



Sharif University of Technology
School of Mechanical Engineering

Instructor:

Professor Aria Alasty

Automatic Control

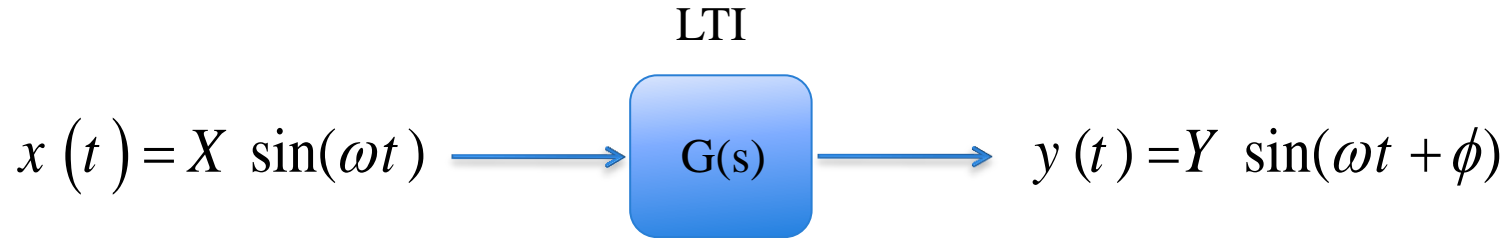
Chapter 8:

Control Systems Analysis by Frequency Response Method

1391-92 Fall Semester

- [Chapter 1](#): Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
- [Chapter 2](#): Mathematical Modeling of Control Systems
- [Chapter 3](#): Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems
- [Chapter 4](#): Modeling of Pneumatic, Hydraulic and Thermal Systems
- [Chapter 5](#): Transient and Steady-State Response Analysis
- [Chapter 6](#): Control Systems Analysis by Root-Locus Method
- [Chapter 7](#): Control Systems Design by Root-Locus Method

- **Chapter 8: Control Systems Analysis by Frequency Response Method**
 - Part 1: Bode Diagram
 - Non-minimum Phase Systems
 - Experimental Determination of Transfer Function
 - System Types versus Log-Magnitude Curve
 - Part 2: Polar Plot
 - General Shape of Polar Plots
 - Part 3: Stability Analysis
 - Nyquist Stability Criterion
 - Relative Stability
- Chapter 9: Control Systems Design by Frequency Response Method
- Chapter 10: PID Controller Design by Ziegler-Nichols Method



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)} \quad \text{and} \quad X(s) = \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\omega X p(s)}{(s^2 + \omega^2)(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)} = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \dots + \frac{b_n}{s + s_n}$$

$$y(t) = a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t} + b_1 e^{-s_1 t} + \dots + b_n e^{-s_n t}$$

* ادامه:

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1t} + \dots + b_n e^{-s_nt}$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

$$a = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = \frac{-XG(-j\omega)}{2j}$$

$$\bar{a} = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{XG(j\omega)}{2j}$$

$$y_{ss}(t) = \frac{-XG(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{XG(j\omega)}{2j} e^{j\omega t}$$

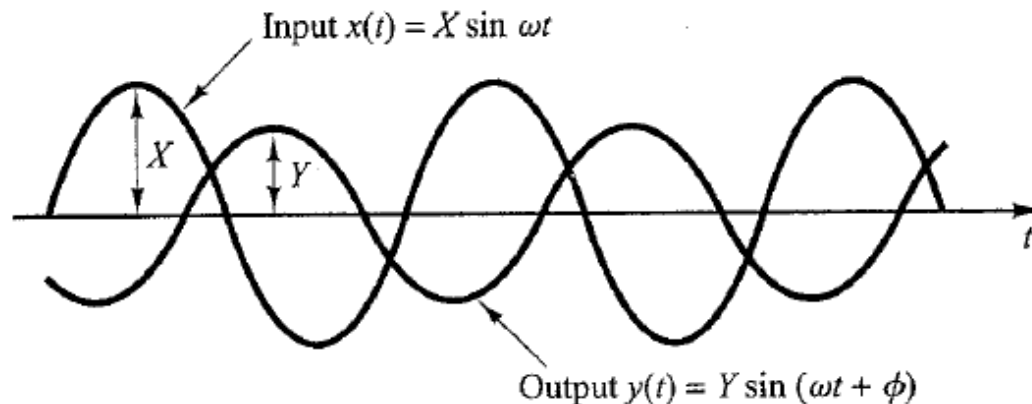
$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} = M e^{j\phi}$$

$$\angle G(j\omega) = \phi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}G(j\omega)}{\text{Re}G(j\omega)}, \quad |G(j\omega)| = M = \frac{Y}{X}$$

$$\Rightarrow y_{ss}(t) = XM \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} = XM \sin(\omega t + \phi) = Y \sin(\omega t + \phi)$$

* ادامه:
- تابع تبدیل:

- بنابراین پاسخ سیستم به ورودی سینوسی با معلوم بودن تابع تبدیل به طور کامل مشخص می شود.



Part 1:

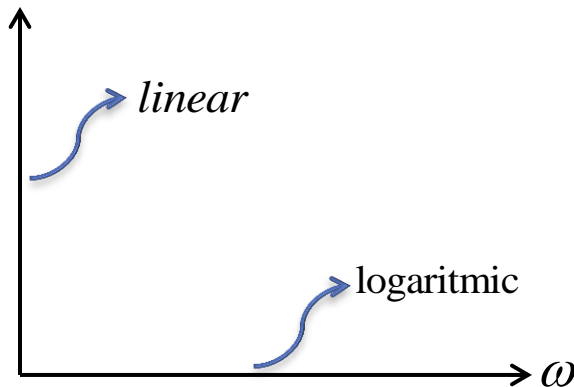
Bode Diagram

- Non-minimum Phase Systems
- Experimental Determination of Transfer Function
- System Types versus Log-Magnitude Curve

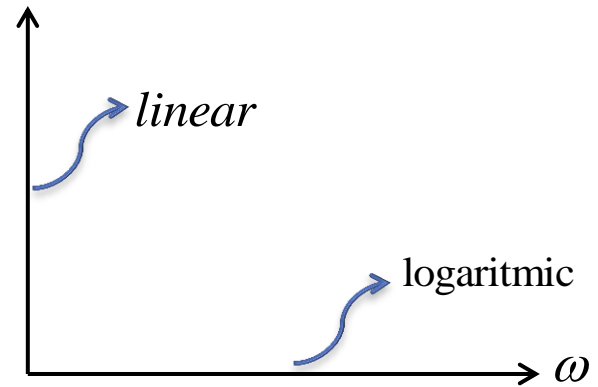
* دیاگرام بود:

- متشکل از دو نمودار اندازه و زاویه فاز تابع تبدیل بر حسب فرکانس ورودی می باشد.
- اندازه تابع تبدیل بر حسب واحد دسی بل رسم می گردد.
- محور مربوط به اندازه و زاویه خطی و محور فرکانس لگاریتمی هستند.

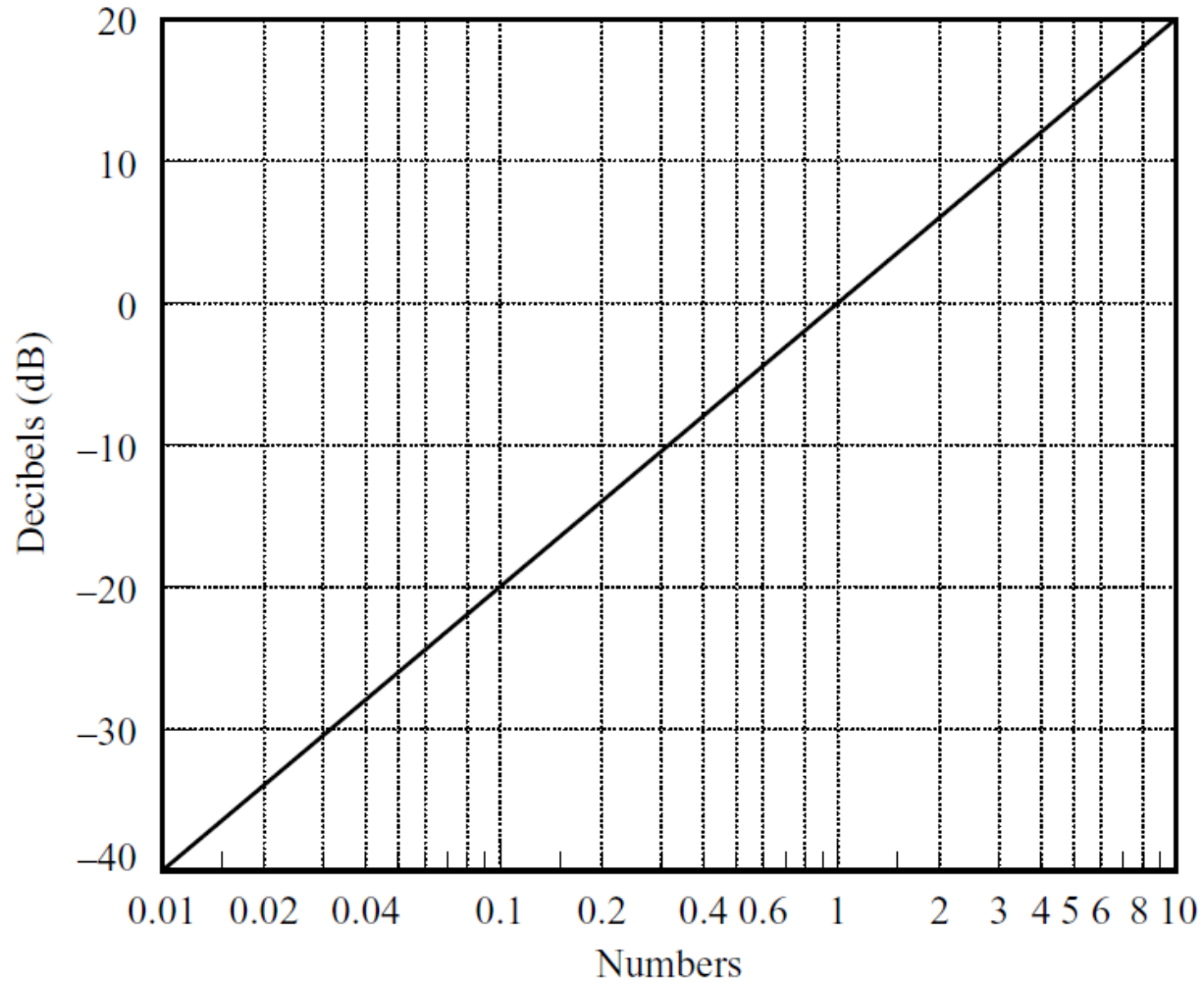
$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\left(\frac{Y}{X}\right) \text{ (dB)}$$



$$\phi = \angle G(j\omega)$$



Number – dB Conversion Line



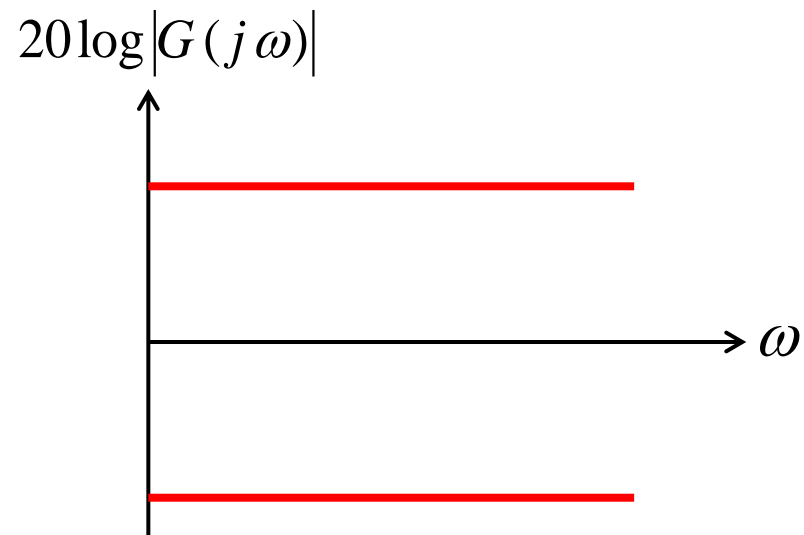
$$K > 1 \rightarrow 20 \log K > 0$$

$$K < 1 \rightarrow 20 \log K < 0$$

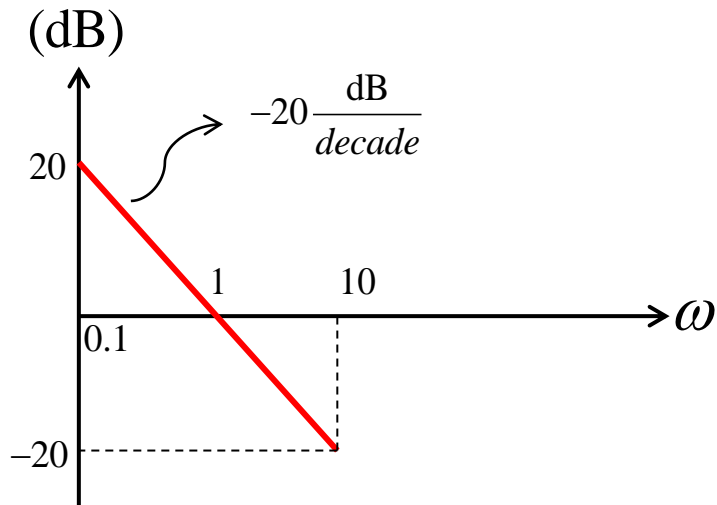


$$20 \log(K \times 10^n) = 20 \log(K) + 20n$$

$$20 \log \frac{1}{K} = -20 \log K$$

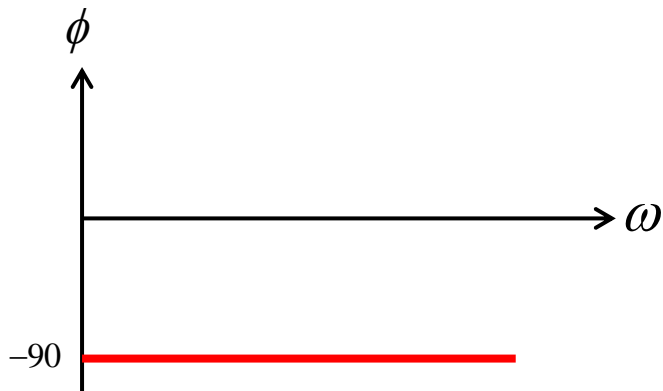


$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)} \Rightarrow 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = 20 \log \frac{1}{\omega} = -20 \log \omega$$



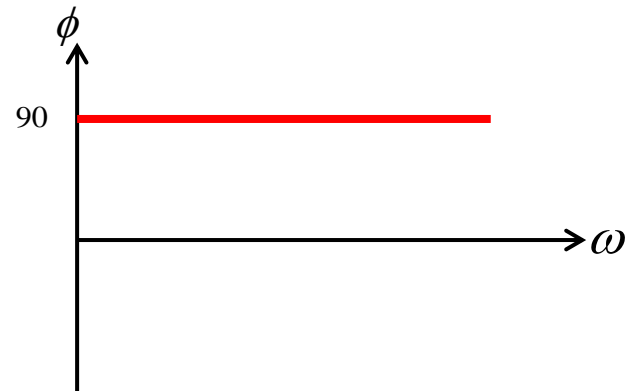
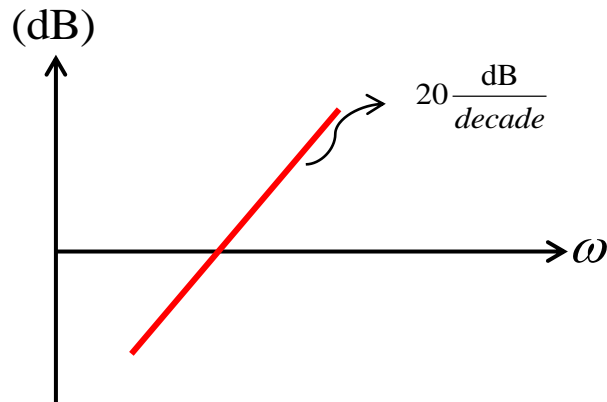
decade: $\omega \rightarrow 10\omega \Rightarrow -20 \log \omega - 20$

octave: $\omega \rightarrow 2\omega \Rightarrow -20 \log \omega - 6$

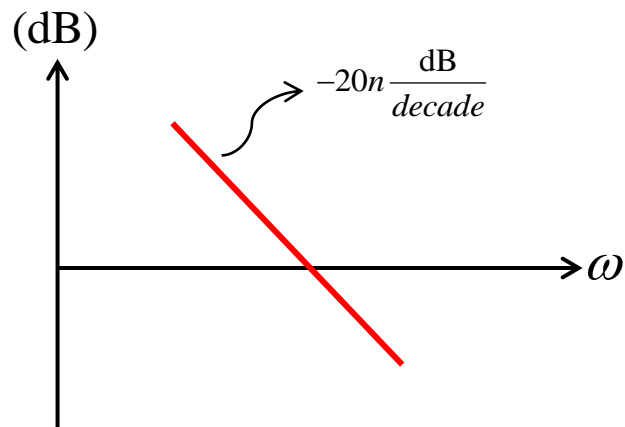


$$\angle \frac{1}{j\omega} = 0 - \tan^{-1} \frac{\omega}{0} = -90^\circ$$

$$G(j\omega) = (j\omega)$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^n}$$



$$G(s) = s + k = k \left(\frac{1}{k} s + 1 \right) = k (Ts + 1) \rightarrow \text{Consider: } G(s) = Ts + 1$$

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T \quad \text{and} \quad |G(j\omega)| = M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$20 \log M = -20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2} = \begin{cases} 0 & \omega T \ll 1 \rightarrow \omega \ll \frac{1}{T} \\ -20 \log \omega T & \omega T \gg 1 \rightarrow \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

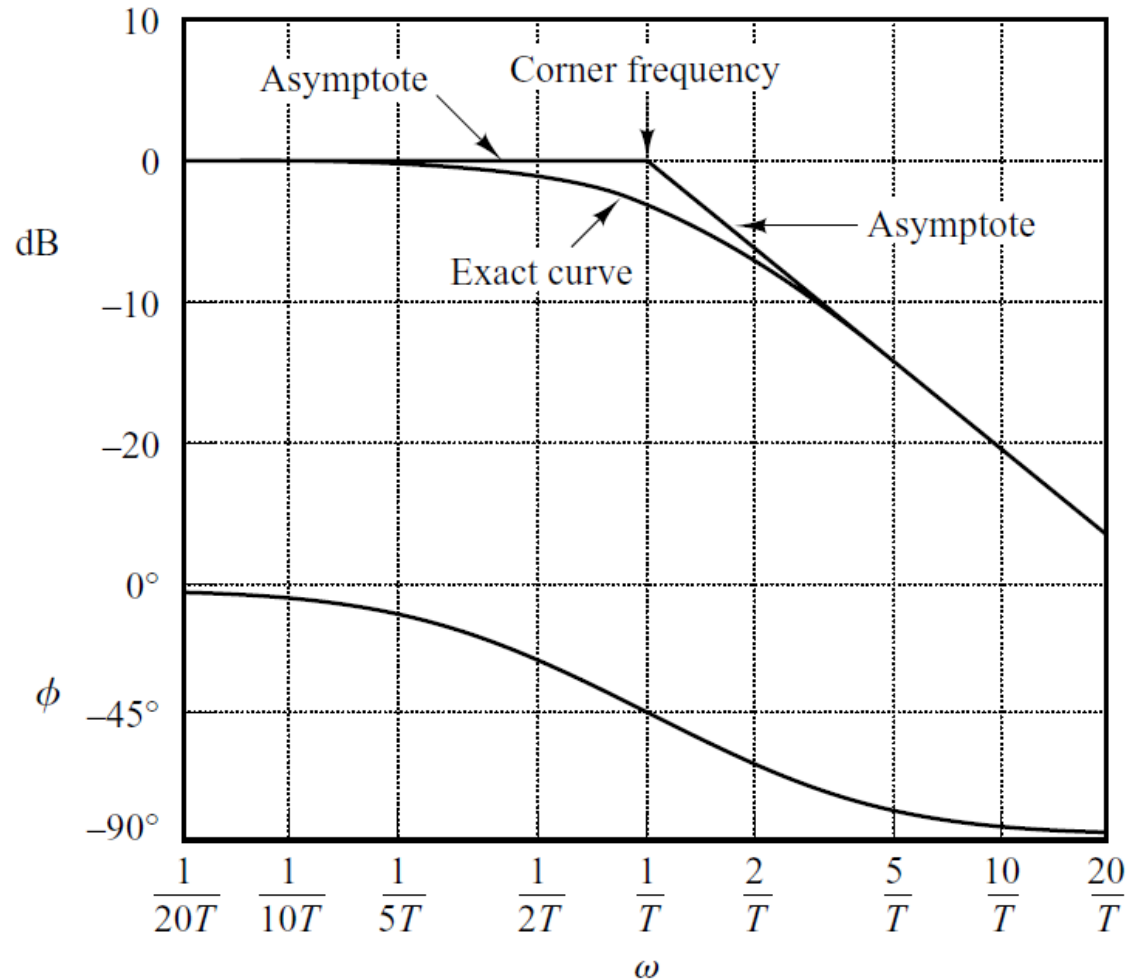
- برای فرکانس های بسیار پایین و بالا می توان نمودار را با دو خط مجانب تقریب زد.

- محل تلاقی دو مجانب روی محور افقی:

$$\text{Corner frequency: } \omega = \frac{1}{T} \rightarrow 20 \log M = -20 \log \sqrt{1+1} = -3(\text{dB})$$

$$\phi = \angle \frac{1}{1 + j\omega T} = 0 - \tan^{-1} \frac{\omega T}{1}$$

$$= \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{T} \\ -45 & \omega = \frac{1}{T} \\ -90 & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \quad \phi(\omega) = \angle G(j\omega) = 0 - \tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$20 \log M = -20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n : \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \\ -20 \log(2\zeta) & \omega = \omega_n : \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \\ -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) & \omega \gg \omega_n : \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \end{cases}$$

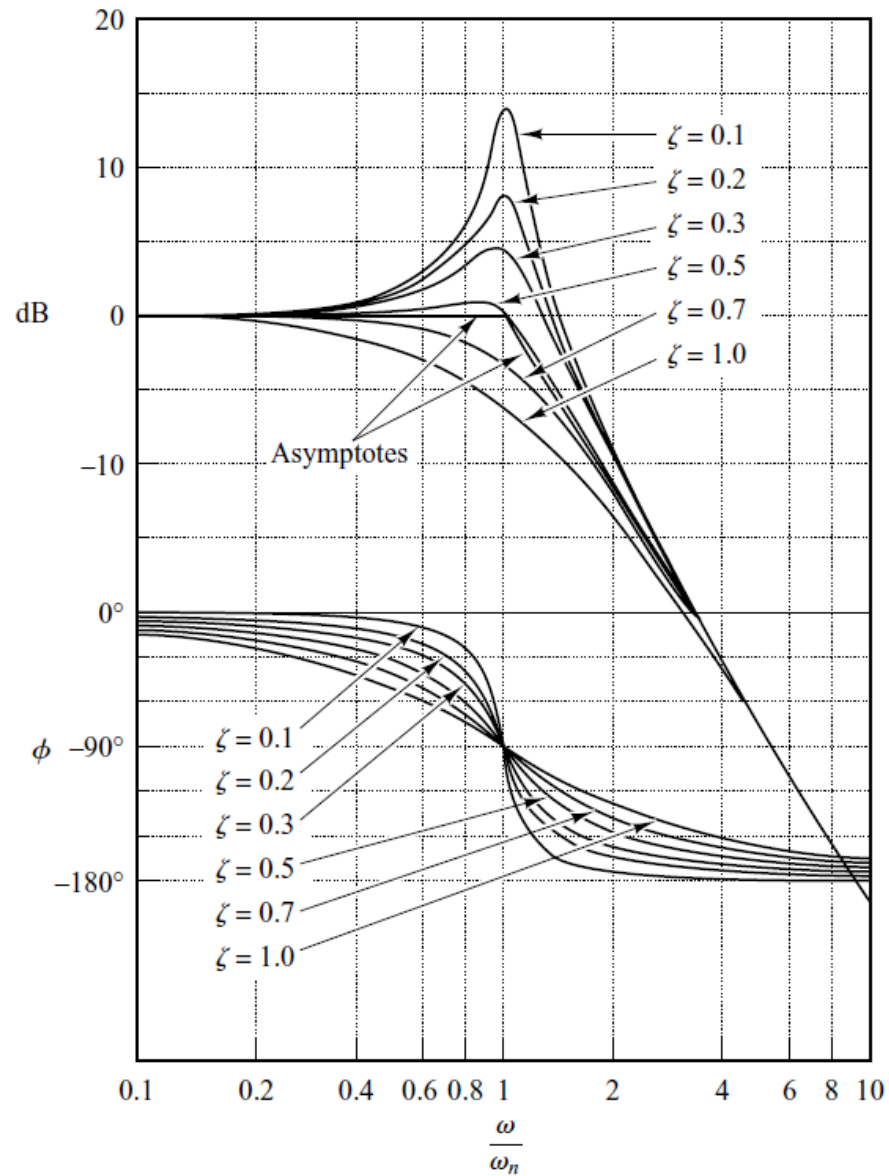
$$\phi = \angle G(j\omega) = \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \\ -90 & \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \\ -180 & \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \end{cases}$$

* تشديد:

$$\frac{dM(\omega)}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} ; 0 < \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} , \phi_r = -90 + \sin^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Quadratic Factors



* مثال: دیاگرام بود تابع تبدیل مقابل را رسم نمایید:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

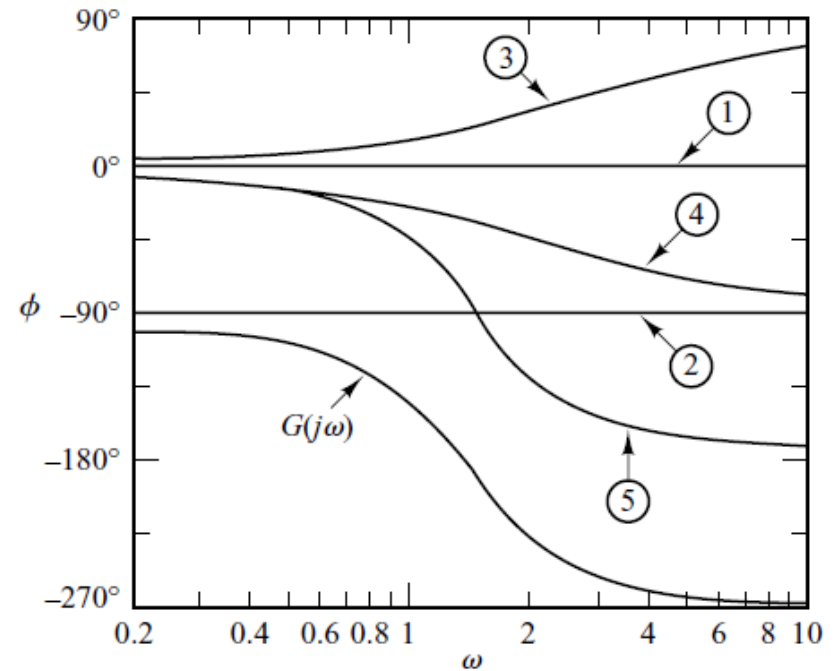
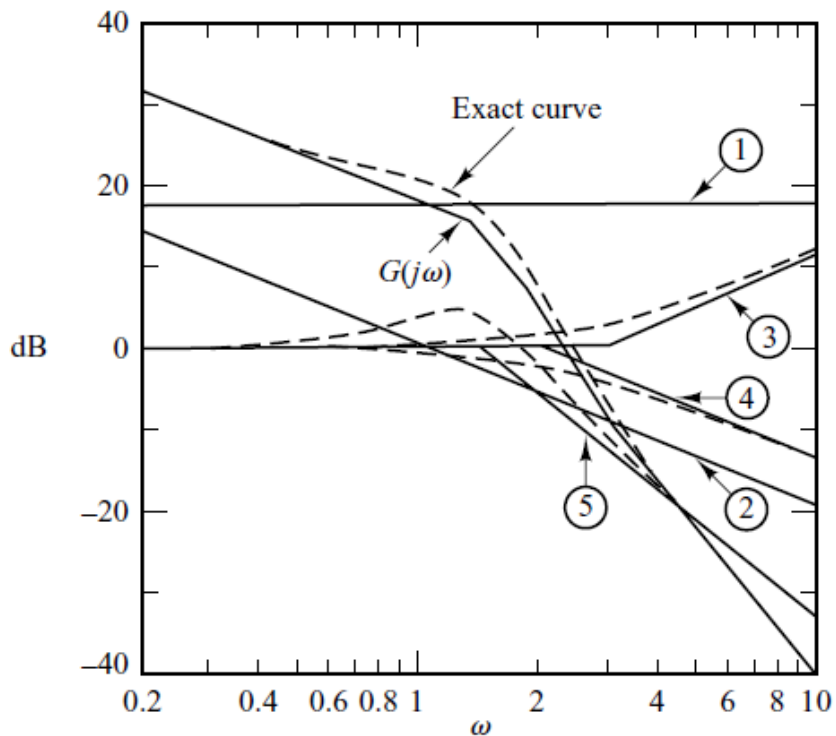
- حل:

$$G(j\omega) = \frac{10 \times 3 \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}{2 \times 2 j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right) \left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right)} = \frac{7.5 \left(1 + \frac{j\omega}{3}\right)}{j\omega (1 + 0.5j\omega) \left(1 + \frac{j\omega}{2} - \frac{(j\omega)^2}{2}\right)}$$

Next Example

* ادامه:

$$G(j\omega) = \frac{7.5(1 + \frac{j\omega}{3})}{j\omega(1 + 0.5j\omega)(1 + \frac{j\omega}{2} - \frac{(j\omega)^2}{2})}$$



- سیستم های مینیمم فاز:

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_1}{1 + j\omega T_2}$$

$$|G_1(j\omega)| = M_1 = \frac{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}}{\sqrt{1 + (\omega T_2)^2}}, \quad \angle G_1(j\omega) = \tan^{-1} \omega T_1 - \tan^{-1} \omega T_2 = \phi_1(\omega)$$

- سیستم های غیر مینیمم فاز:

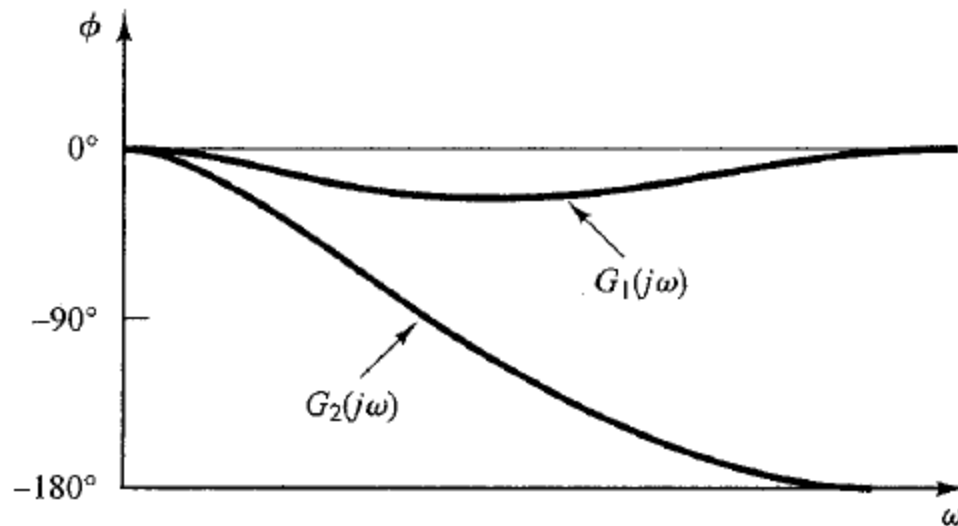
$$G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega T_1}{1 + j\omega T_2}$$

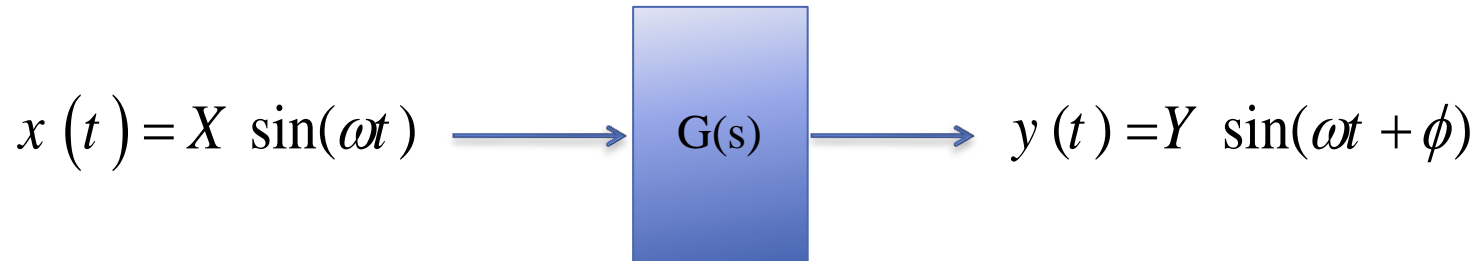
$$|G_2(j\omega)| = M_2 = \frac{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}}{\sqrt{1 + (\omega T_2)^2}}, \quad \angle G_2(j\omega) = \tan^{-1}(-\omega T_1) - \tan^{-1} \omega T_2 = \phi_2(\omega)$$

- سیستم های مینیمم فاز و غیر مینیمم فاز، اندازه یکسان ولی زاویه فاز متفاوت دارند.

$$MP \Rightarrow \omega \rightarrow \infty \begin{cases} \phi \rightarrow -90(n-m) \\ m \rightarrow -20(n-m) \text{ (dB/dec.)} \end{cases}$$

$$NMP \Rightarrow \omega \rightarrow \infty \begin{cases} \phi \nrightarrow -90(n-m) \\ m \rightarrow -20(n-m) \text{ (dB/dec.)} \end{cases}$$





- استفاده از روش های تحلیلی برای تعیین تابع تبدیل سیستم های پیچیده بسیار دشوار است.
- با اندازه گیری پاسخ فرکانسی سیستم به ورودی سینوسی می توان تابع تبدیل سیستم های پیچیده را تعیین نمود.
- با اندازه گیری اندازه و زاویه فاز پاسخ به ازای فرکانس های مختلف و رسم دیاگرام بود و با استفاده از تقریب مجانب ها، طی یک فرایند سعی و خطا می توان فرکانس های گوشه و تابع تبدیل را با دقت خوبی تعیین نمود.
- زاویه مجانب ها باید مضرب $\pm 20dB/decade$ باشند.
- چنانچه زاویه در فرکانس $\omega = \omega_1$ به اندازه $\pm 20dB/decade$ کاهش یابد، یک فاکتور رسته اول به فرم مقابل باید در تابع تبدیل موجود باشد:
 $[1 + j(\omega/\omega_1)]$ or $1/ [1 + j(\omega/\omega_1)]$

- چنانچه زاویه در فرکانس $\omega = \omega_1$ به اندازه $\pm 40dB/decade$ کاهش یابد، یک فاکتور رسته دوم به فرم مقابل باید در تابع تبدیل موجود باشد:

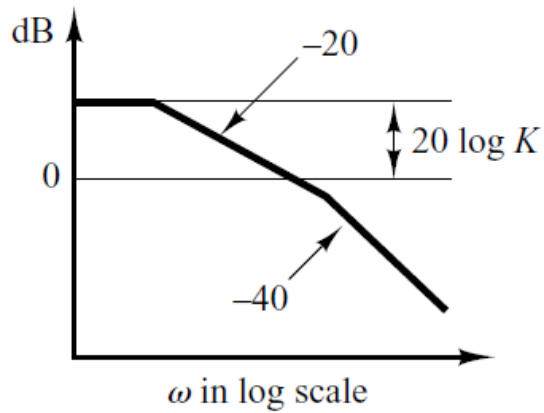
$$[1 + 2\xi(j\omega/\omega_1) + (j\omega/\omega_1)^2] \text{ or } 1/[1 + 2\xi(j\omega/\omega_1) + (j\omega/\omega_1)^2]$$

- ضریب دمپینگ از مقایسه میزان تشدید با نمودار مرجع به صورت تقریبی تعیین می شود.

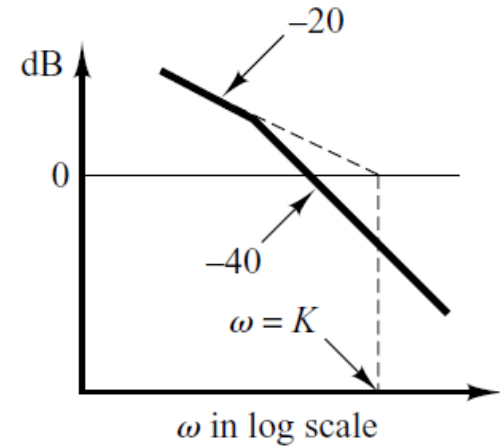
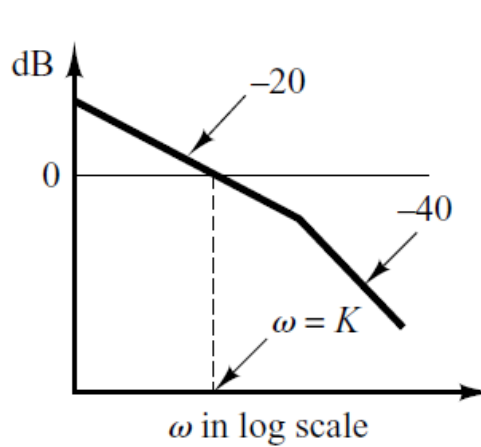
- برای تعیین ضریب ثابت تابع تبدیل از پاسخ ناحیه فرکانس پایین استفاده می شود:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\lambda} ; \lambda: \text{System Type}$$

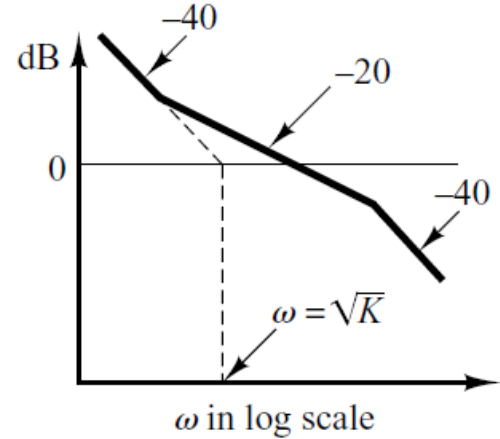
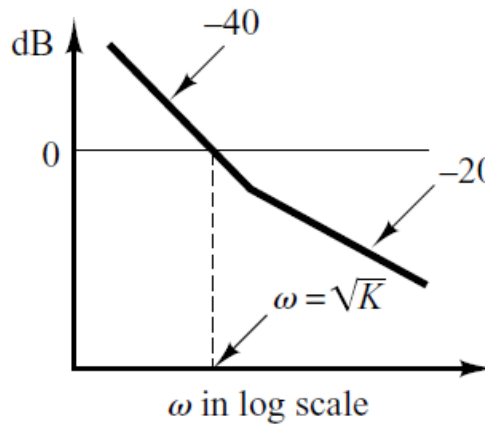
- به منظور بررسی صحت تابع تبدیل تعیین شده، از نمودار فاز استفاده می شود. در زاویه فرکانس های بالا (در مقایسه با فرکانس های گوشه)، زاویه فاز سیستم مینیمم فاز، $-90(q-p)$ خواهد بود.



Type 0 Systems ($\lambda=0$)

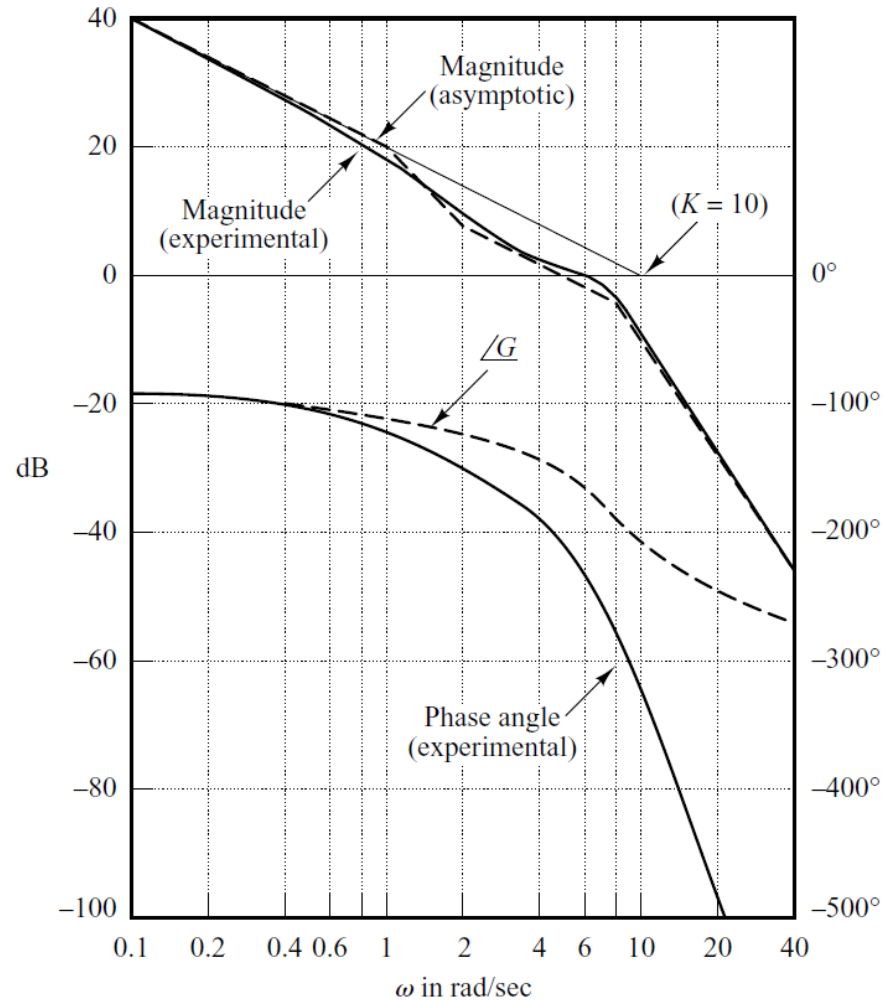


Type 1 Systems ($\lambda=1$)



Type 2 Systems ($\lambda=2$)

* مثال: تابع تبدیل سیستمی را که پاسخ فرکانسی آن به شکل زیر است، بدست می آوریم:



Next Example

Previous Example

* حل:

- ابتدا منحنی بدست آمده را با منحنی های با شیب $\pm 20dB/dec$ یا مضارب آن تقریب می زنیم. تابع تبدیل مورد نظر به فرم زیر خواهد بود:

$$G(s) = \frac{K(1 + 0.5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega)[1 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{8}\right) + \left(j\frac{\omega}{8}\right)^2]}$$

- مقدار ضریب دمپینگ، با توجه به تشدید موجود در فرکانس $6r/s$ با مراجعه به نمودار مربوطه برابر 0.5 تخمین زده می شود.

- با توجه به توضیحات [اسلاید قبل](#)، مقدار K برابر 10 بدست می آید. بنابراین تابع تبدیل سیستم به صورت مقابل خواهد بود:

$$G(s) = \frac{K(1 + 0.5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega)[1 + 2\xi\left(j\frac{\omega}{8}\right) + \left(j\frac{\omega}{8}\right)^2]}$$

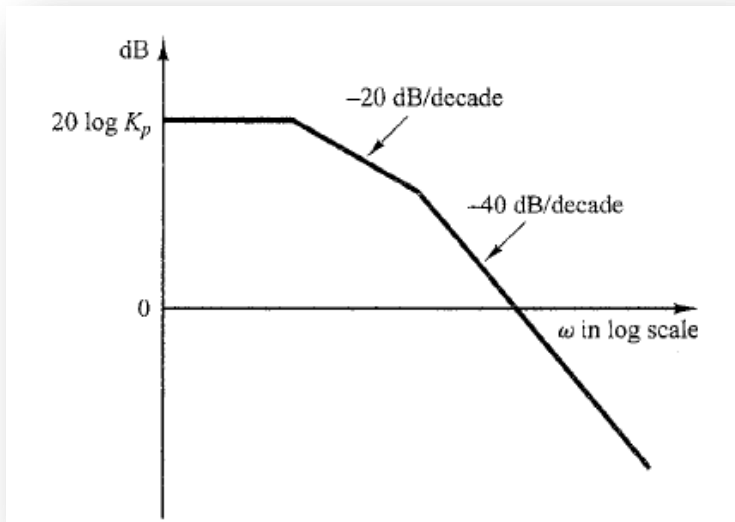
$$G(s) = \frac{320(s + 2)}{s(s + 1)(s^2 + 8s + 64)}$$

- حال به منظور تایید نهایی، نمودار فاز تابع تبدیل را با مقدار بدست آمده از [آزمایش](#) مقایسه می کنیم. با توجه به اینکه این دو مقدار با یکدیگر اختلاف فاز دارند، سیستم مورد مطالعه یک سیستم غیر مینیمم فاز است.

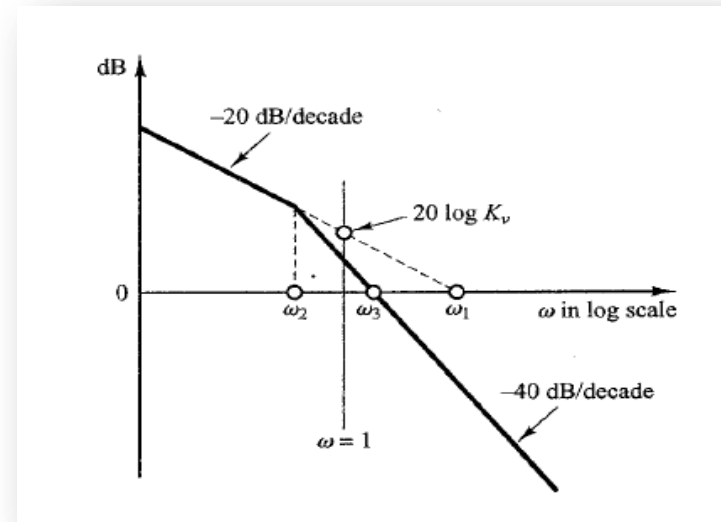
$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1) \dots (T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) \dots (T_p j\omega + 1)}$$

Type 0 System: $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$

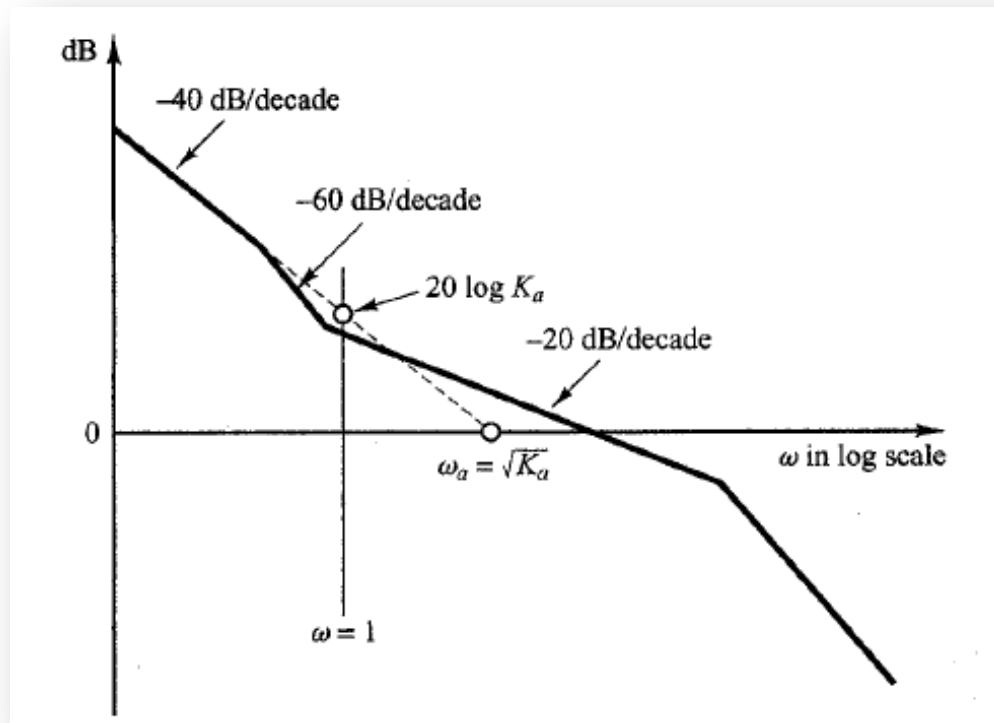


Type 1 System: $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$



$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1) \dots (T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) \dots (T_p j\omega + 1)}$$

Type 2 System: $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$



Part 2:

Polar Plot

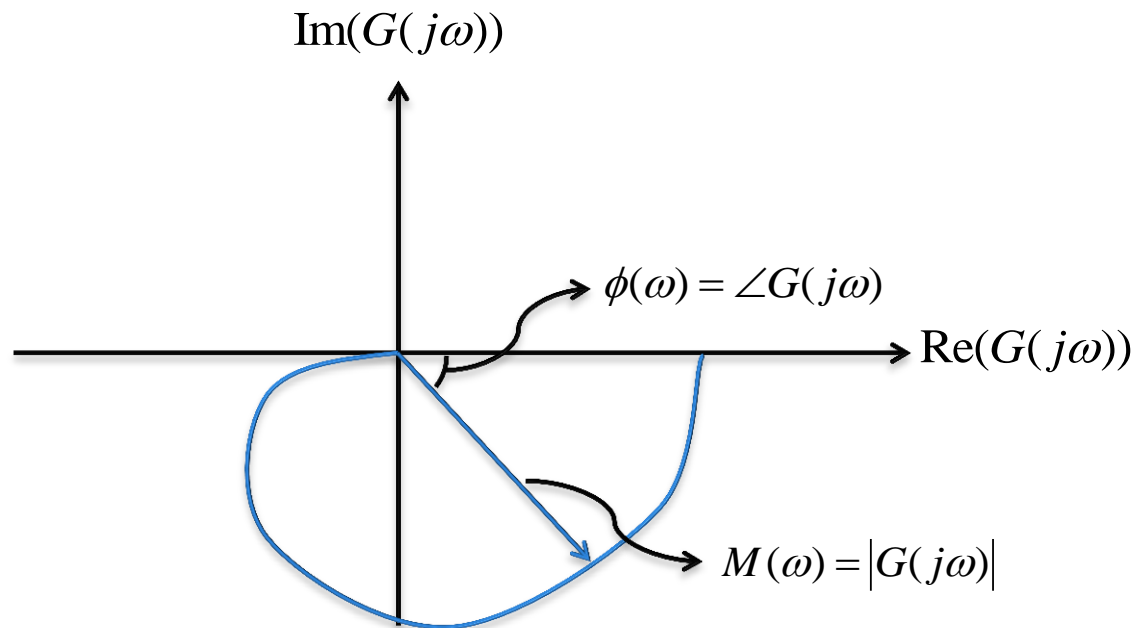
- General Shape of Polar Plots

Contents

* دیاگرام نایکوئیست:

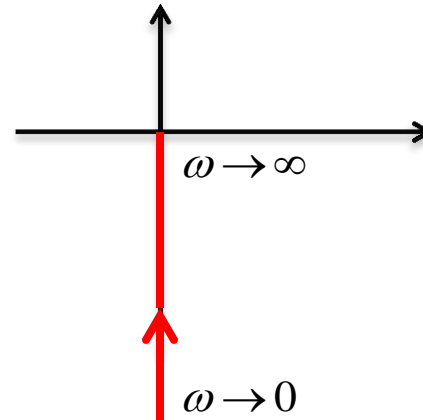
- منحنی تابع مختلط $G(j\omega)$ در صفحه مختلط است، زمانی که فرکانس از صفر تا بینهایت افزایش یابد.

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} = M(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

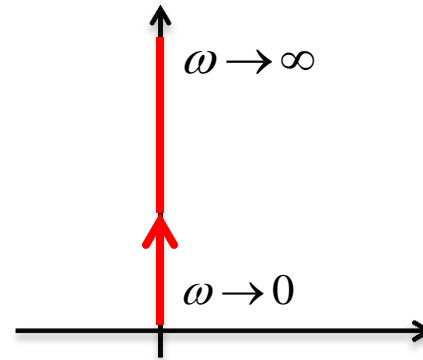
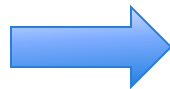
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = 0 - j \frac{1}{\omega}$$



- عامل انتگرالگیر:

$$G(j\omega) = j\omega$$

$$G(j\omega) = j\omega = 0 + j\omega$$



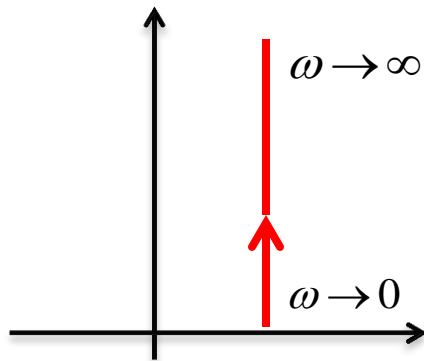
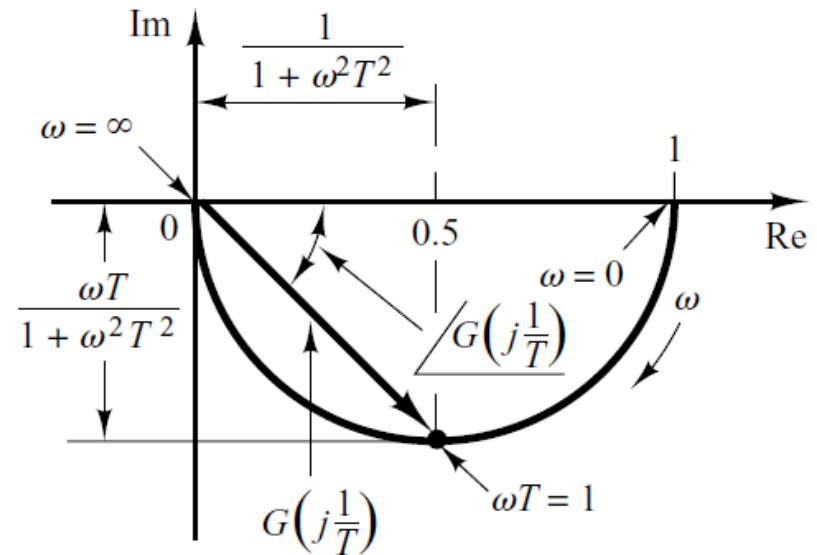
- عامل مشتق گیر:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \angle -\tan^{-1} \omega T$$

$$\omega = 0 \rightarrow M_0 = 1, \phi_0 = 0$$

$$\omega = \infty \rightarrow M_\infty = 0, \phi_\infty = -90$$



$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} \text{ for } \xi > 0$$

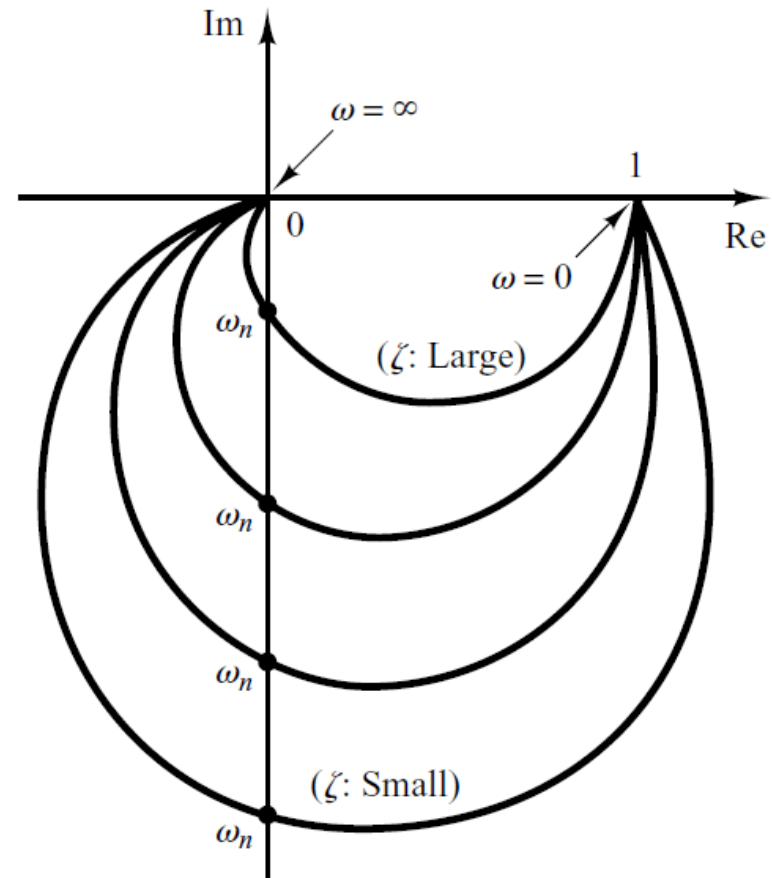
$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$M(0) = 1, \phi(0) = 0^\circ$$

$$M(\infty) = 0, \phi(\infty) = -180^\circ$$

$$M(\omega_n) = \frac{1}{2\zeta}, \phi(\omega_n) = -90^\circ$$

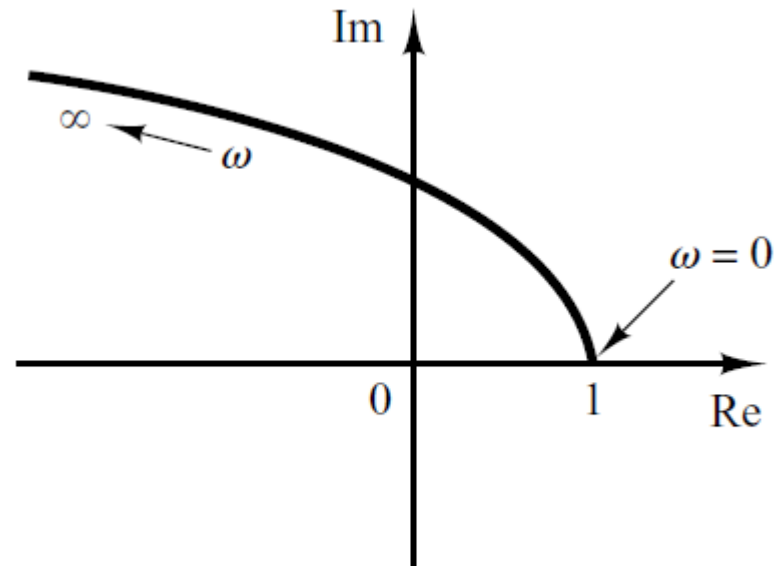


$$G(j\omega) = 1 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2$$

$$G(0) = 1 \angle 0$$

$$G(\infty) = \infty \angle +180$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} > 0$$



* مثال: دیاگرام نایکوئیست سیستم با تابع تبدیل مقابل را رسم نمایید:

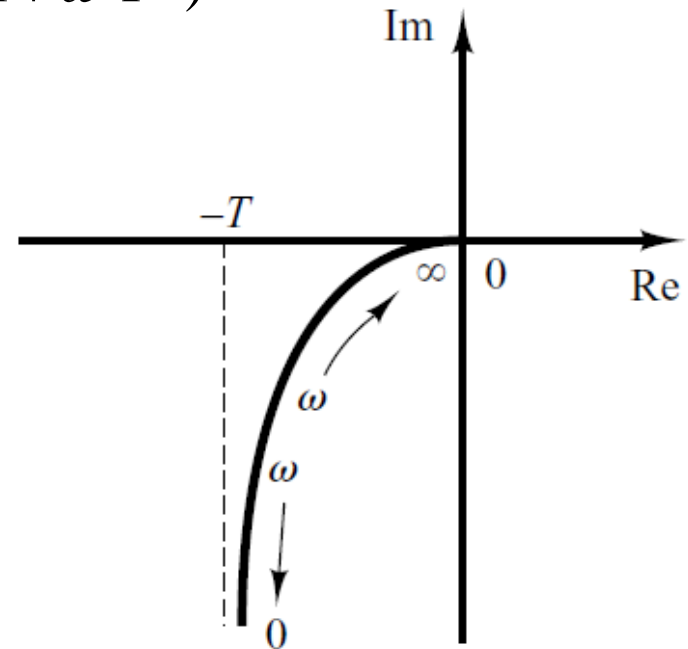
$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

- حل:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)} = \frac{-T}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow G(0) = -T - j\infty = \infty \angle -90$$

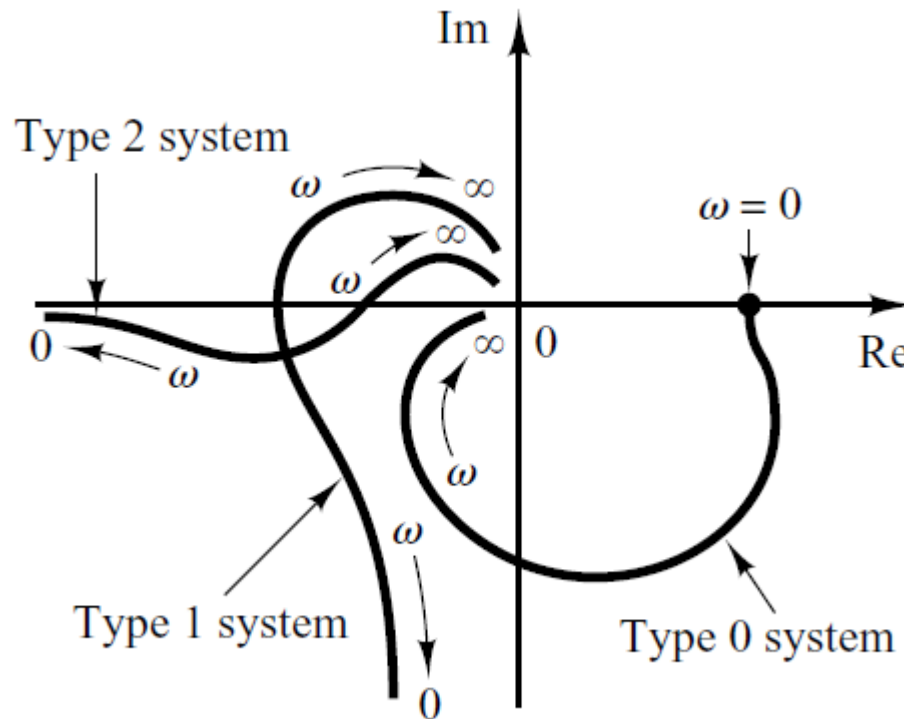
$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(\infty) = 0 - j0 = 0 \angle -180$$



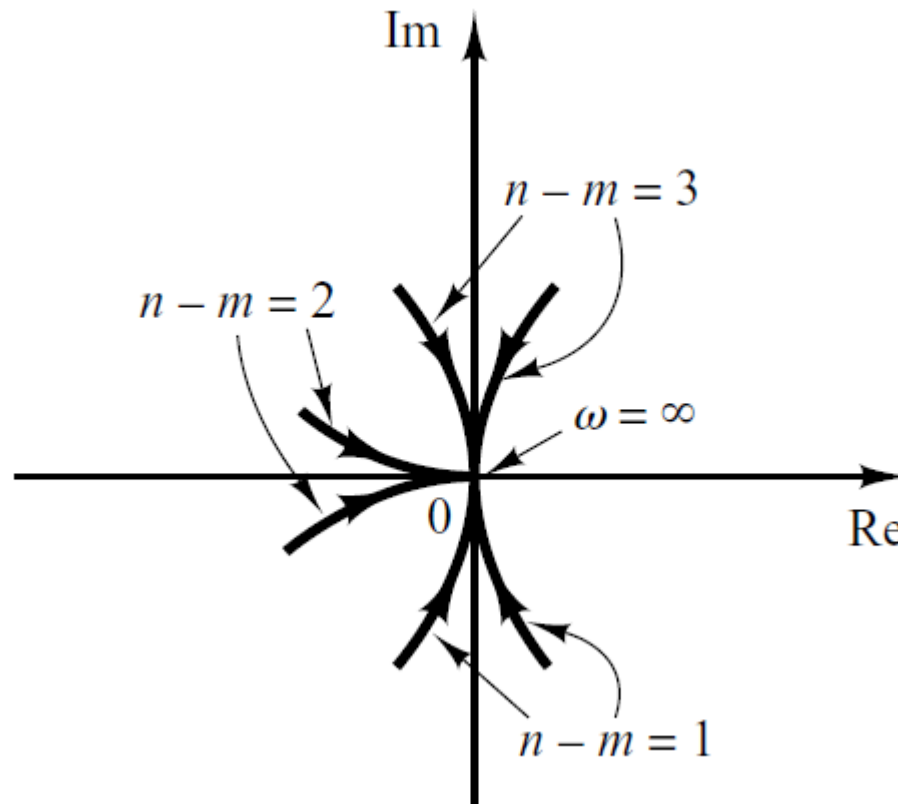
Previous Example

Next Example

$$G(j\omega) = \frac{k(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\dots}{(j\omega)^\lambda(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\dots} = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots}$$



High-Frequency Range: $G(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + \dots}{a_0(j\omega)^n + \dots}$

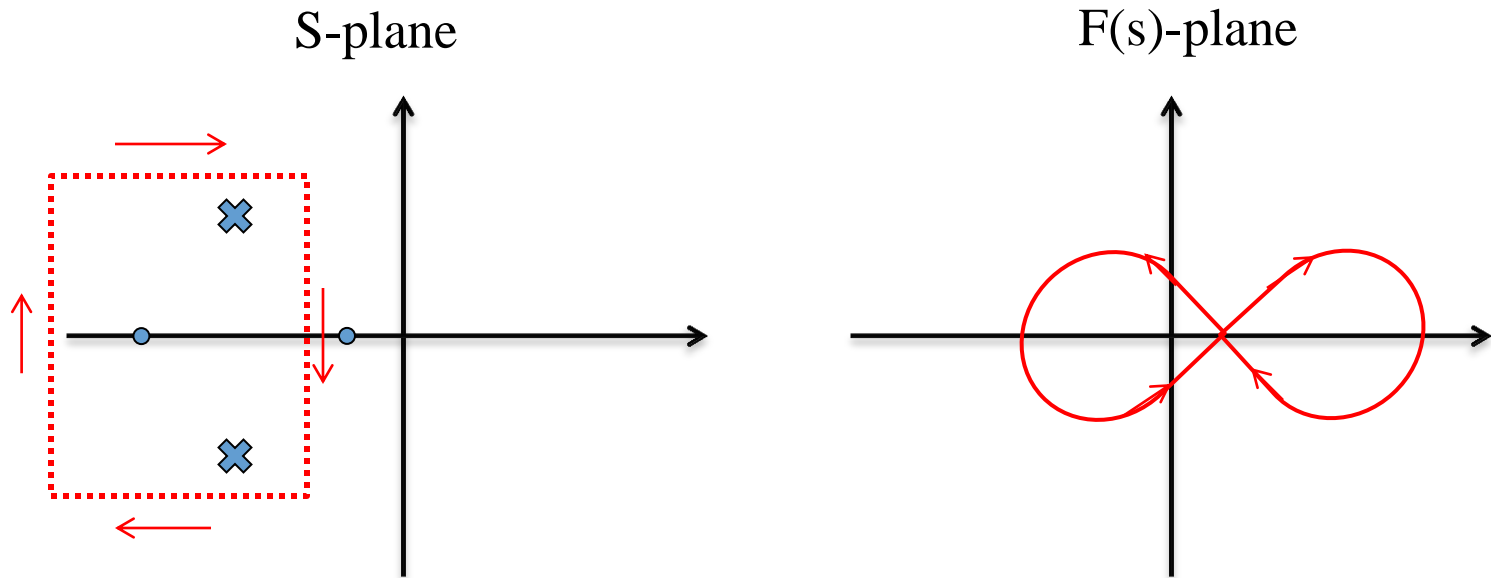


Part 3:

Stability Analysis

- Nyquist Stability Criterion
- Relative Stability

Contents



قطب و صفرهای $F(s)$

- برای مسیر بسته دلخواه، نگاشت ساعتگرد مسیر بسته در صفحه S یک مسیر بسته در صفحه $F(s)$ است که مبدا صفحه $F(s)$ را به اندازه $N=Z-P$ دفعه در جهت ساعتگرد دور می زند.

- چنانچه N منفی باشد، مسیر بسته صفحه $F(s)$ را در جهت پادساعتگرد دور می زند.

$$OLTF : G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \Rightarrow CLTF : \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\dots}{1 + \frac{A(s)}{B(s)}} = \frac{\dots}{\frac{B(s)+A(s)}{B(s)}}$$

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) \quad * \text{ فرض کنید:}$$

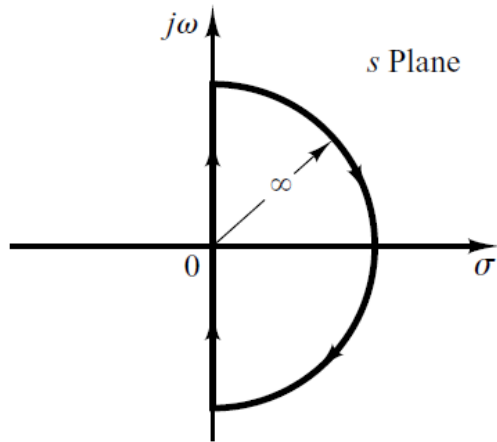
- صفرهای $F(s)$ ، قطب های مدار بسته و قطبهای آن، قطب های مدار باز هستند.

- پایداری مدار بسته ایجاب می کند که قطب های مدار بسته در سمت راست محور موهومی نباشد.

- مسیر نایکوئیست، مسیری بسته است که کل محور موهومی ($j\omega$) و نیمدایره ای به شعاع بی نهایت در سمت راست محور را شامل می شود.

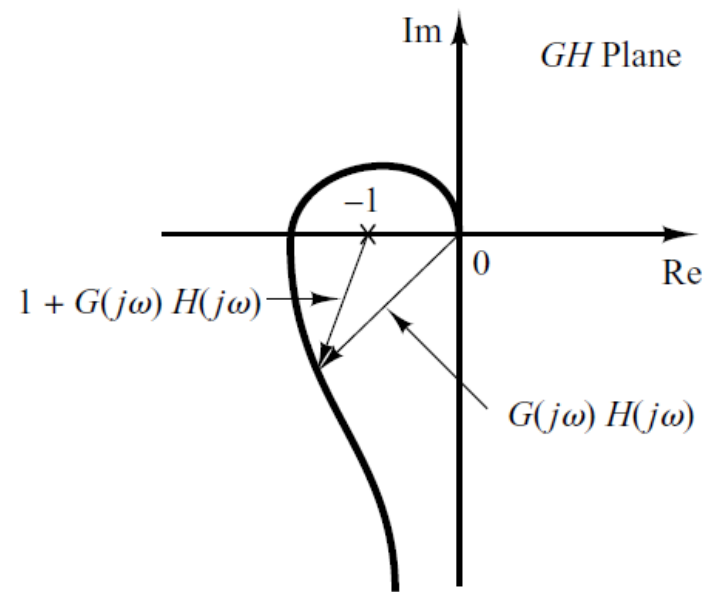
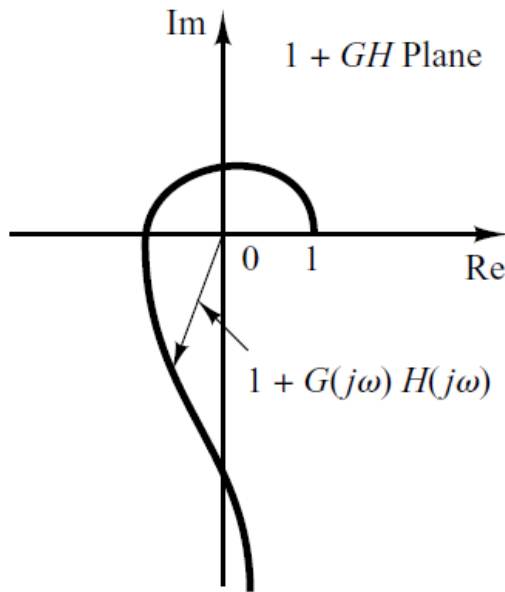
- شرط لازم برای مسیر نایکوئیست این است که از هیچ قطب و یا صفر $F(s)$ عبور نکند. در صورت وجود چنین نقطه ای، از مسیر اصلاح شده استفاده می شود.

- با معلوم بودن تعداد قطب های $F(s)$ و دیاگرام نایکوئیست آن، تعداد قطب های سمت راست مدار بسته و وضعیت پایداری سیستم مشخص می گردد.



- مسیر نایکوئیست:

- استفاده از دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل مدار باز در بررسی پایداری با انتقال محورها:



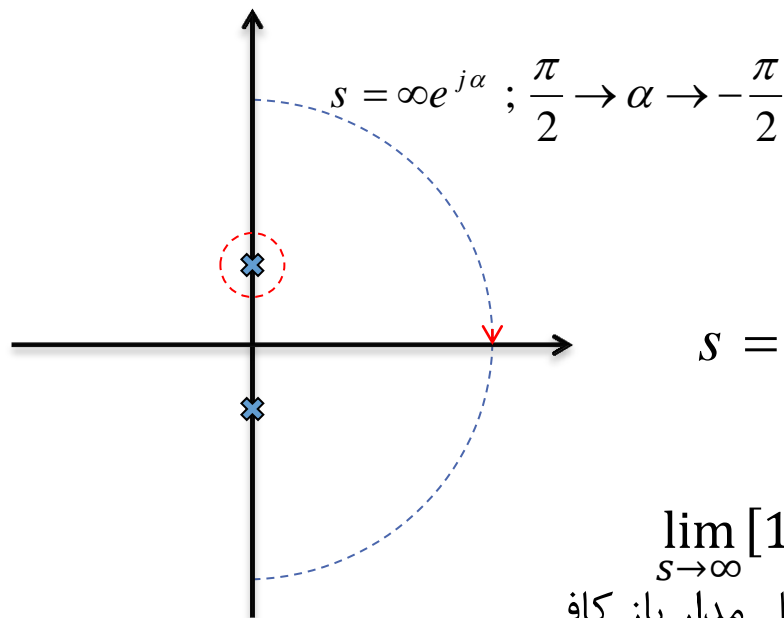
$G(s)H(s)$: تعداد قطب های ناپایدار مدار باز : P

N : تعداد دور زدن نقطه $-1+0j$ در جهت عقربه ساعت ساعتگرد

$Z=N+P$: تعداد قطب های ناپایدار مدار بسته

* شرط پایداری : $Z=0 \longrightarrow N= -P$

* مسیر نایکوئیست اصلاح شده:
(Modified Nyquist Path)



- توجه شود که چون $\lim_{s \rightarrow \infty} [1 + GH] = Constant$ برای بررسی پایداری، دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل مدار باز کافی است.

- نکته: برای سیستم MP اگر روی منحنی نایکوئیست مدار باز حرکت کنیم و نقطه $-1+j0$ در سمت چپ ما باشد، سیستم مدار بسته نا پایدار است.

* مثال: پایداری سیستم مدار بسته با تابع تبدیل مدار باز زیر را بررسی کنید:

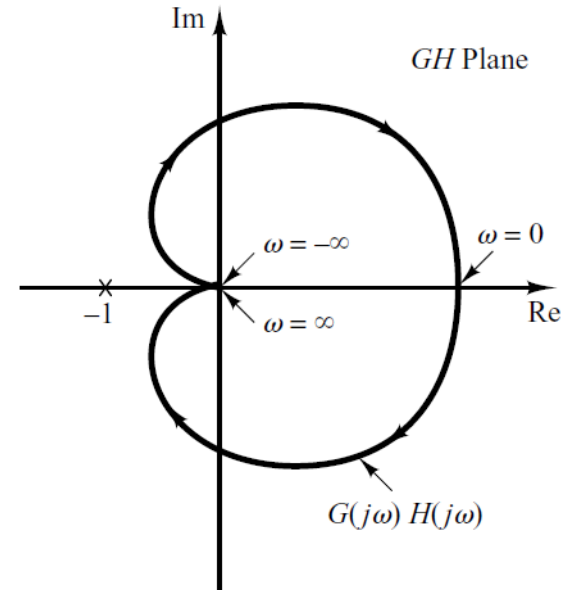
$$G(s)H(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$M = |GH(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(T_1\omega)^2 + 1}\sqrt{(T_2\omega)^2 + 1}}$$

$$\phi = \angle GH(j\omega) = -\tan^{-1}T_1\omega - \tan^{-1}T_2\omega$$

$$\omega \rightarrow 0 \begin{cases} M_0 = 1 \\ \phi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\omega \rightarrow \infty \begin{cases} M_\infty = 0 \\ \phi_\infty = -90 - 90 = -180 \end{cases}$$



$Z=0$: سیستم مدار بسته پایدار است.

Previous Example

$$G(s) = \frac{k}{Ts - 1}$$

* مثال: پایداری سیستم مقابل را بررسی نمایید:

- حل:

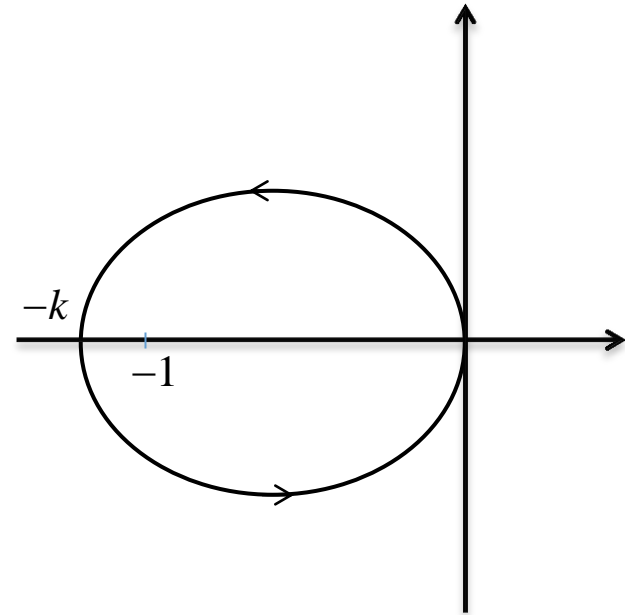
- یک قطب سمت راست محور داریم: $P=1$

$$M = |G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}$$

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{T\omega}{-1}$$

$$\omega = 1 \Rightarrow M_o = k; \quad \phi_o = -180$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow M_\infty = 0; \quad \phi_\infty = -90$$



- چنانچه $k < 1$ باشد، $N=0$ و $Z=1$. در نتیجه سیستم مدار بسته ۱ قطب ناپایدار دارد.

- چنانچه $k > 1$ باشد، $N=-1$ و $Z=0$. در نتیجه سیستم مدار بسته ۱ پایدار خواهد بود.

$$G(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

* مثال: پایداری سیستم مقابل را بررسی نمایید:

- حل:

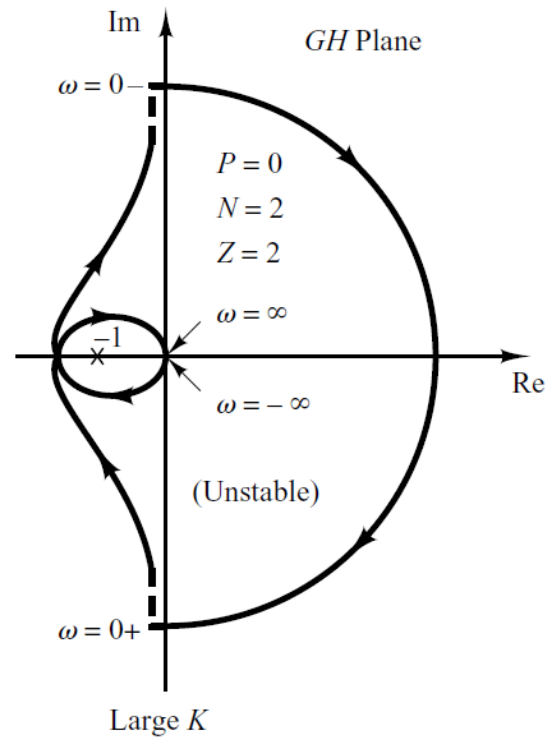
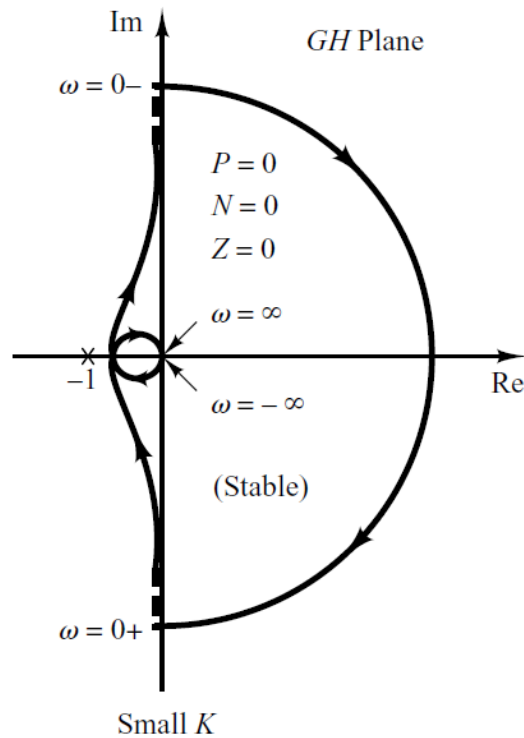
$$M = \frac{k}{\omega \sqrt{(T_1\omega)^2 + 1} \sqrt{(T_2\omega)^2 + 1}}, \quad \phi = -90 - \tan^{-1}T_1\omega - \tan^{-1}T_2\omega$$

$$M_0 = \infty, \phi_0 = -90, \quad M_\infty = 0, \phi_\infty = -270$$

$$\phi_a = -180 \rightarrow \tan^{-1}T_1\omega_a + \tan^{-1}T_2\omega_a = 90 \rightarrow \tan(\tan^{-1}T_1\omega_a + \tan^{-1}T_2\omega_a) = \infty$$

$$\Rightarrow T_1\omega_a \times T_2\omega_a = 1 \Rightarrow \omega_a = \sqrt{\frac{1}{T_1T_2}}$$

- ادامه:



- با توجه به اینکه $P=0$, شرط پایداری مدار بسته این است که $M(\omega_a) < 1$ باشد. در نتیجه:

$$M(\omega_a) = \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}} \sqrt{\frac{1}{T_1} + 1} \sqrt{\frac{1}{T_2} + 1}} < 1 \rightarrow k < \frac{\sqrt{(T_1 + 1)(T_2 + 1)}}{T_1 T_2}$$

* مثال: پایداری سیستم مقابل را بررسی نمایید:

$$GH(s) = \frac{k(s+3)}{s(s-1)}, (k > 1)$$

- حل:

$$M = \frac{k\sqrt{\omega^2+9}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}, \phi(\omega) = -90 + \tan^{-1} \frac{\omega}{3} - \tan^{-1} \frac{\omega}{-1}$$

$$\phi_a = -180 = -90 + \overbrace{\tan^{-1} \frac{\omega_a}{3}}^{\alpha} - \underbrace{\tan^{-1} \frac{\omega_a}{-1}}_{\beta} \Rightarrow 90 = -\alpha + \beta \Rightarrow \infty = \tan(\beta - \alpha)$$

$$\Rightarrow \infty = \frac{\tan(-\alpha)\tan(\beta)}{1 - \tan(-\alpha)\tan(\beta)} \Rightarrow 1 = \tan(-\alpha)\tan(\beta) = -\left(\frac{\omega_a}{3}\right)\left(\frac{\omega_a}{-1}\right) = \frac{\omega_a^2}{3} \Rightarrow \omega_a = \sqrt{3}$$

$$M_a = \frac{k\sqrt{\sqrt{3}^2+4}}{\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}^2+1}} = k$$

- ادامه:

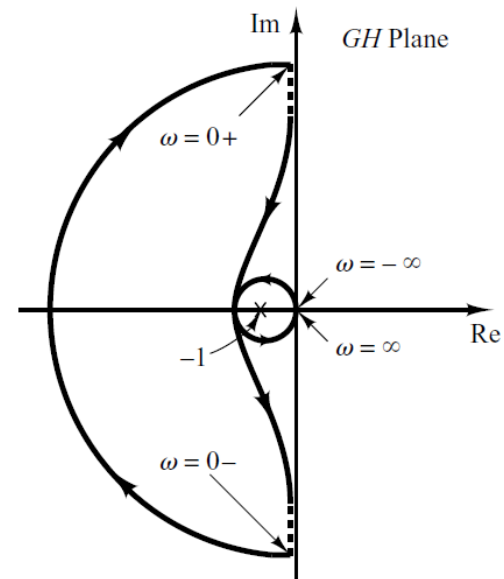
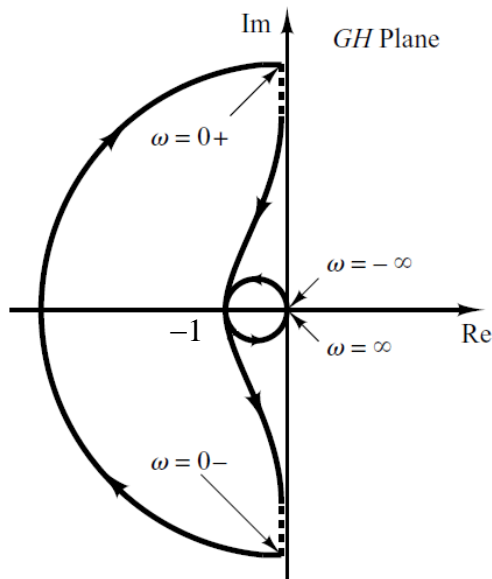
- با توجه به وجود قطب روی محور موهومی از مسیر نایکوئیست اصلاح شده استفاده می کنیم:

$$GH(\varepsilon e^{j\theta}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3k}{-\varepsilon e^{j\theta}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3k}{3e^{j\pi} e^{j\theta}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3k}{\varepsilon} e^{j\alpha} \rightarrow \alpha = -(\pi + \theta)$$

$$\theta = \frac{-\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{-\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{-3\pi}{2}, \quad \theta = 0 \rightarrow \alpha = -\pi$$

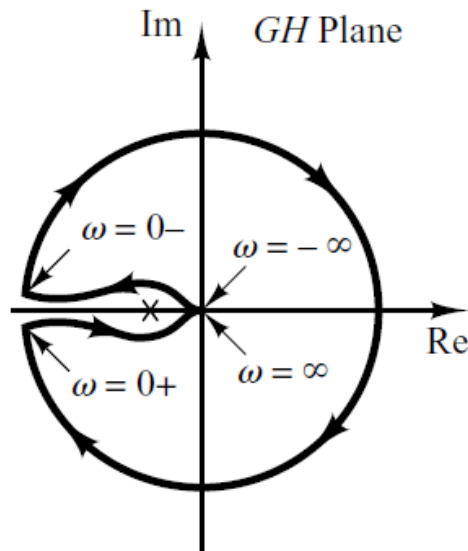
$$k < 1 \rightarrow M_a < 1 \rightarrow N = 1, P = 1 \rightarrow Z = 2$$

$$k > 1 \rightarrow M_a > 1 \rightarrow N = -1, P = 1 \rightarrow Z = 0$$

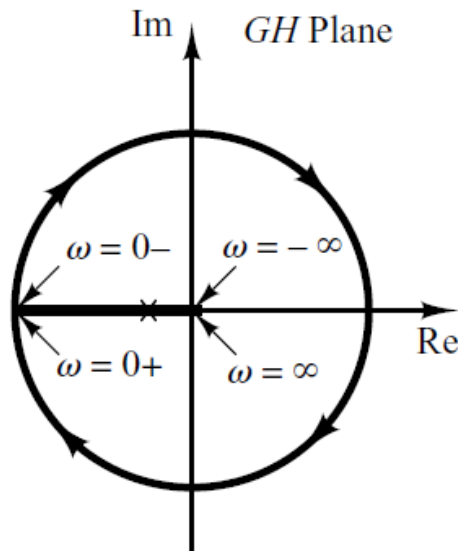


$$G(s) = \frac{K(T_2s + 1)}{s^2(T_1s + 1)}$$

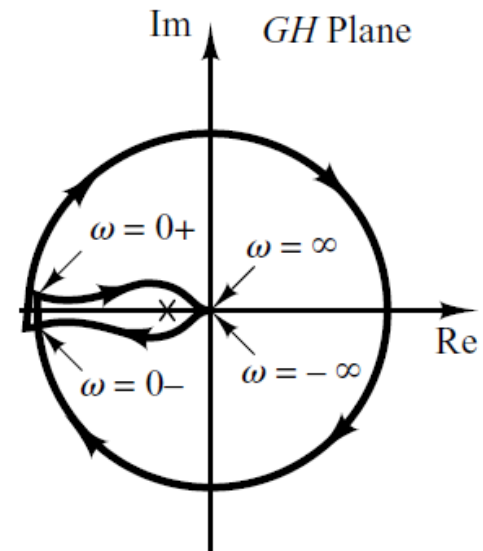
* مثال: پایداری سیستم مقابل را بررسی نمایید:



$T_1 < T_2$
(Stable)



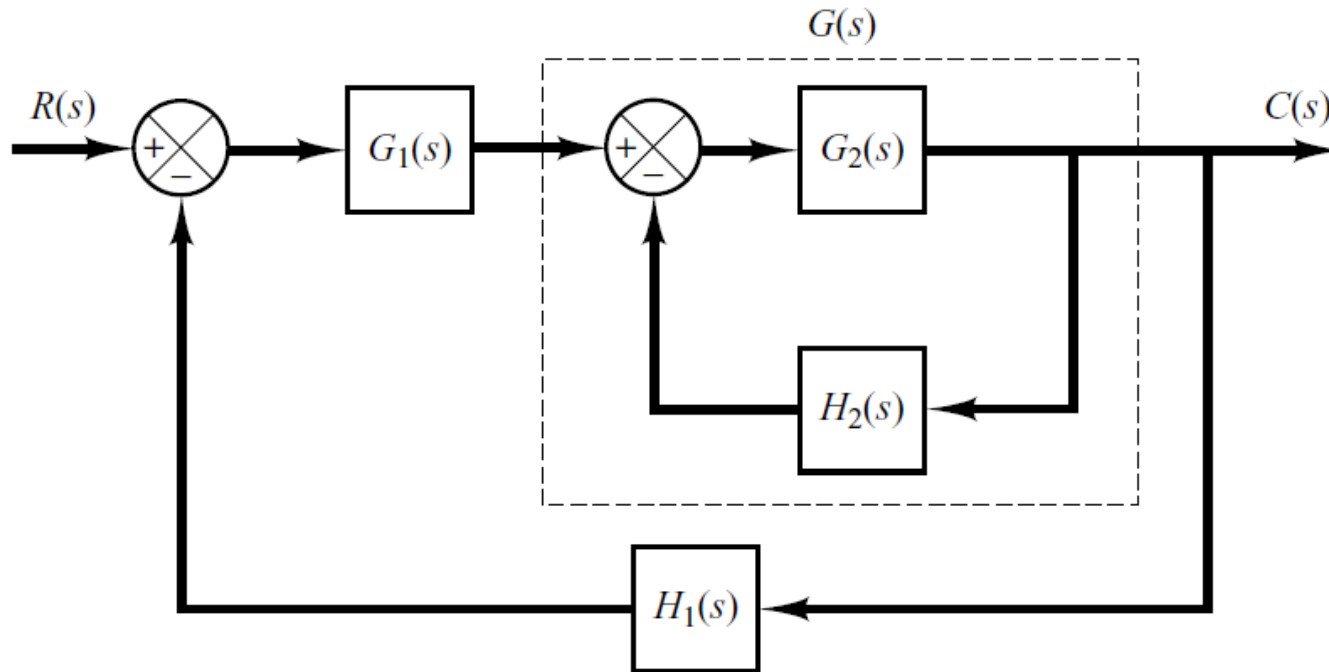
$T_1 = T_2$
 $G(j\omega)H(j\omega)$ locus
passes through the
 $-1 + j0$ point



$T_1 > T_2$
(Unstable)

Next Example

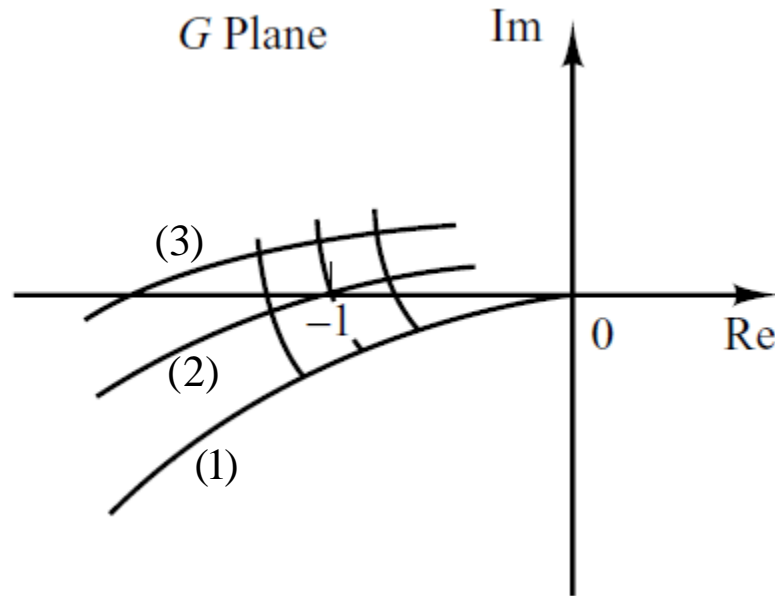
Multiple-Loop System



$$G(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H_2(s)}$$

$$\text{Overall O.L.T: } G_1(s)G(s)H_1(s)$$

- با حذف یک لوپ فیدبک با روش دیاگرام بلوکی، امکان ایجاد قطب ناپایدار وجود دارد.
- با حذف یک شاخه فیدفوروارد، امکان ایجاد صفر سمت راست در سیستم کلی وجود دارد.
- برای بررسی سیستم کلی باید قطب و صفرهای حاصل از حذف لوپ های داخلی در نظر گرفته شود.



- (1) مدار بسته پایدار
- (2) مدار بسته در مرز پایداری
- (3) مدار بسته ناپایدار

* حد بهره (Gain Margin): معکوس اندازه به ازای فرکانس قطع مربوط به زاویه فاز ۱۸۰ درجه است.

$$\omega_{pc} : \text{Phase cross over frequency} \rightarrow k_g = \frac{1}{M_{pc}} = \frac{1}{M(\omega_{pc})}$$

$$\bar{k}_g = 20 \log k_g = -20 \log M(\omega_{pc})$$

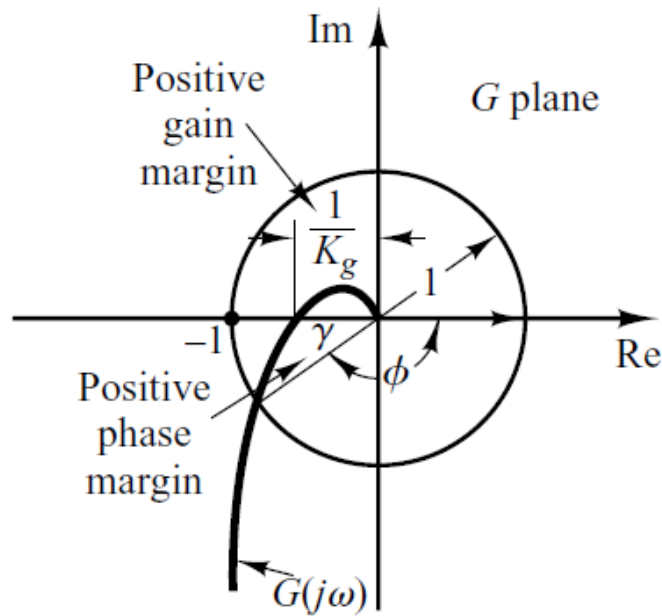
$$k_g > 1 \text{ or } \bar{k}_g > 0 \text{ dB}$$

* شرط پایداری مدار بسته :

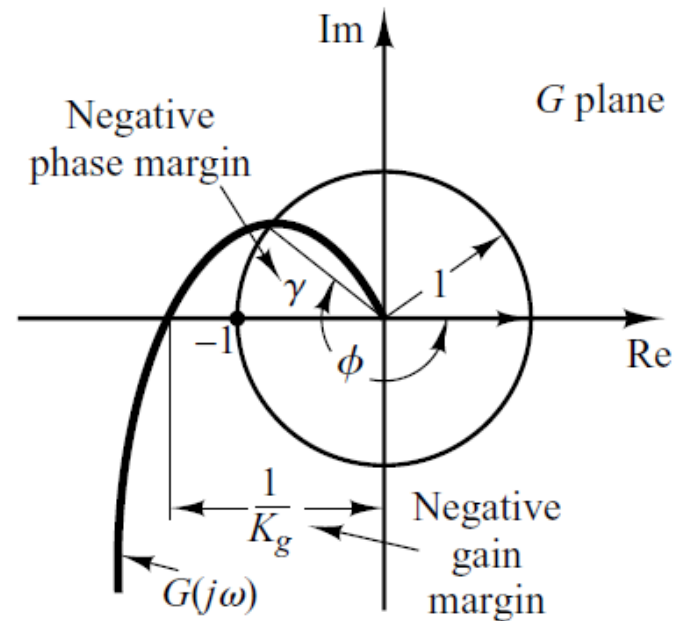
* حد فاز: میزان Lag اضافی لازم است تا سیستم به مرز ناپایداری برسد.
 - این مقدار برابر زاویه فاز مربوط به اندازه واحد به اضافه ۱۸۰ درجه است:

$$\gamma = 180^\circ + \phi$$

- فرکانس مربوط به اندازه واحد، فرکانس قطع اندازه نامیده می شود.
 - مقایسه دیاگرام نایکوئیست سیستم پایدار و ناپایدار:

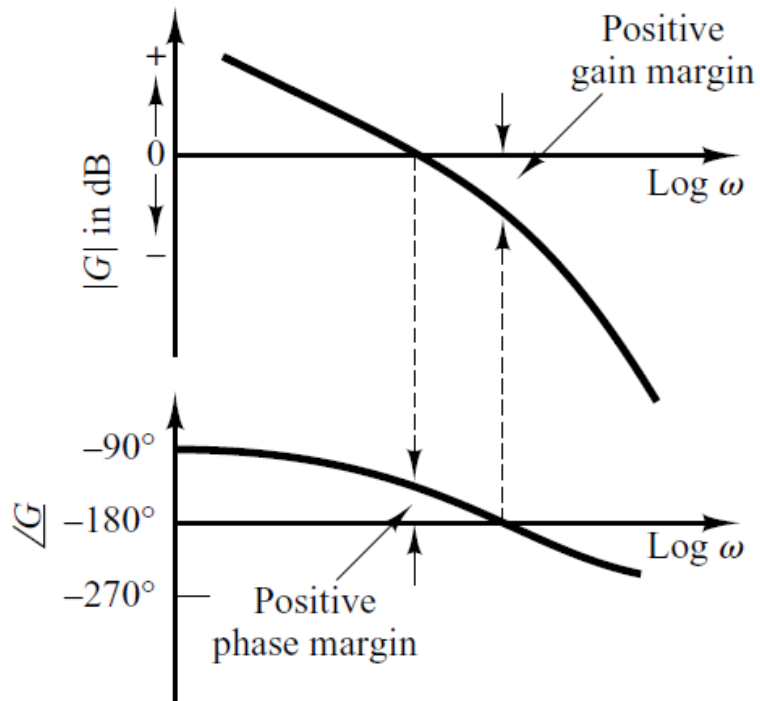


Stable system

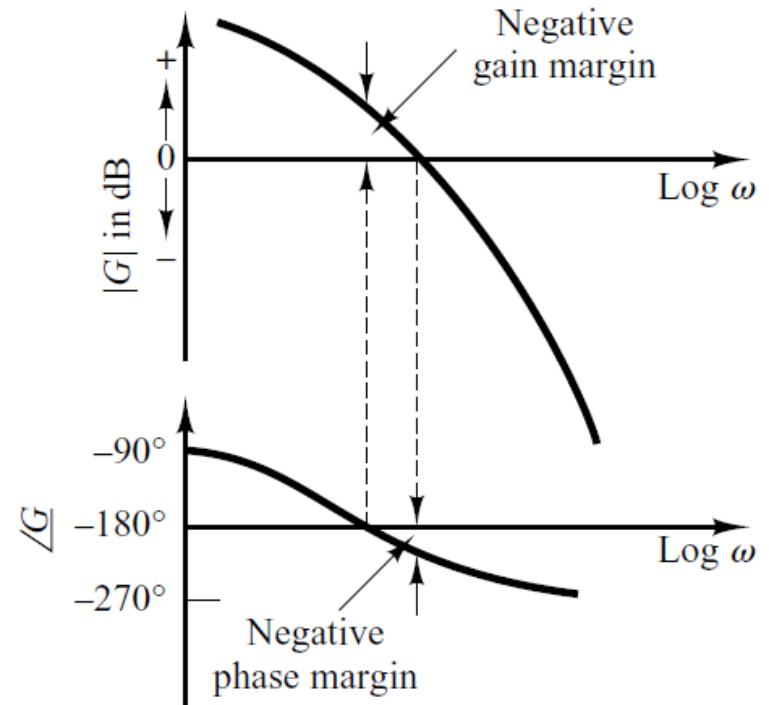


Unstable system

* مقایسه دیاگرام بود سیستم پایدار و ناپایدار:



Stable system



Unstable system

$$\gamma > 0, \bar{k}_g > 0$$

* شرط پایداری برای سیستم های MP:

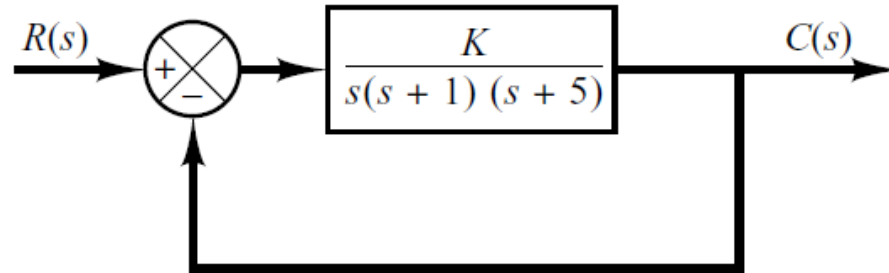
* نکته: برای سیستم رسته دو:

$$\frac{C}{R} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow \gamma = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}}$$

$$30^\circ < \gamma < 60^\circ, \bar{k}_g > 6dB$$

* حد بهره و فاز مناسب برای سیستم کنترلی:

* مثال: حد بهره و فاز سیستم زیر را به ازای $k=10, 100$ بیابید:



- حل:

$$M(\omega) = \frac{k}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+25}}, \quad \phi(\omega) = -90 - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{5}$$

$$M(\omega_{gc}) = 1: \begin{cases} k = 10 \rightarrow 10 = \omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+25} \rightarrow \omega_{gc} = 1.23 \text{ r/s} \\ k = 100 \rightarrow 100 = \omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+25} \rightarrow \omega_{gc} = 3.91 \text{ r/s} \end{cases}$$

Previous Example

* ادامه:

* $k=10$

$$\phi(\omega_{gc}) = -90 - \tan^{-1}(1.23) - \tan^{-1}\left(\frac{1.23}{5}\right) = -154.71 ,$$

$$\gamma = 180 - 154.71 = 25.29 > 0$$

- سیستم مدار بسته پایدار خواهد بود:

* $k=100$

$$\phi(\omega_{gc}) = -90 - \tan^{-1}(3.91) - \tan^{-1}\left(\frac{3.91}{5}\right) = -203.68$$

$$\gamma = 180 - 203.68 = -23.68 < 0$$

- سیستم مدار بسته ناپایدار خواهد بود:

* ادامه:

$$\phi(\omega_{pc}) = -180 = -90 - \overbrace{\tan^{-1} \omega}^{\alpha} - \underbrace{\tan^{-1} \frac{\omega}{5}}_{\beta} \Rightarrow 90 = \alpha + \beta \Rightarrow \infty = \tan(\beta + \alpha)$$

$$\Rightarrow \infty = \frac{\tan(\alpha) \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)} \Rightarrow 1 = \tan(\alpha) \tan(\beta) = (\omega) \left(\frac{\omega}{5} \right) = \frac{\omega^2}{5} \Rightarrow \omega_{pc} = \sqrt{5}$$

$$M(\omega_{pc}) = \frac{k}{\sqrt{30} \sqrt{6} \sqrt{5}} = \frac{k}{30}$$

* به ازای $k=10$ ، سیستم مدار بسته پایدار است:

$$k = 10 \rightarrow k_g = 3 > 1 \rightarrow \bar{k}_g = 0.5dB > 0$$

* به ازای $k=100$ ، سیستم مدار بسته ناپایدار است:

$$k = 100 \rightarrow k_g = 0.3 < 1 \rightarrow \bar{k}_g = -10dB < 0$$

Thanks for your attention!

Contents