گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : ۱۴۰۱/۳/۲۱

وقت : ۹۰ **دقیقه**

نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم درس : **ریاضی۱**-فنی (۹ گروه هماهنگ)

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) ۱۴۰۱- ۱۴۰۰

توجه :

پاسخ‌ها را توسط نرم‌افزاری مانند Camscanner به صورت یک فایل PDF با حجم مناسب در آورده و از طریق سامانه LMS ارسال نمایید.

ارسال فایل‌ها را به دقایق آخر موکول نکنید چون سامانه راس ساعت بسته خواهد شد.

سوال ۱- انتگرال‌های نامعین زیر را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

$$I_۱ = \int \frac{\cos x}{۵ - ۳\cos x} dx \qquad\qquad I_۲ = \int \ln(x^۲ - ۶x + ۳۴) dx$$

سوال ۲- ناحیه محدود به منحنی تابع $f(x) = \frac{۱}{x^۴ + ۸۱}$ و محور xها در بازه $[۰,۳]$، حول محور yها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال ۳- مساحت ناحیه محدود بین منحنی‌های $y = (\sqrt{۵} - \sqrt{x})^۲$ و $y = ۵ - x$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال ۴- الف) شعاع و بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(n!)^۲}{(۲n)!} (۳x + ۵)^n$ را بیابید. **۸ نمره**

ب) سه جمله اول ناصفر سری مک‌لورن تابع $f(x) = \ln(۳x^۲ + ۲)$ را بیابید. **۸ نمره**

موفق باشید

جواب سوال ۱- برای محاسبه I_1 از تغییر متغیر $t=\tan\frac{x}{2} \to dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ استفاده می‌کنیم.

$$I_1=\int\frac{\cos x}{5-3\cos x}dx=\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{5-3\times\frac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1-t^2}{(1+4t^2)(1+t^2)}dt=\frac{1}{3}\int(\frac{5}{1+4t^2}-\frac{2}{1+t^2}+)dt$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{5}{2}\arctan 2t-2\arctan t)+c=\frac{1}{6}(5\arctan\frac{2\sin x}{1-\cos x}-2x)+c$$

اگر قبل از انجام تغییر متغیر، کسر داخل انتگرال را به صورت مجموع دو کسر ساده‌تر می‌نوشتیم، نیازی به تجزیه کسرها هم نبود.

$$I_1=\int\frac{\cos x}{5-3\cos x}dx=\frac{1}{3}\int(\frac{5}{5-3\cos x}-1)dx=\frac{1}{3}\int(\frac{5}{5-3\times\frac{1-t^2}{1+t^2}}-1)\times\frac{2dt}{1+t^2}=\frac{1}{3}\int(\frac{5}{1+4t^2}-\frac{2}{1+t^2})dt=\cdots$$

برای محاسبه I_2 از روش انتگرالگیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}u=\ln(x^2-6x+34)\\ v'=1\end{cases}\to\begin{cases}u'=\frac{2x-6}{x^2-6x+34}\\ v=x\end{cases}$$

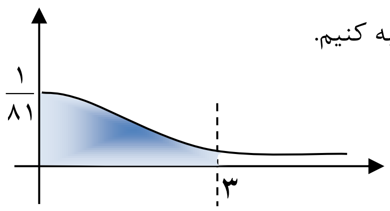
$$I_2=\int\ln(x^2-6x+34)dx=x\ln(x^2-6x+34)-\int\frac{x(2x-6)}{x^2-6x+34}dx$$

$$=x\ln(x^2-6x+34)-\int(2+\frac{6(x-3)}{(x-3)^2+5^2}-\frac{50}{(x-3)^2+5^2})dx$$

$$=x\ln(x^2-6x+34)-2x-3\ln(x^2-6x+34)+10\arctan\frac{x-3}{5}+c$$

$$=-2x+(x-3)\ln(x^2-6x+34)+10\arctan\frac{x-3}{5}+c$$

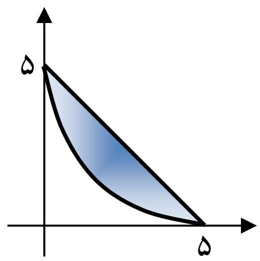
جواب سوال ۲- به کمک روش پوسته استوانه‌ای باید انتگرال معین $V=\int_0^3\frac{2\pi x}{x^4+81}dx$ را محاسبه کنیم.



با انجام تغییر متغیر $x^2=9t$ خواهیم داشت :

$$V=\frac{9\pi}{81}\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{\pi}{9}\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{36}$$

جواب سوال ۳- با توجه به شکل، باید انتگرال $S=\int_0^5[(5-x)-(\sqrt{5}-\sqrt{x})^2]dx$ را حل کنیم.



$$S=\int_0^5(2\sqrt{5}\sqrt{x}-2x)dx=\frac{4\sqrt{5}}{3}x\sqrt{x}-x^2\Big|_0^5=\frac{25}{3}$$

جواب سوال ۴- الف) برای استفاده از فرمول‌ها، سری را به صورت استاندارد $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}(x-\frac{-5}{3})^n$ می‌نویسیم.

مرکز سری نقطه $a=\frac{-5}{3}$ و ضریب عددی جمله عمومی $a_n=\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$ است. پس شعاع همگرایی برابر است با :

$$R=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}\div\frac{3^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{3(n+1)}=\frac{4}{3}$$

این سری توانی در بازه $(\frac{-5}{3}-\frac{4}{3}\ ,\ \frac{-5}{3}+\frac{4}{3})=(-3,\frac{-1}{3})$ همگرا است. کران‌های این بازه را بطور جداگانه بررسی می‌کنیم.

اگر $x=-3$ آنگاه سری توانی به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n(n!)^2}{(2n)!}$ در می‌آید که واگراست. (شرط لازم همگرایی را ندارد.)

اگر $x=\frac{-1}{3}$ آنگاه سری توانی به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ در می‌آید که واگراست. (شرط لازم همگرایی را ندارد.)

در نتیجه، بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(3x+5)^n$ عبارت است از : $(-3\ ,\ \frac{-1}{3})$

ب) ابتدا تابع $f(x)=\ln(3x^2+2)$ را به صورت $f(x)=\ln(\frac{3}{2}x^2+1)+\ln 2$ می‌نویسیم.

و بسط مک لورن تابع $g(x)=\ln(1+x)$ را می‌نویسیم.

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}\ ,\ g''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}\ ,\ g^{(3)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}\ ,\ g^{(4)}(x)=\frac{-6}{(1+x)^4}\ ,\ \cdots$$

$$g(0)=0\ ,\ g'(0)=1\ ,\ g''(x)=-1,\ g^{(3)}(x)=2\ ,\ g^{(4)}(x)=-6\ ,\ \cdots$$

بنابر این، سری مک لورن تابع $g(x)=\ln(1+x)$ حول $a=0$ عبارت است از :

$$g(x)=\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\cdots)$$

اکنون می‌توانیم سری مک لورن تابع f را بنویسیم.

$$f(x)=\ln 2+g(\frac{3x^2}{2})=\ln 2+\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}(\frac{3x^2}{2})^2+\frac{1}{3}(\frac{3x^2}{2})^3-\frac{1}{4}(\frac{3x^2}{2})^4+\frac{1}{5}(\frac{3x^2}{2})^5+\cdots$$

$$=\ln 2+\frac{3x^2}{2}-\frac{9x^4}{8}+\frac{9x^6}{8}-\frac{81x^8}{64}+\frac{243x^{10}}{160}+\cdots$$