نام و نام خانوادگی :		گروه آموزشی : **ریاضی**
شماره دانشجویی :	دانشگاه صنعتی شاهرود	تاریخ : **۱۴۰۱/۳/۲۲**
نام مدرس :	**دانشکده علوم ریاضی**	وقت : **۹۰** دقیقه

امتحان پایان‌ترم درس : **معادلات دیفرانسیل** (۱۷ گروه هماهنگ)

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۴۰۱**- ۱۴۰۰

توجه :

پاسخ‌ها را توسط نرم‌افزاری مانند Camscanner به صورت یک فایل PDF با حجم مناسب در آورده و از طریق سامانه LMS ارسال نمایید.

ارسال فایل‌ها را به دقایق آخر موکول نکنید چون سامانه راس ساعت بسته خواهد شد.

سوال ۱- جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به کمک سری‌های توانی حول نقطه $x=0$ بیابید. **۱۵ نمره**

$$(1-x^2)y''-5xy'-4y=0$$

سوال ۲- معادله زیر را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید. **۱۵ نمره**

$$y'(x)-5\int_0^x y(t)\cos 3(x-t)\,dt=\cos 3x \quad ; \quad y(0)=6$$

سوال ۳- معادله مرتبه دوم زیر را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید. **۱۰ نمره**

$$y''+16y=5\sin 3x \quad ; \quad y(0)=3\ ,\ y'(0)=-4$$

سوال ۴- الف) تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=x\int_0^x e^{-2u}\cos 3u\,du$ را بیابید. **۱۰ نمره**

ب) تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s)=\dfrac{4se^{-\pi s}}{s^2+10s+41}$ را بیابید. **۱۰ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوال۱: نقطه $x=0$ یک نقطه عادی معادله خطی مرتبه دوم $(1-x^2)y''-5xy'-4y=0$ است.

این معادله یک جواب به صورت سری توانی $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ دارد. این جواب را در معادله قرار می‌دهیم:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-5x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

عبارت سمت راست را به ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}5na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}5na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n^2+4n+4)a_n]x^n=0$$

اکنون باید داشته باشیم : $(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+2)^2a_n=0\ ,\ n=0,1,2,\cdots$

و یا : $a_{n+2}=\dfrac{n+2}{n+1}a_n\ ,\ n=0,1,2,\cdots$

تعدادی از ضرایب چندجمله‌ای را محاسبه می‌کنیم:

$$a_2=2a_0\ ,\ a_3=\frac{3}{2}a_1\ ,\ a_4=\frac{4}{3}a_2=\frac{8}{3}a_0\ ,\ a_5=\frac{5}{4}a_3=\frac{15}{8}a_1\ ,\ a_6=\frac{6}{5}a_4=\frac{48}{15}a_0\ ,a_7=\frac{7}{6}a_5=\frac{35}{16}a_1\ ,\ \cdots$$

بنابر این، این معادله یک جواب به صورت سری توانی زیر است :

$$y=a_0+a_1x+2a_0x^2+\frac{3}{2}a_1x^3+\frac{8}{3}a_0x^4+\frac{15}{8}a_1x^5+\frac{16}{5}a_0x^6+\frac{21}{8}a_1x^7+\cdots)$$

$$=a_0\underbrace{(1+2x^2+\frac{8}{3}x^4+\frac{16}{5}x^6+\cdots)}_{y_1}+a_1\underbrace{(x+\frac{3}{2}x^3+\frac{15}{8}x^5+\frac{35}{16}x^7+\cdots)}_{y_2}$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}\quad ,\quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(2n+1)!}{4^n(n!)^2}x^{2n+1}$$

پاسخ سوال۲: تبدیل لاپلاس دو طرف معادله باید با هم مساوی باشند: $L\{y'(x)-5\int_0^x y(t)\cos 3(x-t)dt\}=L\{\cos 3x\}$

در هر قسمت از فرمول مناسب آن استفاده می‌کنیم : $sL\{y\}-6-\dfrac{5sL\{x\}}{s^2+9}=\dfrac{s}{s^2+9}$

اکنون داریم $s(s^2+4)L\{y\}=s+6(s^2+9)$ و یا $L\{y\}=\dfrac{6s^2+s+54}{s(s^2+4)}$.

با استفاده از تجزیه کسرها خواهیم داشت : $L\{y\}=\dfrac{27}{2s}+\dfrac{1}{s^2+4}-\dfrac{15s}{2(s^2+4)}$

و در نهایت داریم : $y(x)=\dfrac{1}{2}(27+\sin 2x-15\cos 2x)$

(این معادله دیفرانسیل-انتگرالی را می توان با ۲ مرتبه مشتقگیری از طرفین معادله به معادله دیفرانسیل مرتبه سوم خطی همگن با مقادیر اولیه $y'''+4y'=0\ ;\ y(0)=6\ ,\ y'(0)=1\ ,\ y''(0)=30$ تبدیل کرد.)

پاسخ سوال ۳ : داریم :

$$L\{y''+۱۶y\}=L\{۵\sin ۳x\} \quad \rightarrow \quad s^۲L\{y\}-۳s+۴+۱۶L\{y\}=\frac{۱۵}{s^۲+۹}$$

$$\rightarrow \;(s^۲+۱۶)L\{y\}=۳s-۴+\frac{۱۵}{s^۲+۹} \quad \rightarrow \quad L\{y\}=\frac{۳s-۴}{s^۲+۱۶}+\frac{۱۵}{(s^۲+۱۶)(s^۲+۹)}$$

به کمک تجزیه کسرها داریم :

$$L\{y\}=\frac{۳s-۴}{s^۲+۱۶}+\frac{۱۵}{۷}(\frac{۱}{s^۲+۹}-\frac{۱}{s^۲+۱۶})$$

و در نتیجه تبدیل لاپلاس تابع مجهول y، به ساده ترین صورت، عبارت است از :

$$L\{y\}=\frac{۵}{۷}\times\frac{۳}{s^۲+۹}-\frac{۴۳}{۲۸}\times\frac{۴}{s^۲+۱۶}+۳\times\frac{s}{s^۲+۱۶}$$

جواب معادله عبارت است از :

$$y(x)=\frac{۵}{۷}\sin ۳x-\frac{۴۳}{۲۸}\sin ۴x+۳\cos ۴x$$

پاسخ سوال ۴ : الف) روش اول :

$$L\{x\int_۰^x e^{-۲u}\cos ۳u\,du\}=-\frac{d}{ds}L\{\int_۰^x e^{-۲u}\cos ۳u\,du\}$$

$$=-\frac{d}{ds}(\frac{۱}{s}L\{e^{-۲x}\cos ۳x\})=-\frac{d}{ds}(\frac{۱}{s}\times\frac{s+۲}{(s+۲)^۲+۹})=\frac{۲(s+۱)(s+۲)^۲+۱۸}{s^۲((s+۲)^۲+۹)^۲}$$

روش دوم : داریم :

$$x\int_۰^x e^{-۲u}\cos ۳u\,du=xe^{-۲x}\int_۰^x e^{۲(x-u)}\cos ۳u\,du$$

$$L\{\int_۰^x e^{۲(x-u)}\cos ۳u\,du\}=L\{e^{۲x}\}L\{\cos ۳x\}=\frac{s}{(s-۲)(s^۲+۹)}$$

$$L\{e^{-۲x}\int_۰^x e^{۲(x-u)}\cos ۳u\,du\}=L\{e^{۲x}\}L\{\cos ۳x\}=\frac{s+۲}{s((s+۲)^۲+۹)}$$

$$L\{xe^{-۲x}\int_۰^x e^{۲(x-u)}\cos ۳u\,du\}=-\frac{d}{ds}[\frac{s+۲}{s((s+۲)^۲+۹)}]=\frac{۲(s+۱)(s+۲)^۲+۱۸}{s^۲((s+۲)^۲+۹)^۲}$$

روش سوم : می‌توان انتگرال حل کرد و سپس تبدیل لاپلاس را محاسبه کرد.

$$\int_۰^x e^{-۲u}\cos ۳u\,du=\frac{e^{-۲u}}{۱۳}(۳\sin ۳u-۲\cos ۳u)\Big|_۰^x=\frac{e^{-۲x}}{۱۳}(۳\sin ۳x-۲\cos ۳x)+\frac{۲}{۱۳}$$

$$L\{\int_۰^x e^{-۲u}\cos ۳u\,du\}=\frac{۱}{۱۳}(\frac{۹}{(s+۲)^۲+۹}-\frac{۲(s+۲)}{(s+۲)^۲+۹}+\frac{۲}{s})=\frac{s+۲}{s((s+۲)^۲+۹)}$$

$$L\{x\int_۰^x e^{-۲u}\cos ۳u\,du\}=-\frac{d}{ds}[\frac{s+۲}{s((s+۲)^۲+۹)}]=\frac{۲(s+۱)(s+۲)^۲+۱۸}{s^۲((s+۲)^۲+۹)^۲}$$

ب) داریم :

$$F(s)=\frac{۴se^{-۳s}}{s^۲+۱۰s+۴۱}=e^{-۳s}(\frac{۴(s+۵)}{(s+۵)^۲+۴^۲}-\frac{۲۰}{(s+۵)^۲+۴^۲})$$

$$F(s)=e^{-\pi s}(۴L\{e^{-۵x}\cos ۴x\}-۵L^{-۱}\{e^{-۵x}\sin ۴x\})=e^{-\pi s}L\{e^{-۵x}(۴\cos ۴x-۵\sin ۴x)\}$$

$$=L\{u_\pi(x)e^{۵(\pi-x)}(۴\cos ۴(x-\pi)-۵\sin ۴(x-\pi))\}=L\{u_\pi(x)e^{۵(\pi-x)}(۴\cos ۴x-۵\sin ۴x)\}$$

بنابر این :

$$L^{-۱}\{F(s)\}=u_\pi(x)e^{۵(\pi-x)}(۴\cos ۴x-۵\sin ۴x)=\begin{cases} ۰ & x<\pi \\ e^{۵(\pi-x)}(۴\cos ۴x-۵\sin ۴x) & \pi\le x\end{cases}$$