مکانیک کلاسیک

سید علی حسینی منصوری

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

۱۹ بهمن ۱۴۰۰

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

این درسنامه براساس کتاب مکانیک کلاسیک Gregory نوشته شده است. البته دانشجویان می توانند دیگر منبع از جمله کتاب گرانت فاولز و سایمون را نیز مطالعه نمایند.

برای مکانیک تحلیلی ۱ تا پایان فصل هشتم از کتاب را تدریس خواهم کرد.

در این هشت فصل مکانیک نیوتنی برای یک ذره مجرد را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. موضوعاتی که به آن خواهیم پرداخت عبارت است از

- فصل ۳ : جبر و محاسبات برداری
- فصل ۳ : سرعت، شتاب و سرعت زاویه ای اسکالر
- فصل ۴: قوانین نیوتن و گرانش
- فصل ۵: مسائل دینامیک ذره
- فصل ۶: نوسانات خطی و مدهای نرمال
- فصل ۷: بقای انرژی
- فصل ۸: مدارهای حرکت در نیروی مرکزی
- فصل ۹: نوسانات غیر خطی و فضای فاز

تاریخ میانترم: و تاریخ پایان ترم:

[۱] درسنامه مکانیک کلاسیک

فصل ۲

کمیت‌های فیزیکی و تحلیل ابعادی

همانگونه که می‌دانید مشاهده و اندازه‌گیری بخش جدایی‌ناپذیر نظریه‌های فیزیکی است. آن‌چه را که با یک ابزار مشخص قابل اندازه‌گیری است، کمیت فیزیکی می‌نامیم. کمیت‌های فیزیکی به دو دسته‌ی کمیت‌های اسکالر (عددی) و کمیت‌های برداری تقسیم می‌شوند. کمیت‌های اسکالر به کمیت‌هایی گفته می‌شود که مقدار آن‌ها تنها با یک عدد حقیقی بیان می‌شود، مانند جرم، زمان، دمای اتاق. در حالی که کمیت‌های برداری علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز هستند. برای نمونه نیرویی که توسط یک طناب به یک جسم وارد می‌کنید، دارای بزرگی و جهت است؛ یعنی هم مقدار نیروی صرف شده و هم کشیدگی طناب را (که نشان دهنده‌ی جهت نیرو است) در خود دارد.
نکته: بزرگی این کمیت‌ها اعم از اسکالر و برداری، به دو دسته کمیت‌های بُعددار و بدون‌بُعد تقسیم می‌شوند. کمیت‌های بُعددار به کمیت‌هایی گفته می‌شود که بزرگی آن‌ها با تغییر ابزار اندازه‌گیری تغییر می‌کند، مثلا فاصله شاهرود تا تهران با متر حدود ۴۰۰۰۰۰ متر است در صورتی که کیلومتر شمار ماشین عدد ۴۰۰ را نشان می‌دهد.

۱.۲ تحلیل ابعادی

در فیزیک هفت کمیت اصلی وجود دارد که کمیت‌های دیگر را می‌توان بر اساس آن‌ها نوشت. این کمیت‌ها عبارتند از طول (L)، جرم (M)، زمان (T)، جریان الکتریکی (A)، دما $(\mathcal{T})$، مقدار ماده (n)، و شدت روشنایی (I_v) . در سیستم استاندارد واحدها (SI) واحد این کمیت‌ها به ترتیب عبارتند از متر، کیلوگرم، آمپر، کلوین، مول، و کاندلا. البته می‌توان سیستم‌های دیگر انتخاب کرد که مقدار این واحدها در آن متفاوت است ولی بُعد آن‌ها همواره ثابت است (شکل ۱.۲ را مشاهده نمایید). نوشتن کمیت بر حسب بُعد، تحلیل ابعادی [1] نام دارد. وقتی می‌خواهیم

[1] dimensional analysis

شکل ۱.۲: واحد های اصلی SI

کمیتی را تحلیل ابعادی کنیم، آن را در [ ] قرار می‌دهیم، مثلا

$$[x] = L \qquad [t] = T \qquad [i] = A \tag{۱.۲}$$

مثال: می‌دانیم که مساحت بُعد مربع طول دارد. بنابراین

$$[A] = L^2, \tag{۲.۲}$$

است. تحلیل ابعادیِ سرعت برابر

$$v = \frac{x}{t} \longrightarrow [v] = LT^{-1}, \tag{۳.۲}$$

است. تحلیل ابعادیِ شتاب برابر

$$a = \frac{v}{t} \longrightarrow [a] = LT^{-2}, \tag{۴.۲}$$

است. بنابراین تحلیل ابعادیِ نیرو

$$F = ma \longrightarrow [F] = MLT^{-2}, \tag{۵.۲}$$

و تحلیل ابعادیِ انرژی

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow [E] = ML^2T^{-2} \quad (۶.۲)$$

است. برای به دست آوردن بُعد بار الکتریکی از کمیت جریان الکتریکی کمک می‌گیریم، چون جریان کمیت اصلی است. پس

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \longrightarrow [q] = AT. \quad (۷.۲)$$

در نتیجه بُعد میدان الکتریکی به صورت

$$E = \frac{F}{q_0} \longrightarrow [E] = MLA^{-1}T^{-3}. \quad (۸.۲)$$

و بُعد میدان مغناطیسی

$$F = qvB \longrightarrow [B] = MA^{-1}T^{-2}. \quad (۹.۲)$$

است.

تمرین: به کمک آن‌چه در بالا گفته شد، استفاده از قانون کولن که $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$ و میدان مغناطیسی در مرکز حلقه‌ی جریان که $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ است، بُعد ϵ_0 و μ_0 را تعیین کنید. برای آن که در نهایت روابط خود را راستی‌آزمایی کنید از رابطه‌ی $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ که c سرعت نور است و بُعد سرعت دارد، کمک بگیرید.

تمرین: به کمک رابطه‌ی $F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$ بُعد G (ثابت جهانی گرانش) را محاسبه کنید.

تمرین: به کمک رابطه‌ی $E = hf$ که در آن f بسامد و h ثابت پلانک است. بُعد h را محاسبه کنید.

به سادگی می‌توان دریافت که تحلیل ابعادی ابزاری قدرتمند در مطالعه‌ی فیزیک است. در دو سمت یک رابطه‌ی فیزیکی باید از لحاظ بُعد سازگاری وجود داشته باشد. حتی زمانی که اطلاعات بسیار کمی از یک کمیت در اختیار ما قرار دارد، تحلیل ابعادی به یافتن یک رابطه کمک فراوانی می‌کند. فرض کنید گلوله‌ی کوچکی به یک طناب آویزان است. از ما خواسته می‌شود تنها به کمک تحلیل ابعادی رابطه‌ای برای دوره‌ی تناوب این آونگ به دست آوریم. چون تنها ابزار ما تحلیل ابعادی است فقط باید از بُعد کمیت‌ها استفاده کنیم. از خود سوال می‌پرسیم که دوره‌ی تناوب آونگ به چه کمیت‌هایی می‌تواند بستگی داشته باشد؟ در پاسخ می‌توان از طول آونگ (l)، جرم آونگ (m)، زاویه‌ای که آونگ را به نوسان در آورده‌ایم (θ)، و شتاب گرانش زمین (g) یاد کرد. چون تنها ابزار ما تحلیل ابعادی است، باید تابعی از کمیت‌های بالا بسازیم که در نهایت فقط بُعد زمان داشته باشد. بنابراین دوره‌ی نوسان آونگ حاصل‌ضربی از توان‌های نامشخص کمیت‌های بالا است. پس

$$T = l^\alpha m^\beta g^\gamma \theta^\lambda \quad (۱۰.۲)$$

است. حاصل‌ضرب کمیت‌های سمت راست رابطه‌ی (۱۰.۲) در نهایت باید بُعد زمان داشته باشند تا با سمت

چپ سازگار باشند. در ادامه به جای کمیت‌های رابطه‌ی (۱۰.۲) بُعد آن‌ها را قرار می‌دهیم. چون زاویه در یکاهای استاندارد بدون بُعد است، پس رابطه‌ی ما در مورد زاویه‌ی شروع نوسان اطلاعاتی به ما نمی‌دهد ($\lambda = 0$).

$$T = L^{\alpha}M^{\beta}L^{\gamma}T^{-2\gamma} = L^{\alpha+\gamma}M^{\beta}T^{-2\gamma} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha+\gamma=0 \longrightarrow \alpha=\frac{1}{2} \\ \beta=0 \\ -2\gamma=1 \longrightarrow \gamma=\frac{-1}{2} \end{cases} \tag{۱۱.۲}$$

در نتیجه رابطه‌ای که ما فقط به کمک تحلیل ابعادی برای دوره‌ی نوسان آونگ به دست آوردیم، برابر $T = \sqrt{\frac{l}{g}}$ است، که بسیار به رابطه‌ی دقیق آن شباهت دارد.

مثال ساده‌ی بالا نشان داد که تحلیل ابعادی ابزاری قدرتمند در فیزیک است. در هنگام استفاده از این تحلیل باید به نکات زیر دقت کرد:

- اگر در یک رابطه، عدد ثابت و یا کمیت‌های بدون بُعد مانند زاویه وجود داشته باشد، این مقادیر با تحلیل ابعادیِ صِرف به دست نخواهند آمد.
- در رابطه‌ای که به کمک تحلیل ابعادی به دست می‌آوریم، همواره کمیت‌ها در هم ضرب و یا بر هم تقسیم می‌شوند. به کمک تحلیل ابعادیِ صِرف نمی‌توان رابطه‌ای نوشت که کمیت‌ها با هم جمع شده‌اند (مگر آن‌که از جایی اطلاعات دیگری داشته باشیم). چون وقتی دو کمیت با هم جمع می‌شوند یعنی این که بُعد یکسانی دارند. در نتیجه نمی‌توانیم آن‌ها را از هم تمیز دهیم.
- ابزار قدرتمند تحلیل ابعادی در مسائلی که چند کمیت با بُعد یکسان در مسئله دخیل هستند، کارایی خود را از دست می‌دهد. مثلا فرض کنید در مسئله چند کمیت با بُعد طول بر نتایج تاثیر می‌گذارند.

تمرین: به کمک آن‌چه در بالا گفته شد، از سه ثابت جهانی فیزیک یعنی c, G, h کمیتی بسازید که

الف) بُعد طول داشته باشد.

ب) بُعد زمان داشته باشد.

ج) بعد جرم داشته باشد.

تمرین: در سال ۱۹۴۷ میلادی، مجموعه‌ای عکس از نخستین انفجار اتمی در سال ۱۹۴۵ در نیومکزیگو در مجله‌ی لایف چاپ شد. این عکس‌ها شعاع موج شوکی کروی را در زمان‌های متوالی بر حسب میلی ثانیه نشان می‌داد. از

Table 1.1 RADIUS R OF BLAST WAVE AFTER TIME T

T/msec	R/m
0.10	11.1
0.24	19.9
0.38	25.4
0.52	28.8
0.66	31.9
0.80	34.2
0.94	36.3
1.08	38.9
1.22	41.0
1.36	42.8
1.50	44.4
1.65	46.0
1.79	46.9
1.93	48.7
3.26	59.0
3.53	61.1
3.80	62.9
4.07	64.3
4.34	65.6
4.61	67.3
15.0	106.5
25.0	130.0
34.0	145.0
53.0	175.0
62.0	185.0

عکس‌ها می‌توان شعاع موج کروی را به عنوان تابعی از زمان بدست آورد: نتایج در جدولِ ۱.۲ آمده است. با فرض این‌که سطح زمین در انتشار موج تاثیر چندانی ندارد، و حرکت موج فقط به انرژی آزاد شده از انفجار E و چگالی هوایِ بیرون ρ بستگی داشته باشد، شعاع موج انفجار را به عنوان تابعی از زمان محاسبه نمایید. به کمک جدول انرژی آزاد شده از انفجار را تخمین بزنید.

[۱] درسنامه مکانیک کلاسیک

فصل ۳

جبر و محاسبات برداری

در این فصل در ابتدا مروری بر کابردهای جبر برداری خواهیم داشت به طوری که مباحثی همچون عملگرهای برداری و ویژگیهای آنها به همراه مثال های گوناگون را شامل خواهد شد. در ادامه فصل مشتق گیری از توابع برداری از یک متغیر اسکالر و از جمله مفاهیمی نظیر بردار مماس و بردار نرمال روی یک خمینه که مستلزم تفسیر کمیت های دیگری همچون سرعت و شتاب هستند، را مورد مطالعه قرار می دهیم.

۱.۳ بردار و کمیت های برداری

اکثر کمیت های فیزیکی به دو دسته، کمیت های اسکالر و کمیت های برداری تقسیم می شوند. برای مثال دمای اتاق یک کمیت اسکالر است زیرا مقدار آن تنها با یک عدد حقیقی بیان می شود. مثالی دیگری همچون زمان که ساعت پشت دست شما را نشان می دهد، جرم یک قوطی کنسرو و حجم آن، چگالی آهن و فشار هوای داخل اتاق تماما کمیت های اسکالر هستند. اما کمیت های برداری به صورت زیر تعریف می شوند.

- کمیت برداری: اگر کمیت Q دارای بزرگی و جهت باشد بنابراین Q یک کمیت برداری نامیده می شود.

برای مثال جابجایی یک ذره یک کمیت برداری است. اگر فرض کنید ذره از نقطه A شروع به حرکت کند و پس از طی مسیری به نقطه انتهای B برسد. در این صورت بزرگی این جابجایی فاصله AB و جهت این جابه جایی جهت خط راستی است که نقطه A را به B متصل می کند. همچنین به عنوان مثال دیگر نیروی F اعمال شده به یک جسم به وسیله یک طناب یک کمیت برداری است زیرا بزرگی آن، شدت نیرو که همواره مقدار حقیقی مثبت است و جهت آن جهت طناب کشیده شده است. از جمله کمیت های دیگری نظیر سرعت و شتاب نیز کمیت برداری

محسوب می شوند. به منظور یکسان سازی تمام کمیت های فیزیکی مستقل از مبدا فیزیکی آنها می توان مفهوم بردار را به عنوان یک کمیت کلیتری نسبت به مثالهای خاصی بیان کرد. بنابراین می توان گفت:

- یک بردار یک کمیت نظری است که توسط دو ویژگی بزرگی و جهت مشخص می‌شود، لذا دو بردار زمانی با یکدیگر مساوی هستند که دارای بزرگی و جهت یکسان باشند.

در سرتاسر این درسنامه همانند کتاب تمام بردارها با حروف انگلیسی برجسته مانند a ، F و بزرگی آنها را معمولا با $|a|$ یا a نمایش می دهیم. اکنون شما همانند کمیت های عددی می توانید اعمال جبری نظیر جمع تفریق و ضرب را برای کمیت های برداری بکار گیرید.

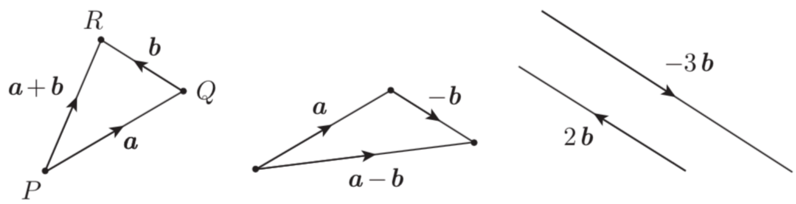
۲.۳ عملگرهای خطی نظیر $\mathrm{a} \pm \mathrm{b}$ و $\lambda\mathrm{a}$

- جمع برداری: فرض کنید a و b دو بردا باشند. مطابق شکل ۱.۳ قسمت $\vec{PQ}$ را با a و قسمت $\vec{QR}$ را با b نمایش می دهیم. در این صورت جمع $\mathrm{a} + \mathrm{b}$ نمایشی برای قسمت $\vec{PR}$ است.

- قرینه یک بردار: برای بردار دلخواه b همیشه می توان بردای با اندازه یکسان اما در جهتی مخالف بردار b در نظر گرفت که به آن قرینه بردار گفته می شود و با نماد $-\mathrm{b}$ نوشته می شود. بنابراین تفریق برداری را می توان با رابطه زیر بیان کرد (شکل وسط از شکل ۱.۳ را مشاهده کنید).

$$\mathrm{a} - \mathrm{b} = \mathrm{a} + (-\mathrm{b}) \tag{۱.۳}$$

- ضرب اسکالر: اجازه دهید a یک بردار و λ یک اسکالر (عدد حقیقی) باشد در این صورت ضرب اسکالر $\lambda\mathrm{a}$ یک بردار با بزرگی $|\lambda||a|$ و جهت آن بسته به منفی، مثبت و یا صفر بودن λ به ترتیب خلاف، هم جهت و صفر است (قسمت سمت راست از شکل ۱.۳ را مشاهده کنید).



شکل ۱.۳: جمع، تفریق و ضرب اسکالر بردارها

جدول ۱.۳: قوانین جبری

خاصیت جابجایی	$\mathrm{a}+\mathrm{b}=\mathrm{b}+\mathrm{a}$
خاصیت شرکت پذیری	$\mathrm{a}+(\mathrm{b}+\mathrm{c})=(\mathrm{a}+\mathrm{b})+\mathrm{c}$
خاصیت شرکت پذیری	$\lambda(\mu \mathrm{a})=(\lambda\mu)\mathrm{a}$
خاصیت توزیع پذیری	$\lambda(\mathrm{a}+\mathrm{b})=\lambda\mathrm{a}+\lambda\mathrm{b}$
خاصیت توزیع پذیری	$(\lambda+\mu)\mathrm{a}=\lambda\mathrm{a}+\mu\mathrm{a}$

۳.۳ بردار واحد

برداری با بزرگی واحد, بردار واحد نامیده می شود. اگر بردار a را بر بزرگی اش تقسیم کنیم بردار حاصل بردار واحد است که همجهت با بردار a است. بنابراین

$$\widehat{a}=\frac{\overrightarrow{a}}{|a|} \tag{۲.۳}$$

۴.۳ مجموعه پایه استاندارد

به مجموعه پایه (بردار یکه) متعامد $\{i,j,k\}$ در دستگاه دکارتی، مجموعه پایه استاندارد نامیده می شود و می توان هر بردار را بر حسب این مجموعه بسط داد (شکل ۲.۳).

$$\mathrm{v}=\lambda i+\mu j+\nu k \tag{۳.۳}$$

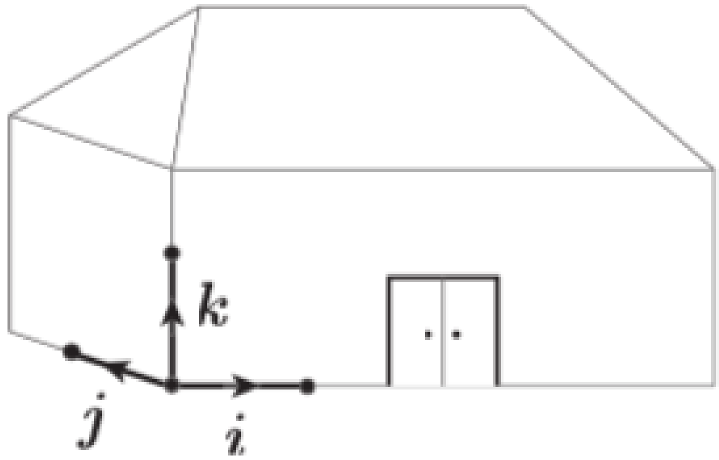
۵.۳ بردار مکان

اگر نقطه ثابت O در فضا را به عنوان مبدا مختصات (مبدا چارچوب مرجع) فرض کنیم در این صورت مکان هر نقطه دیگر مانند A نسبت به مبدا را با بردار $\overrightarrow{OA}$ که با a مطابق شکل ۳.۳ نشان داده می شود.

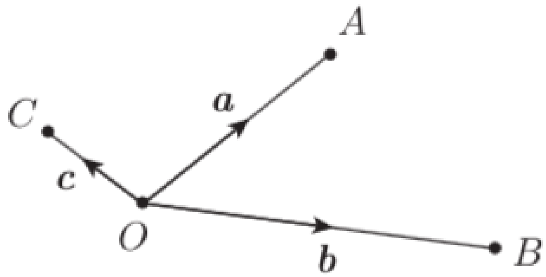
۶.۳ ضرب اسکالر دو بردار

ضرب اسکالر دو بردار با رابطه زیر تعریف می شود.

$$\mathrm{a.b}=ab\cos(\theta) \tag{۴.۳}$$



شکل ۲.۳: بردار پایه استاندارد.



شکل ۳.۳: نقاط A و B و C به ترتیب دارای بردار مکان a و b و c نسبت به مبدا هستند.

که θ زاویه میان دو بردار است. نکته: ضرب اسکالر دو بردار یک کمیت اسکالر است یعنی تنها با عدد مشخص می شود. هچنین ضرب داخلی به معنی انداختن سایه بردار a روی بردار b است، یا به عبارتی معادل نوشتن مولفه بردار a در راستای بردار b است.

۱.۶.۳ خواص ضرب اسکالر

- اندازه یا بزرگی یک بردار دلخواه را می توان از مجذور ضرب اسکالر بردار در خودش به دست آورد، یعنی

$$|a|^2 = a^2 = \mathrm{a.a} \tag{۵.۳}$$

- دو بردار a و b بر هم عمود هستند اگر و تنها اگر ضرب اسکالر دو بردار صفر باشد،

$$\mathrm{a.b} = ab\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow \mathrm{a} \perp \mathrm{b} \tag{۶.۳}$$

جدول ۲.۳: قوانین جبری برای ضرب اسکالر

خاصیت جابجایی	$\mathrm{a.b} = \mathrm{b.a}$
خاصیت توزیع پذیری	$\mathrm{a.(b+c)} = \mathrm{a.b} + \mathrm{a.c}$
خاصیت شرکت پذیری با ضرب اسکالر	$(\lambda \mathrm{a}).\mathrm{b} = \lambda(\mathrm{a.b})$

- اگر $\{i, j, k\}$ پایه های متعامد باشند در این صورت

$$i.i = j.j = k.k = 1 \qquad i.j = j.k = k.i = 0 \tag{۷.۳}$$

- اگر $\mathrm{a}_1 = \lambda_1 i + \mu_1 j + \nu_1 k$ و $a_2 = \lambda_2 i + \mu_2 j + \nu_2 k$ باشند، در این صورت داریم

$$\mathrm{a}_1.\mathrm{a}_2 = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 \tag{۸.۳}$$

علاوه بر خواص ذکر شده می توانید دیگر خواص را در جدول ۲.۳ مشاهده کنید.

مثال

با توجه به اولین شکل سمت چپ از شکل ۱.۳ مطلوبست

الف: بزرگی بردار حاصل جمع

جواب

$$|\mathrm{a}+\mathrm{b}|^2 = (\mathrm{a}+\mathrm{b}).(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \mathrm{a.a} + 2\mathrm{a.b} + \mathrm{b.b} = a^2 + 2ab\cos(\theta) + b^2 \tag{۹.۳}$$

ب: اگر فرض کنیم اندازه در بردار با هم برابر باشد ($a = b$) در این صورت رابطه بالا را ساده کنید. جواب: برای ساده سازی رابطه بالا استفاده از اتحادهای مثلثاتی زیر مفید هستند.

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \tag{۱۰.۳}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \tag{۱۱.۳}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \tag{۱۲.۳}$$

حال با توجه به روابط بالا به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \tag{۱۳.۳}$$

اکنون با فرض هم اندازه بودن بردارها داریم

$$|\mathrm{a}+\mathrm{b}| = a(2+2\cos(\theta))^{\frac{1}{2}} = 2a\cos(\frac{\theta}{2}) \qquad (۱۴.۳)$$

تمرین

عملیات بالا را برای حاصل تفریق دو بردار (شکل میانی) تکرار کنید.

۷.۳ مؤلفه یک بردار

اگر فرض کنیم n یک بردار واحد باشد، در این صورت مؤلفه بردار v در راستای n را با $\mathrm{v.n}$ تعریف می شود. به طور کلی مؤلفه بردار v در راستای هر بردار دلخواه a را با $\mathrm{v}.\widehat{a}$ به دست می آید.

تمرین

اگر $\mathrm{v} = 6i - 3j + 15k$ و $\mathrm{a} = 2i - j - 2k$ باشد در این صورت مؤلفه بردار v در راستای بردار a را به دست آورید.

۸.۳ ضرب برداری $\mathrm{a}\times\mathrm{b}$

ضرب برداری: فرض کنید مطابق شکل ۱.۴ دو بردار، a و b به ترتیب دارای نمایش $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ باشند، همچنین n بردار واحد عمود بر صفحه OAB باشد به طوری که مجموعه $\{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{n}\}$ یک مجموعه راست دست باشد (شکل ۵.۳ را نگاه کنید.)، در این صورت ضرب برداری به صورت زیر تعریف می شود.

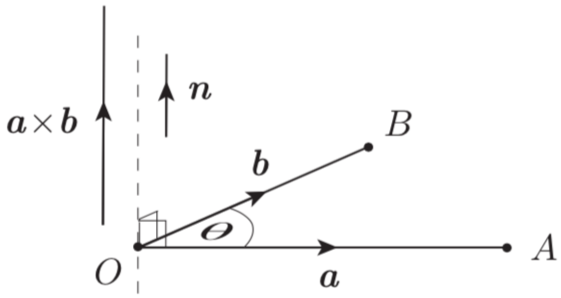
$$\mathrm{a}\times\mathrm{b} = (ab\sin(\theta))\mathrm{n} \qquad (۱۵.۳)$$

که θ زاویه میان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است. توجه داشته باشید ضرب برداری یک کمیت برداری است (شکل ۱.۴).

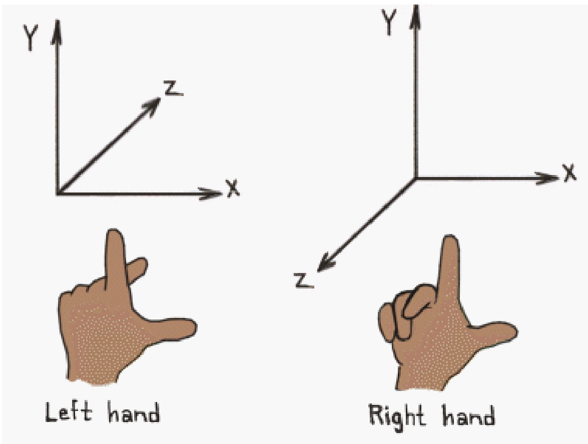
از مهمترین خواص ضرب برداری می توان به موارد زیر اشاره کرد.

- ضرب برداری هر بردار در خودش صفر است

$$\mathrm{a}\times\mathrm{a} = 0 \qquad (۱۶.۳)$$



شکل ۴.۳: ضرب برداری دو بردار



شکل ۵.۳: در راست دستی، انگشت اشاره دست راست در سمت بردار اول و کف دست راست در سمت بردار دوم قرار دارند در این صورت انگشت شصت جهت بردار سوم را نشان می دهد. اما در چپ دستی چنین قواعد برای دست چپ بکار گرفته می شود.

- اگر دو بردار موازی باشند بنابراین ضرب برداری آنها صفر است،

$$a \times b = 0 \rightarrow a \| b \tag{۱۷.۳}$$

- اگر $\{i, j, k\}$ پایه های استاندارد باشند بنابراین

$$i \times j = k \quad k \times i = j \quad j \times k = i \quad i \times i = j \times j = k \times k = 0 \tag{۱۸.۳}$$

- اگر $a_1 = \lambda_1 i + \mu_1 j + \nu_1 k$ و $a_2 = \lambda_2 i + \mu_2 j + \nu_2 k$ باشد در این صورت خواهیم داشت،

$$a_1 \times a_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} \tag{۱۹.۳}$$

جدول ۳.۳: قوانین جبری برای ضرب برداری

خاصیت پادجابجایی	$\mathrm{a} \times \mathrm{b} = -\mathrm{b} \times \mathrm{a}$
خاصیت توزیع پذیری	$\mathrm{a} \times (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = \mathrm{a} \times \mathrm{b} + \mathrm{a} \times \mathrm{c}$
خاصیت شرکت پذیری با ضرب اسکالر	$(\lambda \mathrm{a}) \times \mathrm{b} = \lambda(\mathrm{a} \times \mathrm{b})$

در این رابطه دترمینان با سطر اول محاسبه می شود. همچنین دیگر خواص ضرب برداری را می توانید در جدول ۳.۳ دنبال کنید.

نکته: چون ضرب برداری خاصیت پادجابجایی دارد بنابراین ترتیب عبارات در ضرب برداری بایستی همواره حفظ شود. پس ضرب برداری خاصیت شرکت پذیری ندارد.
تمرین: اگر $a = 2i - j + 2k$ و $b = -i - 3k$ باشند، در این صورت یک بردار واحد که عمود بر هردو این بردارهاست را بیابید.

۹.۳ ضرب های سه‌گانه

ضرب سه گانه یک عملگر جدید نیست در واقع برآمدی ساده از عملیات دیگر است. دو نوع ضرب سه گانه وجود دارد، ضرب سه گانه اسکالر و ضرب سه گانه برداری از این جمله هستند.

۱.۹.۳ ضرب سه گانه اسکالر

عبارتی به شکل $\mathrm{a}.(\mathrm{b} \times \mathrm{c})$ را ضرب سه گانه اسکالر می نامیم زیرا مقدار آن یک عدد است.
خواص ضرب سه گانه اسکالر

- جایگشت های دوره ای از بردارهای a، b و c در ضرب سه گانه اسکالر، مقدار یکسانی را حاصل می شوند.

$$\mathrm{a}.(\mathrm{b} \times \mathrm{c}) = c.(\mathrm{a} \times \mathrm{b}) = b.(\mathrm{c} \times \mathrm{a}) \tag{۲۰.۳}$$

علاوه براین رابطه ضرب سه گانه به شکل های دیگر نیز نوشته می شود،

$$\mathrm{a}.(\mathrm{b} \times \mathrm{c}) = (\mathrm{a} \times \mathrm{b}).\mathrm{c} \tag{۲۱.۳}$$

این به این معناست که جابجایی ضرب اسکالر و ضرب برداری مقدار نهایی را تغییر نمی دهد. به علت این خاصیت تقارنی، ضرب سه گانه را می توان با نماد $[a, b, c]$ نشان داد که درارای خواص زیر است.

- ضرب سه گانه $[a, b, c] = 0$ است اگر و تنها اگر بردارهای a، b و c داخل یک صفحه باشند (هم صفحه). البته اگر یکی از بردارها صفر باشد و همچنین اگر دو تا از بردارها یکسان باشند این ضرب بازهم صفر است.
- اگر $[a, b, c] > 0$ باشد، مجموعه $\{a, b, c\}$ راست دست و اگر $[a, b, c] < 0$ باشد، مجموعه $\{a, b, c\}$ چپ دست است.
- اگر $a_1 = \lambda_1 i + \mu_1 j + \mu_1 k$، $a_2 = \lambda_2 i + \mu_2 j + \mu_2 k$ و $a_3 = \lambda_3 i + \mu_3 j + \mu_3 k$ باشند در این صورت،

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \qquad (۲۲.۳)$$

۲.۹.۳ ضرب سه گانه برداری

عبارتی به شکل $a \times (b \times c)$ را ضرب سه گانه برداری می نامیم زیرا مقدار آن یک بردار است.
خواص ضرب سه گانه برداری
چون $b \times c$ عمود بر هر دو بردار b و c است، لذا بردار حاصل از $a \times (b \times c)$ در صفحه حاصل از دو بردار b و c قرار می گیرد. بنابراین می توان آن را به شکل $\lambda b + \mu c$ بسط داد. به طور دقیقتر می توان ضرب سه گانه برداری را به صورت زیر بسط داد.

$$a \times (b \times c) = (a.c) - (a.b)c \qquad (۲۳.۳)$$

به علت اینکه ضرب برداری خاصیت پادجابجایی و نیز شرکت ناپذیری را داراست، لذا عاقلانه ترین راه ممکن این است که فرم بالا را به همین شکل بکار گیریم.
اثبات: برای اثبات رابطه بالا بهتر است نماد لوی-چیویتا ϵ_{ijk} را معرفی کنیم. این نماد دارای خواص زیر است.

- این نماد کاملا پاد متقارن است، به طور که اگر (i, j, k) جایگشتی زوج از $(1, 2, 3)$ باشد در این صورت مقدار ۱ و نیز اگر جایگشت فردی باشد مقدار آن -1 است و در غیر این صورت مقدار آن صفر است (شکل ۶.۳).

$$\epsilon_{312} = \epsilon_{231} = \epsilon_{123} = 1 \quad \epsilon_{321} = -\epsilon_{312} = -\epsilon_{123} = -1 \quad \epsilon_{112} = \epsilon_{221} = 0 \qquad (۲۴.۳)$$

همچنین

•

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{imn} = \sum_{i=1,2,3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} \tag{۲۵.۳}$$

در رابطه بالا اندیس ها شبیه به هم در بالا و پایین به معنای جمع روی آن اندیس است (قاعده جمع انیشتین).

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{imn} = \delta^m_j\delta^n_k - \delta^n_j\delta^m_k \tag{۲۶.۳}$$

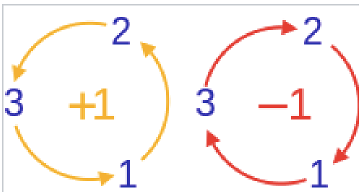
$$\epsilon_{jmn}\epsilon^{imn} = 2\delta^i_j \tag{۲۷.۳}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk} = 6 \tag{۲۸.۳}$$

در رابطه بالا δ^j_i دلتای کرونکر است.

تمرین: با استفاده از رابطه زیر روابط بالا را به دست آورید.

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{۲۹.۳}$$



شکل ۶.۳: جایگشت های زوج (زرد) و جایگشت های فرد (قرمز)

اکنون با استفاده از ویژگی های اشاره شده برای نماد لوی-چیویتا، دترمینان یک ماتریس مربعی 3×3 با $\mathrm{A} = [a_{ij}]$ را به صورت زیر نوشت.

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} \tag{۳۰.۳}$$

بنابراین ضرب برداری را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\mathrm{c} = \mathrm{a} \times \mathrm{b} \Rightarrow c_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}a_jb_k \tag{۳۱.۳}$$

که c_i مؤلفه بردار c است. اکنون رابطه ۲۳.۳ به صورت زیر اثبات می شود.

$$\begin{aligned} \mathrm{d} &= \mathrm{a}\times(\mathrm{b}\times\mathrm{c}) \Rightarrow d_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j (\mathrm{b}\times\mathrm{c})_k = \sum_{j,k=1}^{3}\sum_{n,m=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{knm} a_j b_n c_m \qquad (۳۲.۳)\\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon^{knm} a_j b_n c_m = (\delta_i^n\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^n) a_j b_n c_m = a_j c_j b_i - a_j b_j c_i \\ &\Rightarrow \mathrm{d} = (\mathrm{a.c})\mathrm{b} - (\mathrm{a.b})\mathrm{c} \qquad (۳۳.۳)\end{aligned}$$

تمرین: عبارت $(\mathrm{a}\times\mathrm{b}).(\mathrm{c}\times\mathrm{d})$ را بسط دهید.

۱۰.۳ توابع برداری از یک متغیر اسکالر

اغلب مقدار یک کمیت برداری وابسته به یک کمیت اسکالر مانند زمان است. برای مثال حرکت یک ذره در فضا با بردار مکان a داده می‌شود که بازمان در حال تغییر است یعنی $\mathrm{a} = \mathrm{a}(t)$ در این صورت این بردار تابعی از متغییر اسکالر زمان است. لازم به ذکر است که وابستگی زمانی یک بردار نیازمند حرکت نمی باشد. مثلا مقدار میدان الکتریکی و مغناطیسی در این مکان ثابت از فضا می تواند به طور کلی با زمان تغییر کند به گونه‌ای که $E = E(t)$ و $B = B(t)$ باشند. به طور کلی تنها زمان به عنوان مغییر اسکالر نیست بلکه می‌توان کمیت های اسکالر دیگر را نیز در نظر گرفت و بردار را بر حسب آن پارامتربندی کرد. همان طور که در شکل ۷.۳ منحنی $\mathcal{C}$ دارای نقاطی است که با پارامتر α پارامتربندی شده است. هر نقطه از این منحنی دارای خط مماسی است که جهتش توسط بردار واحد t مشخص می‌شود که به این بردار بردار مماس واحد گفته می‌شود و وابسته به α است، یعنی $t = t(\alpha)$. در این مورد متغییر مستقل، اسکالر α و متغییر وابسته بردار t است.

۱.۱۰.۳ مشتق پذیری

اکثر عملگرهای مهم که توسط توابع برداری وابسته به یک کمیت اسکالر قابل بیان هستند، مشتق پذیر هستند.

تعریف: فرض کنید بردار v تابعی از کمیت اسکالر α باشد در این صورت مشتق تابع برداری $\mathrm{v}(\alpha)$ نسبت به پارامتر α با رابطه حدی زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{d\mathrm{v}}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\left(\frac{\mathrm{v}(\alpha+\Delta\alpha)-\mathrm{v}(\alpha)}{\Delta\alpha}\right) \qquad (۳۴.۳)$$

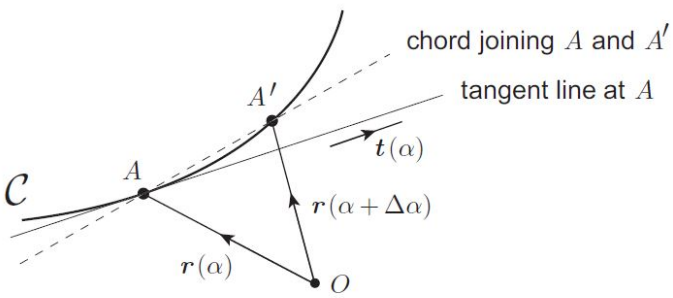
به نظر می‌سد این تعریف مشابه با تعریف یک تابع حقیقی باشد، اما یک تفاوت عمده وجود دارد. زمانی که α به $\alpha+\Delta\alpha$ تغییر می‌کند تابع برداری v از $\mathrm{v}(\alpha)$ به $\mathrm{v}(\alpha+\Delta\alpha)$ تغییر می‌کند یعنی اختلافی نظیر $\mathrm{v}(\alpha+\Delta\alpha)-\mathrm{v}(\alpha)$. نکته ای که وجود دارید این است که ایت اختلاف یک تفریق برداری است که کمیتی برداری می‌باشد و حتی بعد

جدول ۴.۳: قواعد مشتق برای توابع برداری : فرض کنید $\mathrm{u}(\alpha)$ و $\mathrm{v}(\alpha)$ توابع برداری از متغیر اسکالر α و نیز $\lambda(\alpha)$ یک تابع اسکالر باشد، در این صورت و با فرض $\dot{\mathrm{u}} = \frac{d}{d\alpha}\mathrm{u}$ داریم:

$$\frac{d}{d\alpha}(\lambda \mathrm{u}) = \dot{\lambda}\mathrm{u} + \lambda\dot{\mathrm{u}} \qquad \frac{d}{d\alpha}(\mathrm{u} \pm \mathrm{v}) = \dot{\mathrm{u}} \pm \dot{\mathrm{v}}$$

$$\frac{d}{d\alpha}(\mathrm{u} \times \mathrm{v}) = \dot{\mathrm{u}} \times \mathrm{v} + \mathrm{u} \times \dot{\mathrm{v}} \qquad \frac{d}{d\alpha}(\mathrm{u}.\mathrm{v}) = \dot{\mathrm{u}}.\mathrm{v} + \mathrm{u}.\dot{\mathrm{v}}$$

از تقسیم بر یک اسکالر $\Delta\alpha$ همچنان بردار است. بنابراین کمیت $\frac{d\mathrm{v}}{d\alpha}$ نیز کمیتی برداری است. از طرفی چون $\frac{d\mathrm{v}}{d\alpha}$ وابسته به α است، بنابراین خود تابع برداری از متغییر اسکالر α می‌باشد. قواعد حاکم بر این مشتق نیز مشابه با قواعد مشتق برای توابع حقیقی است (به جدول ۴.۳ رجوع شود).



شکل ۷.۳: بردار مماس واحد در نقطه فرضی A روی خمینه $\mathcal{C}$.

تمرین

اگر بردار مکان یک ذره با رابطه زیر داده شود در این صورت توابع برداری $\frac{d\mathrm{r}}{dt}$ و $\frac{d^2\mathrm{r}}{dt^2}$ را بیابید.

$$\mathrm{r} = (3t^3 - 5t)i + (2t+1)j + t^3k \tag{۳۵.۳}$$

تمرین

اگر بردار $\mathrm{a} = a(t)$ نیز و b بردار ثابت باشد رابطه زیر را اثبات کنید.

$$\frac{d}{dt}\Big[\mathrm{a}.(\dot{\mathrm{a}} \times \mathrm{b})\Big] = \mathrm{a}.(\ddot{\mathrm{a}} \times \mathrm{b}) \tag{۳۶.۳}$$

۱۱.۳ بردارهای مماس و نرمال به یک خمینه

در فصل آینده سرعت و شتاب مربوط به ذره در حال حرکت در فضای سه بعدی را تعریف خواهیم کرد. برای تفسیر چنین تعاریفی نیازمند اطلاعات در مورد هندسی مشتقی از خمینه (مسیر منحنی) هستیم، از جمله بردار مماس و بردار نرمال (بردار عمود).

۱.۱۱.۳ بردار مماس واحد

اگر بار دیگر مسیر منحنی $\mathcal{C}$ در شکل ۷.۳ را که توسط معادله پارامتری $\mathrm{r} = \mathrm{r}(\alpha)$ تعریف می‌شود را در نظر بگیریم (به طور کلی این مسیر می‌تواند در فضای سه بعدی نیز در نظر گرفته شود ولی در این جا در دو بعد کار می‌کنیم.) و اجازه نقطه فرضی A روی این مسیر را با پارامتر α و نقطه نزدیک به آن یعنی A' را متقابلا با پارامتر $\alpha + \Delta\alpha$ در نظر بگیریم. بنابراین وتر $\overrightarrow{AA'}$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\Delta\mathrm{r} = \mathrm{r}(\alpha + \Delta\alpha) - \mathrm{r}(\alpha) \tag{۳۷.۳}$$

بنابراین $\Delta\mathrm{r}/|\Delta\mathrm{r}|$ برداری واحد موازی با وتر $\overrightarrow{AA'}$ است. زمانی که $A \to A'$ میل کند در این صورت بردار مماس واحد با رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\mathrm{t}(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{\Delta\mathrm{r}}{|\Delta\mathrm{r}|} \tag{۳۸.۳}$$

همچنین بردار مماس t به توسط رابطه زیر به مشتق $\frac{d\mathrm{r}}{d\alpha}$ وابسته است.

$$\frac{d\mathrm{r}}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{\Delta\mathrm{r}}{|\Delta\mathrm{r}|} \times \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{|\Delta\mathrm{r}|}{\Delta\alpha} = \mathrm{t}(\alpha) \times |\lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{\Delta\mathrm{r}}{\Delta\alpha}| = \mathrm{t}(\alpha)|\frac{d\mathrm{r}}{d\alpha}| \tag{۳۹.۳}$$

به بیانی ساده تر داریم

$$\mathrm{t}(\alpha) = \frac{\frac{d\mathrm{r}}{d\alpha}}{|\frac{d\mathrm{r}}{d\alpha}|} \tag{۴۰.۳}$$

مثال: مطابق شکل ۸.۳ مسیر نیم دایره در صفحه دو بعدی $x - y$ با مختصات $x = x(\theta) = a(\theta - \sin(\theta))$، $y = y(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$ و $z = z(\theta) = 0$ بر حسب پارامتر θ پارامتر بندی شده است. بردار مماس بر این مسیر را بیابید. لازم به ذکر است که $0 < \theta < 2\pi$ است.

جواب: ابتدا لازم است بردار مکان را تعریف کنیم.

$$\mathrm{r}(\theta) = x(\theta)i + y(\theta)j + z(\theta)k = a(\theta - \sin(\theta))i + a(1 - \cos(\theta))j \tag{۴۱.۳}$$

اکنون به راحتی می‌توان بردار مماس واحد را به دست آورد.

تمرین: مثال را ادامه دهیم و عبارت نهایی برای بردار مماس واحد را بیابید.

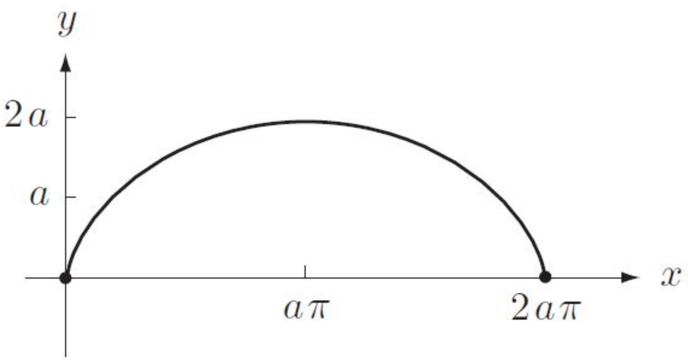
از سوی دیگر اگر مسیر منحنی حرکت ذره را با پارامتر نظیر s پارامتربندی کنیم به گونه‌ای که

$$|\frac{d\mathrm{r}}{ds}| = |\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\mathrm{r}}{\Delta s}| = 1 \tag{۴۲.۳}$$

بنابراین بردار مماس به شکل ساده زیر باز تعریف می‌شود.

$$\mathrm{t} = \frac{d\mathrm{r}}{ds} \tag{۴۳.۳}$$

که شکل مناسبتری برای مقاصد نظری است.



شکل ۸.۳: مسیر حرکت ذره‌ای در فضای دو بعدی

۲.۱۱.۳ بردار نرمال واحد

اجازه دهید $t(s)$ بردار مماس واحد بر خمینه $\mathcal{C}$ باشد که s فاصله در طول منحنی را نشان می‌دهد. بنابراین اگر t تابع برداری از متغییر اسکالر s باشد، در این صورت مشتق $\frac{d\mathrm{t}}{ds}$ نیز تابعی برداری دیگر وابسته به پارامتر s است. چون t بردار واحد است، یعنی $\mathrm{t}(s).\mathrm{t}(s) = 1$ می توان با گرفتن مشتق از شرط واحد بودن به رابطه زیر رسید.

$$\frac{d}{ds}(\mathrm{t}(s).\mathrm{t}(s) = 1) \Rightarrow 0 = \frac{d}{ds}(\mathrm{t}.\mathrm{t}) = \frac{d\mathrm{t}}{ds}.\mathrm{t} + \mathrm{t}.\frac{d\mathrm{t}}{ds} = 2\Big(\frac{d\mathrm{t}}{ds}.\mathrm{t}\Big) \tag{۴۴.۳}$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\frac{d\mathrm{r}}{ds}$ همواره عمود بر t است. بنابراین به طور معمول می‌توان $\frac{d\mathrm{t}}{ds}$ را به شکل زیر نوشت.

$$\frac{d\mathrm{t}}{ds} = \kappa \mathrm{n} \tag{۴۵.۳}$$

که $\kappa = |d\mathrm{t}/ds|$ خمش اسکالر و نیز n بردار نرمال واحد است که همواره بر بردار مماس t عمود است. این دو کمیت تفسیر هندسی زیبایی دارند. نقطه A را روی منحنی در نظر بگیرید و فرض کنید پارامتر فاصله s از نقطه A اندازه گیری شده باشد. سپس با بسط تیلور شکل منحنی $\mathcal{C}$ نزدیک نقطه A به طور تقریبی با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\mathrm{r}(s) = \mathrm{r}(0) + s\Big[\frac{d\mathrm{r}}{ds}\Big]_{s=0} + \frac{1}{2}s^2\Big[\frac{d^2\mathrm{r}}{ds^2}\Big]_{s=0} + \mathcal{O}(s^3) \tag{۴۶.۳}$$

نکته: به طور کلی بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه $x = x_0$ با رابطه زیر داده می‌شود.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}|_{x=x_0}(x - x_0)^n$$

که $f^{(n)}$ مشتق n ام از تابع است. همچنین معادله ۴۶.۳ را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\mathrm{r}(s) = \mathrm{a} + s\mathrm{t} + \Big(\frac{1}{2}\kappa s^2\Big)\mathrm{n} + \mathcal{O}(s^3) \tag{۴۷.۳}$$

که a بردار مکان از نقطه A و t و n محاسبه شده در نقطه A هستند. بنابراین در نزدیک نقطه A منحنی $\mathcal{C}$ در صفحه گذارنده از نقطه A موازی با بردارهای t و n قرار دارد. همچنین از شکل رابطه ۴۷.۳ می‌توان دید که منحنی $\mathcal{C}$ با تقریب خوبی نزدیک نقطه A سهموی است. در تقریب مرتبه یکسان، می‌توان معدله زیر را نظیر رابطه ۴۷.۳ در نظر گرفت.

$$\mathrm{r}(s) = \mathrm{a} + \kappa^{-1}(\sin\kappa s)\mathrm{t} + \kappa^{-1}(1-\cos\kappa s)\mathrm{n} + \mathcal{O}(s^3) \qquad (۴۸.۳)$$

بنابراین نزدیک نقطه A منحنی $\mathcal{C}$ تقریبا دایره‌ای به شعاع κ^{-1} است و t بردار مماس بر این دایره و بردار n به سمت مرکز این دایره است. معمولا شعاع κ^{-1} را شعاع خمش منحنی C در نقطه A می نامند.

تمرین: نشان دهید در حد s کوچک دو رابطه ۴۷.۳ و ۴۸.۳ با یکدیگر معادل هستند.

مثال: بردار نرمال واحد و خمش نیم دایره مثال قبل (شکل ۸.۳) را به دست آورید.

حل: بردار مماس به این نیم دایره با رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$\mathrm{t}(\theta) = \frac{d\mathrm{r}}{d\theta}/|\frac{d\mathrm{r}}{d\theta}| = (\sin\frac{1}{2}\theta)i + (\cos\frac{1}{2}\theta)j \qquad (۴۹.۳)$$

بنابراین با استفاده از قاعده زنجیره‌ای مشتق داریم

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{t}}{ds} &= \frac{d\mathrm{t}/d\theta}{ds/d\theta} = \frac{d\mathrm{t}/d\theta}{|d\mathrm{r}/d\theta|} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(\cos\frac{1}{2}\theta)i - \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\theta j}{2a\sin\frac{1}{2}\theta} = (4a\sin\frac{1}{2}\theta)^{-1}\Big((\cos\frac{1}{2}\theta)i - (\sin\frac{1}{2}\theta)j\Big) \qquad (۵۰.۳)\end{aligned}$$

در این صورت بردار نرمال یکه و نیز خمش نیم دایره،

$$\mathrm{n}(\theta) = (\cos\frac{1}{2}\theta)i - (\sin\frac{1}{2}\theta)j \qquad \kappa(\theta) = (4a\sin\frac{1}{2}\theta)^{-1} \qquad (۵۱.۳)$$

شعاع این خمش نیز $4a\sin\frac{1}{2}\theta$ است.

تمرینات: شماره تمرین‌های ۱.۱ ، ۱.۱۱ ، ۱.۱۴ ، ۱.۱۵ ، ۱.۱۶،۱.۱۷ ، ۱.۱۸ از کتاب صفحات ۲۲، ۲۳ و ۲۴ را پاسخ دهید.

۰ درسنامه مکانیک کلاسیک

فصل ۴

سرعت، شتاب و سرعت زاویه‌ای اسکالر

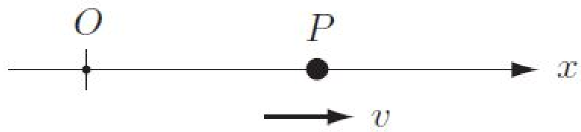
سینماتیک به مطالعه حرکت اجسام بدون توجه به نیروهای منجر به این حرکت گفته می‌شود. در واقع سوال در مورد علت حرکت جسم مربوط به دینامیک است که در اینجا موضوع مورد نظر ما نیست. برای مثال قوانین کپلر سینماتیک هستند زیرا فقط خواص مدارهای ماهواره ها مانند شکل بیضی بودن آنها را بدون در نظر گرفتن نیروی که منجر به این می‌شود، را بررسی می‌کند. در حالی که قوانین نیوتن برای گرانش دینامیک را شامل می‌شود زیرا نیروی گرانش را به عنوان چرایی حرکت بیضی ماهواره ها توصیف می‌کند. سینماتیک بیشتر یک توصیف هندسی از حرکتهای ممکن را فراهم می‌سازد. سنگبنای پایه‌ای اجسام در مکانیک را ذره می‌نامیم، برای نمونه یک جسم منزوی تنها یک نقطه از فضا را اشغال می‌کنند (یعنی یک ذره در نظر گرفته می‌شود.). کمیت‌های سینماتیکی مهم در حرکت یک ذره، سرعت و شتاب ذره هستند. برای سهولت ابتدا از حرکت مستقیم خط در یک بعد شروع خواهیم کرد زیرا چنین کمیت‌های اسکالر هستند و سپس به سه بعد که در آن کمیتهای سرعت و شتاب برداری هستند تعمیم خواهیم داد.

ایده‌ال سازی مهم دیگری ;که در اینجا فرض می‌کنیم جسم صلب است که مجموعه‌ای از ذرات متصل شده به هم در یک چارچوب صلب هست. کمیت سینماتیکی در حرکت یک جسم صلب اندازه حرکت زاویه‌ای آن است. در این بخش تنها حرکات جسم صلب در دو بعد را در نظر می‌گیریم زیرا در دو بعد سرعت زاویه‌ای یک کمیت اسکالر است. مورد سه بعدی کلیتر در بخش ۱۶ کتاب بررسی خواهد شد.

۱.۴ حرکت مستقیم الخط یک ذره

ذره P در حال حرکت در محور x به طوری که جابجایی x از مبدا $\mathcal{O}$ تابع مشخصی از زمان است، را در نظر بگیرید. سرعت متوسط ذره P در طی بازه زمانی $t_1 \le t \le t_2$ به افزایش در جابجایی ذره بر زمان سپری شده گفته می‌شود، یعنی

$$\overline{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{۱.۴}$$



شکل ۱.۴: ذره P در خط مستقیم حرکت می‌کند و دارای جابجایی x و سرعت v در زمان t است.

تمرین:
فرض کنید جابجایی ذره P از مبدا $\mathcal{O}$ در زمان t با تابع $x = t^2 - 6t$ مشخص می‌شود. در این صورت سرعت متوسط در بازه زمانی $1 \le t \le 3$ چقدر است؟
سرعت متوسط یک ذره از درجه اهمیت کمتری نسبت به سرعت لحظه‌ای، سرعت در یک لحظه مشخص، برای ماست. در واقع با قرار دادن $t_1 = t_2$ در رابطه ۱.۴ نمی‌توانیم سرعت در لحظه t_1 را بیابیم زیرا خارج قسمت آن تعریف نشده است. با این وجود، سرعت لحظه‌ای به عنوان حد سرعت لحظه‌ای زمانی که بازه زمانی به سمت صفر میل می‌کند، یعنی $t_2 \to t_1$ قابل تعریف است. بنابراین سرعت لحظه‌ای $v(t_1)$ ذره P در زمان t_1 به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \left(\frac{x(t_2) - x_{t_1}}{t_2 - t_1} \right) \tag{۲.۴}$$

اما این رابطه دقیقا تعریف مشتق x نسبت به t است محاسبه شده در $t = t_1$ است. بنابراین می‌تون سرعت را با رابطه زیر تعریف کرد.
تعریف: سرعت (لحظه‌ای) v ذره P در جهت مثبت x با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{۳.۴}$$

نکته: تندی ذره P به آهنگ افزایش کل مسافت طی شده گفنه می‌شود که برابر با بزرگی سرعت $|v|$ است. به طور مشابه، شتاب ذره P آهنگ افزایش سرعت v است و به صورت زیر تعریف می‌شود.
تعریف: شتاب (لحظه‌ای) ذره در جهت مثبت x با

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{۴.۴}$$

تمرین: فرض کنید جابجایی ذره‌ای از مبدا مختصات با رابطه $x = t^3 - 6t^2 + 4$ داده شده است. سرعت و شتاب ذره را در لحظه t حساب کنید. با این نتیجه که ذره دوبار به حالت سکون می‌رسد، مکان و شتاب ذره در زمان آخرین سکون را محاسبه کنید.
تمرین: یک ذره در امتداد محور x با شتاب وابسته به زمان زیر حرکت می‌کند.

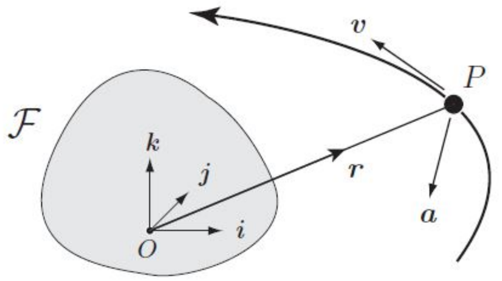
$$a = 12t^2 - 6t + 6 \tag{۵.۴}$$

در ابتدا در نقطه $x = 4m$ و با سرعت $8m/s$ در جهت منفی x شروع به حرکت می‌کند. سرعت و جابجایی ذره در لحظه‌ی t را به‌دست آورید.

۲.۴ حرکت کلی یک ذره

زمانی که یک ذره‌ی P در دو یا سه بعد حرکت می‌کند، مکانش می‌تواند با بردار جابجایی r از مبدا $\mathcal{O}$ که نقطه‌ی ثابتی در چارچوب مرجع صلب $\mathcal{F}$ است، توصیف شود. خواه $\mathcal{F}$ متحرک یا ثابت باشد، بردار مکان r به سادگی نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ قابل اندازه‌گیری است. شکل ۲.۴ یک ذره P در حال حرکت در فضای سه بعدی با بردار مکان r (نسبت به چارچوب مرجع $\mathcal{F}$) در زمان t را نشان می‌دهد.
سوال: چارچوب مرجع چیست و چرا به آن نیازمندیم؟
یک چارچوب مرجع صلب لزوما یک جسم صلب است که ذراتش می‌توانند به منظور ایجاد نقطه مرجع برچسب گذاری شوند. معروف ترین چنین اجسامی زمین است. نسبت به یک ذره منفرد تنها چیزی که توان مشخص کرد فاصله از آن ذره است. با این وجود، نسبت به یک جسم صلب می‌توان هم جهت و هم فاصله را مشخص کرد. بنابراین مقدار هر کمیت برداری نسبت به چارچوب F قابل تعیین شدن است. خصوصا اگر ما برخی از ذرات جسم را به عنوان مبدا $\mathcal{O}$ برجسب گذاری کنیم، ما می‌توانیم مکان هر نقطه از فضا را به وسیله بردار مکان نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ و مبدا مختصات $\mathcal{O}$ مشخص کنیم.
تشخیص بردارها نسبت به یک چارچوب مرجع زمانی که ما دستگاه مختصات کارتزین را معرفی می‌کنیم، به مراتب ساده تر می‌شود. این عمل به روش‌های مختلف نامتناهی قابل اجراست. تصور کنید $\mathcal{F}$ را به وسیله مجموعه‌ای از سه صفحه‌ی دوبه دو متعامد که به طور صلب در آن غوطه ور هستند، را بسط دهیم. سپس مختصات x, y, z از نقطه‌ی P فاصله نقطه P از سه صفحه هستند. اکنون اجازه دهید $\mathcal{O}$ مبدا این دستگاه مختصات باشد و $\{i, j, k\}$ بردارهای یکه آن باشند. سپس به طور قراردادی مرجع $\mathcal{F}$ به همراه دستگاه مختصات غوطه‌ور شده $Oxyz$ را با نمادگذاری $\mathcal{F}\{O; i, j, k\}$ نمایش می‌دهیم. در حلت کلی، سرعت و شتاب یک ذره کمیت‌های باداری هستند که با روابط زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathrm{v} = \frac{d\mathrm{r}}{dt} \qquad a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} \tag{۶.۴}$$



شکل ۲.۴: ذره P در فضای سه بعدی نسبت به چارچوپ مرجع $\mathcal{F}$ و مبدا O حرکت می‌کند و دارای بردار مکان r در زمان t است.

سرعت و شتاب اسکالر تعریف شده در بخش قبل برای حرکت مستقیم الخط به طور ساده‌ای به کمیت‌های برداری تعریف شده در بالا مرتبط هستند. این امکان وجود دارد که با استفاده از فرمولبندی برداری در مورد حرکت مستقیم خط در محور x ، r، v و a را به شکل زیر نوشت.

$$\mathrm{r} = xi \quad \mathrm{v} = vi \quad \mathrm{a} = ai \tag{۷.۴}$$

که $v = dx/dt$ و $a = dv/dt$ هستند.

تمرین: نسبت به چارچوپ $\mathcal{F}\{O; i, j, k\}$ مکان ذره P در زمان t به صورت

$$\mathrm{r} = (2t^2 - 3)i + (4t + 4)j + (t^3 + 3t^2)k$$

داده شده است. مطلوبست: فاصله OP زمانی که $t = 0$ است؟ سرعت ذره در $t = 1$؟ شتاب ذره در $t = 2$ ؟

تفسیر بردارهای v و a

بردار سرعت v تفسیر ساده‌ای دارد. فرض کنید s مسیر کمان طی شده توسط ذره P باشد که از نقطه ثابتی از مسیراش اندازه گیری می‌شود و s با زمان افزایش می‌یابد. بنابراین با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\mathrm{v} = \frac{d\mathrm{r}}{dt} = \frac{d\mathrm{r}}{ds} \times \frac{ds}{dt} = v\mathrm{t} \tag{۸.۴}$$

که بردار t بردار مماس یکه بر مسیر و $v = ds/dt$ تندی ذره P است. بنابراین در هر لحظه، جهت بردار سرعت v در امتداد مماس بر مسیر حرکت ذره و $|v|$ تندی ذره P است. توصیف شتاب سخت‌تر به نظر می‌رسد. این تا حدی

به این دلیل است که ما بشتر به حرکت مستقیم الخط عادت کرده ایم. به هر حال به طور کلی داریم

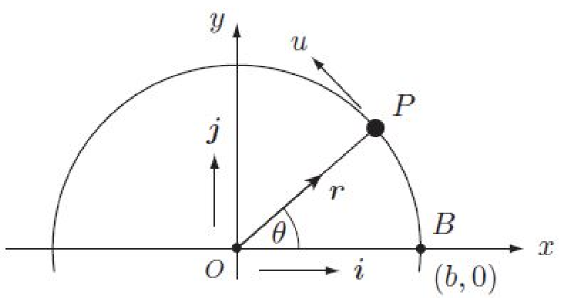
$$\begin{aligned} \mathrm{a} &= \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d(v\mathrm{t})}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathrm{t} + v\frac{d\mathrm{t}}{t} = \Big(\frac{dv}{dt}\Big)\mathrm{t} + v\Big(\frac{d\mathrm{t}}{ds} \times \frac{ds}{dt}\Big) \\ &= \Big(\frac{dv}{dt}\Big)\mathrm{t} + \Big(\frac{v^2}{\rho}\Big)\mathrm{n} \end{aligned} \qquad (۹.۴)$$

که n بردار یکه نرمال بر مسیر ذره و $\rho(=\kappa^{-1})$ شعاع خمش مسیراست. در نتیجه، شتاب درای یک مولفه dv/dt مماس بر مسیر و یک مولفه v^2/ρ عمود بر مسیر است. مفهموم این رابطه زمانی که از مختصات قطبی استفاده خواهیم کرد، بیشتر واضح می‌شود.

۳.۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت

ساده‌ترین مثال از حرکت غیر مستقیم حرکت در یک دایره است. حرکت دایروی در کابردهای عملی در ماشین‌های چرخشی مهم است. در اینجا مورد خاصی از حرکت دایره‌ای یکنواخت یعنی حرکت دایره‌ای با سرعت ثابت را در نظر می‌گیریم. ذره‌ی P را که با سرعت ثابت u و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت که اطراف دایره‌ای به مرکز O و شعاع b همانند آنچه در شکل ۳.۴ نمایش داده شده است، حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. در زمان $t=0$ ذره در نقطه $B(b,0)$ است. سرعت و شتاب ذره در لحظه t چیست؟ اولین گام یافتن بردار مکان ذره در زمان t است. چون ذره با سرعت ثابت u حرکت می کند، کمان BP طی شده در زمان t بایستی ut باشد. در نتیجه زاویه θ مشخص شده در شکل ۳.۴ با $\theta = ut/b$ تعیین می‌گردد. بنابراین بردار مکان ذره در زمان t به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\mathrm{r} = b\cos(\theta)i + b\sin(\theta)j = b\cos(ut/b)i + b\sin(ut/b)j \qquad (۱۰.۴)$$



شکل ۳.۴: ذره P با سرعت ثابت u حول دایره‌ای به شعاع b حرکت می‌کند.

در این صورت بردارهای سرعت و شتاب ذره P در زمان t با روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\mathrm{v} = \frac{d\mathrm{r}}{dt} = -u\sin(ut/b)\mathrm{i} + u\cos(ut/b)\mathrm{j} \tag{۱۱.۴}$$

$$\mathrm{a} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = -\frac{u^2}{b}\cos(ut/b) - \frac{u^2}{b}\sin(ut/b)\mathrm{j} \tag{۱۲.۴}$$

توجه داشته باشید تندی ذره از بردار سرعت به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$|\mathrm{v}| = \Big(u^2\cos^2(ut/b) + u^2\sin^2(ut/b)\Big)^{1/2} = u \tag{۱۳.۴}$$

بزرگی شتاب نیز با

$$|\mathrm{a}| = \left(\left(\frac{u^2}{b}\right)^2\cos^2(ut/b) + \left(\frac{u^2}{b}\right)^2\sin^2(ut/b)\right)^{1/2} = \frac{u^2}{b} \tag{۱۴.۴}$$

مشخص می‌شود. همچنین چون بردار شتاب $\mathrm{a} = -(u^2/b^2)\mathrm{r}$ می‌توان نوشت، نشان می‌دهد جهت بردار a خلاف جهت بردار r است. بنابراین این رابطه منتج به نتیجه مهم زیر خواهد شد.

- حرکت دایره‌ای یکنواخت: زمانی که ذره P با سرعت ثابت u حول دایره‌ای با مرکز O و شعاع b حرکت می‌کند، بردار شتاب آن ذره در جهت $\vec{PO}$ (خلاف جهت بردار شعاع $\vec{OP}$) است و دارای بزرگی ثابت $\frac{u^2}{b}$ است.

این نتیجه سازگار با رابطه کلی ۹.۴ است. در این مورد خاص، با انتخاب $v = u$ و $\rho = b$ به طوری که $dv/dt = 0$ و $\mathrm{a} = (u^2/b)\mathrm{n}$ می‌توان این سازگاری را مشاهده نمود.

تمرین

مسیر حرکت یه ذره باردار در یک میدان مغناطیسی با رابطه زیر مشخص می‌شود.

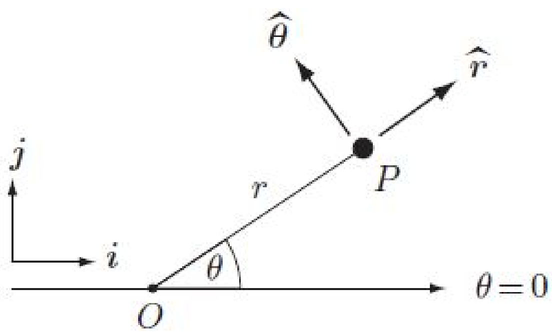
$$\mathrm{r} = b\cos\Omega t\mathrm{i} + b\sin\Omega t\mathrm{j} + ct\mathrm{k} \tag{۱۵.۴}$$

که b ، Ω و c ثابت‌های مثبت هستند. نشان دهید ذره با تندی ثابت حرکت می‌کند؟ همچنین بزرگی شتابش را نیز بیابید؟

۴.۴ حرکت ذره در مختصات قطبی

وقتی یک ذره در یک صفحه حرکت می‌کند، استفاده از مختصات قطبی r, θ برای تحلیل حرکتش بسیار مناسب است. حرکت دایره‌ای مثال واضحی بشمار می‌رود. همچنین در درجه پایینتری می‌توان از مختصات فطبی در

تحلیل مدارهای سیارات بهره برد. حتی این مسله به نیوتن در بیان قوانین مکانیک کمک شایانی کرد. در شکل



شکل ۴.۴: مختصات قطبی r, θ نقطه P و بردارهای واحد قطبی $\hat{r}, \hat{\theta}$ در نقطه P.

۴.۴ مختصات قطبی r, θ از نقطه P و نیز بردارهای واحد قطبی $\hat{r}, \hat{\theta}$ در نقطه P نشان داده شده است. جهت‌های بردارهای $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ به ترتیب جهت‌های شعاعی و عرضی در نقطه P نامیده می‌شوند. زمانی که ذره P حرکت می‌کند، بردارهای واحد قطبی ثابت نمی‌مانند. آن ها دارای بزرگی ثابت واحد هستند اما جهتشان وابسته مختصات θ از ذره P دارند، اما با این وجود مستقل از مختصات r هستند. به عبارتی دیگر، $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ توابع برداری از متغیر اسکالر θ هستند.

در ادامه مشتقات $\frac{d\hat{r}}{d\theta}$ و $\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}$ را محاسبه خواهیم کرد. این روابط زمانی که فرمول‌های مربوط به سرعت و شتاب P در مختصات قطبی را به‌دست می‌آوریم، لازم خواهد شد. برای این منظور ابتدا بردارهای $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ را برحسب بردار یکه مختصات دکارتی $\{i, j\}$ بسط می‌دهیم. همان طور که می‌دانید بردار مکان در مختصات قطبی با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\mathrm{r} = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} = r\cos\theta\mathrm{i} + r\sin\theta\mathrm{j} \qquad (۱۶.۴)$$

در این صورت بردار یکه شعاعی با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\hat{r} = \frac{\mathrm{r}}{r} = \cos\theta\mathrm{i} + \sin\theta\mathrm{j} \qquad (۱۷.۴)$$

همچنین بردار یکه عرضی نیز با

$$\hat{\theta} = \frac{d\mathrm{r}/d\theta}{|d\mathrm{r}/d\theta|} = -\sin\theta\mathrm{i} + \cos\theta\mathrm{j} \qquad (۱۸.۴)$$

مشخص می‌شود. علاوه بر این مشتق چنین بردار یکه‌های،

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta} \qquad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \qquad (۱۹.۴)$$

هستند. حال فرض کنید ذره P یک ذره متحرک در مختصات قطبی r, θ که توابعی از زمان t است. بردار مکان

این ذره نسبت به مبدا مختصات O داری بزرگی $OP = r$ و جهت $\hat{r}$ است که می‌تواند با رابطه زیر بیان شود.

$$\mathrm{r} = r\hat{r} \tag{۲۰.۴}$$

برای به‌دست آوردن سرعت ذره در مختصات قطبی، کافی است که از بردار مکان نسبت به زمان مشتق بگیریم. در این صورت داریم،

$$\mathrm{v} = \frac{d\mathrm{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\Big(\frac{d\hat{r}}{dt}\Big) = \dot{r}\hat{r} + r\Big(\frac{d\hat{r}}{dt}\Big) \tag{۲۱.۴}$$

در سرتاسر این بخش از نماد نقطه برای مشتقات زمانی استفاده خواهیم کرد، مثلا $\dot{r}$ به معنای dr/dt ، $\dot{\theta}$ یعنی $d\theta/dt$ و همین طور $\ddot{r}$ یعنی d^2r/dt^2 و $\ddot{\theta}$ به معنای $d^2\theta/dt^2$ هستند. اکنون $\hat{r}$ تابعی از θ است که خود تابعی از t است. بنابراین با استفاده از قاعده زنجیره‌ای و نیز رابطه ۱۹.۴ داریم،

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \hat{\theta} \times \dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{\theta} \tag{۲۲.۴}$$

اگر این رابطه را در معادله ۲۱.۴ جایگذاری کنیم به رایطه زیر برای بردار سرعت خواهیم رسید.

$$\mathrm{v} = \dot{r}\hat{r} + (r\dot{\theta})\hat{\theta} \tag{۲۳.۴}$$

همچنین برای محاسبه شتاب، بایستی از رابطه ۲۳.۴ نسبت به زمان مشتق گرفت. سپس به رابطه زیر برای شتاب در مختصات قطبی خواهیم رسید.

$$\begin{aligned}
\mathrm{a} &= \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r}) + \frac{d}{dt}((r\dot{\theta})\hat{\theta}) \\
&= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + (r\dot{\theta})\frac{d\hat{\theta}}{dt} \\
&= \ddot{\theta}\hat{r} + \dot{r}\Big(\frac{d\hat{r}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}\Big) + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + (r\dot{\theta})\Big(\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}\Big) \\
&= \ddot{r}\hat{r} + (\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} - (r\dot{\theta}^2)\hat{r} \\
&= \Big(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\Big)\hat{r} + \Big(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\Big)\hat{\theta}
\end{aligned} \tag{۲۴.۴}$$

نتایج بالا را می‌توان در زیر خلاصه کرد.

- فرمول‌های قطبی برای سرعت و شتاب: اگر ذره‌ای در حال حرکت در یک صفحه با مختصات قطبی r و θ در زمان t باشد، بردارهای سرعت و شتاب این ذره با روابط زیر داده می‌شود.

$$\mathrm{v} = \dot{r}\hat{r} + (r\dot{\theta})\hat{\theta} \tag{۲۵.۴}$$

$$\mathrm{a} = \Big(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\Big)\hat{r} + \Big(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\Big)\hat{\theta} \tag{۲۶.۴}$$

رابطه ۲۵.۴ نشان می‌دهد که سرعت ذره P جمع برداری از سرعت شعاعی بیرون سو $\dot{r}$ و سرعت عرضی $r\dot{\theta}$ است. به عبارت دیگر v تنها جمعی از سرعت‌های است که ذره P خواهد داشت اگر r و θ جداگانه تغییر کنند. این گزاره برای شتاب درست نیست زیرا آنچه که مشاهده خواهد شد جمع دو شتاب جداگانه نیست و هرگز عبارت $2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}$ را منجر نخواهد شد. عبارت کوریولیس به هر حال وجود دارد، اما تفسیر شهودی از آن بسیار مشکل است.

مثال

حشره‌ای روی مسیر مارپیچی در حال حرکت است به طوری که مختصات قطبی اش در زمان t با

$$r = be^{\Omega t} \qquad \theta = \Omega t \tag{۲۷.۴}$$

داده می‌شود که b و Ω ثابت‌های مثبتی هستند. بردارهای سرعت و شتاب این حشره در زمان t را بیابید و نشان دهید زاویه میان این بردارها همیشه $\pi/4$ است.

حل: سرعت این حشره در زمان t

$$\mathrm{v} = \dot{r}\hat{r} + (r\dot{\theta})\hat{\theta} = \left(\Omega be^{\Omega t}\right)\hat{r} + \left(\Omega be^{\Omega t}\right)\hat{\theta} \tag{۲۸.۴}$$

است. و شتاب این حشره در زمان t با رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathrm{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} \\ &= \left(\Omega^2 be^{\Omega t} - \Omega^2 be^{\Omega t}\right)\hat{r} + \left(0 + 2\Omega^2 be^{\Omega t}\right)\hat{\theta} \\ &= 2\Omega^2 be^{\Omega t}\hat{\theta} \end{aligned} \tag{۲۹.۴}$$

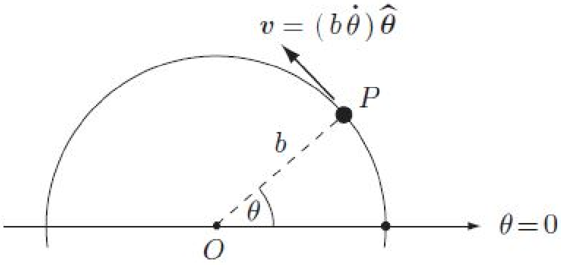
در این صورت

$$|\mathrm{v}| = \sqrt{2}\Omega be^{\Omega t} \qquad |\mathrm{a}| = 2\Omega^2 be^{\Omega t} \tag{۳۰.۴}$$

هستند و زاویه میان دو بردار نیز

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{v.a}}{|\mathrm{v}||\mathrm{a}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{۳۱.۴}$$

داده می‌شود که نشان می‌دهد زاویه میان دو بردار $\pi/4$ است.



شکل ۵.۴: ذره P روی دایره‌ای با مرکز O و شعاع b حرکت می‌کند. در زمان t جابجایی زاویه‌ای آن θ و سرعت جنبی آن $b\theta$ است.

۵.۴ کلیترین حرکت دایره‌ای

یکی از مهمترین کابرد مختصات قطبی در حرکت دایره‌ای است. قبلا حالت خاص حرکت دایره‌ای یکنواخت را در نظر گرفته‌ایم، اما اکنون فرض می‌کنیم ذره P به هر صورتی (نه لزوما با سرعت ثابت) حول دایره‌ای با مرکز O و شعاع b حرکت می‌کند. اگر O را به عنوان مرکز مختصات قطبی بگیریم، با شرط $r = b$ می‌توان $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ را به دست آورد و رابطه ۲۵.۴ برای سرعت به رابطه زیر کاهش می‌یابد.

$$\mathrm{v} = (b\dot{\theta})\hat{\theta} \qquad (۳۲.۴)$$

این نتیجه در شکل ۵.۴ نشان داده شده است. مولفه‌ی عرضی سرعت $b\dot{\theta}$ (نه لزوما تندی ذره P چون $\dot{\theta}$ ممکن است منفی باشد.) سرعت جنبی[۱] (سرعت مماس بر مسیر دایره‌ای) نامیده می‌شود. سرعت جنبی زمانی که حرکت یک جسم صلب در حال چرخش حول یک محور ثابت را مطالعه می‌کنیم، اهمیت زیادی دارد در این مورد هر ذره از جسم صلب روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. فرمول مربوطه برای شتاب ذره نقطه‌ای P نیز با رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$\begin{aligned} \mathrm{a} &= (0 - b\dot{\theta}^2)\hat{r} + (b\ddot{\theta} + 0)\hat{\theta} = -(b\dot{\theta}^2)\hat{r} + (b\ddot{\theta})\hat{\theta} \\ &= -\left(\frac{v^2}{b}\right)\hat{r} + \dot{v}\hat{\theta} \end{aligned} \qquad (۳۳.۴)$$

که v سرعت جنبی $b\dot{\theta}$ است. نتایج را به صورت زیر می‌توان خلاصه نویسی کرد.

- فرض کنید ذره P به هر صورتی حول دایره $r = b$ که r, θ مختصات قطبی هستند، حرکت می‌کند. بنابراین

[۱] Circumferential velocity

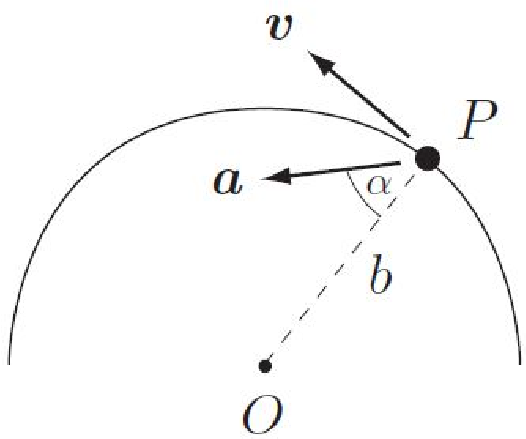
بردارهای سرعت و شتاب P با رابطه‌های زیر مشخص می‌شود.

$$\mathrm{v} = v\hat{\theta} \qquad \mathrm{a} = -\Big(\frac{v^2}{b}\Big)\hat{r} + \dot{v}\hat{\theta} \tag{۳۴.۴}$$

که $v(= b\dot{\theta})$ سرعت جنبی ذره P است.

رابطه ۳۴.۴ نشان می‌دهد که در کلیترین حرکت دایره‌ای شتاب ذره P جمع برداری از شتاب مرکزگرا $\frac{v^2}{b}$ (به علت علامت منفی جلوی این عبارت) و شتاب عرضی $\dot{v}$ است. این رابطه با رابطه کلی ۹.۴ سازگار است. در واقع چیزی که رابطه ۹.۴ بیان می‌کند این است که وقتی ذره P در طول یک مسیر کامل عام حرکت می‌کند، بردار شتابش همان مقداری است که اگر آن ذره روی مسیر دایره‌ای از خمش در هر نقطه از مسیرش در حال حرکت بود.

مثال



شکل ۶.۴: بردارهای سرعت و شتاب ذره.

ذره P روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع b حرکت می‌کند. در یک لحظه‌ی مشخص سرعت ذره v و بردار شتابش زاویه α با PO می‌سازد (شکل ۶.۴). بزرگی بردار شتاب در این لحظه را بیابید.
مولفه‌ی شتاب در جهت شعاعی را در نظر می‌گیرم که با ضرب داخلی بردار شتاب در بردار یکه شعاعی به‌دست می‌آید.

$$\mathrm{a}.\hat{r} = a\cos(\pi - \alpha) = -a\cos\alpha \tag{۳۵.۴}$$

از سوی دیگر از رابطه ۳۴.۴ داریم.

$$\mathrm{a}.\hat{r} = \Big(-\Big(\frac{v^2}{b}\Big)\hat{r} + \dot{v}\hat{\theta}\Big).\hat{r} = -\frac{v^2}{b} \tag{۳۶.۴}$$

حال با مقایسه دو رابطه بزرگی شتاب با رابطه زیر به دست خواهد آمد.

$$a = \frac{v^2}{b\cos\alpha} \tag{۳۷.۴}$$

تمرین

زنبوری روی مسیری با مختصات قطبی

$$r = \frac{bt}{\tau^2}(2\tau - t) \qquad \theta = \frac{t}{\tau} \qquad (0 \leq t \leq 2\tau) \tag{۳۸.۴}$$

حرکت می‌کند که b و τ ثابت‌های مثبت هستند. بردار سرعت زنبور در لحظه t را بیابید؟ نشان دهید حداقل تندی به دست آمده توسط زنبور $\frac{b}{\tau}$ است؟ شتاب در این لحظه را بیابید؟

تمرین

شاقول پاندولم مشخصی، روی دایره‌ای عمودی با شعاع b حرکت می‌کند و زمانی که طناب زاویه‌ی θ با راستای قایم می‌سازد، سرعت جنبی این شاقول با رابطه زیر مشخص می‌شود.

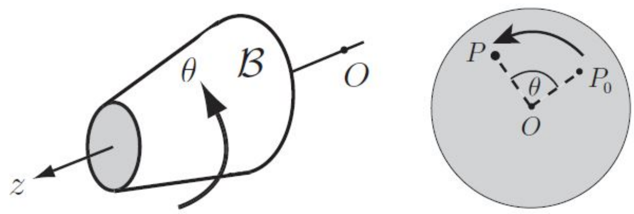
$$v^2 = 2gb\cos\theta \tag{۳۹.۴}$$

که g یک ثابت مثبت است. شتاب این شاقول زمانی که طناب با راستای قایم زاویه θ می‌سازد، را به‌دست آورید؟

۶.۴ دوران یک جسم صلب حول محور ثابت

برخی از اجسام که ما در زندگی روزمره می‌بینیم نظیر آجر یا میله استیل ضخیم تغییر شکلشان بسیار سخت و تقریبا غیر ممکن است. ما چنین اجسامی را جسم صلب، مجموعه‌ای از ذرات که یک چارچوب کاملا سخت و سفتی را تشکیل می‌دهند، مدل‌سازی می‌کنیم . هرگونه حرکتی از این جسم صلب بایستی این چارچوب را حفظ کند. مهمترین نوع از حرکت یک جسم صلب چرخش حول یک محور ثابت است، مانند چرخش پنکه، یک درب باز شده حول لولایش و غیره. همان طور که در شکل ۷.۴ فرض کنید جسم صلب $\mathcal{B}$ محدود به چرخش حول محور ثابت Oz باشد (این بدان معناست که ذرات $\mathcal{B}$ در راستای Oz قرار دارند همگی در جای خود ثابت نگه داشته شده‌اند. بنابراین چرخش حول Oz تنها حرکت جسم $\mathcal{B}$ سازگار با جسم صلب است.). در زمان t جسم $\mathcal{B}$ دارای جابجایی زاویه‌ای θ اندازه‌گیری شده نسبت به مکان مرجع است (شکل سمت راست شکل ۷.۴ را مشاهده کنید.) جابجایی زاویه‌ای θ همتای چرخشی از جابجایی دکارتی x در حرکت مستقیم الخط است. با تشابه با مورد حرکت مستقیم، تعاریف زیر قابل بیان هستند.

- سرعت زاویه‌ای: سرعت زاویه‌ای ω جسم $\mathcal{B}$ با $\omega = d\theta/dt$ تعریف می‌شود و قدر مطلق ω تندی زاویه‌ای $\mathcal{B}$ نامیده می‌شود. سرعت زاویه‌ای (و تندی زاویه‌ای) با واحد رادیان بر ثانیه (rad/s) قابل اندازه‌گیری است.



شکل ۷.۴: جسم صلب $\mathcal{B}$ حول محور ثابت Oz می‌چرخد و در زمان t به اندازه θ جابه‌جا می‌شود. هر ذره‌ی P از این سیستم روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کنند و نقطه P_0 مکان مرجع از ذره P است.

مثال

چرخش میلنگ: میلنگ یک موتورسیکلت بنزینی ۶۰۰۰ دور بر دقیقه می‌چرخد. تندی زاویه‌ای آن در واحد SI چقدر است؟ ۶۰۰۰ دور در دقیقه معادل ۱۰۰ دور بر ثانیه و معادل 200π رادیان بر ثانیه است.

سرعت‌های ذره در یک جسم صلب در حال چرخان

در حرکت دورانی حول یک محور ثابت، هر ذره P از جسم $\mathcal{B}$ روی مسیر دایره‌ای شکل با شعاع ρ که فاصله عمودی ذره P از محور چرخش است، حرکت می‌کند. بنابراین طبق رابطه ۳۴.۴ برای سرعت جنبی v ذره که با $\rho\dot{\theta}$ مشخص می‌شود، داریم

$$v = \omega\rho \qquad (۴۰.۴)$$

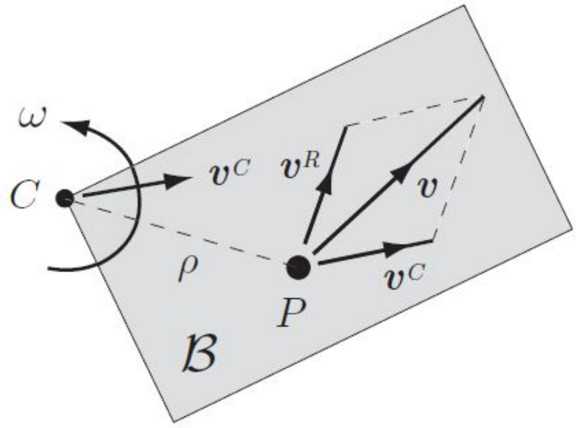
تمرین

در مثل بالا برای میلنگ سرعت ذره‌ای از میلنگ که فاصله عمدی آن $5cm$ از محور چرخش است را بیابید؟ همچنین بزرگی شتابش را نیز محاسبه کنید؟

۷.۴ جسم صلب در حرکت صفحه‌ای

اکنون شکل کلیتر حرکت یک جسم صلب که معمولا حرکت صفحه‌ای نامیده می‌شود را در نظر می‌گیریم.

- حرکت صفحه‌ای: جسم صلب $\mathcal{B}$ در حرکت صفحه‌ای گفته می‌شود اگر هر ذره از جسم $\mathcal{B}$ در یک صفحه ثابت حرکت کند و تمام این صفحات با یکدیگر موازی باشند. حرکت صفحه‌ای کاملا متداول است. برای مثال، هر جسم صلب مسطحی که روی میز می‌لغزد در حرکت صفحه‌ای است. مثال دیگر غلتش یک استوانه روی یک میز تخت زبر است.



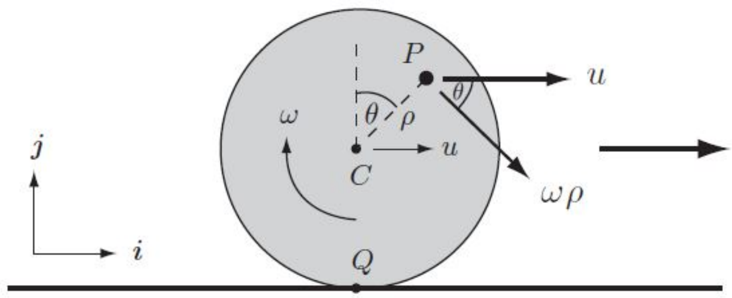
شکل ۸.۴: سرعت ذره P متعلق به به جسم صلب $\mathcal{B}$ جمع سعم انتقالی v^C و سهم دورانی v^R است. ذره مرجع C می‌تواند هر ذره‌ای از جسم باشد.

سرعت‌های ذره در حرکت صفحه‌ای با روش زیر قابل محاسبه کردن است. اثبات این روش را می‌توانید در فصل ۱۶ از کتاب مشاهده کنید. ابتدا برخی ذره نظیر C از جسم صلب را به عنوان ذره مرجع انتخاب می‌کنیم. بنابراین سرعت یک ذره عام P از جسم جمع برداری از

- الف: سهم انتقالی که مساوی با سرعت ذره C (مثل اینکه جسم نمی‌چرخد.) و نیز
- ب: سهم دورانی (مانند اینکه C ثابت بود و جسم با سرعت زاویه‌ای ω حول محور ثابت که از C می‌گذشت، دوران می‌کرد.)

می‌شود. این نتیجه در شکل ۸.۴ نمایش داده شده است که جسم یک چندضلعی منتظم است و ذره مرجع در گوشه این صفحه قرار دارد. سرعت v از P با $\mathrm{v} = \mathrm{v}^C + \mathrm{v}^R$ که سهم انتقالی v^C سرعت C و سهم دورانی v^R که بخاطر سرعت زاویه‌ای ω حول C است، مشخص می‌شود. اگرچه ذره مرجع می‌تواند هر ذره‌ای از جسم انتخاب شود ولی معمولا آن را مرکز جسم جسم یا مرکز تقارن جسم می‌گیرند.

مثال



شکل ۹.۴: چرخ دایره‌ای از سمت چپ به راست روی میز افقی می غلتد. ذره مرجع C مرکز چرخ گرفته شده است و سرعت یک ذره نوعی P جمع دو سرعت نشان داده شده در شکل است.

چرخ غلتان: چرخ دایره‌ای شکل با شعاع b که با سرعت u روی میز افقی ثابتی می‌غلتد. سرعت‌های ذرات این جسم را بیابید؟ این مثال نمونه‌ای از حرکت صفحه‌ای است بنابراین سرعت‌های ذره آن با روش بالا پیدا می‌شوند. اجازه دهید مکان چرخ در زمانی مانند آنچه در شکل ۹.۴ نشان داده شده، باشد. ذره مرجع C در مرکز این چرخ در نظر گرفته شده است و فرض شده است حول C جسم دارای سرعت زاویه‌ای ω است. سرعت v^P از یک ذره نوعی P جمع دو سرعت مشخص شده در شکل است. برحسب بردارهای یکه $\{i,j\}$ داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{v}^P &= u\mathrm{i} + \omega\rho(\cos\theta\mathrm{i} - \sin\theta\mathrm{j}) \\ &= (u+\omega\rho\cos\theta)\mathrm{i} - (\omega\rho\sin\theta)\mathrm{j}\end{aligned} \tag{۴۱.۴}$$

خصوصا با لحاظ $\rho = b$ و $\theta = \pi$ ، سرعت v^Q در نقطه تماس Q با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\mathrm{v}^Q = (u - \omega b)\mathrm{i} \tag{۴۲.۴}$$

اگر به چرخ اجازه داده شود که در طول میز بلغزد هیچ قیدی روی v^Q وجود ندارد و u و ω از یکدیگر مستقل هستند. اما اگر غلتش داشته باشیم نیازمندیم که

$$\mathrm{v}^Q = 0 \tag{۴۳.۴}$$

باشد. این بدان معناست که نقطه تماسی در حرکت غلتشی هیچ گونه سرعتی ندارد. با اعمال شرط غلتش در رابطه ۴۲.۴ برای v^Q می‌یابیم که ω بایستی به سرعت u با رابطه زیر وابسته باشد.

$$\omega = \frac{u}{b} \tag{۴۴.۴}$$

با قرار دادن مقدار ω در رابطه ۴۱.۴ سرعت ذره P با

$$\mathrm{v}^P = u\Big(1 + \frac{\rho}{b}\cos\theta\Big)\mathrm{i} - u\Big(\frac{\rho}{b}\sin\theta\Big)\mathrm{j} \qquad (۴۵.۴)$$

تعیین می‌گردد. زمانی که P روی محیط چرخ قرار می‌گیرد ($\rho = b$) رابطه بالا به صورت زیر کاهش می‌یابد.

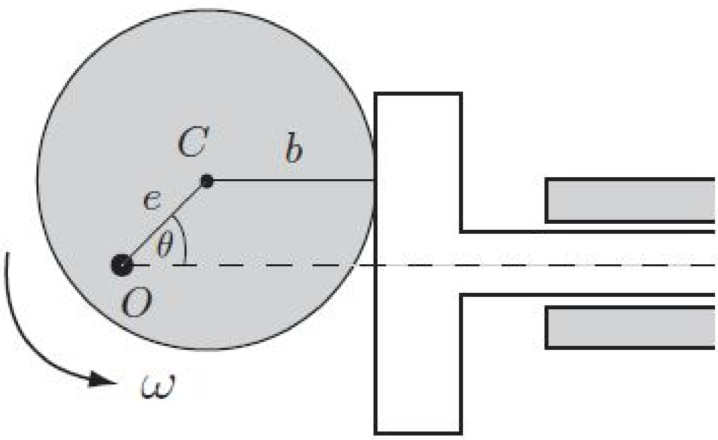
$$\mathrm{v}^P = u(1 + \cos\theta)\mathrm{i} - u\sin\theta\mathrm{j} \qquad (۴۶.۴)$$

در این مورد تندی P

$$v^P = 2u\cos(\theta/2) \qquad (-\pi \le \theta \le \pi) \qquad (۴۷.۴)$$

بنابراین بالاترین ذره از چرخ، بیشترین تندی یعنی $2u$ در حالی که ذره تماسی دارای تندی صفر است همانطور که قبلا نشان دادیم.

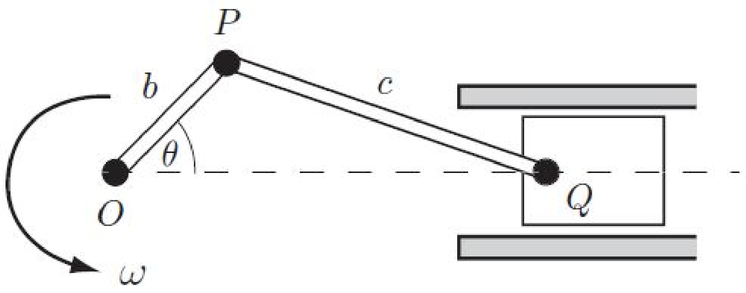
تمرین



شکل ۱۰.۴: چرخ و پیستون مکانیکی

مطابق شکل ۱۰.۴ یک چرخ دوار به شعاع b در حال چرخش با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور ثابت O که با فاصله e از مرکز C قرار دارد، است. این چرخ یک پیستون را تکان می‌دهد که تنها در خط مستقیم می لغزد. تندی و شتاب بیشینه این پیستون را بیابید. راهنمایی: جابجایی x را برای این حرکت محاسبه نموده و از مشتقات آن سرعت و شتاب را به‌دست آورید همچنین از رابطه $\theta = \omega t$ بهره ببرید.

مثال



شکل ۱۱.۴: میلنگ و پیستون مکانیکی

مطابق شکل ۱۱.۴ پیستونی میلنگ OP که روی پاشینه O می‌چرخد را به حرکت در می‌آورد. پیستون در یک استوانه مستقیم می‌لغزد و باعث می‌شود میلنگ با سرعت زاویه‌ای ω بچرخد. فاصله OQ را برحسب طول b, c و زاویه θ بیابید؟ نشان دهید برای b/c کوچک، OQ به طور تقریبی با رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$OQ = c + b\cos\theta - \frac{b^2}{2c}\sin^2\theta + \mathcal{O}\Big(\Big(\frac{b}{c}\Big)^4\Big) \tag{۴۸.۴}$$

با استفاده از این تقریب شتاب بیشینه این پیستون را بیابید؟

فاصله OQ با

$$OQ = b\cos\theta + c\cos\phi \tag{۴۹.۴}$$

مشخص می‌شود که ϕ زاویه $O\widehat{Q}P$ است. با استفاده از قاعده سیسنوس در مثلث OPQ

$$\frac{\sin\phi}{b} = \frac{\sin\theta}{c} \tag{۵۰.۴}$$

بنابراین $\sin\phi = (b/c)\sin\theta$ و

$$\cos\phi = \Big(1 - \frac{b^2}{c^2}\sin^2\theta\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{۵۱.۴}$$

هستند. در این صورت

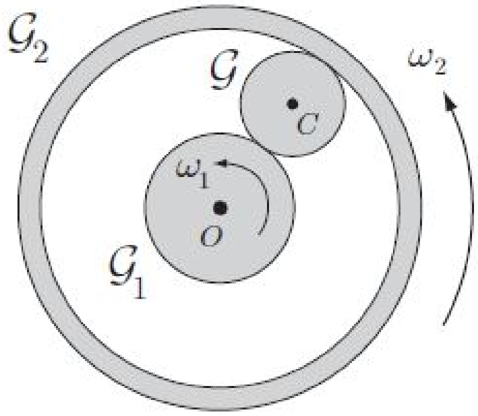
$$\begin{aligned} OQ &= b\cos\theta + c\Big(1 - \frac{b^2}{c^2}\sin^2\theta\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= b\cos\theta + c\Big(1 - \frac{b^2}{2c^2} + \mathcal{O}\Big(\Big(\frac{b}{c}\Big)^4\Big)\Big) \\ &= c + b\cos\theta - \frac{b^2}{2c}\sin^2\theta + \mathcal{O}\Big(\Big(\frac{b}{c}\Big)^4\Big) \end{aligned} \tag{۵۲.۴}$$

در این تقریب، جابجایی OQ در زمان t با

$$x = c + b\cos\omega t - \frac{b^2}{2c}\sin^2\omega t \tag{۵۳.۴}$$

تمرین: ادامه مسله را حل کنید؟

مثال



شکل ۱۲.۴: چیدمان چرخ دنده مکانیکی

چیدمان دنده را در شکل ۱۲.۴ مشاهده می‌کنید که دنده $\mathcal{G}_1$ با شعاع b_1 و دنده $\mathcal{G}_2$ با شعاع b_2 به ترتیب با سرعت زاویه‌ای ω_1 و ω_2 حول محور ثابت O می‌چرخند. در بین این دو چرخ دنده صفحه‌ای $\mathcal{G}$ با مرکز C حول O حرکت می‌کند. سرعت جنبی C و سرعت زاویه‌ای چرخ دنده $\mathcal{G}$ را بیابید؟ اگر O و C با یک بازو که روی پاشینه O می‌چرخید به هم متصل بودند، چه چیزی در مورد اندازه زاویه‌ای بازو می‌توان گفت؟

اجازه دهید v را سرعت مرکز C و ω را سرعت زاویه‌ای آن بگیریم. از طرفی شعاع این چرخ دنده برابر با $b = \frac{1}{2}(b_2 - b_1)$ است. بنابراین با توجه به شرط غلتش در نقطه تماسی از چرخ دنده $\mathcal{G}$ و چرخ دنده $\mathcal{G}_1$ داریم

$$\omega_1 b_1 = 0 = v - \omega b = v - \frac{1}{2}\omega(b_2 - b_1) \tag{۵۴.۴}$$

از سوی دیگر شرط غلتش برای نقطه تماسی $\mathcal{G}$ و چرخ دنده $\mathcal{G}_2$ به رابطه زیر منجر می‌شود.

$$\omega_2 b_2 = 0 = v + \omega b = v + \frac{1}{2}\omega(b_2 - b_1) \tag{۵۵.۴}$$

بنابراین برای سرعت

$$v = \frac{1}{2}(\omega_1 b_1 + \omega_2 b_2) \tag{۵۶.۴}$$

و برای اندازه حرکت زاویه‌ای

$$\omega = \frac{(\omega_1 b_1 - \omega_2 b_2)}{b_1 - b_2} \tag{۵۷.۴}$$

خواهیم داشت. حال اگر O و C توسط میله ای که روی پایشینه O می‌چرخد متصل کنیم که دارای طول

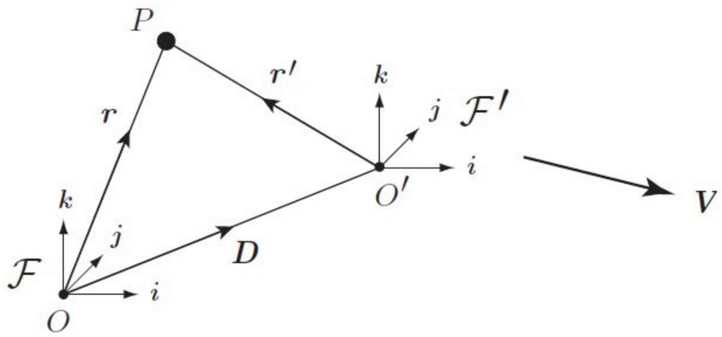
$$L = b_1 + b = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \tag{۵۸.۴}$$

است. در این صورت اندازه حرکت زاویه‌ای Ω بازو با رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$\Omega = \frac{v}{L} = \frac{(\omega_1 b_1 + \omega_2 b_2)}{b_1 + b_2} \tag{۵۹.۴}$$

۸.۴ چارچوب‌های مرجع در حرکت نسبی

به طور ساده چارچوب مرجع یک سیستم مختصاتی صلب است که برای مشخص نمودن نقاط در فضا بکار گرفته می‌شود. در عمل چارچوب مرجع را به عنوان چارچوبی غوطه‌ور یا چسبیده به جسم صلب در نظر می‌گیرند. آشناترین مورد زمانی است که این جسم صلب همان زمین باشد اما بجای آن می‌توان یک ماشین متحرک یا یک ایستگاه فضای در مدار نیز باشد.خصوصا هر حادثه‌ای مثلا حرکت فضاپیما می‌تواند توسط هر یک از این چارچوب‌های مرجع مشاهده شود و حرکت متفاوت برای هر مشاهده‌گری رویت خواهد شد. این تفاوت چیزی است که می‌خواهیم توضیح دهیم.



شکل ۱۳.۴: ذره P از دو چارچوب $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ مشاهده می‌شود.

اجازه دهید حرکت ذره P از منظر چارچوب‌های $\mathcal{F}\{\mathcal{O}, i, j, k\}$ و $\mathcal{F}'\{\mathcal{O}', i, j, k\}$ مشاهده شود همانگونه که در شکل ۱۳.۴ نشان داده شده است. در اینجا فرض می‌کنیم چارچوب $\mathcal{F}'$ نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ نمی‌چرخد.

بدون از دست رفتن عمومیت مسله، می‌توانیم فرض کنیم دو چارچوب $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ دارای مجموعه پایه‌های بردار یکه $\{i,j,k\}$ یکسان هستند. برای مثال P می‌تواند یک فضاپیما و $\mathcal{F}$ چسبیده به زمین و نیز $\mathcal{F}'$ چسبیده به اتومبیلی در حال حرکت در امتداد جاده مستقیم باشد. بنابراین r و r' بردارهای مکان P نسبت به $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ باشند که با رابطه زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند.

$$\mathrm{r} = \mathrm{r}' + \mathrm{D} \tag{۶۰.۴}$$

که D بردار مکان O' نسبت به $\mathcal{F}$ است. اکنون از این رابطه نسبت به t مشتق می‌گیریم مرحله‌ای که نیازمند کمی دقت است. اجازه دهید آهنگ تغییرات بردارها در معادله ۶۰.۴ از چارچوب $\mathcal{F}$ را در نظر بگیریم. بنابراین

$$\mathrm{v} = \left(\frac{d\mathrm{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{F}} + \mathrm{V} \tag{۶۱.۴}$$

است که v سرعت P مشاهده شده از چارچوب $\mathcal{F}$ و V سرعت چارچوب $\mathcal{F}'$ نسبت به $\mathcal{F}$ است. اکنون وقتی دو چارچوب متفاوت برای مشاهده یک بردار یکسان بکار گرفته می‌شوند، آهنگ تغییرات مشاهده شده برای آن بردار به طور کلی متفاوت خواهد شد. به ویژه در حالت کلی رابطه زیر درست نیست.

$$\left(\frac{d\mathrm{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{F}} = \left(\frac{d\mathrm{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{F}'} \tag{۶۲.۴}$$

به هرحال در فصل ۱۷ کتاب خواهید دید که این دو آهنگ تغییر اگر دو چارچوب $\mathcal{F}'$ نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ نچرخد، با یکدیگر برابر هستند. بنابراین برای مورد ما، داریم

$$\left(\frac{d\mathrm{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{F}} = \left(\frac{d\mathrm{r}'}{dt}\right)_{\mathcal{F}'} = \mathrm{v}' \tag{۶۳.۴}$$

که v' سرعت P مشاهده شده از منظر ناظر در چارچوب $\mathcal{F}'$ است. در این صورت معادله ۶۱.۴ با رابطه زیر نوشته خواهد شد.

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}' + \mathrm{V} \tag{۶۴.۴}$$

لذا سرعت ذره P مشاهده شده در چارچوب $\mathcal{F}$ جمع سرعت P از منظر ناظر در چارچوب $\mathcal{F}'$ و سرعت نسبی میان چارچوب‌های $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ است. توجه داشته باشید این نتیجه تنها در موردی که $\mathcal{F}'$ نسبت به $\mathcal{F}$ بدون چرخش باشد، بکار می‌رود. این رابطه‌ای شناخته شده برای سرعت‌های نسبی است. در مثال فضاپیما، این به دان معناست که سرعت حقیقی فضاپیما (نسبت به زمین) جمع برداری سرعت فضاپیما نسبت به انومبیل و سرعت اتومبیل نسبت به جاده است. حال اگر بار دیگر از رابطه ۶۴.۴ نسبت به t مشتق بگیریم، رابطه مشابه‌ای برای شتاب ها به‌دست می‌آید، یعنی

$$\mathrm{a} = \mathrm{a}' + \mathrm{A} \tag{۶۵.۴}$$

که a و a' به ترتیب شتاب ذره P نسبت به چارچوب‌های $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ هستند و A شتاب چارچوب $\mathcal{F}'$ نسبت به

چارچوب $\mathcal{F}$ است. بار دیگر اشاره می‌کنیم این نتیجه تنها زمانی که $\mathcal{F}'$ بدون چرخش نسبت به $\mathcal{F}$ باشد برقرار است.

چارچوب‌های بدون شتاب متقابل

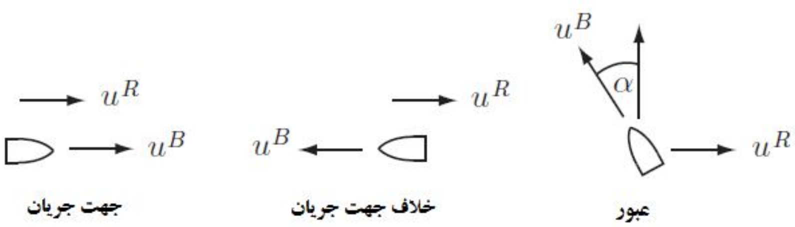
مورد بسیار خاصی از معادله ۶۵.۴ زمانی اتفاق می‌افتد که چارچوب $\mathcal{F}'$ با سرعت ثابت (و بدون چرخش) نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ حرکت می‌کند. در این صورت دو چارچوب $\mathcal{F}'$ و $\mathcal{F}$ را چارچوب‌های بدون شتاب متقابل می‌نامیم. در این مورد $\mathrm{A} = 0$ و رابطه ۶۵.۴ به رابطه زیر کاهش می‌یابد.

$$\mathrm{a} = \mathrm{a}' \tag{۶۶.۴}$$

این به این معنی است که وقتی چارچوب‌های بدون شتاب متقابل برای مشاهده حرکت ذره P بکار گرفته می‌شوند، شتاب مشاهده شده از P در هر دو چارچوب یکسان است. این نتیجه اساس بحث ما از چارچوب‌های لخت در فصل بعد است.

مثال

سرعت نسبی: رودخانه می‌سی‌سی‌پی حدود یک مایل پنهاور است و جریانی یکنواخت دارد. یک قایق کل این یک مایل را حدود ۱۲ دقیقه زمانی که در خلاف جریان آب رودخانه حرکت می‌کند، می‌پیماید درحالی که تنها ۳ دقیقه کافی است اگر در جهت جریان آب قرار گیرد. کمترین زمانی که قایق می‌تواند از می‌سی‌سی‌پی عبور کند و به نزدیکترین نقطه در طرف دیگر ساحل برسد را بیابید؟ برای حل این مسله باید حرکت قایق را از چارچوب مرجع $\mathcal{F}'$



شکل ۱۴.۴: آب با سرعت u^R از چپ به راست جریان دارد و قایق با سرعت u^B نسبت رودخانه در حال حرکت است. در این مورد سرعت قایق نسبت به ساحل جمع برداری دو سرعت نشان داده شده است.

که همراه جریان رودخانه حرکت می‌کند، را مشاهده کرد. در این چارچوب مرجع آب ساکن است و قایق با سرعت یکسان در تمام جهات حرکت می‌کند. در این صورت رابطه سرعت نسبی (۶۴.۴) تصویر درستی از حرکت قایق

نسبت به ساحل رودخانه که در چارچوب مرجع $\mathcal{F}$ قرار دارد، می‌دهد. اجازه دهید u^B را تندی قایق در آب راکد و u^R را تندی آب رودخانه و واحد هر دو کمیت مایل بر ساعت در نظر بگیریم. در خلاف یا موافق جریان آب بودن راهی معقول برای گفتن مقادیر u^B و u^R است. زمانی که قایق در جهت جریان آب حرکت می‌کند، رابطه ۶۴.۴ نشان می‌دهد که تندی قایق نسبت به ساحل $u^B + u^R$ است. اما این تندی با $1/3$ مایل بر دقیقه (یا ۲۰ مایل بر ساعت) بیان می‌شود. لذا

$$u^B + u^R = 20 \tag{۶۷.۴}$$

به طور مشابه در خلاف جریان آب سرعت نسبی $u^B - u^R$ است و مقدار آن $1/12$ مایل بر دقیقه (یا ۵ مایل بر ساعت) است. در این صورت داریم

$$u^B - u^R = 5 \tag{۶۸.۴}$$

با حل این معادلات،

$$u^B = 12/5 m/h \qquad u^R = 7/5 m/h \tag{۶۹.۴}$$

اکنون قایق بایستی از رودخانه عبور کند. برای عبور با یک مسیر مستقیم به نزدیکترین نقطه در ساحل مقابل، سرعت قایق (نسبت به جریان آب رودخانه) باید به اندازه زوایه α جهت دهی کند تا در مسیر خواسته‌شده قرار گیرد (همانگونه که در شکل ۱۴.۴ نشان داده شده است.) به طوری که سرعت برآیند قایق تنها عمود بر مسیر جریان قرار گیرد. برای این منظور زاویه α بایستی رابطه زیر را ارضا کند.

$$u^B \sin\alpha = u^R \tag{۷۰.۴}$$

که نشان می‌دهد $\sin\alpha = 3/5$ است. بنابراین سرعت برایند قایق زمانی که در حال عبور از رودخانه است $u^B\cos\alpha = 12/5 \times (4/5) = 10m/h$ خواهد بود. چون پهنای رودخانه یک مایل است زمان سپری شده برای عبور از رودخانه $1/10h = 6min$ است.

تمرین

یک هواپیما از نقطه A به سمت فرودگاه B که به فاصله $600km$ در سمت شمال A قرار دارد، پرواز می‌کند. اگر جریان باد پایداری با سرعت $90km/h$ از سمت شمال به شرق شروع به وزیدن کند، جهت این هواپیما نسبت به جهت شمال چقدر بایستی باشد تا به نقطه B برسد. سرعت هواپیما در باد راکد $200km/h$ است.

[1] درسنامه مکانیک کلاسیک

فصل ۵

قوانین حرکت نیوتن و قانون گرانش

در این فصل قوانین نیوتن از حرکت، تعریف جرم و نیرو، قانون گرانش، شرط هم‌ارزی و گرانش ناشی از کره‌ها را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. در واقع این فصل به مبانی دینامیک و گرانش مربوط می‌شود. همانطور که قبلا گفتیم سینماتیک به طور خاص به هندسه حرکت مربوط است، در حالی که دینامیک به دنبال پاسخ این سوال که چه حرکتی زمانی که نیروهای خاص روی یک جسم عمل می‌کنند، اتفاق می‌افتد. قوانینی که به اجازه این ارتباط را می‌کند، قوانین حرکت نیوتن هستند. اینها قوانینی از فیزیک هستند که براساس شواهد تجربی نمایان می‌گردند و بر طبق درستی پیش‌بینی‌هایشان تصدیق یا رد می‌شوند. در حقیقت فرمولبندی نیوتن از مکانیک به طرز حیرت آوری در صحتش و وسعت کاربردش موفق بوده است و اساسا بیش از سه قرن دست نخورده باقی مانده است. این قضیه حتی برای قانون جهانی گرانش نیوتن که نیروهای اعمال شده توسط تمام جرم ها به یکدیگر را مشخص می‌کند، برقرار است. در مجموع، این قوانین تقریبا ساختار کامل مکانیک کلاسیک را اریه می‌دهد و یک توضیح درستی برای رنج وسیعی از حرکت‌ها از مولکول‌های بزرگ گرفته تا تمام کهکشانها، فراهم می‌سازد.

۱.۵ قوانین حرکت نیوتن

اسحاق نیوتن سه قانون معروف حرکت که در مجموعه کتب $Principia$ گردآوری شده را به زبان لاتین و در سال ۱۶۸۷ میلادی به چاپ رسانید. این قوانین بر اصول پایه‌ای مکانیک تنظیم شده‌اند و اساسا تا حال بدون تغییر باقی مانده است. حتی زمانی که به زبان انگلیسی ترجمه شد، لغات اصلی نیوتن برای فهمیدن بسیار مشکل بودند عمدتا به این دلیل که اصطلاحات قرن هفدهم هنوز کهن و قدیمی هستند. همچنین اکنون این قوانین برای کاربرد برای ذرات، مفهومی که هیچگاه توسط نیوتن استفاده نشده است، فرمولبندی می‌شوند. یک ذره یک جسم ایده‌ال است

که تنها یک نقطه از فضا را اشغال می‌کند و هیچ گونه ساختار داخلی ندارد. چنین ذراتی هرگز در طبیعت به وجود نیامده‌اند، اما مناسب است تا اجسام واقعی را همانگونه که از ذرات ساخته شده‌اند در نظر گرفت. در اصطلاحات جدید، قوانین نیوتن به صورت زیر بیان می‌شوند.

قوانین حرکت نیوتن

- قانون اول: زمانی که تمام تاثیرات بیرونی روی یک ذره از بین می‌روند، ذره با سرعت ثابت حرکت می‌کند (این سرعت ممکن است صفر باشد در این صورت ذره ساکن باقی می‌ماند.)

- قانون دوم: زمانی که نیروی F به ذره‌ای به جرم m اعمال می‌شود، ذره با شتاب آنی a که با فرمول

$$\mathrm{F} = m\mathrm{a} \tag{۱.۵}$$

تعیین می‌شود، حرکت می‌کند. واحد نیرو توسط واحدهای جرم و شتاب مشخص می‌شود که معمولا با واحد نیوتن اندازه گیری می‌شود.

- قانون سوم: زمانی که دو ذره به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند، این نیروها اولا با یکدیگر در بزرگی یکسان و ثانیا متفاوت در جهت (خلاف جهت همدیگر) هستند و ثالثا موازی با خط مستقیم واصل بین دو ذره اعمال می‌گردنند.

تفسیر قوانین حرکت نیوتن

قوانین نیوتن خودشان به اندازه کافی واضح هستند اما سوالات مهم بی پاسخی در آنها هست از جمله:

- الف: در چه چارچوب مرجعی این قوانین درست هستند؟

- ب: تعاریف جرم و نیرو چیست؟

در بخش‌های پیش رو این سوالات پاسخ داده می‌شوند. چیزی که در اینجا انجام خواهیم داد این است که فعلا قوانین نیوتن را کنار می‌گذاریم و به آزمایشات ساده برای ذرات باز می‌گردیم. اینها را آزمایشات ذهنی می‌نامیم زیرا گرچه کاملا منطقی به نظر می‌رسند ولی در عمل بعید است قابل پیاده‌سازی باشند. نتایج فرضی برای چنین آزمایشاتی به عنوان قوانین اولیه حاکم بر مکانیک است که ما براساس آن تعاریف خودمان از جرم و نیرو را پایه گذاری می‌کنیم. سرانجام این قوانین و تعاریف نشان داده شده معادل با قوانین نیوتنی است که در بالا بیان کردیم. می‌توان گفت که این فرایند تفسیری از قوانین نیوتن است.

۲.۵ چارچوب‌های لخت و قانون اینرسی

همانطور که اشاره شد قانون اول بیان می‌کند که وقتی ذره‌ای بدون تاثیر از هرگونه نیروی بیرونی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، یعنی این که در یک مسیر مستقیم و با تندی ثابت حرکت می‌کند. بنابراین بر خلاف نظر ارسطو، ذره برای حفظ حرکت خود نیازمند هیچ قدرت بیرونی نیست. چون اثر گرانش زمین درستی قانون اول نیوتن، توسط آزمایش انجام شده بر روی زمین، را رد می‌کند، نیوتن در پیشنهاد قانونی که احتمالا نمی‌توان آن را تایید کرد، بینش چشمگیری را از خود نشان داد. به منظور تایید قانون اول، تمام اثرات بیرونی بایستی حذف شوند که به این معناست که ما باید آزمایش ذهنی خود را در مکانی دور دست از هر گونه جسم مادی مانند فضای خالی میان کهکشان‌ها انجام دهیم. در ذهنمان بنابراین مکانی وجود دارد که به ذرات آزمونی مجهز شده که می‌توانیم به طرق مختلف آنها را رها کنیم و حرکت آنها را مشاهده کنیم. مطابق با قانون اول، هر یک از این ذارت باید با سرعت ثابت حرکت کنند.

چارچوب‌های لخت

تاکنون سوال در مورد چارچوب مرجعی که باید برای مشاهده حرکت ذرات آزمون استفاده شود، را نادیده گرفته‌ایم. زمانی که برای اولین بار با این سوال روبه رو می‌شویم، احتمالا پاسخمان این است که چارچوب مرجعی که ثابت است. اما ثابت به چه؟ زمین می‌چرخد و در حرکت مداری حول خورشید است. کل منظومه شمسی قسمتی از کهکشان راه شیری است که حول مرکزاش در حال چرخش است (سیاهچاله پر جرم در مرکز کهکشان قرار دارد). کهکشان‌ها خودشان نسبت به یکدیگر در حال حرکت هستند. بنابراین در حقیقت هر چیزی در جهان نسبت به شی دیگر در حال حرکت است و تقریبا هیچ چیزی را نی‌توان ثابت در توصیف کرد. لذا می‌توان نتیجه گرفت هر چارچوبی مرجعی به اندازه سایرین خوب است، اما این گونه نیست مگر قانون اول اصلا برقرار نباشد، تنها در برخی از چارچوب‌های خاص قانون اول برقرار است. برای نمونه فرض کنید قانون اول در چارچوب $\mathcal{F}$ برقرار باشد. بنابراین این قانون در چارچوب دیگری یعنی $\mathcal{F}'$ که نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ به طور متقابل بدون شتاب است، نیز برقرار است. این به این دلیل است که اگر ذرات آزمون سرعت‌های ثابت در $\mathcal{F}$ داشته باشند، بنابراین در این چارچوب شتابشان صفر است. اما چون $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ چارچوب‌های متقابلا بدون شتاب هستند، ذرات آزمون بایستی در چارچوب $\mathcal{F}'$ شتابشان صفر باشد و در نتیجه بایستی با سرعت ثابت در چارچوب $\mathcal{F}'$ حرکت کنند. همچنین قانون اول در دیگر چارچوب‌ها (شتابدار) برقرار نیست.

- چارچوب لخت: هر چارچوب مرجعی که در آن قانون اول برقرار باشد را یک چارچوب لخت می‌گویند.

در نتیجه، اگر یک چارچوب لخت وجود داشت باشد، آنگاه بینهایت چارچوب وجود دارند که با سرعت ثابت نسبت به دیگر در حل حرکت هستند در همگی قانون اول برقرار است. ظاهرا قانون اول فاقد محتوای فیزیکی است زیرا می‌گوییم این قانون در چارچوب‌هایی که این قانون درست است، صادق است. به این حال، اینطور نیست زیرا در حقیقت چارچوب‌های لخت به منظور ایجاد واقعیت فیزیکی حقیقی برای قانون اول مطرح می‌شوند. اینکه چرا باید این دسته ویژه از چارچوب‌ها مرجع که در آن قوانین فیزیکی شکل ساده به خود می‌گیرند، وجود داشته باشد، یک سوال بسیار ژرف و جالب است که در اینجا مجبور به پاسخگویی نیستیم. بحثمان را با جمله زیر که یک قانون فیزیکی است خلاصه می‌کنیم.

- قانون اینرسی (لختی): در طبیعت یک دسته منحصر به فرد از چارچوب‌های مرجع متقابلا بدون شتاب وجود دارد که در آن قانون اول صادق است.

۳.۵ قانون برخورد متقابل، جرم و نیرو

در ابتدا این سوال که چه چارچوب مرجعی برای مشاهده حرکت ذره در قانون دوم بایستی استفاده شود را کنار می‌گذاریم. جواب این سوال این است که هر چارچوب لخت مرجعی می‌تواند استفاده شود و ما همیشه فرض می‌کنیم که چنین باشد مگر خلاف آن بیان شود. همانطور که پیش از این اشاره کردیم برای فهمیدن قوانین دوم و سوم نیازمند مفاهیم نیرو و جرم هستیم که هنوز تعریف نشده‌اند. دومین آزمایش ذهنی ما مربوط به حرکت یک جفت از ذارت که متقابلا با هم برهم کنش دارند است. طبیعت چنین برخوردهای متقابلی می‌تواند از هر نوعی باشد و تمامی تاثیرات دیگر می‌تواند حذف شود. به علت اینکه هر ذره تحت تاثیر دیگری قرار دارد, قانون اول را نمی‌توان بکار برد. در کل ذرات شتاب می‌گیرند که مستقل از چارچوب مرجعی است که در آن اندازه گیری انجام می‌شود. قانون دوم فیزکی مان مربوط به مقادیر مشاهده شده از شتابهای متقابل است.

۱.۳.۵ قانون برهم‌کنش متقابل

فرض کنید ذرات P_1 و P_2 با یکدیگر برهم کنش می‌کنند به طوری که P_2 شتاب آنی a_{12} را به ذره P_1 وارد می‌کند در حالی که ذره P_1 شتاب a_{21} را به ذره P_2 وارد می‌کند. در این صورت

- این بردار شتاب‌ها در خلاف جهت و موازی با خط راست واصل میان P_1 و P_2 هستند.

- نسبت بزرگی این شتاب‌ها، $|a_{21}|/|a_{12}|$ ثابت و مستقل از ماهیت برهمکنش متقابل میان P_1 و P_2 و حتی مستقل از مکان و سرعت ذرات P_1 و P_2 است.

علاوه بر این فرض کنیم ذره P_2 با ذره سوم P_3 برهم کنش داشته باشد و شتاب‌های آنی آنها بر هم a_{23} و a_{32} باشند و نیز P_1 با ذره P_3 برهم کنش کند که شتاب‌های القایی آنها بر هم a_{13} و a_{31} باشد. در این صورت بزرگی شتاب‌های آنها رابطه سازگاری زیر را ارضا می‌کنند.

$$\frac{|\mathrm{a}_{21}|}{|\mathrm{a}_{12}|} \times \frac{|\mathrm{a}_{32}|}{|\mathrm{a}_{23}|} \times \frac{|\mathrm{a}_{13}|}{|\mathrm{a}_{31}|} = 1 \qquad (۲.۵)$$

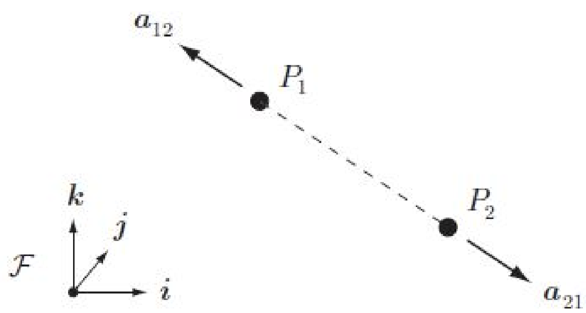
۲.۳.۵ تعریف جرم لختی

قانون برهم کنش متقابل منجر به تعریفمان از جرم و نیرو می‌شود. تعریف کیفی از جرم (لختی) یک ذره این است که یک اندازه‌گیری عددی از عدم تمایل ذره به شتاب گرفتن است. بنابراین زمانی که P_1 و P_2 برهم کنش می‌کنند، ما این واقعیت را نسبت می‌دهیم که شتاب‌های ناشی از a_{12} و a_{21} دارای بزرگی متفاوت برای ذراتی با جرم متفاوت هستند. این نکته از این واقعیت که نسبت شتاب $|\mathrm{a}_{21}|/|\mathrm{a}_{12}|$ تنها به ماهیت خود ذرات نه نوع برهم‌کنش و یا مکان ذرات و یا چگونگی حرکت ذرات بستگی دارد، نیز قابل درک است. بنابراین ما نسبت جرم m_1/m_2 از ذارت P_1 و P_2 را عکس نسبت بزرگی شتاب‌های القایی آنها مانند زیر تعریف می‌کنیم.

- جرم لختی (اینرسی): نسبت جرم m_1/m_2 از ذرات P_1 و P_2 با رابطه زیر تعریف می‌شوند.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\mathrm{a}_{21}|}{|\mathrm{a}_{12}|} \qquad (۳.۵)$$

با این وجود یک ناسازگاری احتمالی در این تعریف وجود درد. فرض کنید ما ذره سوم P_3 را نیز معرفی کنیم. در این صورت با انجام سه آزمایش، می‌توانیم نسبت جرم های یعنی m_1/m_2 ، m_2/m_3 و m_3/m_1 را مشخص کنیم که هیچ تضمینی برای ضرب آنها مساوی واحد وجود نخواهد داشت. به هرحال، رابطه سازگاری ۲.۵ این اطمینان را به ما می‌دهد که ضرب نسبت شتاب‌ها همواره واحد است و بدان معناست که تعریف بالا به طور مبهمی نسبت جرم ذارت را تعریف می‌کند.



شکل ۱.۵: برهم کنش دو ذره‌ای

۳.۳.۵ تعریف نیرو

اکنون به تعریف نیرو برمی‌گردیم. به طور کیفی، حضور نیرو دلیلی بر شتابدار شدن یک ذره است. بنابراین هنگامی که ذرات برهم کنشی باعث شتاب بخشیدن به یکدیگر می‌شوند، ما می‌گوییم علت این امر است که آنها به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند. اما سوالی که ممکن است پرسیده شود این است که چگونه می‌دانیم این نیروها حضور دارند؟ زیرا ذرات شتاب دارند! این گفته به طور آشکاری مستدیر و بدون محتوای واقعی است. بنابراین نیرو کمیتی زاده تخیلات ماست، اما با این وجود یک بخش اساسی از فرمولبندی نیوتنی از مکانیک کلاسیک به شمار می‌رود. البته الزم به ذکر است که مفهوم نیرو بخش اساسی از فرمولبندی لاگرانژی و هامیتونی نیست. در برهم‌کنش‌های متقابل نیروهای که ذرات به یکدیگر وارد می‌کنند به صورت زیر تعریف می‌شوند.

- فرض کنید ذرات P_1 و P_2 در برهم کنش متقابل باشند (شکل ۱.۵) و به ترتیب دارای شتاب‌های a_{12} و a_{21} باشند. لذا نیروهای F_{12} که ذره P_2 به P_1 وارد می‌کند و نیز F_{21} نیرپی وارده از ذره P_1 به P_2 با رابطه زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathrm{F}_{12} = m_1\mathrm{a}_{12} \qquad \mathrm{F}_{21} = m_2\mathrm{a}_{21} \tag{۴.۵}$$

که واحد نیرو به واحدهای جرم و شتاب وابسته است.

به طور کلی نیروی ها وارد بر ذره P_0 از طرف ذرات $P_1, ..., P_N$ در برهم کنش N ذره ای (شکل ۲.۵) با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\mathrm{F}_0 = m_0\mathrm{a}_0 = m_0(\mathrm{a}_{01} + \mathrm{a}_{02} + ... + \mathrm{a}_{0N}) = \mathrm{F}_{01} + \mathbf{F}_{02} + ... + \mathbf{F}_{0N} \tag{۵.۵}$$

رابطه بالا بیان می‌کند که نیروی برایند بر ذره P_0 جمع برداری از نیروهای اعمالی از طرف ذرات دیگر بر ذره P_0 است.

۴.۵ قانون گرانش

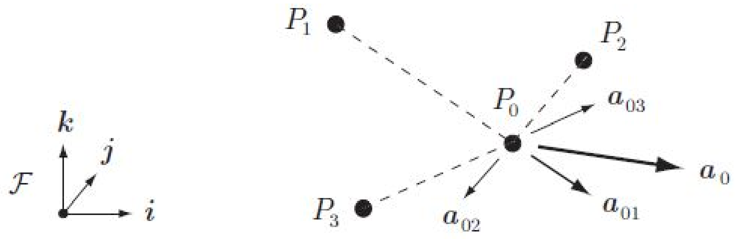
نیروی گرانشی که دو ذره به یکدیگر وارد می‌کنند دارای بزرگی

$$F = \frac{m_1 m_2 G}{R^2} \tag{۶.۵}$$

است که m_1 و m_2 جرم ذرات و R فاصله میان دو ذره است. همچنین G ثابت جهانی گرانش است. لازم به ذکر است که ثابت G یک ثابت بعد دار است و مقدار عددی آن وابسته به واحدهای جرم، طول و نیرو است و مقدار تقریبی آن

$$G = 6/67 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2} \tag{۷.۵}$$

است.



شکل ۲.۵: برهم کنش چند ذره‌ای

۵.۵ نیروی گرانش برای توزیعی از جرم

یکی از اهداف این بخش محاسبه نیروی گرانشی ناشی از توزیع پیوسته نظیر دیسک، میله و کره به یک جرم نقطه‌ای ست. در ابتدا توزیع گسسته‌ای از جرمهای نقطه‌ای را در نظر خواهیم گرفت و سپس توزیع پیوسته را بررسی خواهیم نمود.

۱.۵.۵ نیروی گرانش ناشی از مجموع جرم نقطه‌ای بر یک جرم نقطه‌ای منزوی

فرض کنید مطابق شکل ۳.۵ دو ذره A و B با جرم نقطه‌ای m روی محور y و ذره C روی محور x قرار داشته باشد در این صورت نیروی گرانش وارد به ذره C را محاسبه نمایید. با استفاده از قانون گرانش، هر یک از ذرات A و B ذره C را با بزرگی نیروی زیر جذب می‌کنند.

$$F' = \frac{mMG}{R^2} \tag{۸.۵}$$

در رابطه بالا $R = (a^2 + x^2)^{1/2}$ فاصله AC یا BC است. با توجه به شکل ۳.۵ از تقارن می‌توان دید که بزرگی برایند نیروها با رابطه زیر داده می شود.

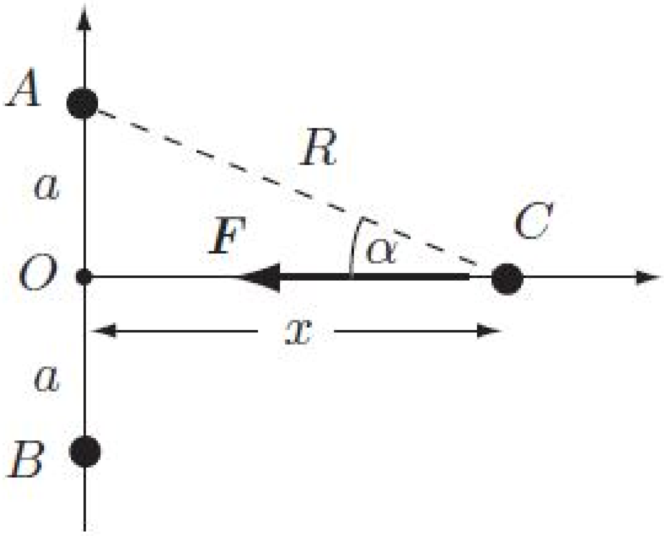
$$F = F'_x + F'_x = 2F\cos(\alpha) = 2mMG\Big(\frac{R\cos(\alpha)}{R^3}\Big) = 2mMG\Big(\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\Big) \tag{۹.۵}$$

رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$F = 2\frac{mMG}{x^2}\Big(1 + \frac{a^2}{x^2}\Big)^{-3/2} \tag{۱۰.۵}$$

حال رفتار حدی این نیرو را بررسی می‌کنیم برای فاصله های دور یعنی $(1 \gg \frac{x}{a})a \gg x$ به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$F \approx 2\frac{mMG}{x^2}\Big(1 - \frac{3}{2}\frac{a^2}{x^2}\Big) \approx \frac{m(2M)G}{x^2} \tag{۱۱.۵}$$

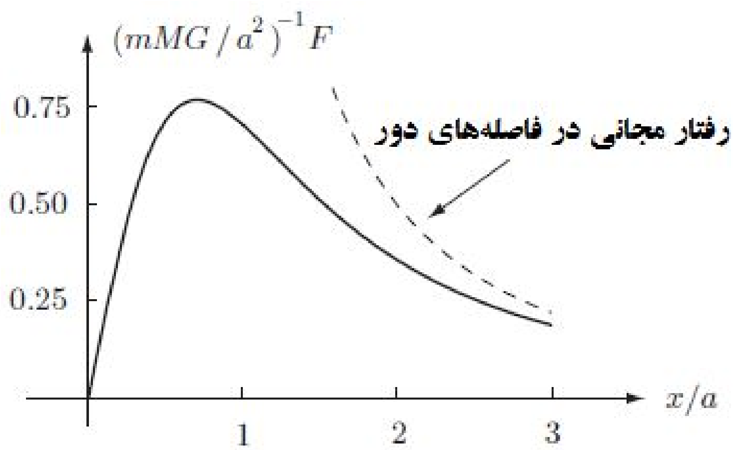


شکل ۳.۵: توزیع گسسته جرم نقطه‌ای

توجه در رابطه بالا ما از رابطه بسط زیر استفاده کرده‌ایم

$$(1+\epsilon)^n \sim 1 + n\epsilon \qquad (۱۲.۵)$$

رابطه ۱۱.۵ نشان می‌دهد نیروی گرانشی حاصل از این سه جرم در فاصله های دور با نیروی گرانش میان جرم C و تک جسم نقطه ای به جرم $2M$ برابر است. رفتار تابع F بر حسب فاصله در شکل ۴.۵ رسم شده است. همان طور که پیداست در فاصله $x = a/\sqrt{2}$ مقدار تابع به بیشینه خود یعنی $F = 4mMG/3\sqrt{3}a^2$ می‌رسد و نیز در $x = 0$ مقدار تابع صفر است. نکته‌ای که بایستی به آن اشاره کرد این است که اگر تعداد این مجموع زیاد باشد



شکل ۴.۵: نمودار نیروی بدون بعد $(mMG/a^2)^{-1}F$ بر حسب x/a .

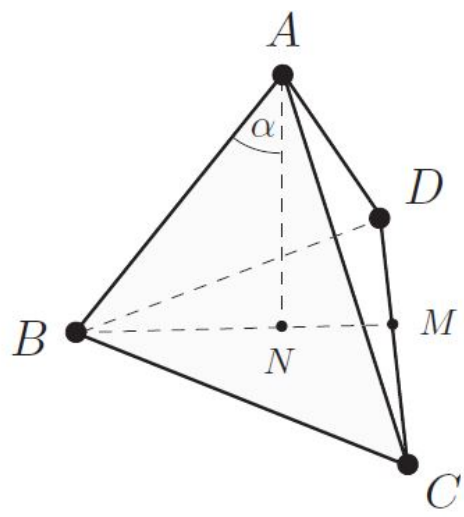
می‌توان به این سیستم بدون لحاظ ذره C جرم M را نسبت داد. اکنون در فاصله‌ی دور $r \to \infty$ نیروی برایند وارد بر C با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\mathrm{F} \sim -\frac{mMG}{r^2}\hat{r} \tag{۱۳.۵}$$

که علامت منفی نشان دهنده جاذبه بودن نیرو است و نیز $\hat{r} = \frac{\mathrm{r}}{r}$ بردا یکه شعاعی است.

تمرین

مطابق شکل ۵.۵ چهار جرم نقطه‌ای در راس یک هرم با ضلع a قرار دارند در این صورت نیروی گرانشی برایند برای یکی از ذرات چقدر است؟



شکل ۵.۵: آرایش جرم‌های نقطه در یک هرم. .

۲.۵.۵ نیروی گرانش برای توزیع پیوسته

در این بخش نیروی که از طرف یک توزیع پیوسته نظیر یک میله یک دیسک و یک کره به جرم M بر جرم نقطه‌ای با جرم m را محاسبه می‌کنیم.

میله

مطابق شکل ۶.۵ میله‌ای به جرم M و طول $2a$ و ذره‌ی P به جرم m را در نظر بگیرید. در این صورت نیروی گرانش وارد بر ذره از طرف میله را محاسبه نمایید؟

استراتژی حل مسله: برای حل چنین سوالاتی ابتدا یک المان جرم روی توزیع را در نظر می‌گیریم. چون توزیع یکنواخت است بنابراین رابطه نسبی زیر را می‌توان نوشت.

$$\lambda = \frac{M}{2a} = \frac{dM}{dx} \Rightarrow dM = \frac{M}{2a}dx \tag{۱۴.۵}$$

که λ چگالی توزیع خطی است. اکنون نیروی حاصل از این المان بر بار نقطه‌ای را به‌دست می‌آوریم.

$$dF = \frac{mdMG}{R^2} = \frac{mMGdx}{(x^2+b^2)} \tag{۱۵.۵}$$

حال با گرفتن انتگرال از نیروی بالا و نیز لحاظ کردن مولفه‌های نیرو، نیروی برایند با رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$F = 2\int dF\cos(\alpha) = \frac{mMG}{a}\int_0^a \frac{\cos(\alpha)}{R^2}dx = \frac{mMG}{a}\int_0^a \frac{bx}{(x^2+b^2)^{3/2}} \tag{۱۶.۵}$$

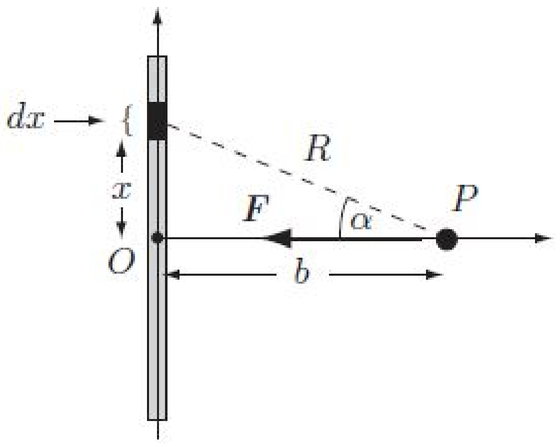
حال با حل انتگرال بالا به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$F = \frac{mMG}{b(b^2+a^2)^{1/2}} \tag{۱۷.۵}$$

تمرین: برای حل این انتگرال از تغییر متغیر زیر استفاده کنید.

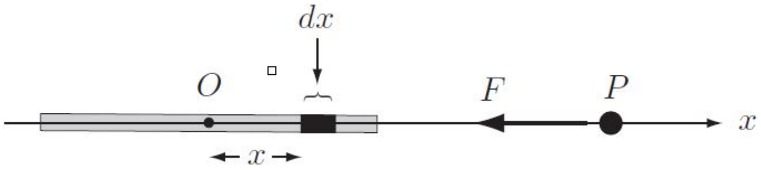
$$\tan\theta = \frac{x}{b} \quad dx = (1+\tan^2\theta)d\theta \quad 1+\tan^2\theta = \csc^2\theta = 1/\cos^2\theta \tag{۱۸.۵}$$

در امتحان حل انتگرال داده خواهد شد.



شکل ۶.۵: آرایش میله و جرم نقطه‌ای .

تمرین: مطابق شکل ۷.۵ میله‌ای به جرم M و به طول $2a$ را در فاصله b از ذره P قرار می‌دهیم. اکنون با استفاده از فرضیات روی شکل نیروی برایند از طرف میله بر ذره را محاسبه نمایید.



شکل ۷.۵: آرایش میله و جرم نقطه‌ای .

دیسک

ذره P به جرم m که روی محور گذارنده از دیسکی با توزیع یکنواخت به جرم M و شعاع a قرار دارد را مطالبق شکل ۸.۵ در نظر بگیرید. نیروی گرانشی که دیسک به ذره وارد می‌کند را محاسبه نمایید؟ ابتدا بایستی یک المان جرم روی دیسک همانگونه که در شکل ۸.۵ نشان داده شده است را انتخاب کنیم در این صورت داریم،

$$\sigma = \frac{M}{\pi a^2} = \frac{dM}{dA} \Rightarrow dM = \frac{M}{\pi a^2}dA \qquad dA = rd\theta dr \tag{۱۹.۵}$$

که σ چگالی توزیع سطحی است. اکنون نیروی گرانشی از طرف این المان بر جرم نقطه‌ای با رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$dF = \frac{mMGdA}{\pi a^2 R^2} \tag{۲۰.۵}$$

حال نیروی برایند بر جرم نقطه‌ای با رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$F = \int dF\cos(\alpha) = \int_A \frac{\cos(\alpha)}{R^2}dA \tag{۲۱.۵}$$

که در این رابطه انتگرال روی تمام مساحتی که توسط دیسک اشغال شده است، گرفته شده است. از طرفی چون

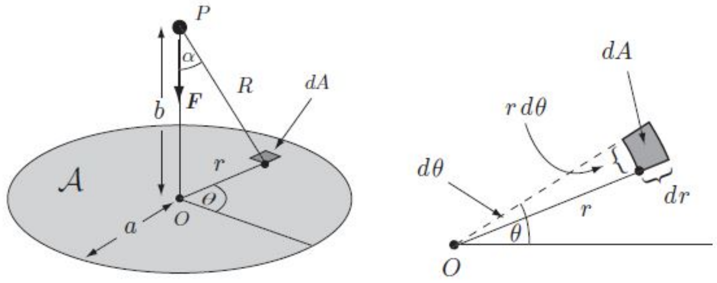
$$\frac{\cos(\alpha)}{R^2} = \frac{R\cos(\alpha)}{R^3} = \frac{b}{(r^2+b^2)^{3/2}} \tag{۲۲.۵}$$

است و با در نظر گرفتن $0 \le r \le a$ و $0 \le \theta \le 2\pi$ به رابطه زیر برای انتگرال بالا خواهیم رسید.

$$F = \frac{mMG}{\pi a^2}\int_{r=0}^{r=a}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\Big(\frac{b}{(r^2+b^2)^{3/2}}\Big)rdrd\theta = 2\frac{mMG}{a^2}\Big[1-\frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}}\Big] \tag{۲۳.۵}$$

تمرین: رابطه بالا را به‌دست آورید؟

تمرین: نیروی گرانشی وارده از یک صفحه نامتناهی با چگالی یکنواخت سطحی σ بر ذره P به فاصله b از صفحه را محاسبه کنید؟

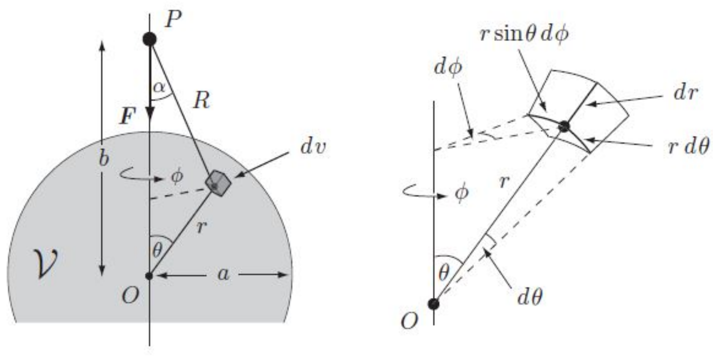


شکل ۸.۵: آرایش دیسک و جرم نقطه‌ای .

تمرین: اگر در مثال دیسک بجای جرم نقطه‌ای، میله‌ای به طول b و جرم m که درست روی محور گذراننده از دیسک که یک سر آن در مرکز قرار دارد را در نظر بگیریم در این صورت نیروی گرانشی وارد بر میله را به‌دست آورید. (از رابطه ۲۳.۵ استفاده کنید.)

کره

کره توپری به جرم M و چگالی حجمی $\rho(r)$ (توجه داشته باشید ممکن است توزیع نایکنواخت باشد به این علت ما در اینجا چکالی حجمی را تابعی از فاصله می‌گیریم و برای چگالی‌های یکنواخت آن را ثابت فرض می‌کنیم.) با شعاع a و ذره P به جرم m به فاصله b از مرکز کره همانطور که در شکل ۹.۵ نشان داده شده است را در نظر بگیرید. در این صورت نیروی گرانشی وارد بر ذره از طرف کره را حساب کنید؟ مانند مثال‌های قبل ابتدا یک المان



شکل ۹.۵: آرایش کره و جرم نقطه‌ای .

جرمی همانند آنچه در شکل ۹.۵ نشان داده شده است را در نظر می‌گیریم، بنابراین

$$dM = \rho dV \Rightarrow M = \int \rho dV \tag{۲۴.۵}$$

است که در این رابطه dV حجم المان جرم است که در مختصات کروی همانطور که در شکل سمت راست شکل ۹.۵ نشان داده شده است برابر با

$$dV = dr(rd\theta)(r\sin(\theta)d\phi) = r^2\sin(\theta)drd\theta d\phi \qquad (۲۵.۵)$$

که بازه $0 \le r \le a$ ، $0 \le \theta \le \pi$ و $0 \le \phi \le 2\pi$ است. اکنون نیروی گرانشی حاصل از المان جرمی وارد بر ذره با رابطه زیر نوشته می‌شود.

$$dF = \frac{m(\rho dV)G}{R^2} \qquad (۲۶.۵)$$

بنابراین نیروی برایند وارد بر ذره

$$F = \int dF\cos(\alpha) = mG\int_{\mathcal{V}}\frac{\rho\cos(\alpha)}{R^2}dV \qquad (۲۷.۵)$$

با توجه به شکل می‌توان به رابطه زیر رسید.

$$\frac{\cos(\alpha)}{R^2} = \frac{R\cos(\alpha)}{R^3} = \frac{b - r\cos\theta}{(r^2+b^2-2rb\cos\theta)^{3/2}} \qquad (۲۸.۵)$$

در رابطه بالا ما از اتحادی که برای اندازه تفریق بردارها در فصل ۲ برقرار بود $R^2 = r^2+b^2-2rb\cos\theta$ را در نظر می‌گیریم. سرانجام با قرار دادن روابط بالا در انتگرال ۲۷.۵ به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$F = mG\int_{r=0}^{r=a}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\Big(\frac{\rho(r)(b-r\cos\theta)}{(r^2+b^2-2rb\cos\theta)^{3/2}}\Big)r^2\sin\theta drd\theta d\phi \qquad (۲۹.۵)$$

پیداست که انتگرالده مستقل از ϕ است بنابراین

$$F = 2\pi mG\int_{r=0}^{r=a}r^2\rho(r)\Big\{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\Big(\frac{(b-r\cos\theta)}{(r^2+b^2-2rb\cos\theta)^{3/2}}\Big)\sin\theta d\theta\Big\}dr \qquad (۳۰.۵)$$

برای حل انتگرال میانی از رابطه $R^2 = r^2+b^2-2rb\cos\theta$ می‌توان دید که رنج تغییرات

$$R^2 = r^2+b^2-2rb\cos\theta \qquad \theta|_0^\pi \Rightarrow R|_{r-b}^{r+b} \qquad (۳۱.۵)$$

است همچنین

$$2RdR = 2rb\sin\theta d\theta; \quad b - r\cos\theta = \frac{2b^2-2rb\cos\theta}{2b} = \frac{R^2+(b^2-r^2)}{2b} \qquad (۳۲.۵)$$

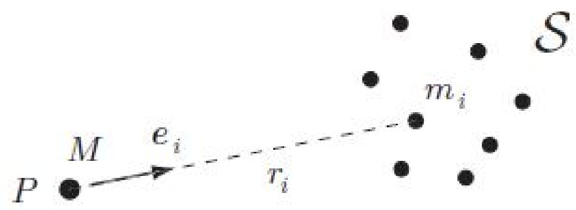
بنابراین انتگرال روی θ به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\int_{b-r}^{b+r}\Big(\frac{R^2+b^2-r^2}{2bR^3}\Big)\frac{RdR}{rb} = \frac{1}{2rb}\int_{b-r}^{b+r}\Big(1+\frac{b^2-r^2}{R^2}\Big)dR = \frac{2}{b^2} \qquad (۳۳.۵)$$

در این صورت نیروی برایند با رابطه زیر داده خواهد شد.

$$F = \frac{mG}{b^2}\Big(4\pi\int_{r=0}^{r=a}r^2\rho(r)dr\Big) = \frac{mMG}{b^2} \qquad (۳۴.۵)$$

همانطور که از رابطه بالا پیداست کل کره به مانند یک جرم نقطه‌ای به جرم M در مرکز کره در نظر می‌توان گرفت. در مورد چند کره نیز هر کره را می‌توان به صورت یک جرم نقطه‌ای در نظر گرفت که در مرکز کره‌ها قرار دارند. در این صورت نیروی جاذبه میان آنها همواره به مانند توزیع گسسته از جرم‌های نقطه‌ای است. نکته‌ای که بایستی به آن توجه کرد اصل هم‌ارزی است. این اصل بیان می‌کند که جرم لختی، m و جرم گرانشی m_g با یکدیگر برابر هستند. حال با این فرض می‌توان شتاب گرانشی را محاسبه نمود. اگر مطابق شکل ۱۰.۵ ذره‌ی P را به جرم M که توسط سیستمی از ذرات یعنی S جذب می‌شود را در نظر بگیریم. در این صورت نیروی گرانشی که سیستم S به ذره P وارد می‌کند با رابطه زیر داده خواهد شد.



شکل ۱۰.۵: آرایش سیستمی از ذرات و جرم نقطه‌ای .

$$\mathrm{F} = \frac{Mm_1G}{r_1^2}\mathrm{e}_1 + \frac{Mm_2G}{r_2^2}\mathrm{e}_2 + ... + \frac{Mm_NG}{r_N^2}\mathrm{e}_N = M\Big(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_iG}{r_i^2}\mathrm{e}_i\Big) \qquad (۳۵.۵)$$

حال می‌توان قسمت داخل پرانتز را با بردار

$$\mathrm{g} = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_iG}{r_i^2}\mathrm{e}_i \qquad (۳۶.۵)$$

نشان داد که مستقل از جرم M است. حال با فرض اصل هم‌ارزی و نیز استفاده از قانون دوم نیوتن شتاب جاذبه

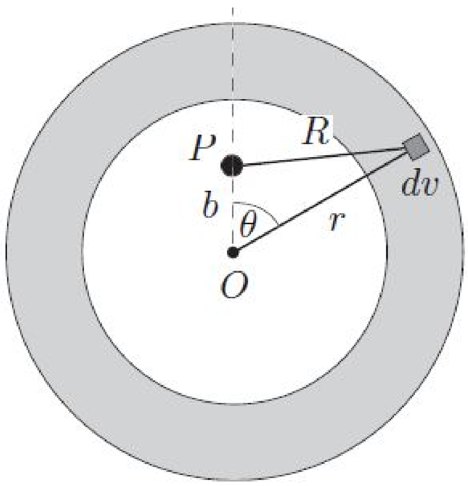
$$M\mathrm{g} = M\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{a} = \mathrm{g} \qquad (۳۷.۵)$$

است. توجه داشته باشد که در مورد زمین همیشه ما جهت بردار یکه که اینجا k در نظر می‌گیریم رو به بالا است در صورتی که نیروی جاذبه رو سمت زمین و در خلاف جهت بردار یکه است بنابراین داریم

$$\mathbf{F} = -Mg\mathrm{k} \qquad (۳۸.۵)$$

است که g بزرگی بردار شتاب گرانشی g است. همچنن باید دقت کرد که g و k تابعی از مکان روی زمین هستند. برای مثال مقدار عددی g در استوا کره زمین کمتر از مقدار آن در قطب‌ها است. تمرین: مقدار عددی دقیق g در استوا و قطب چقدر است؟ مقدار g روی زمین را معمولا $g = 9/8m/s^2 \sim 10m/s^2$ در نظر می‌گیریم.

مثال: نشان دهید نیروی گرانشی وارد شده بر یک ذره در داخل حفره‌ای در میان کره متقارن همواره صفر است. اگر المان را همان طور که در شکل ۱۱.۵ نشان داده شده است را در داخل کره در نظر بگیریم در داخل کره چون



شکل ۱۱.۵: ذره در داخل حفره میانی یک کره .

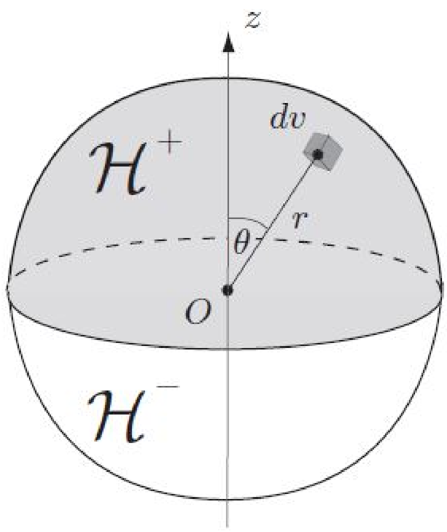
$r > b$ است خواهیم داشت.

$$R^2 = r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta \Rightarrow R|_{r-b}^{r+b} \qquad (۳۹.۵)$$

حال انتگرال میانی روی θ در رابطه ۳۳.۵ به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$\int_{r-b}^{r+b} \Big(1 + \frac{b^2 - r^2}{R^2}\Big) dR = \Big(R + \frac{r^2 - b^2}{R}\Big)|_{R=r-b}^{R=r+b} = 0 \qquad (۴۰.۵)$$

تمرین: دو نیم کره با توزیع حجمی یکنواخت که جرم هر کدام M است را مطابق شکل ۸.۵ در نظر بگیرید که



شکل ۱۲.۵: دو نیم کره. .

تشکیل یک کره واحد به شعاع a را می‌دهند. در این صورت نیروی گرانشی وارد بر هر یک از نیم کره ها را محاسبه کنید. راهنمایی یکی از کره‌ها را به عنوان ذره نقطه‌ای می‌توان در نظر گرفت که در مرکز نیم کره قرار دارد. چون توزیع یکنواخت است بنابراین

$$\frac{2M}{4\pi a^3} = \frac{M_{hemisphere}}{4\pi r^3} \Rightarrow M_{hemisphere} = 2M(\frac{r}{a})^3 \tag{۴۱.۵}$$

در این صورت نیروی وارد از المان بر نیم کره پایینی (یا ذره نقطه‌ای در مرکز نیم کره پایینی) با رابطه زیر به‌دست خواهد آمد.

$$dF = \left(\frac{2M(r/a)^3(\rho dV)G}{r^2}\right)\cos\theta \tag{۴۲.۵}$$

توجه داشته باشید که ρ ثابت است.

۰درسنامه مکانیک کلاسیک

فصل ۶

مسائل در دینامیک ذره

در این فصل ابتدا معادلات حرکت برداری و کاهش آن به معادلات اسکالر و نیز میدان نیرو و قیود هندسی و نیروی قیدی را بررسی می‌کنیم. در ادامه نیز نیروهای مقاوتی خطی و مجذوری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. دینامیک ذره به مسئله محاسبه نمودن حرکت ذره در اثر اعمال نیروی خاص مربوط می‌شود. نقطه شروع بحث ما در اینجا قانون دوم نیوتن است. به هر حال چون قانون اول بیشتر در مورد حرکت ذره را در چارچوب لخت است و نیز قانون سوم که در برخوردهای متقابل خود را نشان می‌دهد (در اینجا تنها یک ذره داریم.) در اینجا کارایی ندارند، لذا تمام دینامیک یک ذره بر پایه‌ی قانون دوم نیوتن،

$$m\mathrm{a} = \mathrm{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_N \qquad (۱.۶)$$

است که $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_N$ نیروهای مختلفی هستند که بر جسم اعمال می‌شوند. روش حل معمول نوشتن قانون دوم به شکل زیر است.

$$m\frac{d\mathrm{v}}{dt} = \mathrm{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_N \qquad (۲.۶)$$

این معادله یک معادله دیفرانسیلی مرتبه یک برای سرعت مجهول $\mathrm{v}(t)$ است که به آن معادله حرکت ذره گفته می‌شود. توجه داشتبه باشید برای حل این معادله درجه اول تنها به یک شرط اولیه نیاز داریم. اگر مقدار اولیه v مشخص باشد (و یا اگر مکان اولیه ذره معلوم باشد.) بنابراین معادله ۲.۶ را اغلب برای به‌دست آوردن v تابعی از زمان t می توان حل کرد. درست لحظه‌ای که v مشخص شود (و اگر مکان ابتدای ذره معین باشد) ، بردار مکان r ذره در زمان t را می‌توان از حل معادله دیفرانسیلی مرتبه اول $\mathrm{v} = d\mathrm{r}/dt$ به‌دست آورد. بخش بعدی شامل مثال‌های زیادی از پیادسازی این روش است. همان طور که می‌دانید قوانین نیوتن برای ذرات بکار می‌روند بنابراین ممکن است این مطرح شود که چه زمانی اجسام واقعی مانند یک توپ تنیس، یک فضا پیما و یا زمین می‌توانند مانند ذره

رفتار کنند؟این سوال یک سوال کاملا دشوار که تا فصل ۱۰ کتاب نمی‌توان راجبه آن کامل بحث کرد. آنچه که نشان خواهیم داد این است که حرکت مرکز جرم هر جسمی به مانند حرکت یک ذره‌ای با جرم کل جسم است و تمام نیروهای وارد بر جسم به این ذره وارد می‌شود (این به این معناست که کل جسم را در مرکز جرمش متمرکز کرده‌ایم و رفتار آن را به مانند رفتار یک ذره در نظر می‌گیریم.). مخصوصا یک جسم صلب بدون حرکت چرخشی می‌تواند دقیقا به مانند یک ذره رفتار کند. برای مثال یک آجر که بدون چرخش روی یک میز می‌لغزد را می توان با یک ذره با همان جرم در حال لغزیدن روی میز در نظر گرفت. در بسیاری از موارد ما تنها بخشی از اطلاعات در مورد حرکت جسم را به‌دست می‌اوریم. برای مثال زمانی که یک آجر را در هوا پرتاب می‌کنیم، دینامیک ذره به ما مسیر دقیق حرکت مرکز جرم آجر را می‌دهد اما اطلاعاتی در مورد اینکه کدام نقطه از آجر با زمین برخورد داشته است را نمی‌دهد.

۱.۶ حرکت پرتابی در میدان نیرو

دسته اول مسائل ما مربوط به حرکت مستقیم‌الخط یک ذره در یک میدان نیرو است. نیروی F را میدان گوییم اگر تنها به مکان جسم بستگی داشته باشد و نه برای مثال سرعت و زمان. به عبارت دیگر نیرو تابعی تنها از مکان باشد. برای مثال جاذبه گرانشی از هر توزیع جرمی ثابتی یک میدان از نیرو است، اما نیروهای مقاومتی که معمولا به سرعت بستگی دارند، میدان نیرو نیستند. اگر حرکت مستقیم یک ذره که در راستای محور z انجام می‌پذیرد را در نظر بگیریم، معادله ۲.۶ به معادله اسکالر زیر کاهش می‌یابد.

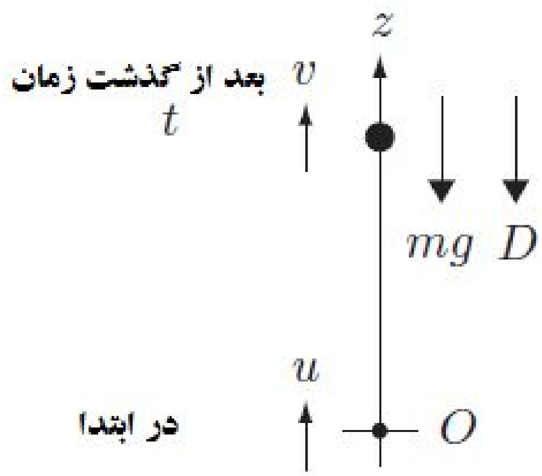
$$m\frac{dv}{dt} = F(z) \qquad (۳.۶)$$

که v سرعت (یک بعدی) ذره و $F(z)$ میدان نیرو (یک بعدی) است که هر دو در راستای مثبت z اندازه‌گیری شده‌اند. در ابتدا مسئله‌ای از حرکت قائم یک جسم تحت نیروی یکنواخت گرانشی بدون مقاومت هوا را در نظر می‌گیریم. این مسئله روی ماه که هیچ اتموسفری ندارد خود به نظر می‌رسد اما روی زمین به علت جو اطراف زمین آن بررسی دوچار مشکل خواهد شد.

۱.۱.۶ حرکت قائم تحت تاثیر نیروی گرانشی یکنواخت

ذره‌ای در راستای قائم و با تندی u به سمت بالا پرتاب می‌شود و در خط راست عمودی تحت نیروی یکنواخت گرانش و بدون مقاومت هوا حرکت می‌کند. ارتفاع بیشینه به‌دست آمده توسط این ذره و نیز مدت زمان سپری شده تا بازگشت به نقطه اولیه پرتاب را بیابید؟

حل: اجازه دهید v سرعت به سمت بالای ذره بعد از زمان t باشد همان طور که در شکل ۱.۶ نشان داده شده است.



شکل ۱.۶: ذره در بتدا در مبدا قرار دارد سپس با سرعت عمودی u به سمت بالا پرتاب می‌شود. ذره در مسیر مستقیم عمودی تحت نیروی گرانش ثابت mg و احتمالا یک نیروی مقاوم (یا نیروی پس‌کشی) D قرار دارد. در زمان t ذره سرعت v را داراست. .

در این صورت معادله اسکالر حرکت ۳.۶ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$m\frac{dv}{dt} = -mg \qquad (۴.۶)$$

موقعی که نیروی پس‌کشی D حضور ندارد. با انتگراگیری ساده داریم

$$v = -gt + C \qquad (۵.۶)$$

که C ثابت انتگرال‌گیری است و اعمال شرایط اولیه $v = u$ زمانی که $t = 0$ می‌توان $C = u$ به‌دست آورد. بنابراین سرعت v در زمان t با

$$v = u - gt \qquad (۶.۶)$$

معین می‌گردد. برای یافتن جابجایی z در زمان t می‌توان نوشت

$$\frac{dz}{dt} = v = u - gt \qquad (۷.۶)$$

با انتگراگیری ساده‌ای به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$z = ut - \frac{1}{2}gt^2 + D_1 \qquad (۸.۶)$$

که D_1 ثابت انتگرال گیری است. اکنون با اعمال شرایط اولیه $z=0$ در زمان $t=0$ ، $D_1=0$ حاصل می‌شود. بنابراین جابجایی جسم در زمان t با رابطه زیر داده می‌شود.

$$z = ut - \frac{1}{2}gt^2 \tag{۹.۶}$$

ارتفاع بیشینه z_{max} زمانی که $\frac{dz}{dt}=0$ یعنی $v=0$ به‌دست می‌آید. بنابراین (با توجه به رابطه ۷.۶) زمانی که $t=u/g$ باشد، z_{max} به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$z_{max} = u\Big(\frac{u}{g}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{u}{g}\Big)^2 = \frac{u^2}{2g} \tag{۱۰.۶}$$

همچنین ذره به نقطه O زمانی که $z=0$ باشد باز می‌گردد، یعنی زمانی که

$$t\Big(u - \frac{1}{2}gt\Big) = 0 \tag{۱۱.۶}$$

بنابراین ذره پس از زمان $2u/g$ به مکان پرتاب باز می‌گردد.

مثال: شی از بالا ساختمانی رها می‌شود و برای مدت زمان τ در حال عبور از پنجره‌ای به ارتفاع h که مقداری پایین تر است دیده می‌شود. چقدر ارتفاع میان بالای ساختمان تا بالای پنجره است (منظور ارتفاع H مشخص شده در شکل ۲.۶ است. چون جسم رها شده است سرعت اولیه آن $u=0$ در زمان $t=0$ است. بنابراین فاصله جسم بعد از گذشت زمان t با رابطه زیر داده می‌شود.

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{۱۲.۶}$$

با توجه به اینکه مبدا در بالای ساختمان در نظر گرفته شده است، بنابراین خواهیم داشت

$$H = \frac{1}{2}gT^2 \tag{۱۳.۶}$$

$$H + h = \frac{1}{2}g(T+\tau)^2 \tag{۱۴.۶}$$

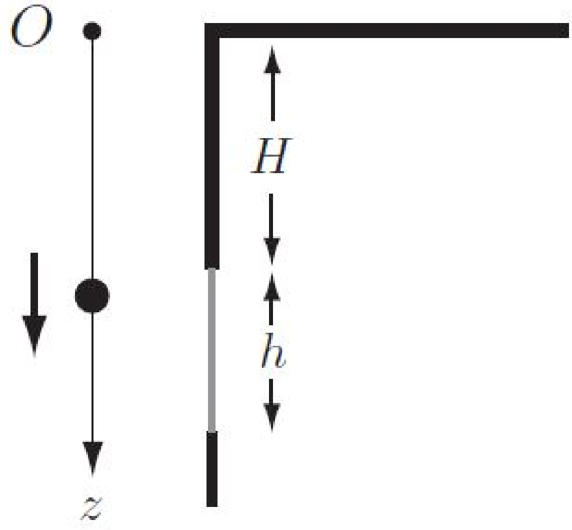
که T مدت زمان سپری شده برای H است که با کم کردن دو معادله ز هم به رابطه زیر برای آن می‌رسیم.

$$h = \frac{1}{2}g(2T\tau + \tau^2) \Rightarrow T = \frac{h}{g\tau} - \frac{1}{2}\tau \tag{۱۵.۶}$$

و در این صورت ارتفاع H با

$$H = \frac{1}{8g\tau^2}\Big(2h - g\tau^2\Big)^2 \tag{۱۶.۶}$$

داده می‌شود.



شکل ۲.۶: سقوط شی از بالای یک ساختمان. .

۲.۱.۶ حرکت مستقیم الخط در میدان عکس مجذوری

ذره‌ی P به جرم m تحت جاذبه گرانشی از جرم M واقع در O حرکت می‌کند. در ابتدا ذره P در فاصله a از O قرار دارد و سپس با تندی u مستقیما به دور دست O پرتاب می‌شود. شرطی که ذره می‌تواند از دام این نیروی گرانشی رها شود را محاسبه نمایید؟ با تقارن موجود در مسئله، حرکت ذره P در خط مستقیم گذراننده از O صورت می‌پذیرد. با استفاده از قانون گرانش، معادله اسکالر حرکت

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mMG}{r^2} \tag{۱۷.۶}$$

است که r فاصله OP و $v = \dot{r}$ است. معادلاتی نظیر این همیشه با حذف زمان انتگرال گیری می‌شوند. چون

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \times \frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr} \tag{۱۸.۶}$$

معادله حرکت می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود.

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{MG}{r^2} \tag{۱۹.۶}$$

این یک معدله دیفرانسیلی مرتبه اول برای v تابعی از r است. با شرایط اولیه $v = u$ زمانی که $r = a$ باشد می‌توان این معادله را حل کرد. بنابراین

$$\int vdv = -MG\int \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{MG}{r} + C \tag{۲۰.۶}$$

است که C ثابت انتگرال گیری است. با اعمال شرایط اولیه $v = u$ در $r = a$ این ثابت $C = (u^2/2) - (MG/a)$ به دست می‌آید و نیز

$$v^2 = \left(u^2 - \frac{2MG}{a}\right) + \frac{2MG}{r} \tag{۲۱.۶}$$

ست که سرعت v بر حسب تابعی از r را مشخص می‌کند. خواه ذره آزاد به حرکت به سمت بینهایت باشد یا نباشد بستگی به علامت عبارت ثابت داخل پرانتز دارد.

- فرض کنید این عبارت مثبت باشد یعنی

$$u^2 - \frac{2MG}{a} = V^2 \tag{۲۲.۶}$$

که V یک ثابت مثبت است. بنابراین به علت اینکه $2GM/r$ مثبت است، نتیجه می‌گیریم که برای تمام زمان‌ها $V > v$ است. این امر منجر به $r > a + Vt$ برای تمام t می‌شود بنابراین ذره آزادانه به سمت دوردست حرکت می‌کند.

- از سوی دیگر اگر $u^2 - (2MG/a)$ منفی باشد، در این صورت سرعت v صفر می‌شود زمانی که

$$v = 0 \Rightarrow r = \frac{a}{1 - (u^2a/2MG)} \tag{۲۳.۶}$$

بعد از آن ذره به سمت O می‌افتد و نمی‌تواند بگریزد.

- حالت بحرانی که $u^2 = 2MG/a$ نیز ذره می‌تواند از میدان گرانشی بگریزد. بنابراین اگر و تنها اگر شرط زیر برای سرعت ذره برقرار باشد می‌تواند از میدان گرانشی رهایی یابد.

$$u^2 \geq \frac{2MG}{a} \tag{۲۴.۶}$$

تمرین: اگر ذره P را با تندی بحرانی $u^2 = 2MG/a$ از O پرتاب کنیم، در این صورت فاصله ذره P از O را برحسب تابعی از زمان به‌دست آورید و نشان دهید این معادله گریز ذره را نشان می‌دهد؟

مثال: ارتفاع بیشینه و نیز زمان مورد نیاز برای رسیدن به این ارتفاع را برای موردی که $u^2 = MG/a$ باشد را بیابید.

براین این مقدار از تندی، از رابطه ۲۱.۶ داریم

$$v^2 = MG\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{۲۵.۶}$$

بنابراین چون در $r = r_{max}$ سرعت $v = 0$ است، در نتیجه بیشینه فاصله از مبدا O برای ذره P، $r_{max} = 2a$ است. برای یافتن مدت زمان سپری شده، ما به جای سرعت $v = dr/dt$ می‌گذاریم و معادله دیفرانسیلی مرتبه اول زیر برای شرط اولیه $r = a$ در $t = 0$ را حل می‌کنیم.

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = MG\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{۲۶.۶}$$

بعد از گرفتن ریشه مثبت رادیکال هر دو طرف رابطه بالا (چون $dr/dt \geq 0$ در این حرکت است.) ، معادله به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\int_a^{2a} \left(\frac{ar}{2a-r}\right)^{1/2} dr = (MG)^{1/2} \int_0^{\tau} dt \tag{۲۷.۶}$$

با ساده‌سازی رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\tau = (MG)^{-1/2} \int_a^{2a} \left(\frac{ar}{2a-r}\right)^{1/2} dr \tag{۲۸.۶}$$

این انتگرال را می‌توان با جایگذاری یا تغییر متغیر $r = 2a \sin^2\theta$ حل کرد که جزئیات آن مهم نیست شما می‌توانید از طریق برنامه $Mathematica$ به‌دست آورید. بنابراین زمان سپری شده برای ذره P از $r = a$ تا $r = 2a$ ،

$$\tau = \left(\frac{a^3}{MG}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2}\pi\right) \tag{۲۹.۶}$$

است.

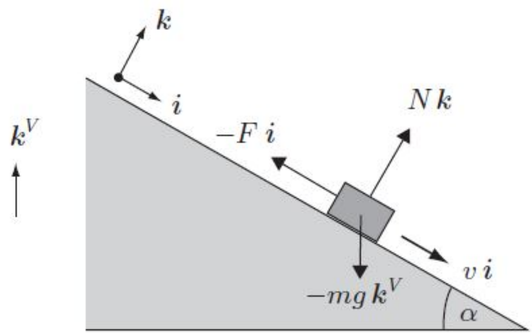
تمرین: سرعت فرار برای ماه چقدر است؟

تمرین: ذره P با جرم m به سمت مبدا ثابت O توسط نیروی به بزرگی $m\gamma/r^3$ کشیده می‌شود که r فاصله P از O و γ ثابتی مثبت هستند. در ابتدا ذره P در فاصله a از مبدا قرار دارد و سپس با تندی u پرتاب می‌شود. نشان دهید با شرط $u^2 > \gamma/a^2$ ذره می‌تواند از دام گرانشی بگریزد؟ برای موردی که $u^2 = \gamma/(2a^2)$ است، نشان دهید فاصله بیشینه از مبدا O برابر با $\sqrt{2}a$ است؟ همچنین مدت زمان رسیدن به این فاصله را حساب کنید؟

تمرین: اگر زمین به طور ناگهانی از چرخش حول خورشید بایستد، چه مدت زمان طول می‌کشد تا با خورشید برخورد کنید. راهنمایی شرط اولیه $r = R$ در زمان $t = 0$ است که R فاصله زمین تا خورشید است. همچنین دور تناوب گردش زمین به دور خورشید $\tau = 4\pi^2 R^3/(MG) \sim 365 days$ است.

۲.۶ حرکت مستقیم الخط مقید شده

در شکل ۳.۶ یک بلوک صلب مشتطیل شکل با جرم M در حال لغریدن روی سطح شیبدار یک گوه ثابت با زاویه α است. شرایط اولیه که فرض می‌شود این است که جسم بدون چرخش روی خط شیب گوه بلغزد. این بلوک تحت تاثیر نیروی گرانشی یکنواخت قرار دارد البته نیروهای دیگری نیز آشکارا وجود دارند. اگر نیروهای دیگری وجود نداشتند و بلوک از حالت سکون رها می‌شد، بلوک به صورت عمودی به سمت پایین حرکت می‌کرد. با این حال، اجسام جامد نمی‌توانند مانند شبح ها از یکدیگر عبور کنند و از گذار آنها، توسط نیروهای (موازی و خلاف جهت هم) که به یکدیگر وارد می‌کند، جلوگیری می‌شود. اینها نیروهای تماسی مادی هستند که تنها در موقعی که سطوح دو جسم باهم در تماس باشند ظهور پیدا می‌کنند. آنها مثال‌های از نیروهای قیدی هستند که از قبل مشخص نشده‌اند و برای تحمیل یک قید هندسی خاص کافی هستند. طبق سنت، نیروی قیدی که گوه به بلوک وارد می‌کند



شکل ۳.۶: لغزش یک بلوک روی سطح شیبدار. .

نیروی عکس‌العمل R نامیده می‌شود. شکل مناسب برای این نیرو با رابطه زیر بیان می‌شود.

$$\mathrm{R} = -F\mathrm{i} + N\mathrm{j} \tag{۳۰.۶}$$

که بردارهای واحد i و j به ترتیب عمود و موازی با شیب گوه هستند. همچنین اسکالر N موئلفه‌ی نرمال نیروی عکس‌العمل و F موئلفه‌ی اصطحکاک نیروی عکس‌العمل نامیده می‌شوند. معادله حرکت این بلوک با رابطه زیر داده می‌شود.

$$M\frac{d(v\mathrm{i})}{dt} = -mg\mathrm{k}^V + \mathrm{R} = -mg\mathrm{k}^V - F\mathrm{i} + N\mathrm{k} \tag{۳۱.۶}$$

که k^V بردار واحد عمودی به سمت بالا است. همچنین شما می‌توانید موئلفه‌های این بردار بر حسب بردارهای i و k بنویسید. با توجه به این نکته که $\mathrm{k}^V = -\sin\alpha\mathrm{i} + \cos\alpha\mathrm{k}$ داریم

$$M\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - F \tag{۳۲.۶}$$

و

$$0 = N - mg\cos\alpha \tag{۳۳.۶}$$

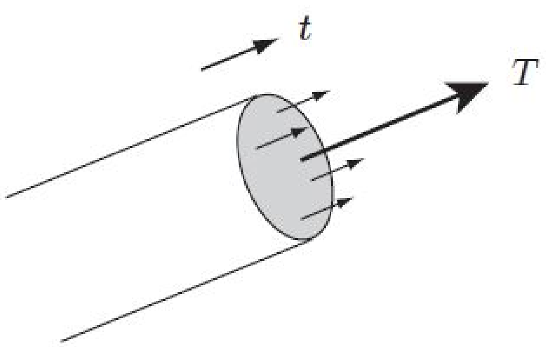
معادله دوم بزرگی نیروی عمودی را $N = mg\cos\alpha$ مشخص می‌کند. با این حال در معادله اول هم F و هم v مجهول هستند که مانع پیشرفت بیشتر در حل این مسئله می‌شوند. می‌توان با ارئه برخی از قانون اصحکاک تجربی پیش رفت ولی چنین قوانینی تقریبا برقرار هستند. از این رو جای تعجب نیست که در بشتر مسائل مکانیک از نیروی اصطحکاک صرف نظر می‌کنند. در این مورد، تمام نیروی عکس‌العمل وارد شده به بلوک از طرف سطح همان موئلفه نرمال (عمودی) است و چنین سطوحی را صیقلی یا کاملا صاف توصیف می‌کنیم. نادیده‌گرفتن اصطحکال این مزیت را دارد که به مسئله خوش تعریفی می‌دهد که می‌توان آن را حل کرد، با این وجود چنین حلی را با تقریب برای سطوح واقعی به کار خواهد رفت. اکنون اگر فرض کنیم سطح شیب‌دار گوه صیغلی باشد، بنابراین $F = 0$

است و معادله اول به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha \qquad (۳۴.۶)$$

در نتیجه در عدم حضور اصطحکاک، بلوک با شتاب ثابت $g\sin\alpha$ روی سطح سر می‌خورد.
تمرین: اگر نیروی اصحکاک را $F = \mu N$ در نظر بگیریم که μ ثابتی مثبت باشد، در این صورت شتاب بلوک را حساب کنید؟ و نشان دهید چرا موارد $\mu < \tan\alpha$ و $\mu > \tan\alpha$ با هم فرق می‌کنند.

۳.۶ طناب‌های غیر قابل کش آمدن

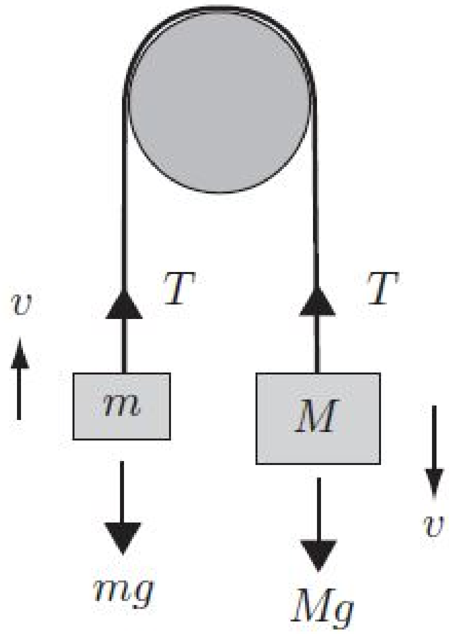


شکل ۴.۶: طناب ایده‌ال با یک سطح مقطع کوچک .

از دیگر مواردی که می‌تواند منجر به ظهور قیود هندسی شود، ریسمان‌های غیر قابل کش آمدن هستند. اگر یک ذره P از یک سیستم به نقطه ثابت O توسط یک طناب با طول a متصل شده باشد، اگر طناب کشیده شود ذره P مقید به حرکت است چنان چه فاصله $OP = a$ باشد. این قید هندسی توسط نیروی قیدی که طناب بر ذره وارد می‌کند، تحمیل می‌شود. طناب ایده‌الی که مد نظر ما است طنابی بینهایت نازک، محکم و بدون خم شدن و نیز غیر قابل کش آمدن است. تنها نیروی که یک بخش از طناب به بخش دیگر اعمال می‌کند تنش T در طناب است که موازی با بردار مماس t به طناب در هر نقطه وارد می‌شود (شکل ۴.۶ را ببینید). بدیعی است که به طور کلی T از نقطه‌ای به نقطه دیگر در طول طناب تغییر می‌کند. فرض کنید برای نمونه یک طناب جرم ρ بر واحد طول به طور عمودی تحت یک نیروی یکنواخت گرانشی آوریزان شده باشد. در این صورت چون تنش در انتهای پاینتر طناب صفر است، طناب در تعادل نخواهد ماند مگر تنش در ارتفاع z بالای پایینترین نقطه با $T = \rho g z$ داده شود که نشان دهنده رشد خطی تنش با ارتفاع است. این وضعیت زمانی که جرم طنب قابل چشم‌پوشی باشد، ساده‌تر خواهد شد، این بدان معناست که طناب سبک غیرقابل کش‌امدن است. در این مورد، به طور آشکاری تنش زمانی

که طناب کشیده (مستقیم) باشد، ثابت است. در حقیقت تنش همچنین زمانی که طناب روی جسم صافی (مانند قرقره) سر می‌خورد، ثابت باقی می‌ماند.

۱.۳.۶ ماشین آتوود



شکل ۵.۶: ماشین آتوود: دو جسم به جرم‌های m و M توسط طنابی به جرم ناچیز از روی قرقره آویزان شده اند .

دو جسم به جرم‌های m و M با یک طناب بدون جرم و غیر قابل کش آمدن از یک قره قره آویزان شده‌اند (شکل ۵.۶ را مشاهده کنید.). اگر این سیستم شروع به حرکت کند در این صورت شتاب مربوط به جسم m و تنش در طناب را بیابید؟ به علت اینکه طناب را کشیده فرض می کنیم بنابراین اگر میزان جابجا شدن جسم m در راستای قائم را x_1 و جابجایی جسم M را x_2 فرض کنیم. در این صورت همواره قید

$$x_1 + x_2 + L = constant \tag{۳۵.۶}$$

برقرار است که L طول طناب ست. حال با گرفتن مشتق از رابطه بالا ارتباط بین سرعت اجسام به دست می‌آید.

$$\dot{x}_1 = -\dot{x}_2 \Rightarrow v_1 = -v_2 = v \tag{۳۶.۶}$$

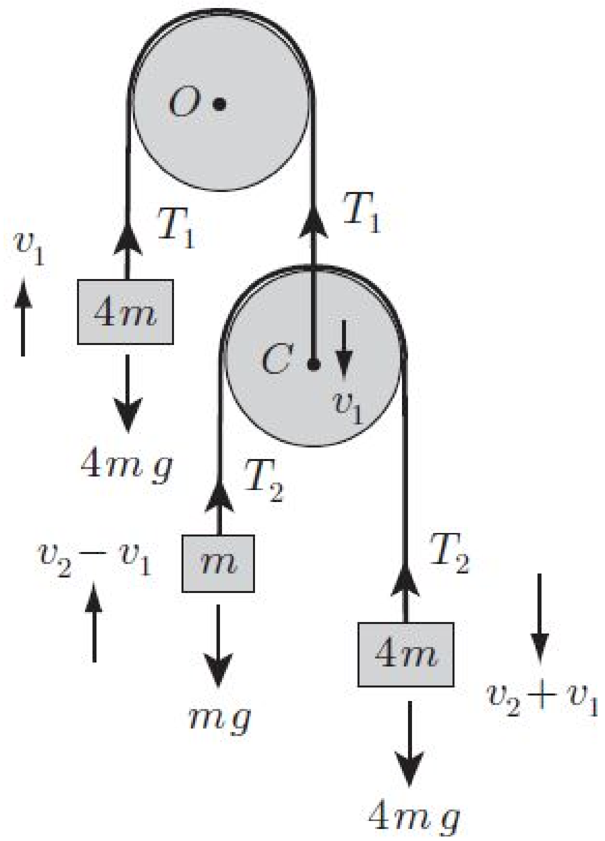
بنابراین معادله حرکت مربوط به هر یک از جرم‌ها به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$m\frac{dv}{dt} = T - mg \qquad M\frac{dv}{dt} = Mg - T \tag{۳۷.۶}$$

که در این صورت به رابطه‌ای زیر برای شتاب و تنش خواهیم رسید.

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)g \qquad T = \left(\frac{2Mm}{M+m}\right)g \qquad (۳۸.۶)$$

تمرین: در سیستمی متشکل از قرقره‌ها و طناب‌های با جرم ناچیز مطابق آنچه در شکل ۶.۶ نشان داده شده، شتاب

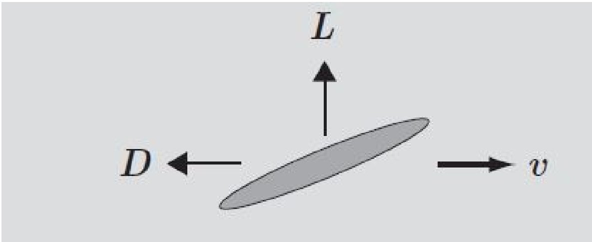


شکل ۶.۶: آرایشی از قرقره‌ها و جرم‌ها .

هر یک از اجسام را بیابید. برای سادگی روی شکل نیروها و سرعت‌ها رسم شده اند. بنابراین تنها لازم ست معادلات حرکت را بنویسید و از روی آن شتاب‌ها را به دست آورید.

۴.۶ حرکت در یک محیط مقاوم

زمانی که یک جسم درون یک سیال نظیر هوا و آب حرکت می‌کند، سیال نیرویی به سطح جسم وارد می‌کند. این به این علت است که جسم بایستی سیال را ز سر راه خود کنار بزند و برای این منظور حسم بایستی نیرویی به سیال وارد کند. بنابر قانون سوم، سیال نیز نیروی برابر و خلاف جهت به جسم وارد می‌کند. حتی شخصی که به آب می‌زند و یا موتورجت اسکی می‌کند نیز از وجود چنین نیروهایی آگاست. این نیروها در دسته نیروهای تماسی مادی



شکل ۷.۶: نمایشی از نیروی پس‌کشی و نیروی بالابرنده برای جسم متحرک در سیال .

طبقه‌بندی می‌شوند. چیزی که ما به آن علاقه‌مند هستیم نیروی برایند بر جسم است که از طرف سیال به آن وارد می‌شود که شکل مناسب آن به صورت

$$\mathrm{F} = \mathrm{D} + \mathrm{L} \tag{۳۹.۶}$$

است که بردار D نیروی پس‌کشی است که در خلاف جهت سرعت جسم وارد می‌شود و نیز L نیروی بالابرنده است که در زاویه قایم با سرعت قرار دارد (شکل ۷.۶ را مشاهده کنید.). وجود نیروی بالابرنده سبب می‌شود تا پرواز در هوا ممکن شود و مسلما نیروی مهمی است. با این وجود ما تنها نگرانیمان نیروی پس‌کشی است چون توجه خود را محدود به مواردی خواهیم کرد که در آن جسم یک جسم صلب که در راستای محور تقارنش حرکت می‌کند (البته بدون چرخش). در این مورد، نیروی بالابرنده با تقارن صفر است. بنابراین ما تنها نیروی پس کشی را در نظر می‌گیریم که در خلاف جهت سرعت جسم وارد می‌شود. تشخیص نظری نیروی های بالابرنده و نیروی پس کشی یکی از مسایل مهم حل نشده هیدرودینامیکی است و اغلب اطلاعات آن از طریق تجربه به‌دست آمده است. حتی برای مورد یک کره صلب در حال حرکت با سرعت ثابت در یک سیال تراکم‌ناپذیر، حل نظری کلی برای نیروی پس‌کشی در دسترس نیست. نیروی پس‌کشی برای این کره وابسته به شعاع کره a سرعت کره V و چگالی ρ و چسبندگی μ سیال است.

تمرین: با تحلیل ابعادی نشان دهید که نیروی پس کشی بری چنین کره‌ای با رابطه زیر داده می‌شود.

$$D = \rho a^2 V^2 F\left(\frac{\rho V a}{\mu}\right) \tag{۴۰.۶}$$

که F تابعی تنها از یک متغیر است.

تعریف: عدد رینلد: کمیت بدون بعد $R = /\mu$ را عدد رینلد می‌نامیم که معمولا به صورت $R = Va/v$ نوشته می‌شود که کمیت $v = \mu/rho$ ویسکوزیته جنبشی سیال است. تابع $F(R)$ هرگز به طور نظری محاسبه نشده است و اطلاعات آزمایشگاهی برای تعیین می‌بایستی استفاده شود. بسیار حیرت‌آور است که رنج وسیعی از اعداد برای R

وجود دارد ($1000 < R < 100000$) ولی تابع $F(R)$ تقریبا ثابت یافت می‌شود. با توجه به این تخمین،

رابطه نیروی پس‌کشی به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$D = C\rho a^2 V^2 \tag{۴۱.۶}$$

که C یک ثابت بدون بعد است و ضریب پس‌کشی نامیده می‌شود. همچنین مقدارش برای کره حدود $0/8$ است. به علت اینکه نیروی پس‌کشی متناسب با مجذور سرعت جسم در سیال است،این را معمولا قانون درجه دوم مقاومت می‌نامند. اما این قانون برای اعداد رینلد پایین برقرار نیست. از لحاظ تئوری استوکس با تحلیل جریان خرنده یک سیال از کره این مورد را نشان داده بود. استوکس اثبات کرد که وقتی $R \to 0$ می‌رود تابع $F(R) \sim 6\pi R$ است و بنابراین نیروی پس‌کشی به رابطه زیر کاهش می‌یابد.

$$D \sim 6\pi a\mu V \tag{۴۲.۶}$$

بنابراین در اعداد پایین رینلد نیروی پس‌کشی متناسب با سرعت جسم در سیال است که به این قانون خطی مقاومت گفته می‌شود.

مثال: یک بلبرینگ ضد زنگ از جنس استیل در حال افتادن به صورت عمودی با سرعت ثابت در هوا است. سرعت این بلبرینگ را محاسبه کنید (چگالی استیل ضد زنگ $7800kg/m^3$ است.). اگر فرض کنیم سرعت این بلبرینگ V باشد که ثابت است بنابراین شتاب آن صفر است و لذا نیروی برایند بر آن نیز بایستی صفر باشد. بنابراین

$$\sum_y F_y = ma_y = 0 \Rightarrow mg + D = m'g \tag{۴۳.۶}$$

است که m و m' به ترتیب جرم بلبرینگ و جرم سیال جابجا شده است. توجه داشته باشید که نیروی پس کشی به سمت بالا زیرا جسم به سمت پایین در حال سقوط است و نیز جمله $m'g$ نیروی گرانش وارد بر جسم و به سمت پایین است ولی جمله mg نیروی شناوری (ارشمیدوسی) است که به سمت بالا وارد می‌شود. (در هوا نیروی شناوری قابل صرف‌نظر کردن است). بنابراین اگر قانون مقاومت خطی برقرار باشد، داریم

$$6\pi a\rho v V = \frac{4}{3}\pi a^3 \Big(\rho' - \rho\Big) g \tag{۴۴.۶}$$

که a شعاع بلبرینگ و ρ و ρ' به ترتیب چگالی بلبرینگ و هوا هستند. با ساده سازی به رابطه زیر می‌رسیم.

$$V = \frac{2a^2 g}{9v}(\frac{\rho}{\rho'} - 1) \tag{۴۵.۶}$$

حال با توجه به مقادیر عددی آورده شده در جدول ۸.۶ مقدار سرعت $V = 940ms^{-1}$ است و مطابق با آن عدد رینلد $R = 63000$ است. جدا از این واقیت که این سرعت تقریبا برابر سرعت صوت است، تقریب قانون خطی به این علت رد می‌شود که عدد رینلد به دست آمده حدود ۱۰۰۰۰۰ برابر بشتر از عدد حد رینلد برای تقریب پایین رینلد است یعنی ($R \to 0$).

تمرین: اگر قانون مقاومت مرتبه دوم را لحاظ کنیم، برای سرعت چه مقداری به‌دست می‌اید؟ آیا در محدود

قابل دسترس عدد رینلد برای قانون درجه دوم است؟

تمرین: اگر این بلبرینگ در روغن سقوط می‌کرد کدام قانون درست بود؟

	Density ρ ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$)	Kinematic viscosity ν ($\mathrm{m^2s^{-1}}$)	Sound speed ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)
Air (20°C, 1 atm.)	1.20	1.50×10^{-5}	343
Water (20°C)	998	1.00×10^{-6}	1480
Castor oil (20°C)	950	1.04×10^{-3}	1420

شکل ۸.۶: برخی از خواص سیال مربوط به محاسبات نیروی پس‌کشی .

۵.۶ حرکت قائم تحت نیروی گرانش با مقاومت خطی

جسمی به طور قائم با سرعت u در محیطی که نیروی پس‌کشی $-mKv$ که K ثابتی مثبت و v سرعت جسم است، به آن وارد می‌کند به سمت بالا پرتاب می‌شود. ارتفاع بیشینه‌ای که جسم می‌تواند طی کند چقدر است؟ زمان سپری شده چقدر است؟ و سرعت نهایی آن چقدر است؟

حل: با در نظر گرفتن نیروی مقاومت خطی، معادله حرکت این جسم با رابطه زیر داده می‌شود.

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - mKv \tag{۴۶.۶}$$

با شرایط مرزی $v = u$ در $t = 0$ همان‌گونه که در شکل ۱.۶ نشان داده شده است. این معادله دیفرانسی مرتبه اول به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\int \frac{dv}{g+Kv} = -\int dt \Rightarrow \frac{1}{K}\ln\Big(g+Kv\Big) = -t + C \tag{۴۷.۶}$$

که C ثبت انتگرال‌گیری است. با اعمال شرایط اولیه $v = u$ در $t = 0$ ، $C = K^{-1}\ln\Big(g+Ku\Big)$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$t = \frac{1}{K}\ln\Big(\frac{g+Ku}{g+Kv}\Big) \tag{۴۸.۶}$$

است که زمان سپری شده برای رسیدن به نقطه اوج جایی که $v = 0$ است با رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$\tau = \frac{1}{K}\ln\Big(1+\frac{Ku}{g}\Big) \tag{۴۹.۶}$$

با وارون کردن رابطه t بر حسب سرعت v ، سرعت تابعی از زمان را می‌توان

$$v = ue^{-Kt} - \frac{g}{K}\Big(1-e^{-Kt}\Big) \tag{۵۰.۶}$$

نوشت. سرعت نهایی جسم حد اندازه سرعت در زمان $t \to \infty$ است در این صورت $v \to -\frac{g}{K}$ سرعت نهایی است. این سرعت را نیز می‌توان از معادله حرکت نیز استخراج کرد زمانی که dv/dt را در معادله حرکت قرار می‌دهیم $0 = -mg - mKv$ را داریم که سرعت حدی را همان مقدار محاسبه شده می‌دهد.

تمرین: با استفاده از رابطه ۴۶.۶ و استفاده از رابطه

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \times \frac{dz}{dt} = v\frac{dv}{dz} \tag{۵۱.۶}$$

ابتدا مکان جسم را بیابید و سپس ارتفاع بیشینه را حساب کنید؟ که رابطه آن به صورت زیر است.

$$z_{max} = \frac{u}{K} - \frac{g}{K^2}\ln\left(1 + \frac{Ku}{g}\right) \tag{۵۲.۶}$$

تمرین: مقدار تقریبی z_{max} زمانی که Ku/g کوچک باشد را به‌دست آورید؟ راهنمایی از بسط تیلور بهره ببرید.

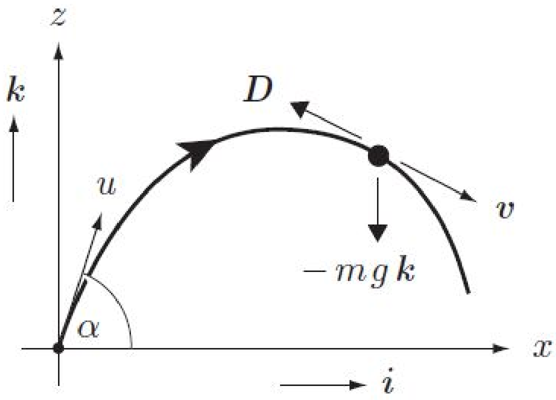
۶.۶ پرتابه‌ها

جسمی که آزادانه تحت نیروی گرانشی یکنواخت و احتمالا مقاومت هوا حرکت می‌کند پرتابه نامیده می‌شود. حرکت پرتابی خیلی حرکت معمولی است مثلا در بازی های با توپ، توپ یک پرتابه اس و کنترل مسیراش بخش مهمی از مهارت بازی به شمار می‌رود. در مقایس‌های بزرگتر توپخانه‌ها پرتابه هستند اما موشک‌های هدایت شوند که دارای پیشرانه‌ی موشک هستند، پرتابه نیستند. مسئله پرتابه از مسائل قبلی که مربوط به پرتابه در راستای قائم متفوت است زیر محدود به حرکت فقط در راستای قائم نیست. با این وجود، فرض خواهیم کرد اثر هوا منجر به ایجاد نیروی پش‌کشی در خلاف جهت سرعت پرتابه می‌شود. با تقارن مشهود است که حرکت پرتابه در صفحه عمودی اتفاق می‌افتد و چنین صفحه‌ای شامل مکان اولیه پرتابه و موازی با سرعت اولیه پرتابه است.

۱.۶.۶ حرکت پرتابه بدون مقاومت

اولین و ساده‌ترین مسئله بررسی پرتابه متحرک بدون در نظر گرفتن مقاومت هوا است. چنین وضعتی در ماه به نظر مناسب است ولی با قدری تخمین بر روی زمین بکار گرفته می‌شود. اثر مقاومت هوا می‌تواند خیلی حائز اهمیت باشد همان‌گونه که در مثال‌های بعدی نشان خواهیم داد. ذره‌ای که تحت نیروی یکنواخت گرانشی قرار دارد با سرعت اولیه u که با راستای افق زاویه α می‌سازد، پرتاب می‌شود. مسیر بعدی این پرتابه را بیابید؟ فرض کنید حرکت در صفحه $(x-z)$ اتفاق بیافتد همانطور که در شکل ۹.۶ رسم شده است. در غیاب نیروی پس‌کشی، معادله حرکت برداری

$$m\frac{d\mathrm{v}}{dt} = -mg\mathrm{k} \tag{۵۳.۶}$$



شکل ۹.۶: حرکت پرتابی .

است که شرایط اولیه $\mathrm{v} = (u\cos\alpha)\mathrm{i} + (u\sin\alpha)\mathrm{k}$ در زمان $t = 0$ است. حال اگر بردار سرعت را به صورت $\mathrm{v} = v_x\mathrm{i}+v_z\mathrm{k}$ بنویسیم، موئلفه‌های معادله حرکت در راستاهای i و k به دو معادله حرکت اسکالر زیر جدا می‌شود.

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \qquad \frac{dv_z}{dt} = -g \tag{۵۴.۶}$$

تمرین: با اعمال شرایط اولیه $v_x = u\cos\alpha$ و $v_y = u\sin\alpha$ در $t = 0$ موئلفه‌های سرعت را تابعی از زمان به‌دست آورید؟ همچنین با اعمال شرط اولیه در مکان یعنی $z = 0$ در زمان $t = 0$ موئلفه‌های مکانی حرکت را بیابید؟

تمرین: معادله مسیر حرکت در صفحه $x - z$ را استخراج کنید و نشان دهید این معادله یک مسیر سهمی است. و سرانجام برد و ارتفاع اوج را برای این حرکت به‌دست آورید؟ راهنمایی: می‌توانید از جزوه من در درس فیزیک یک بهره ببرید.

تمرین: شماره تمرین ۴.۲۳ از کتاب را حل کنید؟ راهنمایی: با قرار دادن $(x, z) = (a, b)$ در معادله مسیر تمرین قبلی به یک معدله درجه دوم برای $\tan(\alpha)$ خواهید رسید. اکنون با به‌دست آوردن Δ برای این معادله می‌توانید شرط خواسته شده را محاسبه کنید.

۲.۶.۶ حرکت پرتابه با مقاومت‌های خطی

اگر پرتابه تحت تاثیر نیروی گرانشی یکنواخت و نیز نیروی مقاومت خطی $-mKv$ قرار دارد که v سرعت ذره است. در ابتدا ذره با سرعت u که با افق زاویه α می‌سازد پرتاب می‌شود. حرکت بعدی این پرتابه را بیابید؟

برای این مورد، معادله برداری حرکت به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$m\frac{d\mathrm{v}}{dt} = -mK\mathrm{v} - mg\mathrm{k} \qquad (۵۵.۶)$$

که شرط اولیه $\mathrm{v} = (u\cos\alpha)\mathrm{i} + (u\sin\alpha)\mathrm{k}$ در زمان $t = 0$ بر آن اعمال می‌شود. حال می‌توان در راستاهای مختلف معادله‌های حرکت اسکالر را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{dv_x}{dt} + Kv_x = 0 \qquad \frac{dv_z}{dt} + Kv_z = -g \qquad (۵۶.۶)$$

این معادله دیفرانسیلی درجه اول را می‌توان با در نظر گرفتن $v_x = Ce^{qt}$ و $v_z = Q + Ce^{qt}$ که Q حل ویژه است، می‌توان موئلفه‌های سرعت را به صورت زیر محاسبه نمود.

$$v_x = (u\cos\alpha)e^{-Kt} \qquad v_z = (u\sin\alpha)e^{-Kt} - \frac{g}{K}(1 - e^{-Kt}) \qquad (۵۷.۶)$$

اثبات: با قرار دادن $v_x = Ce^{qt}$ در معادله حرکت مربوط به v_x داریم،

$$C(q+K)e^{qt} = 0 \Rightarrow q = -K \qquad (۵۸.۶)$$

اکنون با اعمال شرط اولیه

$$v_x = u\cos\alpha \Rightarrow C = u\cos\alpha \qquad (۵۹.۶)$$

حال برای v_z با قرار دادن $g = 0$ حل عمومی به صورت $v_z = Ce^{-Kt}$ بدست می‌اوریم ولی به علت اینکه معادله حرکت دارای چشمه ($g \neq 0$) است، لذا جواب کلی دارای یک جواب ویژه نیز می‌شود، یعنی

$$v_z = Ce^{-Kt} + v_p \qquad (۶۰.۶)$$

حال برای به‌دست آوردن جواب ویژه بایستی $\frac{dv_z}{dt} = 0$ قرار داد , و با فرض $v_z = v_q$ در این صورت

$$v_q = -g \qquad (۶۱.۶)$$

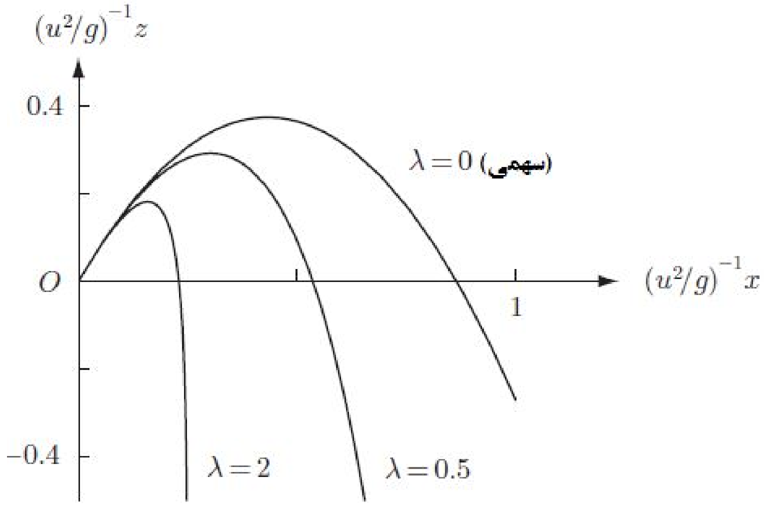
حاصل می‌شود. حال با اعمال شرایط اولیه $v_z = u\sin\alpha$ در $t = 0$ و قرار دادن $v_z = Ce^{-Kt} - g$ در معادله حرکت سرانجام به رابطه ۵۷.۶ خواهیم رسید.

تمرین: اکنون با داشتن روابط بالا نشان دهید با اعمال شرط اولیه $x = z = 0$ در $t = 0$ موئلفه‌های مکانی به صورت زیر حاصل می‌شوند.

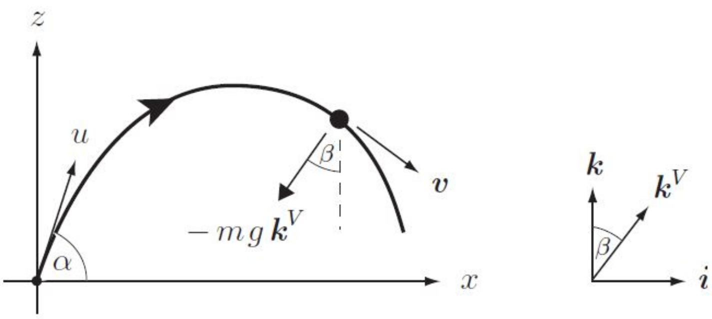
$$x = \frac{u\cos\alpha}{K}\left(1 - e^{-Kt}\right) \qquad z = \frac{Ku\sin\alpha + g}{K^2}\left(1 - e^{-Kt}\right) - \frac{g}{K}t \qquad (۶۲.۶)$$

با در نظر گرفتن متغیر بدون بعد $\lambda = Ku/g$ مسیر حرکت این ذره برای مقادیر مختلف λ در شکل ۱۰.۶ رسم شده است که $\lambda = 0$ همان مسیر ذره در غیاب مقاومت را نشان می‌دهد ولی هر چه مقاومت بیشتر می‌شود (یعنی λ افزایش می‌یابد) اثرات ناامید کننده‌ای را روی پرتابه بر جای می‌گذارد.

تمرین: اگر مطابق شکل ۱۱.۶ نیروی گرانشی ثابت با زاویه β به جسم وارد شد، در این صورت مکان برخورد این



شکل ۱۰.۶: حرکت پرتابه در نیروی گرانشی یکنواخت و مقاومت خطی. در شکل مسیر مربوط به ذره برای $\alpha=\pi/3$ و نیز سه مقدرا متفاوت برای پارامتر بدون بعد $\lambda(=Ku/g)$ رسم شده است. .



شکل ۱۱.۶: حرکت پرتابه در نیروی گرانشی یکنواخت .

جسم زمانی که با زاویه α و با سرعت اولیه u پرتاب می‌شود، را بیابید؟ اگر R^U و R^D مربوط برد بیشینه در رنج زاویه $0\le\alpha\le\pi$ باشد، نشان دهید که رابطه زیر برقرار است؟

$$\frac{R^U}{R_D}=\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta} \tag{۶۳.۶}$$

۷.۶ حرکت دایره‌ای

فرض کنید ذره‌ای به جرم m تحت جاذبه گرانشی از یک جسم به جرم M واقع در مبدا قرار دارد. نشان دهید مسیر چرخش برای این جسم دایره‌ای شکل است؟ سرعت این ذره در این مدار را بیابید؟ در این صورت دوره تناوب

چرخش چقدر است؟ در مختصات قطبی شتاب ذره با رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$\mathrm{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} \tag{۶۴.۶}$$

حال به این علت که ذره در مسیر دایره‌ای با شعاع مشخص R و با سرعت $v=R\dot{\theta}$ می‌چرخد، بنابراین

$$\mathrm{a}=-\frac{v^2}{R}\hat{r}+\dot{v}\hat{\theta} \tag{۶۵.۶}$$

در این صورت معدله حرکت برای ذره به صورت زیر داده می‌شود.

$$m\mathrm{a}=\mathrm{F}\Rightarrow m\Big[-\frac{v^2}{R}\hat{r}+\dot{v}\hat{\theta}\Big]=-\frac{mMG}{R^2}\hat{r} \tag{۶۶.۶}$$

حال با جداسازی موئلفه‌ها به روابط

$$\frac{v^2}{R}=\frac{MG}{R^2} \qquad \dot{v}=0 \tag{۶۷.۶}$$

می‌رسیم. این روابط نشان می‌دهند که ذره با سرعت ثابت ($\dot{v}=0\Rightarrow v=constant$) که مقدار آن

$$v^2=\frac{MG}{R} \tag{۶۸.۶}$$

است، مسیر دایره‌ای به شعاع R را تضمین می‌کند (چون در حرکت دایره‌ای یکنواخت سرعت ثابت بود.) همچنین دوره تناوب این چرخش

$$\tau=\frac{2\pi R}{v}=\Big(\frac{4\pi^2R^3}{MG}\Big)^{1/2} \tag{۶۹.۶}$$

است.

مثال: معادله حرکت مربوط به پاندلم نشان داده شده در شکل ۱۲.۶ که در آن ذره P توسط میله‌ای با جرم ناچیز به نقطه ثابت O متصل شده است، را بیابید؟

با توجه به شکل، شتب مربوط به این ذره با ربطه زیر داده خواهد شد.

$$\mathrm{a}=-(b\dot{\theta}^2)\hat{r}+(b\ddot{\theta})\hat{\theta} \tag{۷۰.۶}$$

در این صورت معادله حرکت ذره

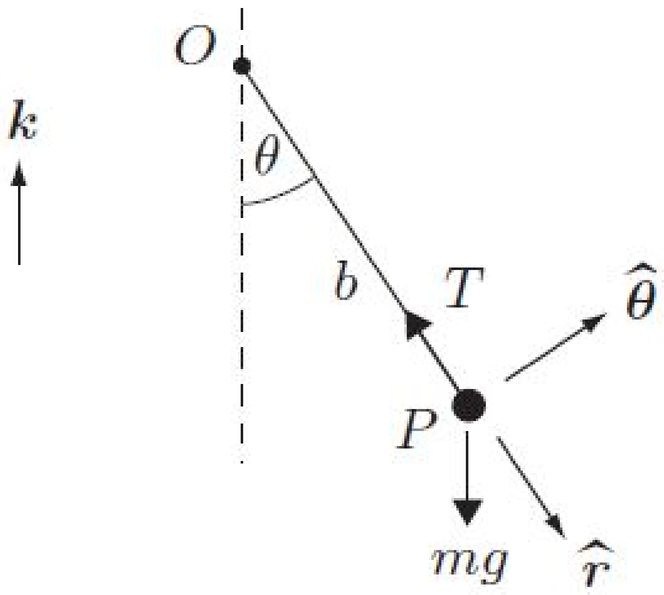
$$m\Big[-(b\dot{\theta}^2)\hat{r}+(b\ddot{\theta})\hat{\theta}\Big]=-mg\mathrm{k}-T\hat{r} \tag{۷۱.۶}$$

است و چون بردر یکه k را می‌توان در راستای‌های بردار یکه‌های قطبی به صورت زیر نوشت

$$\mathrm{k}=-\cos\theta\hat{r}+\sin\theta\hat{\theta} \tag{۷۲.۶}$$

بنابراین معادلات حرکت به صورت زیر در هر دو راستا نوشته خواهند شد.

$$-mb\dot{\theta}^2=mg\cos\theta-T \qquad mb\ddot{\theta}=-mg\sin\theta \tag{۷۳.۶}$$



شکل ۱۲.۶: یک پاندولم ساده .

از رابطه دوم با ساده‌سازی به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{b}\sin\theta = 0 \tag{۷۴.۶}$$

به علت وجود $\sin\theta$ در این رابطه این رابطه یک مهادله دیفرانسیلی درجه دوم خطی نمی‌باشد (خطی به این معنی که اگر $\theta \to \lambda\theta$ شما می‌توانید یک ضریب λ که ثابت است از کل معادله فاکتور بگیرید.) ولی در زاویه‌های نوسانی خیلی کوچک، این معادله به رابط زیر کاهش می‌یابد.

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{b}\right)\theta = 0 \tag{۷۵.۶}$$

این معدله یک معادله خطی است. در فصل ۵ این کتاب نشان خواهیم داد که دوره تناوب برای این پاندولم

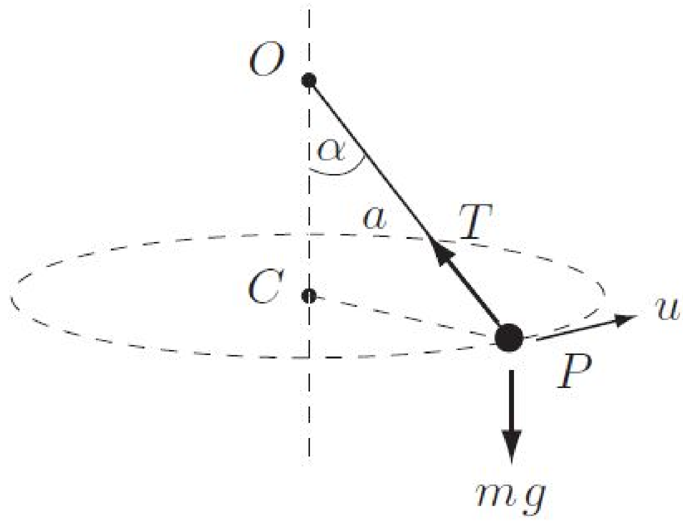
$$\tau = 2\pi(b/g)^{1/2} \tag{۷۶.۶}$$

است.

تمرین: مطابق شکل ۱۳.۶ پاندولمی مقید به حرکت مخروطی است. نشان دهید سرعت ذره در این نوع حرکت

$$u^2 = ag\sin\alpha\tan\alpha \tag{۷۷.۶}$$

است. راهنمایی: اگر راستای عمودی را k بگیرید ذره در راستای عمودی حرکتی ندارد و همچنین ذره در راستای محور PC نیز حرکتی ندارد.



شکل ۱۳.۶: یک پاندولم مخروطی .

۸.۶ ذره باردار در میدان مغناطیسی

فرض کنید ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی e در یک میدان مغناطیسی ثابت B_0 حرکت می‌کند. نشان دهید کلی‌ترین حرکت این ذره مارپیچی است که محور آن موازی با جهت میدان مغناطیسی است؟ همانطور که می‌دانید نیروی لورنسی F اعمال شده بر ذره‌ی بارداری در میدان الکتریکی E و B با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\mathrm{F} = e\mathrm{E} + e\mathrm{v} \times \mathrm{B} \tag{۷۸.۶}$$

که v بردار سرعت ذره است. مسئله ما در غیاب میدان الکتریکی است همچنین جهت میدان را در جهت محور z یعنی $\mathrm{B} = B_0\mathrm{k}$ قرار می‌دهیم. در این صورت داریم

$$m\frac{dv}{dt} = eB_0\mathrm{v} \times \mathrm{k} \tag{۷۹.۶}$$

اگر بردار سرعت را بر حسب موئلفه‌هایش یعنی $\mathrm{v} = v_x\mathrm{i} + v_y\mathrm{j} + v_z\mathrm{k}$ بنوسیم، می‌توان معادله حرکت را به صورت زیر جداسازی نمود.

$$\frac{dv_x}{dt} = \Omega v_y \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\Omega v_x \qquad \frac{dv_z}{dt} = 0 \tag{۸۰.۶}$$

که $\Omega = eB_0/m$ است. معادله آخر نشان می‌دهد که $v_z = V$ که V ثابت است. همچنین معادلات اول و دوم معادلات جفت شده از مرتبه یک هستند. با گرفتن مشتق زمانی از رابطه اول و قرار دادن رابطه دوم در آن به معادله

دیفرانسیلی مرتبه دوم زیر می‌رسیم

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \Omega^2 v_x = 0 \tag{۸۱.۶}$$

که حل این معادله به صورت

$$v_x = A\sin(\Omega t + \alpha) \tag{۸۲.۶}$$

است که A و α دو ثابت دلخواه هستند.

تمرین :با فرض $A = -R\Omega$ موئلفه‌های مسیر حرکت یعنی (x, y, z) را به‌دست آورید؟

۰ درسنامه مکانیک کلاسیک

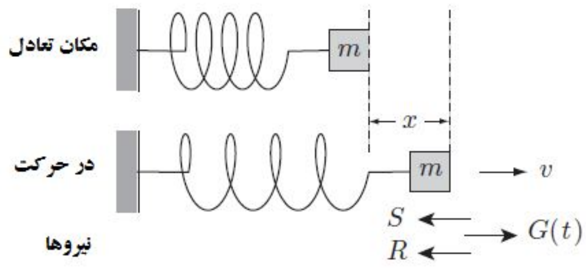
فصل ۷

نوسانات خطی و مدهای نرمال

در این فصل ویژگی‌های نوسان‌های میرا، غیر میرا و نیز نوسانگرهای تحریک شده و جفت شده را بررسی خواهیم نمود. نوسانگرها یک قسمت مهمی از مکانیک بشمار می‌روند و فیزیک آنها به طور کامل شناخته شده است. علت این امر، گستردگی و اهمیت عملی مسائل نوسانات در مکانیک است. در این فصل نظریه خطی کلاسیکی نوسانات را مورد مطالعه قرار می‌دهیم به دو دلیل عمده: اولا نظریه خطی معمولا تقریب خوبی از حرکت نوسانگر زمانی که دامنه نوسانات کوچک باشد را به ما می‌دهد و ثانیا اکثر مسائل قابل حل به فرم بسته هستند. اهمیت حقیقیت اخر را نبایستی دست کم گرفت. ما این نظریه خطی را در مورد نوسانات حاصل از جسم متصل شده به فنر گسترش خواهیم داد، اما معادلات مشابهی برای مسائل گوناگون در مکانیک و سرتاسر فیزیک قابل استفاده است. در ادامه این فصل، نیازمند حل معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم با ضرایب ثابت هستیم.

۱.۷ جسم متصل به فنر

فرض کنید جسمی به جرم m به ته فنری با جرم ناچیز متصل شده است. طرف دیگر فنر به نقطه ثابت شده A که روی یک میز افقی صاف وصل شده است و جسم روی میز در امتداد خط مستقیم که از نقطه A می‌گذرد، می‌لغزد. اجازه دهید x جابجایی و v سرعت جسم در زمان t همانطور که در شکل ۱.۷ نشان داده شده، باشند. توجه داشته باشید که x از نقطه تعادلی جسم اندازه‌گیری می‌شود. . اکنون نیروهای وارد بر جسم را در نظر بگیرید. زمانی که فنر کشیده می‌شود، فنر نیروی بازگرداننده S در جهت مخالف این کشیدگی وارد می‌کند. همچنین جسم نیز ممکن است تحت تاثیر نیروی مقاومتی R که در جهت مخالف سرعت جسم اعمال می‌شود، قرار گیرد. سرانجام ممکن است نیروی محرکه خارجی $G(t)$ که تابع مشخصی از زمان است نیز وجود داشته باشد. در این صورت معادله



شکل ۱.۷: جسم m به یکی از انتهای فنر سبک متصل شده است و در راستای مستقیم حرکت می‌کند .

حرکت با رابطه زیر داده می‌شود.

$$m\frac{dv}{dt} = -S - R + G(t) \tag{۱.۷}$$

نیروی بازگرداننده S با طراحی فنر و نیز مقدار کشیدگی x تعیین می‌گردد. برای فنرهای به اندازه کافی کوچک رابطه میان S و x تقریبا خطی است، یعنی

$$S = \alpha x \tag{۲.۷}$$

که α ثابتی مثبت است که ثابت فنر (یا قدرت) نامیده می‌شود. فنر قوی، مانند آنهایی که در سیستم تعلیق خودرو بکار گرفته می‌شوند دارای α بزرگی هستند، در حالی که فنر پشت زنگ در، α کوچکی دارد. معادله ۲.۷ را قانون هوک و فنری که دقیقا از این قانون تبعیت می‌کند را فنر خطی می نامند. نیروی مقاومت R به فرایند فیزیکی که سبب مقاومت می‌شود، وابسته است. برای مقاومت سیال، قانون خطی یا مجذوری بودن مقاومت که در فصل ۴ کتاب توضیح دادیم، می‌توانند در اینجا مناسب باشند. به هر حال، هیچ کدام از این قوانین نیروی اصطحکاک وارد شده از طرف سطح به جسم را نمایش نمی‌دهند. در این بخش فرض می‌کنیم قانون خطی مقاومت، یعنی

$$R = \beta v \tag{۳.۷}$$

برقرار باشد که β ثابت مقاومت نامیده می‌شود که ثابتی مثبت است و در واقع معیاری از قدرت مقاومت بشمار می‌رود. هیچ نکته‌ای در کتمان این حقیقت وجود ندارد که دلیل اصلی ما برای فرض مقاومت خطی به همراه قانون هوک این است که معادله حرکت منتج شده را می‌توان به طور صریح حل کرد. در این صورت، با در نظر گرفتن قانون هوک و مقاومت خطی، معادله حرکت

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + \alpha x = G(t) \tag{۴.۷}$$

است. با تعریف متغییرهای زیر

$$\alpha = m\Omega \qquad \beta = 2mK \qquad F(t) = G(t)/m \tag{۵.۷}$$

به رابطه دیفرانسیلی مرتبه دوم زیر خواهیم رسید.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2K\frac{dx}{dt} + \Omega^2 x = F(t) \tag{۶.۷}$$

این معادله‌ی حرکت استانداردی برای جسم است که معدله حرکت برای نوسانگر خطی میرا گفته می‌شود. همچنین زمانی که $F(t)$ وجود ندارد نوسانات را آزاد و در حضور آن، نوسانات را رانده شده می‌نامیم.

۱.۱.۷ حرکت نوسانی ساده کلاسیکی

نوسانگر خطی که هم غیر میرا و هم رانده نشده باشد را اصطلاحا نوسانگر خطی کلاسیکی می‌نامند که ساده‌ترین مدل ممکن است اما مسما مهمترین سیستم فیزکی محسوب می‌شود. بنابراین برای این مورد، معدله حرکت به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \Omega^2 x = 0 \tag{۷.۷}$$

برای حل این معادله $x = e^{\lambda t}$ در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم

$$\lambda^2 + \Omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\Omega \tag{۸.۷}$$

که منجر به حل‌های مختلط زیر می‌شود.

$$x = e^{\pm i\omega t} \tag{۹.۷}$$

که قسمت‌های حقیقی و موهومی حل مختلط اول به ترتیب $x = \cos\Omega t$ و $x = \sin\Omega t$ هستند. در این صورت حل حقیقی کلی از معادله نوسانگر هماهنگ ساده

$$x = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t \tag{۱۰.۷}$$

است که A و B ثابت های حقیقی هستند. اکنون با تعریف تغییر متغییرهای زیر

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \tan\gamma = B/A \tag{۱۱.۷}$$

رابطه بالا را می‌توان به شکل دیگر مانند

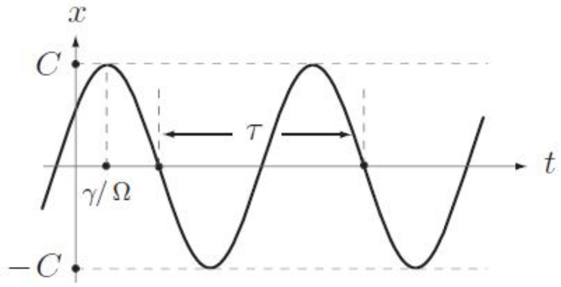
$$x = C\cos(\Omega t - \gamma) \tag{۱۲.۷}$$

نوشت که C و γ ثابت‌های دلخواه حقیقی با $C > 0$ هستند. همچنین همانگونه که در شکل ۲.۷ نشان داده شده دوره تناوب برای این نوسان با رابطه

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} \tag{۱۳.۷}$$

داده می‌شود که کمیت Ω فرکانس زاویه‌ای است که با رابطه $\Omega = 2\pi\nu$ به فرکانس ν مربوط می‌شود.

۲.۷ جسم متصل به فنر



شکل ۲.۷: حرکت ساده نوسانی کلاسیک .

مثال: نوسانگری را فرض کنید که در آن جسمی به جرم m توسط فنری با جرم ناچیز به طور عمودی اویزان شده است. اگر در لحظه تعادل فنر به اندازه b کشیده شده باشد، در این صورت دوره نوسانات عمودی جسم حول نقطه تعادلی را بیابید. اگر جسم به طور ناگهانی تحت ضربه‌ای با سرعت u به سمت بالا پرتاب شود در این صورت حرکت بعدی جسم را بیابید؟ا در لحظه تعادل نیروی گرانشی با نیروی بازگرداننده فنر برابر هستند، یعنی

$$\alpha b = mg \Rightarrow \alpha = mg/b \tag{۱۴.۷}$$

حال اگر در راستای عمودی فنر به اندازه $b+z$ کشیده شود در نتیجه $\alpha(b+z) = g(b+z)/b$ است. لذا معادله حرکت با رابطه زیر داده می‌شود.

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - \frac{mg(b+z)}{b} \tag{۱۵.۷}$$

که با ساده‌سازی به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{g}{b}\right)z = 0 \tag{۱۶.۷}$$

در این صورت با مقایسه با معادله نوسانگر ساده ۷.۷ ، $\Omega^2 = g/b$ و دوره تناوب

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\left(\frac{b}{g}\right) \tag{۱۷.۷}$$

به دست می‌آید. همچنین با اعمال شرایط اولیه $z(t=0) = 0$ و نیز $\dot{z}(t=0) = u$ حرکت بعدی جسم به صورت زیر است.

$$x = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t \Rightarrow x = -\frac{u}{\Omega}\sin\Omega t \tag{۱۸.۷}$$

تمرین: شماره تمرین‌های ۱ و ۳ فصل ۵ کتاب را حل کنید؟

مثال: دو جسم به جرم M و m کوچک را توسط یک فنر با طول طبیعی $8a$ به یکدیگر وصل شده‌اند را به صورت عمودی قرار می‌دهیم. زمانی سیستم در حال تعادل است که جسم M روی میز و طول فنر $7a$ باشد. حال جسم

بالای را فشار می‌دهیم تا فنر به میزان نصف طول طبیعی خود فشرده شود و سپس آن را رها می‌کنیم. نشان دهید جسم پایینتر اگر $M < 2m$ باشد از سطح میز جدا می‌شود؟ برای موردی که $M = 3m$ باشد، زمانی که جسم پایینی سطح میز را ترک می‌کند چقدر است؟

به علت اینکه فنر زمانی که به اندازه $-a$ فشرده می‌شود نیروی بازگرداننده mg را بری غلبه بر گرانش بایستی وارد کند بنابراین ثابت فنر با رابطه زیر داده خواهد شد.

$$\alpha = \frac{mg}{a} \tag{۱۹.۷}$$

توجه داشته باشد در حال تعادل طول فنر از $8a$ به $7a$ کاهش یافته یعنی به اندازه $-a$ اگر جهت منفی را به سمت پایین بگیریم، فشرده شده است. اجازه دهید x را میزان جابجایی جسم بالای در نظر بگیریم، در این صورت تا زمانی که جسم پایینی سطح را ترک نکرده، معادله حرکت به صورت زیر است.

$$m\ddot{x} + \alpha x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \Omega^2 x = 0 \tag{۲۰.۷}$$

که $\Omega = (g/a)^{1/2}$ است. لذا حل کلی معدله دیفرانسیلی بالا با

$$x = A\cos\omega t + B\sin\Omega t \tag{۲۱.۷}$$

داده می‌شود. با اعمال شرایط اولیه $x(t=0) = -3a$ و $\dot{x}(t=0) = 0$ مقادیر $A = -3a$ و $B = 0$ به‌دست می‌آیند. بنابراین خواهیم داشت،

$$x = -3a\cos\Omega t \tag{۲۲.۷}$$

در زمان t اگر میزان فشردگی فنر $x - a$ باشد در این صورت تنش فنر با رابطه

$$T = \alpha(x-a) = -\frac{mg}{a}(3\cos\Omega t + a) \tag{۲۳.۷}$$

این تنش به سمت بالا به جسم پایینی نیز وارد می‌شود در این صورت جسم پایینی تا زمانی که $T \leq Mg$ باشد از میز جدا نخواهد شد، یعنی

$$-mg(3\cos\Omega t + 1) \leq Mg \tag{۲۴.۷}$$

به علت اینکه برد تابع $\cos\Omega t$ در بازه $[-1,1]$ است، بنابراین رنج قابل قبول طرف چپ رابطه بالا میان $[-4mg, 2mg]$ است. در این صورت برای حالت $M \geq 2mg$ جسم دوم هرگز از میز جدا نمی‌شود ولی برای حالت $M < 2m$ جسم پایینی از میز جدا خواهد شد. برای حالت $M = \frac{3}{2}m$ شرط $-mg(3\cos\Omega t + 1) = Mg$ به رابطه زیر کاهش می‌یابد.

$$6\cos\Omega t = -5 \Rightarrow t = \left(\frac{a}{g}\right)^{1/2}\cos^{-1}(\frac{-5}{6}) \tag{۲۵.۷}$$

که t زمانی است که جسم پایینی میز را ترک می‌کند.

۳.۷ حرکت نوسانی ساده میرا

زمانی که میرایی حضور داشته باشد اما نیروی خارجی نباش، شکل کلی معادله ۶.۷ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2K\frac{dx}{dt} + \Omega^2 x = 0 \tag{۲۶.۷}$$

که برای حل این معادله دیفرانسیلی با $x = e^{\lambda t}$ داده می‌شود که λ در معدله زیر صدق می‌کند.

$$\lambda^2 + 2K\lambda + \Omega^2 = 0 \Rightarrow (\lambda + K)^2 = K^2 - \Omega^2 \tag{۲۷.۷}$$

که بسته به اینکه $K < \Omega$ ، $K = \Omega$ و $K > \Omega$ باشد حالت‌های مختلفی وجود دارد.

۱.۳.۷ زیر میرایی(زیر میرایی بحرانی)

در مورد زیر میرایی با $K < \Omega$ معادله حاکم بر λ را به صورت زیر می‌نوسیم.

$$(\lambda + K)^2 = -\Omega_D^2 \tag{۲۸.۷}$$

که $\Omega_D^2 = (\Omega^2 - K^2)^{1/2}$ یک عدد حقیقی مثبت است. بنابراین مقادیر λ به صورت $\lambda = -K \pm i\Omega_D$ خواهند بود و نیز جفت جواب مختلط با

$$x = e^{-Kt}e^{\pm i\Omega_D t} \tag{۲۹.۷}$$

هستند که تشکیل پایه‌ای برای فضای حل‌های مختلط می‌دهند. قسمت‌های حقیقی و موهومی اولین جواب مختلط

$$x = \begin{cases} e^{Kt}\cos\Omega_D t \\ e^{Kt}\sin\Omega_D t \end{cases} \tag{۳۰.۷}$$

هستند و این توابع پایه‌ی فضای حل‌های حقیقی را تشکیل می‌دهند. بنابراین حل حقیقی کلی از نوسانگر ساده میرا به شکل زیر داده خواهد شد.

$$x = e^{-Kt}(A\cos\Omega_D t + B\sin\Omega_D t) \tag{۳۱.۷}$$

که A و B ثابت‌های دلخواه حقیقی هستند. حل کلی را می‌توان به شکل دیگر نیز نوشت،

$$x = Ce^{-Kt}\cos(\Omega_D t - \gamma) \tag{۳۲.۷}$$

که C و γ ثابت‌های حقیقی دلخواه با این قید که $C > 0$ هستند.همانطور که از شکل این معادله پیداست دامنه نوسانات با گذشت زمان با دامنه Ce^{-Kt} یعنی به طور نمایی کاهش می‌یابد (شکل ۳.۷ را ببینید.) همچنین دوره

تناوب این نوسانات با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega_D} = \frac{2\pi}{(\Omega^2 - K^2)^{1/2}} \qquad (۳۳.۷)$$

۲.۳.۷ فوق میرایی (فوق میرایی بحرانی)

در این مورد $K > \Omega$ فرض می‌شود بنابراین معادله λ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$(\lambda + K)^2 = \delta^2 \qquad (۳۴.۷)$$

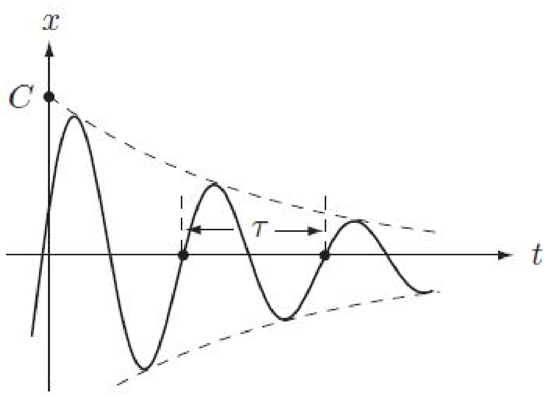
که $\delta^2 = (K^2 - \Omega^2)$ یک عدد حقیقی مثبت است. در این صورت مقادیر λ ، $\lambda = -K \pm \delta$ است که حقیقی هستند. و نیز جفت جواب‌های حقیقی به صورت

$$x = e^{-Kt} e^{\pm \delta t} \qquad (۳۵.۷)$$

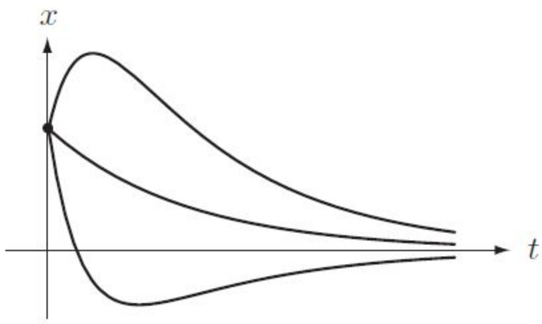
پایه‌ای برای فضای حل‌های حقیقی بشمار می‌روند. حل حقیقی کلی نوسانگر میرا در این مورد با رابطه زیر قابل توصیف است.

$$x = e^{-Kt}(Ae^{\delta t} + Be^{-\delta t}) \qquad (۳۶.۷)$$

که A و B ثابت‌های دلخواه حقیقی هستند. همانطور که در شکل ۴.۷ نشان داده شده است در حالت فوق بحرانی هیچ گونه نوسانی صورت نمی‌گیرد. برای مثال زمانی که جسم از حالت سکون رها می‌شود سپس به سادگی به سمت نقطه تعادلی باز می‌گردد. از سوی دیگر اگر با سرعت کافی به سمت نقطه تعادلی پرتاب شود سپس بعد از یکبار عبور از نقطه تعادل دوباره به سمت نقطه تعادلی از سمت دیگر باز می‌گردد.



شکل ۳.۷: حرکت نوسانی ساده‌ی زیر میرایی .



شکل ۴.۷: حرکت نوسانی ساده‌ی فوق میرایی .

۳.۳.۷ میرایی بحرانی

زمانی که $K = \Omega$ باشد مانند حالت فوق بحرانی نوسانی صورت نمی‌پذیرد.
تمرین: برای مورد بحرانی حل کلی را بیابد؟

۴.۷ حرکت نوسانی واداشته

اکنون اثر نیروی محرکه بیرونی $G(t)$ که فرض می‌کنیم تابع مشخصی از زمان است را در نظر می‌گیریم. منشا نیروی محرکه هرچه که باشد، معادله حاکم بر حرکت واداشته به صورت زیر داده خواهد شد.

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2K\frac{dx}{dt} + \Omega^2 x = F(t) \tag{۳۷.۷}$$

اکنون نیروی محرکه خارجی را نیروی نوسانی زمانی به شکل

$$F(t) = F_0 \cos pt \tag{۳۸.۷}$$

انتخاب می‌کنیم که F_0 و p ثابت‌های مثبت و نیز mF_0 دامنه نیروی نوسانی اعمال شده و نیز p فرکانس زاویه‌ای آن هستند. با قرار دادن چنین نیروهای در معادله حرکت داریم،

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2K\frac{dx}{dt} + \Omega^2 x = F_0 e^{ipt} \tag{۳۹.۷}$$

توجه کنید که در این رابطه ما شکل مختلط تابع $F_0 \cos(ipt)$ یعنی $F_0 e^{ipt}$ را انتخاب کرده‌ایم. اکنون تقاضا می‌کنیم حل مختلط زیر حل ویژه (حل خصوصی) این معادله دیفرانسیلی باشد.

$$x = ce^{ipt} \tag{۴۰.۷}$$

که c ثابت مختلط است که آن را دامنه مختلط می‌نامند. با قرار دادن این حل در معادله ۳۹.۷ خواهیم داشت

$$c = \frac{F_0}{\Omega^2 - p^2 + 2iKp} \tag{۴۱.۷}$$

بنابراین تابع مختلط زیر به عنوان حل ویژه ۳۹.۷ در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{F_0 e^{ipt}}{\Omega^2 - p^2 + 2iKp} \tag{۴۲.۷}$$

در واقع قسمت حقیقی این حل، حل ویژه است که به صورت

$$x^D = a\cos(pt - \gamma) \tag{۴۳.۷}$$

نوشته می‌شود که $a = |c| = (cc^*)^{1/2}$ و $\gamma = -\arg c$ هستند که به ترتیب دامنه پاسخ محرکه و زاویه فاز نامیده می‌شوند. بنابراین

$$a = \frac{F_0}{((\Omega^2 - p^2)^2 + 4K^2p^2)^{1/2}} \qquad \tan\gamma = \frac{2Kp}{\Omega^2 - p^2} \qquad 0 < \gamma \leq \pi \tag{۴۴.۷}$$

اما حل کلی معادله ۳۹.۷ به صورت زیر می‌باشد.

$$x = x^D + x^{CF} = a\cos(pt - \gamma) + x^{CF} \tag{۴۵.۷}$$

که x^{CF} تابع مکمل (پاسخ گذرا: زیرا در تمام حالت‌های گفته شده برای نوسانگر میرا با گذشت زمان دامنه نوسانات به سمت صفر میل می‌کند.) است که حل کلی برای مسئله نوسانگر غی واداشته است. به عبارت دیگر حل معادله ۲۶.۷ است.

مثال: معادله دیفرانسیلی یک نوسانگر میرای واداشته به صورت زیر است.

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 10\cos t \tag{۴۶.۷}$$

و در ابتدا در مبدا ساکن است. حرکت بعدی این نوسانگر را بیابید؟

ابتدا برای یافتن حل ویژه x^D این معادله آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 10e^{it} \tag{۴۷.۷}$$

و تقاضا داریم حل به شکل $x = ce^{it}$ باشد. با قرار دادن آن در معادله بالا ثابت حل به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$c = \frac{10}{1 + 3i} = 1 - 3i \tag{۴۸.۷}$$

در این صورت حل ویژه با گرفتن قسمت حقیقی با رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$x^D = \mathcal{R}[(1 - 3i)e^{it}] = \cos t + 3\sin t \tag{۴۹.۷}$$

از سوی دیگر برای یافتن حل مکمل بایستی رابطه زیر را در نظر بگیریم.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0 \tag{۵۰.۷}$$

که به سادگی حل آن

$$x=Ae^{-t}+Be^{-2t} \tag{۵۱.۷}$$

است (به قسمت نوسانات میرای غیر واداشته مراجعه کنید.). بنابراین حل کلی به شکل

$$x=\cos t+3\sin t+Ae^{-t}+Be^{-2t} \tag{۵۲.۷}$$

است. با در نظر گرفتن شرایط اولیه $x(t=0)=0$ و نیز $\dot{x}(t=0)=0$ به روابط زیر می‌رسیم.

$$0=1+A+B \tag{۵۳.۷}$$

$$0=3-A-2B \tag{۵۴.۷}$$

که با حل این معادلات $A=-5$ و $B=4$ به‌دست می‌آید. بنابراین حرکت نوسانی بعدی به صورت

$$x=\cos t+3\sin t-5e^{-t}+4e^{-2t} \tag{۵۵.۷}$$

است. در این صورت دامنه پاسخ محرکه $a=(1^2+3^2)^{1/2}=\sqrt{10}$ و تاخیر فاز (زاویه فاز) $\gamma=\tan^{-1}(3/1)\sim 72^o$ هستند.

تمرین: مسئله شماره ۱۰ فصل ۵ کتاب را حل کنید؟ نمودار لازم نیست.

۵.۷ تشدید در یک سیستم نوسانی

همانطور که قبلا اشاره کردیم در رابطه کلی

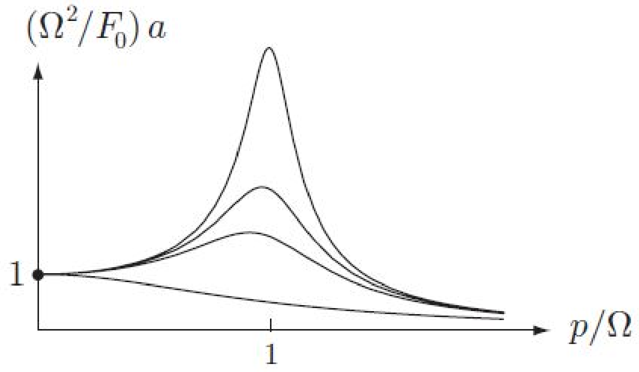
$$a=\frac{F_0}{((\Omega^2-p^2)^2+4K^2p^2)^{1/2}} \tag{۵۶.۷}$$

دامنه a پاسخ محرکه به نیروی $mF_0\cos pt$ است. حال فرض کنید دامنه نیروی اعمال شده، ثابت فنر و فرکانس زاویه‌ای ثابت باشند و تنها p در رابطه بالا تغییر کند. لذا a تابعی فقط از p است. حال به دنبال این سوال هستیم که به ازای چه مقدار از p بزرگترین دامنه پاسخ محرکه اتفاق می‌افتد؟ برای پاسخ اجازه دهید

$$f(p)=(\Omega^2-p^2)^2+4K^2p^2 \tag{۵۷.۷}$$

را تعریف کنیم در این صورت $a=\frac{F_0}{\sqrt{f(p)}}$ است که بیشنه آن در نقاط کمینه $f(p)$ اتفاق می‌افتد، یعنی

$$f'(q)=-2(\Omega^2-q)+4K^2=2(q-(\Omega^2-2K^2)) \tag{۵۸.۷}$$



شکل ۵.۷: دامنه بدون بعد $(F_0/\Omega^2)a$ بر حسب فرکانس محرکه p/Ω برای مقادیر $K/\Omega = 0/1, 0/2, 0/3, 1$ از بالا به پایین. .

به طوری که برای $q < \Omega^2 - 2K^2$، $f(q)$ کاهش می‌یابد و برای $q > \Omega^2 - 2K^2$، افزایش می‌یابد. بنابراین $f(q)$ یک نقطه کمینه در $q = \Omega^2 - 2K^2$ دارد. این دو مورد به اینکه این مقدار مثبت یا منفی باشد، بستگی دارد.

مورد اول: وقتی $\Omega^2 > 2K^2$ نقطه $q = \Omega^2 - 2K^2$ مثبت و a مقدار بیشینه اش را دارد زمانی که $p = p^R$ که

$$p^R = (\Omega^2 - 2K^2)^{1/2} \qquad (۵۹.۷)$$

است که به آن فرکانس تشدید می‌گویند در این صورت دامنه پاسخ محرکه

$$a_{max} = \frac{F_0}{2K(\Omega^2 - K^2)^{1/2}} \qquad (۶۰.۷)$$

است.

مورد دوم: وقتی $\Omega^2 \le 2K^2$ باشد، a تابعی صعودی از p است به طوری که برای $p > 0$ تابع a بیشینه ندارد. این نتایج در شکل ۵.۷ نشان داده شده است. اینها مثال‌های از پدیده کاملا فیزیکی به نام تشدید هستند که می‌توان یک بیان نه نسبتا کامل از آن را به صورت زیر بیان کرد.

- پدیده تشدید: فرض کنید در غیاب میرایی یک سیستم فیزیکی بتواند نوسانات آزاد با فرکانس زاویه‌ای Ω انجام دهد. سپس نیروی محرک با فرکانس زاویه‌ای p یک پاسخ بزرگ در سیستم القا خواهند نمود مادامی که p به Ω نزدیک باشد که خود منجر می‌شود تا میرایی خیلی بزرگ نباشد.

این اصل تنها به سیستم‌های مکانیکی که ما در اینجا مطالعه می کنیم محدود نمی‌شود بلکه این یک اصل کلی فیزیکی است که برای مثال برای نوسانات جریان الکتریکی در مدارها و نیز نوسانات مکانیک کوانتومی از اتم‌ها نیز استفاده می‌شود. توجه دشته باشید فرکانس p^R همیشه کمتر، اما نزدیک به Ω زمانی که K/Ω کوچک باشد،

است. بلندترین پیک تشدید یعنی a_{max} به طور تقریبی با

$$a_{max} = \frac{F_0}{2K\Omega(1-\frac{K^2}{\Omega^2})^{1/2}} \sim \frac{F_0\Omega}{2K\Omega^2}\Big(1+\frac{K^2}{2\Omega^2}\Big) \sim \frac{F_0}{2\Omega^2}\Big(\frac{K}{\Omega}\Big)^{-1} \tag{۶۱.۷}$$

بنابراین در حدی که $\frac{K}{\Omega}$ کوچک باشد، a_{max} به سمت بینهایت میل می‌کند. در همین حد، پهنای پیک تشدید مستقیما متناسب با $\frac{K}{\Omega}$ است و در نتیجه به سمت صفر میل می‌کند. (نکته رابطه ۶۰.۷ نشان می‌دهد که تابع a_{max} لورنسی است بنابراین به راحتی می‌توان دید پهنای پیک آن $\frac{K}{\Omega}$ است.)

۶.۷ نیروهای محرکه تناوبی عام

روشی که تاکنون برای نیروهای نوسانی زمانی بکار برده‌ایم را می‌توان به هر نیرو تناوبی (دوره‌ای) $mf(t)$ نیز بسط داد. تابع $f(t)$ با دوره تناوب τ را دوره‌ای گفته می‌شود اگر شکل تابع f در هر دوره تناوب τ مجددا تکرار شود مثلا تابع سیسنوس یک تابع تناوبی یا پریودیک است زیرا بعد از دوره تناوب 2π دوباره در بازه 2π بعدی تکرار می‌شود. برای مثال در شکل ۶.۷ می‌توان دید که تابع موج مربعی در بازه 2π دوباره تکرار می‌شود. روشی که برای بسط چنین توابعی نیازمند آن هستیم سری فوریه است. برای نیروهای محرکه‌ی که دوره تناوب آنها 2π است می‌توان از سری فوریه زیر استفاده کرد.

- نظریه فوریه: این نظریه بیان می‌کند که هر تابع $f(t)$ متناوب با دوره تناوب 2π را می‌توان به عنوان یک سری فوریه به شکل

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt \tag{۶۲.۷}$$

نوشت که

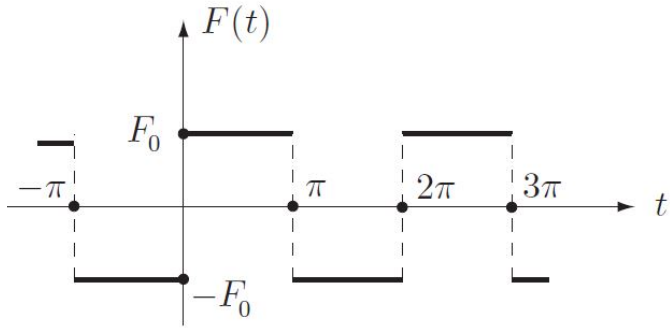
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt \tag{۶۳.۷}$$

ضرایب بسط هستند. این بسط نشان می‌دهد که هر تابع $f(t)$ با دوره تناوب 2π را می‌توان به صورت جمعی از توابع هارمونیک زمانی که هر یک دوره تناوب 2π دارند، بیان کرد. (توابع مثلثاتی توابع هارمونیک هستند.)

همانطور که در رابطه بالا پیداست اگر $f(t)$ یک تابع فرد باشد، a_n و a_0 صفر هستند و همچنین اگر تابع زوج باشد ضریب‌های b_n صفر هستند.

مثال: نیروی محرکه غیر هارمونیک تناوبی: پاسخ محرکه برای یک نوسانگر خطی میرا با معادله حرکت

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2K\frac{dx}{dt} + \Omega^2 x = F(t) \tag{۶۴.۷}$$



شکل ۶.۷: موج مربعی .

برای موردی که $F(t)$ با دوره تناوب 2π به شکل

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & (0 < t < \pi) \\ -F_0 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases} \tag{۶۵.۷}$$

است (شکل ۶.۷) را بیابید؟

برای یافتن سری فوریه این تابع بایستی ضرایب بسط را مشخص کنیم. همانطور که از شکل تابع پیداست تابعی فرد است یعنی نسبت به مبدا مختصات قرینه است در این صورت می‌توان دید،

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-F_0)\cos ntdt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(+F_0)\cos ntdt = 0 \tag{۶۶.۷}$$

است. لازم به ذکر است که برای یافتن a_0 کافی است در رابطه بالا $n = 0$ بگذارید. همچنین انتگرال های زیر نیز مفید هستند.

$$\int \sin ntdt = -\frac{\cos nt}{n} \qquad \int \cos ntdt = \frac{\sin nt}{n} \tag{۶۷.۷}$$

از طرفی دیگر،

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-F_0)\sin ntdt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(+F_0)\sin ntdt \\ &= \frac{2F_0}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin ntdt = \frac{2F_0}{\pi}\Big[-\frac{\cos nt}{n}\Big]_0^{\pi} = \frac{F_0}{\pi}\Big(\frac{1-\cos n\pi}{n}\Big) = \frac{2F_0}{\pi}\Big(\frac{1-(-1)^n}{n}\Big) \end{aligned} \tag{۶۸.۷}$$

است. بنابراین بسط فوریه تابع $F(t)$ به صورت زیر داده می‌شود.

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2F_0}{\pi}\Big(\frac{1-(-1)^n}{n}\Big)\sin nt \tag{۶۹.۷}$$

مرحله بعد یافتن پاسخ محرکه نوسانگر به نیروی $m(b_n \sin nt)$ است، برای این منظور ابتدا معادله دیفرانسیلی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2K\frac{dx}{dt} + \Omega^2 x = b_n e^{int} \tag{۷۰.۷}$$

حل ویژه را به صورت ce^{int} فرض می‌کنیم که با قرار دادن آن در رابطه بالا به رابطه زیر برای c می‌رسیم.

$$c = \frac{b_n}{\Omega^2 - n^2 + 2iK} \tag{۷۱.۷}$$

به علت اینکه به جواب‌های حقیقی نیاز داریم بایستی قسمت حقیقی رابطه بالا را به دست آوریم.

$$\mathcal{R}\Big(\frac{b_n e^{int}}{\Omega^2 - n^2 + 2iKn}\Big) = b_n\Big(\frac{(\Omega^2 - n^2)\sin nt + 2Kn\cos nt}{(\Omega^2 - n^2)^2 + 4K^2n^2}\Big) \tag{۷۲.۷}$$

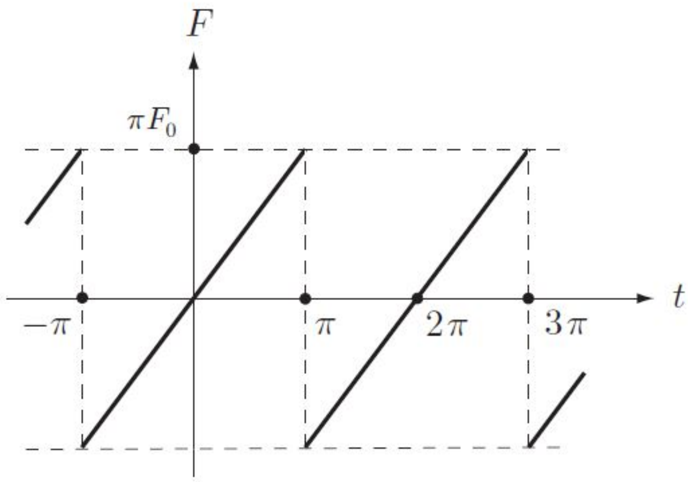
تمرین: رابطه بالا را استخراج کنید. راهنمایی قسمت حقیقی و قسمت موهومی تابع مختلط $z = x + iy$ با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\mathcal{R}(z) = x = \frac{z + z^*}{2} \qquad \mathcal{I}(z) = y = \frac{z - z^*}{2i} \tag{۷۳.۷}$$

اکنون پاسخ محرک نوسانگر به نیرو با رابطه زیر داده می‌شود.

$$x = \frac{2F_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1-(-1)^n}{n}\Big)\Big(\frac{(\Omega^2 - n^2)\sin nt + 2Kn\cos nt}{(\Omega^2 - n^2)^2 + 4K^2n^2}\Big) \tag{۷۴.۷}$$

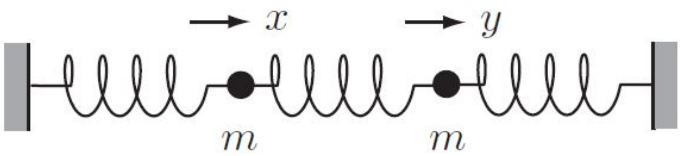
تمرین: پاسخ محرکت نوسانگر به تابع تناوبی زیر را بیابید؟ شکل ۷.۷ را مشاهده نمایید.



شکل ۷.۷: تابع دندان اره‌ای .

$$F(t) = F_0 t \qquad (-\pi < t < \pi) \tag{۷۵.۷}$$

۷.۷ نوسانگرهای جفت شده و مدهای نرمال



شکل ۸.۷: دو ذره میان سه فنر که نوسانات طولی دارند به یکدیگر متصل شده‌اند .

همانطور که در شکل ۸.۷ نشان داده شده دو جسم به جرم یکسان m توسط سه فنر متصل شده‌اند که به این مجموعه نوسانگرهای جفت شده می‌گوییم زیرا نوسان آنها بر هم تاثیر می‌گذارد. اجازه دهید x و y را جابجایی دو جسم از نقاط تعادلیشان در نظر بگیریم. به علت اینکه تنها به این دو مختصه برای توصیف این سیستم نیازمندیم بنابراین درجه آزادی این سیستم دو است. همچنین در زمان t به ترتیب از چپ به راست فنرها به اندازه x ، $y-x$ و $-y$ فشرده یا کشیده می‌شوند. اگر فرض کنیم ثابت‌های فنر به ترتیب از چپ به راست α ، 2α و 4α باشد در این صورت نیروی بزگرداننده آنها به ترتیب αx ، $2\alpha(y-x)$ و $-4\alpha y$ است. بنابراین معادله حرکت برای این دو جسم با رابطه‌های زیر داده می‌شود.

$$m\ddot{x} = -\alpha x + 2\alpha(y-x) \tag{۷۶.۷}$$

$$m\ddot{y} = -2\alpha(y-x) - 4\alpha y \tag{۷۷.۷}$$

که آنها را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$\ddot{x} + 3n^2x - 2n^2y = 0 \tag{۷۸.۷}$$

$$\ddot{y} - 2n^2x + 6n^2y = 0 \tag{۷۹.۷}$$

که $n^2 = \alpha/m$ ثابتی مثبت است. همانطور که پیداست این دو معادله دو معادله دیفرانسیلی خطی همگن مرتبه دوم هستند که با یکدیگر جفت شده‌اند (منظور از جفت شدن این است که هر معادله تنها تابعی از یک متغییر نیست بلکه دو متغییر در دو معادله حضور دارند.). برای حل این معادلات فرض جواب‌های x و y به صورت زیر باشند.

$$x = A\cos(\omega t - \gamma) \tag{۸۰.۷}$$

$$y = B\cos(\omega t - \gamma) \tag{۸۱.۷}$$

توجه داشته باشد که تمام مختصات که پیکربندی سیستم را تعیین می‌کنند به طور هماهنگ در زمان با فرکانس یکسان و فاز یکسان تغییر می‌کنند اما دامنه آنها به طور کلی با یکدیگر متفاوت است. حال با قرار دادن حل‌های بالا در معادلات ۷۸.۷ به روابط زیر می‌رسیم.

$$-\omega^2 A\cos(\omega t-\gamma) + 3n^2 A\cos(\omega t-\gamma) - 2n^2 B\cos(\omega t-\gamma) = 0 \qquad (۸۲.۷)$$

$$-\omega^2 B\cos(\omega t-\gamma) - 2n^2 A\cos(\omega t-\gamma) + 6n^2 B\cos(\omega t-\gamma) = 0 \qquad (۸۳.۷)$$

که با ساده‌سازی داریم

$$(3n^2-\omega^2)A - 2n^2 B = 0 \qquad (۸۴.۷)$$

$$-2n^2 A + (6n^2-\omega^2)B = 0 \qquad (۸۵.۷)$$

که اینها معادلات جبری خطی چند مجهولی برای دامنه‌های A و B هستند. به علت اینکه این معادلات همگن هستند یک حل بدیعی $A = B = 0$ است. به هر حال این حل مربوط به نقطه تعادلی $x = y = 0$ است. اکنون حل غیربدیعی را بایستی به‌دست آوریم. برای این منظور شرط ساده‌ای وجود دارد و آن این است که دترمینان ضرایب بایستی صفر باشد در این صورت

$$det\begin{pmatrix} 3n^2-\omega^2 & -2n^2 \\ -2n^2 & 6n^2-\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (۸۶.۷)$$

که بعد از ساده‌سازی به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\omega^4 - 9n^2\omega^2 + 14n^4 = 0 \qquad (۸۷.۷)$$

یک معادله درجه دوم نسبت به ω^2 است. که جواب‌های آن

$$\omega_1^2 = 2n^2 \qquad \omega_2^2 = 7n^2 \qquad (۸۸.۷)$$

بنابراین دو مد نرمال با فرکانس‌های $\sqrt{2}n$ و $\sqrt{7}n$ وجود دارد که به فرکانس‌های نرمال برای سیستم‌های نوسانی شناخته می‌شوند. با انتخاب مد آهسته یعنی $\omega^2 = 2n^2$ معادلات ۸۴.۷ به رابطه زیر تبدیل می‌شوند.

$$n^2 A - 2n^2 B = 0 \qquad (۸۹.۷)$$

$$-2n^2 A + 4n^2 B = 0 \qquad (۹۰.۷)$$

حل این روابطه منجر به $A = 2B$ می‌شود. در این صورت با فرض $A = 2\delta$ و $B = \delta$ که δ مقداری غیر صفر

است، به مدهای نرمال آهسته زیر خواهیم رسید.

$$x = 2\delta\cos(\sqrt{2}nt-\gamma) \quad (۹۱.۷)$$

$$y = \delta\cos(\sqrt{2}nt-\gamma) \quad (۹۲.۷)$$

تمرین: نشان دهید برای حالت مدهای سریع یعنی $\omega^2=7n^2$ مدهای نرمال به صورت زیر داده می‌شوند.

$$x = \delta\cos(\sqrt{7}nt-\gamma) \quad (۹۳.۷)$$

$$y = -2\delta\cos(\sqrt{7}nt-\gamma) \quad (۹۴.۷)$$

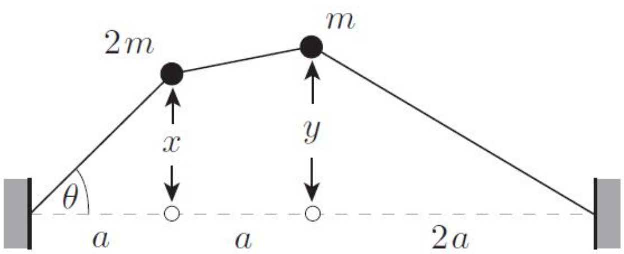
اکنون حل کلی برای این سیستم نوسانی

$$x = 2\delta_1\cos(\sqrt{2}nt-\gamma_1)+\delta_2\cos(\sqrt{7}nt-\gamma_2) \quad (۹۵.۷)$$

$$y = \delta_1\cos(\sqrt{2}nt-\gamma_1)-2\delta_2\cos(\sqrt{7}nt-\gamma_2) \quad (۹۶.۷)$$

توجه داشته باشید برای به به‌دست آوردن ثابت‌های $(\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2)$ نیاز مند چهار شرط اولیه $x,y,\dot{x},\dot{y}$ در زمان $t=0$ هستیم.

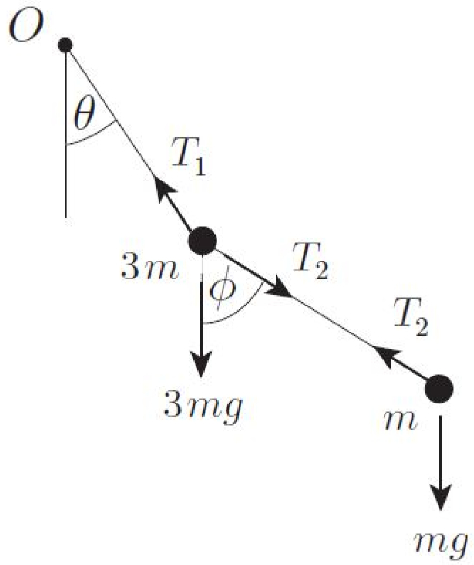
تمرین: سیستمی از نوسانگرهای عرضی در شکل ۹.۷ نشان داده شده است. ذرات P و Q به جرم‌های $2m$ و m



شکل ۹.۷: دو ذره با طناب سبکی که نوسانات کوچک عرضی دارد متصل شده‌اند. .

توسط طنابی با جرم ناچیز و با تنش T_0 به یکدیگر متصل شده‌اند. برای زوایای نوسانی کوچک، فرکانس‌های نرمال و مدهای نرمال و نیز حل کلی را بیابید؟

مثال: مطابق شکل ۱۰.۷ جسم P به جرم $3m$ آویزان از نقطه ثابت O توسط یک طناب با جرم ناچیز و به طول a آویزان شده است. ذره دوم Q با جرم m بعد از آن توسط طناب دیگری به طول a متصل شده است. سیستم در



شکل ۷.۱۰: پاندولم دو تایی .

صفحه عموری گذارنده از O حرکت می‌کند. نشان دهید برای نوسانات کوچک به معادلات زیر خواهیم رسید؟

$$3\ddot{\theta} \quad + \quad 4n^2\theta - n^2\phi = 0 \tag{۹۷.۷}$$

$$\ddot{\theta} \quad + \quad \ddot{\phi} + n^2\phi = 0 \tag{۹۸.۷}$$

که θ و ϕ زوایای نوسان هستند و نیز $n^2 = g/a$ است. اجازه دهید x_1 و x_2 جابجایی‌های افقی و نیز z_1 و z_2 جابجای‌های عمودی باشند. در این صورت معادلات حرکت برای جسم P به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$3m\ddot{x}_1 = T_2 \sin\phi - T_1 \sin\Theta \qquad 3m\ddot{z}_1 = T_1\cos\theta - T_2\cos\phi - 3mg \tag{۹۹.۷}$$

همچنین برای جسم Q معادلات حرکت به شکل زیر هستند.

$$m\ddot{x}_2 = -T_2\sin\phi \qquad m\ddot{z}_2 = T_2\cos\phi - mg \tag{۱۰۰.۷}$$

در تقریب خطی

$$x_1 \quad = \quad a\sin\theta \sim a\theta \qquad x_2 = a\sin\theta + a\sin\phi \sim a(\theta+\phi) \tag{۱۰۱.۷}$$

$$z_1 \quad = \quad a\cos\theta \sim a \qquad z_2 = a\cos\theta + a\cos\phi \sim 2a \tag{۱۰۲.۷}$$

هستند (رابطه بالا نشان می‌دهد جابجایی در راستای عمودی قابل چشم‌پوشی است.). بنابراین داریم

$$3ma\ddot{\theta} = T_2\phi - T_1\theta \qquad 0 = T_1 - T_2 - 3mg \tag{۱۰۳.۷}$$

$$ma(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) = -T_2\phi \qquad 0 = T_2 - mg \tag{۱۰۴.۷}$$

از روابط بالا می‌توان دید $T_2 = mg$ و $T_1 = 4mg$ است. حال بعد از انجام عملیات جبری به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$3\ddot{\theta} \;\; + \;\; 4n^2\theta - n^2\phi = 0 \tag{۱۰۵.۷}$$

$$\ddot{\theta} \;\; + \;\; \ddot{\phi} + n^2\phi = 0 \tag{۱۰۶.۷}$$

تمرین: فرکانس‌های نرمال و مدهای نرمال برای مثال بالا را به‌دست آورید؟

فصل ۸

پایستگی انرژی

در این فصل اصل انرژی برای یک ذره، میدان نیروهای پایستار، انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این فصل مفهومی از انرژی مکانیکی و بقای آن نیز معرفی می‌شود. علیرغم اینکه روش‌های انرژی هرگز برای حل مثال ضروری نیستند ولی آنها یک دید وسیعتری برای حل بسیاری از مسائل با روشی سریع و ظریف را به ما می‌دهند. انرژی نقشی پایه‌ای در فرمولبندی لاگرانژی و هامیتونی در مکانیک را اجرا می‌کند. به طور کلی، مفهوم انرژی به طور فزاینده‌ای گسترش یافته است به طوری که پایستگی انرژی فراگیرترین و مهمترین اصل در کل فیزیک بشمار می‌رود.

۱.۸ اصل انرژی

فرض کنید ذره P با جرم m تحت تاثیر نیروی F حرکت می‌کند. بنابراین معادله حرکت اش

$$m\frac{d\mathrm{v}}{dt} = \mathrm{F} \tag{۱.۸}$$

است که v بردار سرعت ذره در لحظه t است. در این مرحله ما هیچ محدودیتی روی نیروی F قرار نمی‌دهیم. ممکن است نیرو وابسته به مکان، سرعت ذره P ، زمان و یا هر چیز دیگری باشد. همچنین اگر بیش از یک نیرو به ذره P وارد شود در این صورت F به معنای بردار برایند این نیروهاست. با ضرب اسکالر کردن طرفین رابطه ۱.۸ با v معادله اسکالر زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$m\mathrm{v}.\frac{\mathrm{v}}{dt} = \mathrm{F}.\mathrm{v} \tag{۲.۸}$$

و چون

$$m\mathrm{v}.\frac{\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}m\mathrm{v}.\mathrm{v}\Big) \tag{۳.۸}$$

به معادله‌ی به شکل

$$\frac{dT}{dt} = \mathrm{F}.\mathrm{v} \tag{۴.۸}$$

می‌رسیم که $T = \frac{1}{2}m\mathrm{v}.\mathrm{v} = \frac{1}{2}|\mathrm{v}|^2$ است که این کمیت انرژی جنبشی ذره P نامیده می‌شود. حال با گرفتن انتگرال از رابطه ۴.۸ در بازه زمانی $[t_1, t_2]$ داریم

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{F}.\mathrm{v}dt \tag{۵.۸}$$

که T_1 و T_2 به ترتیب انرژی ذره P در زمان‌های t_1 و t_2 هستند. این رابطه اصل انرژی برای ذره‌ای متحرک تحت نیروی F است.

- کار انجام شده: کمیت اسکالر

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{F}.\mathrm{v}dt \tag{۶.۸}$$

کار انجام شده توسط نیروی F در طی بازه زمانی $[t_1, t_2]$ نامیده می‌شود. بنابراین آهنگ کار نیروی F در زمان t برابر با $dW/dt = \mathrm{F}.\mathrm{v}$ است. در واحد استاندارد، واحد کار ژول (J) و یک ژول بر ثانیه یک وات (W) است.

بنابراین اصل انرژی برای یک ذره بیان می‌کند که در هر حرکت یک ذره، افزایش در انرژی جنبشی ذره در یک بازه زمانی مشخص برابر با کار انجام شده توسط نیروی اعمالی در طی همین بازه زمانی است. به نظر می‌رسد اصل انرژی به کلی شامل اطلاعات کمتری نسبت به معادله حرکت است به طوری که تنها نمی‌توان با در نظر گرفتن اصل انرژی انتظار داشت تا حرکت ذره را کامل مشخص کرد. موقعی که ذره P یک درجه آزادی دارد یعنی مکان ذره تنها با یک متغییر اسکالر مشخص می‌شود، این مطلب قدری ساده‌تر است. در این مورد معادله حرکت و اصل انرژی با یکدیگر معادل هستند و اصل انرژی به تنهایی برای مشخص کردن حرکت کافی است.
تمرین: مسئله ۱ فصل ۶ کتاب را حل کنید؟

۲.۸ پایستگی انرژی در حرکت مستقیم الخط

فرض کنید ذره P در امتداد محور x تحت نیروی F که به سمت مثبت x وارد می‌شود، حرکت می‌کند. در این صورت کار انجام شده یعنی انتگرال ۶.۸ به رابطه زیر کاهش می‌یابد.

$$W = \int_{t_1}^{t_2} Fvdt \tag{۷.۸}$$

که $v = \dot{x}$ سرعت ذره P در جهت مثبت محور x است. برای موردی که F یک میدان نیرو باشد (به طوری که $F = F(x)$) رابطه W عبارت است از

$$W = \int_{t_1}^{t_2} Fvdt = \int_{t_1}^{t_2} F(x)\frac{dx}{dt}dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \tag{۸.۸}$$

که $x_1 = x(t_1)$ و $x_2 = x(t_2)$ هستند. بنابراین زمانی که ذره P در طول $[x_1, x_2]$ از محور x حرکت می‌کند، کار انجام شده توسط نیروی F با رابطه

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \tag{۹.۸}$$

تعیین می‌شود. در نتیجه اصل انرژی برای ذره‌ی متحرک در میدان نیروی مستقیم الخط به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$T_2 - T_1 = W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \tag{۱۰.۸}$$

اجازه دهید $V(x)$ انتگرالی نامعین از $-F(x)$ باشد، به طوری که

$$F = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx = V(x_1) - V(x_2) \tag{۱۱.۸}$$

باشد چنین V انرژی پتانسیل نامیده می‌شود که تابعی از میدان نیروی F است. با لحاظ V، اصل انرژی در حرکت مستقیم الخط با رابطه زیر نوشته می‌شود.

$$T_2 + V(x_2) = T_1 + V(x_1) \tag{۱۲.۸}$$

که معادل با رابطه پایستگی انرژی

$$T + V = E \tag{۱۳.۸}$$

است که E مقداری ثابت است که انرژی کل ذره نامیده می‌شود. این نتیجه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

- پایستگی انرژی در حرکت مستقیم الخط: زمانی که ذره‌ای تحت حرکت مستقیم الخط در یک میدان نیرو قرار می‌گیرد، جمع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل آن در این حرکت ثابت باقی می‌ماند.

مثال: انرژی پتانسیل یک میدان نیروی نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی، و میدان نیروی جاذبه عکس مجذوری را بیابید؟ میدان نیروی یک نوسانگر ساده یک بعدی $F=-\alpha x$ است بنابراین

$$V=-\int_a^x F(x)dx=\alpha\int_a^x xdx=\frac{1}{2}\alpha x^2-\frac{1}{2}\alpha a^2 \tag{۱۴.۸}$$

توجه داشته باشد برای تعیین انرژی پتانسیل نیازمند تعیین مرجع پتانسیل هستیم یعنی جایی که در آن $V=0$ باشد. انتخاب این مکان دلخواه است ولی بایستی پتانسیل هر نقطه‌ی دیگر را نسبت به آن سنجید. در اینجا نقطه $x=a$ را مرجع پتانسیل در نظر می‌گیرم یعنی $V=V(x=a)=0$ در این صورت انرژی پتانسیل هر نقطه دیگر با فاصله x از نقطه $x=a$ با $V(x)=\frac{1}{2}\alpha x^2$ داده می‌شود.

تمرین: با گرفتن نقطه $a=\infty$ به عنوان مرجع پتانسیل، انرژی پتانسیل مربوط به نیروی عکس مجذوری $F=-K/x^2$ را بیابید؟

مثال: ذره‌ای به طور قائم با سرعت u به سمت بالا حرکت می‌کند که تحت تاثیر نیروی گرانش یکنواخت قرار دارد. ارتفاع بیشینه‌ای که ذره می‌تواند به آن برسد و نیز سرعت برگشت ذره در لحظه رسیدن به نقطه‌ی اولیه آن را به‌دست آورید؟ با در نظر گرفتن نیروی گرانشی یکنواخت $F=-mg$ انرژی پتانسیل به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$V=-\int_0^z(-mg)dz=mgz \tag{۱۵.۸}$$

در اینجا مرجع پتانسیل نقطه $z=0$ را فرض کردیم و چون $z>0$ است بنابراین پتانسیل مثبت است (برای درک بهتر این موضوع فصل هفتم درسنامه فیزیک ۱ من را مطالعه نمایید.). بنابراین پایستگی انرژی نشان می‌دهد

$$\frac{1}{2}mv^2+mgz=E \tag{۱۶.۸}$$

که $v=\dot{z}$ و E نیز از روی شرایط اولیه مسئله یعنی $v=u$ در $z=0$ مشخص می‌شود یعنی $E=\frac{1}{2}mu^2$. در این صورت داریم

$$\frac{1}{2}mv^2+mgz=\frac{1}{2}mu^2 \tag{۱۷.۸}$$

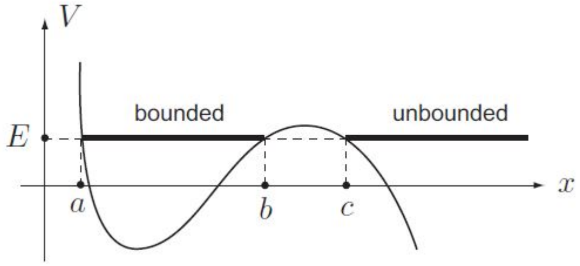
و ارتفاع بیشینه $z=z_{max}$ جایی است که در آنجا سرعت صفر شد $v=0$. بنابراین

$$z_{max}=\frac{u^2}{2g} \tag{۱۸.۸}$$

به دست می‌آید. همچنین سرعت برگشت به نقطه ابتدایی را باقرار دادن $z=0$ در رابطه ۱۷.۸ مقدار $|v|=u$ به دست می‌آید.

تمرین: ذره‌ای به جرم m از نقطه $x=a$ با سرعت u تحت تاثیر میدان نیروی نوسانگر ساده $F=-m\omega^2x$ در طول محور x پرتاب می‌شود. مسافت بیشینه و سرعت بیشینه ذره را بیابید؟

۳.۸ ویژگی‌های عمومی حرکت مستقیم الخط



شکل ۱.۸: حرکت‌های محدود شده و نا محدود در حضور نیروی مستقیم الخط .

پایستگی انرژی ما را قادر می‌سازد تا ویژگی‌های عمومی حرکت مستقیم الخط در یک میدان نیرو را نتیجه بگیریم. چون هموراه $T \leq 0$ است بنابراین مکان ذره محدود به مقادیر x است که رابطه زیر را راضا کنند.

$$V(x) \leq E \tag{۱۹.۸}$$

که حالت تساوی برای حالت $v = 0$ است. فرض کنید $V(x)$ رفتاری مانند آنچه در شکل ۱.۸ نشان داده شده است، دارد و E مقدار مشخص شده است. سپس حرکت ذره P بایستی در هر یک از فاصله‌های محدود $a \leq x \leq b$ یا نا محدود $c \leq x \leq \infty$ قرار گیرد. بنابراین اگر ذره در ابتدا در محدود $[a, b]$ واقع باشد، حرکت در این فاصله انجام خواهد پذیرفت.

۱.۳.۸ حرکت‌های محدود شده

فرض کنید حرکت با ذره P در بازه $[a, b]$ با سرعت مثبت v به طوری که ذره P به سمت راست در حال حرکت باشد، شروع شده باشد. چون v در نقاط $x = a$ و $x = b$ صفر است، بنابراین سرعت تا رسیدن ذره به نقطه $x = b$ که در آنجا به سکون می‌رسد، مثبت است (علت صفر شدن سرعت در نقاط a و b به خاطر $V = E$ یا $T = 0$ در این نقاط است.). از معادله

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E \Rightarrow \frac{1}{2}m\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 = E - V \tag{۲۰.۸}$$

می‌توان به معادله دیفرانسیلی زیر در $x = b$ با $V'(x) > 0$ که نشان دهنده $F < 0$ است رسید.

$$\frac{dx}{dt} = +[2(E - V(x))]^{1/2} \tag{۲۱.۸}$$

بنابراین ذره P به سمت چپ حرکت می‌کند و تا رسیدن به نقطه $x=a$ نمی‌ایستد. همچنین برای سمت چپ حرکت معادله زیر حاکم است.

$$\frac{dx}{dt} = -[2(E-V(x))]^{1/2} \tag{۲۲.۸}$$

در نقطه $x=a$ با $V'<0$ نشان می‌دهد که $F>0$ و ذره P یک بار دیگر به سمت راست حرکت می‌کند. نتیجه اینکه ذره بین دو نقطه اکسترمم $x=a$ و $x=b$ نوسانات دوره‌ای انجام می‌دهد. چون بخش‌های چپ و راست حرکت در زمان‌های مساوی صورت می‌پذیرند، بنابراین دوره تناوب τ از این نوسانات را می‌توان با انتگرال‌گیری روی هر کدام از معادلات در بازه مکانی $a \le x \le b$ پیدا کرد. هر معادله یک معادله دیفرانسیلی جداشدنی است که انتگرال آن منجر به

$$\tau = 2\int_a^b \frac{dx}{[2(E-V(x))]^{1/2}} \tag{۲۳.۸}$$

می‌شود. توجه به این نکته لازم است که این نوسانات به طور کلی نوسانات هماهنگ ساده نیستند. به ویژه دوره آنها به دامنه بستگی دارد.

مثال: ذره P با جرم $m=2kg$ روی محور x تحت نیروی $F=(4/x^2)-1$ حرکت می‌کند. در ابتدا از نقطه $x=4$ رها می‌شود در این صورت نقطه‌های اکسترمم و دوره تناوب این حرکت را بیابید؟ ابتدا بایستی از نیرو، انرژی پتانسیل را به‌دست آوریم.

$$V = -\int F(x)dx = -\int \Big(\frac{4}{x^2}-1\Big) = \frac{4}{x}+x \tag{۲۴.۸}$$

حال می‌توان انرژی مکانیکی (پایستگی انرژی) را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{1}{2}(2)v^2 + \frac{4}{x} + x = E \tag{۲۵.۸}$$

در این رابطه $v=\dot{x}$ است. حال با داشتن شرایط اولیه $v=0$ در $x=0$ مقدار $E=5$ به دست می‌آید. بنابراین

$$v^2 = 5 - \frac{4}{x} - x \tag{۲۶.۸}$$

نقاط اکسترمم این حرکت در $v=0$ اتفاق می‌افتند یعنی در $x=1$ و $x=4$. برای یافتن دوره تناوب τ نوسانات با نوشتن $v=\frac{dx}{dt}$ در معادله بالا به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\frac{dx}{dt} = \pm\Big[\frac{(x-1)(4-x)}{x}\Big]^{1/2} \tag{۲۷.۸}$$

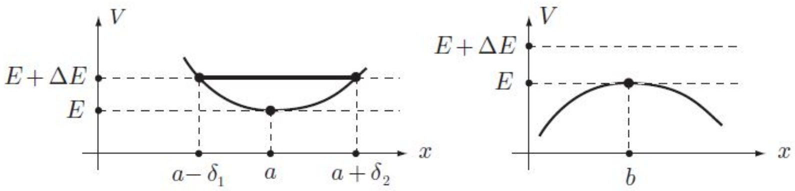
که علامت مثبت و منفی به ترتیب به حرکت ذره در جهت مثبت و منفی بر می‌گردد. با گرفتن انتگرال از هر کدام از معادلات داریم.

$$\tau = 2\int_1^4 \Big[\frac{x}{(x-1)(4-x)}\Big]^{1/2} \approx 9/69 \tag{۲۸.۸}$$

۲.۳.۸ حرکت‌های نا محدود

حال فرض کنید حرکت ذره P در بازه $[c, \infty)$ با سرعت منفی v (یعنی به سمت عقب برگردد) انجام پذیرد. بنابراین ذره تا زمانی که به نقطه $x = c$ نرسیده سرعت منفی دارد و وقتی به آن رسید سرعتش صفر می‌شود و به سکون می‌رسد. در نقطه $x = c$، $V' < 0$ است که نشان دهنده $F > 0$ است، لذا ذره سپس به سمت راست حرکت می‌کند و تا بینهایت به این کار ادامه می‌دهد.

۴.۸ تعادل پایدار و نوسانات کوچک



شکل ۲.۸: مکان‌های تعادل پایدار و ناپایدار .

اجازه دهید در ابتدا منظورمان از مکان تعادلی را تعریف کنیم.

- تعادل: نقطه A نقطه‌ی تعادلی ذره P نامیده می‌شود اگر زمانی که P از نقطه A از حالت سکون رها می‌شود، دوباره به نقطه A بازگردد.

در مورد حرکت مستقیم الخط تحت میدان نیروی $F(x)$ ، نقطه‌ی $x = a$ نقطه تعادلی است اگر و تنها اگر $F(a) = 0$ یعنی $V'(a) = 0$ باشد. در نتیجه نقاط تعادلی ذره P نقاط ایستای تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ هستند. نقاط تعادلی نشان داده شده در شکل ۲.۸ را در نظر بگیرید. این نقاط در نقاط ایستای V که به ترتیب نقاط مینیمم و ماکزیمم هستند واقع شده است. فرض کنید ذره P در حالت سکون در نقطه مینیمم $x = a$ است و در این حین ضربه‌ای به بزرگی J که به آن انرژی جنبشی $\Delta E(= J^2/2m)$ را می‌دهد، را دریافت می‌کند. اکنون انرژی کل ذره P، $E + \Delta E$ است و بنابراین ذره P در بازه $[a - \delta_1, a + \delta_1]$ نشان داده شده در شکل، نوسان خواهد کرد. از شکل ۲.۸ به طور آشکاری پیداست زمانی که بزرگی J به سمت صفر میل می‌کند، دامنه δ از حرکت (بزرگتر از δ_1 و δ_2) نیز به سمت صفر میل می‌کند. در واقع این تعریفی از نقطه تعادل پایدار است.

- تعادل پایدار: فرض کنید ذره P در تعادل در نقطه A باشد و در این زمان ضربه‌ای به بزرگی J به آن وارد شد و اجازه دهید δ دامنه حرکت بعدی باشد. اگر $\delta \to 0$ زمانی که $J \to 0$ میل کند، در این صورت نقطه‌ی A مکان تعادل پایدار P گفته می‌شود.

از سوی دیگر اگر ذره P در نقطه ماکزیمم $x = b$ زمانی که ضربه J را دریافت می‌کند، در حالت سکون قرار داشته باشد. به طور واضحی دامنه حرکت حاصل شده زمانی که J به سمت صفر میل کند، صفر نمی‌شود. بنابراین نقطه‌ی ماکزیمم $V(x)$ مکان تعادل پایدار P نست. همین تعریف برای نقاط عطف تابع پتانسیل نیز صادق است. به طور خلاصه می‌توان گفت:

- نقاط ایستای انرژی پتانسیل $V(x)$ نقاط تعادلی ذره P هستند که نقاط مینیمم آن مکان‌های تعادل پایدار هستند. همچنین اگر A مکان نقطه تعادل پایدار باشد، بنابراین ذره P حول نقطه A شروع به نوساناتی با دامنه کوچک می‌کند.

۱.۴.۸ معادله حرکت تقریبی برای نوسانات کوچک

فرض کنید نقطه $x = a$ نقطه‌ی مینیمم تابع پتانسیل $V(x)$ باشد. سپس زمانی که x به اندازه کافی به a نزدیک باشد، می‌توانیم $V(x)$ تا سه جمله اول بسط تیلور برای توان‌های از متغیر $(x-a)$ مانند زیر تخمین بزنیم.

$$V(x) \approx V(a) + (x-a)V'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2V''(a) = V(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2V''(a) \qquad (۲۹.۸)$$

چون $x = a$ نقطه مینیمم است، $V'(a) = 0$ می‌باشد. بنابراین برای نوسانات کوچک حول $x = a$ معادله بقای انرژی به طور تقریبی با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\frac{1}{2}v^2 + V(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2V''(a) = E \qquad (۳۰.۸)$$

اکنون اگر این معادله را نسبت به t مشتق بگیریم و تقسیم بر v کنیم معدله حرکت خطی شده زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$m\frac{dx^2}{dt^2} + V''(a)(x-a) = 0 \qquad (۳۱.۸)$$

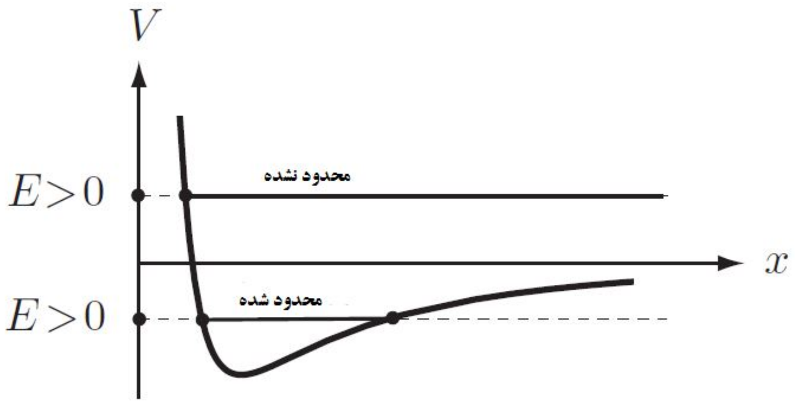
به شرطی که $V''(a) > 0$ باشد، معادله بالا، معادله نوسانگر هماهنگ ساده با فرکانس زاویه‌ای $(V''(a)/m)^{1/2}$ حول نقطه $x = a$ است. بنابراین نوسانات کوچک ذره حول $x = a$ به طور تقریبی هماهنگ ساده با دوره تناوب تقریبی $\tau = 2\pi(m/V''(a))^{1/2}$ هستند.

تمرین: ذره‌ای به جرم 8 کیلوگرم روی محور x تحت نیروی که انرژی پتانسیل آن

$$V = \frac{x(x-3)^2}{3} \qquad (۳۲.۸)$$

است، حزکت می‌کند. نشان دهید تنها یک مکان برای تعادل پایدار وجود دارد و دوره تناوب نوسانات کوچک حول این نقطه را بیابید؟ توجه: برای یافتن نقطه مینیمم کافی است مشتق دوم تابع در نقطه اکسترمم مثبت باشد.

مثال: ذره‌ی P با جرم واحد روی محور مثبت x تحت نیروی



شکل ۳.۸: تابع انرژی پتانسیل. .

$$F = \frac{36}{x^3} - \frac{9}{x^2} \quad (۳۳.۸)$$

قرار دارد. نشان دهید هر حرکتی از ذره بسته به مقدار انرژی شامل الف: نوسانات دوره‌ای میان دو نقطه اکسترمم یا ب: حرکت محدود نشده با یک نقطه اکسترمم می‌شود؟ در ابتدا ذره P از نقطه $x = a$ با تندی $0/5$ پرتاب می‌شود. در این صورت نشان دهید ذره‌ی P میان دو نقطه اکسترمم نوسان می‌کند و دوره تناوب ین حرکت را بیابید. همچین ثابت کنید تنها یک مکان تعادلی برای ذره P وجود دارد که آن پایدار است؟ دوره نوسانات کوچک حول این نقطه را بیابید؟

انرژی پتانسیل مربوط به میدان نیروی $F(x)$،

$$V = -\int F(x)dx = -\int (\frac{36}{x^3} - \frac{9}{x^2})dx = \frac{18}{x^2} - \frac{9}{x} \quad (۳۴.۸)$$

است. در این صورت بقای انرژی با رابطه زیر داده خواهد شد.

$$\frac{1}{2}v^2 + V(x) = E \quad (۳۵.۸)$$

که $v = \dot{x}$ و E انرژی ثابت کل است. گراف مربوط به تابع $V(x)$ در شکل ۳.۸ نشان داده شده است. حرکت‌های ممکن برای ذره را می‌توان مانند زیر دسته‌بندی کرد.

- اگر $E < 0$ باشد بنابراین حرکت یک نوسان دوره‌ای میان دو نقطه اکسترمم است.
- اگر $E > 0$ باشد حرکت محدود نشده تنها با یک نقطه اکسترمم است.

اکنون با لحاظ کردن شرط اولیه $v = 0/5$ در $x = 4$ مقدار $E = -1$ به‌دست می‌آید بنابراین حرکت بایستی نوسانی دوره‌ای میان دو نقطه اکسترمم باشد. در نقاط اکسترمم $v = 0$ است و x بایستی رابطه زیر را ارضا کند.

$$\frac{18}{x^2} - \frac{9}{x} = -1 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \quad (۳۶.۸)$$

ریشه‌های این معادله درجه دوم $x = 3$ و $x = 6$ است. برای یافتن دوره تناوب از معادله انرژی

$$\frac{1}{2}\dot{x} + \frac{18}{x^2} - \frac{9}{x} = -1 \tag{۳۷.۸}$$

استفاده می‌کنیم. بعد از ساده سازی به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\frac{dx}{dt} = +\frac{\sqrt{2}}{x}((x-3)(x-6))^{1/2} \tag{۳۸.۸}$$

تمرین: رابطه بالا را استخراج کنید؟

با جداسازی رابطه زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\int_0^{\tau/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_3^6 \frac{xdx}{((x-3)(x-6))^{1/2}} \tag{۳۹.۸}$$

به طوری که دوره تناوب

$$\tau = \sqrt{2}\int_3^6 \frac{xdx}{((x-3)(x-6))^{1/2}} = \frac{9\pi}{\sqrt{2}} \tag{۴۰.۸}$$

است. از رابطه زیر برای مقدر انتگرال استفاده شده است.

$$\int_a^b \frac{xdx}{((x-a)(x-b))^{1/2}} = \frac{\pi(a+b)}{2} \tag{۴۱.۸}$$

برای یافتن مکان تعادلی بایستی

$$V'(x) = -F = \frac{9}{x^2} - \frac{36}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 4 \tag{۴۲.۸}$$

اکنون

$$V'' = \frac{108}{x^4} - \frac{18}{x^3} \Rightarrow V''(4) = \frac{9}{64} > 0 \tag{۴۳.۸}$$

است که نشان می‌دهد نقطه $x = 4$ مکان تعادل پایدار است. بنابراین فرکانس زوایه‌ای نوسانات کوچک حول این نقطه

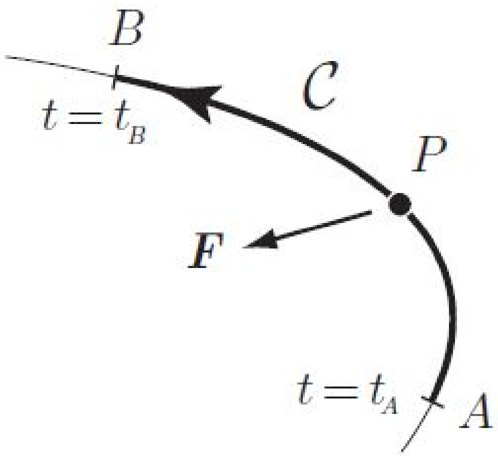
$$\Omega = \left(\frac{V''(4)}{m}\right)^{1/4} = \left(\frac{9/64}{1}\right)^{1/2} = \frac{3}{8} \tag{۴۴.۸}$$

است و نیز دوره تناوب $\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{16\pi}{3}$ می‌باشد.

تمرین: مسئله شماره ۶ از فصل ۶ کتاب را حل کنید؟

۵.۸ بقای انرژی در یک میدان پایستار

اکنون فرض کنید ذره P در حرکت سه بعدی کلی تحت بردار نیروی F قرار دارد که در بازه زمانی $[t_A, t_B]$ ذره P از نقطه A به نقطه B در طول مسیر C همانگونه که در شکل ۴.۸ نشان داده شده است، حرکت می‌کند. بنابراین با



شکل ۴.۸: حرکت کلی ذره تحت تاثیر نیروی F .

اصل انرژی (۶.۸) داریم.

$$T_B - T_A = \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{F}.\mathrm{v}dt \tag{۴۵.۸}$$

که T_A و T_B انرژی‌های جنبشی ذره P به ترتیب در زمان $t = t_A$ و $t = t_B$ هستند. وقتی F میدان نیروی $\mathrm{F}(\mathrm{r})$ باشد، کار انجام شده یعنی انتگرال روی سمت راست معادله ۴۵.۸ به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\int_{t_A}^{t_B} \mathrm{F}.\mathrm{v}dt = \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{F}.\frac{d\mathrm{r}}{dt}dt = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{F}(\mathrm{r}).d\mathrm{r} \tag{۴۶.۸}$$

که $\mathcal{C}$ مسیر طی شده توسط ذره P در بازه زمانی $[t_A, T_B]$ است. در نتیجه اصل انرژی برای یک ذره در یک میدان نیروی سه بعدی به صورت زیر قابل بیان است.

$$T_B - T_A = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{F}(\mathrm{r}).d\mathrm{r} \tag{۴۷.۸}$$

انتگرال‌های شبیه به طرف راست معادله ۴۷.۸ انتگرال‌های خطی نامیده می‌شوند. این انتگرال‌ها با انتگرال‌های متدوال که حدود انتگرال محدوده‌ای از محور x است، متفاوت هستند و حدود آنها مسیری سه بعدی در فضا است. همچنین کار انجام شده توسط نیروی $\mathrm{F}(\mathrm{r})$ زمانی که ذره از نقطه A به نقطه B در مسیر $\mathcal{C}$ حرکت می‌کند با رابطه زیر داده می‌شود.

$$W[A \to B; \mathcal{C}] = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{F}(\mathrm{r}).d\mathrm{r} \tag{۴۸.۸}$$

حال اگر میدان $\mathrm{F}(\mathrm{r})$ یک میدان نیروی پایستار باشد که به گرادیان انرژی پتانسیل،

$$\mathrm{F} = -\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{k} \tag{۴۹.۸}$$

مربوط است، بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} W[A \to B; \mathcal{C}] &= \int_{\mathcal{C}} \mathrm{F}(r).d\mathrm{r} = \int_{\mathcal{C}} (-\nabla V).d\mathrm{r} \\ &= \int_{\mathcal{C}} \Big(\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{k}\Big).(dx\mathrm{i} + dy\mathrm{j} + dz\mathrm{k}) \\ &= -\int_{\mathcal{C}} \Big(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\Big) \\ &= -\int_{\mathcal{C}} dV = V_A - V_B \end{aligned} \quad (۵۰.۸)$$

در این صورت رابطه اصل انرژی ۴۷.۸ به صورت زیر قابل بیان است.

$$T_B + V_B = T_A + V_A \quad (۵۱.۸)$$

که معادل با فرمول بقای انرژی

$$T + V = E \quad (۵۲.۸)$$

است.

مثال: الف) نشان دهید میدان نیروی گرانشی یکنواخت $\mathrm{F} = -mg\mathrm{k}$ یک نیروی پایستار با انرژی جنبشی $V = mgz$ است. ب) نشان دهید هر نیروی به شکل $\mathrm{F} = h(r)\hat{\mathrm{r}}$ (نیروی مرکزی) یک نیروی پایستار با انرژی پتانسیل $V = -H(r)$ است که $H(r)$ انتگرالی نامعین از $h(r)$ است. با استفاده از این نتیجه انرژی پتانسیل مربوط به یک نوسانگر هماهنگ ساده سه بعدی با نیروی $\mathrm{F} = -\alpha r\hat{\mathrm{r}}$ و نیروی مجذوری جاذبه $\mathrm{F} = -(K/r^2)\hat{\mathrm{r}}$ که α و K ثابت‌های مثبت هستند، را بیابید؟ چون بزرگی بردار مکان $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ است، بنابراین

$$\frac{\partial H(r)}{\partial x} = \frac{dH}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = h(r)\frac{x}{r} \quad (۵۳.۸)$$

و در نتیجه در سه راستا

$$-\nabla H(r) = -h(r)\Big(\frac{x}{r}\mathrm{i} + \frac{y}{r}\mathrm{j} + \frac{z}{r}\mathrm{k}\Big) = -h(r)\frac{\mathrm{r}}{r} = -h(r)\hat{\mathrm{r}} \quad (۵۴.۸)$$

است. در این صورت برای نوسانگر هماهنگ ساده

$$-\nabla H(r) = -\frac{dH}{dr}\hat{\mathrm{r}} = \mathrm{F}(r) = -\alpha r\hat{\mathrm{r}} \Rightarrow V = -H(r) = \frac{\alpha r^2}{2} \quad (۵۵.۸)$$

است و نیز برای نیروی جاذبه مجذوری

$$-\nabla H(r) = -\frac{dH}{dr}\hat{\mathrm{r}} = \mathrm{F}(r) = -\frac{K}{r^2}\hat{\mathrm{r}} \Rightarrow V = -H(r) = -\frac{K}{r} \quad (۵۶.۸)$$

است.

تمرین: جسمی با تندی u به طور قائم پرتاب می‌شود و روی ساختمانی به ارتفاع h فرود می‌آید. تندی فرود را بیابید. (فرض کنید نیروی گرانش یکنواخت است و نیز مقاومت هوا وجود ندارد.)

مثال: جسمی به از سطح ماه با تندی u در جهتی پرتاب می‌شود. نشان دهید اگر $u^2 < 2MG/R$ که M و R جرم و شعاع ماه هستند، جسم نمی‌تواند از جاذبه ماه فرار کند؟ با در نظر گرفتن نیروی $\mathrm{F} = -(mMG/r^2)\hat{\mathrm{r}}$ یا انرژی پتانسیل $V = -mMG/r$ بقای انرژی با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\frac{1}{2}m|\mathrm{v}|^2 - \frac{mMG}{r} = E \tag{۵۷.۸}$$

با اعمال شرط اولیه $v = u$ در $r = R$ مقدار

$$E = \frac{1}{2}mu^2 - (mMG)/R \tag{۵۸.۸}$$

به‌دست می‌اید. در این صورت بقای انرژی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$|\mathrm{v}|^2 = u^2 + 2MG\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\Big) \tag{۵۹.۸}$$

حال به علت اینکه طرف چپ رابطه بالا همواره مثبت است بنابرین بایستی رابطه زیر برقرار باشد.

$$0 \leq u^2 + 2MG\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\Big) \tag{۶۰.۸}$$

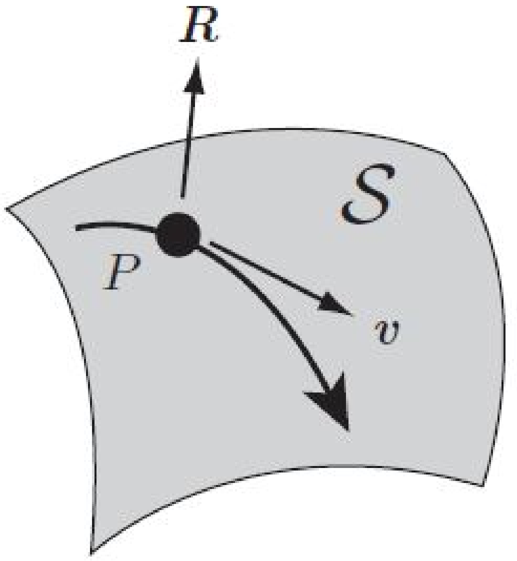
اگر جسم بتوان فرار کند در هر فاصله‌ای دلخواهی بایستی نامساوی بالا برقرار باشد. این بدان معنی است که

$$0 \leq u^2 - \frac{2MG}{R} \tag{۶۱.۸}$$

بنابراین اگر $u^2 < 2MG/R$ جسم نمی‌تواند بگریزد.

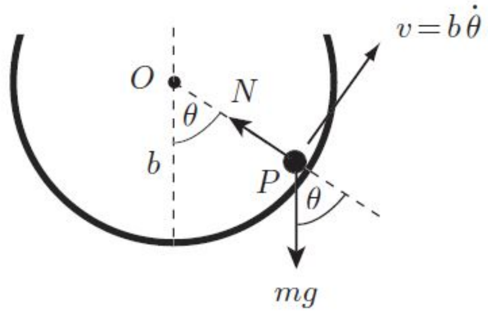
۶.۸ بقای انرژی در حرکت قیدی

اغلب کاربردهای مفید بقای انرژی زمانی که ذره در منوط به قیود هندسی مانند اتصال به یک نقطه ثابت با یک طناب غیر کش‌امدن و یا باقی ماندن در تماس با سطح صلب ثابت باشد، اتفاق می‌افتد. نکته‌ای که در اینجا حایز اهمیت است این است که چنین نیروهای قیدی کار انجام نمی‌دهند. بنابراین هیچ تاثیر بر اصل انرژی ندارند. برای مثال فرض کنید ذره مورد نظر P روی یک سطح نرم ثابت می‌لغزد همانگونه که در شکل ۵.۸ نشان داده شده است. چون سطح S صیقلی است. هر نیروی عکس‌العمل R که به ذره وارد می‌شود بایستی بر سطح S عمود باشد. اما چون ذره P روی S باقی می‌ماند، سرعتش v بایستی همیشه مماس بر سطح S باشد. بنابراین R همیشه عمود بر سرعت یعنی $\mathrm{R}.\mathrm{v} = 0$ است. در نتیجه آهنگ کار انجام شده R صفر است لذا R هیچ نقشی در اصل انرژی ندارد. از دیگر نیروهای قیدی که کار انجام نمی‌دهند می‌توان به لغزیدن یک ذره در امتداد یک سیم صاف ثابت



شکل ۵.۸: ذره P روی سطح صیقلی S سر می‌خورد. و نیروی عکس‌العمل R همیشه عمود بر سطح است. .

اشاره نمود.
تمرین: یک اسنوبرد از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و از یک سطح شیبدار پایین می‌اید. با پایین آمدن تا ارتفاع ۳۲۰ متر سرعت آن در پایین چقدر است؟ (از مقاومت هوا چشمپوشی کنید و مقدار $g = 10m/s^2$ است.)
مثال: حرکت در یک دایره عمودی: یک کره توخالی به مرکز O که سطح صیقلی داخلی‌تر آن به شعاع b است را



شکل ۶.۸: ذره P روی سطح صیقلی داخل کره می‌لغزد .

در نظر بگیرید. ذره P در داخل این کره قرار دارد و به طور افقی با تندی u از پایینترین نقطه سطح داخلی پرتاب

می‌شود (شکل ۶.۸ را ببینید). نشان دهید که در حرکت بعدی این ذره

$$v^2 = u^2 - 2gb(1-\cos\theta) \qquad (۶۲.۸)$$

است به شرطی که P همچنان در تماس با کره باقی بماند.

همان طور که در شکل ۶.۸ پیداست نیروهای وارد برا آن نیروی یکنواخت گرانشی mg و نیروی قیدی N است که عمود بر سطح است. چون نیروی قیدی N همیشه عمود بر سرعت است (نیروی قیدی در جهت شعاعی ولی سرعت مماس بر مسیر حرکت است.) بنابراین هیچ کاری انجام نمی‌دهد. در این صورت بقای انرژی به صورت زیر است.

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgb\cos\theta = E \qquad (۶۳.۸)$$

توجه داشته باشد از انرژی پتانسیل

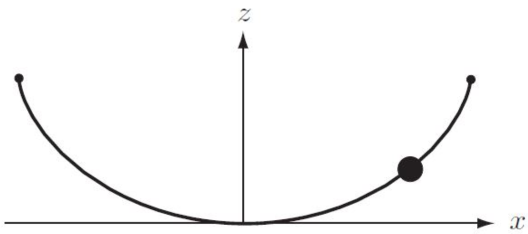
$$V = -mgh = -mgb\cos\theta \qquad (۶۴.۸)$$

در رابطه بالا استفاده شده است. با اعمال شرط اولیه $v = u$ در $\theta = 0$ مقدار انرژی $E = \frac{1}{2}mu^2 - mgb$ است. لذا قانون بقای انرژی به رابطه زیر کاهش می‌یابد.

$$v^2 = u^2 - 2gb(1-\cos\theta) \qquad (۶۵.۸)$$

تمرین: نیروی کنشی N را تابعی از θ به دست آورید؟

تمرین: مختصات سیمی صیقلی مانند شکل ۷.۸ با $x = c(\theta + \sin\theta)$ ، $y = 0$ و $z = c(1-\cos\theta)$ که c



شکل ۷.۸: ذره P روی سیم صیقلی می‌لغزد .

ثابتی مثبت و نیز $-\pi \le \theta \le \pi$ هستند، مشخص شده است. ذره‌ای آزادانه می‌توان روی این سیم بلغزد. در این صورت نشان دهید بقای انرژی با رابطه

$$(1+\cos\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{g}{c}(1-\cos\theta) = E \qquad (۶۶.۸)$$

داده می‌شود؟ همچنین با تغییر متغیر $u = \sin\frac{1}{2}\theta$ نشان دهید معادله حرکت

$$\ddot{u} + \left(\frac{g}{4c}\right)u = 0 \qquad (۶۷.۸)$$

است که نشان می‌دهد ذره با دوره تناوب $4\pi(c/g)^{1/2}$ نوسان می‌کند. راهنمایی: سرعت ذره $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ است.

[۰] درسنامه مکانیک کلاسیک