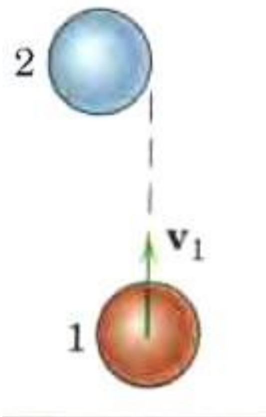


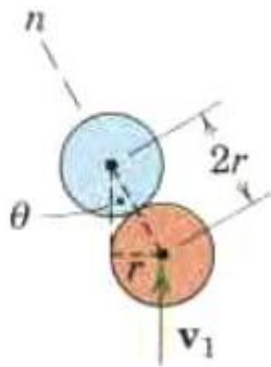


مسئله نمونه 3-30

ذره کروی 1 با سرعت v1=0.6 m/s در امتدادی مطابق شکل در حرکت است که به ذره کروی 2 ، با جرم و قطر مساوی برخورد می کند که ابتدا در حال سکون است. ضریب استرداد در این شرایط برابر e=0.6 است. مطلوب است تعیین مشخصه های حرکت هر ذره پس از برخورد. درصد اتلاف انرژی ناشی از برخورد را نیز محاسبه کنید.

حل : هندسه برخورد نشان می دهد که قائم n بر سطوح تماس با امتداد V1 زاویه 30 درجه می سازد.





$$\Rightarrow \quad \theta = 30^\circ$$

$$(v_1)_n = v_1 \cos 30^\circ = 6 \cos 30^\circ = 5.2 \ m/s$$

$$(v_1)_t = v_1 \sin 30^\circ = 6 \sin 30^\circ = 3 \ m/s$$

$$(v_2)_n = (v_2)_t = 0$$

از پایستگی اندازه حرکت برای سیستم دو ذره ای در امتداد n داریم :

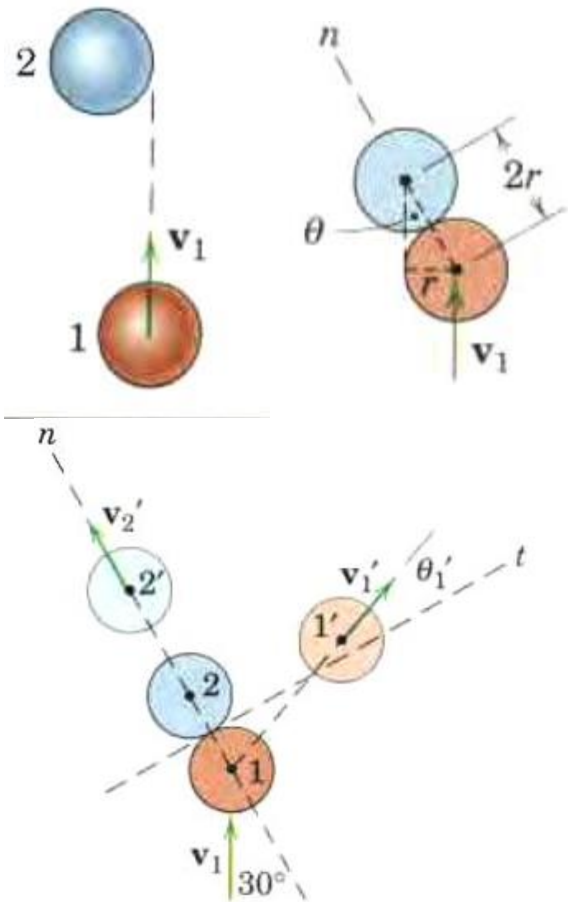
$$m_1 (v_1)_n + m_2 (v_2)_n = m_1 (v_1')_n + m_2 (v_2')_n \xrightarrow{m_1 = m_2} 5.2 + 0 = (v_1')_n + (v_2')_n$$

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \quad \Rightarrow \quad 0.6 = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{5.2 - 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (v_1')_n &= 1.039 \ m/s \\ (v_2')_n &= 4.16 \ m/s \end{aligned}}$$

مسئله نمونه 3-30

ذره کروی 1 با سرعت v1=0.6 m/s در امتدادی مطابق شکل در حرکت است که به ذره کروی 2 ، با جرم و قطر مساوی برخورد می کند که ابتدا در حال سکون است. ضریب استرداد در این شرایط برابر e=0.6 است. مطلوب است تعیین مشخصه های حرکت هر ذره پس از برخورد. درصد اتلاف انرژی ناشی از برخورد را نیز محاسبه کنید.



از پایستگی اندازه حرکت هر ذره در امتداد t داریم :

$$m_1(v_1)_t = m_1(v_1^{'})_t \qquad (v_1^{'})_t = (v_1)_t = 3\ m/s$$

$$m_2(v_2)_t = m_2(v_2^{'})_t \qquad (v_2^{'})_t = (v_2)_t = 0$$

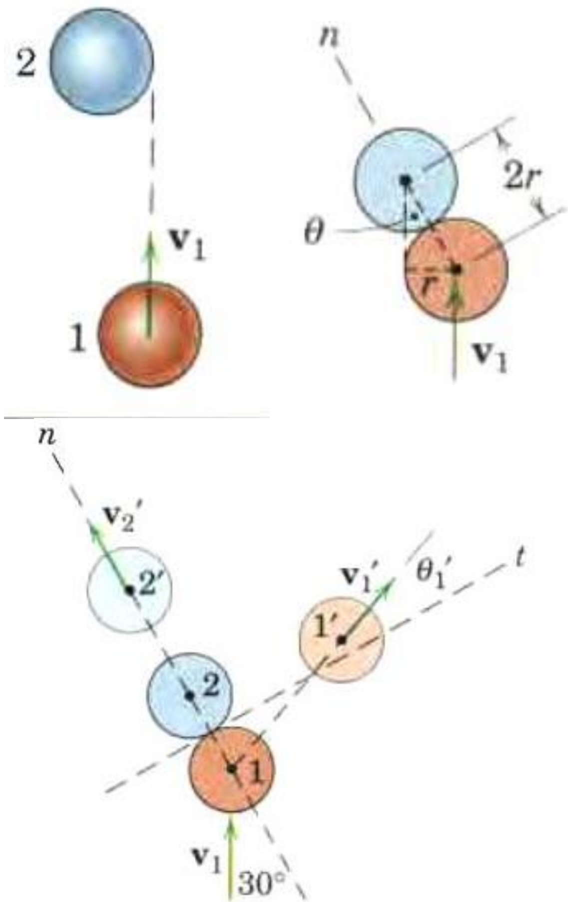
$$v_1^{'} = \sqrt{(v_1^{'})_n^2 + (v_1^{'})_t^2} = \sqrt{1.039^2 + 3^2} = 3.17\ m/s$$

$$v_2^{'} = \sqrt{(v_2^{'})_n^2 + (v_2^{'})_t^2} = \sqrt{4.16^2 + 0^2} = 4.16\ m/s$$

$$\theta^{'} = \tan^{-1}\left(\frac{(v_1^{'})_n}{(v_1^{'})_t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1.039}{3}\right) = 19.11^\circ$$

مسئله نمونه 3-30

ذره کروی 1 با سرعت v1=0.6 m/s در امتدادی مطابق شکل در حرکت است که به ذره کروی 2 ، با جرم و قطر مساوی برخورد می کند که ابتدا در حال سکون است. ضریب استرداد در این شرایط برابر e=0.6 است. مطلوب است تعیین مشخصه های حرکت هر ذره پس از برخورد. درصد اتلاف انرژی ناشی از برخورد را نیز محاسبه کنید.



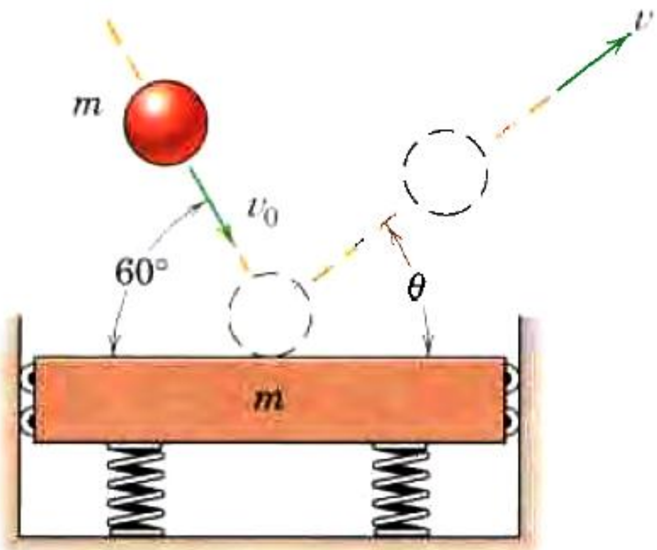
انرژی جنبشی درست پیش و پس از برخورد ، با توجه به اینکه m=m1=m2 برابرند با:

$$T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m\ (6)^2+0=18m$$

$$T'=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2=\frac{1}{2}m\ (3.17)^2+\frac{1}{2}m\ (4.16)^2=13.68m$$

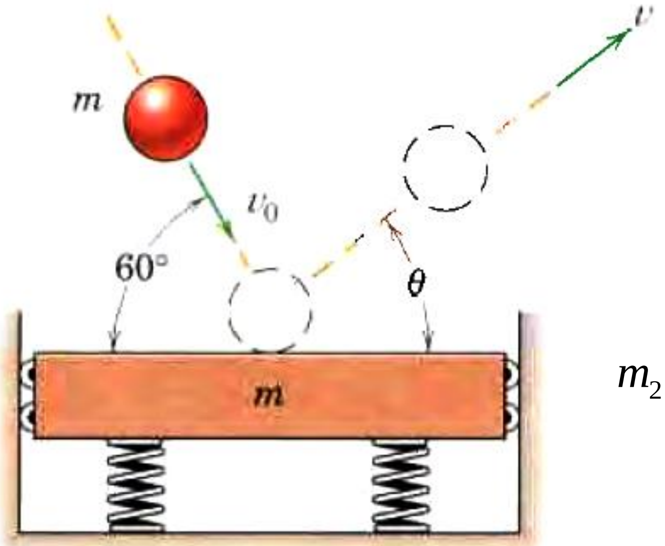
$$\frac{|\Delta E|}{E}\times 100=\frac{T-T'}{T}\times 100=\frac{18m-13.68m}{18m}\times 100=24\%$$

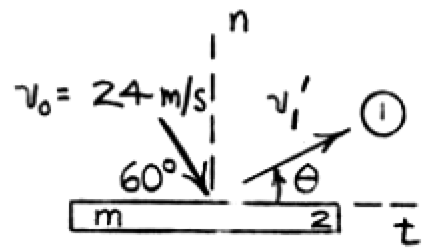
گلوله فولادی با سرعت اولیه $v0=24$ m/s و تحت زاویه 60^{o} با امتداد افقی ، به صفحه فولادی با همان جرم برخورد می کند. ضریب استرداد $e=0.8$است. مطلوب است محاسبه سرعت های نهایی هر دو جرم ، بلافاصله پس از برخورد ، هرگاه صفحه ابتدا در حالت سکون باشد.



مسئله 3-261

گلوله فولادی با سرعت اولیه v0=24 m/s و تحت زاویه 60° با امتداد افقی ، به صفحه فولادی با همان جرم برخورد می کند. ضریب استرداد e=0.8است. مطلوب است محاسبه سرعت های نهایی هر دو جرم ، بلافاصله پس از برخورد ، هرگاه صفحه ابتدا در حالت سکون باشد.





حل : در راستای t

$$m_1\left(v_1\right)_t = m_1\left(v_1'\right)_t$$

$$\left(v_1'\right)_t = \left(v_1\right)_t = 24\cos 60^{\circ} = 12\ m/s$$

$$m_2\left(v_2\right)_t = m_2\left(v_2'\right)_t \quad \Rightarrow \quad \left(v_2'\right)_t = \left(v_2\right)_t = 0$$

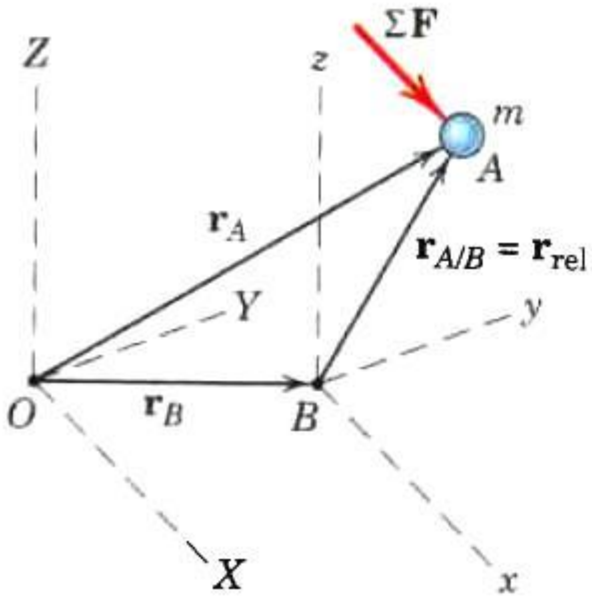
در راستای n

$$m_1\left(v_1\right)_n + m_2\left(v_2\right)_n = m_1\left(v_1'\right)_n + m_2\left(v_2'\right)_n \quad \Rightarrow \quad -24\sin 60^{\circ} + 0 = \left(v_1'\right)_n + \left(v_2'\right)_n$$

$$e = \frac{\left(v_2'\right)_n - \left(v_1'\right)_n}{\left(v_1\right)_n - \left(v_2\right)_n} \quad \Rightarrow \quad 0.8 = \frac{\left(v_2'\right)_n - \left(v_1'\right)_n}{-24\sin 60^{\circ} - 0} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned}\left(v_1'\right)_n &= -2.08\ m/s \\ \left(v_2'\right)_n &= -18.71\ m/s\end{aligned}}$$

$$v_1' = \sqrt{\left(v_1'\right)_n^2 + \left(v_1'\right)_t^2} = 12.2\ \ m/s \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2.08}{12}\right) = -9.83^{\circ}$$

حرکت نسبی



ذره A به جرم m را درنظر بگیرید که حرکت آن از دستگاه مختصات x-y-z نظاره می شود که نسبت به

چارچوب مرجع ثابت X-Y-Z در حرکت است.

امتدادهای دو دستگاه همواره موازی باقی می ماند (انتقال بدون چرخش)

اگر شتاب مبدا B دستگاه x-y-z را $\mathbf{a}_B$ در نظر بگیریم ، آنگاه شتاب برابر است با :

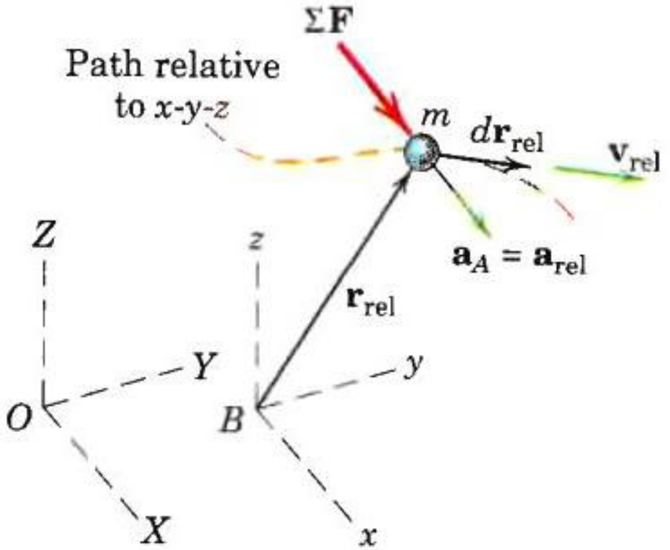
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{rel}$$

$$\sum F = m\mathbf{a}_A \quad \Rightarrow \quad \sum F = m(\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{rel})$$

- ✓ برایند نیروها ، مثل همیشه ، به کمک نمودار جسم آزاد شناسایی می شود.
- ✓ این نمودار در چشم ناظر واقع در دستگاه x-y-z یا واقع در دستگاه X-Y-Z یکسان است ، به شرط آنکه فقط نیروهایی که واقعا بر ذره وارد می شوند ، در نمودار نشان داده شوند.
- ✓ بلافاصله می توان نتیجه گرفت که قانون دوم نیوتون برای دستگاه شتاب دار صادق نیست ، زیرا

$$\sum F \neq m\mathbf{a}_{rel}$$

دستگاه های غیرچرخان سرعت ثابت



اگر محورهای دستگاه مختصات x-y-z سرعت ثابت داشته باشند: ، آنگاه :

$$\mathbf{a}_B = 0 \rightarrow \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{rel} \rightarrow \boxed{\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{rel}}$$

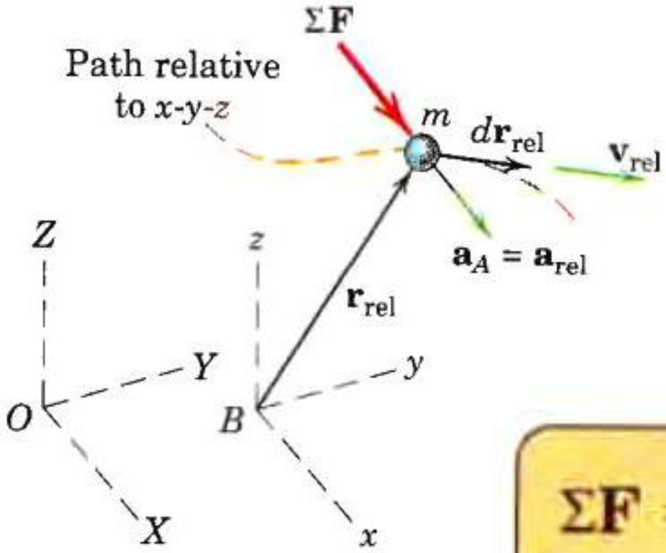
قانون دوم نیوتون برای اندازه گیری های انجام شده در دستگاهی که با سرعت ثابت حرکت می کند ، معتبر است.

چنین دستگاهی را دستگاه لخت یا چارچوب مرجع نیوتونی می نامند.

$$\left.\begin{aligned} dU_{rel} &= \sum \mathbf{F}.d\mathbf{r}_{rel} \\ \sum \mathbf{F} &= m\mathbf{a}_A = m\mathbf{a}_{rel} \\ \mathbf{a}_{rel}.d\mathbf{r}_{rel} &= \mathbf{v}_{rel}.d\mathbf{v}_{rel} \end{aligned}\right] \begin{aligned} & dU_{rel} = m\mathbf{a}_{rel}.d\mathbf{r}_{rel} = m\mathbf{v}_{rel}.d\mathbf{v}_{rel} = d\left(\frac{1}{2}mv_{rel}^2\right) \\ & \Rightarrow \quad T_{rel} = \frac{1}{2}mv_{rel}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{U_{rel} = \Delta T_{rel}}$$

اصل کار-انرژی برای اندازه گیری های انجام شده نسبت به دستگاه غیرچرخان سرعت ثابت معتبر است.



$$\sum \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{a}_A dt = m\mathbf{a}_{rel} dt = md\mathbf{v}_{rel} = d\left(m\mathbf{v}_{rel}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \sum \mathbf{F}\,dt = d\left(m\mathbf{v}_{rel}\right) \\ \mathbf{G}_{rel} = m\mathbf{v}_{rel} \end{matrix}\right\} \sum \mathbf{F}\,dt = d\mathbf{G}_{rel}$$

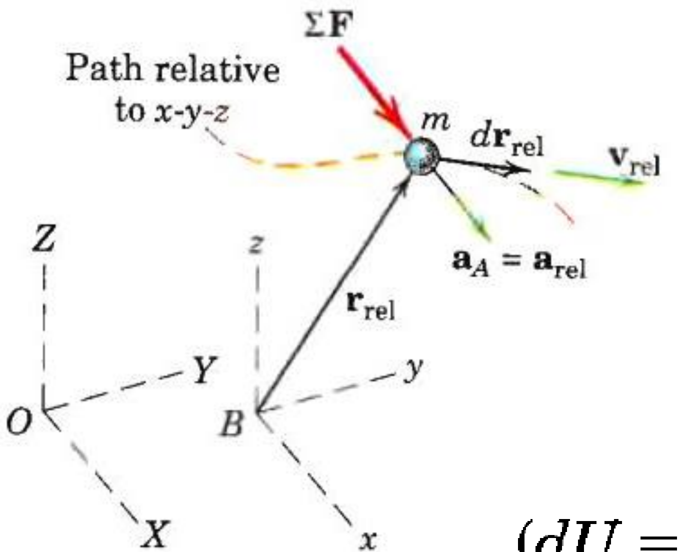
$$\boxed{\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}_{rel}} \qquad \boxed{\int \Sigma\mathbf{F}\,dt = \Delta\mathbf{G}_{rel}}$$

معادله ضربه-اندازه حرکت برای اندازه گیری های انجام شده نسبت به دستگاه غیرچرخان سرعت ثابت معتبر است.

$$\left(\mathbf{H}_B\right)_{rel} = \mathbf{r}_{rel} \times \mathbf{G}_{rel} \Rightarrow \left(\dot{\mathbf{H}}_B\right)_{rel} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_{rel} \times \mathbf{G}_{rel}}_{\boxed{\mathbf{v}_{rel} \times m\mathbf{v}_{rel}} = 0} + \underbrace{\mathbf{r}_{rel} \times \dot{\mathbf{G}}_{rel}}_{\mathbf{r}_{rel} \times \sum \mathbf{F} = \sum \mathbf{M}_B}$$

$$\boxed{\Sigma\mathbf{M}_B = (\dot{\mathbf{H}}_B)_{rel}}$$

رابطه لنگر-اندازه حرکت زاویه ای نسبت به دستگاه غیرچرخان سرعت ثابت معتبر است.



معادلات کار-انرژی و ضربه-اندازه حرکت نسبت به دستگاهی که با سرعت ثابت انتقال می یابد ، برقرارند.

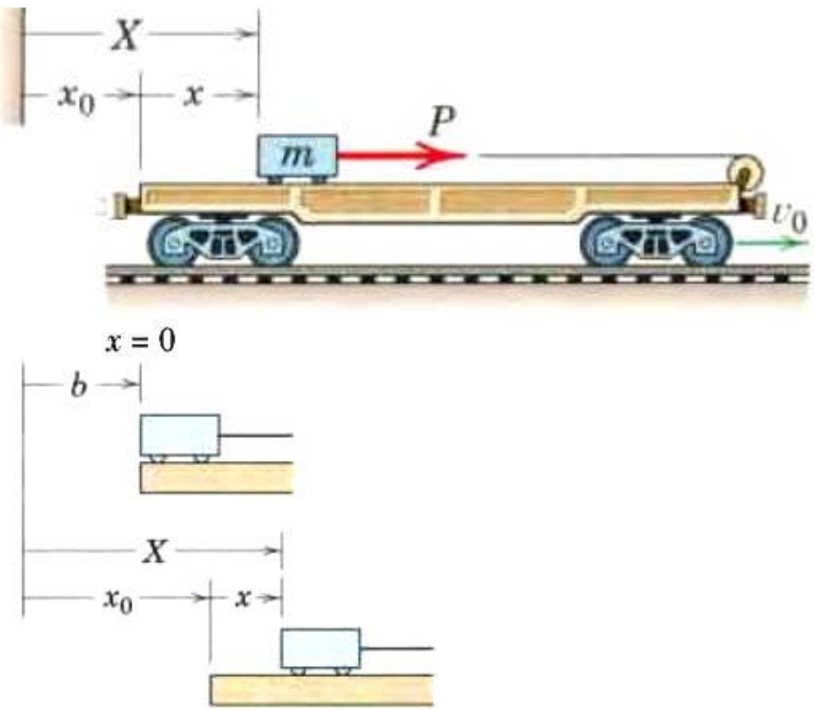
اما عبارت های مربوط به کار ، انرژی جنبشی و اندازه حرکت در دو دستگاه ثابت و متحرک ، با هم تفاوت دارند.

$$(dU = \Sigma\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_A) \neq (dU_{\text{rel}} = \Sigma\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_{\text{rel}})$$

$$(T = \frac{1}{2}mv_A{}^2) \neq (T_{\text{rel}} = \frac{1}{2}mv_{\text{rel}}{}^2)$$

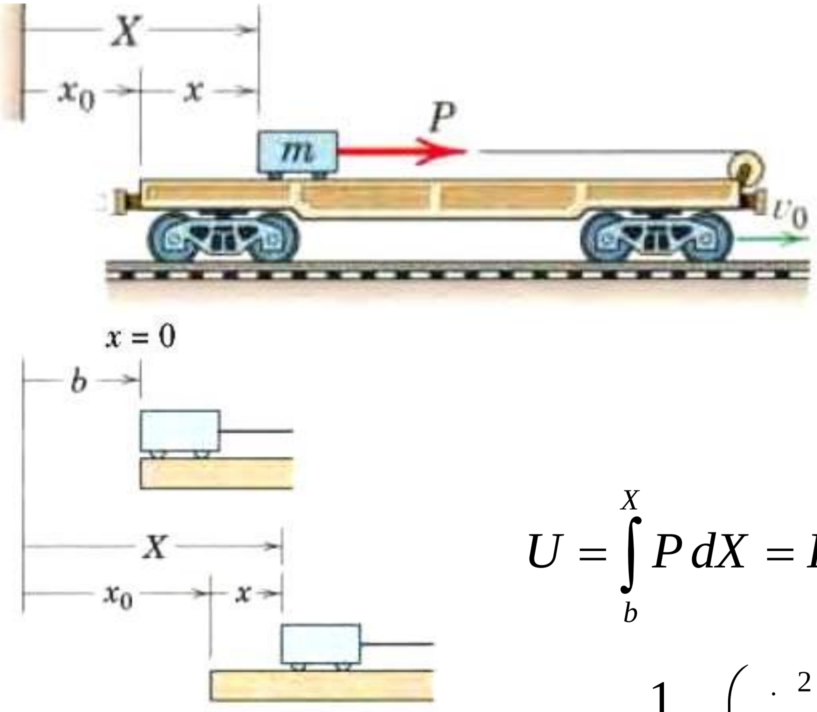
$$(\mathbf{G} = m\mathbf{v}_A) \neq (\mathbf{G}_{\text{rel}} = m\mathbf{v}_{\text{rel}})$$

واگن کفی مطابق شکل با سرعت ثابت v_0 در حرکت است و وینچی را حمل می کند که کشش ثابت P را در کابل متصل به گاری کوچک ایجاد می کند. جرم گاری m است و آزادانه روی سطح افقی غلتش میکند و از حالت سکون نسبت به واگن در $x=0$ شروع به حرکت کرده است و در آن لحظه $X=x_0=b$ است. معادله کار-انرژی را در مورد گاری ، ابتدا به عنوان ناظر متحرک با چارچوب مرجع واگن و سپس به عنوان ناظر روی زمین بکار ببندید. سازگاری دو عبارت بدست آمده را نشان دهید.



مسئله نمونه 3-33

واگن کفی مطابق شکل با سرعت ثابت V0 در حرکت است و وینچی را حمل می کند که کشش ثابت P را در کابل متصل به گاری کوچک ایجاد می کند. جرم گاری m است و آزادانه روی سطح افقی غلتش میکند و از حالت سکون نسبت به واگن در x=0 شروع به حرکت کرده است و در آن لحظه X=x0=b است. معادله کار-انرژی را در مورد گاری ، ابتدا به عنوان ناظر متحرک با چارچوب مرجع واگن و سپس به عنوان ناظر روی زمین بکار ببندید. سازگاری دو عبارت بدست آمده را نشان دهید.



حل : از دید ناظر سوار بر واگن ، کار نیروی P و تغییر انرژی جنبشی برابر است با :

$$U_{rel} = \int_0^x P\,dx = Px$$

$$\Delta T_{rel} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 - 0 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Px = \frac{1}{2} m \dot{x}^2}$$

از دید ناظر روی زمین ، کار نیروی P و تغییر انرژی جنبشی برابر است با :

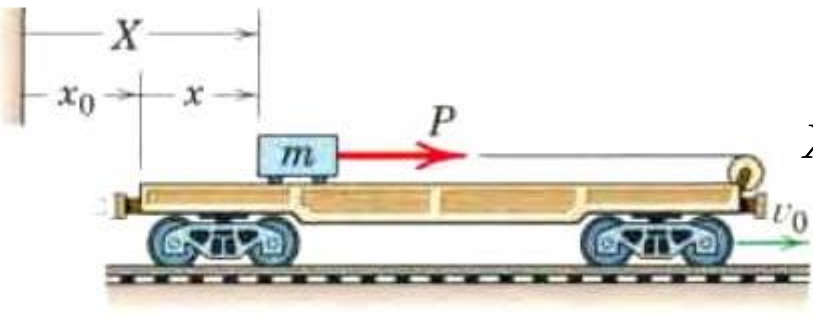
$$U = \int_b^X P\,dX = P(X-b)$$

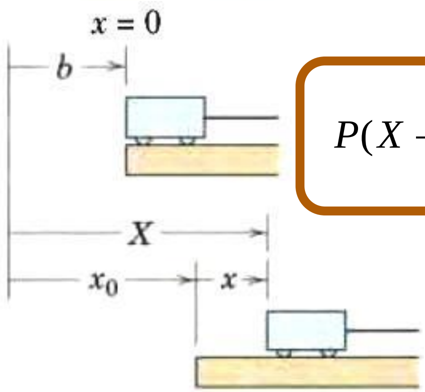
$$\Delta T = \frac{1}{2} m \left(\dot{X}^2 - v_0^2 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X-b) = \frac{1}{2} m \left(\dot{X}^2 - v_0^2 \right)}$$

مسئله نمونه 3-33

واگن کفی مطابق شکل با سرعت ثابت v0 در حرکت است و وینچی را حمل می کند که کشش ثابت P را در کابل متصل به گاری کوچک ایجاد می کند. جرم گاری m است و آزادانه روی سطح افقی غلتش میکند و از حالت سکون نسبت به واگن در x=0 شروع به حرکت کرده است و در آن لحظه X=x0=b است. معادله کار-انرژی را در مورد گاری ، ابتدا به عنوان ناظر متحرک با چارچوب مرجع واگن و سپس به عنوان ناظر روی زمین بکار ببندید. سازگاری دو عبارت بدست آمده را نشان دهید.





برای سازگار کردن معادلات ، می توان جایگزینی های زیر را انجام داد :

$$X = x_0 + x \quad \Rightarrow \quad \dot{X} = v_0 + \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{X} = \ddot{x}$$

$$P(X-b) = Px + P(x_0 - b) = Px + m\ddot{x}(x_0 - b)$$

$$= Px + m\ddot{x}v_0 t \quad = Px + mv_0\dot{x}$$

$$\dot{X}^2 - v_0^2 = \left(v_0^2 + \dot{x}^2 + 2v_0\dot{x} - v_0^2\right) = \dot{x}^2 + 2v_0\dot{x}$$

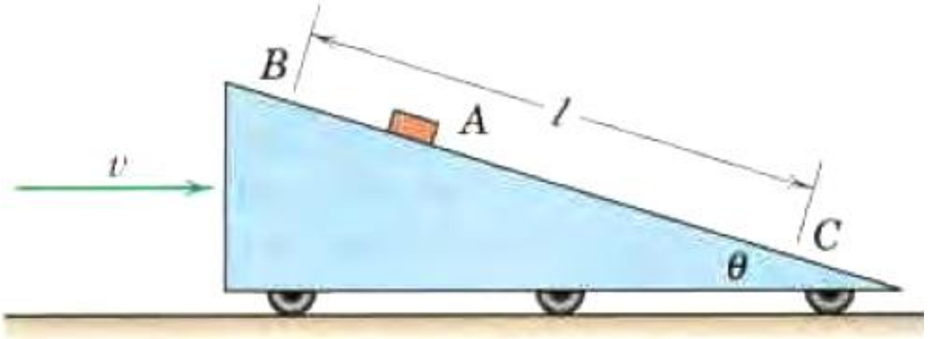
$$\boxed{P(X-b) = \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 - v_0^2\right)}$$

$$\downarrow$$

$$Px + mv_0\dot{x} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mv_0\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Px = \frac{1}{2}m\dot{x}^2}$$

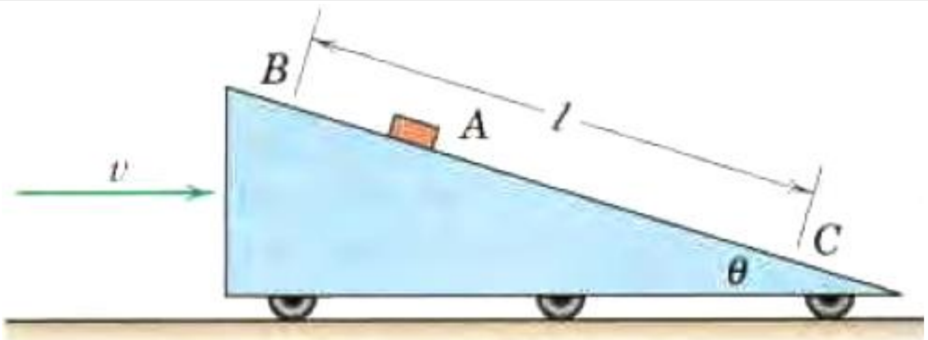
لغزنده کوچک با اصطکاکی ناچیز در امتداد سطح شیبدار گوه متحرک می لغزد. گوه مزبور با سرعت ثابت به سمت راست حرکت می کند.

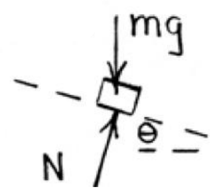
لغزنده بدون سرعت اولیه نسبت به گوه ، از نقطه رها می شود. با استفاده از اصل کار و انرژی ، مقدار سرعت مطلق لغزنده را به هنگام عبور از نقطه بیابید. (مسئله را هم از دید ناظر ساکن و هم از دید ناظر روی گوه حل کنید)



مسئله 3-328

لغزنده کوچک با اصطکاکی ناچیز در امتداد سطح شیبدار گوه متحرک می لغزد. گوه مزبور با سرعت ثابت به سمت راست حرکت می کند. لغزنده بدون سرعت اولیه نسبت به گوه ، از نقطه رها می شود. با استفاده از اصل کار و انرژی ، مقدار سرعت مطلق لغزنده را به هنگام عبور از نقطه بیابید. (مسئله را هم از دید ناظر ساکن و هم از دید ناظر روی گوه حل کنید)





$$U_{rel} = \Delta T_{rel}$$

$$mg\, l \sin\theta = \frac{1}{2} m v_{rel}^2 - 0$$

$$v_{rel}^2 = 2gl\sin\theta$$

$$\boxed{U = \Delta T: \quad mg\, l\sin\theta + (N\sin\theta)d = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2}$$

$$N = mg\cos\theta$$

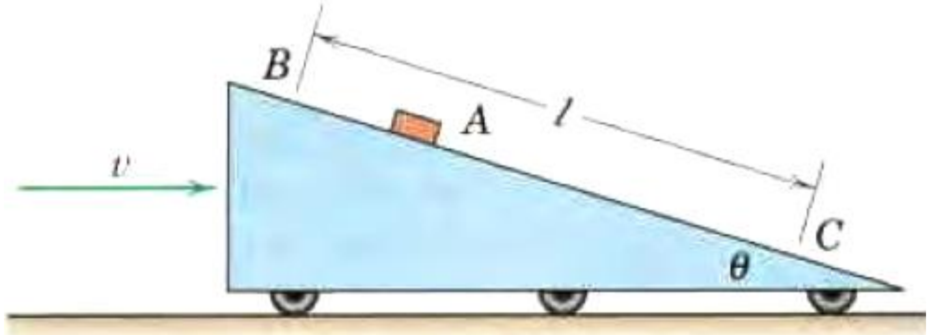
Time to slide from B to C : $l = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2$

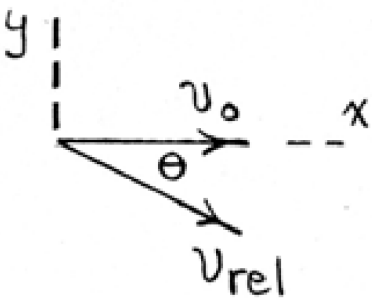
$t = \left(\frac{2l}{g\sin\theta}\right)^{1/2}$. So $d = v_0 t = v_0\sqrt{\frac{2l}{g\sin\theta}}$

$$v_A = \left(v_0^2 + 2gl\sin\theta + 2v_0\cos\theta\sqrt{2lg\sin\theta}\right)^{1/2}$$

مسئله 3-328

لغزنده کوچک با اصطکاکی ناچیز در امتداد سطح شیبدار گوه متحرک می لغزد. گوه مزبور با سرعت ثابت به سمت راست حرکت می کند. لغزنده بدون سرعت اولیه نسبت به گوه ، از نقطه رها می شود. با استفاده از اصل کار و انرژی ، مقدار سرعت مطلق لغزنده را به هنگام عبور از نقطه بیابید. (مسئله را هم از دید ناظر ساکن و هم از دید ناظر روی گوه حل کنید)





$$\underline{v}_A = \underline{v}_0 + \underline{v}_{rel}$$

$$= v_0\,\underline{i} + \sqrt{2gl\sin\theta}\,(\cos\theta\,\underline{i} - \sin\theta\,\underline{j})$$

$$= (v_0 + \sqrt{2gl\sin\theta}\,\cos\theta)\,\underline{i} - \sqrt{2gl\sin^3\theta}\,\underline{j}$$

$$v_A^2 = (v_0 + \sqrt{2gl\sin\theta}\,\cos\theta)^2 + (2gl\sin^3\theta)$$

✓ $$v_A^2 = v_0^2 + 2gl\sin\theta + 2v_0\cos\theta\sqrt{2gl\sin\theta}$$