Sharif University of Technology
School of Mechanical Engineering

Instructor:
Professor Aria Alasty

Automatic Control

Chapter 7:

Control Systems Design by Root-Locus Method

1391-92 Fall Semester

Contents

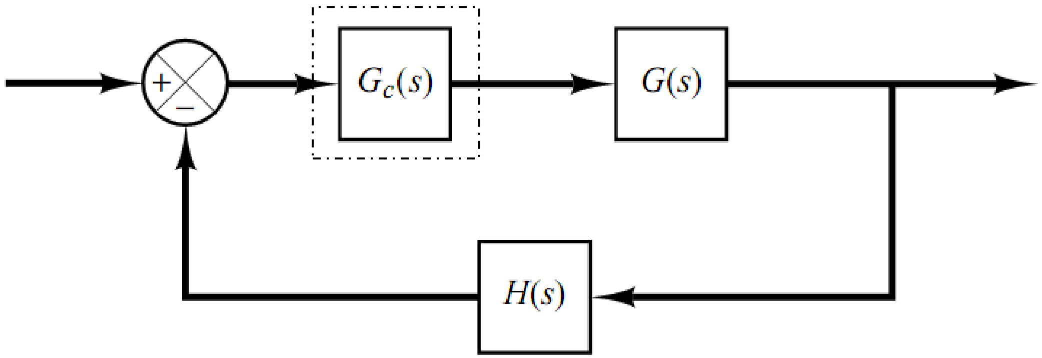
Contents


Sharif University of Technology

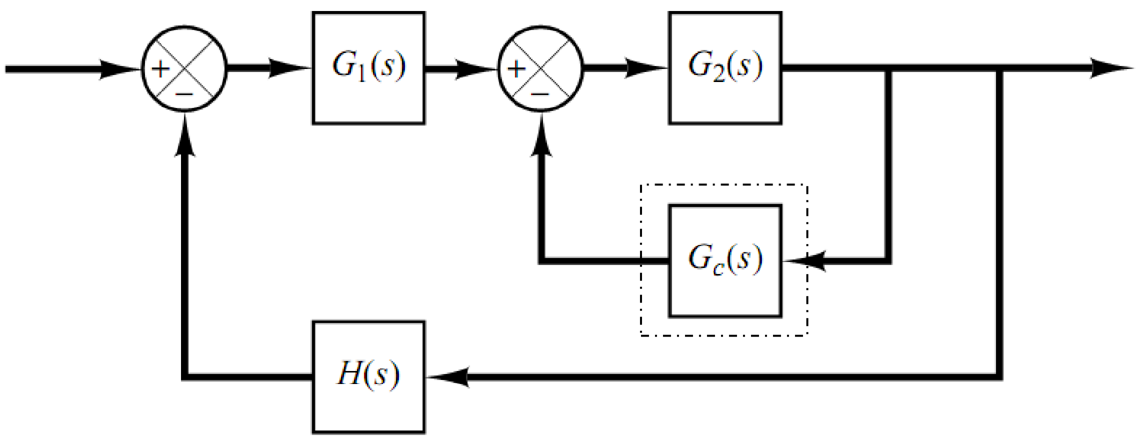
Compensator

❋ جبرانسازها برای بهبود ویژگی های عملکردی سیستم های کنترلی به کار می روند.

❋ جبرانساز سری:



❋ جبرانساز موازی:



❋ هدف از طراحی جبرانساز بهبود یک یا چند ویژگی های زیر است:

Performance (کارایی و بازده) – Stability (دقت و پایداری) – Speed of response (سرعت)

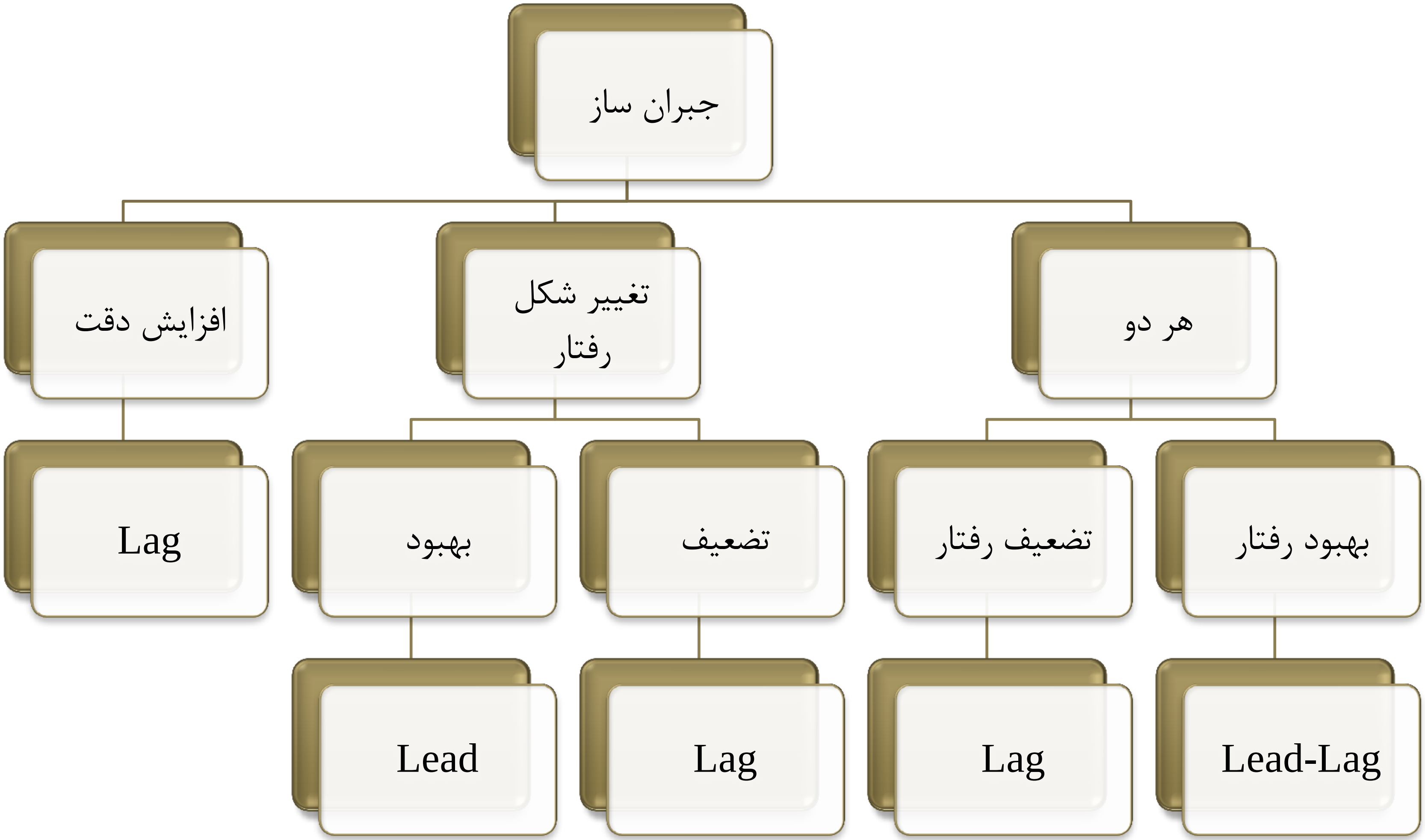
❋ انواع جبرانسازها:

- Lead
- Lag

❋ شکل کلی تابع تبدیل جبرانساز:

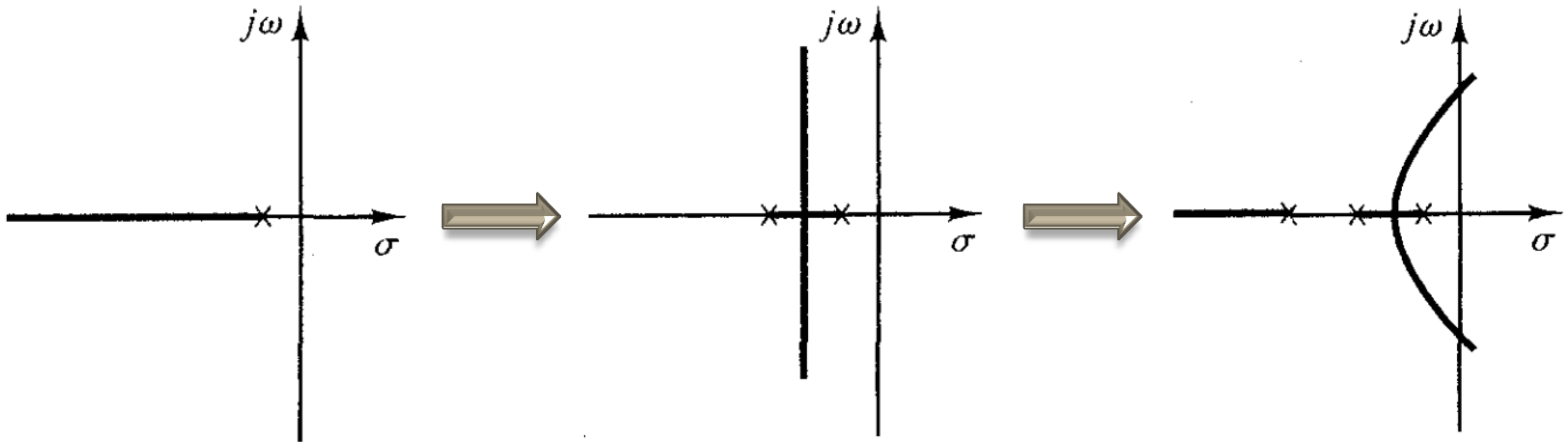
$$G_c = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

– جبرانساز یک صفر و یک قطب به تابع تبدیل مدار باز اضافه می کند، با تنظیم صفر و قطب اضافه شده، می توان رفتار سیستم را اصلاح کرد.


جبران ساز
افزایش دقت
تغییر شکل رفتار
هر دو
Lag
بهبود
تضعیف
تضعیف رفتار
بهبود رفتار
Lead
Lag
Lag
Lead-Lag

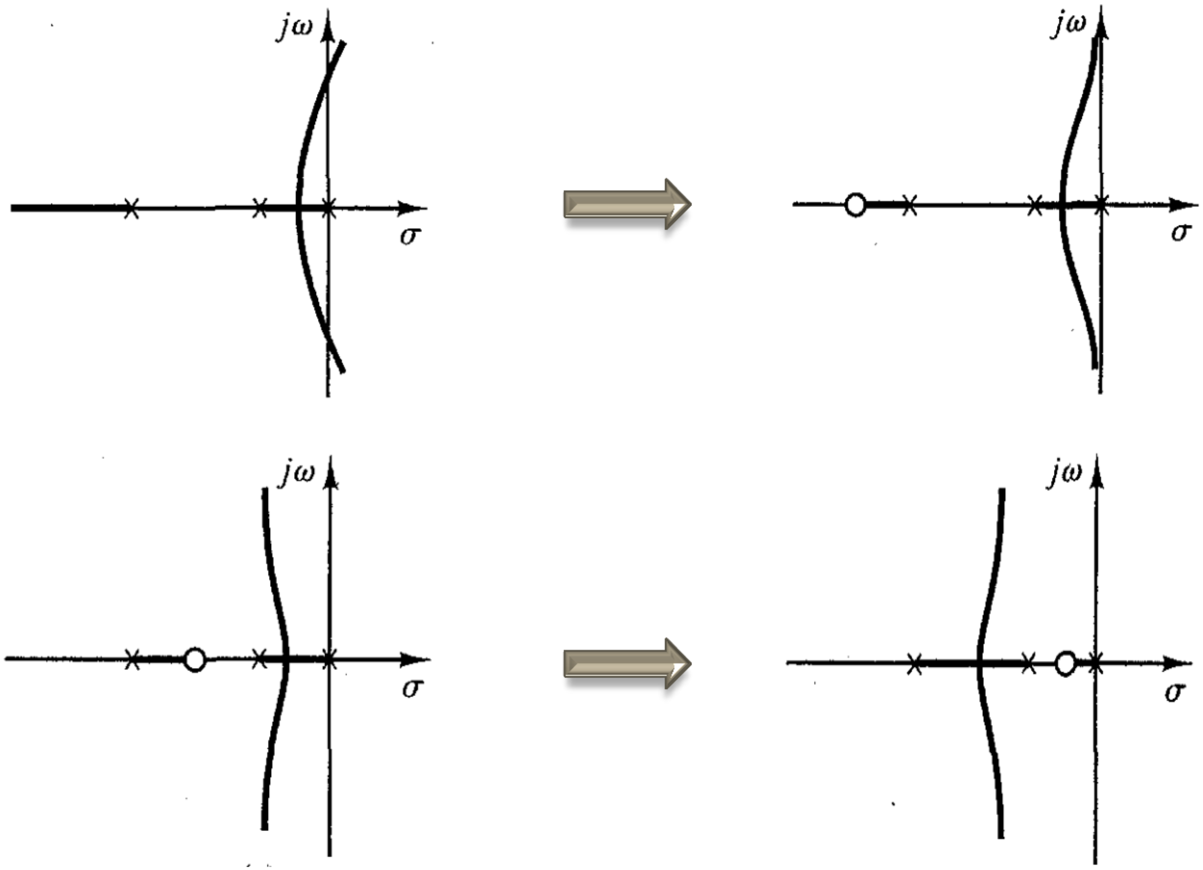
❋ اثر افزایش قطب:

-کشیده شدن مکان هندسی ریشه ها به سمت راست و در نتیجه کاهش سرعت و پایدای سیستم مدار بسته است.

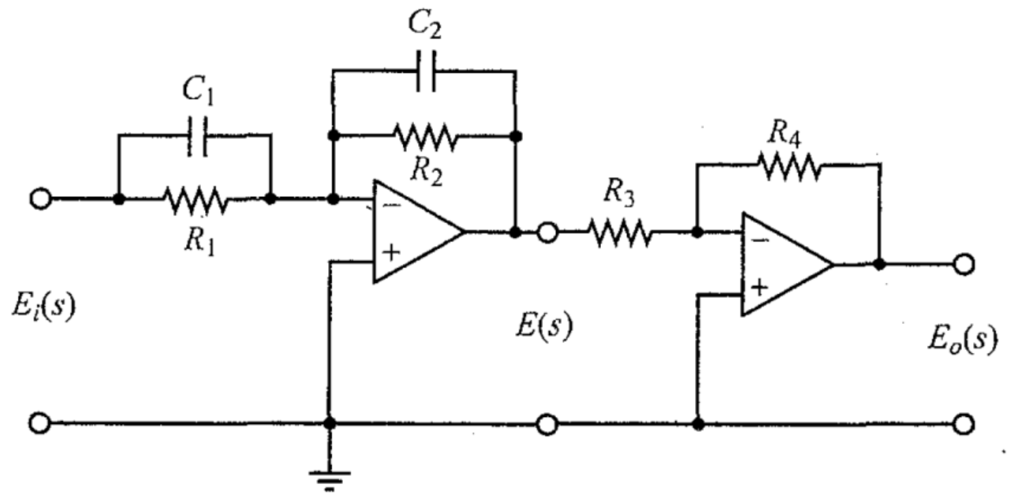


❋ اثر افزایش صفر:

-کشیده شدن مکان هندسی ریشه ها به سمت چپ و در نتیجه افزایش سرعت و پایداری سیستم مدار بسته است.



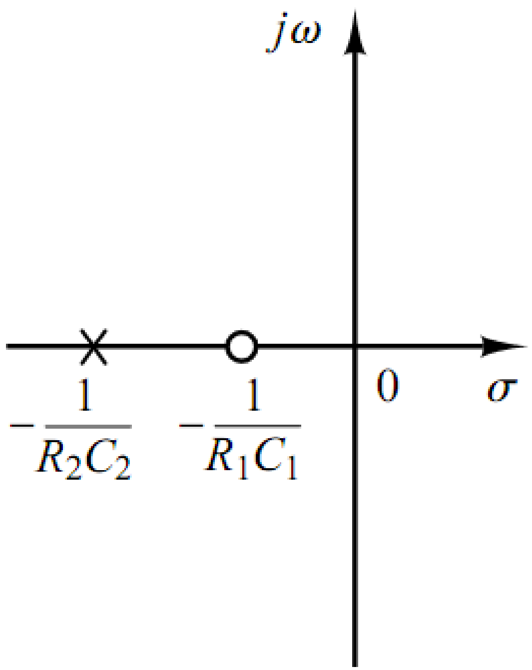
* ساختار جبرانساز الکترونیکی با آپ-امپ:



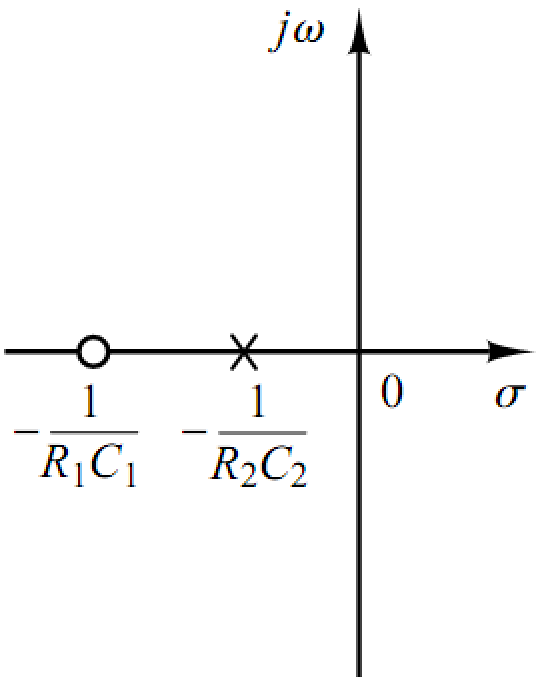
$$\frac{E_o}{E_i} = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = k_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

$$k_c = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \;,\; T = R_1 C_1 \;,\; \alpha T = R_2 C_2 \;,\; DC \;\; gain: k_c \alpha = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}$$

$\alpha < 1$: *Lead network*



$\alpha > 1$: *Lag network*



Part 1:

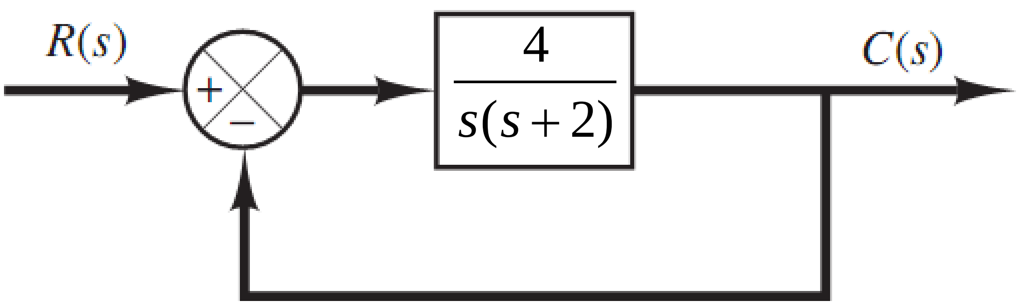
Lead and Lag Compensators Design

- Example I: Lead Compensator
- Example II: Lag Compensator

Contents

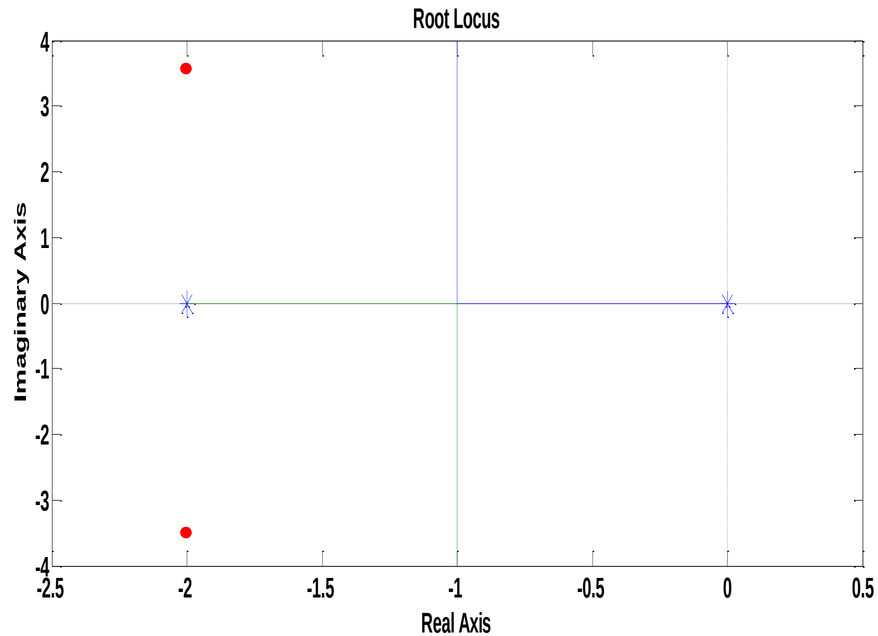
❋ مثال: برای سیستم زیر جبرانساز مناسب طراحی کنید. هدف به دست آوردن خواص زیر برای سیستم مدار بسته است:

$\xi = 0.5 \ , \ \omega_n = 4$



Next Example

❇ حل:

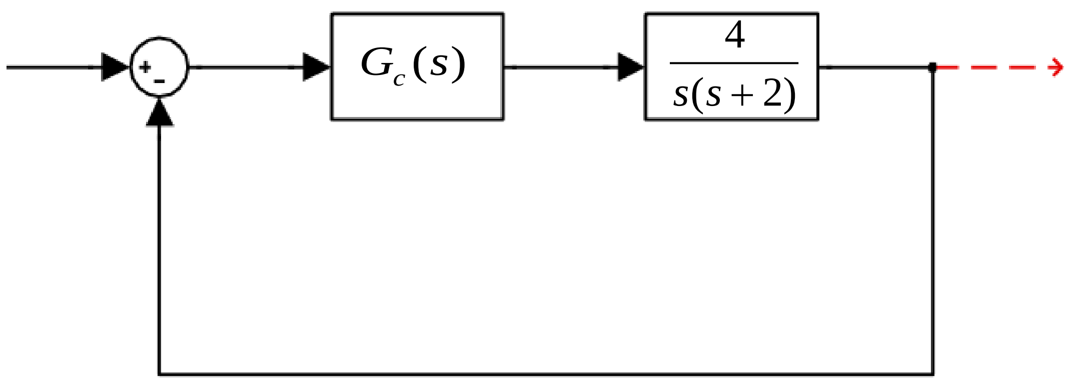


$$Roots:\begin{cases}\xi = 0.5 \\ \omega_n = 4\end{cases} \Rightarrow s_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{3}j$$

– مشاهده می شود که قطب های مطلوب برای سیستم مداربسته روی مکان قرار نمی گیرند. در نتیجه با تغییر بهره کنترلی، نمی توان به سیستم مدار بسته دلخواه رسید و نیاز به طراحی جبرانساز وجود دارد.

❊ ادامه:

– با توجه به مکان قطب های مطلوب، مشاهده می شود که نیاز به انتقال مکان به سمت چپ وجود دارد. در نتیجه به یک جبرانساز lead نیاز خواهیم داشت.



$$G_c(s) = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

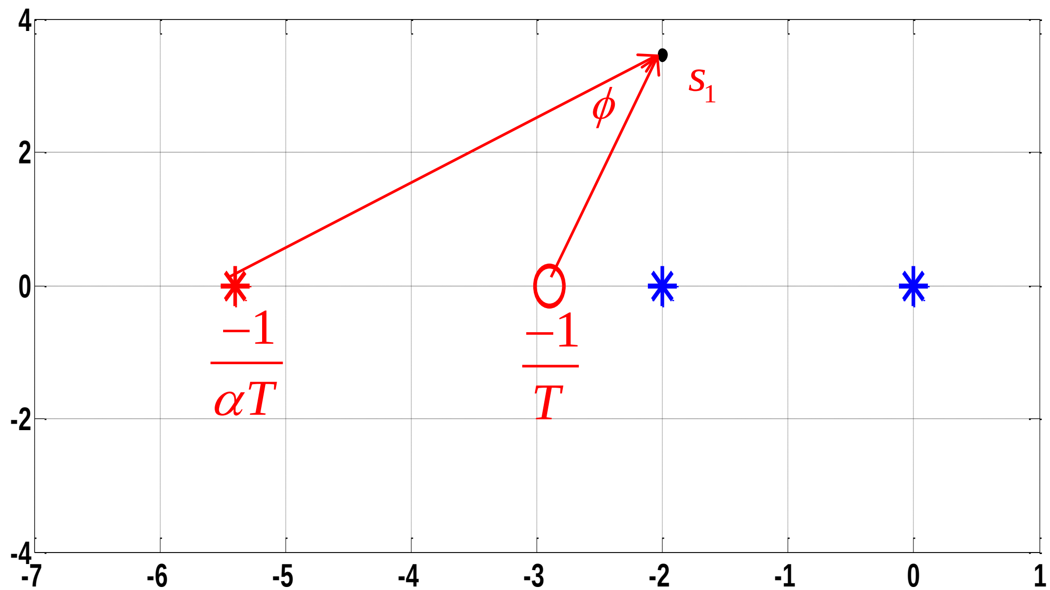
– برای سیستم جبران شده باید شرایط اندازه و زاویه در قطب های مطلوب برقرار باشند.

❊ ادامه:

$$\angle G_c(s_1)G(s_1) = \phi + \angle G(s_1) = \pm 180(2l+1) \Rightarrow \phi + 0 - \angle s_1 - \angle (s_1+2) = \pm 180(2l+1)$$

$$s_1 = -2 + j2\sqrt{3} \Rightarrow \phi + 0 - (180 + \tan^{-1}(\frac{2\sqrt{3}}{-2})) - \tan^{-1}(\frac{2\sqrt{3}}{2-2}) = \pm 180(2l+1)$$

$$\phi + 0 - 120 - 90 = \pm 180(2l+1) \Rightarrow \phi = 30$$



❊ ادامه:

❊ برای بدست آوردن محل صفر و قطب جبرانساز دو روش وجود دارد:

- صفر جبرانساز را بر قطب مدار باز منطبق می کنیم و با استفاده از pole-zero cancellation رسته ی سیستم را کم می کنیم.
- روش نیمساز: سیستم بدست آمده با این روش بهترین کارایی را دارد زیرا با این روش بیشترین DC gain بدست می آید.

❊ فرمول بدست آوردن مکان صفر و قطب جبرانساز با استفاده از روش نیمساز:

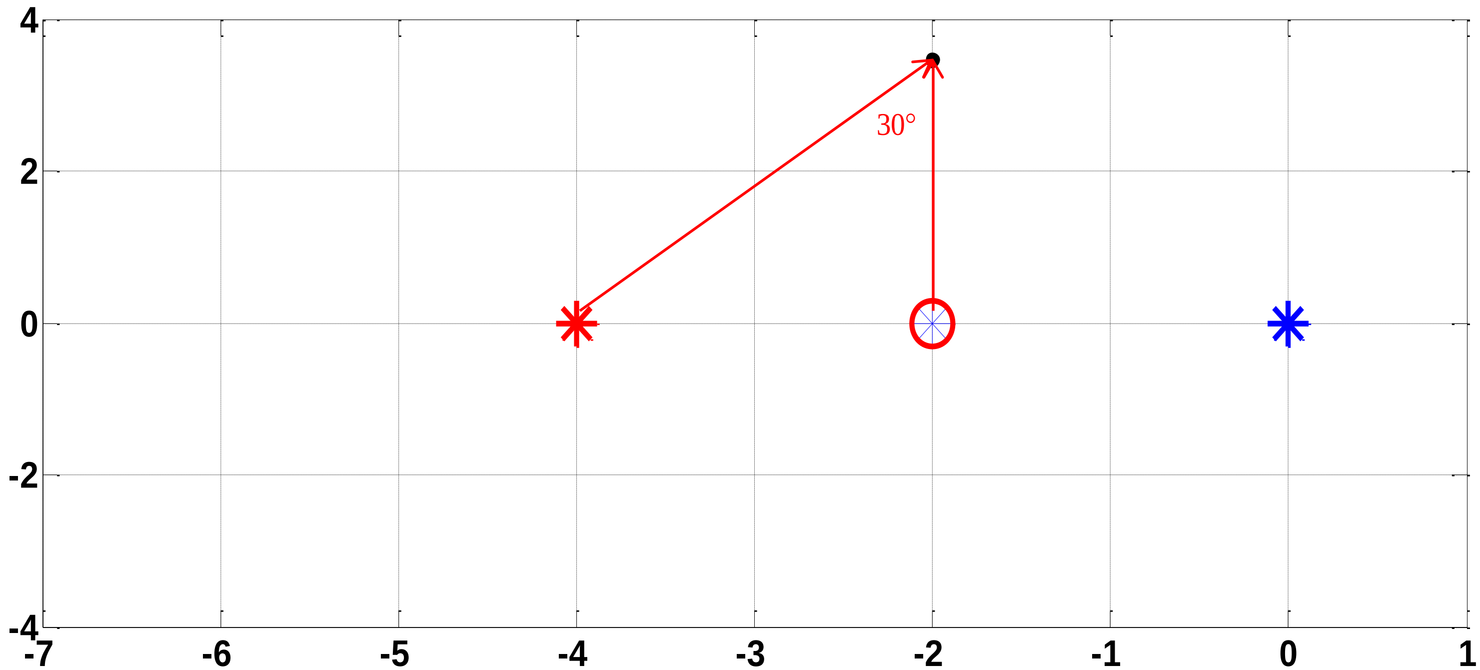
$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$$

$$-z = -\sigma - \omega \tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) - \phi}{2}\right), \quad -p = -\sigma - \omega \tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \phi}{2}\right)$$

$$G_c(s) = k_c \frac{s+z}{s+p}$$

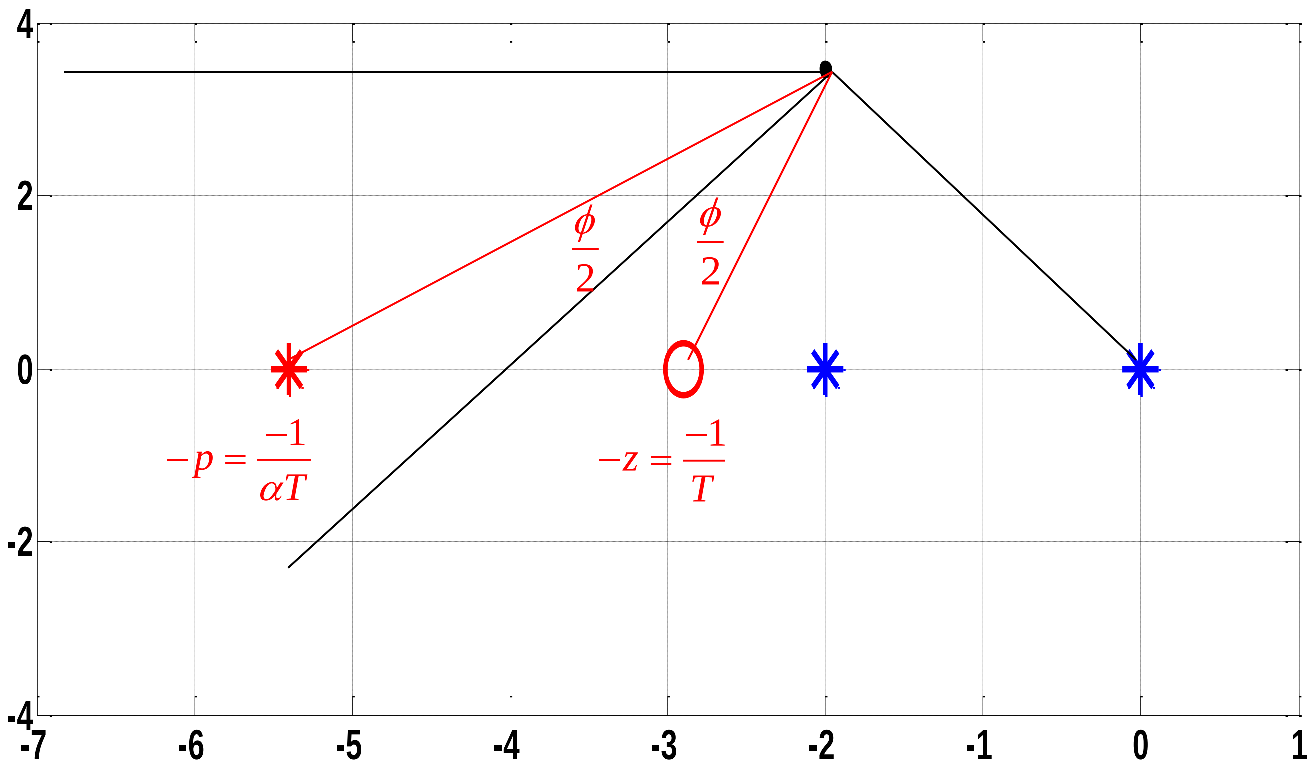
❉ ادامه:

- روش pole-zero cancellation:



❇ ادامه:

- حل با استفاده از روش نیمساز:



❋ ادامه: با استفاده از روش نیمساز برای این مثال داریم:

$$\begin{cases} -z = -\sigma - \omega \tan\left(\dfrac{\tan^{-1}(\frac{\omega}{\sigma}) - \phi}{2}\right) = -2.9 \\ -p = -\sigma - \omega \tan\left(\dfrac{\tan^{-1}(\frac{\omega}{\sigma}) + \phi}{2}\right) = -5.4 \end{cases} \Rightarrow G_c(s) = k_c \frac{s+2.9}{s+5.4}$$

- برای بدست آوردن مقدار عددی k_c از شرط اندازه استفاده می کنیم:

$$k_c \frac{|s_1 + 2.9|}{|s_1 + 5.4|} \cdot \frac{4}{|s_1| . |s_1 + 2|} = 1 \Rightarrow k_c = \frac{\sqrt{3.4^2 + 12} \times \sqrt{2^2 + 12} \times 2\sqrt{3}}{4\sqrt{0.9^2 + 12}} \Rightarrow k_c = 4.68$$

- بنابراین:

$$G_c(s) = 4.68 \frac{s+2.9}{s+5.4}$$

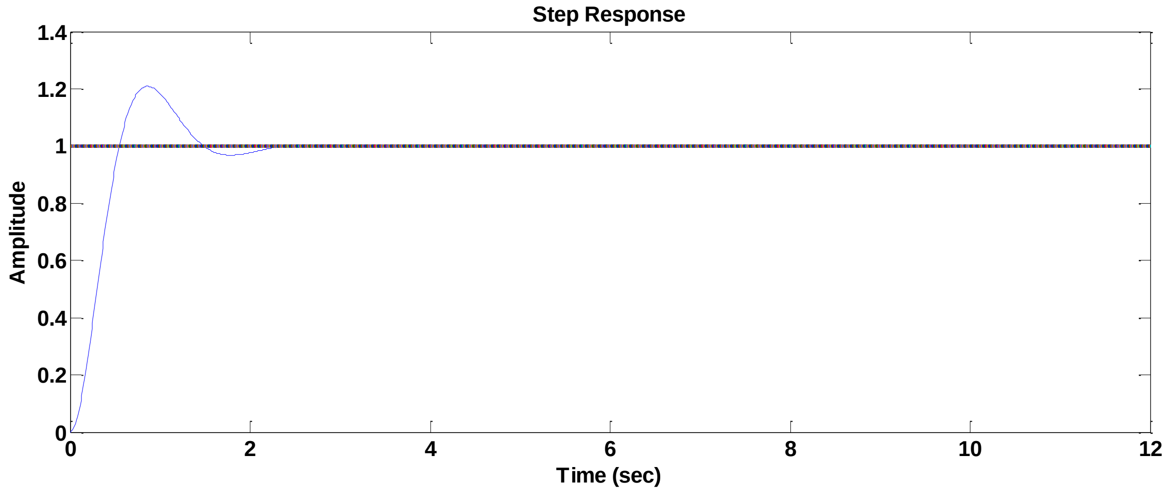
❊ ادامه:

– محاسبه قطب سوم مدار بسته ناشی از اضافه کردن جبرانساز به مدار باز:

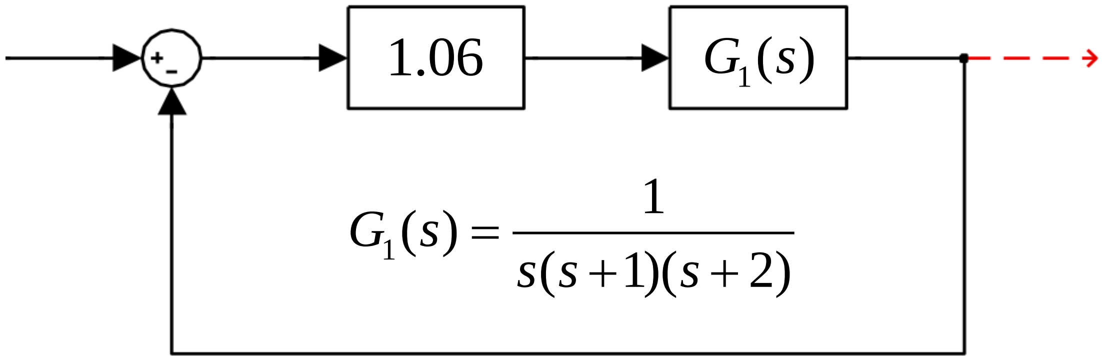
$$CLTF=\frac{4.68\dfrac{s+2.9}{s+5.4}\cdot\dfrac{4}{s(s+2)}}{1+4.68\dfrac{s+2.9}{s+5.4}\cdot\dfrac{4}{s(s+2)}}\Rightarrow Characteristic\,Eq:1+4.68\frac{s+2.9}{s+5.4}\cdot\frac{4}{s(s+2)}=0$$

$$\Rightarrow s(s+2)(s+5.4)+4(4.68)(s+2.9)=0\Rightarrow s_3=-3.4$$

– پاسخ زمانی پله واحد:



* مثال: برای سیستم زیر جبرانساز مناسب را طوری طراحی کنید که پاسخ دینامیکی سیستم تغییری نکند اما خطای دایم برای ورودی شیب واحد ۱۰ برابرکاهش یابد.



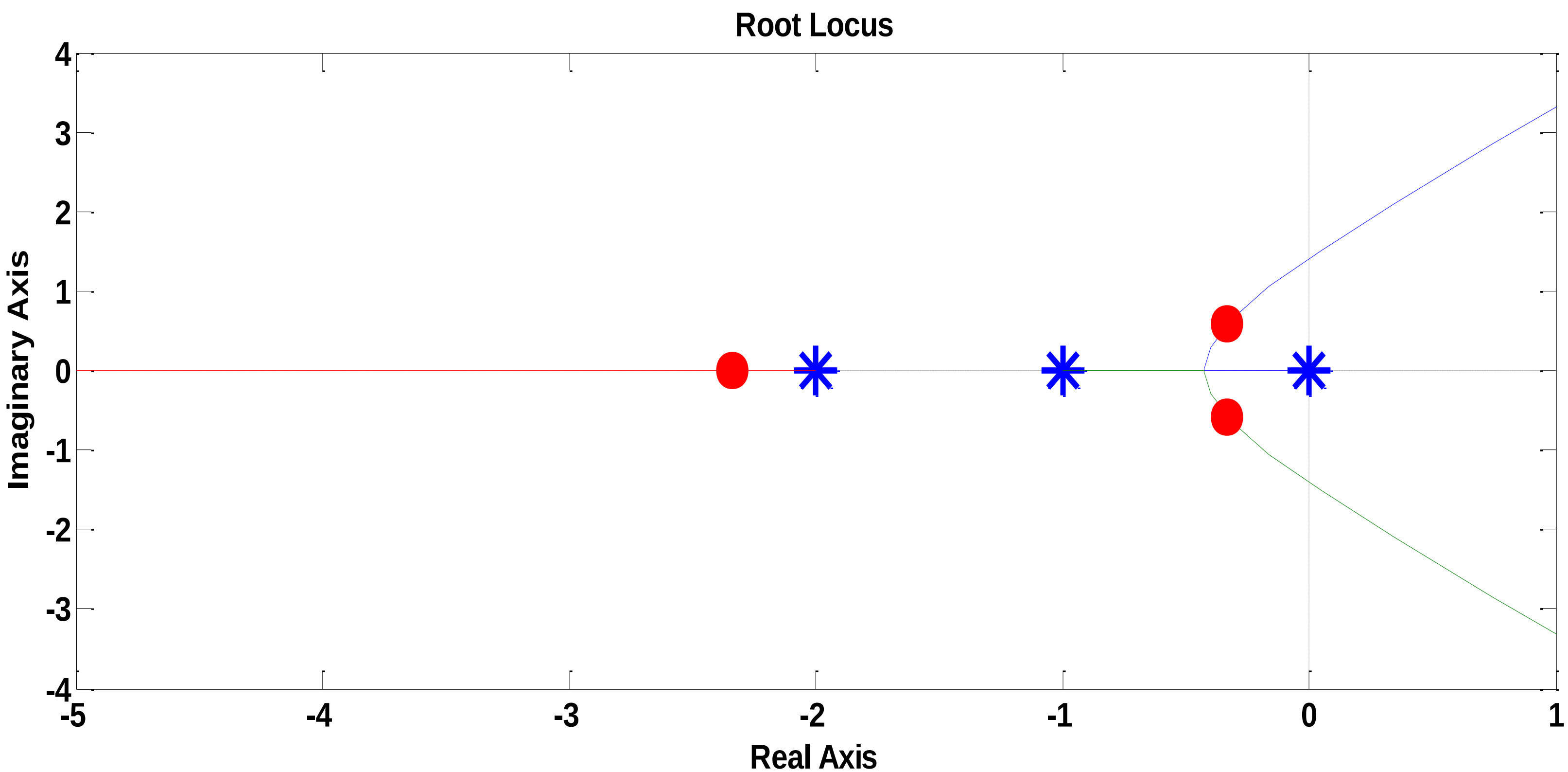
$$G_1(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

- برای سیستم حاضر، ریشه های مداربسته به صورت زیر هستند:

$$k=1.06 \Rightarrow Characteristic\ Eq: s(s+1)(s+2)+1.06=0 \Rightarrow \begin{cases} s_{1,2}=-0.33\pm 0.59j \\ s_3=-2.34 \end{cases}$$

Previous Example Next Example

❊ ادامه: مکان هندسی ریشه های سیستم جبران نشده:



❇ ادامه:

- خطای حالت دائم سیستم جبران نشده:

$$K_v = \lim_{s\to\infty} sG(s) = \frac{1.06}{2} = 0.53 \Rightarrow e_{ss}\,|_{UR} = \frac{1}{K_v} \simeq 2$$

- نیازی به تغییر محل قطب ها نیست بنابراین از جبرانساز lag - برای افزایش دقت - استفاده خواهیم کرد:

$$Before\ compensation: \angle G(s_1) = \pm 180(2l+1)\ ,\ |G(s_1)| = 1$$

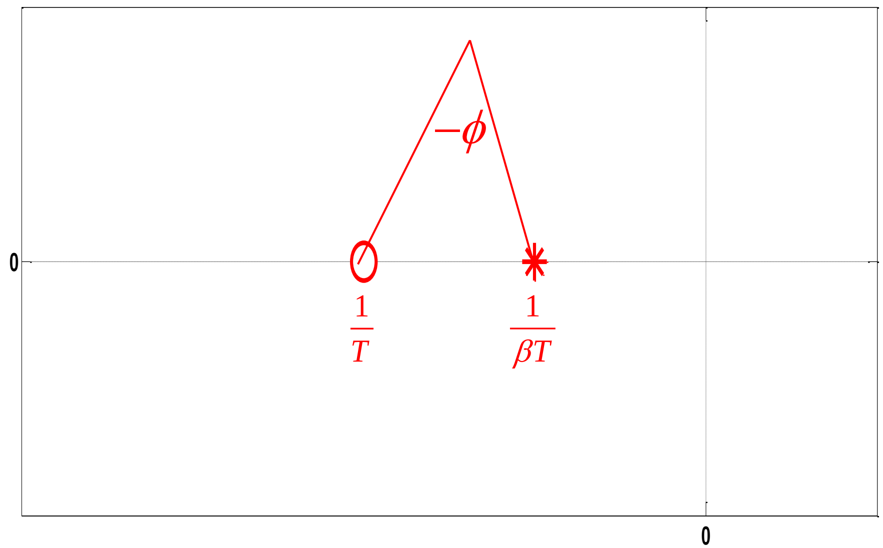
$$After\ compensation: \angle G_c(s_1) + \angle G(s_1) = \phi \pm 180(2l+1) \simeq \pm 180(2l+1) \Rightarrow \phi \simeq 0^o$$

$$|G(s_1)G_C(s_1)| = |G_C(s_1)||G(s_1)| = 1 \Rightarrow |G_C(s_1)| = 1$$

❊ ادامه:

- در نظر گرفتن مقدار صفر برای فاز (صفر و قطب روی هم) جبرانساز مفهومی ندارد، در ضمن از نظر عملی هم ساخت با چنین دقتی غیر منطقی است، در نتیجه برای فاز جبرانساز lag از شرط زیر استفاده می کنیم:

$$-5^\circ < \phi < 0^\circ$$



❊ ادامه:

- برای شرط اندازه داریم:

$$\left|G_c(s_1)G(s_1)\right| = 1 \Rightarrow k_c \left|\frac{s_1+\frac{1}{T}}{s_1+\frac{1}{\beta T}}\right| \left|G(s_1)\right| = 1 \text{ , } k_c \simeq 1 \Rightarrow \left|\frac{s_1+\frac{1}{T}}{s_1+\frac{1}{\beta T}}\right| \simeq 1$$

- بعد از اضافه شدن جبرانساز:

$$\begin{cases} \overline{e_{ss}}\,|_{UR} = \dfrac{1}{\overline{k_v}} \\ \overline{k_v} = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)G_c(s) = k_v G_c(0) = k_v k_c \beta = k_v \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{k_v}}{k_v} = \beta = \frac{e_{ss}}{\overline{e_{ss}}} = 10 = \frac{-z}{-p} = \frac{\frac{-1}{T}}{\frac{-1}{\beta T}} \Rightarrow \beta = 10$$

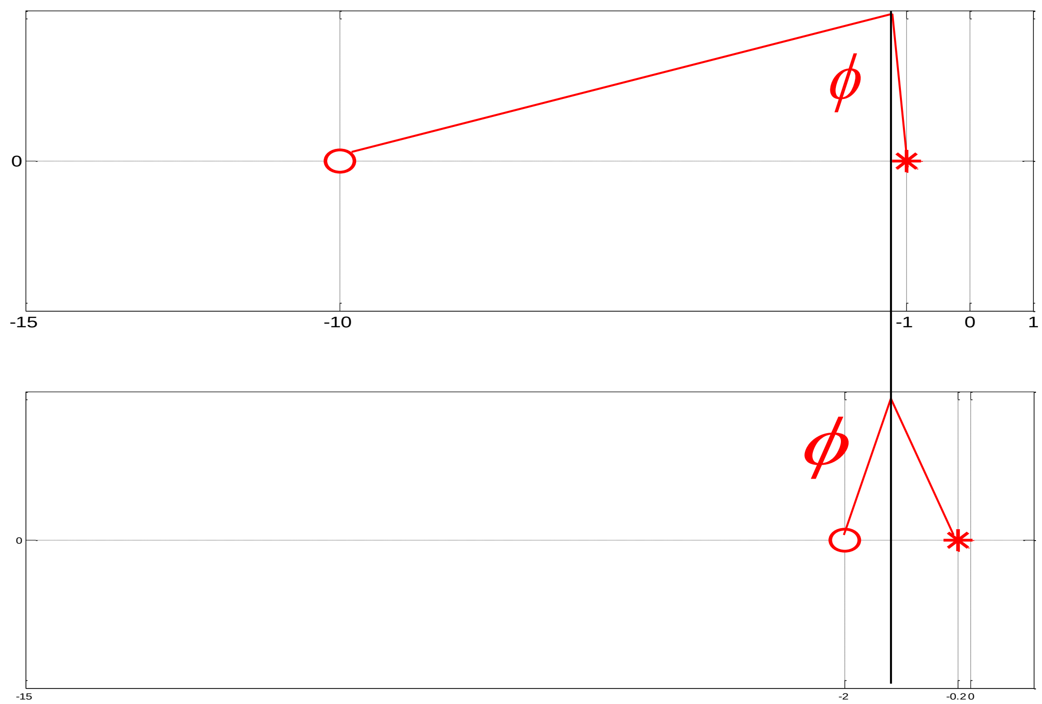
❄ ادامه:

شرط های موجود ایجاب می کند که صفر و قطب در نزدیکی مبدا اختیار شوند:

$$\beta = 10$$

$$-5 < \phi < 0$$

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T}}{s_1 + \frac{1}{\beta T}} \right| \simeq 1$$



❊ ادامه:

- با فرض صفر جبرانساز برابر 0.05- داریم:

$$\frac{-1}{T}=-0.05\Rightarrow\frac{-1}{\beta T}=-0.005\Rightarrow G_c(s)=k_c\,\frac{s+0.05}{s+0.005}$$

$$\angle G_c(s_1)=(180^0+\tan^{-1}\frac{0.59}{-0.33-(-0.05)})-(180^0+\tan^{-1}\frac{0.59}{-0.33-(-0.005)})\simeq-3.5^0$$

- نزدیک کردن مقدار Ø به صفر مستلزم نزدیک کردن صفر به قطب است که از لحاظ عملی دقت در ساخت و در نتیجه هزینه ی بالا را به دنبال خواهد داشت، در نتیجه اگر این مقدار از ۵- درجه بیشتر باشد مناسب است.

- برای سیستم جبران شده داریم:

$$OLTF=G_c(s)G(s)=k_c\,\frac{s+0.05}{s+0.005}\,\frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$$

❊ ادامه:

- به منظور حفظ رفتار دینامیکی سیستم، باید ζ ثابت بماند. برای سیستم جبران نشده:

$$Dominant\ Poles:\ s = -0.33 \pm j0.59 \Rightarrow \zeta = 0.491$$

- با توجه به نمودار اسلاید بعد، ریشه های غالب سیستم جبران شده به صورت زیر بدست می آیند:

$$\zeta = cte \Rightarrow s_{1,2} = -0.31 \pm j0.55$$

- در نتیجه:

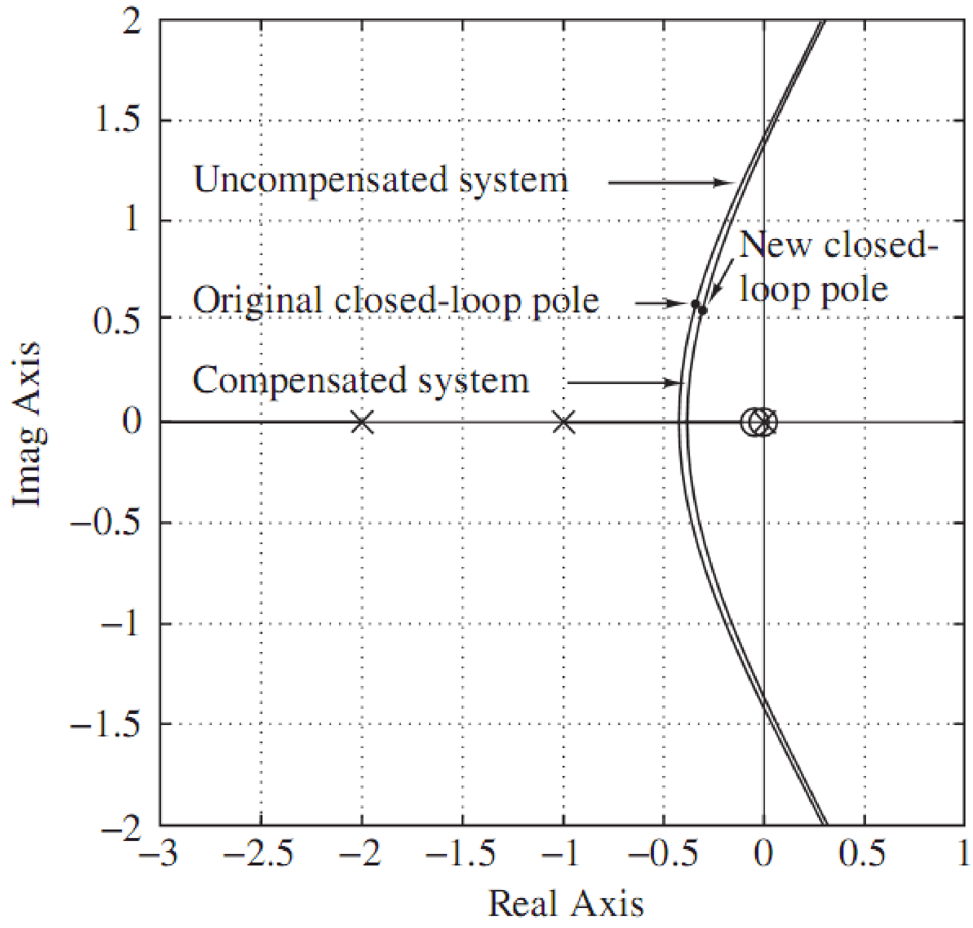
$$\left| k_c \frac{s+0.05}{s+0.005} \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} \right|_{s=-0.31+j0.55} = 1 \Rightarrow k_c = 0.97$$

$$Designed\ \ compensator{:}G_c(s) = 0.97 \frac{s+0.05}{s+0.005}$$

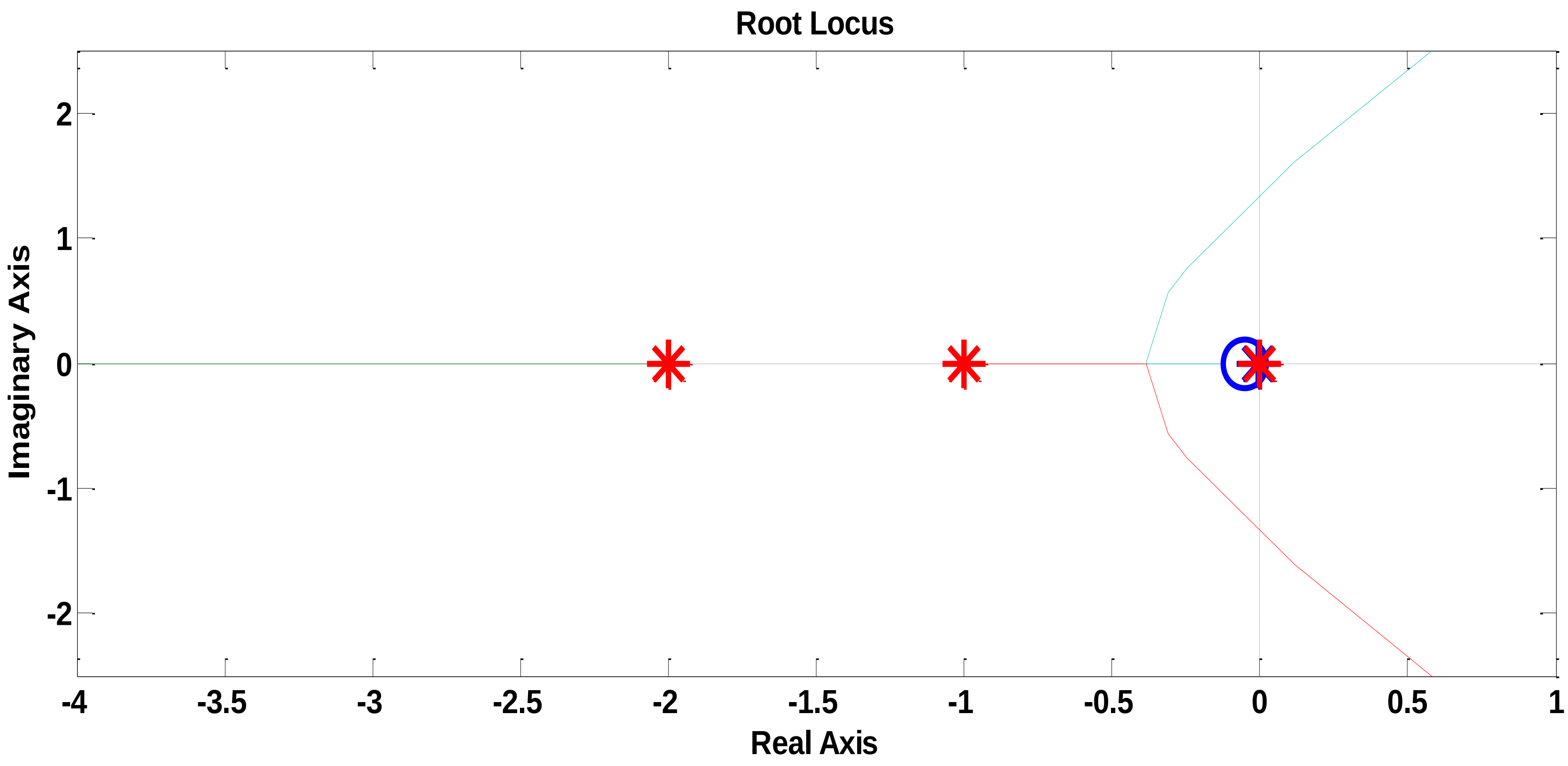
$$OLTF: G(s)G_c(s) = (1.06)(0.97) \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \frac{s+0.05}{s+0.005}$$

❊ ادامه:

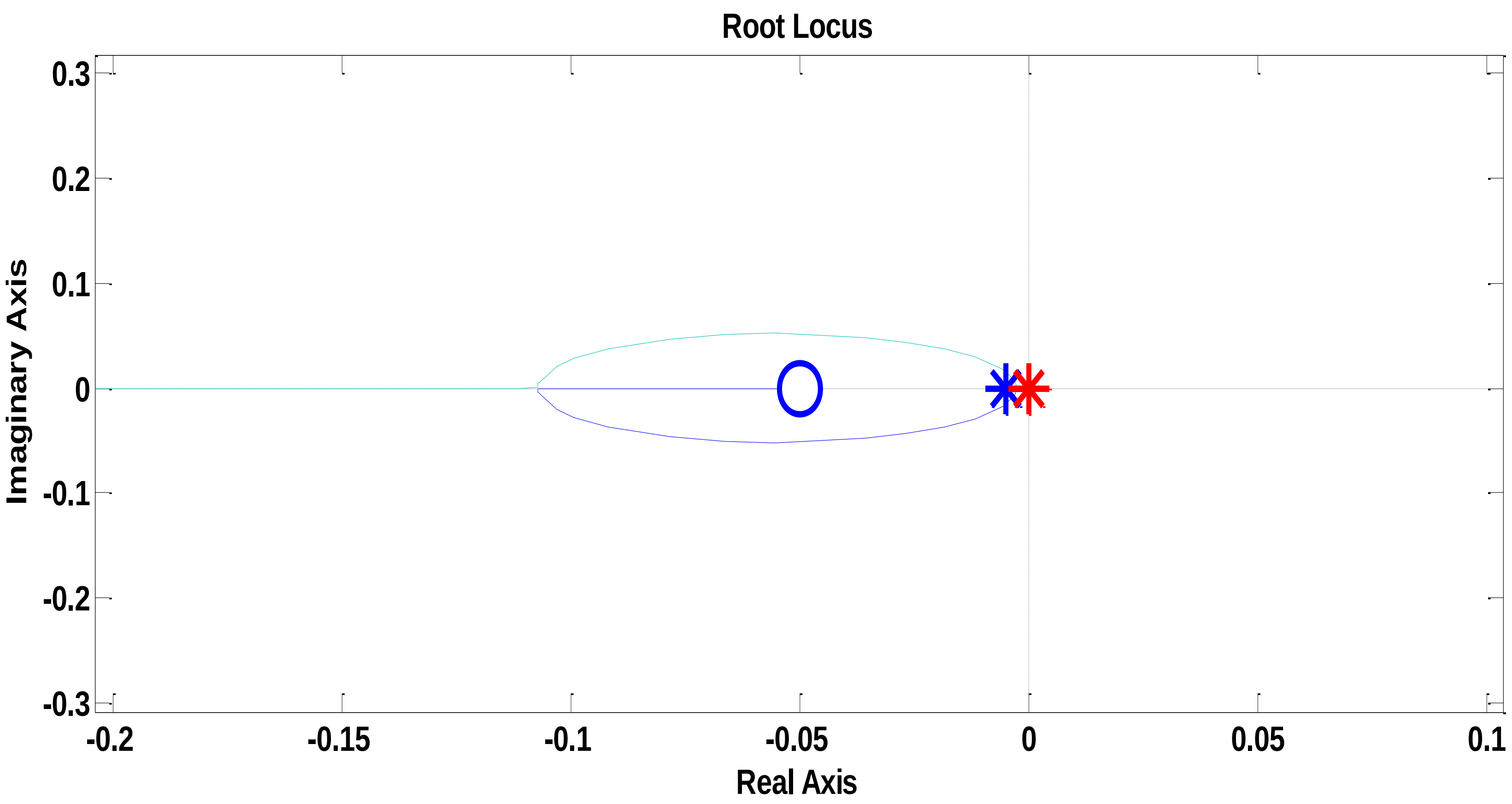
Root-Locus Plots of Compensated and Uncompensated Systems



❋ ادامه: مکان هندسی ریشه های سیستم جبران شده



❊ ادامه: مکان هندسی ریشه های سیستم جبران شده حول مبدا



Part 2:

Lead-Lag Compensator and Controller Design

- Example I: Lead-Lag Compensator
- Example II: PI Controller

Contents

❋ طراحی Lead-Lag

– هدف: افزایش دقت همراه با بهبود رفتار

❋ دو روش معمول برای طراحی Lead-Lag

– روش طراحی مستقل Lead و Lag

– روش طراحی توام Lead و Lag

❋ روش طراحی مستقل Lead و Lag

–درجه آزادی برای طراحی هر کدام از دو جبرانساز بیشتر از صفر است، لذا برای هر کدام بینهایت جواب وجود دارد:

$$G_{cLead}(s) = k_{cLead}\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}}, \gamma > 1 \qquad G_{cLag}(s) = k_{cLag}\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}, \beta > 1$$

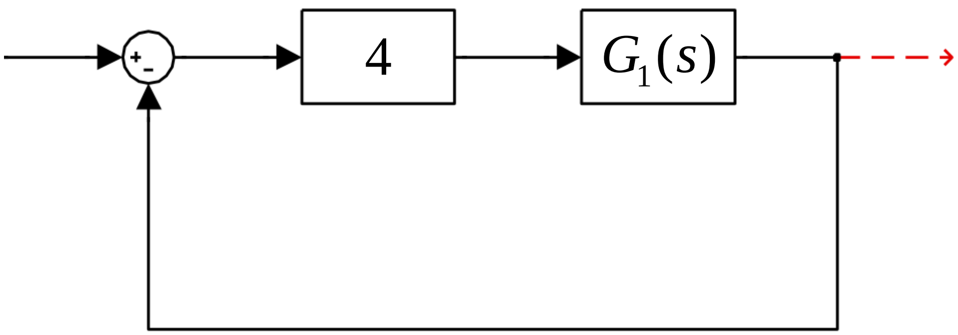
❊ روش طراحی توام Lead و Lag

- با مساوی در نظر گرفتن β و γ به یک روش طراحی توام Lead-Lag با جواب واحد دست می یابیم:

$$G_{cLead-Lag}(s) = k_c \frac{s+\dfrac{1}{T_1}}{s+\dfrac{\beta}{T_1}} \cdot \frac{s+\dfrac{1}{T_2}}{s+\dfrac{1}{\beta T_2}} \; ; \; \beta > 1$$

❋ مثال: برای سیستم زیر جبرانساز مناسب را برای دست یابی به وضعیت مطلوب زیر طراحی کنید:

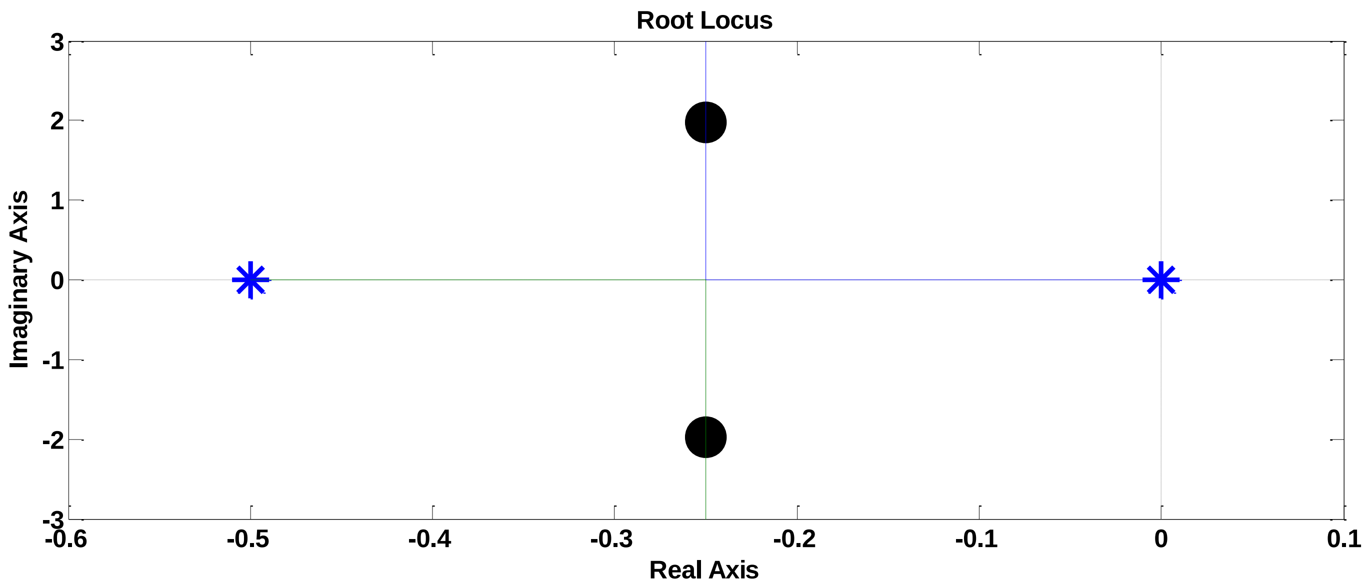
$$\xi = 0.5 \;,\; \omega_n = 5\ (\frac{r}{s}) \;,\; e_{ss}\,|_{UR} = 0.0125$$



Previous Example
Next Example

❋ ادامه: برای سیستم جبران نشده داریم:

$$s_{1,2} = -0.25 \pm j1.98 \Rightarrow \xi = 0.125 \;\;,\;\; \omega_n = 2\ (\frac{r}{s}) \;\;,\;\; e_{ss}\,|_{UR} = 0.125$$



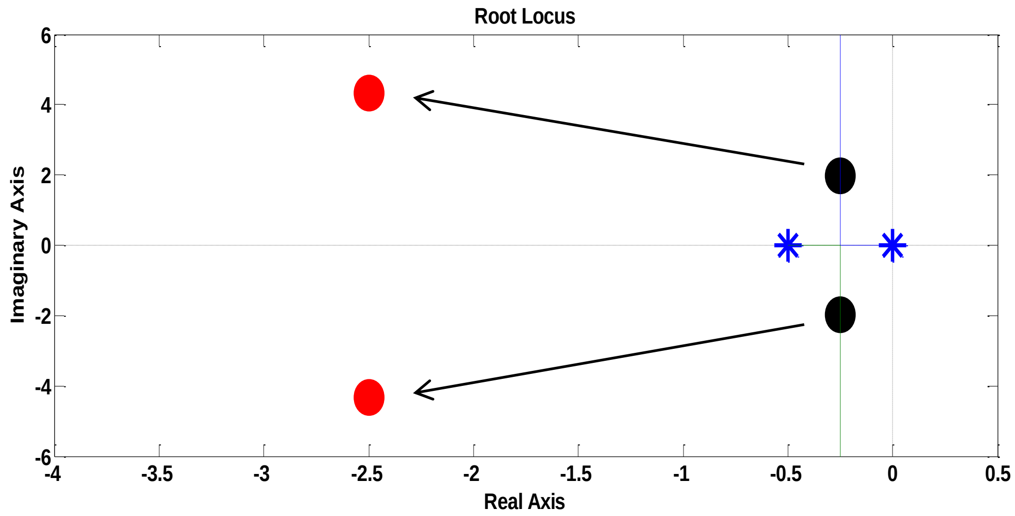
❊ ادامه:

- با توجه به شرایط داده شده، ریشه های مطلوب عبارتند از:

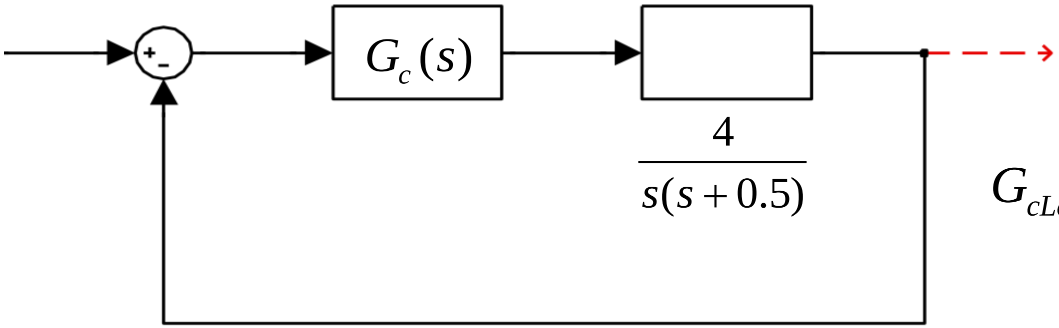
$$\xi = 0.5 \ , \ \omega_n = 5 \ (\frac{r}{s}) \Rightarrow \overline{s_{1,2}} = -2.5 \pm j4.33$$

- قطبها روی مکان هندسی ریشه ها قرار ندارند، در نتیجه به جبرانساز نیاز داریم.

- بعلاوه با توجه به اینکه مکان باید به سمت چپ حرکت کند (بهبود رفتار) و دقت نیز باید افزایش یابد، به جبرانساز Lead-Lag نیاز داریم.



❊ ادامه:



$$G_{cLead-Lag}(s) = k_c \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}} \cdot \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}$$

$$\angle G(s)|_{\bar{s}_1} = -(180^o + \tan^{-1}(\frac{4.33}{-2.5})) - (180^o + \tan^{-1}(\frac{4.33}{-2.5-(-0.5)})) = -120^o - 115^o = -235^o$$

$$\phi = \angle G_c(s)|_{\bar{s}_1} = -180^o - (-235^o) = 55^o$$

- این زاویه توسط بخش Lead جبرانساز تامین می شود تا خصوصیات دینامیکی سیستم را به شکل مطلوب درآورد. بخش Lag هیچ فازی تامین نمی کند.

❊ ادامه:

- خطای حالت دائم:

$$\overline{k_v} = \lim_{s\to 0} sG(s)G_c(s) = k_v G_c(0) = k_v k_c \Rightarrow k_c = \frac{\overline{k_v}}{k_v} = \frac{e_{ss}}{\overline{\overline{e_{ss}}}}\Big|_{UR} = 10$$

- شرط اندازه:

$$\left|G(\overline{s_1})G_c(\overline{s_1})\right| = 1 \Rightarrow \left|k_c Lead(\overline{s_1})Lag(\overline{s_1})G(\overline{s_1})\right| = 1$$

$$\xrightarrow{\left|Lag(\overline{s_1})\right|=1} k_c.\left|lead(\overline{s_1})\right|.\left|G(\overline{s_1})\right| = 1$$

$$if\ k_c\left|G(\overline{s_1})\right| = m \Rightarrow \left|Lead(\overline{s_1})\right| = \frac{1}{k_c\left|G(\overline{s_1})\right|} = \frac{1}{m}$$

❉ ادامه:

- رابطه دقیق بدست آوردن محل صفر و قطب Lead در ساختار Lead-Lag:

$$\overline{s_{1.2}} = -\sigma \pm \omega j$$

$$-z = \frac{-1}{T_1} = -\sigma - \omega\left(\frac{\cos\phi - \frac{1}{m}}{\sin\phi}\right) \;,\; -p = \frac{-\beta}{T_1} = -\sigma - \omega\left(\frac{m - \cos\phi}{\sin\phi}\right)$$

- محاسبه β:

$$\beta = \frac{-p}{-z}$$

- از β برای طراحی Lag استفاده خواهد شد.

❇ ادامه:

- محاسبه مقدار m:

$$\overline{s_{1,2}} = -\sigma \pm \omega j = -2.5 \pm 4.33j \quad , \quad k_c = 10$$

$$\left|G(\overline{s_1})\right| = \frac{4}{\sqrt{4.33^2 + 2^2}.\sqrt{4.33^2 + 2.5^2}} = 0.167$$

$$\Rightarrow m = k_c \left|G(\overline{s_1})\right| = 1.67$$

- محاسبه صفر و قطب Lead و مقدار عددی β:

$$\begin{cases} -z = \dfrac{-1}{T_1} = -\sigma - \omega\left(\dfrac{\cos\phi - \dfrac{1}{m}}{\sin\phi}\right) = -2.37 \\ -p = \dfrac{-\beta}{T_1} = -\sigma - \omega\left(\dfrac{m - \cos\phi}{\sin\phi}\right) = -8.29 \end{cases} \Rightarrow \beta = 3.5$$

❋ ادامه: طراحی Lag

- شرایط حاکم بر طراحی Lag:

$$\left|\frac{\bar{s}_1+\frac{1}{T_2}}{\bar{s}_1+\frac{1}{\beta T_2}}\right|\simeq 1 \;\;,\;\; -5<\frac{\bar{s}_1+\frac{1}{T_2}}{\bar{s}_1+\frac{1}{\beta T_2}}<0$$

- فرض: $T_2=10$

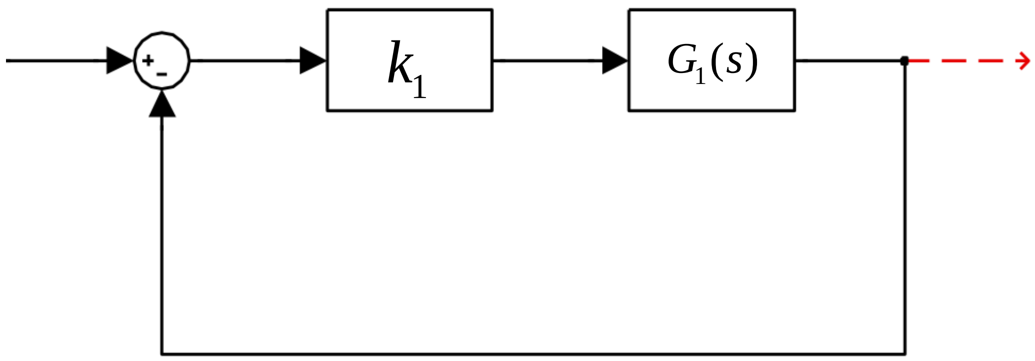
$$\angle Lag(\bar{s}_1)=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-\sigma+\frac{1}{T_2}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-\sigma+\frac{1}{\beta T_2}}\right)=-0.72^{o}>-5^{\circ}$$

$$\left|Lag(\bar{s}_1)\right|=\frac{\sqrt{\omega^2+(\sigma-\frac{1}{T_2})^2}}{\sqrt{\omega^2+(\sigma-\frac{1}{\beta T_2})^2}}=0.99\simeq 1$$

$$G_c(s)=10\,\frac{s+2.37}{s+8.29}\cdot\frac{s+0.1}{s+0.029}$$

❋ مثال: برای حذف خطای سیستم زیر از جبرانساز به شکل PI استفاده می کنیم. می خواهیم شرایط زیر بر عملکرد سیستم حاصل حاکم باشد:

$$MOS \le 10\% \;\;,\;\; t_s \le 5\sec \;\;,\;\; e_{ss}|_{UR} = 0$$

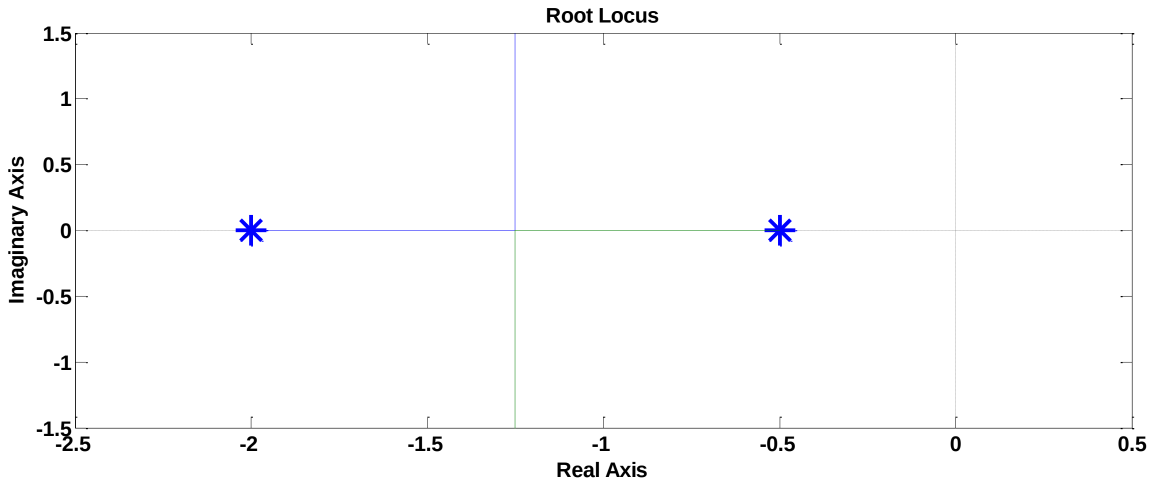


$$PI\ Controller\!: G_c(s) = k_2 + \frac{k_3}{s}$$

Previous Example

❋ ادامه:

– مکان هندسی سیستم فعلی:



– محاسبه ریشه های مطلوب از شروط داده شده:

$$\xi = \frac{-(\frac{\ln M_p}{\pi})}{\sqrt{1+(\frac{\ln M_p}{\pi})^2}} \; , \; M_p = 0.1 \Rightarrow \xi \simeq 0.6$$

$$\xi = 0.6 \; , \; \omega_n = 1.33 \Rightarrow s_{1,2} = -0.78 \pm j1.04$$

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\xi \omega_n} = 5 \; , \; \xi \simeq 0.6 \Rightarrow \omega_n = 1.33 \; (r/s)$$

❊ ادامه:

- شرط فاز:

$$\angle G_c(s_1)G(s_1) = \pm 180(2l+1)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1.04}{-0.78+\frac{k_3}{k_2}}\right) - \left(180^o + \tan^{-1}\left(\frac{1.04}{0.78}\right)\right) + 0 - \left(180^o + \tan^{-1}\left(\frac{1.04}{-0.78+0.5}\right)\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1.04}{-0.78+2}\right) = \pm 180^o(2l+1)$$

$$\Rightarrow \theta_z = -180^o + 126.87^o + 105.07^o + 40.45^o = 92.39^o \Rightarrow \tan(\theta_z) = \frac{1.04}{-0.78+\frac{k_3}{k_2}} = -23.95 \Rightarrow \frac{k_3}{k_2} = 0.74$$

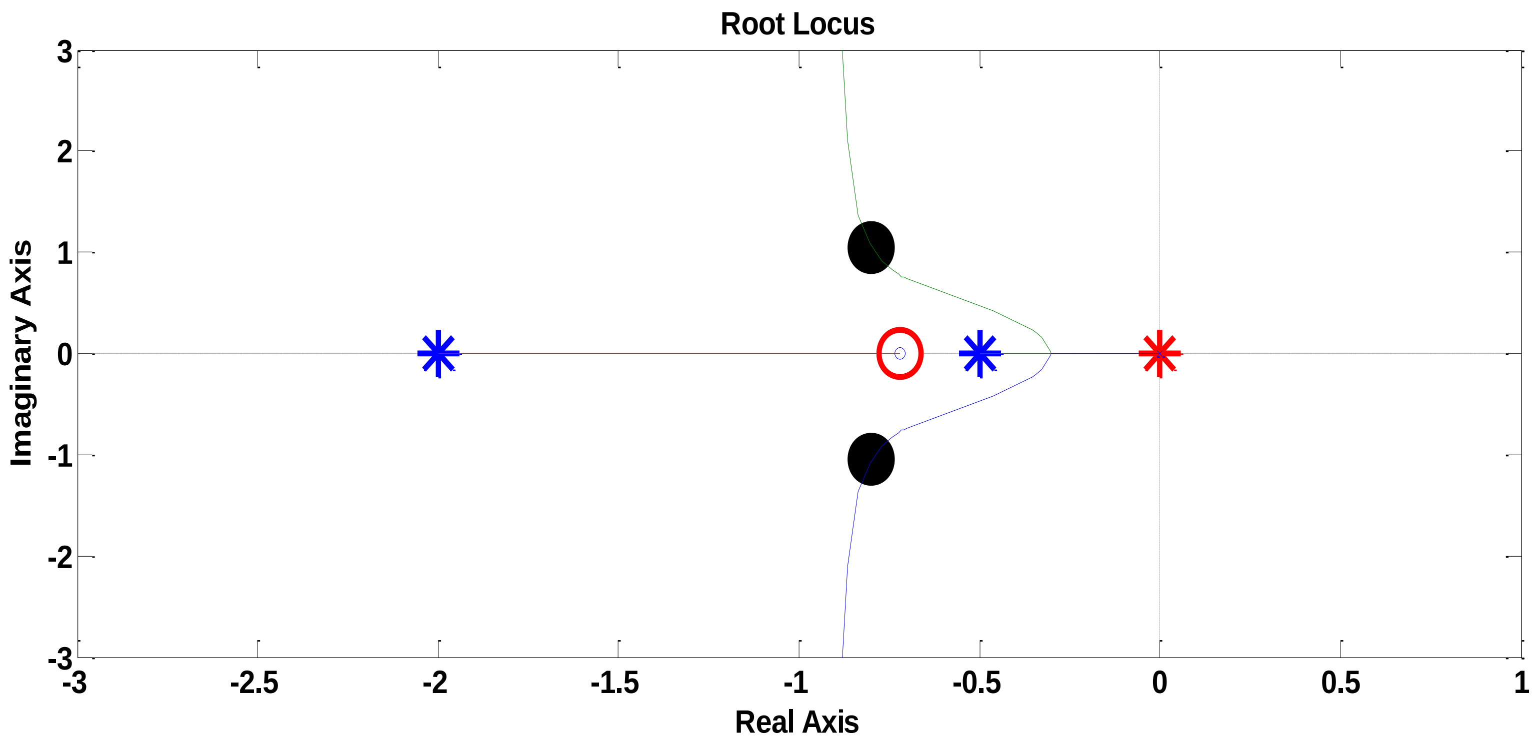
- شرط اندازه:

$$OLTF = G_c(s)G(s) = k_2 \frac{s+\frac{k_3}{k_2}}{s} \frac{k_1}{(s+0.5)(s+2)} = \frac{k_1 k_2 (s+0.74)}{s(s+0.5)(s+2)}$$

$$k_1 k_2 \frac{\sqrt{1.04^2+0.04^2}}{\sqrt{1.04^2+0.78^2}\sqrt{1.04^2+0.28^2}\sqrt{1.04^2+1.22^2}} = 1 \Rightarrow k_1 k_2 = 2.16$$

❈ ادامه:

$$OLTF = \frac{2.16(s+0.72)}{s(s+0.5)(s+2)}$$



Thanks for your attention!

Contents