## فصل دوم

# سینماتیک ذرات

# فهرست مطالب فصل دوم

**سینماتيك** شاخه‌اي از ديناميك كه حركت اجسام را بدون اشاره به نيروهائي كه باعث حركت مي‌شوند يا در نتيجه حركت بوجود مي‌آيند ، توصيف مي‌كند.

درک کامل و عمیق سینماتیک ، پیش نیاز مطالعه سینتیک است.

**ذره** جسمي است كه ابعاد فيزيكي آن در مقايسه با شعاع خميدگي مسيرش ، آنقدر كوچك است كه حركت آن را مي‌توانيم مانند حركت نقطه در نظر بگيريم. مثل حركت هواپيماي غول‌پيكر در هوا كه بصورت ذره فرض مي‌شود.

**انواع حرکت:**

1- **مقید**: اگر ذره به حرکت در مسیری مشخص مقید شود.

2- **نامقید**: اگر هیچ‌گونه راهنمای فیزیکی برای حرکت وجود نداشته باشد.

سنگ کوچکی که به انتهای نخی بسته شده است و روی مسیری دایره ای می گردد ، حرکت مقید انجام می دهد.

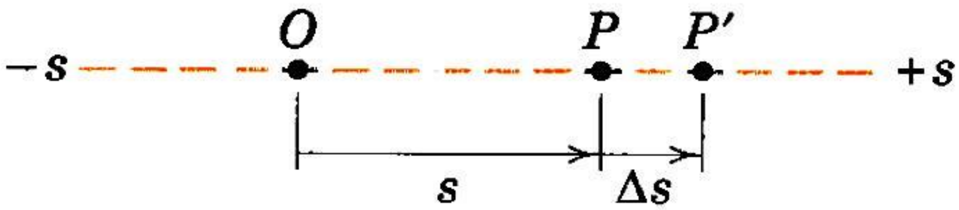
وقتی نخ پاره شود ، حرکت سنگ نامقید خواهد شد.

**انواع دستگاه مختصات:**

1- **مطلق**: دستگاه مختصات ثابت است.

2- **نسبي**: دستگاه مختصات متحرك است.

## حرکت راست خط




تغییر مکان در فاصله زمانی $\Delta t$ را جابجایی $\Delta s$ ذره می نامند.

سرعت میانگین ذره در فاصله زمانی $\Delta t$ برابر است با جابجایی تقسیم بر فاصله زمانی

$$v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

وقتی $\Delta t$ کوچکتر می شود و در حد به سمت صفر میل می کند ، سرعت میانگین ذره به سمت سرعت لحظه ای ذره میل می کند:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \longrightarrow v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

بنابراین سرعت ، آهنگ زمانی تغییر مختص مکان $s$ است.

سرعت ، بسته به مثبت یا منفی بودن جابجایی متناظر با آن ، مثبت یا منفی است.

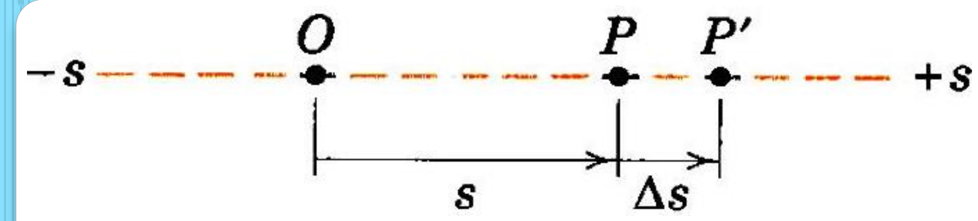
---

شتاب میانگین ذره در فاصله زمانی $\Delta t$ برابر است با سرعت ذره تقسیم بر فاصله زمانی

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad \text{یا} \quad a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

شتاب ذره بسته به این که سرعت آن افزایش یا کاهش پیدا کند ، مثبت یا منفی خواهد بود.




**حرکت:**

1- **تندشونده:** اگر ذره در حال افزایش سرعت باشد.

2- **کندشونده:** اگر ذره در حال کاهش سرعت باشد.

سرعت و شتاب کميتهاي برداری هستند که در اینجا جهت آنها در امتداد خط راست خواهد بود که با علامت مثبت و منفي مشخص مي‌شوند.

---

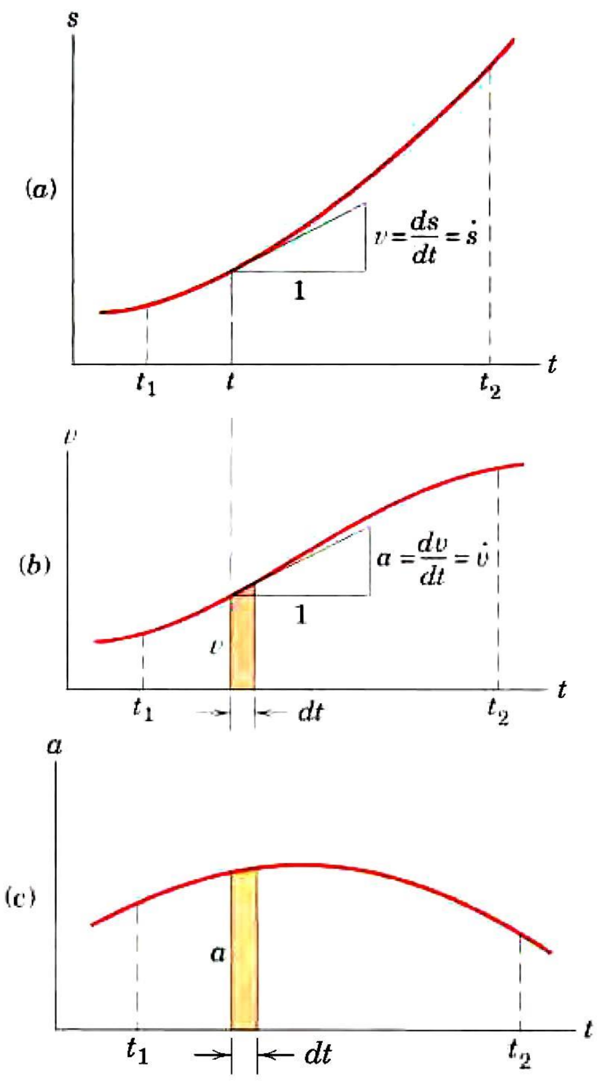
با حذف زمان dt بین معادلات سرعت و شتاب خواهیم داشت :

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ a &= \frac{dv}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{v\,dv = a\,ds} \quad \text{یا} \quad \boxed{\dot{s}\,d\dot{s} = \ddot{s}\,ds}$$

معادله حاصل جابجایی ، سرعت و شتاب ذره را به هم مربوط می کند و به معادله مستقل از زمان هم شناخته می شود.

معادلات فوق ، معادلات دیفرانسیل برای حرکت راست خط یک ذره اند . . .

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt}, \quad v\,dv = a\,ds$$




$$ds = v\,dt \rightarrow \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

$s_2 - s_1 =$ (سطح زیر منحنی $v - t$)

$$dv = a\,dt \rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$

$v_2 - v_1 =$ (سطح زیر منحنی $a - t$)

$$v\,dv = a\,ds \rightarrow \int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \int_{s_1}^{s_2} a\,ds$$

$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) =$ (سطح زیر منحنی $a - s$)

**الف- شتاب ثابت**

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt \longrightarrow \boxed{v = v_0 + at}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a\,ds \longrightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)}$$

$$ds = v\,dt \rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + at)\,dt \longrightarrow \boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

تذکر: این معادلات در حالت

شتاب متغیر صادق نیستند.

**ب- شتاب تابع زمان** $a = f(t)$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t f(t)\,dt \longrightarrow \boxed{v = v_0 + \int_0^t f(t)\,dt}$$

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v\,dt \longrightarrow \boxed{s = s_0 + \int_0^t v\,dt}$$

ج- شتاب تابع سرعت

$$a = f(v)$$

$$a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow \boxed{t = \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)}}$$

$$v\,dv = a\,ds \longrightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{f(v)} = \int_{s_0}^{s} ds \longrightarrow \boxed{s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{f(v)}}$$

د- شتاب تابع جابجایی

$$a = f(s)$$

$$v\,dv = a\,ds \longrightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} f(s)\,ds \longrightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} f(s)\,ds}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \longrightarrow \boxed{t = \int_0^t dt = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v(s)}}$$

**مسئله نمونه 1-2**

مختص مکانی ذره‌اي که روي خط راست حرکت مي‌کند توسط معادله $s = 2t^3 - 24t + 6$ داده شده است. مطلوب است:

الف) زمان لازم براي رسيدن سرعت ذره به $72\ \text{m/s}$ از شرايط اوليه خود در $t = 0$

ب) شتاب ذره وقتي $v = 30\ \text{m/s}$

ج) جابجايي خالص ذره در فاصله زماني $t = 1\ \text{s}$ و $t = 4\ \text{s}$

**حل**: معادله سرعت و شتاب ذره با مشتق گیری متوالی از معادله جابجایی نسبت به زمان بدست می آیند.

$$s = 2t^3 - 24t + 6 \quad \rightarrow \quad v = 6t^2 - 24 \quad \rightarrow \quad a = 12t$$

**الف)** با قراردادن $72\ \text{m/s}$ بجای $v$ تیجه می شود :

$$72 = 6t^2 - 24 \longrightarrow t = \pm 4\ \text{s}$$

ریشه منفی جواب ریاضی $t$ را پیش از شروع حرکت توصیف می کند و از لحاظ فیزیکی اهمیتی ندارد. بنابراین

$$t = 4\ \text{s}$$

**ب)** با قراردادن $30\ \text{m/s}$ بجای $v$ نتیجه می شود :

$$30 = 6t^2 - 24 \longrightarrow t = 3\ \text{s}$$

ریشه مثبت

$$a = 12t = 12 \times 3 = 36\ \ m/s^2$$

**ج)**

$$\Delta s = s\big|_{t=4} - s\big|_{t=1}$$
$$= [2(4)^3 - 24(4) + 6] - [2(1)^3 - 24(1) + 6]$$
$$= 54\ m$$

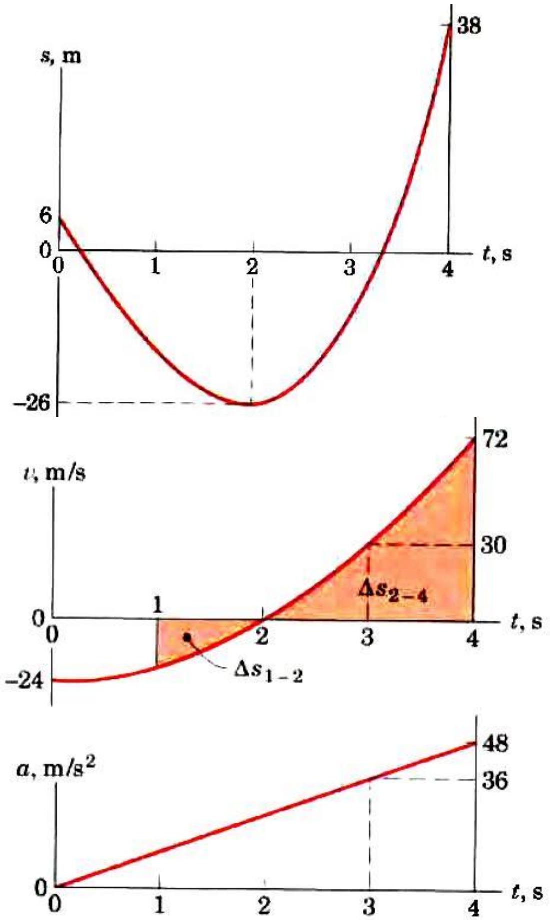
**مسئله نمونه 1-2**

مكان ذره‌اي كه روي خط راست حركت مي‌كند توسط معادله $s = 2t^3 - 24t + 6$ داده شده است.

الف) زمان لازم براي رسيدن سرعت ذره به $72\ \mathrm{m/s}$ از شرايط اوليه خود در $t = 0$ — $t = 4\ \mathrm{s}$

ب) شتاب ذره وقتي $v = 30\ \mathrm{m/s}$ — $a = 36\ m/s^2$

ج) جابجايي خالص ذره در فاصله زماني $t = 1\ \mathrm{s}$ و $t = 4\ \mathrm{s}$ — $\Delta s = 54\ m$




براي كمک به تجسم حركت ، نمودارهاي جابجايي ، سرعت و شتاب بر حسب زمان رسم شده اند.

الف) در نمودار سرعت مشخص است كه ذره پس از 4 ثانيه به سرعت $72\ \mathrm{m/s}$ می رسد.

ب) در نمودار سرعت مشخص است كه ذره در ثانيه سوم به سرعت $30\ \mathrm{m/s}$ می رسد و از روی نمودار شتاب ، در اين لحظه شتاب ذره برابر $36\ \mathrm{m/s^2}$ است.

ج) قبلا بيان شد كه سطح زير منحنی نمودار سرعت ، معرف جابجايی است. بنابراين جابجايی خالص از ثانيه اول تا چهارم حركت ، برابر است با مساحت $\Delta s_{2-4}$ منهای مساحت $\Delta s_{1-2}$

نكته: مسافت كل پيموده شده در فاصله زمانی 1 تا 4 ثانيه برابر $74\ \mathrm{m}$ است.

**مسئله نمونه 2-2**

ذره ای با سرعت اولیه $v = 50$ ft/sec در لحظه $t = 0$ از مبدا شروع به حرکت می کند. در 4 ثانیه نخست شتاب ندارد و پس از آن بر اثر نیروی بازدارنده ای شتاب ثابت $a = -10$ ft/sec می گیرد.

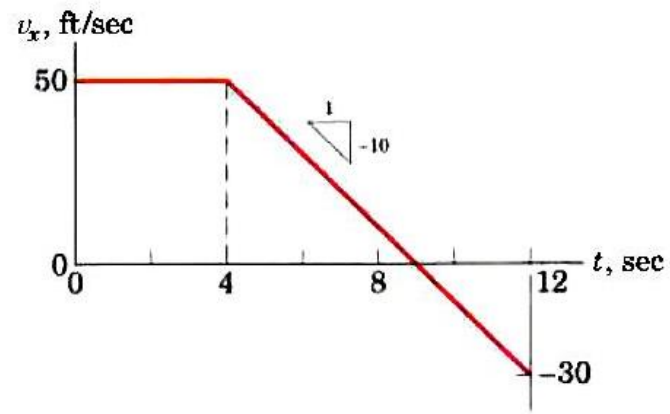
الف) مقدار جابجایی و سرعت ذره را در $t = 8$ sec و $t = 12$ sec بیابید.

ب) ماکزیمم جابجایی ذره را بیابید.

**حل: الف)** سرعت ذره پس از 4 ثانیه برابر است با :

$$\int_{50}^{v} dv = \int_{4}^{t} (-10)\,dt \quad \Rightarrow \quad v = 90 - 10t \;\; ft/\sec$$

$$v - 50 = -10(t-4)$$




$$t = 8 \sec \rightarrow v = 10 \;\; ft/\sec$$
$$t = 12 \sec \rightarrow v = -30 \;\; ft/\sec$$

تا ثانیه چهارم مقدار جابجایی برابر است با :

$$\int_{0}^{s} ds = \int_{0}^{t} v\,dt \rightarrow s = v\,t = 50 \times 4 = 200\; ft$$

از ثانیه چهارم به بعد حرکت دارای شتاب منفی می شود و سرعت دیگر ثابت نخواهد بود.

$$\int_{200}^{s} ds = \int_{4}^{t} (90 - 10t)\,dt \rightarrow \boxed{s = -5t^2 + 90t - 80 \;\; ft \qquad 4 \le t \le 12}$$

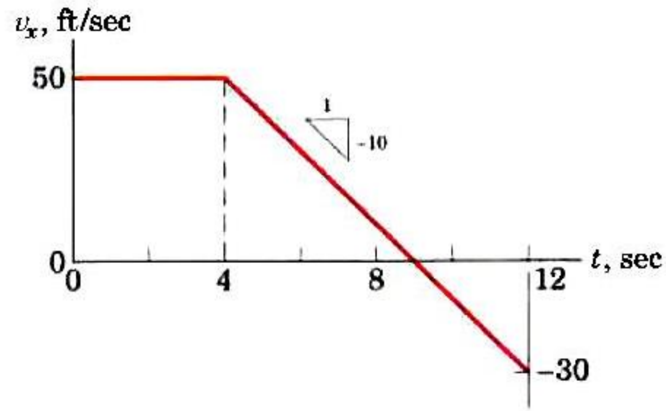
$$t = 8 \sec \rightarrow s = 320\; ft$$
$$t = 12 \sec \rightarrow s = 280\; ft$$

**مسئله نمونه 2-2**

ذره ای با سرعت اولیه $v = 50$ ft/sec در لحظه $t = 0$ از مبدا شروع به حرکت می کند. در 4 ثانیه نخست شتاب ندارد و پس از آن بر اثر نیروی بازدارنده ای شتاب ثابت $a = -10$ ft/sec می گیرد.

الف) مقدار جابجایی و سرعت ذره را در $t = 8$ sec و $t = 12$ sec بیابید.

ب) ماکزیمم جابجایی ذره را بیابید.




**حل: ب)** با توجه به پاسخ قسمت الف ، مقدار مختصه $S$ در ثانیه 12 کمتر از ثانیه 8 شده است ، بنابراین سرعت ذره به صفر رسیده و سپس منفی شده است.

وقتی سرعت ذره صفر شود : $v = 0$

$$0 = 90 - 10t \Rightarrow \boxed{t = 9^s}$$

از روی شکل هم مشخص است که نمودار سرعت ، محور زمان را در ثانیه 9 قطع میکند.

بنابراین نتیجه می گیریم که حداکثر جابجایی ذره در این لحظه است و پس از آن ذره بر می گردد.

$$s_{\max} = -5(9)^2 + 90(9) - 80 = 325\ ft$$

سطح زیر منحنی نمودار سرعت تا ثانیه نهم نیز همین عدد را بدست می دهد.

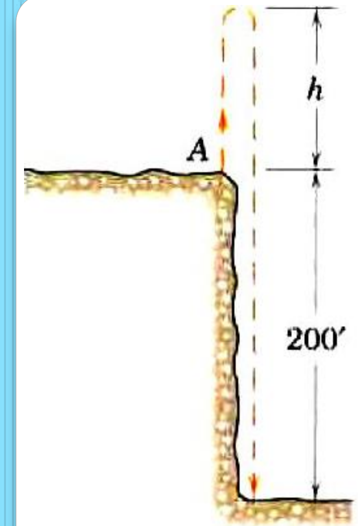
**مسئله 2-10**

توپی از لبه پرتگاهی با ارتفاع 200 ft ، با سرعت 80 ft/sec به طرف بالا پرتاب می شود. اگر از مقاومت هوا چشم پوشی شده و شتاب جاذبه $32.2\ ft/sec^2$ باشد ، مطلوب است :

الف) حداکثر ارتفاع h که توپ بالا میرود

ب) زمان کل t پس از رها شدن توپ را رسیدن به پایین پرتگاه

ج) سرعت برخورد توپ به زمین




**حل: الف)** مسئله شتاب ثابت است. بنابراین می توان مستقیما از معادلات مربوطه استفاده نمود.

با استفاده از معادله مستقل از زمان خواهیم داشت :

$$v^2 = v_0^2 + 2ah \quad \rightarrow \quad v^2 = 80^2 + 2(-32.2)h$$

در حداکثر ارتفاع ، سرعت توپ صفر می شود :

$$0 = 80^2 + 2(-32.2)h \quad \rightarrow \quad h = \frac{-80^2}{-2\times 32.2} = 99.38\ ft$$

**ب)** در این حالت از معادله جابجایی بر حسب زمان استفاده می شود :

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \rightarrow \quad 0 = 200 + 80t + \frac{1}{2}(-32.2)t^2 \quad \rightarrow \quad -16.1t^2 + 80t + 200 = 0$$

با حل معادله درجه دوم خواهیم داشت :

$$t_{1,2} = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4(-16.1)(200)}}{2(-16.1)} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ll} t = -1.83\ \text{sec} & \text{غ ق ق} \\ t = 6.8\ \text{sec} & \surd \end{array}$$

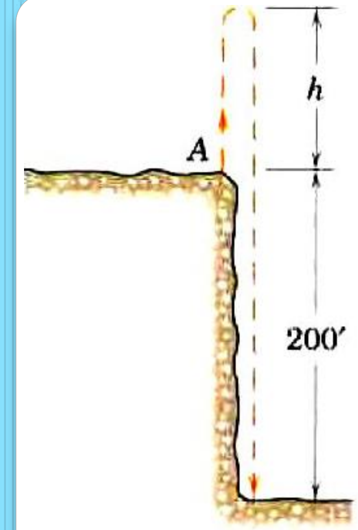
**مسئله 2-10**

توپی از لبه پرتگاهی با ارتفاع 200 ft ، با سرعت 80 ft/sec به طرف بالا پرتاب می شود. اگر از مقاومت هوا چشم پوشی شده و شتاب جاذبه $32.2\ ft/sec^2$ باشد ، مطلوب است :

الف) حداکثر ارتفاع h که توپ بالا میرود

ب) زمان کل t پس از رها شدن توپ را رسیدن به پایین پرتگاه

ج) سرعت برخورد توپ به زمین




ج)

$$v = v_0 + at \;\rightarrow\; v = 80 - 32.2\,t$$

$$at \quad t = 6.8 \sec \;\rightarrow\; v = 80 - 32.2 \times 6.8 = -138.85\ ft/\sec^2$$

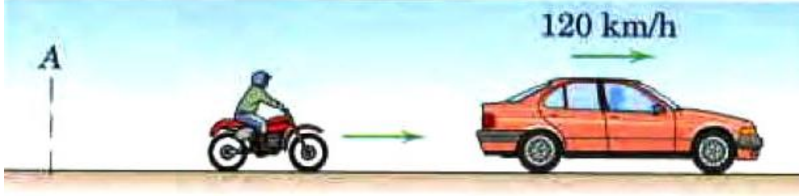
**راه دوم:** از معادله مستقل از زمان نیز می توان استفاده نمود

$$v^2 = v_0^2 + 2ay \;\rightarrow\; v^2 = 80^2 + 2(-32.2)(-200)$$

$$v^2 = 19280 \;\rightarrow\; v = \pm 138.85 \;\rightarrow\; v = -138.85\ ft/\sec^2$$

**مسئله 2-32**

یک موتورسوار از حالت سکون در نقطه A ، 2 ثانیه پس از عبور اتومبیلی با سرعت ثابت 120 km/h از نقطه A ، به حرکت در می آید. موتورسوار با آهنگ $6\ m/s^2$ شتاب میگیرد تا به حداکثر سرعت مجاز 150 km/h برسد و همین سرعت را حفظ کند. مطلوب است تعیین فاصله s از نقطه A تا نقطه ای که موتورسوار به اتومبیل می رسد.




**حل:**

$$V_a = 120\, {}^{km}/_{h} \times \frac{1000m}{1km} \times \frac{1h}{3600s} = 33.33\, {}^{m}/_{s}$$

$$V_m = 150\, {}^{km}/_{h} \times \frac{1}{3.6} = 41.67\, {}^{m}/_{s}$$

**اتومبیل :** دارای حرکت سرعت ثابت است

$$\int_0^s ds = \int_0^v v dt \quad \rightarrow \quad s = v\, t \quad \rightarrow \quad \boxed{s_a = 33.33t}$$

**موتور:** تا قبل از رسیدن به سرعت ماکزیمم 41.67 m/s دارای حرکت شتاب ثابت است و پس از آن حرکت سرعت ثابت . . .

توجه شود که موتور از ثانیه 2 شروع به حرکت میکند.

$$\int_0^v dv = \int_2^t a dt \quad \rightarrow \quad v = \int_2^t 6dt = 6(t-2)$$

ابتدا باید مشخص شود که موتور در چه زمانی به سرعت ماکزیمم خود می رسد:

$$41.67 = 6(t-2) \quad \rightarrow \boxed{t = 8.945\ s}$$

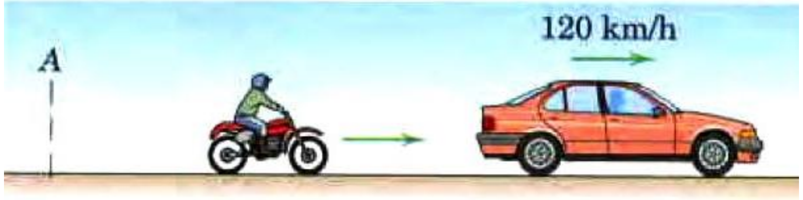
$$s_{1m} = 1/2a(t-2)^2 + v_0(t-2) + s_0 \quad \rightarrow \quad s_{1m} = 3(t-2)^2 \qquad 2 \le t \le 8.945$$

جابجایی موتور در این لحظه

$$\rightarrow \quad s_{1m} = 3(6.945)^2 = 144.7\, m$$

**مسئله 2-32**

یک موتورسوار از حالت سکون در نقطه A ، 2 ثانیه پس از عبور اتومبیلی با سرعت ثابت 120 km/h از نقطه A ، به حرکت در می آید. موتورسوار با آهنگ $6\ m/s^2$ شتاب میگیرد تا به حداکثر سرعت مجاز 150 km/h برسد و همین سرعت را حفظ کند. مطلوب است تعیین فاصله s از نقطه A تا نقطه ای که موتورسوار به اتومبیل می رسد.




مسافت طی شده توسط موتور پس از زمان رسیدن به سرعت ماکزیمم برابر است با :

$$s_m = s_{1m} + v\,t = 144.7 + 41.67(t - 8.945) \qquad t \geq 8.945$$

در لحظه رسیدن موتور به اتومبیل ، جابجایی دو وسیله با هم برابر خواهد بود :

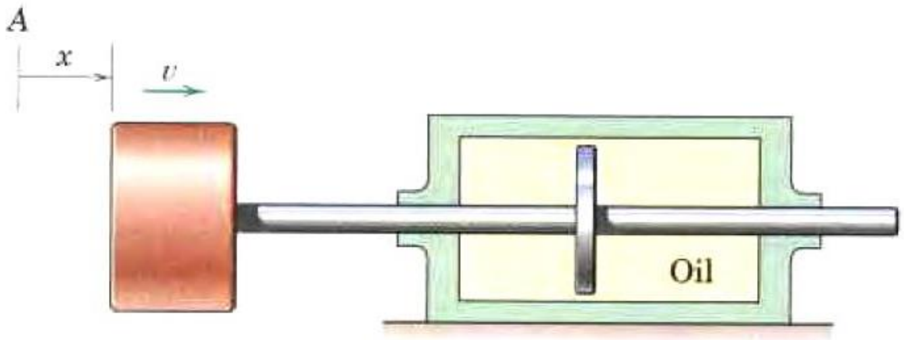
$$s_m = s_a \quad \rightarrow \quad 144.7 + 41.67(t - 8.945) = 33.33t$$

$$\downarrow$$

$$t = 27.343\ s \quad \rightarrow \quad s = 911.336\ m$$

**مسئله 2-44**

حرکت افقی پیستون و محور بر اثر مقاومت دیسک متصل به آن که در روغن حرکت میکند ، متوقف میشود. اگر سرعت پیستون در مکان A که در آن x = 0 و t = 0 است ، برابر v0 باشد ، و هرگاه شتاب کندشونده برابر a = - kv باشد ، عبارت هایی برای بیان سرعت v و مختصه مکان x بر حسب زمان t بدست آورید. v را بر حسب x نیز بیان کنید.




**حل:** شتاب تابعی از سرعت است. بنابراین خواهیم داشت :

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_0^x a\,dx \;\rightarrow\; \int_{v_0}^{v} \frac{v}{-kv}\,dv = \int_0^x dx$$

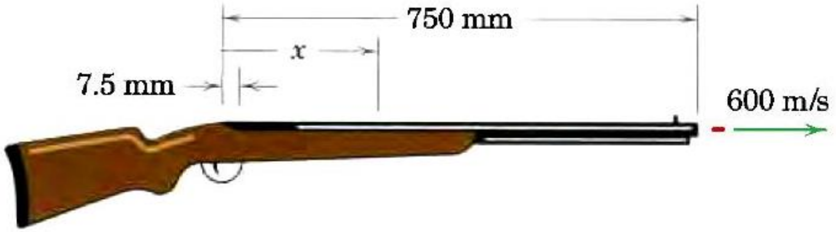
$$-\frac{1}{k}(v - v_0) = x \;\rightarrow\; \boxed{v = v_0 - kx}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt \;\rightarrow\; \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{-kv} = \int_0^t dt \;\rightarrow\; -\frac{1}{k}\ln\frac{v}{v_0} = t \;\rightarrow\; \boxed{v = v_0 e^{-kt}}$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v\,dt \;\rightarrow\; x = \int_0^t \left(v_0 e^{-kt}\right)dt \;\rightarrow\; \boxed{x = v_0\left(\frac{-1}{k}e^{-kt}\right)}$$

**مسئله 2-49**

فشار پشت یک گلوله تفنگ ، با تقریب خوب ، با مکان X گلوله در طول لوله تفنگ ، نسبت عکس دارد. بنابراین شتاب گلوله را می توان بصورت a=k/x نوشت که در آن k مقداری ثابت است. گلوله از حالت سکون در x=7.5 mm به حرکت در می آید و سرعت آن در هنگام خروج از دهانه لوله تفنگ 600 m/s است.مطلوب است محاسبه شتاب گلوله هنگامی که از وسط لوله تفنگ با x=375 mm می گذرد.




**حل**: شتاب تابعی از جابجایی است. بنابراین خواهیم داشت :

$$\int v\,dv=\int a\,ds \rightarrow \int_0^{600} v\,dv=\int_{7.5\times10^{-3}}^{750\times10^{-3}} \frac{k}{x}dx$$

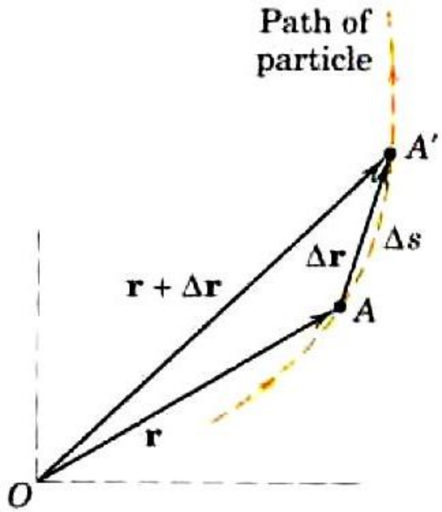
$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_0^{600}=k\ln x\Big|_{7.5\times10^{-3}}^{750\times10^{-3}} \longrightarrow K=39086.5 \longrightarrow a=\frac{39086.5}{x}$$

$$at\quad x=0.375m \Rightarrow a=\frac{k}{x}=\frac{39086.5}{0.375}=104230\ m/s^2=104.2\ km/s^2$$

## حرکت خمیده خط صفحه ای

اکنون حرکت ذره را در طول مسیری خمیده بررسی

می کنیم که در یک صفحه واقع است.




در لحظه t ذره در نقطه A است و موقعیت آن با بردار مکان $\mathbf{r}$ مشخص می شود.

اگر هم اندازه و هم امتداد بردار $\mathbf{r}$ در زمان t معلوم باشد ، آنگاه مکان ذره کاملا مشخص است.

در لحظه $t+\Delta t$ ذره در مکان A' است که موقعیت آن با $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ نشان داده می شود.

جابجائی ذره در فاصله زمانی $\Delta t$ برابر $\Delta\mathbf{r}$ است و مسیری که ذره در این زمان طی می کند $\Delta s$ می باشد.

اندازه و جهت بردار $\Delta\mathbf{r}$ مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است.

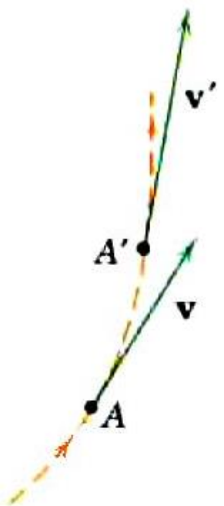
$\Delta\mathbf{r}$ یک کمیت برداری و $\Delta s$ اسکالر می باشد.

**سرعت میانگین** در این بازه زمانی برابر است با :

$$\mathbf{v}_{av}=\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

جهت: هم جهت با $\Delta\mathbf{r}$

اندازه: اندازه $\Delta\mathbf{r}$ تقسیم بر $\Delta s$

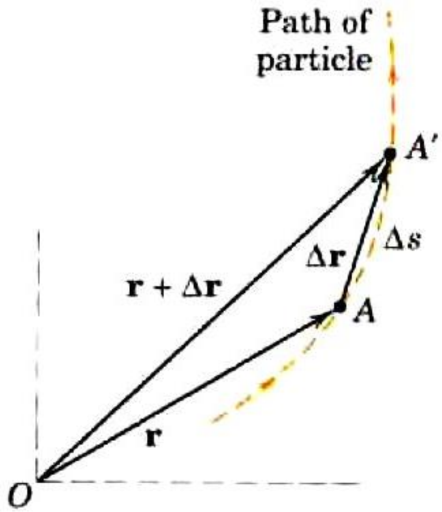



**سرعت لحظه ای :**

$$\mathbf{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

وقتی بازه زمانی به صفر میل میکند ، امتداد $\Delta\mathbf{r}$ به مماس بر مسیر نزدیک می شود.

بنابراین سرعت $\mathbf{v}$ همیشه برداری مماس بر مسیر است.




بنابراین سرعت را می توان بدین صورت تعریف نمود :

$$\boxed{\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\dot{\mathbf{r}}}$$

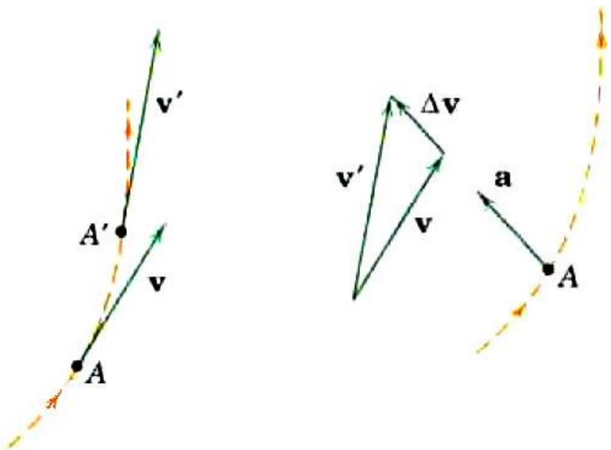
مشتق یک بردار ، خود برداری است که هم اندازه و هم امتداد دارد.

اندازه $\mathbf{v}$ کمیت اسکالری بصورت زیر است :

$$v=|\mathbf{v}|=\frac{ds}{dt}=\dot{s}$$

در فاصله زمانی $\Delta t$ و بین نقاط $A$ و $A'$ بردار سرعت تغییر می کند.

هم اندازه سرعت و جهت آن تغییر می کند.




$$\mathbf{v}'=\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}\longrightarrow\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}'-\mathbf{v}$$

**شتاب میانگین**

$$\mathbf{a}_{av}=\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

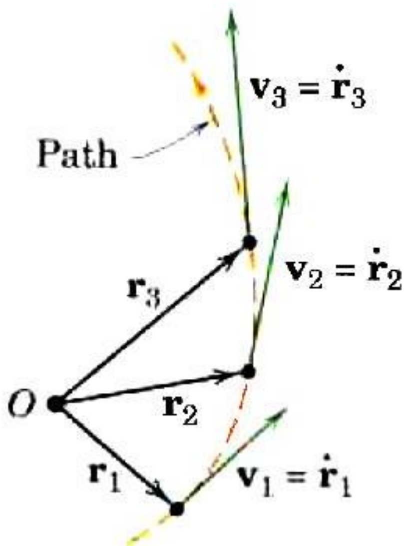
$$\boxed{\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\dot{\mathbf{v}}}\longleftarrow\mathbf{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

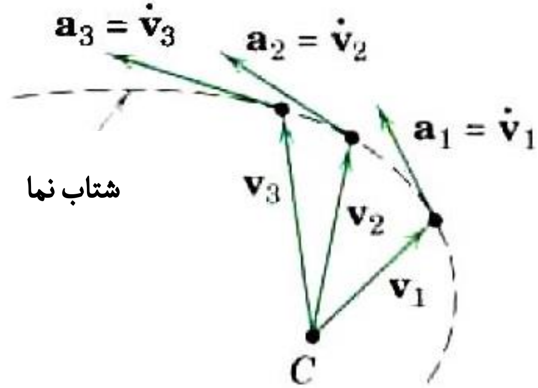
شتاب $\mathbf{a}$ هم شامل اثر تغییر در اندازه $\mathbf{v}$ و هم شامل اثر تغییر در امتداد $\mathbf{v}$ است.

اگر بردارهای سرعت در هر نقطه از مسیر را از نقطه اختیاری C ترسیم نماییم ، منحنی به نام شتاب نما تشکیل می شود.

شتاب در هر نقطه بر این منحنی شتاب نما مماس است.

شتاب همان رابطه ای را با سرعت دارد که سرعت با بردار مکان دارد.




---

از سه دستگاه مختصات مختلف برای توصیف روابط برداری

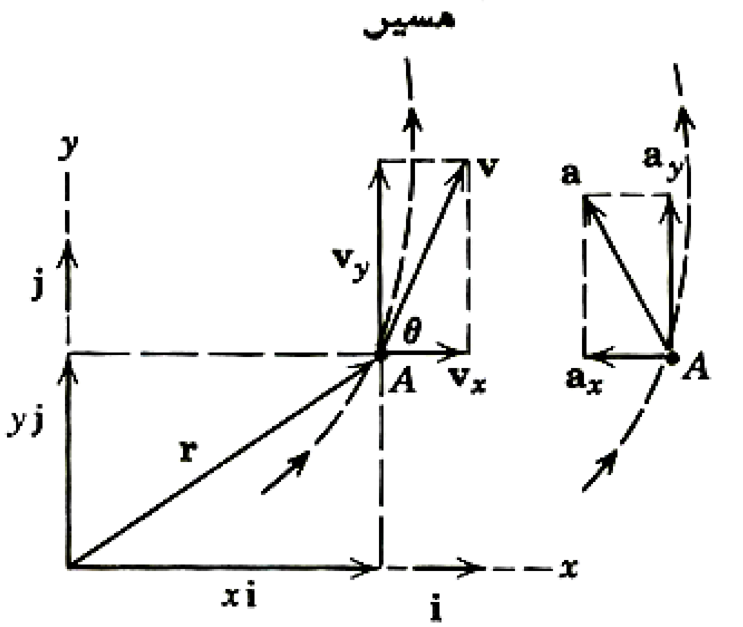
برای حرکت خمیده خط صفحه ای یک ذره استفاده می شود :

- ✓ دستگاه مختصات قائم (x-y)
- ✓ دستگاه قائم و مماسی (n-t)
- ✓ دستگاه مختصات قطبی

## دستگاه مختصات قائم (x-y)

این دستگاه مختصات بویژه برای توصیف حرکت در مواردی که مولفه های

x و y شتاب مستقلا تولید یا تعیین می شوند ، کارآمد است.




$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$$

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y}$$
$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y}$$

توجه شود که مشتق زمانی بردارهای یکه در دستگاه مختصات ثابت صفر است. زیرا اندازه ها و امتدادهای آنها ثابت است.

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad \rightarrow \quad |\mathbf{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 \quad \rightarrow \quad |\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

مشاهده می شود که نمایش حرکت خمیده خط صفحه ای در این دستگاه مختصات صرفا جمع آثار (برهم نهی) مولفه های

دو حرکت راست خط هم زمان در امتدادهای x و y است

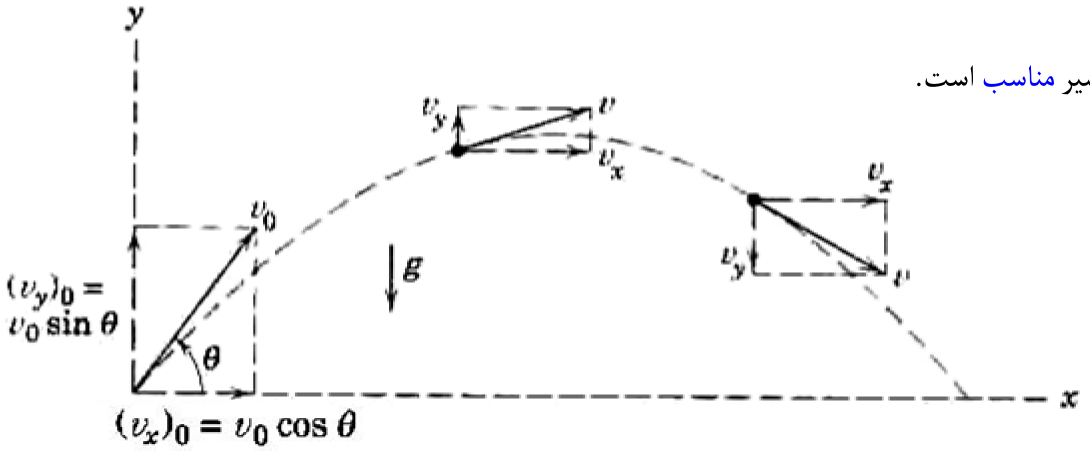
## حرکت پرتابه ای

یکی از کاربردهای مهم سینماتیک دو بعدی مسئله حرکت پرتابه است.

از پسای آیرودینامیکی و انحنا و چرخش زمین چشم پوشی می شود.

شتاب گرانش ثابت در نظر گرفته می شود.

با این فرضیات ، دستگاه مختصات قائم برای تحلیل مسیر مناسب است.




**مولفه های شتاب :**

$$a_x = 0$$
$$a_y = -g$$

با توجه به شتاب ، مولفه های سرعت و جابجایی برابر با :

راستای y
حرکت با شتاب ثابت

$$v_y = (v_y)_0 - g\,t$$
$$y = y_0 + (v_y)_0 t - 1/2 g t^2$$
$$v_y^2 = (v_y)_0^2 - 2g(y - y_0)$$

راستای x
حرکت با شتاب صفر
(سرعت یکنواخت)

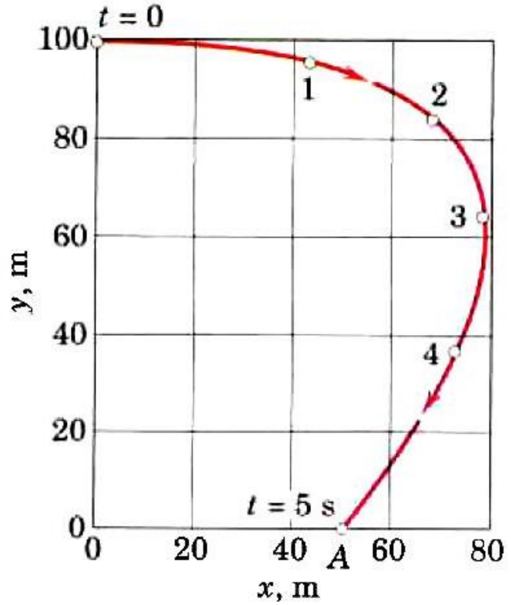
$$v_x = (v_x)_0$$
$$x = x_0 + (v_x)_0 t$$

**مسئله نمونه 2-5**

حرکت صفحه ای ذره ای با معادلات $v_x=50-16t$ و $y=100-4t^2$ تعریف می شود. به علاوه می دانیم که در $t=0$، داریم $x=0$.

الف) مسیر ذره را ترسیم نمایید.

ب) سرعت و شتاب آن را در هنگام رسیدن به نقطه $y=0$ بدست آورید.




**حل: الف)**

$$\int dx = \int v_x\, dt \rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t (50-16t)dt \rightarrow x = 50t - 8t^2$$

**ب)**

$$a_x = \dot{v}_x \rightarrow a_x = \frac{d}{dt}(50-16t) \rightarrow a_x = -16\ m/s^2$$

$$v_y = \dot{y} \rightarrow v_y = \frac{d}{dt}(100-4t^2) \rightarrow v_y = -8t$$

$$a_y = \dot{v}_y \rightarrow a_y = \frac{d}{dt}(-8t) \rightarrow a_x = -8\ m/s^2$$

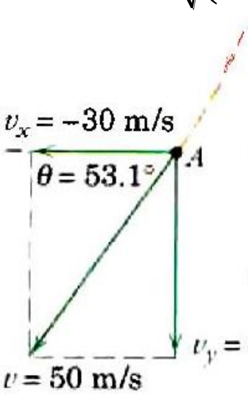
$$a = \sqrt{(-16)^2 + (-8)^2} = 17.89\ m/s^2$$

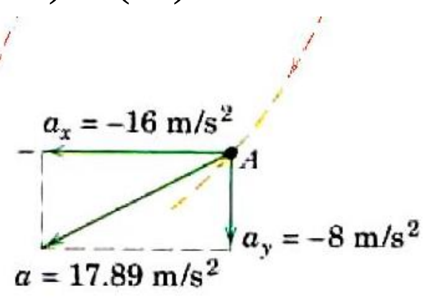
$$y = 0 \rightarrow 0 = 100 - 4t^2 \rightarrow t = 5\ s$$

$$v_x = 50 - 16(5) = -30\ m/s$$

$$v_y = -8(5) = -40\ m/s$$

$$v = \sqrt{(-30)^2 + (-40)^2} = 50\ m/s$$



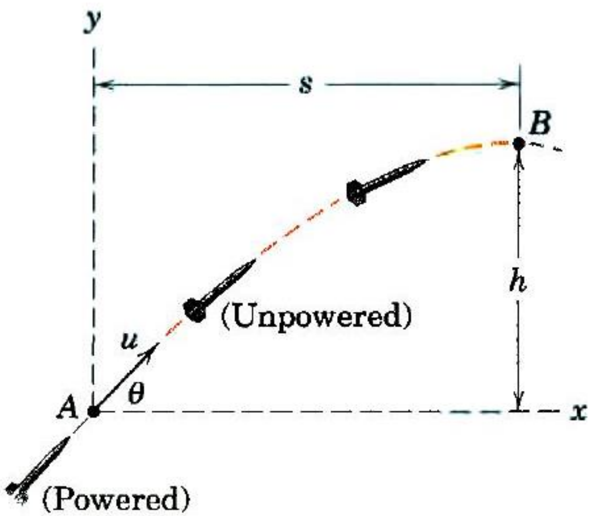



**مسئله نمونه 2-6**

موشکی در هنگام رسیدن به نقطه A همه سوخت خود را مصرف کرده است. در این نقطه سرعت موشک u است که با افق زاویه θ می سازد.

پس از این نقطه ، موشک پرواز بدون موتور را آغاز می کند و پس از طی مسافت $s$ از نقطه A ، ارتفاع ماکزیمم آن نیز به اندازه h افزایش یافته و به نقطه B می رسد.

مطلوب است تعیین عبارتهایی برای h و s ، زمان t پرواز از A تا B و معادله مسیر




**حل:** با چشم پوشی از مقاومت هوا داریم

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

$$v_x = (v_x)_0 = u\cos\theta \rightarrow dx = v_x dt$$

$$x = \int_0^t u\cos\theta dt \rightarrow x = ut\cos\theta$$

$$dv_y = a_y dt \rightarrow \int_{u\sin\theta}^{v_y} dv_y = \int_0^t (-g)dt \rightarrow v_y = u\sin\theta - gt$$

$$dy = v_y dt \rightarrow y = \int_0^t (u\sin\theta - gt)dt \rightarrow y = ut\sin\theta - 1/2 g t^2$$

موشک هنگامی به نقطه B می رسد که $\boxed{v_y = 0}$

بنابراین :

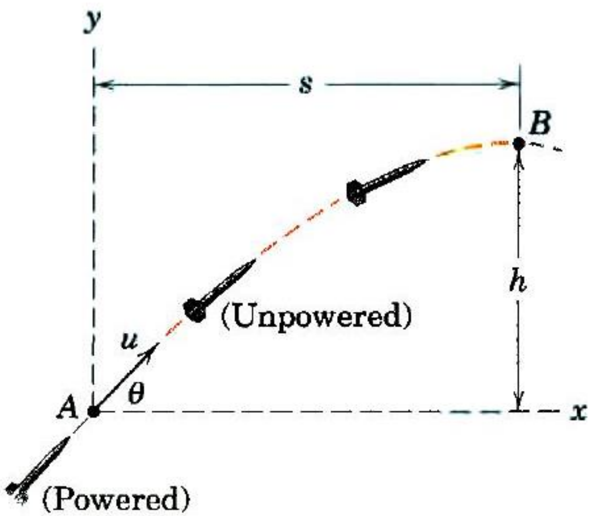
$$0 = u\sin\theta - gt \rightarrow \boxed{t = \frac{u\sin\theta}{g}} \rightarrow t = \frac{(v_y)_0}{g}$$

**مسئله نمونه 2-6**

موشکی در هنگام رسیدن به نقطه A همه سوخت خود را مصرف کرده است. در این نقطه سرعت موشک u است که با افق زاویه θ می سازد.

پس از این نقطه ، موشک پرواز بدون موتور را آغاز می کند و پس از طی مسافت $s$ از نقطه A ، ارتفاع ماکزیمم آن نیز به اندازه h افزایش یافته و به نقطه B می رسد.

مطلوب است تعیین عبارتهایی برای h و s ، زمان t پرواز از A تا B و معادله مسیر




با قرار دادن این زمان بدست آمده در معادله y ، مقدار h بدست می آید:

$$h = u\left(\frac{u\sin\theta}{g}\right)\sin\theta - 1/2g\left(\frac{u\sin\theta}{g}\right)^2 \rightarrow \boxed{h = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}}$$

$$h = \frac{\left(v_y\right)_0^2}{2g}$$

$$s = u\left(\frac{u\sin\theta}{g}\right)\cos\theta \rightarrow \boxed{s = \frac{u^2\sin 2\theta}{2g}}$$

با حذف t از معادلات مربوطه به x و y ، معادله کلی مسیر بدست می آید:

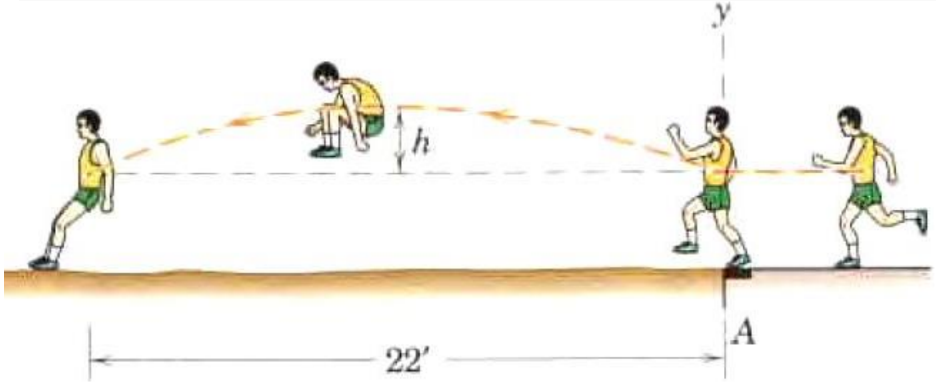
$$\boxed{y = x\tan\theta - \frac{g x^2}{2u^2}\sec^2\theta}$$

✓بدیهی است هرگاه $\theta = 45^{o}$ ، مقدار برد s ماکزیمم می شود.

✓مشاهده می شود که کل برد و زمان پرواز پرتابه ای که در بالای صفحه افقی شلیک شود ، دو برابر مقادیر متناظر s و t بدست آمده در این مسئله است.

قهرمان پرش طول با سرعت افقی 30 ft/sec به تخت پرش A نزدیک می شود. مطلوب است تعیین مولفه عمودی vy سرعت مرکز ثقل این قهرمان در محل تخته پرش.

همچنین خیز عمودی h مرکز ثقل این قهرمان چقدر است ؟




حل:

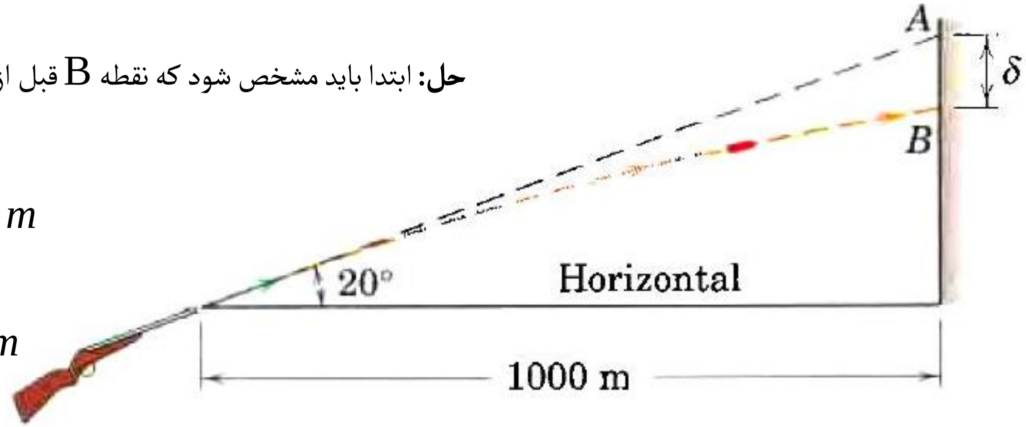
$$s=\frac{u^2\sin 2\theta}{2g}\rightarrow s=\frac{(u\sin\theta)(u\cos\theta)}{g}\rightarrow s=\frac{(v_y)(v_x)}{g}$$

$$\rightarrow v_y=\frac{s\,g}{v_x}=\frac{11\times 32.2}{30}=11.81\ ft/\sec$$

$$h=\frac{u^2\sin^2\theta}{2g}=\frac{(v_y)_0^2}{2g}=\frac{11.81^2}{2\times 32.2}=2.166\ ft$$

**مسئله 2-70**

لوله تفنگ نشان داده شده در شکل به سوی نقطه A هدف گیری می شود. مطلوب است محاسبه فاصله δ بین نقطه A و نقطه B واقع در زیر آن که محل اصابت گلوله است. سرعت دهانه گلوله 600 m/s است.




**حل:** ابتدا باید مشخص شود که نقطه B قبل از نقطه اوج پرتاب قرار دارد یا بعد آن . . .

$$h = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(600)^2(\sin 20^\circ)^2}{2(9.81)} = 2146.4\ m$$

$$s = \frac{u^2 \sin 2\theta}{2g} = \frac{(600)^2(\sin 40^\circ)}{2(9.81)} = 11794\ m$$

در نتیجه نقطه B خیلی قبل تر از نقطه اوج قرار دارد.

$$\int dx = \int v_x dt \rightarrow x = u\cos\theta t \rightarrow t = \frac{x}{u\cos\theta} = \frac{1000}{600\cos 20^\circ} = 1.7736 s$$

$$dv_y = a_y dt \rightarrow \int_{u\sin\theta}^{v_y} dv_y = \int_0^t (-g)dt \rightarrow v_y = u\sin\theta - g\,t$$

$$dy = v_y dt \rightarrow y = \int_0^t (u\sin\theta - g\,t)dt \rightarrow y = ut\sin\theta - 1/2 g\,t^2$$

$$y_B = 600\times 1.7736\times\sin(20^\circ) - 1/2\times 9.81\times 1.7736^2 = 348.53\ m$$

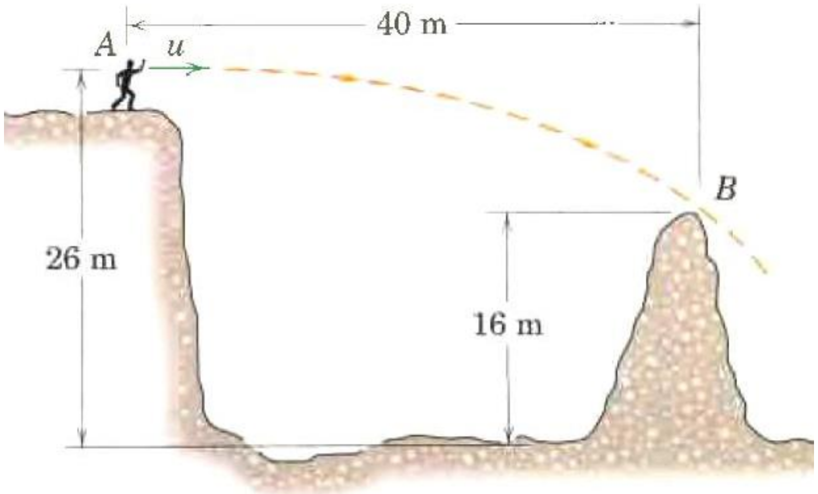
$$y_A = 1000\tan 20^\circ = 363.97\ m$$

$$\delta = y_A - y_B = 363.97 - 348.53$$

$$\boxed{\delta = 15.435\ m}$$

**مسئله 2-72**

این فرد سنگ را با کدام سرعت افقی u از نقطه A پرتاب کند تا از روی مانع B بگذرد؟




**حل:** سرعت اولیه فقط مولفه افقی دارد و مولفه قائم ندارد . . .

بنابراین حرکت در راستای y ، یک حرکت با شتاب ثابت (-g) و بدون سرعت اولیه است.

در حلیکه در راستای X شتاب حرکتی صفر بوده و سرعت اولیه u وجود دارد . . .

$$y = y_0 + (v_y)_0 t - 1/2 g t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{-2(y - y_0)}{g}}$$

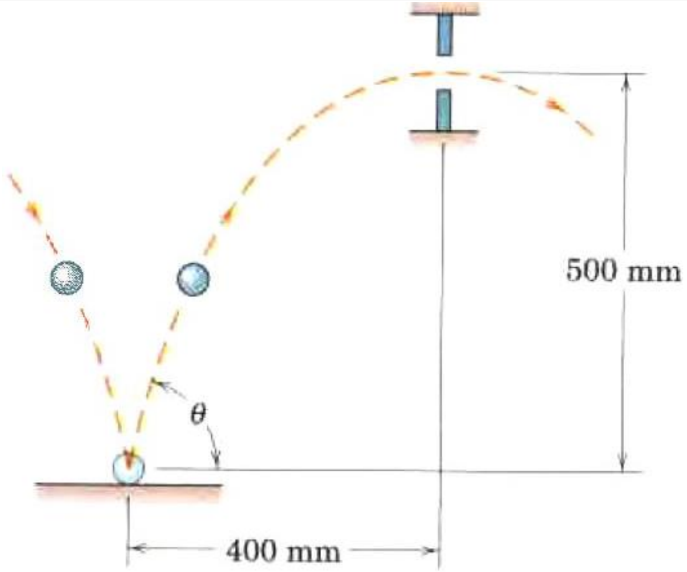
$$t = \sqrt{\frac{-2(-10)}{9.81}} = 1.428 \ s$$

$$x = x_0 + (v_x)_0 t \rightarrow x = u t \longrightarrow u = \frac{x}{t} = \frac{40}{1.428} = 28 \ m/s$$

**مسئله 2-89**

برای انطباق با معیارهای طراحی ، ساچمه های کوچک بلبرینگ باید در هنگام واجهش از روی صفحه ای سنگین مطابق شکل ، در اوج مسیر خود از سوراخی با ابعاد محدود بگذرند. مطلوب است محاسبه زاویه $\theta$ که سرعت واجهش با امتداد افقی تشکیل می دهد و سرعت $v$ ساچمه ها در هنگام عبور از سوراخ.

حل:




$$h=\frac{u^2\sin^2\theta}{2g} \qquad s=\frac{u^2\sin 2\theta}{2g}$$

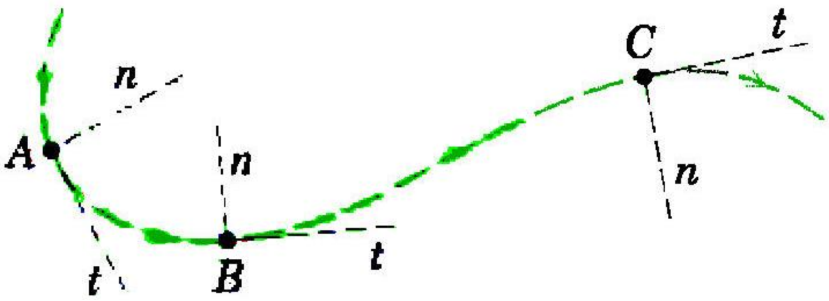
$$\frac{h}{s}=\frac{\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{2}\tan\theta$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{2h}{s}\right)=\tan^{-1}(2.5)=68.2^\circ$$

$$h=\frac{u^2\sin^2\theta}{2g} \rightarrow u^2=\frac{2gh}{\sin^2\theta}=\frac{2(9.81)(0.5)}{\left(\sin 68.2^\circ\right)^2}=11.38 \longrightarrow u=3.37\ m/s$$

$$v_x=(v_x)_0=u\cos\theta=3.37\cos(68.2^\circ)=1.25\ m/s$$

## دستگاه قائم و مماسی( n - t )

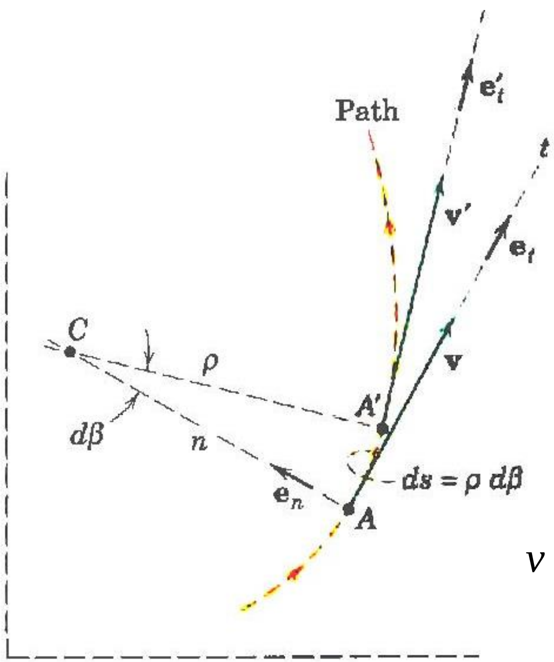



این دستگاه مختصات از مقادیر اندازه گیری شده در طول مماس t و قائم n بر مسیر ذره استفاده می کند.

جهت مثبت n در هر نقطه همواره به سمت مرکز انحنای مسیر فرض می شود.

برای بیان مکان ذره ای مثل $A$ از بردارهای یکه $\mathbf{e}_n$ در جهت n و $\mathbf{e}_t$ در جهت t استفاده می شود.

در طی زمان دیفرانسیل $dt$ ، ذره مسافت دیفرانسیل $ds$ را در طول منحنی از $A$ تا $A'$ می پیماید.




با توجه به شعاع انحنای مسیر $\rho$ :

$$ds = \rho d\beta$$

بنابراین اندازه سرعت برابر است با :

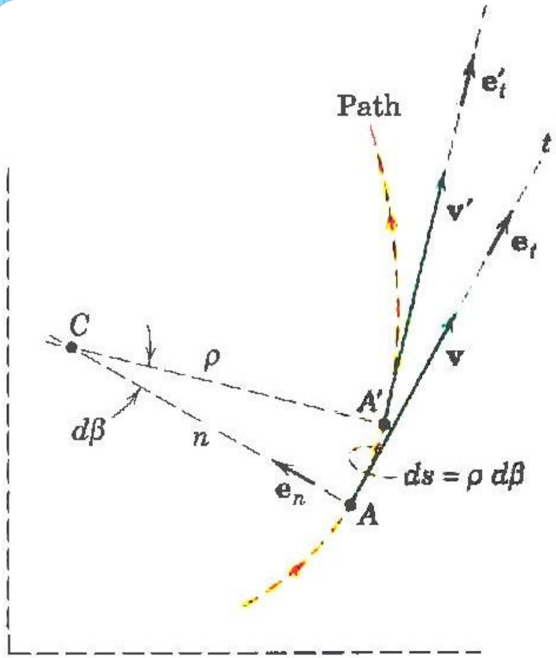
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\rho d\beta}{dt} = \rho\dot{\beta}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t = \rho\dot{\beta}\mathbf{e}_t}$$

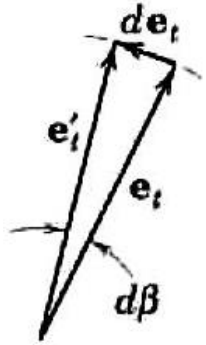
و اما شتاب :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\,\mathbf{e}_t)}{dt} = v\,\dot{\mathbf{e}}_t + \dot{v}\,\mathbf{e}_t$$

نکته : در این دستگاه ، بردارهای یکه مشتق غیرصفر دارند ، زیرا جهت آن ها دائما در حال تغییر است.




با توجه به اختلاف برداری $d\mathbf{e}_t$ بین بردار یکه های مماسی خواهیم داشت :



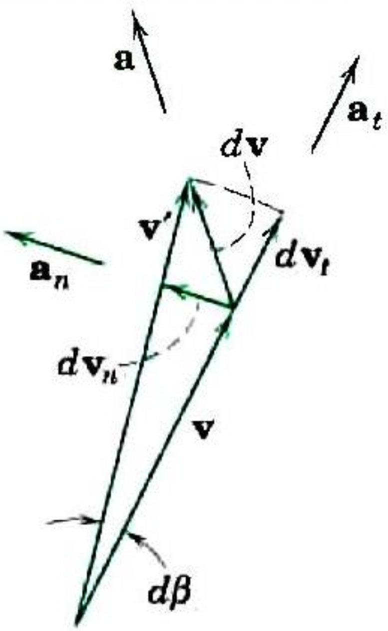

$$|d\mathbf{e}_t| = |\mathbf{e}_t|\, d\beta = d\beta$$

در شکل مشخص است که $d\mathbf{e}_t$ عمود بر $\mathbf{e}_t$ و در واقع در راستای $\mathbf{e}_n$ می باشد.

بنابراین :

$$d\mathbf{e}_t = d\beta\, \mathbf{e}_n \rightarrow \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\beta}{dt}\mathbf{e}_n \longrightarrow \boxed{\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\beta}\mathbf{e}_n}$$

در نتیجه بردار شتاب برابر است با :




$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n + \dot{v}\mathbf{e}_t} \longrightarrow \begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{\rho} = \rho\dot{\beta}^2 = v\dot{\beta} \\ a_t &= \dot{v} = \ddot{s} \end{aligned} \longrightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

نکته : جهت مولفه قائم شتاب $a_n$ همواره به طرف مرکز انحناست.

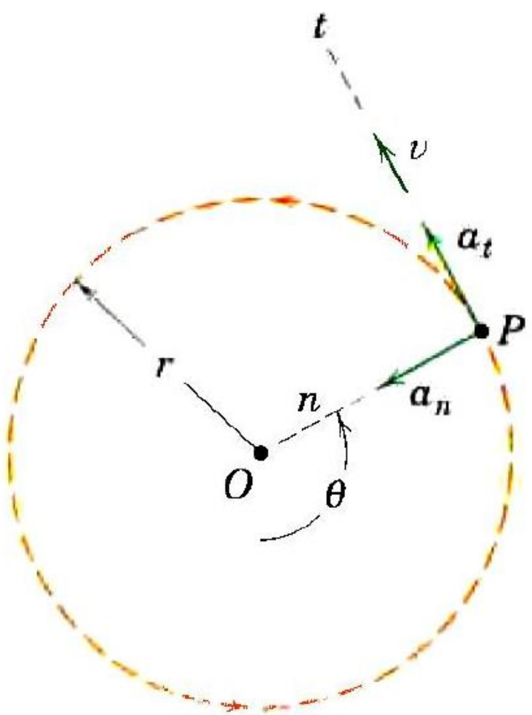
اگر اندازه سرعت $v$ در حال افزایش باشد ، مولفه مماسی شتاب در جهت $t$ مثبت است.

و هرگاه سرعت $v$ در حال کاهش باشد ، مولفه مماسی شتاب در جهت $t$ منفی است.

## حرکت دایره ای

حالت خاص و مهمی از حرکت خمیده خط صفحه ای است که در آن شعاع انحنای $\rho$ به شعاع ثابت $r$ تبدیل شده و زاویه $\beta$ جای خود را به زاویه $\theta$ می دهد که از هر مبدا شعاعی مناسب تا $OP$ اندازه گیری می شود.

مولفه های سرعت و شتاب حرکت دایره ای ذره $P$ چنین نوشته می شود :




$$v = r\dot{\theta}$$

$$a_n = v^2/r = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta}$$

$$a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta}$$

**مسئله 2-103**

ذره ای روی مسیری دایره ای به شعاع 0.3 m حرکت می کند. مطلوب است محاسبه اندازه a شتاب ذره

الف- هرگاه سرعت آن ثابت و برابر 0.6 m/s باشد.

ب- هرگاه سرعت آن 0.6 m/s باشد ، اما با آهنگ 0.9 m/s در هر ثانیه ، افزایش یابد.

**حل)**

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(0.6)^2}{0.3} = 1.2 \;\; m/s^2$$

**الف)**

$$a_t = \dot{v} = 0 \quad \rightarrow \quad a = a_n = 1.2 \;\; m/s$$

**ب)**

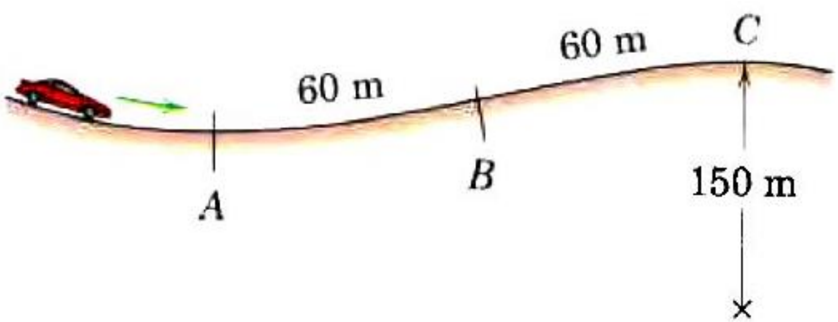
$$a_t = \dot{v} = 0.9 \; m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(0.9)^2 + (1.2)^2} = 1.5 \;\; m/s^2$$

**مسئله نمونه 2-7**

راننده اتومبیلی برای عبور از پستی و بلندی های جاده ترمز می گیرد تا شتاب کندشونده یکنواخت پیدا کند. سرعت اتومبیل در نقطه A واقع در قعر گودی 100 km/h است و در نقطه C واقع در بالای بلندی به 50 km/h می رسد. اگر سرنشینان خودرو در نقطه A شتاب $3\ m/s^2$ را تحمل کنند. مطلوب است:

الف- شعاع انحنای ρ در نقطه A  ب- شتاب در نقطه عطف B  ج- شتاب کل در نقطه C




**حل:** ابتدا شتاب کندشونده ثابت را که همان شتاب مماسی مسیر است بدست می آوریم :

$$v^2 - v_0^2 = 2a_t s \rightarrow a_t = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

$$v_0 = v_A = 100 \times \frac{1000}{3600} = 27.8\ m/s$$

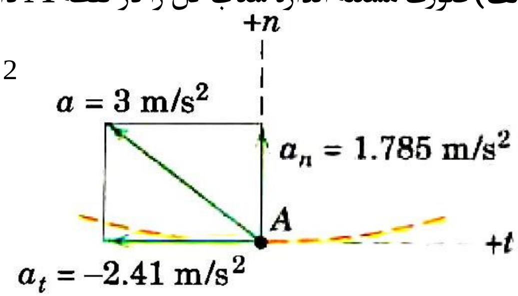
$$v = v_C = 50 \times \frac{1000}{3600} = 13.89\ m/s$$

$$\rightarrow a_t = \frac{13.89^2 - 27.8^2}{2 \times 120} = -2.41\ m/s^2$$

**الف)** صورت مسئله اندازه شتاب کل را در نقطه A داده است. بنابراین می توان اندازه شتاب قائم در این نقطه را بدست آورد

$$a^2 = a_n^2 + a_t^2 \rightarrow a_n^2 = 3^2 - 2.41^2 = 3.19 \rightarrow a_n = 1.785\ m/s^2$$

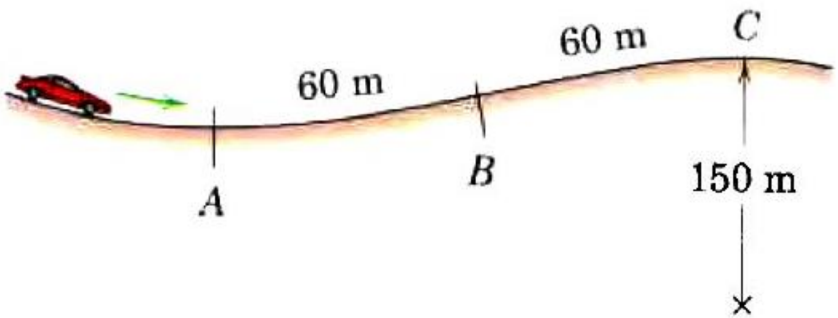
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{27.8^2}{1.785} = 432\ m$$



**مسئله نمونه 2-7**

راننده اتومبیلی برای عبور از پستی و بلندی های جاده ترمز می گیرد تا شتاب کندشونده یکنواخت پیدا کند. سرعت اتومبیل در نقطه A واقع در قعر گودی 100 km/h است و در نقطه C واقع در بالای بلندی به 50 km/h می رسد. اگر سرنشینان خودرو در نقطه A شتاب $3\ m/s^2$ را تحمل کنند. مطلوب است:

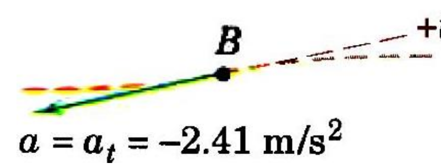
الف- شعاع انحنای ρ در نقطه A  ب- شتاب در نقطه عطف B  ج- شتاب کل در نقطه C




**ب)** چون شعاع انحنا در نقطه عطف بینهایت است :

$$a_n = 0$$

$$a = a_t = -2.41\ m/s^2$$



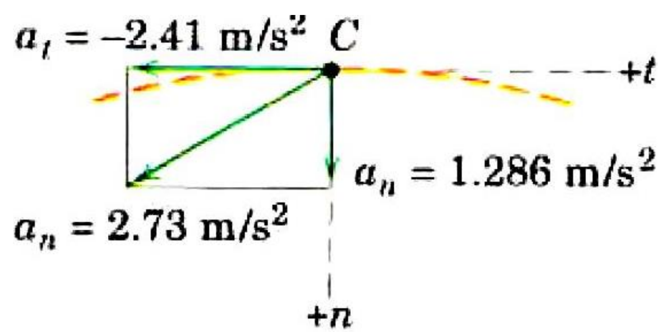

**ج)** در نقطه C سرعت را داریم ، پس

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{13.89^2}{150} = 1.286\ m/s^2 \qquad a_t = -2.41\ m/s^2$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a} = 1.286\mathbf{e}_n - 2.41\mathbf{e}_t \quad m/s^2$$

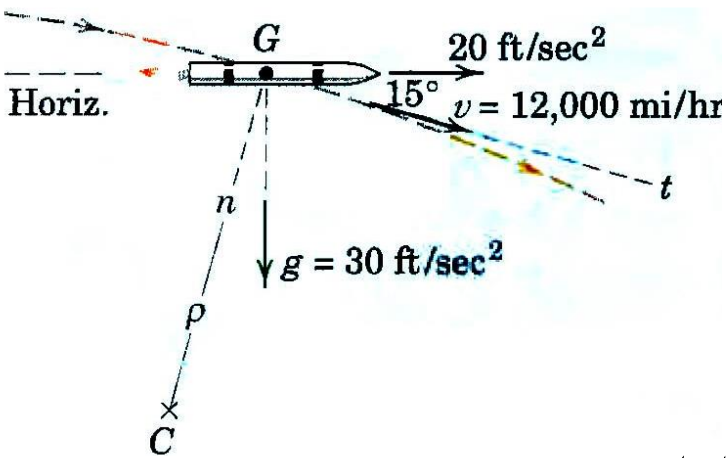
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(1.286)^2 + (-2.41)^2} = 2.73\ m/s^2$$



**مسئله نمونه 2-8**

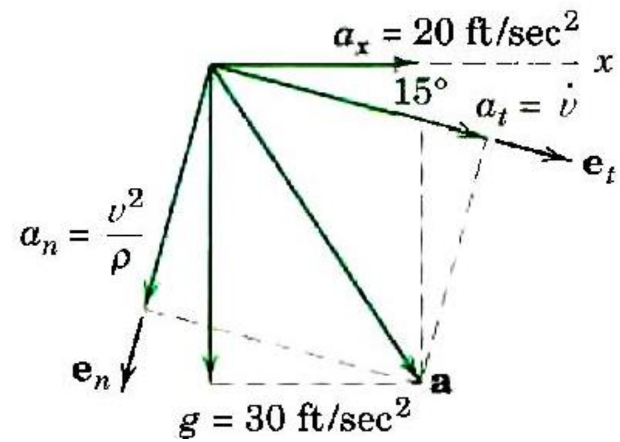
موشکی در مرحله پرواز موتوری در ارتفاع بالا ، امتداد افقی محور خود را حفظ می کند. نیروی رانش ، مولفه شتاب افقی $20\ ft/sec^2$ را به موشک می دهد و مولفه شتاب رو به پایین ، ناشی از جاذبه گرانشی در آن ارتفاع برابر است با $g=30 ft/sec^2$. در شکل ، سرعت مرکز جرم G موشک در راستای $15^o$ مسیر پرواز آن $12000\ mi/hr$ است. در این وضعیت مطلوب است: الف- شعاع انحنای مسیر پرواز ب- آهنگ افزایش سرعت v

ج- آهنگ زاویه ای خط شعاعی واصل از G تا مرکز انحنای C $\dot{\beta}$ د- عبارتی برداری برای بیان شتاب کل **a**




**حل:** ابتدا شتاب در دو راستای مماسی و قائم را بدست می آوریم:

$$a_t = 20\cos 15^\circ + 30\sin 15^\circ = 27.1 \quad ft/\sec^2$$
$$a_n = -20\sin 15^\circ + 30\cos 15^\circ = 23.8 \quad ft/\sec^2$$




**الف)** محاسبه شعاع انحنا

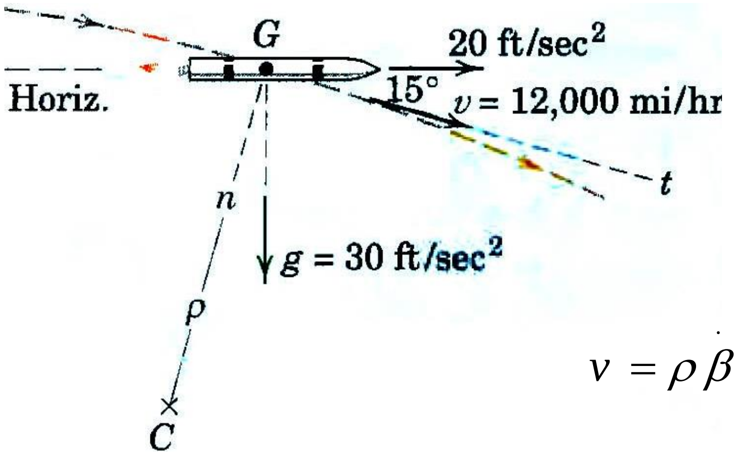
$$1\ mi/hr = \left(\frac{44}{30}\right) ft/\sec$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(12000 \times \frac{44}{30}\right)^2}{23.8} = 13.01 \times 10^6\ ft$$

**مسئله نمونه 2-8**

موشکی در مرحله پرواز موتوری در ارتفاع بالا ، امتداد افقی محور خود را حفظ می کند. نیروی رانش ، مولفه شتاب افقی $20\ ft/sec^2$ را به موشک می دهد و مولفه شتاب رو به پایین ، ناشی از جاذبه گرانشی در آن ارتفاع برابر است با $g=30 ft/sec^2$. در شکل ، سرعت مرکز جرم G موشک در راستای $15^o$ مسیر پرواز آن $12000\ mi/hr$ است. در این وضعیت مطلوب است: الف- شعاع انحنای مسیر پرواز ب- آهنگ افزایش سرعت v

ج- آهنگ زاویه ای $\dot{\beta}$ خط شعاعی واصل از G تا مرکز انحنای C د- عبارتی برداری برای بیان شتاب کل **a**




**ب)** آهنگ افزایش سرعت v :

$$\dot{v} = a_t = 27.1 \quad ft/\sec^2$$

**ج)**

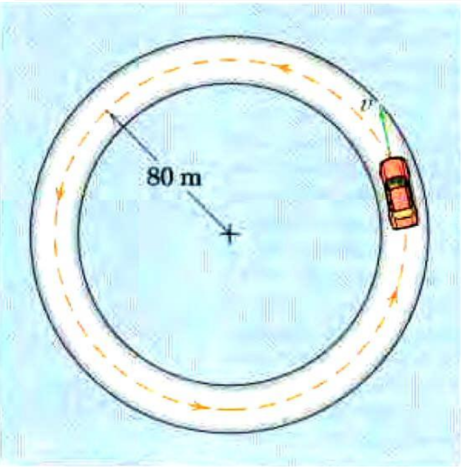
$$v = \rho\dot{\beta} \rightarrow \dot{\beta} = \frac{v}{\rho} = \frac{12000 \times \frac{44}{30}}{13.01\times10^6} = 13.53\times10^{-4} \quad rad/\sec$$

**د)** عبارت کلی شتاب مرکز جرم موشک

$$\mathbf{a} = 23.8\,\mathbf{e}_n + 27.1\mathbf{e}_t \quad ft/\sec^2$$

**مسئله 2-101**

یک اتومبیل آزمایشی از حالت سکون روی مسیر دایره ای افقی به شعاع 80 m به حرکت در می آید و سرعت خود را با آهنگی یکنواخت افزایش می دهد تا در مدت 10 ثانیه به سرعت 100 km/h برسد. مطلوب است تعیین اندازه a شتاب کل این اتومبیل ، 8 ثانیه پس از شروع حرکت.




**حل:** چون حرکت دایره ای است از معادلات مربوط به مختصات n-t استفاده می شود.

با توجه به صورت مسئله ، اندازه شتاب مماسی ثابت است ، بنابراین:

$$v = \cancel{v_0}^{\,0} + a_t t \quad \longrightarrow \quad a_t = \frac{v}{t} = \frac{100 \times \frac{1000}{3600}}{10} = 2.78\ m/s^2$$

برای محاسبه مولفه قائم شتاب ، نیازمند اندازه سرعت در ثانیه 8 هستیم :

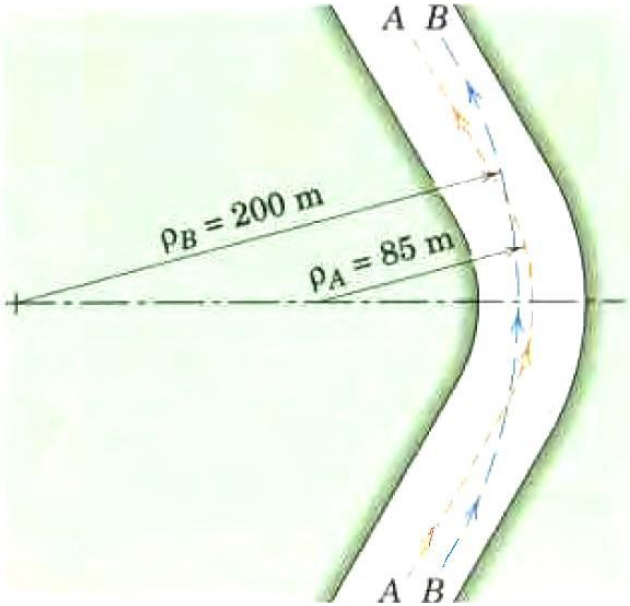
$$v_{(8)} = 2.78 \times 8 = 22.2\ m/s \quad \longrightarrow \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{22.2^2}{80} = 6.17\ m/s^2$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{2.78^2 + 6.17^2} = 6.77\ m/s^2$$

در شکل دو مسیر ممکن برای عبور از پیچی در بخش افقی مسیر مسابقه نشان داده شده است. مسیر A-A خط مرکزی جاده را دنبال می کند و شعاع انحنای آن $\rho A=85$ m ، و مسیر B-B از عرض جاده استفاده می کند تا از مزیت شعاع انحنای بزرگ تر برخوردار شود که در این حالت $\rho B=200$ m.

راننده ها در هنگام پیچیدن سرعت خود را به اندازه ای کاهش می دهند که شتاب جانبی از 0.8g بالاتر نرود.

مطلوب است تعیین ماکزیمم سرعت برای هر مسیر.




حل:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow v = \sqrt{a_n \rho} = \sqrt{0.8g\,\rho}$$

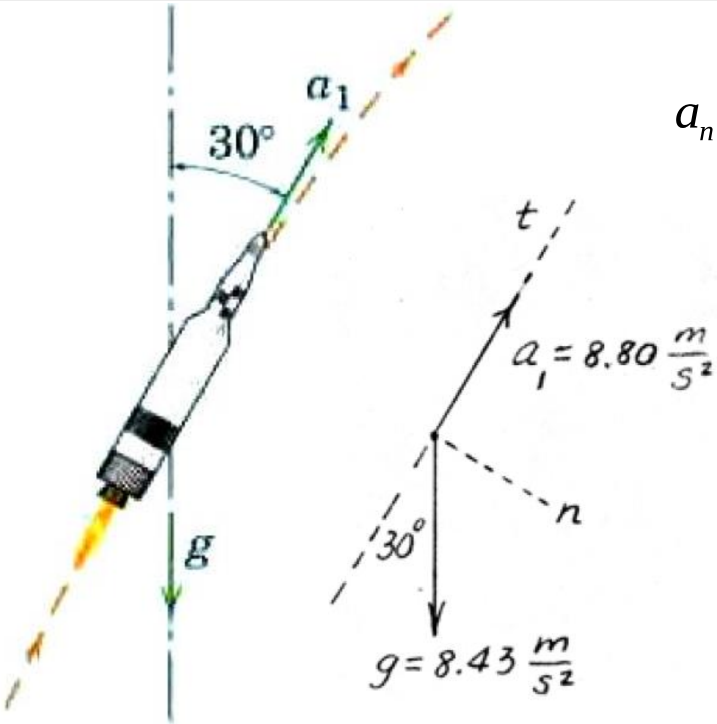
$$v_A = \sqrt{0.8g\,\rho_A} = \sqrt{0.8 \times 9.81 \times 85} = 25.8 \ m/s$$

$$v_B = \sqrt{0.8g\,\rho_B} = \sqrt{0.8 \times 9.81 \times 200} = 39.6 \ m/s$$

بدیهی است که در حالت دوم ، راننده می تواند سرعت بالاتری داشته باشد . . .

**مسئله 2-119**

موشکی که در ارتفاع 500 km بر فراز جو حرکت می کند ، در غیاب نیروهایی غیر از جاذبه گرانشی ، شتاب سقوط آزادی برابر $g=8.43\ m/s^2$ خواهد داشت. اما به علت وجود نیروی رانش ، موشک یک مولفه شتاب اضافی برابر $8.8\ m/s^2$ دارد که بر مسیر حرکت آن مماس است و در لحظه موردنظر با امتداد عمودی زاویه $30^o$ تشکیل می دهد. سرعت $v$ موشک در این مکان 30000 km/h است. مطلوب است تعیین شعاع انحنای $\rho$ مسیر و آهنگ تغییر $v$ با زمان.




**حل:**

$$a_n = g\sin 30^\circ = 8.43\times 0.5 = 4.215\ m/s^2$$

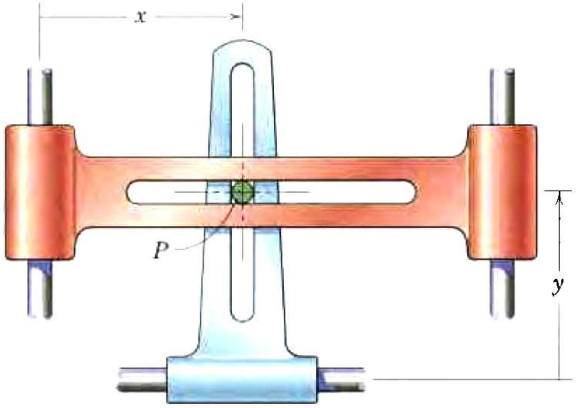
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(\frac{30000}{3.6}\right)^2}{4.215} = 16.476\times 10^6\ m = 16476\ km$$

$$\dot{v} = a_t = a_1 - g\cos 30^\circ = 8.8 - 8.43\cos 30^\circ = 1.499\ m/s^2$$

**مسئله 2-132**

راهنماهای شیاردار طوری طراحی شده اند که در طی یک فاصله کوتاه طبق رابطه x=16-12t+4t² و y=2+15t-3t² حرکت کنند که در آن x و y برحسب میلیمتر است. مطلوب است تعیین شعاع انحنای ρ مسیر پین مقید p در لحظه ای که t=2s.



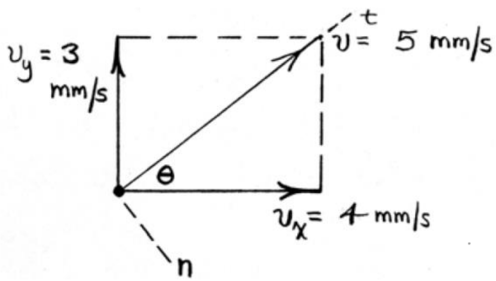

حل:

$$x = 16 - 12t + 4t^2 \qquad y = 2 + 15t - 3t^2$$

$$\dot{x} = v_x = -12 + 8t \qquad \dot{y} = v_y = 15 - 6t$$

$$\ddot{x} = a_x = 8 \qquad \ddot{y} = a_y = -6$$

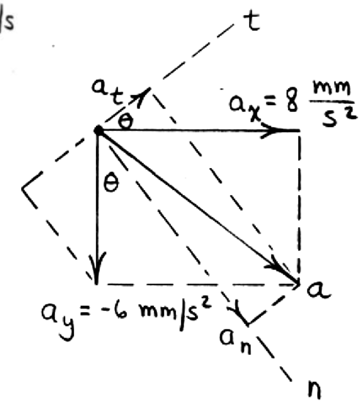
$$t = 2s \;\rightarrow\; v_x = 4,\;\; v_y = 3,\;\; a_x = 8,\;\; a_y = -6\,.$$




$$a_t = 8\cos\theta - 6\sin\theta = 8\times\frac{4}{5} - 6\times\frac{3}{5} = 2.8\ mm/s^2$$

$$a_n = 6\cos\theta + 8\sin\theta = 6\times\frac{4}{5} + 8\times\frac{3}{5} = 9.6\ mm/s^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \;\rightarrow\; \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_x^2 + v_y^2}{a_n} = \frac{25}{9.6} = 2.6\ \ mm$$

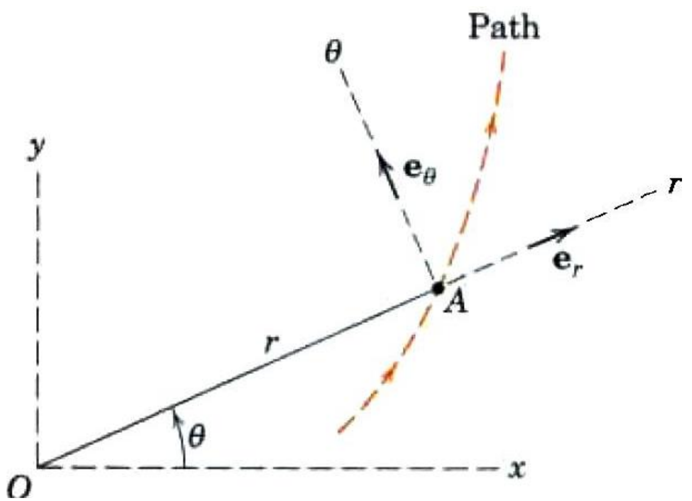


## دستگاه قطبی ( r - θ )

در این دستگاه مختصات ، مکان ذره توسط فاصله شعاعی r از نقطه ای ثابت ،  و

اندازه زاویه θ تا خط شعاعی که ذره روی آن است ، تعیین می شود.

از یک خط ثابت اختیاری ، مانند محور  x ، به عنوان مرجع اندازه گیری θ استفاده می شود.



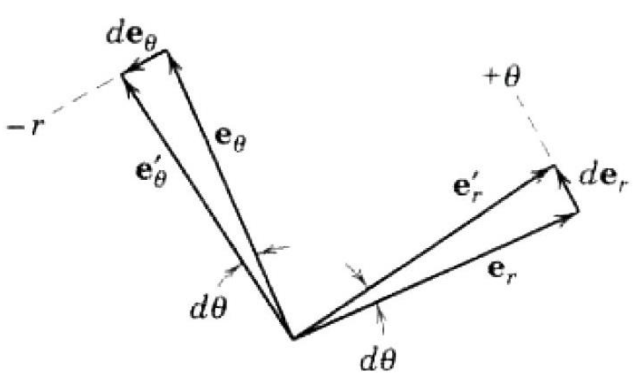

بردارهای یکه $e_r$ و $e_\theta$ به ترتیب در جهات مثبت r و θ تعریف می شوند.

مکان ذره A را می توان بدین صورت نمایش داد :

$$\boxed{\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r}$$

به منظور مشتق گیری از رابطه فوق و بدست آوردن روابط سرعت و شتاب ،

به مشتق بردارهای یکه نیز نیازمند هستیم . . .



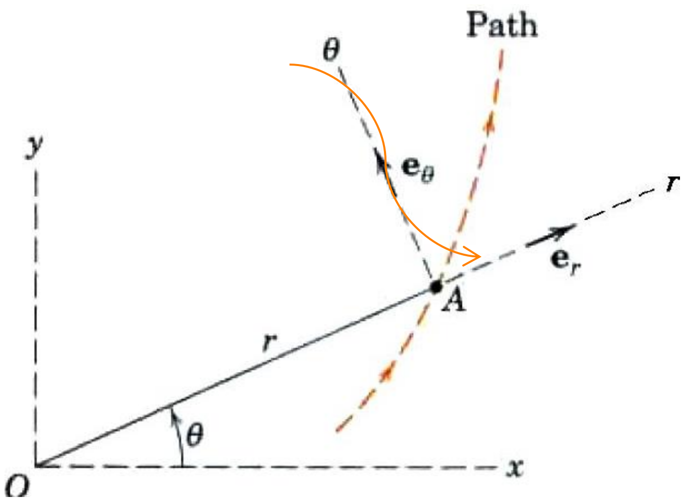

$$d\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r d\theta, \quad d\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta d\theta$$

با تقسیم طرفین

معادلات بر dt

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta \qquad \text{and} \qquad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\mathbf{e}_r$$

## سرعت




$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$v_r = \dot{r}\,,\; v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

مولفه $r$ بردار $\mathbf{v}$ ، آهنگ افزایش طول بردار $\mathbf{r}$ است. مولفه $\theta$ نیز از چرخش $\mathbf{r}$ ناشی می شود.

## شتاب

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \left(\ddot{r}\,\mathbf{e}_r + \dot{r}\,\dot{\mathbf{e}}_r\right) + \left(\dot{r}\,\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta\right)$$

با قراردادن مقادیر مشتق بردارهای یکه در رابطه فوق ، و مرتب کردن جملات خواهیم داشت :

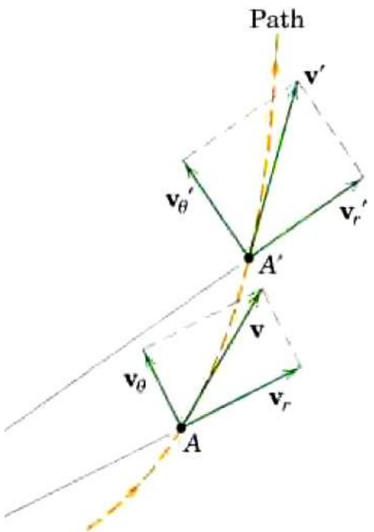
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

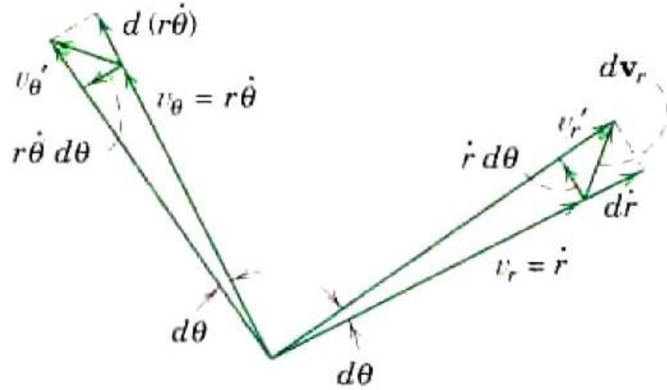
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\;,\; a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

$$\boxed{a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)}$$

## تعبیر هندسی



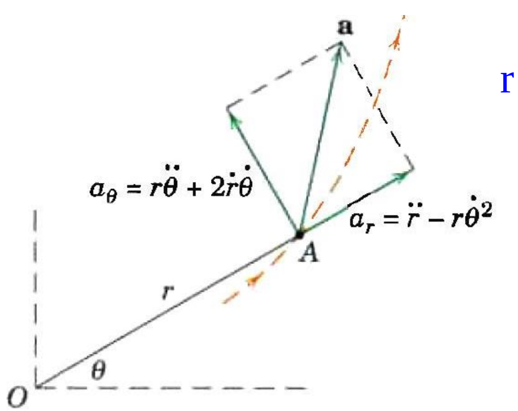

مولفه های مختلف شتاب :

1. تغییر اندازه Vr: $dv_r = d\dot{r} \longleftarrow d\dot{r}/dt = \ddot{r}$ در جهت مثبت r

2. تغییر امتداد Vr: $v_r d\theta = \dot{r}\, d\theta \longleftarrow \dot{r}\, d\theta/dt = \dot{r}\,\dot{\theta}$ در جهت مثبت θ

3. تغییر اندازه Vθ: $dv_\theta = d(r\dot{\theta}) \longleftarrow d(r\dot{\theta})/dt = r\ddot{\theta} + \dot{r}\,\dot{\theta}$ در جهت مثبت θ

4. تغییر امتداد Vθ: $v_\theta d\theta = r\dot{\theta}\, d\theta \longleftarrow r\dot{\theta}\, d\theta/dt = r\dot{\theta}^2$ در جهت منفی r




$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

# حرکت دایره ای

حرکت روی مسیر دایره ای موجب ثابت بودن شعاع r می شود.

بنابراین معادلات سرعت و شتاب در مختصات قطبی بصورت زیر تغییر می کنند :

**سرعت**

$$v_r = \dot{r} \quad \rightarrow \quad v_r = 0$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad v_\theta = r\dot{\theta}$$

**شتاب**

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \rightarrow \quad a_r = -r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad a_\theta = r\ddot{\theta}$$

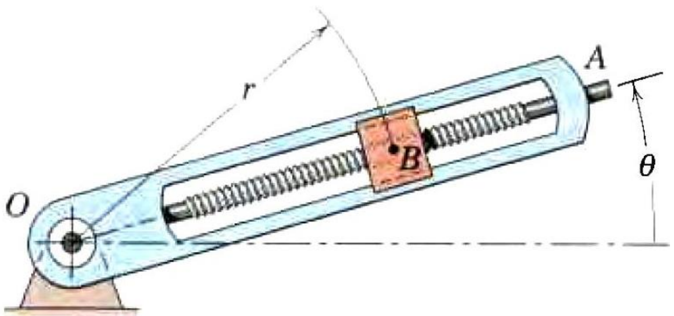
این توصیف همانی است که برای مولفه های عمود بر هم n و t ، در حالتی که امتدادهای θ و t بر هم منطبق بوده ، اما جهت مثبت r در جهت منفی n است ، بدست آمد.

بنابراین برای حرکت دایره ای که مرکز آن بر مبدا مختصات قطبی واقع است ، داریم :

$$a_r = -a_n$$

**مسئله نمونه 2-9**

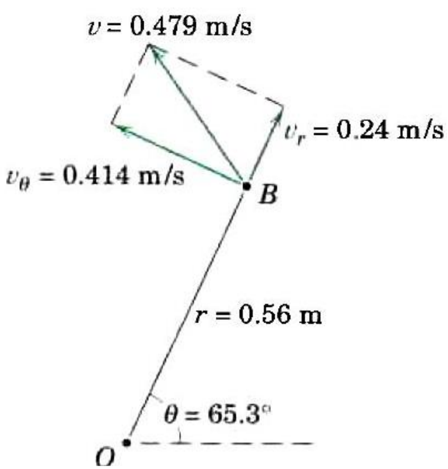
چرخش بازوی شعاعی شیاردار از رابطه $\theta = 0.2t + 0.02t^3$ بدست می آید که در آن $\theta$ بر حسب رادیان و t بر حسب ثانیه است. بطور همزمان پیچ قدرت واقع در بازو با لغزنده B درگیر می شود و فاصله آن را از نقطه O ، طبق رابطه $r = 0.2 + 0.04t^2$ تنظیم می کند که در آن r بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. مطلوب است تعیین اندازه های سرعت و شتاب لغزنده در لحظه t = 3 s




**حل:**

$$r = 0.2 + 0.04t^2 \qquad r_3 = 0.56\ m$$
$$\dot{r} = 0.08t \quad \Longrightarrow \quad \dot{r}_3 = 0.24\ m/s$$
$$\ddot{r} = 0.08 \qquad \ddot{r}_3 = 0.08\ m/s^2$$

$$\theta = 0.2t + 0.02t^3 \qquad \theta_3 = 1.14\ rad = 65.3^\circ$$
$$\dot{\theta} = 0.2 + 0.06t^2 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta}_3 = 0.74\ rad/s$$
$$\ddot{\theta} = 0.12t \qquad \ddot{\theta}_3 = 0.36\ rad/s^2$$

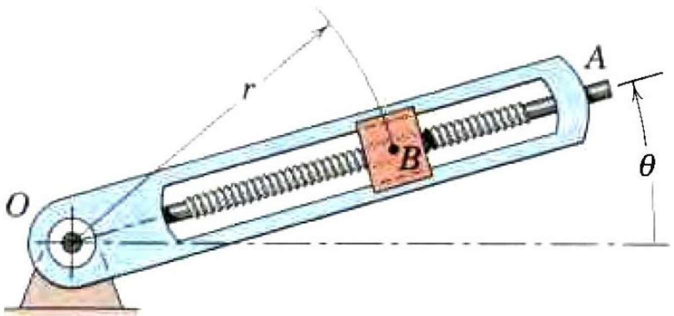



$$\boxed{t = 3\ s}$$

$$v_r = \dot{r} \qquad v_r = 0.24\ m/s$$
$$v_\theta = r\dot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad v_\theta = 0.56 \times 0.74 = 0.414\ m/s$$
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} \qquad v = \sqrt{(0.24)^2 + (0.414)^2} = 0.479\ m/s$$

**مسئله نمونه 2-9**

چرخش بازوی شعاعی شیاردار از رابطه $\theta = 0.2t + 0.02t^3$ بدست می آید که در آن θ بر حسب رادیان و t بر حسب ثانیه است. بطور همزمان پیچ قدرت واقع در بازو با لغزنده B درگیر می شو.د و فاصله آن را از نقطه O، طبق رابطه $r = 0.2 + 0.04t^2$ تنظیم می کند که در آن r بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. مطلوب است تعیین اندازه های سرعت و شتاب لغزنده در لحظه t = 3 s




$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

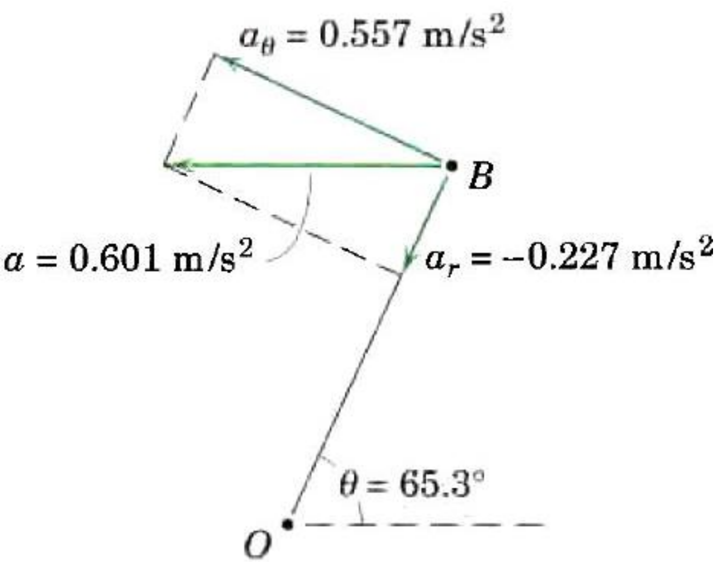
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

$\boxed{t = 3\ \text{s}}$

$$a_r = 0.08 - 0.56 \times 0.74^2 = -0.227 \quad m/s^2$$

$$a_\theta = 0.56 \times 0.36 + 2 \times 0.24 \times 0.74 = 0.557 \quad m/s^2$$

$$a = \sqrt{(-0.227)^2 + (0.557)^2} = 0.601 \quad m/s^2$$

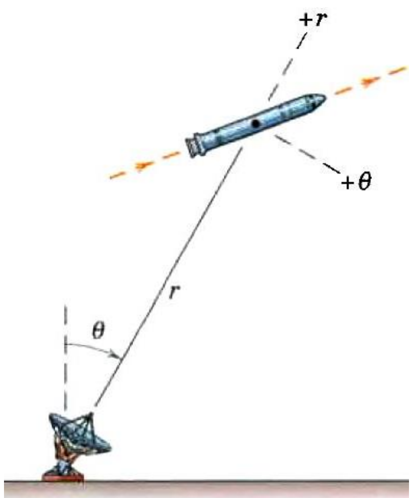


**مسئله نمونه 10-2**

رادار ردیابی در صفحه عمودی مسیر موشکی واقع است که در مرحله پرواز بدون موتور بر فراز جو زمین است. در لحظه ای مطابق شکل ، که داده های ردیابی نشان می دهند که $\theta = 30^\circ$ ، $r = 25\times10^4\ ft$ و $\dot{r} = 4000\, ft/s$ . شتاب موشک فقط از جاذبه گرانشی ناشی می شود و در ارتفاع پرواز موشک برابر است با $31.4\ ft/\sec^2$ در امتداد عمودی و به طرف پایین.

در این شرایط ، مطلوب است تعیین سرعت **v** موشک و مقادیر $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ ، $\dot{\theta} = 0.8\ \text{deg}/\sec$

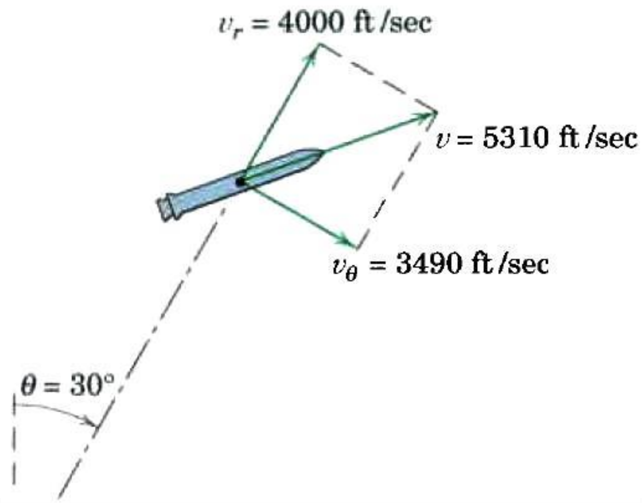
**حل :**




$$v_r = \dot{r} = 4000\ \ ft/\sec$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = 25\times10^4 \times 0.8 \times \frac{\pi}{180} = 3490\ \ ft/\sec$$

$$v = \sqrt{4000^2 + 3490^2} = 5310\ \ ft/\sec$$

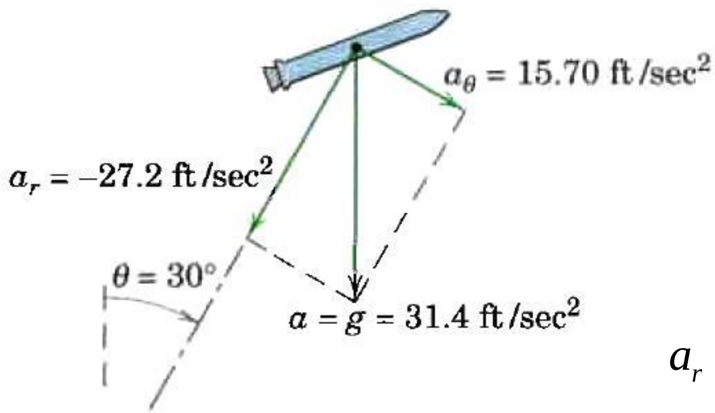


**مسئله نمونه 2-10**

رادار ردیابی در صفحه عمودی مسیر موشکی واقع است که در مرحله پرواز بدون موتور بر فراز جو زمین است. در لحظه ای مطابق شکل ، که داده های ردیابی نشان می دهند که $\theta = 30^\circ$ ، $r = 25\times10^4\ ft$ و $\dot{r} = 4000\,ft/s$ . $\dot{\theta} = 0.8\ \text{deg/sec}$ شتاب موشک فقط از جاذبه گرانشی ناشی می شود و در ارتفاع پرواز موشک برابر است با $31.4\ ft/\sec^2$ در امتداد عمودی و به طرف پایین.

در این شرایط ، مطلوب است تعیین سرعت **v** موشک و مقادیر $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$

حل :




$$a_r = -31.4\cos 30^\circ = -27.2 \quad ft/\sec^2$$

$$a_\theta = 31.4\sin 30^\circ = 15.7 \quad ft/\sec^2$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \rightarrow \quad -27.2 = \ddot{r} - 25\times10^4\times0.8\times\frac{\pi}{180}$$

$$\boxed{\ddot{r} = 21.5 \quad ft/\sec^2}$$

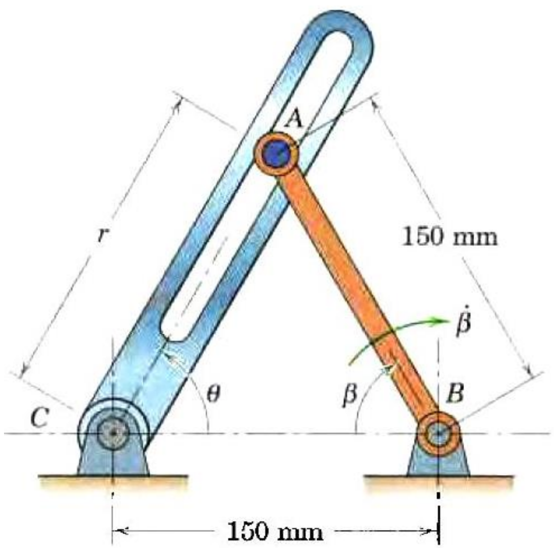
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad 15.7 = 25\times10^4\times\ddot{\theta} + 2\times4000\times0.8\times\frac{\pi}{180}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -3.84\times10^{-4} \quad rad/\sec^2}$$

**مسئله 2-151**

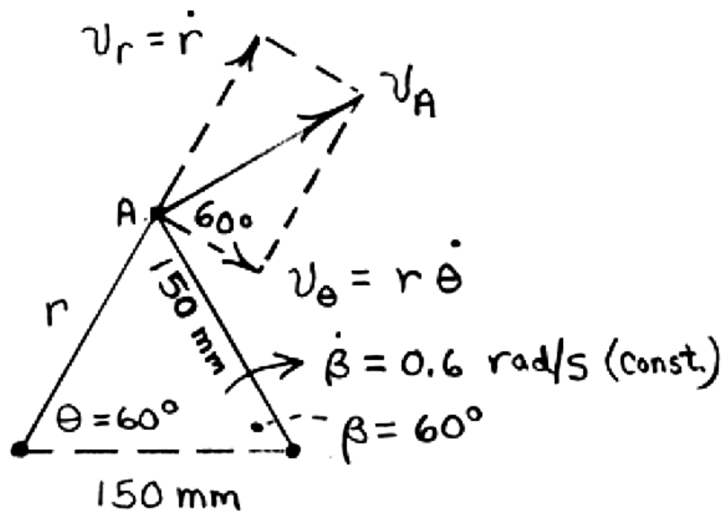
میله AB در گستره محدودی از زاویه β می چرخد و انتهای A آن سبب می شود که میله شیاردار AC نیز بچرخد. در لحظه ای مطابق شکل $\beta = 60^\circ$ و $\dot{\beta} = 0.6\ rad/s$ ثابت است. مطلوب است تعیین مقادیر متناظر $\dot{r}$ ، $\ddot{r}$ ، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$.

حل :




$$\beta = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^\circ \ , \quad r = 150\ mm$$

$$v_A = 150 \times 0.6 = 90\ mm/s$$




$$v_\theta = r\dot{\theta} = -v_A \cos 60^\circ$$

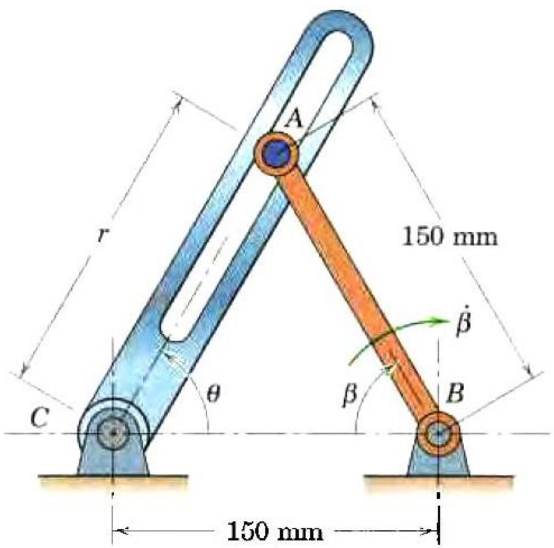
$$\dot{\theta} = \frac{-90\cos 60^\circ}{150} = -0.3\ rad/s$$

$$v_r = \dot{r} = v_A \sin 60^\circ = 90 \sin 60^\circ = 77.9\ mm/s$$

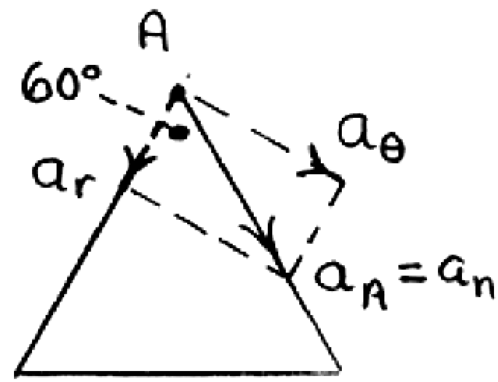
**مسئله 2-151**

میله AB در گستره محدودی از زاویه β می چرخد و انتهای A آن سبب می شود که میله شیاردار AC نیز بچرخد. در لحظه ای مطابق شکل $\beta = 60^{\circ}$ و $\dot{\beta} = 0.6\ rad/s$ و ثابت است. مطلوب است تعیین مقادیر متناظر $\dot{r}$ ، $\ddot{r}$ ، $\dot{\theta}$ ، $\ddot{\theta}$.

حل :




$$a_A = a_n = 150 \times 0.6^2 = 54\ mm/s$$



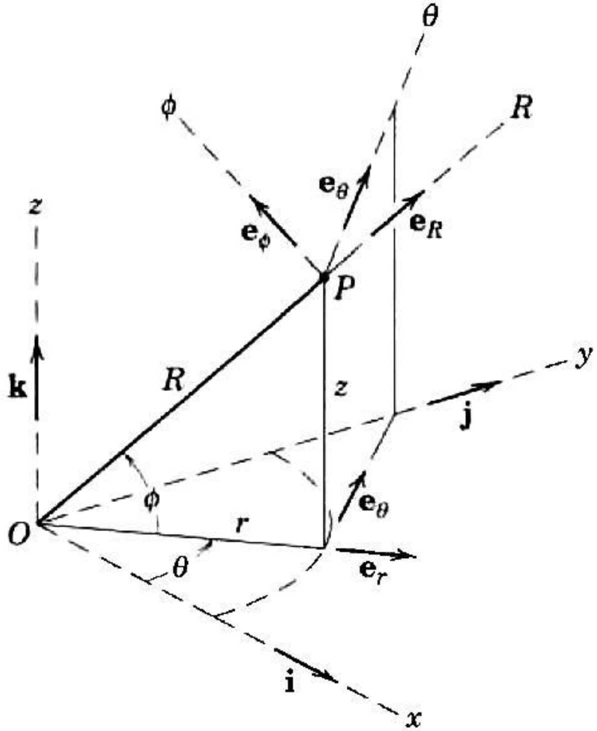

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \rightarrow \quad -54\cos 60^{\circ} = \ddot{r} - 150 \times (-0.3)^2 \quad \rightarrow \quad \ddot{r} = -13.5\ m/s^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad -54\sin 60^{\circ} = 150\ddot{\theta} + 2 \times 77.9 \times (-0.3) \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0$$

## حرکت خمیده خط فضایی

حالت کلی حرکت سه بعدی ذره در طول یک منحنی فضایی را می توان با سه دستگاه مختصات بررسی نمود :

- دستگاه مختصات قائم (x-y-z)
- دستگاه مختصات استوانه ای (r-θ-z)
- دستگاه مختصات کروی (R-θ-φ)



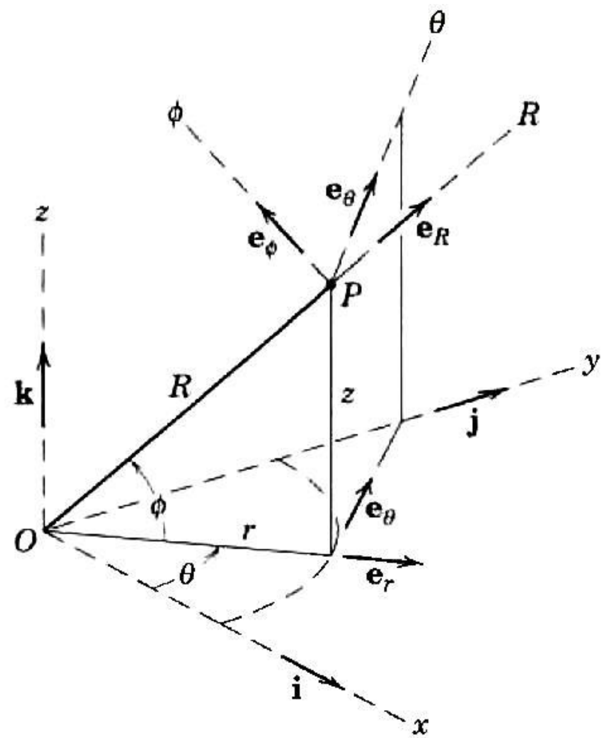

### دستگاه مختصات قائم (x-y-z)

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

مختصات استوانه ای (r-θ-z)




$$\mathbf{R} = r\,\mathbf{e}_r + z\,\mathbf{k}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}}$$

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2}$$

$$v_z = \dot{z}$$

$$\boxed{\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$$

$$a_z = \ddot{z}$$

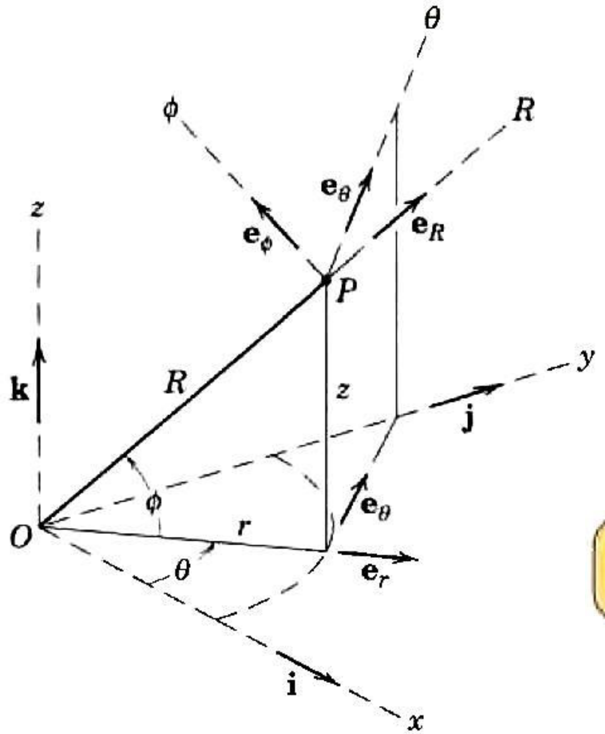
درحالیکه مشتق زمانی بردارهای یکه در راستای r و θ ، به سبب تغییر امتدادهای آنها ، غیرصفر است ،

مشاهده می کنیم که امتداد بردار یکه **k** در امتداد Z ثابت می ماند و بنابراین مشتق زمانی آن صفر است.

## مختصات کروی (R-θ-φ)

مختصات کروی هنگامی بکار می آید که از یک فاصله شعاعی و دو زاویه برای مشخص کردن مکان یک ذره استفاده شود.

اندازه گیری های راداری یکی از مصداق های کاربرد این مختصات است.




$$\mathbf{v} = v_R\mathbf{e}_R + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\phi\mathbf{e}_\phi$$

$$v_R = \dot{R}$$

$$v_\theta = R\,\dot{\theta}\cos\phi$$

$$v_\phi = R\,\dot{\phi}$$

$$\mathbf{a} = a_R\mathbf{e}_R + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\phi\mathbf{e}_\phi$$

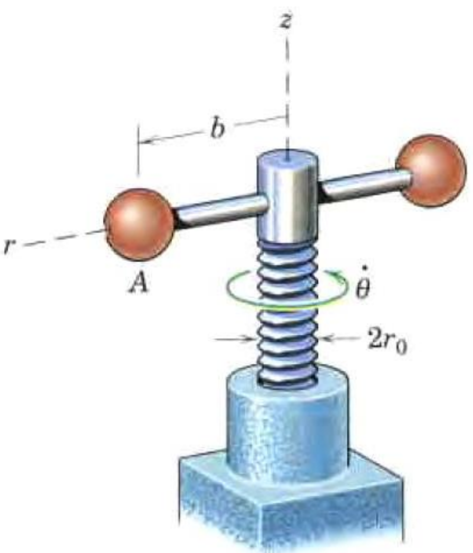
$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\cos^2\phi$$

$$a_\theta = \frac{\cos\phi}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\theta}) - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi$$

$$a_\phi = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi}) + R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi$$

**مسئله نمونه 2-11**

پیچ قدرتی از حال سکون شروع به حرکت می کند و سرعت چرخشی $\dot{\theta}$ را ایجاد می کند که طبق رابطه $\dot{\theta} = k\,t$ با زمان t تغییر می کند و در آن k مقداری ثابت است. مطلوب است تعیین عبارت هایی برای سرعت v و شتاب a مرکز گوی A وقتی پیچ به اندازه یک دور کامل از حالت سکون چرخیده است. پیشروی پیچ (مقدار جلورفتن به ازای هر دور چرخش) برابر L است.




**حل :** از مختصات استوانه ای استفاده می شود. زیرا حرکت گوی را می توان با سه پارامتر r ، θ و z بیان نمود.

با انتگرال گیری از عبارت سرعت زاویه ای خواهیم داشت :

$$\theta = \Delta\theta = \int \dot{\theta}\,dt = \frac{1}{2}k\,t^2$$

به ازای یک دور چرخش از حالت سکون داریم :

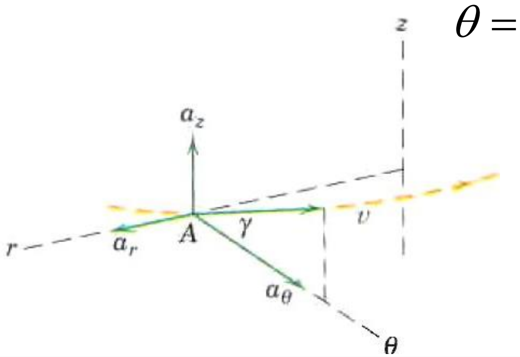
$$2\pi = \frac{1}{2}k\,t^2 \quad \rightarrow \quad t = 2\sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

بنابراین آهنگ زاویه ای در یک دور چرخش برابر است با :

$$\dot{\theta} = k\,t = k\,(2\sqrt{\frac{\pi}{k}}) = 2\sqrt{\pi k}$$

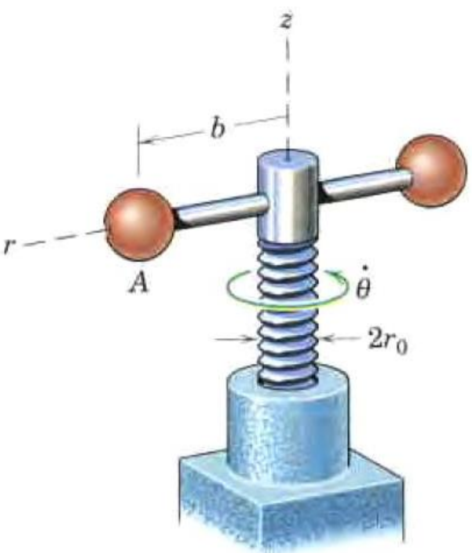
زاویه مارپیچ مسیر مرکز گوی برابر است با :

$$\gamma = \tan^{-1}(L/2\pi b)$$



**مسئله نمونه 2-11**

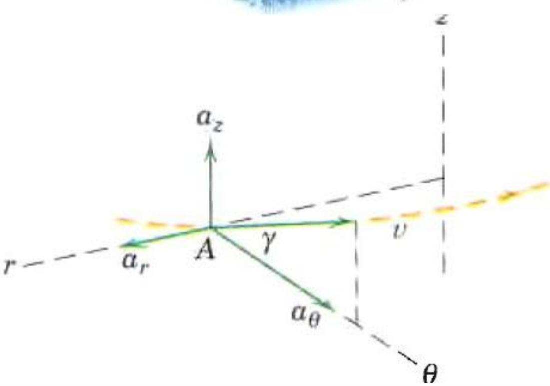
پیچ قدرتی از حال سکون شروع به حرکت می کند و سرعت چرخشی $\dot{\theta}$ را ایجاد می کند که طبق رابطه $\dot{\theta} = k\,t$ با زمان t تغییر می کند و در آن k مقداری ثابت است. مطلوب است تعیین عبارت هایی برای سرعت v و شتاب a مرکز گوی A وقتی پیچ به اندازه یک دور کامل از حالت سکون چرخیده است. پیشروی پیچ (مقدار جلورفتن به ازای هر دور چرخش) برابر L است.




$$v_\theta = v\cos\gamma$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = b\dot{\theta}$$

$$v = \frac{v_\theta}{\cos\gamma} = \frac{b\dot{\theta}}{\cos\gamma} = \frac{2b\sqrt{\pi k}}{\dfrac{2\pi b}{\sqrt{L^2+4\pi^2 b^2}}} = \sqrt{\frac{k}{\pi}}\sqrt{L^2+4\pi^2 b^2}$$

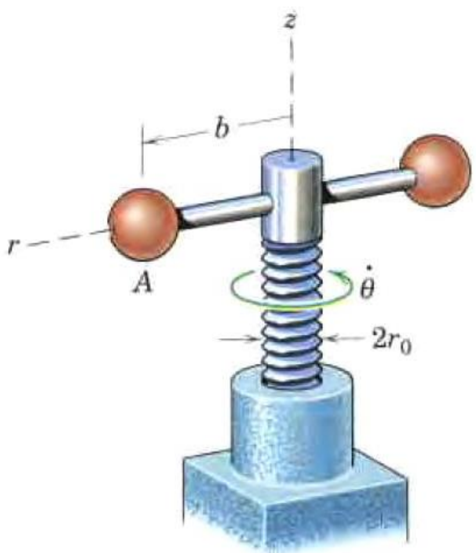



$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - b(2\sqrt{\pi k})^2 = -4b\pi k$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = b\,k + 2(0)(2\sqrt{\pi k}) = b\,k$$

**مسئله نمونه 2-11**

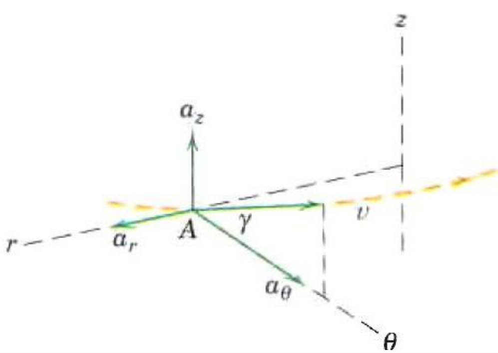
پیچ قدرتی از حال سکون شروع به حرکت می کند و سرعت چرخشی $\dot{\theta}$ را ایجاد می کند که طبق رابطه $\dot{\theta} = k\,t$ با زمان t تغییر می کند و در آن k مقداری ثابت است. مطلوب است تعیین عبارت هایی برای سرعت v و شتاب a مرکز گوی A وقتی پیچ به اندازه یک دور کامل از حالت سکون چرخیده است. پیشروی پیچ (مقدار جلورفتن به ازای هر دور چرخش) برابر L است.




$$a_z = \ddot{z} = \dot{v}_z = \frac{d}{dt}(v_z) = \frac{d}{dt}(v_\theta \tan\gamma) = \frac{d}{dt}(b\,\dot{\theta}\tan\gamma)$$

$$= (b\tan\gamma)\ddot{\theta} = b\,\frac{L}{2\pi b}k = \frac{k\,L}{2\pi}$$

شتاب کل برابر است با :

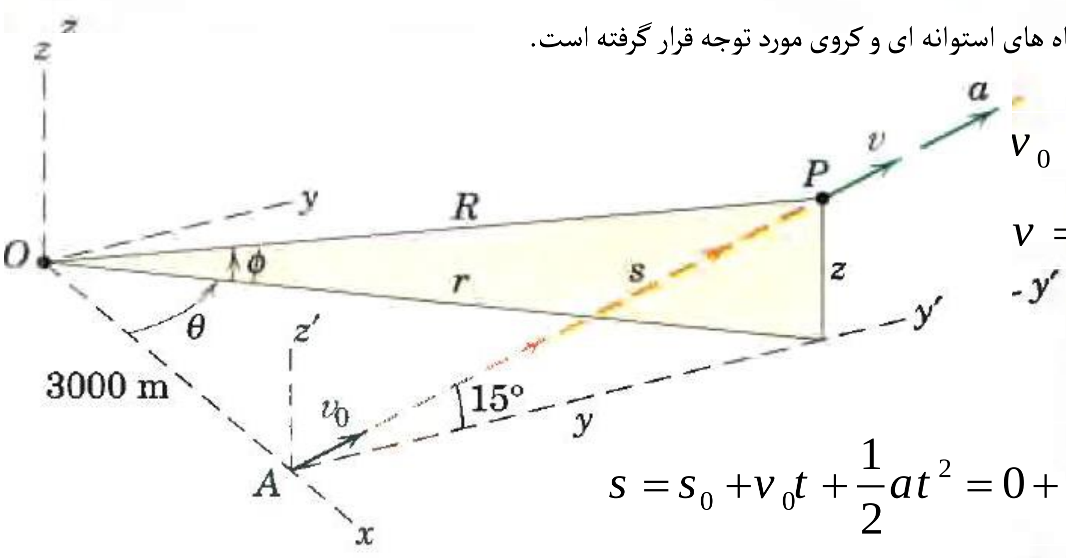



$$a = \sqrt{(-4b\pi k)^2 + (bk)^2 + (\frac{kL}{2\pi})^2}$$

$$= bk\sqrt{(1+16\pi^2) + \frac{L^2}{4\pi^2 b^2}}$$

هواپیمایی با سرعت اولیه $v_0 = 250\,km/h$ در نقطه A از زمین برمی خیزد و در صفحه عمودی $y'-z'$ با زاویه ثابت $15^o$ و با شتاب $0.8\ m/s^2$ در امتداد مسیر پرواز اوج می گیرد. رادار واقع در نقطه O پرواز این هواپیما را ردیابی می کند. سرعت هواپیما را 60 ثانیه پس از برخاستن از زمین ، الف) به مولفه های استوانه ای و ب) به مولفه های کروی تجزیه کنید.

**حل :** در این مسئله تبدیل مولفه های سرعت از دستگاه قائم به دستگاه های استوانه ای و کروی مورد توجه قرار گرفته است.




$$v_0 = 250/3.6 = 69.4\,m/s$$

$$v = v_0 + at = 69.4 + 0.8\times 60 = 117.4\ m/s$$

$-y'$

مسافت S که پس از برخاستن طی شده برابر است با :

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 69.4\times 60 + \frac{1}{2}\times 0.8\times 60^2 = 5610\ m$$

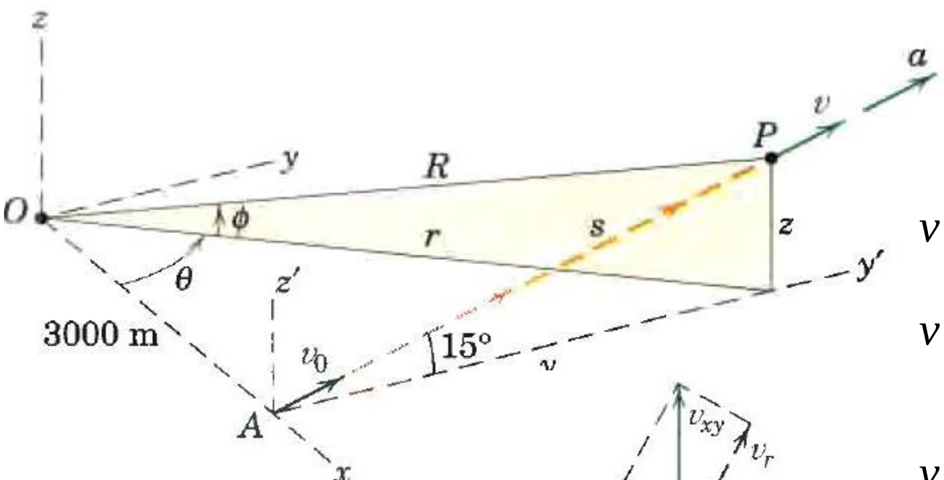
$$y = s\cos 15^\circ = 5610\cos 15^\circ = 5420\ m$$

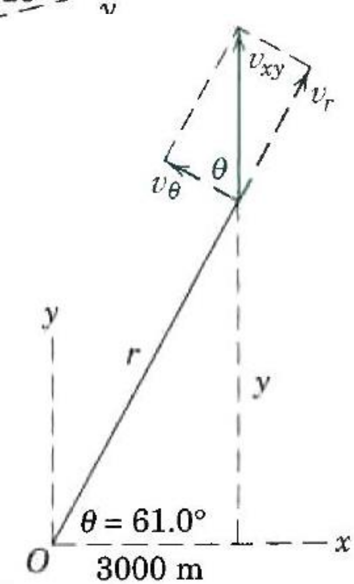
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5420}{3000}\right) = 61^\circ$$

$$r = \sqrt{3000^2 + 5420^2} = 6190\ m$$

**مسئله نمونه 12-2**

هواپیمایی با سرعت اولیه $v_0 = 250\,km/h$ در نقطه A از زمین برمی خیزد و در صفحه عمودی $y'-z'$ با زاویه ثابت $15^\circ$ و با شتاب $0.8\ m/s^2$ در امتداد مسیر پرواز اوج می گیرد. رادار واقع در نقطه O پرواز این هواپیما را ردیابی می کند. سرعت هواپیما را 60 ثانیه پس از برخاستن از زمین ، الف) به مولفه های استوانه ای و ب) به مولفه های کروی تجزیه کنید.




**الف)** تبدیل به مختصات استوانه ای

$$v_{xy} = v\cos 15^\circ = 117.4\cos 15^\circ = 113.4\ m/s$$

$$v_r = \dot{r} = v_{xy}\sin\theta = 113.4\sin 61^\circ = 99.2\ m/s$$

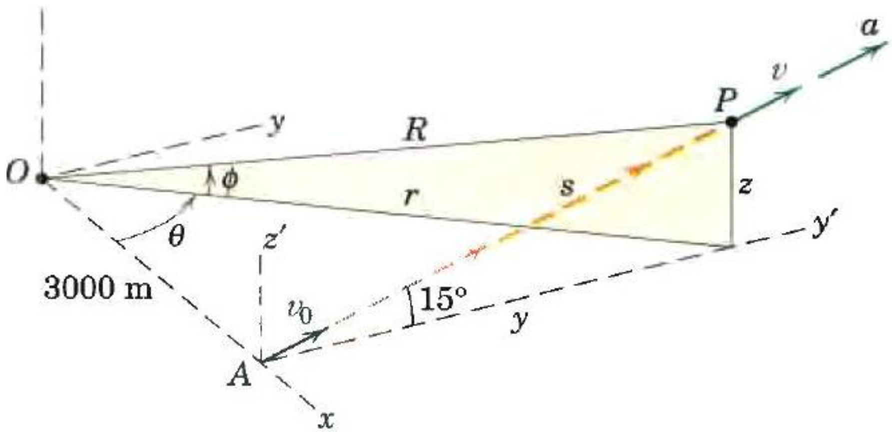
$$v_\theta = r\dot{\theta} = v_{xy}\cos\theta = 113.4\cos 61^\circ = 55\ m/s$$

$$\dot{\theta} = \frac{55}{6190} = 8.88\times 10^{-3}\ rad/s$$

$$\dot{z} = v_z = v\sin 15^\circ = 117.4\sin 15^\circ = 30.4\ m/s$$

**مسئله نمونه 2-12**

هواپیمایی با سرعت اولیه $v_0 = 250\,km/h$ در نقطه A از زمین برمی خیزد و در صفحه عمودی $y'-z'$ با زاویه ثابت $15^\circ$ و با شتاب $0.8\ m/s^2$ در امتداد مسیر پرواز اوج می گیرد. رادار واقع در نقطه O پرواز این هواپیما را ردیابی می کند. سرعت هواپیما را 60 ثانیه پس از برخاستن از زمین ، الف) به مولفه های استوانه ای و ب) به مولفه های کروی تجزیه کنید.

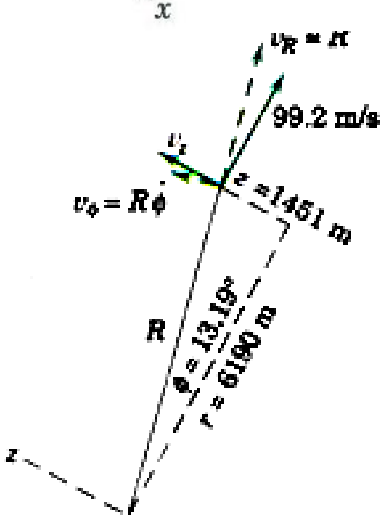



**ب)** تبدیل به مختصات کروی

$$z = y\tan 15^\circ = 5420\tan 15^\circ = 1451\,m$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{z}{r} = \tan^{-1}\frac{1451}{6190} = 13.19^\circ$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{6190^2 + 1451^2} = 6360\,m$$




$$v_R = \dot{R} = v_r\cos\phi + v_z\sin\phi$$

$$= 99.2\cos 13.19^\circ + 30.4\sin 13.19^\circ = 103.6\ m/s$$

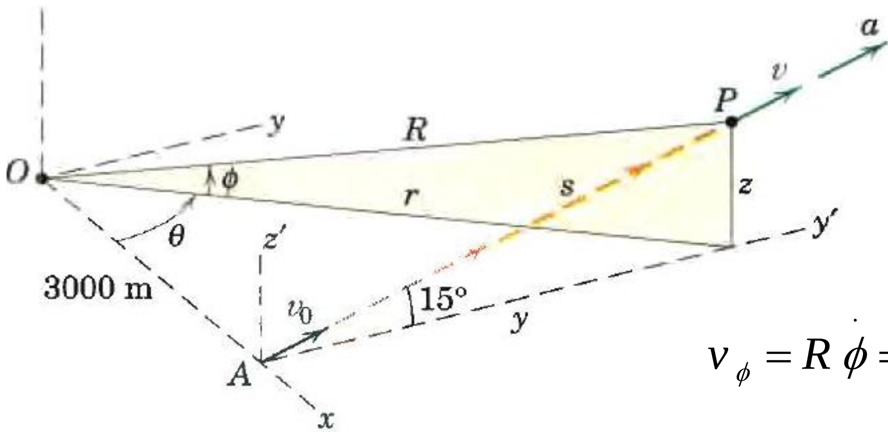
$$v_\theta = 55\ m/s$$

$\longleftarrow$ مشابه قسمت الف

$$\dot{\theta} = 8.88\times 10^{-3} = rad/s$$

**مسئله نمونه 2-12**

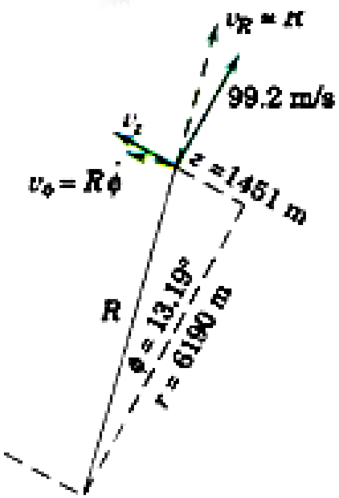
هواپیمایی با سرعت اولیه $v_0 = 250\, km/h$ در نقطه A از زمین برمی خیزد و در صفحه عمودی $y'-z'$ با زاویه ثابت $15^\circ$ و با شتاب $0.8\ m/s^2$ در امتداد مسیر پرواز اوج می گیرد. رادار واقع در نقطه O پرواز این هواپیما را ردیابی می کند. سرعت هواپیما را 60 ثانیه پس از برخاستن از زمین ، الف) به مولفه های استوانه ای و ب) به مولفه های کروی تجزیه کنید.




**ب)** تبدیل به مختصات کروی

$$v_\phi = R\dot{\phi} = -v_r \sin\phi + v_z \cos\phi$$

$$= -99.2 \sin 13.19^\circ + 30.4 \cos 13.19^\circ = 6.95\ m/s$$

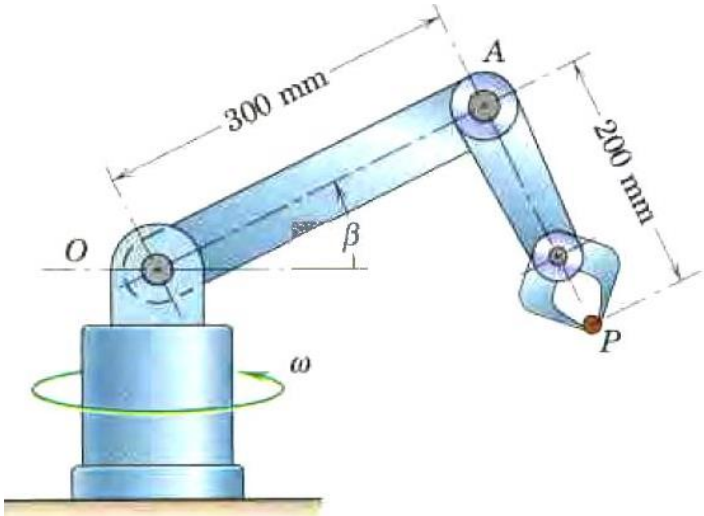



$$\dot{\phi} = \frac{v_\phi}{R} = \frac{6.95}{6360} = 1.093 \times 10^{-3}\ rad/s$$

**مسئله 2-175**

از یک روبات صنعتی برای استقرار قطعه کوچک P استفاده می شود. مطلوب است اندازه محاسبه شتاب قطعه در لحظه ای که β=30°، هرگاه در همین لحظه ، $\dot{\beta} = 10\ \deg/s$ و $\ddot{\beta} = 20\ \deg/s$ .

پایه روبات با آهنگ ثابت ω=40 deg/s می چرخد. بازوهای AO و AP در حین حرکت بر هم عمود می مانند.



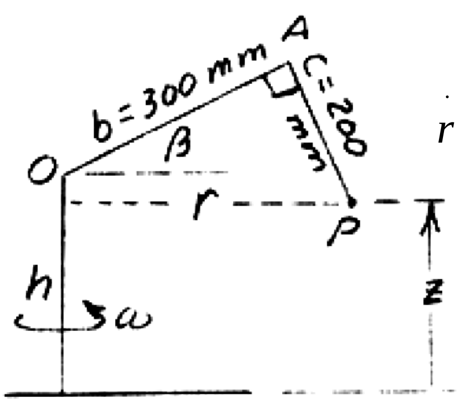

حل :

$$in \quad \beta = 30^\circ \quad \rightarrow \quad \dot{\beta} = 10 \times \frac{\pi}{180} = 0.1745 \quad rad/s$$

$$\ddot{\beta} = 20 \times \frac{\pi}{180} = 0.349 \quad rad/s^2$$

$$\dot{\theta} = 40 \times \frac{\pi}{180} = 0.698 \quad rad/s$$

$$r = b\cos\beta + c\sin\beta = 300 \times 0.866 + 200 \times 0.5 = 359.8\ mm$$



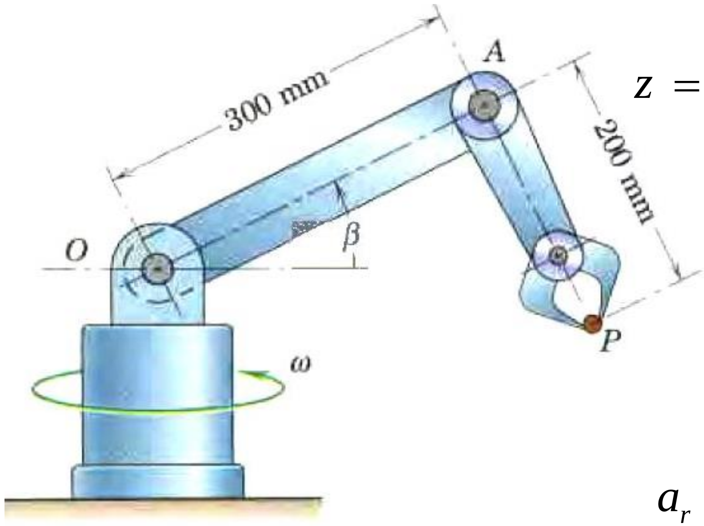

$$\dot{r} = (-b\sin\beta + c\cos\beta)\dot{\beta} = (-300 \times 0.5 + 200 \times 0.866) \times 0.1745 = 4.05\ mm/s$$

$$\ddot{r} = (-b\sin\beta + c\cos\beta)\ddot{\beta} + (-b\cos\beta - c\sin\beta)\dot{\beta}^2$$
$$= -2.86\ mm/s^2$$

**مسئله 2-175**

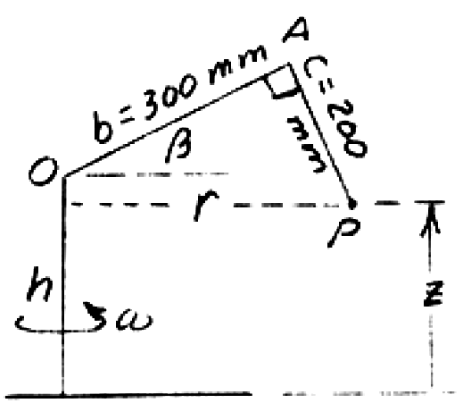
از یک روبات صنعتی برای استقرار قطعه کوچک P استفاده می شود. مطلوب است اندازه محاسبه شتاب قطعه در لحظه ای که β=30°، هرگاه در همین لحظه، $\dot{\beta}=10\ \text{deg/s}$ و $\ddot{\beta}=20\ \text{deg/s}$ .

پایه روبات با آهنگ ثابت ω=40 deg/s می چرخد. بازوهای AO و AP در حین حرکت بر هم عمود می مانند.




حل:
$$z=h+b\sin\beta-c\cos\beta \;\rightarrow\; \dot{z}=(b\cos\beta+c\sin\beta)\dot{\beta}$$

$$\ddot{z}=(b\cos\beta+c\sin\beta)\ddot{\beta}+(-b\sin\beta+c\cos\beta)\dot{\beta}^2$$
$$=126.3\ mm/s^2$$




$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-2.86-359.8\times0.698^2=-178.23\ \ mm/s^2$$

$$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+2\times4.05\times0.698=5.65\ \ mm/s^2$$

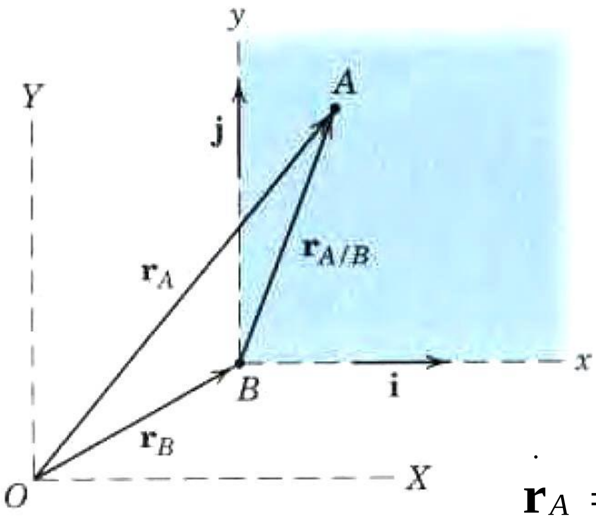
$$a_z=\ddot{z}=126.3\ mm/s^2$$

$$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2+a_z^2}=219\ mm/s^2$$

## حرکت نسبی

استفاده از دستگاه مختصات ثابت برای توصیف  یا سنجش حرکت ، همیشه مقدور یا راحت نیست.

در این بخش توجه خود را روی دستگاه مختصات متحرکی که انتقال انجام می دهد ، اما نمی چرخد متمرکز می کنیم




بردار مکان A نسبت به B $\longleftarrow$ $\mathbf{r}_{A/B} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$

بردار مکان مطلق ذره A $\longleftarrow$ $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}$

با مشتق گیری متوالی از رابطه فوق خواهیم داشت :

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + \dot{\mathbf{r}}_{A/B}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \ddot{\mathbf{r}}_B + \ddot{\mathbf{r}}_{A/B}$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}}$$

$$\boxed{\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}}$$

سرعت و شتاب ذره A در دستگاه متحرک برابر است با :

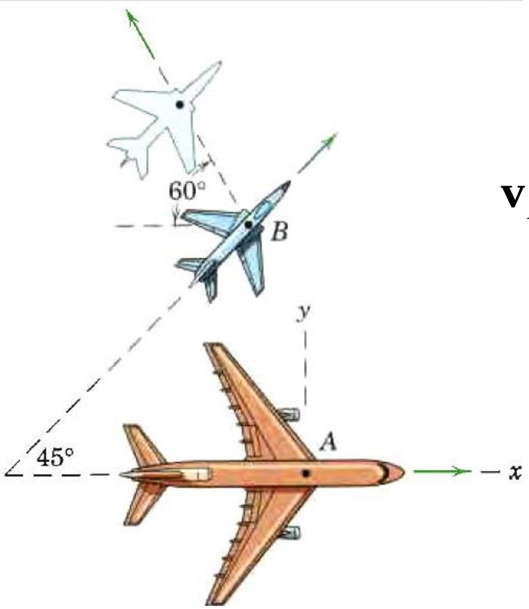
$$\dot{\mathbf{r}}_{A/B} = \mathbf{v}_{A/B} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{A/B} = \dot{\mathbf{v}}_{A/B} = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j}$$

بدیهی است گه مشتق بردارهای یکه i و j صفر است ، زیرا امتداد و اندازه آن ها تغییر نمی کند.

**مسئله نمونه 2-13**

سرنشینان هواپیمای جت مسافری A که با سرعت 800 km/h به سمت شرق پرواز می کند ، هواپیمای جت B را مشاهده می کنند که از زیر هواپیمای آنها که در امتداد افقی در پرواز است عبور می کند. اگر چه دماغه هواپیمای B در امتداد $45^o$ شمال شرقی است ، از دید سرنشینان هواپیمای A تحت زاویه $60^o$ ، مطابق شکل ، از هواپیمای آنها دور می شود. مطلوب است تعیین سرعت حقیقی هواپیمای B.




**حل :** دستگاه مختصات متحرکی به نقطه A متصل می کنیم ، جایی که مشاهدات از آنجا انجام می شود.

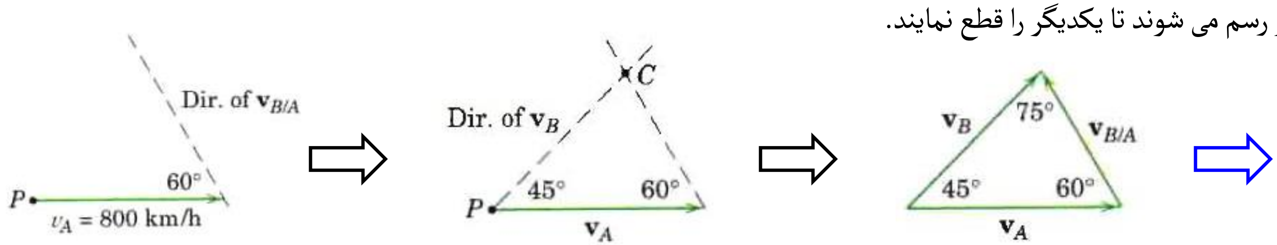
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

رابطه فوق یک معادله برداری است که هر کدام از جملات دارای اندازه و جهت می باشند.

اندازه سرعت هواپیمای B و اندازه سرعت نسبی مجهول بوده و بقیه 4 پارامتر معلوم هستند.

مسئله را می توان به چندین طریق حل نمود :

**1- روش ترسیمی:** بردارها از نقطه ثابتی رسم می شوند. بردار سرعت نقطه A که دارای اندازه مشخصی است با مقیاس رسم شده و راستای دو بردار دیگر نیز بصورت زیر رسم می شوند تا یکدیگر را قطع نمایند.

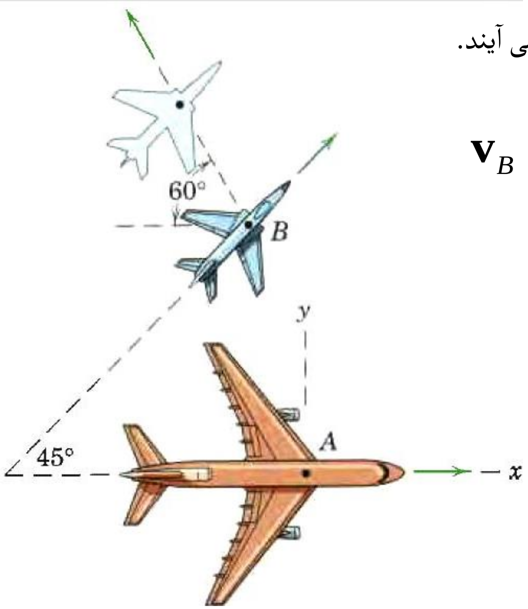



$$v_B = 717\ km/h$$
$$v_{B/A} = 586\ km/h$$

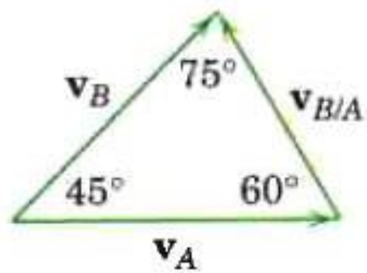
**مسئله نمونه 2-13**

سرنشینان هواپیمای جت مسافری A که با سرعت 800 km/h به سمت شرق پرواز می کند ، هواپیمای جت B را مشاهده می کنند که از زیر هواپیمای آنها که در امتداد افقی در پرواز است عبور می کند. اگر چه دماغه هواپیمای B در امتداد $45^o$ شمال شرقی است ، از دید سرنشینان هواپیمای A تحت زاویه $60^o$ ، مطابق شکل ، از هواپیمای آنها دور می شود. مطلوب است تعیین سرعت حقیقی هواپیمای B.

**2- روش مثلثاتی :** مثلث بردارها ترسیم شده و سپس با استفاده از قانون سینوسها و یا قانون کسینوسها ، مجهولات بدست می آیند.




$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$




$$\frac{v_B}{\sin 60^\circ} = \frac{v_A}{\sin 75^\circ}$$

$$v_B = 800 \times \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = 717\ km/h$$

**3- روش برداری :**

$$\mathbf{v}_A = 800\mathbf{i}\ km/h$$

$$\mathbf{v}_B = (v_B \cos 45^\circ)\mathbf{i} + (v_B \sin 45^\circ)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = (-v_{B/A} \cos 60^\circ)\mathbf{i} + (v_{B/A} \sin 60^\circ)\mathbf{j}$$

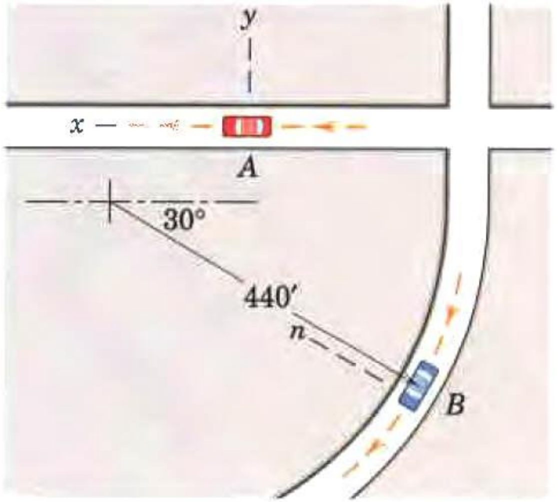
$$\mathbf{i}:\quad v_B \cos 45^\circ = 800 - v_{B/A} \cos 60^\circ$$

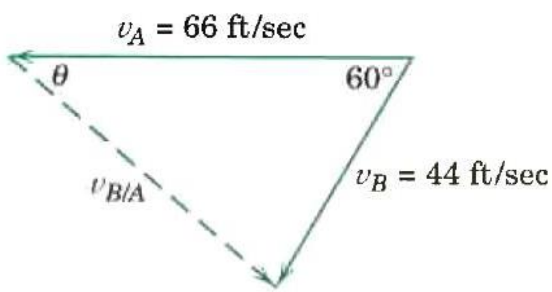
$$\mathbf{j}:\quad v_B \sin 45^\circ = v_{B/A} \sin 60^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{با حل دستگاه معادلات}} \quad v_B = 717\ km/h, \quad v_{B/A} = 586\ km/h$$

**مسئله نمونه 2-14**

اتومبیل A در امتداد حرکت خود با آهنگ $3\ ft/sec^2$ شتاب می گیرد. اتومبیل B با سرعت ثابت 30 mi/hr پیچی با شعاع 440 ft را می پیماید. مطلوب است تعیین شتاب اتومبیل B از دید ناظر سوار بر اتومبیل A هرگاه در وضعیت های نشان داده شده ، سرعت اتومبیل A به 45 mi/hr رسیده باشد.




**حل :** ابتدا تحلیل سرعت

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$v_A = 45 \times \frac{44}{30} = 66\ ft/\sec$$

$$v_B = 30 \times \frac{44}{30} = 44\ ft/\sec$$

با استفاده از قانون کسینوسها :

$$v_{B/A} = v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos 60^\circ = 58.2\ ft/\sec$$

و با استفاده از قانون سینوسها :

$$\theta = 40.9^\circ$$

تحلیل شتاب

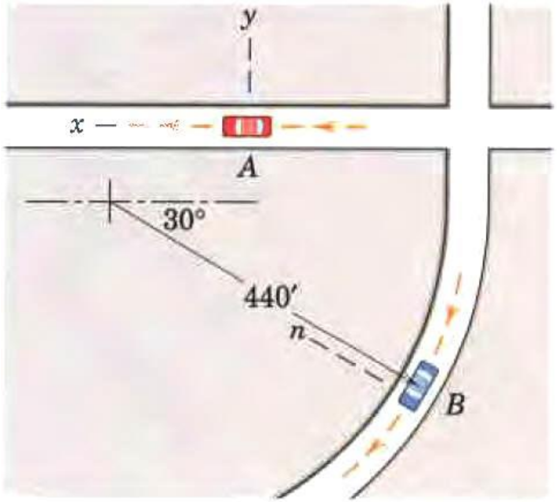
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$a_B = \frac{v^2}{\rho} = \frac{44^2}{440} = 4.4\ ft/\sec$$

$$a_A = 3\ ft/\sec$$

**مسئله نمونه 2-14**

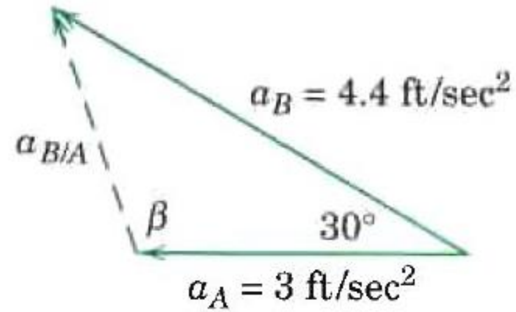
اتومبیل A در امتداد حرکت خود با آهنگ $3\ ft/sec^2$ شتاب می گیرد. اتومبیل B با سرعت ثابت 30 mi/hr پیچی با شعاع 440 ft را می پیماید. مطلوب است تعیین شتاب اتومبیل B از دید ناظر سوار بر اتومبیل A هرگاه در وضعیت های نشان داده شده ، سرعت اتومبیل A به 45 mi/hr رسیده باشد.




$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$a_B = \frac{v^2}{\rho} = \frac{44^2}{440} = 4.4\ ft/\sec$$

$$a_A = 3\ ft/\sec$$

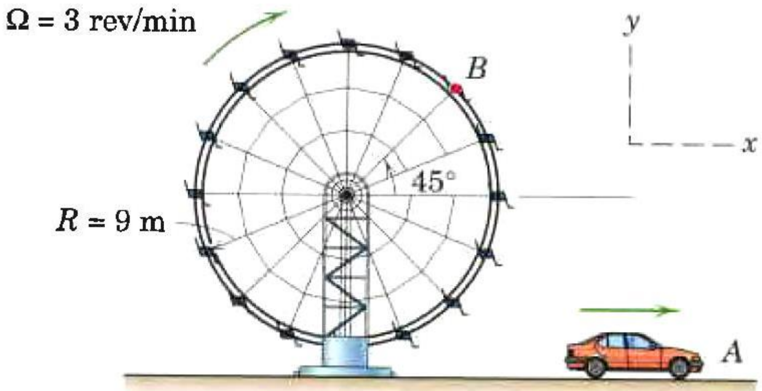



$$a_{B/A} = 3^2 + 4.4^2 - 2\times 3\times 4.4\times\cos 30^\circ = 2.34\ ft/\sec^2$$

$$\frac{4.4}{\sin\beta} = \frac{2.34}{\sin 30} \quad\Rightarrow\quad \beta = \sin^{-1}\left(\frac{4.4\times 0.5}{2.34}\right) = 110.2^\circ$$

**مسئله 2-195**

اتومبیل A سرعت رو به جلو 18 km/h دارد و شتاب آن $3\ m/s^2$ است. مطلوب است تعیین سرعت و شتاب اتومبیل نسبت به ناظر B، که روی صندلی غیرچرخان چرخ و فلک نشسته است. آهنگ زاویه ای چرخ و فلک ثابت و برابر $\Omega$=3 rpm است.




حل :

$$\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$$

$$\Omega = 3 \times \frac{2\pi}{60} = 0.314\ rad/s$$

$$\mathbf{v}_A = \frac{18}{3.6}\mathbf{i} = 5\mathbf{i}$$

$$\mathbf{v}_B = (9 \times 0.314)(\cos 45^\circ\,\mathbf{i} - \sin 45^\circ\,\mathbf{j})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{v}_{A/B} = 3\mathbf{i} + 1.999\mathbf{j}\ \ m/s}$$

$$\mathbf{a}_{A/B} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B$$

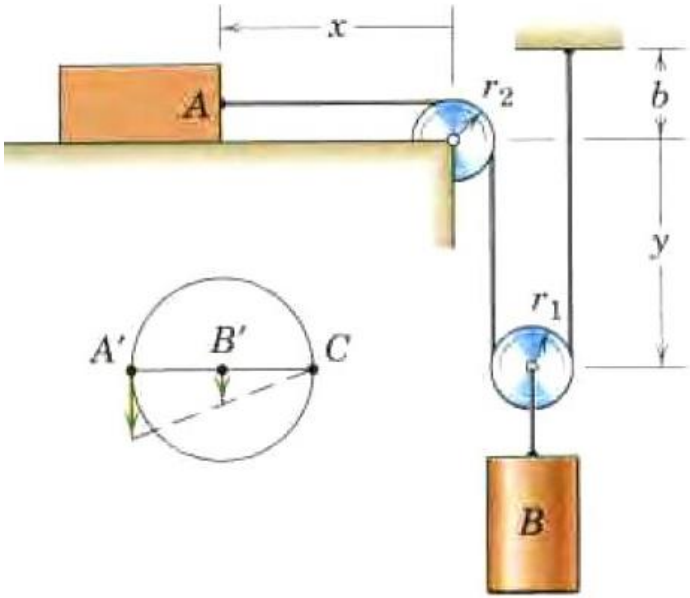
$$\mathbf{a}_A = 3\mathbf{i}\ \ m/s^2$$

$$\mathbf{a}_B = (9 \times 0.314^2)(-\cos 45^\circ\,\mathbf{i} - \sin 45^\circ\,\mathbf{j})\ m/s^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{a}_{A/B} = 3.63\mathbf{i} + 0.628\mathbf{j}\ m/s^2}$$

## حرکت مقید ذرات متصل به هم

گاهی حرکت ذرات ، به سبب قیدهایی که توسط عضوهای متصل به هم اعمال می شود ، به هم وابسته است.




به عنوان مثالی از حرکت یک درجه آزادی شکل مقابل را در نظر بگیرید.

طول کل کابل ثابت بوده و برابر است با :

$$L = x + \frac{\pi r_2}{2} + 2y + \pi r_1 + b$$

با مشتق گیری از رابطه فوق خواهیم داشت :

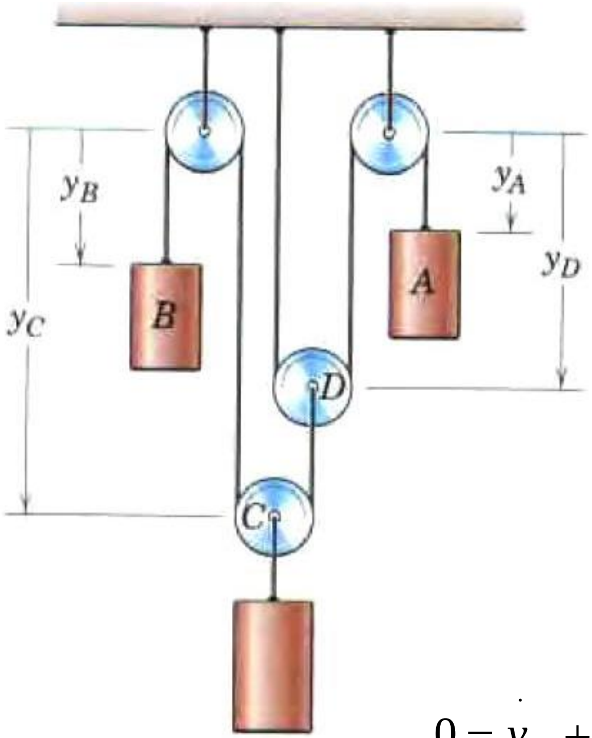
$$0 = \dot{x} + 2\dot{y} \qquad \Rightarrow \qquad 0 = v_A + 2v_B$$

$$0 = \ddot{x} + 2\ddot{y} \qquad \qquad 0 = a_A + 2a_B$$

با توجه به شکل و با استفاده از معادلات فوق مشخص می شود که :

مقدار جابجایی ، سرعت و شتاب حرکت افقی A دو برابر جابجایی ، سرعت و شتاب حرکت عمودی B است.

با توجه به جهت های مشخص شده ، علامت سرعت و شتاب A بایستی مخالف علامت سرعت و شتاب B باشد.




مثال دو درجه آزادی

در این دستگاه مکان استوانه پایینی و قرقره C به مشخصات جداگانه دو مختصه

yA و yB وابسته است.

طول کابل ها برابر است با :

$$L_A = y_A + 2y_D + \text{مقدار ثابت}$$

$$L_B = y_B + y_C + (y_C - y_D) + \text{مقدار ثابت}$$

با مشتق گیری نسبت به زمان خواهیم داشت :

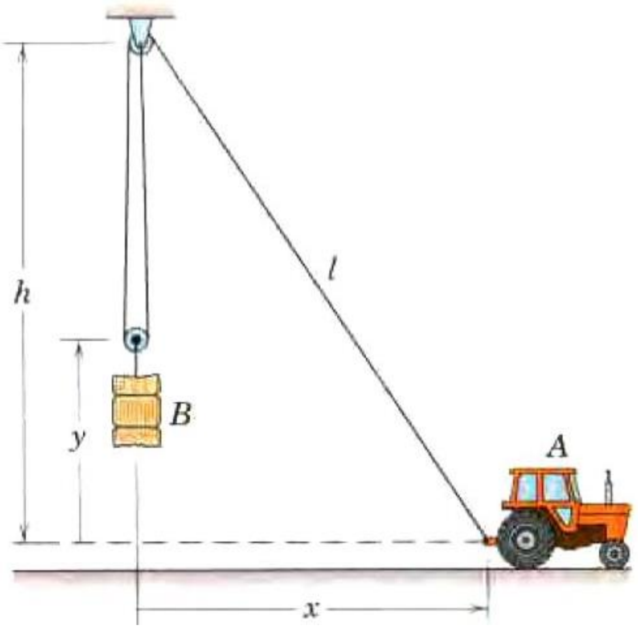
$$0 = \dot{y}_A + 2\dot{y}_D \qquad 0 = \dot{y}_B + 2\dot{y}_C - \dot{y}_D \quad \Rightarrow \quad 0 = \ddot{y}_A + 2\ddot{y}_D \qquad 0 = \ddot{y}_B + 2\ddot{y}_C - \ddot{y}_D$$

با حذف مشتقات yD خواهیم داشت :

$$\dot{y}_A + 2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C = 0 \qquad \ddot{y}_A + 2\ddot{y}_B + 4\ddot{y}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_A + 2v_B + 4v_C = 0 \qquad a_A + 2a_B + 4a_C = 0$$

**مسئله نمونه 2-16**

تراکتور A برای بالابردن بسته علوفه B ، به کمک قرقره هایی مطابق شکل ، استفاده می شود. سرعت رو به جلو تراکتور $v_A$ است. مطلوب است تعیین عبارتی برای سرعت رو به بالای $v_B$ بسته علوفه برحسب x.




**حل :**

$$L = 2(h-y)+l = 2(h-y)+\sqrt{h^2+x^2}$$

با مشتق گیری نسبت به زمان :

$$0 = -2\dot{y} + \frac{x\dot{x}}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

$$\downarrow$$

$$0 = -2v_B + \frac{x v_A}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

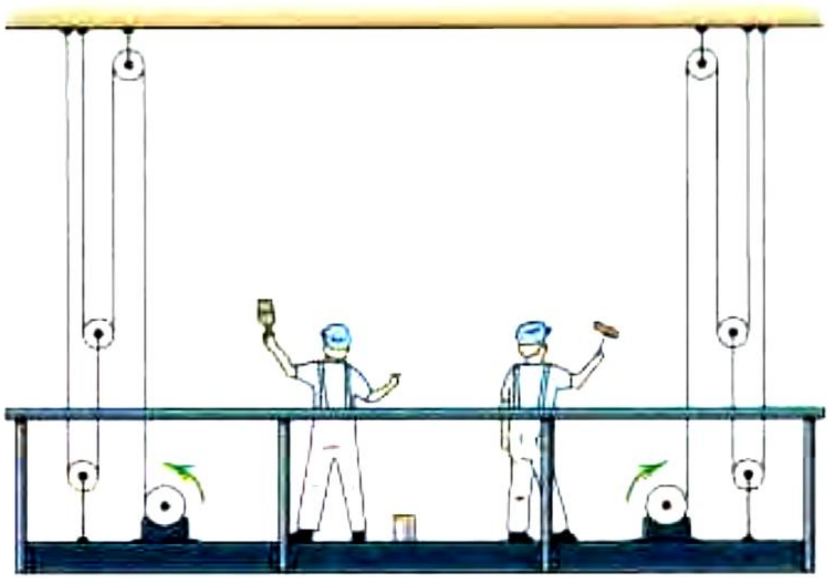
$$\downarrow$$

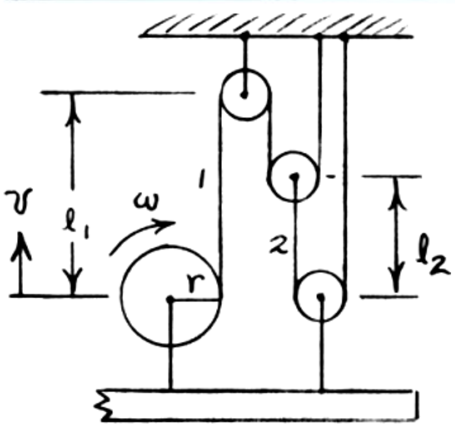
$$\boxed{v_B = \frac{x v_A}{2\sqrt{h^2+x^2}}}$$

**مسئله 2-225**

داربست های صنعتی را می توان به کمک وینچ های نصب شده روی آن ها بالا یا پایین برد.وقتی وینچ در جهتی مطابق شکل بجرخد ، داربست بالا می رود. قطر هر طبلک وینچ 200 mm است و طبلک با آهنگ 40 rpm می چرخد. مطلوب است سرعت رو به بالای داربست.

**حل :**






$$L_1 = l_1 + 2(l_1 - l_2) + const.$$
$$L_2 = l_1 + l_2 + const.$$

$$\downarrow$$

$$\dot{L}_1 = -r\omega = 3\dot{l}_1 - 2\dot{l}_2 .$$
$$\dot{L}_2 = 0 = \dot{l}_1 + \dot{l}_2 . \Rightarrow -\dot{l}_1 = \dot{l}_2$$

$$v = -\dot{l}_1 \longrightarrow -r\omega = 3(-v) - 2(v) \longrightarrow r\omega = 5v$$

$$v = \frac{r\omega}{5} = \frac{0.1 \times 40 \times \frac{2\pi}{60}}{5} = 0.0838\ m/s$$