Sharif University of Technology
School of Mechanical Engineering

# Automatic Control

Chapter 6:

# Control Systems Analysis by Root-Locus Method

Instructor:
Professor Aria Alasty

1391-92 Fall Semester

## Contents


- Chapter 1: Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
- Chapter 2: Mathematical Modeling of Control Systems
- Chapter 3: Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems
- Chapter 4: Modeling of Pneumatic, Hydraulic and Thermal Systems
- Chapter 5: Transient and Steady-State Response Analysis
- Chapter 6: Control Systems Analysis by Root-Locus Method
  - Part 1: Root-Locus Analysis
    - Example I
    - Example II

# Contents


- Summary of Rules
- Example III
- Part 2: Special Cases
  - Positive Feedback Systems
  - Non-minimum Phase Systems
- Chapter 7: Control Systems Design by Root-Locus Method
- Chapter 8: Control Systems Analysis by Frequency Response Method
- Chapter 9: Control Systems Design by Frequency Response Method
- Chapter 10: PID Controller Design by Ziegler-Nichols Method


Dart and ball catching robot
by
Magnus Linderoth
Dept of Automatic Control, LTH
Lund University, Sweden
Sharif University of Technology

# Part 1:

## Root-Locus Analysis

- Example I
- Example II
- Summary of Rules
- Example III

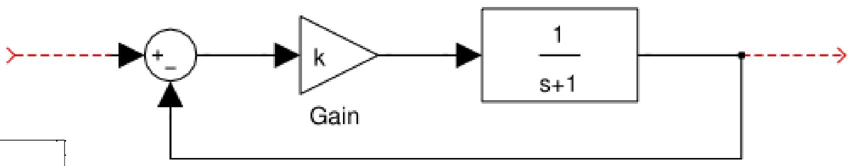
❋ اگر در یک سیستم مدار بسته کنترلی، تابع تبدیل مدار باز، یک پارامتر متغیر (ضریب بهره کنترلی) داشته باشد، آنگاه قطب های مدار بسته (ریشه های معادله مشخصه مدار بسته) به مقدار پارامتر متغیر وابسته شده و متناسب با آن تغییر می کنند.

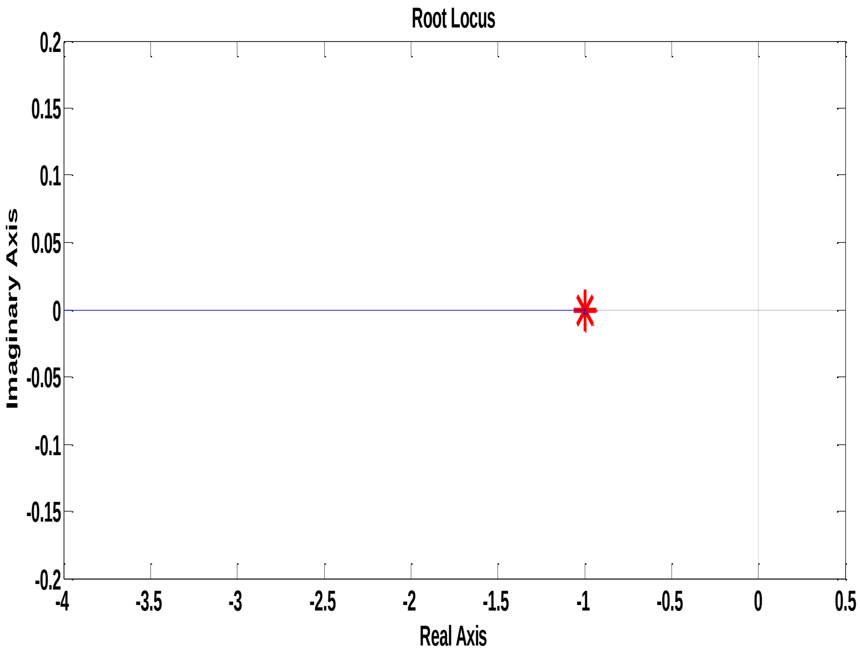
❋ شکل تغییرات و مسیر قطب های مدار بسته بر حسب پارامتر متغیر بر روی صفحه مختلط را مکان هندسی ریشه ها می گویند.

❊ مثال:

$$OLTF = \frac{k}{s+1} \rightarrow \textit{Open-loop pole (OLP): s=-1}$$

$$CLTF = \frac{k}{s+1+k} \rightarrow \textit{Closed-loop pole (CLP): s=-1-k}$$



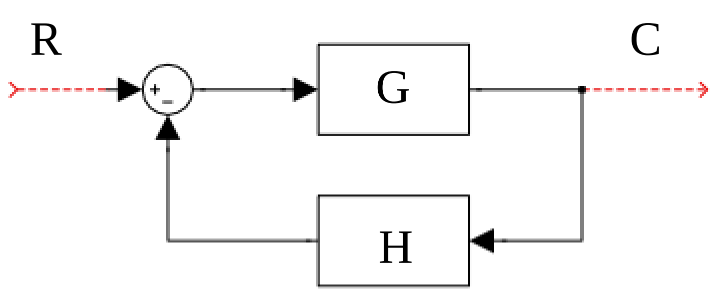



❋ معادله ی GH=-1 یک معادله ی مختلط است، در نتیجه منجر به دو معادله اندازه و زاویه خواهد شد.

$$CLTF = \frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH} \Rightarrow Closed-Loop\ Characteristic\ Eq: 1+GH=0 \Rightarrow GH=-1$$

$$Magnitude\ constraint:\ |GH| = 1$$

$$Angle\ constraint:\ \angle GH = \pm 180(2k+1)$$



❋ از شرط زاویه برای رسم مکان هندسی استفاده می شود و از شرط اندازه برای بدست آوردن مقدار پارامتر مجهول برای یک نقطه مشخص از مکان هندسی استفاده می شود.

❋ مکان هندسی ریشه های یک سیستم مدار بسته در صفحه ی مختلط عبارت است از کلیه نقاط روی صفحه مختلط که شرط اندازه و زاویه را تواماً برای معادله مشخصه آن سیستم ارضا می کنند.

❋ در حالت کلی داریم: (n>m)

$$OLTF=\frac{(s+z_1)...(s+z_m)}{(s+p_1)....(s+p_n)} \rightarrow OLTF\ \ zeros:-z_q,...,-z_m\ ,OLTF\ \ poles:-p_1,...,-p_n$$

$$Characteristic\,Eq=1+k\frac{A(s)}{B(s)}=1+k\frac{(s+z_1)...(s+z_m)}{(s+p_1)....(s+p_n)}$$

❋ ادامه:

$$1+k\frac{A}{B}=0\Rightarrow B+AK=0\xrightarrow{k=0}B=0\Rightarrow -p_j : OLTF\ \ poles$$

در نتیجه قطب های مدار باز حتماً جزو مکان هندسی ریشه ها خواهند بود. به عبارت دیگر روشن است که در حقیقت مکان هندسی ریشه ها از قطب های مدار باز آغاز می شوند، زیرا قطب های مدار باز همان قطب های مدار بسته به ازای ضریب بهره صفرند و با افزایش ضریب بهره ریشه های دیگری برای مدار بسته به دست می آیند.

$$1+k\frac{A}{B}=0\Rightarrow B+AK=0\xrightarrow{k=\infty}A=0\ \Rightarrow\ -z_j : OLTF\ \ zeros$$

در نتیجه صفرهای مدار باز حتماً جزو مکان هندسی ریشه ها خواهند بود. به عبارت دیگر روشن است که در حقیقت مکان هندسی ریشه ها به صفرهای مدار باز ختم می شود، زیرا صفرهای مدار باز همان قطبهای مدار بسته به ازای ضریب بهره ی بینهایت اند.

❋ نتایج مهم:

۱- مکان هندسی ریشه ها n شاخه دارد که از n قطب مدار باز آغاز می شوند.

۲- mشاخه  از این n شاخه به m صفر مدار باز متناهی ختم می شوند. ( m<n)

۳- (n-m) شاخه باقی مانده به صفرهای نامتناهی(بینهایت) ختم می شوند.

۴- شاخه های مکان هندسی که به بینهایت ختم می شوند در بینهایت به یک خط راست مجانب خواهند شد. لذا با این فرض مکان هندسی دارای (n-m) مجانب خواهد بود.

❈ محاسبه اندازه و فاز یک نقطه در صفحه مختلط:

$$GH=\frac{k(s+z_1)}{(s+p_1)\ldots(s+p_4)}$$

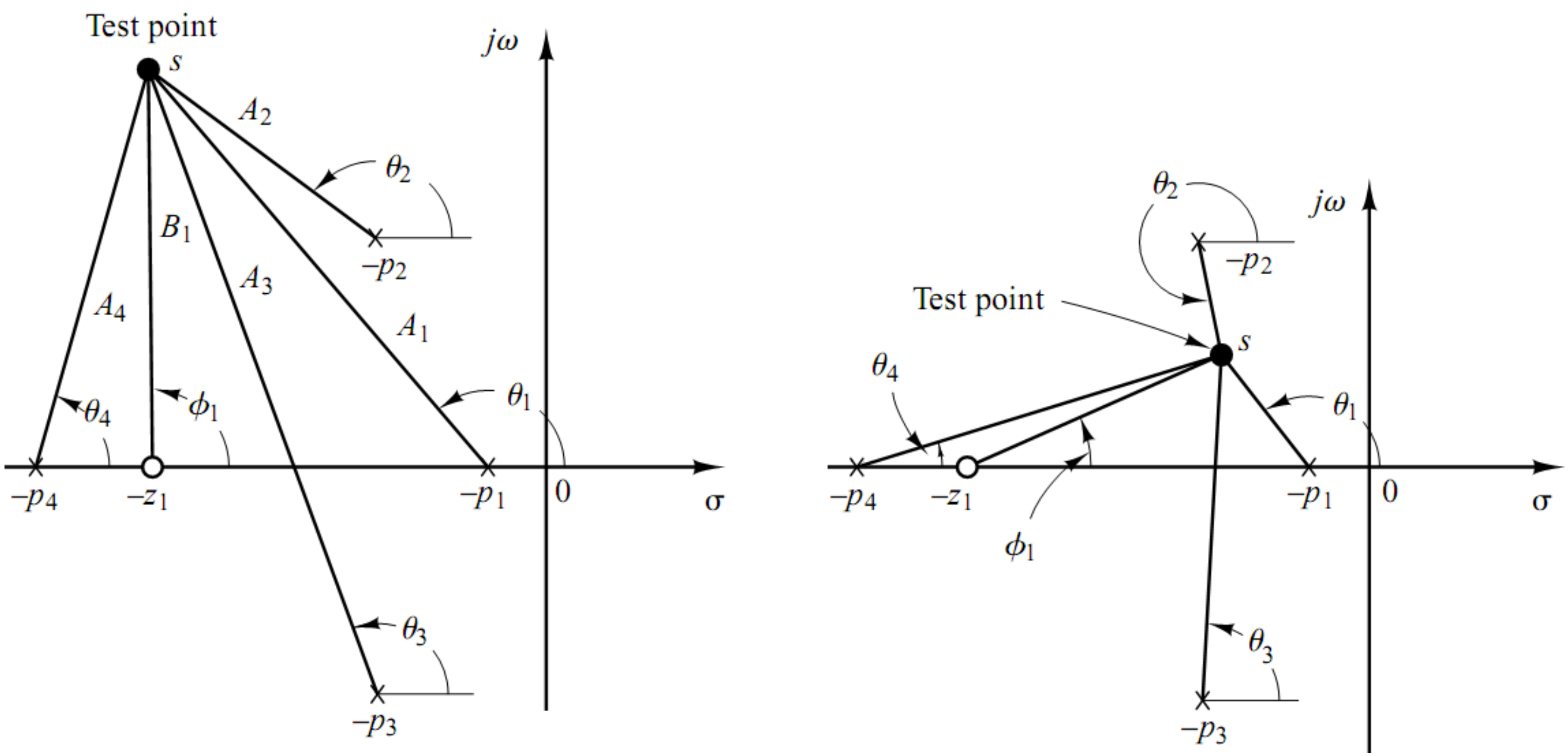
$$\left|GH\right|_{s_t}=\left|k\right|.\frac{\left|s_t+z_1\right|}{\left|s_t+p_1\right|\ldots\left|s_t+p_4\right|}=\frac{k.B_1}{A_1.A_2.A_3.A_4}\overset{?}{=}1$$

$$\langle GH\,|_{s_t}=\langle k+\langle s_t+z_1-\langle s_t+p_1-\ldots-\langle s_t+p_4=0+\phi_1-\theta_1-\ldots-\theta_4$$

$$\langle GH\,|_{s_t}=\phi_1-\theta_1-\ldots-\theta_4\overset{?}{=}(2l+1)180$$

❈ با برآورده شدن این دو شرط، نقطه نمونه $S_t$ حائز شرایط قرار گرفتن در مکان هندسی ریشه ها خواهد بود.

❋ محاسبه اندازه و فاز یک نقطه در صفحه مختلط:



❋ مراحل بدست آوردن مکان هندسی ریشه ها:

- مشخص کردن بخشهایی از مکان هندسی که روی محورحقیقی قرار دارد.

- بدست آوردن مجانب های مکان هندسی ریشه ها
  بدست آوردن زاویه مجانب ها با محور حقیقی
  بدست آوردن محل تلاقی مجانب ها با محور حقیقی

- بدست آوردن نقاط Break in & Break away

- بدست آوردن محل تلاقی مکان هندسی با محور موهومی (مرز پایداری)

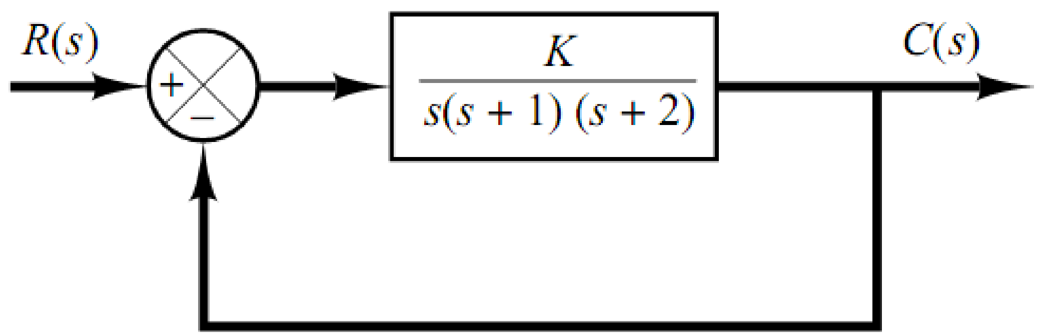
- بدست آوردن زاویه ی خروج مکان هندسی از قطب مختلط

❋ مثال:

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+2)}\ ,\ H(s)=1$$

n=3 : سه قطب مدار باز – m=0 : صفر مدار باز نداریم

تعداد شاخه ها: n=3 – تعداد مجانب ها: n-m=3




Next Example

❋ ادامه:

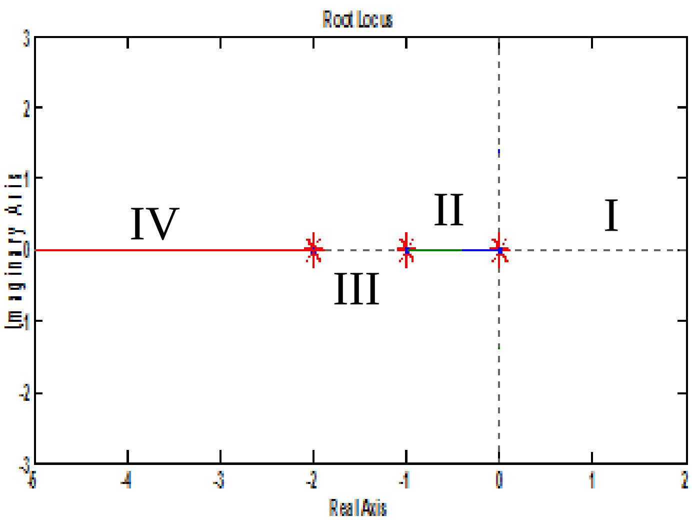
– مشخص کردن بخش هایی از مکان هندسی که روی محور حقیقی قرار دارد:

*Angle Condition:*

$I)\ G(s_t\ )=0\text{-}0\text{-}0\text{-}0 \neq \pm 180(2a+1)$ $\quad II)\ G(s_t\ )=0\text{-}180\text{-}0\text{-}0=\text{-}180=\pm 180(2a+1)$

$III)\ G(s_t\ )=0\text{-}180\text{-}180\text{-}0=\text{-}360 \neq \pm 180(2a+1)$

$IV)\ G(s_t\ )=0\text{-}180\text{-}180\text{-}180=\text{-}540=\pm 180(2a+1)$




❋ نتیجه مهم:

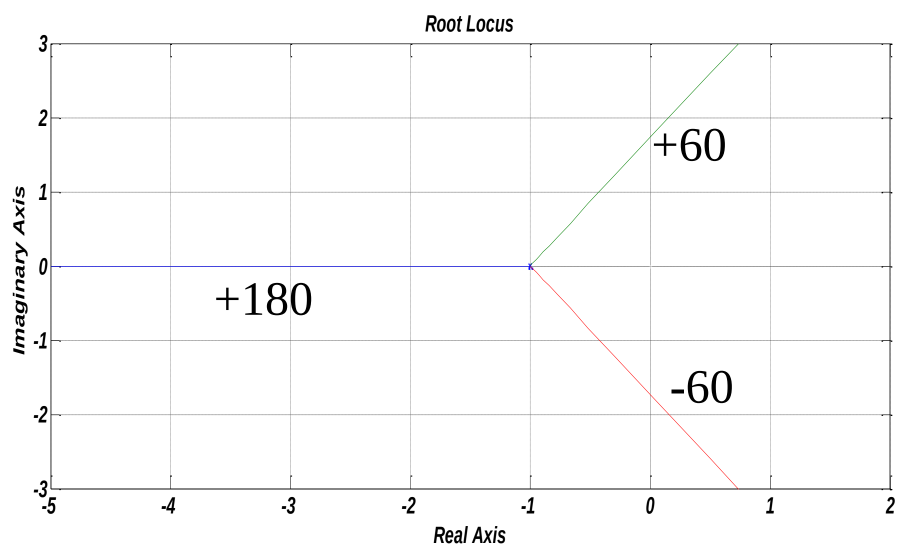
اگر در سمت راست نقطه نمونه، مجموع تعداد صفرها و قطب ها فرد باشد، آن نقطه جزو مکان است در غیر این صورت آن بخش از محور، جزو مکان نیست.

❊ ادامه:

- نحوه بدست آوردن مجانب های مکان هندسی (Asymptotes):

$$\lim_{s\to\infty}(GH)=\lim_{s\to\infty}\frac{k}{s(s+1)(s+2)}=\lim_{s\to\infty}\frac{k}{s^3(1+\frac{1}{s})(1+\frac{2}{s})}\approx\lim_{s\to\infty}\frac{k}{s^3}$$

$$\lim_{s\to\infty}\angle GH=\lim_{s\to\infty}\angle\frac{k}{s^3}=0-3\angle s=\pm180(2l+1)\Rightarrow\angle s=\pm60(2l+1)=\begin{cases}-60\\+60\\+180\end{cases}$$



❊ ادامه:

– نحوه ی بدست آوردن محل تلاقی مجانب ها با محور حقیقی:

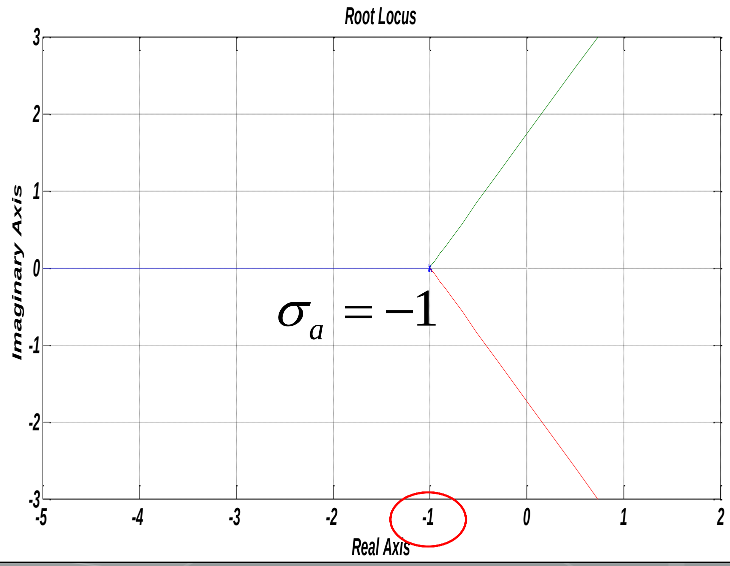
اگر تقریب را در نوشتن هم ارزی به اندازه ی یک درجه بالاتر ببریم در این صورت اطلاعات لازم برای بدست آوردن محل تلاقی با محور حقیقی بدست می آید.

$$s(s+1)(s+2) = \boxed{s^3 + 3s^2} + 2s$$

$$(s+1)^3 = \boxed{s^3 + 3s^2} + 3s + 1$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to\infty} s(s+1)(s+2) \simeq \lim_{s\to\infty} (s+1)^3$$

$$\lim_{s\to\infty} \frac{k}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s\to\infty} \frac{k}{(s+1)^3} \Rightarrow \sigma_a = -1$$



❊ ادامه:

- نحوه بدست آوردن نقاط خروج از محور حقیقی و ورود به آن (Break away & Break in):

در نقاط برخورد شاخه ها، دو قطب روی هم داریم در نتیجه وضعیت سیستم مدار بسته critically damped است.

$$OLTF = \frac{A(s)}{B(s)} \rightarrow Characteristic\ Eq : 1 + k\frac{A(s)}{B(s)} = 0 \Rightarrow f(s) = B(s) + kA(s) = 0$$

$$f(s) = (s - s_1)\ldots(s - s_j)^r \ldots(s - s_n) = 0$$

$$f(s_j) = 0 \ , \ \frac{df}{ds}\Big|_{s=s_j} = r(s - s_j)^{r-1}\ldots\Big|_{s=s_j} = \begin{cases} \neq 0 & r=1 \\ =0 & r>1 \end{cases}$$

- در حالت کلی اگر قطب $s_j$ ، r بار تکرار شود در این صورت از مرتبه r است و تا i=r-1 داریم:

$$\frac{d^i f}{ds^i}\Big|_{s=s_1} = 0$$

❋ ادامه:

- در نقاط B.A و B.I دو شاخه با هم بر خورد می کنند، بنابراین قطب مربوطه از مرتبه دو است و باید f(s) و مشتق آن در آن قطب صفر شوند. در نتیجه:

$$f = B + kA = 0 \Rightarrow \frac{df}{ds}\Big|_{s=s_1} = B' + kA' = 0 \Rightarrow k = -\frac{B'}{A'}$$

$$f = B + kA = B - \frac{B'}{A'}A = 0 \Rightarrow BA' - B'A = 0$$

$$k = -\frac{B}{A} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = -\frac{B'A - BA'}{A^2} = 0 \Rightarrow \frac{dk}{ds}\Big|_{s=s_1} = 0$$

- برای مثال فعلی:

$$Characteristic\,Eq:\ 1 + k\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = 0 \Rightarrow k = -s(s+1)(s+2) = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

$$\frac{dk}{ds} = -3(s^2 + 6s + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -0.423 \Rightarrow k_1 = 0.385 \\ s_2 = -1.158 \Rightarrow k < 0\ not\ accepted \end{cases}$$

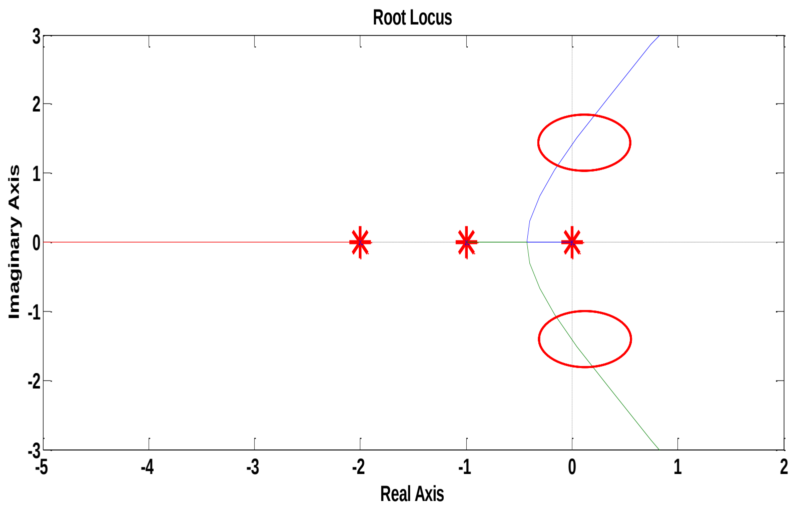
❇ ادامه:

- نحوه پیدا کردن مکان عبور مکان هندسی از محور موهومی (مرز پایداری):
- روش اول:

*On the imaginary axis:* $s = j\omega$

$$k = -s^3 - 3s^2 - 2s \Rightarrow k = -(j\omega)^3 - 3(j\omega)^2 - 2(j\omega) = +j\omega^3 + 3\omega^2 - j2\omega \ ,\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^3 - 2\omega = 0 \\ k = 3\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{2}, 0 \Rightarrow k = 6, 0 \xrightarrow{k>0} \omega = \pm\sqrt{2}, k = 6$$




- با توجه به شکل، به ازای 0<k<6 سیستم مدار بسته پایدار باقی می ماند.

❊ ادامه:

- روش دوم: (جدول راث)

به ازای k=6 محل های تقاطع با محور موهومی به دست می آیند.

با توجه به سطر مربوط به $s^2$ داریم:

$$s^3+3s^2+2s+k=0$$

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | $1$ | $2$ |
| $s^2$ | $3$ | $k$ |
| $s^1$ | $\dfrac{6-k}{3}$ | $0$ |
| $s^0$ | $k$ | |

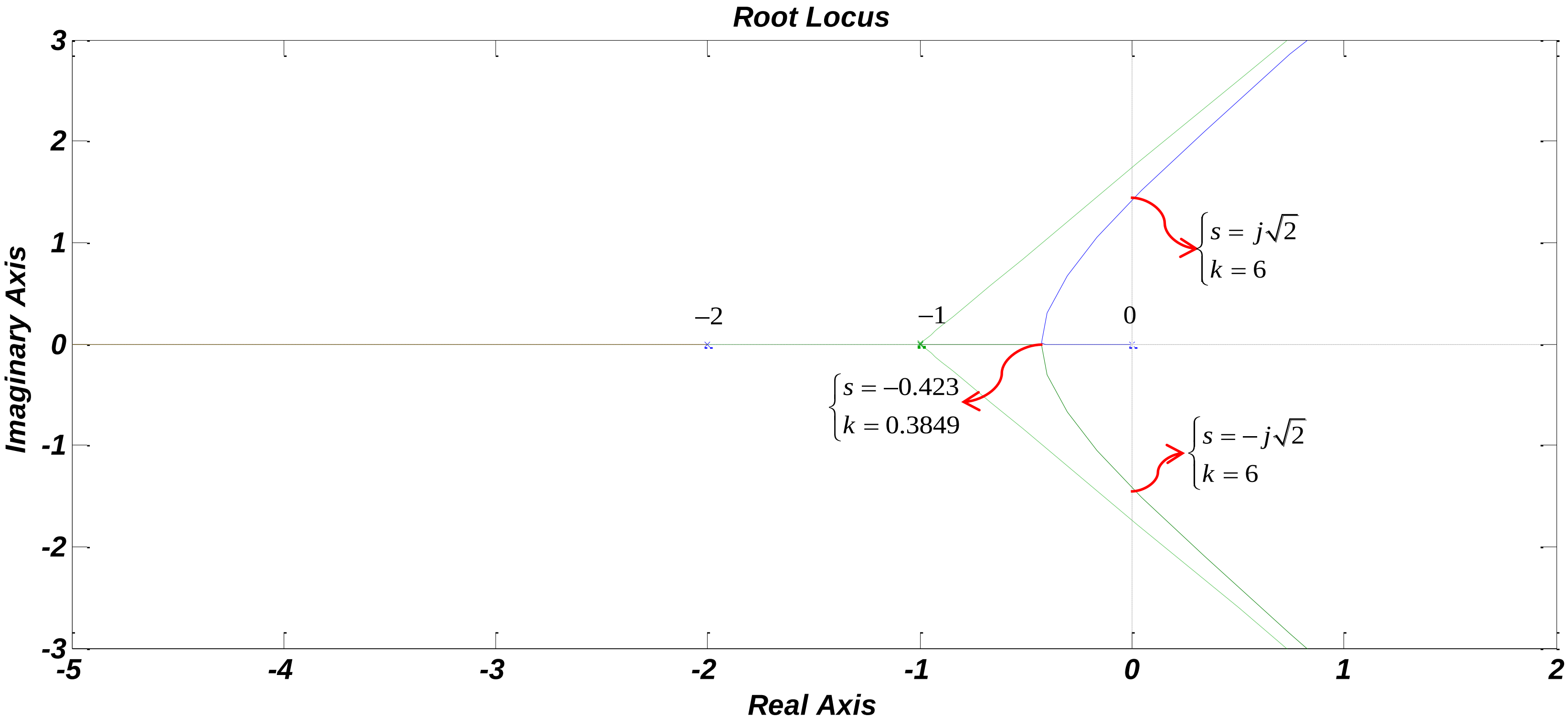
$$P(s)=3s^2+6=0 \Rightarrow s=\pm j\sqrt{2}$$

با بدست آوردن k می توان مقادیر s متناظر را با حل کردن معادله ی k هم بدست آورد:

$$s^3+3s^2+2s=0 \Rightarrow s^3+3s^2+2s+6=0 \Rightarrow s=-3,\pm j\sqrt{2} \rightarrow s=\pm j\sqrt{2}$$

❇ ادامه:

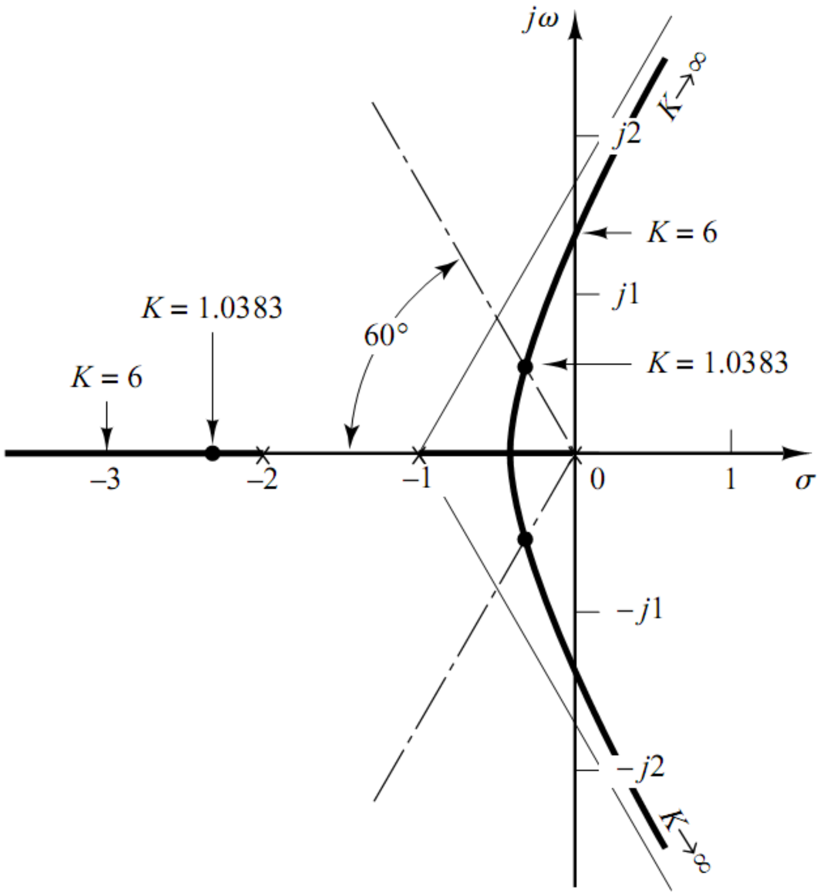
حال می توان به طور تقریبی مکان هندسی ریشه ها را رسم کرد.



❊ ادامه:

- می خواهیم k به نحوی انتخاب شود که ریشه های مدار بسته دارای ζ=0.5 باشند.

- برای این منظور با استفاده از شرط اندازه - برای نقطه حاصل از تقاطع مکان هندسی ریشه ها و شعاع دارای زاویه مربوط به ζ داده شده - مقدار k را می یابیم.

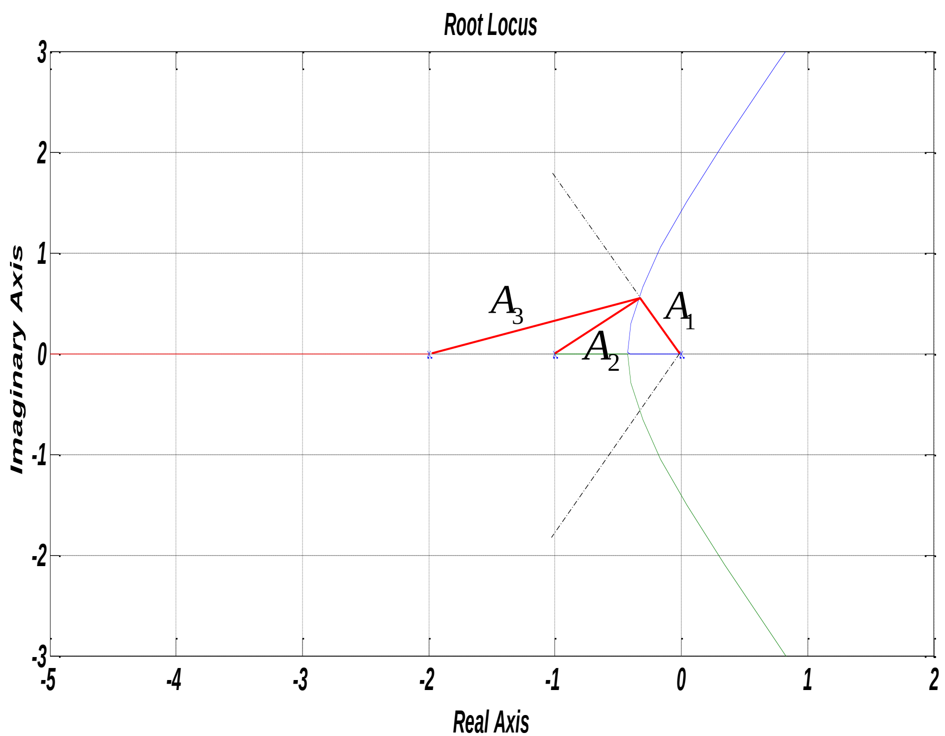



$$\zeta = 0.5 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0.5) = 60^o$$

❇ ادامه:

$$\textit{Intersection point: } s_1 = -0.33 \pm 0.58j \Rightarrow k = \left|s(s+1)(s+2)\right|_{s=s_1} = |s_1|.|s_1+1|.|s_1+2| = A_1.A_2.A_3$$

$$k = \sqrt{0.58^2 + 0.33^2}.\sqrt{0.58^2 + (1-0.33)^2}.\sqrt{0.58^2 + (2-0.33)^2} = 1.05$$

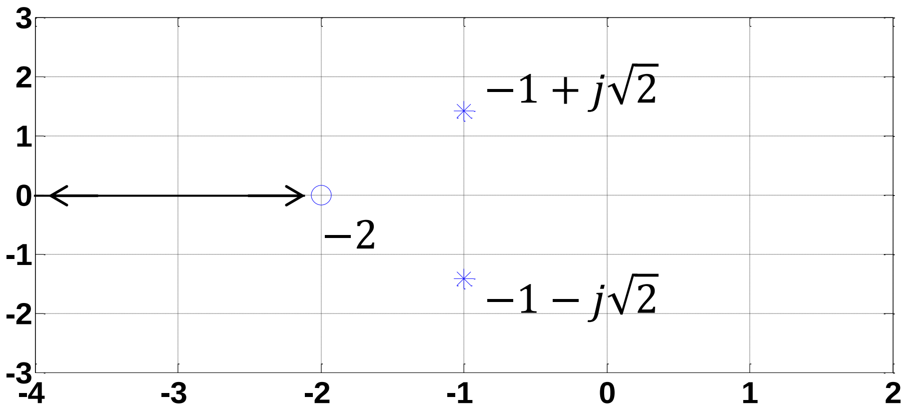


* مثال: مکان هندسی ریشه های سیستمی با تابع تبدیل مدارباز زیر را رسم کنید.

$$OLTF=\frac{k(s+2)}{s^2+2s+3}$$

- ابتدا بخشهایی از مکان هندسی را که روی محور حقیقی است، مشخص می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} OLTF\ \ poles{:}\text{-}1\pm j\sqrt{2}\rightarrow n=2 \\ OLTF\ \ zero{:}\text{-}2\rightarrow m{=}1 \end{array}\right\}\Rightarrow Number\ \ of\ asymptots{:}\ n-m=1$$




* با توجه به اینکه شاخه مکان روی محور حقیقی بین دو صفر مدار باز قرار دارد، حتما یک B.I خواهیم داشت.

Previous Example

Next Example

❊ ادامه:

- بدست آوردن زاویه خروج از قطب مختلط:

$$s \text{ on the Root Locus}:$$

$$<OLTF| = \pm 180(2l+1) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2$$

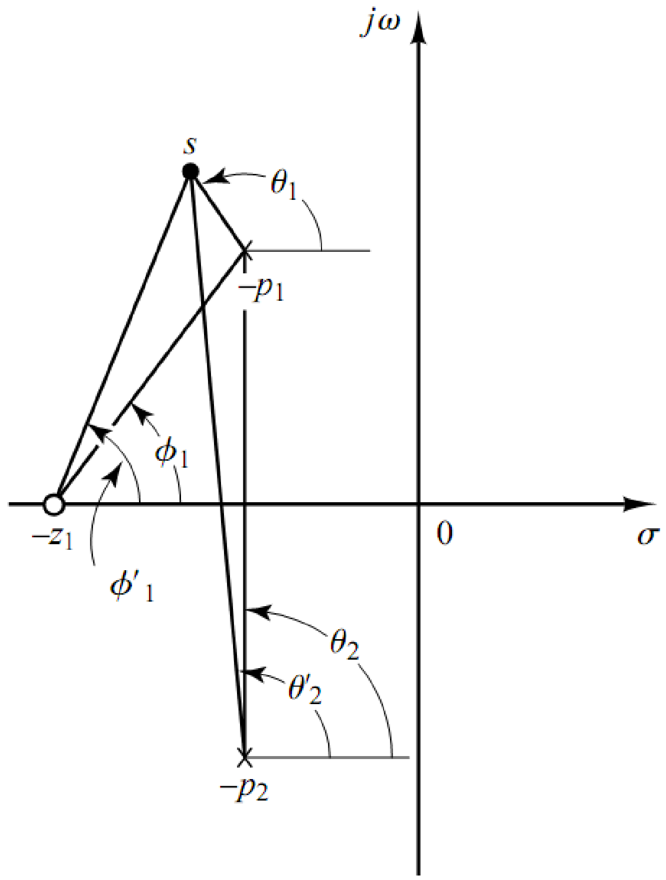
$$\theta_1 = \pm 180(2l+1) + \phi_1 - \theta_2$$

$$\text{Angele of departure: } AD = \lim_{s \to p_1} \theta_1$$

$$\phi_1^* = \lim_{s \to p_1} \phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{-1-(-2)}\right) = 55°$$

$$\theta_2^* = \lim_{s \to p_1} \theta_2 = 90$$

$$AD = \pm 180(2l+1) + 55° - 90° = 145°$$

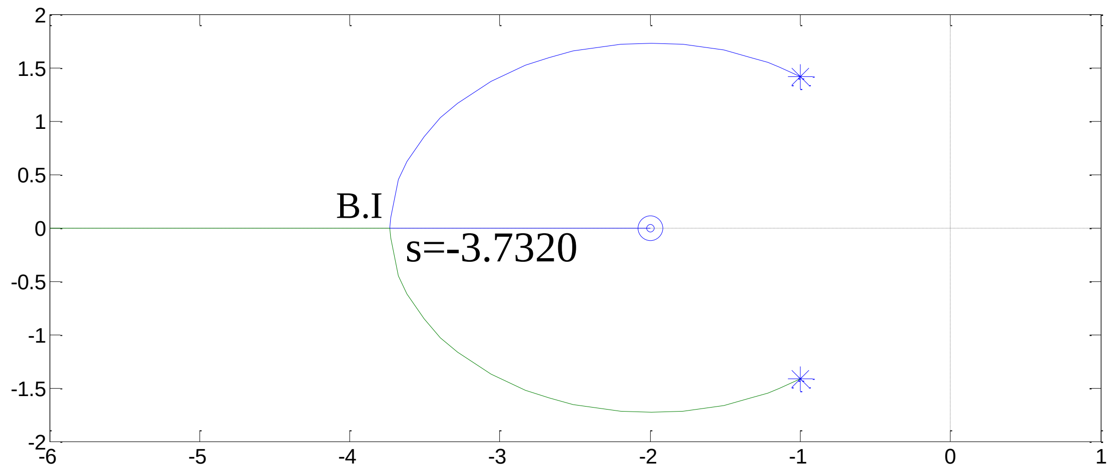


❊ ادامه:

- بدست آوردن نقاط احتمالی ورود یا خروج از محور حقیقی

$$Characteristic\,Eq: 1+\frac{k(s+2)}{s^2+2s+3}=0 \Rightarrow k=-\frac{s^2+2s+3}{s+2}$$

$$\frac{dk}{ds}=-\frac{(2s+2)(s+2)-(s^2+2s+3)}{(s+2)^2}=-\frac{s^2+4s+1}{(s+2)^2}=0 \Rightarrow s_{1,2}=\begin{cases}-3.7320 \Rightarrow k=5.464 \\ -0.2680 \Rightarrow k<0\end{cases}$$



❊ادامه:

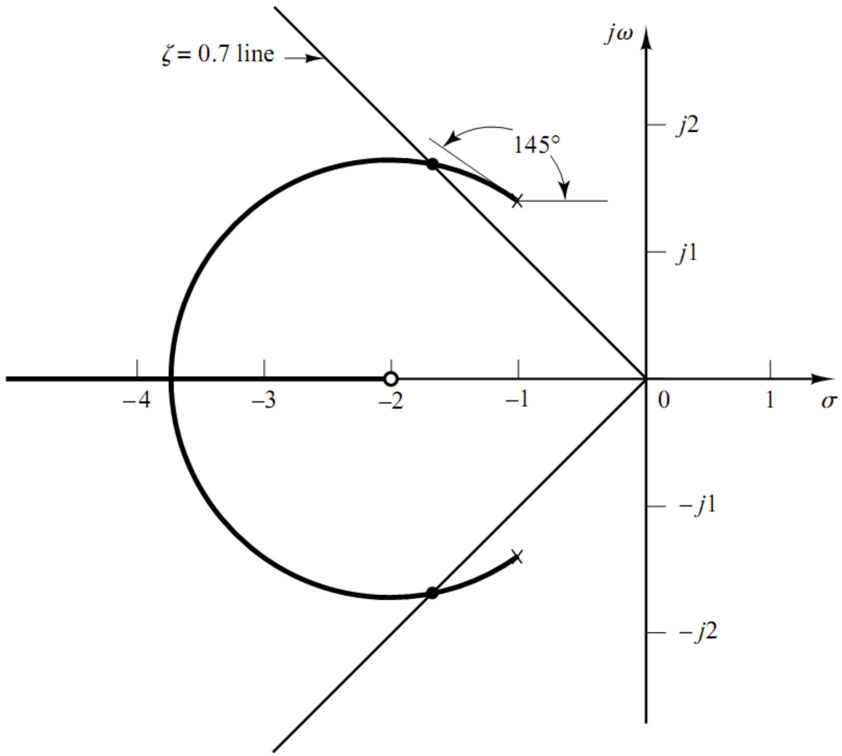
- k را چنان بیابید که $\zeta$=0.7 شود.

$$\zeta = 0.7 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0.7) = 45.6^\circ$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = -1.67 \pm j1.7$$

$$Magnitude\,Condition : \left| \frac{k(s+2)}{s^2+2s+3} \right| = 1$$

$$\Rightarrow k = \left| \frac{s_1^{\,2}+2s_1+3}{s_1+2} \right| = 1.34$$



❊ خلاصه ای از قوانین رسم مکان هندسی ریشه ها:

- قطب ها و صفرهای مدار باز را یافته و در صفحه ی مختلط مشخص می کنیم.
  - تعداد شاخه های مکان هندسی برابر n است.
  - هر شاخه از یک قطب مدار باز شروع شده به یک صفر مدار باز ختم می شود.
  - n-m شاخه به صفرهای نا متناهی ختم می شوند، در نتیجه تعداد مجانب ها برابر n-m خواهد بود.
- بخشهایی از مکان هندسی که روی محور حقیقی قرار دارد را می یابیم.
  - در هر بخش - بین قطب یا صفر مدار باز روی محور حقیقی - اگر مجموع تعداد صفر ها و قطب های سمت راست آن فرد باشد آن بخش جزو مکان هندسی است.
- بدست آوردن مجانب های مکان هندسی
  - تعداد مجانب ها: $n-m$
  - زاویه ی مجانب ها: $\dfrac{\pm 180(2l+1)}{n-m}$
  - محل تلاقی مجانب ها با محور حقیقی:

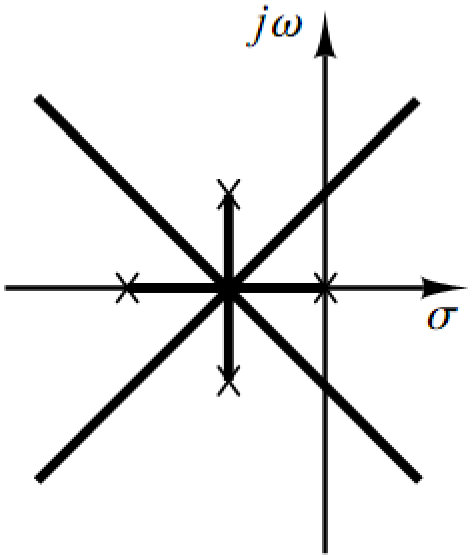
$$\sigma_a = \frac{\sum Open\ Loop\ Poles - \sum Open\ Loop\ Zeros}{n-m}$$

- بدست آوردن نقاط B.A و B.I :

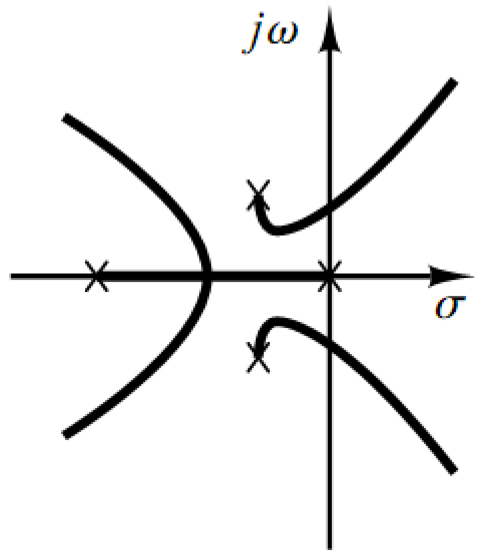
$$\frac{dk}{ds}=0\Rightarrow\begin{cases}s_1\Rightarrow k>0 \text{ or } k=0 \ \ \textit{accepted}\\ s_2\Rightarrow k<0 \ \ \textit{not accepted}\end{cases}$$

- اگر بخشی از مکان هندسی بین دو قطب مدار باز باشد، در این صورت حتماً حداقل یک B.A وجود دارد و اگر بخشی از مکان هندسی بین دو صفر مدار باز باشد، در این صورت حتماً حداقل یک B.I وجود دارد.
- اگر بخشی از مکان هندسی بین دو قطب مدار باز باشد: $B.A-B.I=1$
- اگر بخشی از مکان هندسی بین دو صفر مدار باز باشد: $B.I-B.A=1$
- اگر بخشی از مکان هندسی بین دو صفر مدار باز باشد: $B.A=B.I$

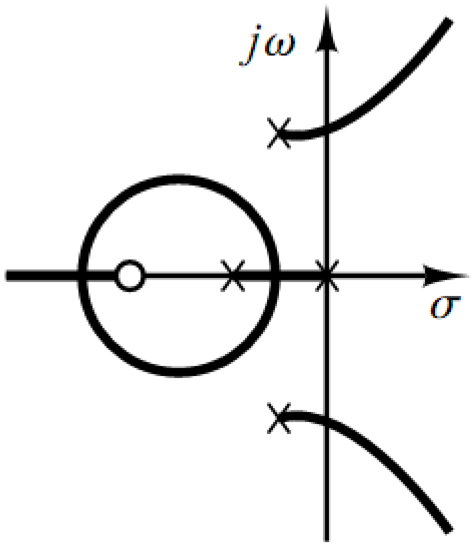
# Root-Locus Analysis




BA=2 , BI=1




BA=1, BI=0




BA=1, BI=0

BA=0, BI=1

– بدست آوردن Angle of Departure یا Angle of Arrival :

$$AD = 180^\circ - \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر قطب ها به قطب مورد نظر} + \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر صفرها به قطب مورد نظر}$$

$$AA = 180^\circ - \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر صفر ها به صفر مورد نظر} + \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر قطب ها به صفر مورد نظر}$$

– بدست آوردن نقاط تلاقی با محور موهومی:

- روش مستقیم:

$$1 + \frac{kA(j\omega)}{B(j\omega)} = 0 \rightarrow k \,\&\, \omega \;\; will\, be\, determined$$

- روش جدول راث

– برای بدست آوردن k متناظر با هر نقطه از شرط اندازه استفاده می کنیم.

$$k = \left| \frac{B(s_t)}{A(s_t)} \right|$$

– بدست آوردن زاویه بین جهت شاخه ها در هنگام برخورد:

$$\Psi = \frac{360^\circ}{q};\ q : Number\ of\ Branches$$

– اگر رسته نسبی سیستم مدار باز حداقل دو باشد (n-m>2 یا n-m=2) مجموع بخش های حقیقی قطب های مدار بسته برابر مجموع بخش های حقیقی قطب های مدار باز خواهد شد:

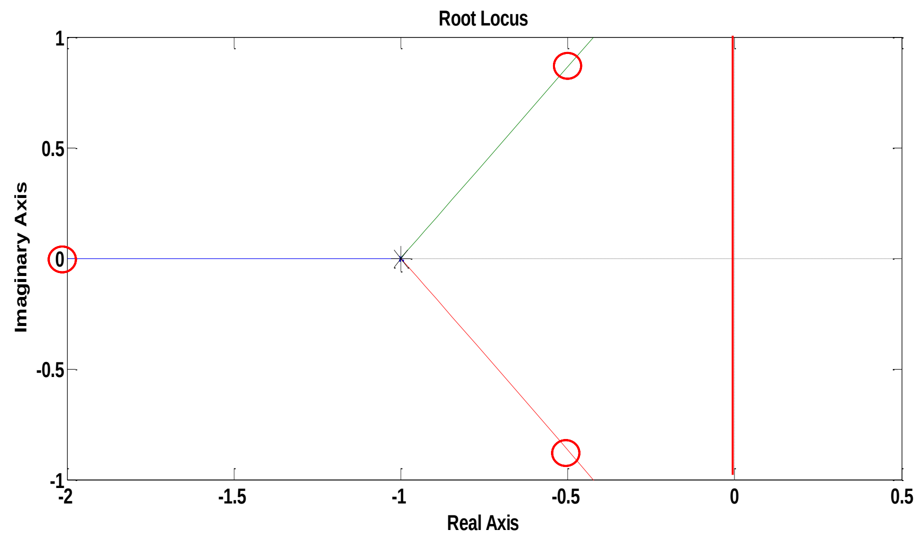
$$\sum \mathrm{Re}(P_i^{CL}) = \sum \mathrm{Re}(P_i^{OL}) = Constant$$

❋ مثال: اگر s=-2 یکی از ریشه های مدار بسته باشد، برای دو ریشه مختلط داریم:

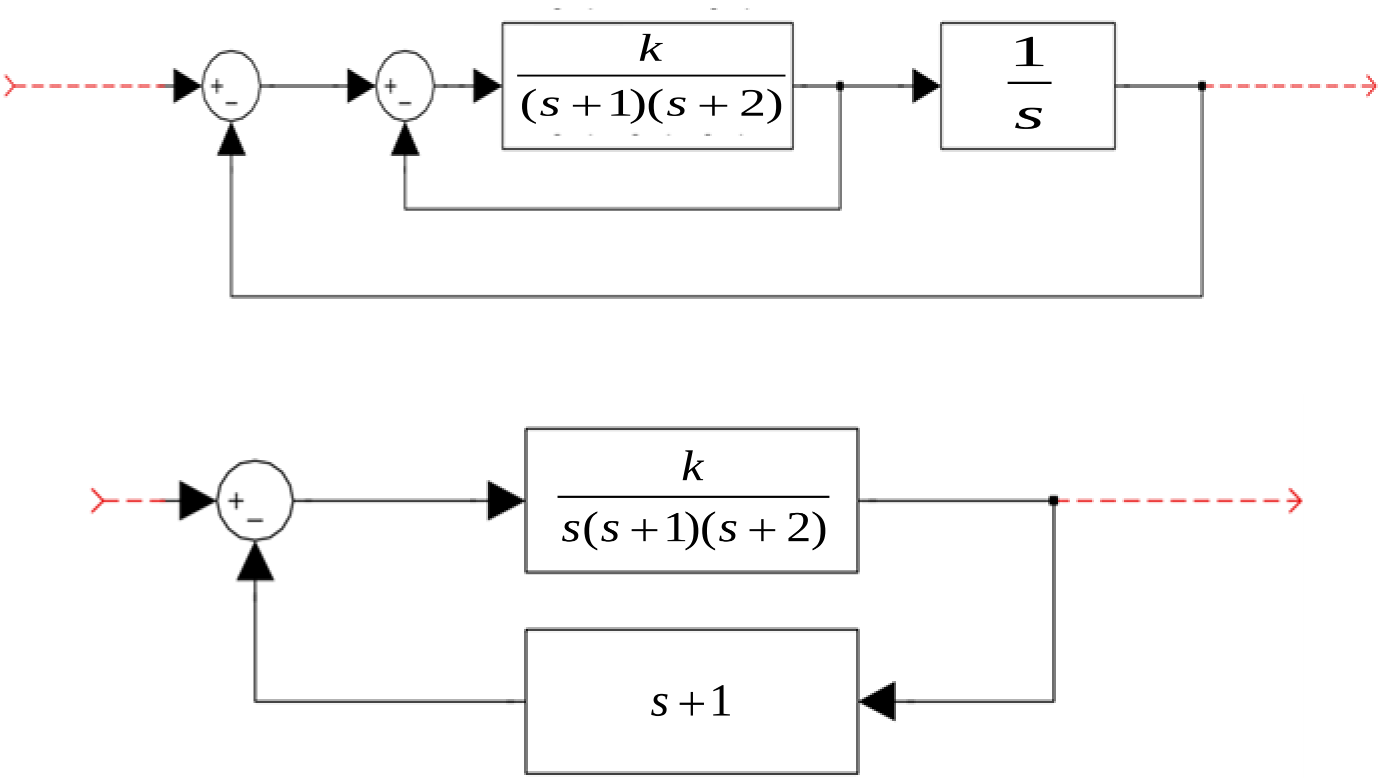
$$OLTF = \frac{k}{(s+1)^3}$$

$$OL: p=-1 \Rightarrow -2+\mathrm{Re}(P_2^{CL})+\mathrm{Re}(P_3^{CL})=3(-1) \Rightarrow 2\,\mathrm{Re}(P_2^{CL})=-1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(P_2^{CL})=-0.5$$



* توجه به تأثیر حذف قطب و صفر ها در معادلات مشخصه:

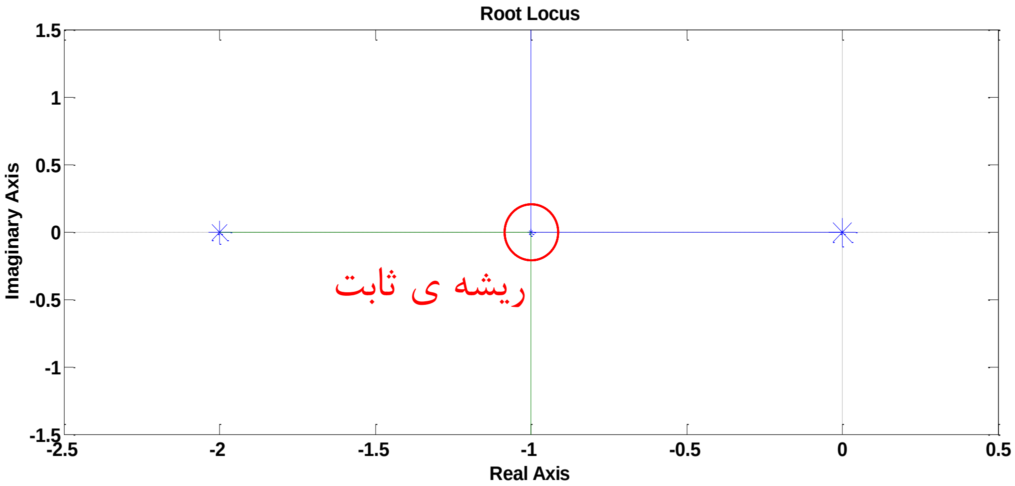


- روش مستقیم:

$$CLTF=\frac{\dfrac{k}{s(s+1)(s+2)}}{1+\dfrac{k(s+1)}{s(s+1)(s+2)}}=\frac{k}{s(s+1)(s+2)+k(s+1)}=\frac{1}{(s+1)}\cdot\frac{k}{s(s+2)+k}$$

$$=\frac{1}{(s+1)}\cdot\frac{\dfrac{k}{s(s+2)}}{1+\dfrac{k}{s(s+2)}}=s^2+2s+k=0\Rightarrow s_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k}\rightarrow Variable\,roots$$

- روش مکان هندسی:

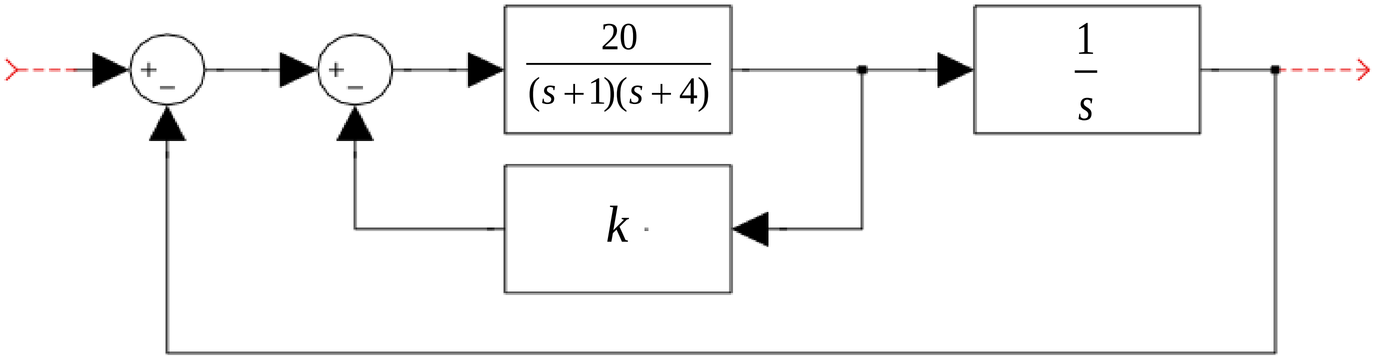


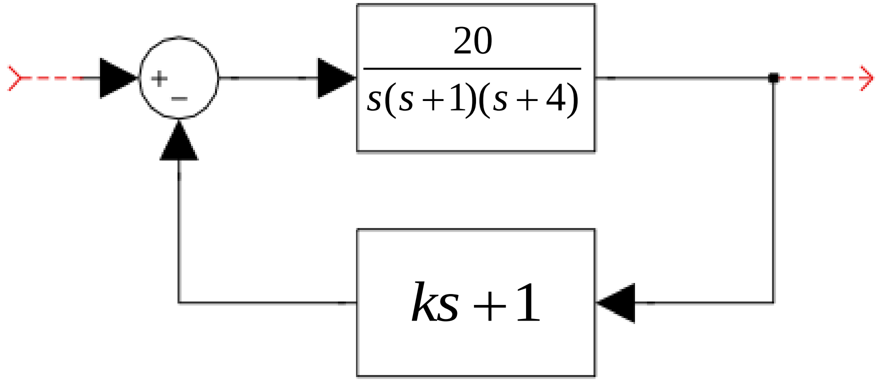

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+2)},H(s)=(s+1)$$

$$\Rightarrow OLTF=GH=\frac{k}{s(s+2)}$$

❋ اگر پارامتر متغییر k به صورت استاندارد ذکر شده در کنار کسر تابع تبدیل مدار باز قرار نگیرد، چه باید کرد!؟

❋ مثال:




Previous Example | Next Example

❊ ادامه:

$$GH = OLTF = \frac{20(ks+1)}{s(s+1)(s+4)}$$

$$CLTF: \frac{C}{R} = \frac{\dfrac{20}{s(s+1)(s+4)}}{1+\dfrac{20(ks+1)}{s(s+1)(s+4)}} = \frac{20}{s(s+1)(s+4)+20ks+20} = \frac{20}{1+k\dfrac{20s}{s^3+5s^2+4s+20}}$$

- حال مکان هندسی ریشه ها را برای تابع تبدیل مدار باز جدید رسم می کنیم:

$$OLTF = \frac{20ks}{s^3+5s^2+4s+20} \Rightarrow \begin{cases} OLP = -5, \pm 2j \\ OLZ = 0 \end{cases} \rightarrow \; n=3 \,,\; m=1$$

- مجانب ها:

$$Asymptots: \frac{\pm 180(2l+1)}{n-m} = \frac{\pm 180(2l+1)}{2} = \pm 90$$

❋ ادامه:

$$\sigma_a = \frac{\sum OLP - \sum OLZ}{n-m} = \frac{(-5+2j-2j)-(0)}{2} = -2.5$$

- زاویه خروج از قطب های مختلط:

$$AD = 180^\circ - \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر قطب ها به قطب مورد نظر} + \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر صفرها به قطب مورد نظر}$$

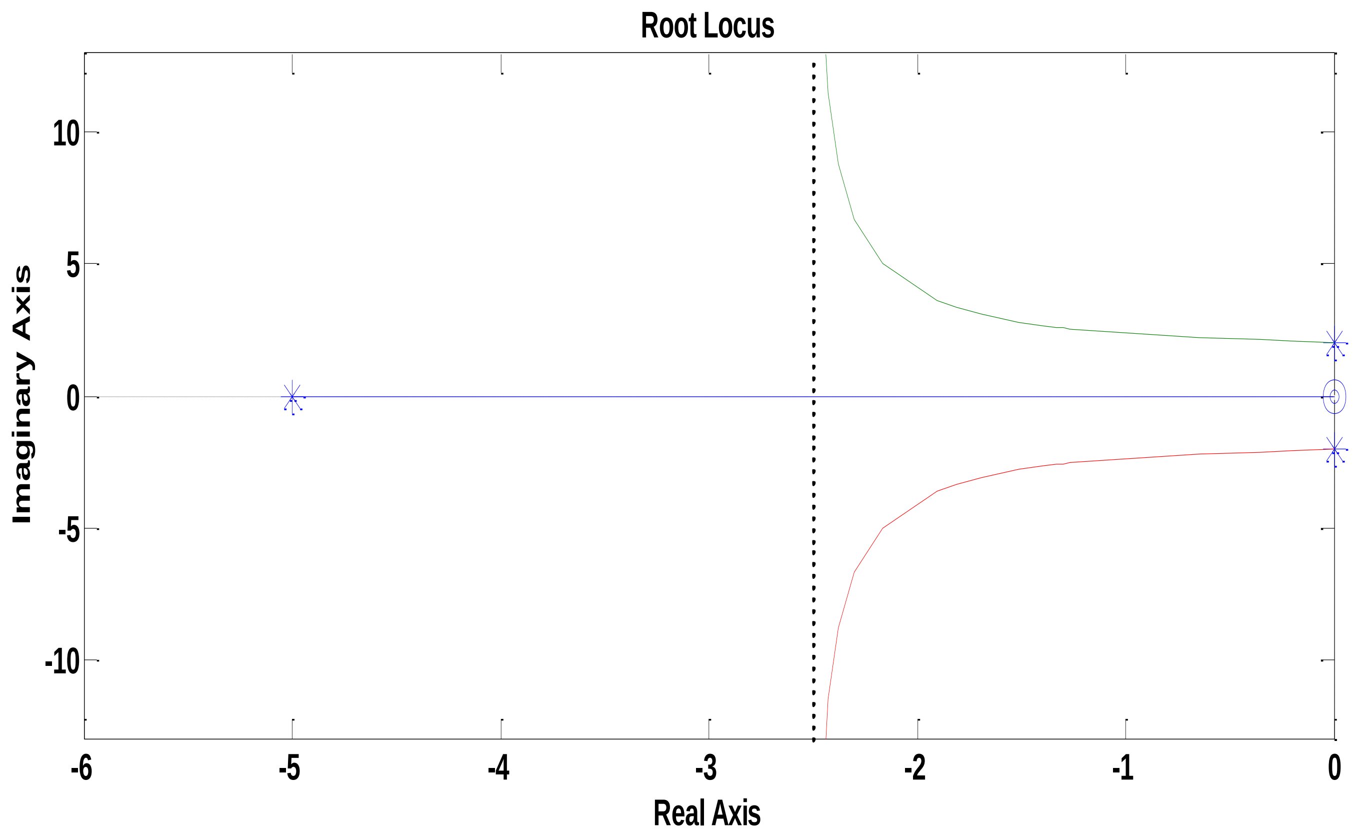
$$AD = 180 - (90 + \tan^{-1}(\frac{2}{5})) + (90) = 180 - 21.8 = 158.2$$

- محل B.I & B.A:

$$k = -\frac{s^3+5s^2+4s+20}{20s} \Rightarrow \frac{dk}{ds} = -\frac{(3s^2+10s+4)(20s)-(20)(s^3+5s^2+4s+20)}{400s^2} = \frac{2s^3+5s^2-20}{20s^2} = 0$$

$$\Rightarrow s = \begin{cases} 1.568 \\ -2.034 \pm 1.497j \end{cases} \Rightarrow k = \begin{cases} -1.353 \\ 0.533 \pm 0.165j \end{cases}$$

مقادیر منفی و مختلط برای k غیر قابل قبول می باشند، در نتیجه نقطه برخوردی برای مکان هندسی وجود ندارد.


Root Locus
Imaginary Axis
10
5
0
-5
-10
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
Real Axis

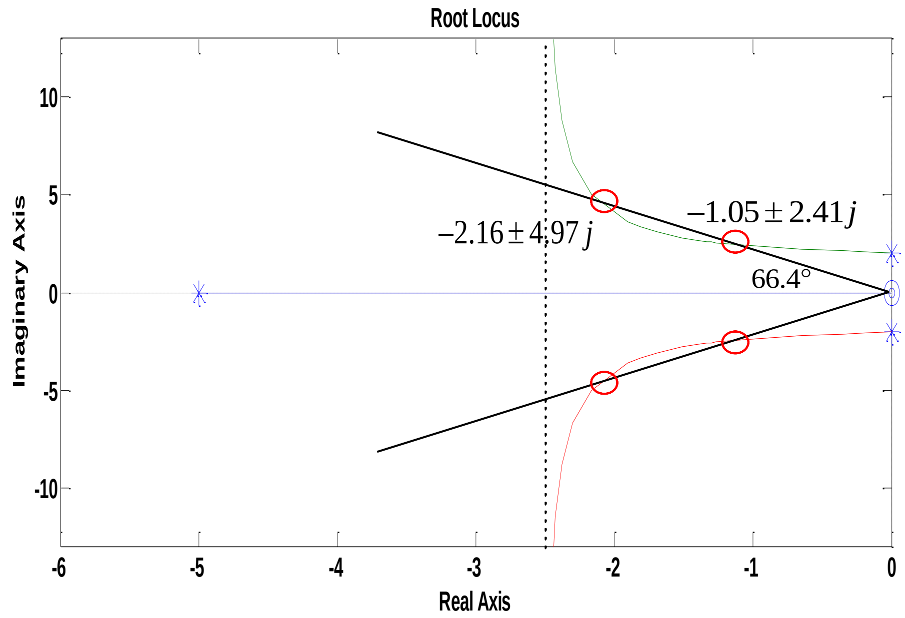
❊ ادامه:

- می خواهیم k را به نحوی طراحی کنیم که سیستم مدار بسته دارای ضریب استهلاک ۰/۴ باشد.

$$\beta = \cos^{-1}(0.4) = 66.4^\circ$$

$$s_p = -1.05 \pm 2.41 j$$

$$s_q = -2.16 \pm 4.97 j$$




$$k = \left| \frac{(s+2j)(s-2j)(s+5)}{20s} \right| \Rightarrow$$

$$k_p = k|_{s_p} = \frac{\sqrt{1.05^2 + (2.41+2)^2}.\sqrt{1.05^2 + (2.41-2)^2}.\sqrt{2.41^2 + (1.05-5)^2}}{20\sqrt{2.41^2 + 1.05^2}} = 0.45 \ , \ k_q = 1.413$$

❊ ادامه:

- به دست آوردن قطب سوم متناظر با هر یک از k ها:

$$\sum \mathrm{Re}(P_i^{CL}) = \sum \mathrm{Re}(P_i^{OL}) = Constant$$

$$\begin{cases} \sum \mathrm{Re}(P_i^{OL}) = 0 + 0 + (-5) = -5 \\ \sum \mathrm{Re}(P_i^{CL}) = 2(-1.05) + s_{3p} \end{cases} \Rightarrow s_{3p} = -2.9$$

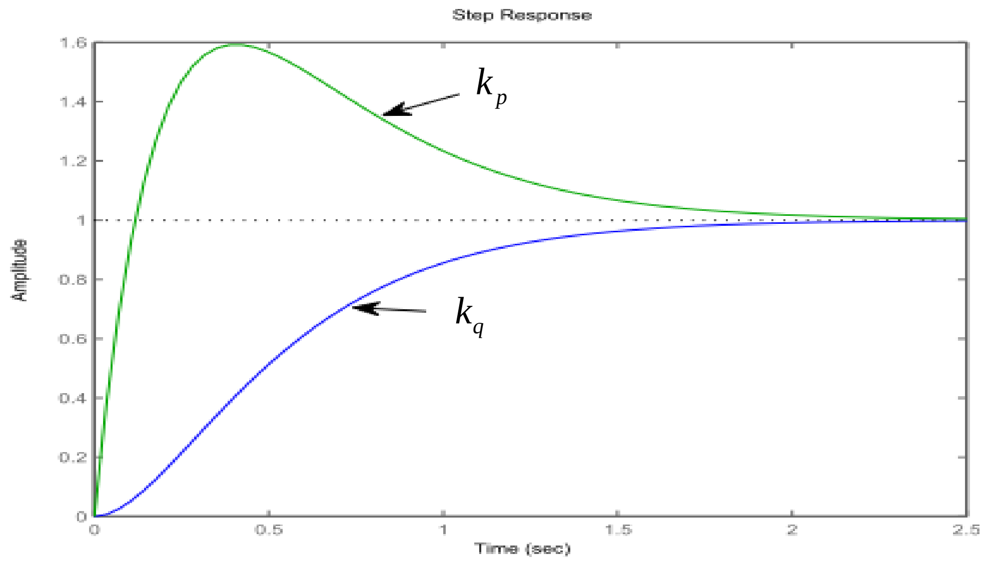
$$\begin{cases} \sum \mathrm{Re}(P_i^{OL}) = 0 + 0 + (-5) = -5 \\ \sum \mathrm{Re}(P_i^{CL}) = 2(-2.16) + s_{3q} \end{cases} \Rightarrow s_{3q} = -0.68$$

❊ ادامه:

– مفهوم قطب غالب:

عبارت است از قطبی که در طولانی مدت رفتار سیستم به آن وابسته می شود. هر قدر قطبی به محور موهومی نزدیکتر باشد، غالب تر است.

در مثال قبل برای حالت q ، $s_3$ غالب تر است، در صورتی که در حالت p ، $s_{1,2}$ غالب ترند.
با توجه به این که برای معنا پیدا کردن ضریب استهلاک باید رفتار سیستم به رفتار یک سیستم رسته دو میل کند، وضعیت p را انتخاب می کنیم و k مطلوب ما مقدار 0.45 خواهد بود.



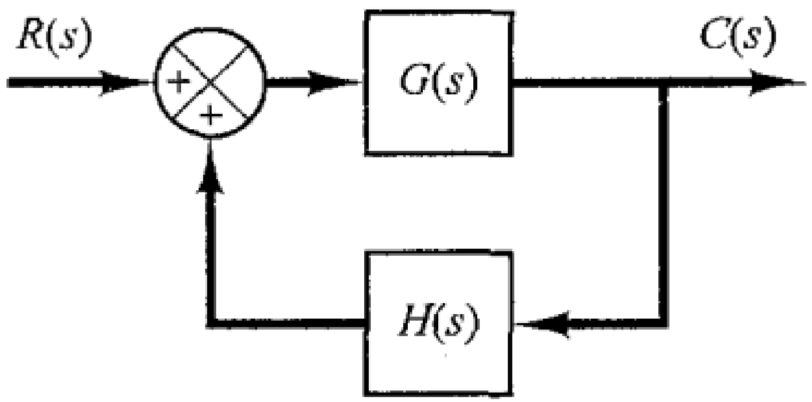
# Part 2:

## Special Cases

- Positive Feedback Systems
- Non-minimum Phase Systems

Contents

❋ مکان هندسی با پسخوراند مثبت (Positive Feedback)




$$CLTF:\frac{C}{R}=\frac{G}{1-GH}\Rightarrow Characteristic\,Eq:1-GH=0\Rightarrow GH=1\Rightarrow\begin{cases}|GH|=1\\ \angle GH=\pm 360l\end{cases}$$

- نسبت به حالت قبلی، فقط شرط زاویه تغییر می کند.

❋ اصلاح قوانین برای سیستم های پسخوراند مثبت:

- بخشی از مکان هندسی که روی محور حقیقی قرار دارد:

اگر مجموع تعداد قطب ها و صفر های سمت راست هر بخش روی محور حقیقی زوج باشد، آن بخش جزو مکان هندسی خواهد بود.

- زاویه ی مجانب ها :

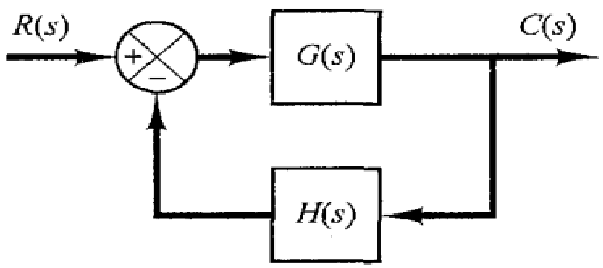
$$\frac{\pm 360 l}{n-m}$$

- زاویه ی خروج از قطب یا ورود به صفر مختلط:

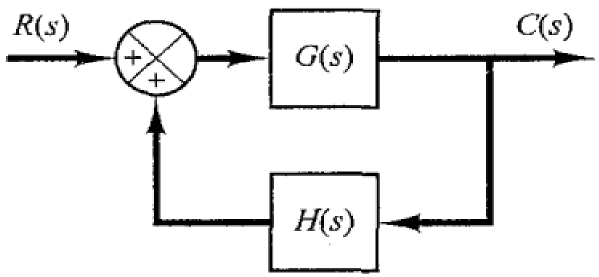
$$AD = 0^\circ - \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر قطب ها به قطب مورد نظر} + \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر صفرها به قطب مورد نظر}$$

$$AA = 0^\circ - \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر صفر ها به صفر مورد نظر} + \sum \text{جمع زوایای بردار ها از سایر قطب ها به صفر مورد نظر}$$

* بررسی نحوه حل انواع مسائل متداول:




برای بدست آوردن مکان هندسی با سیستم پسخوراند منفی و k>0 از قوانین قبلی استفاده می شود.




برای بدست آوردن مکان هندسی سیستم پسخوراند مثبت و k>0 از قوانین اصلاح شده استفاده می شود.

$$NFB \ \& \ k<0 \approx PFB \ \& \ k>0$$

$$PFB \ \& \ k<0 \approx NFB \ \& \ k>0$$

❋ مفهوم سیستم با غیر حداقل فاز (Non-minimum phase)

سیستمهای NMP سیستم هایی هستند که دارای صفر یا قطب سمت راست محور موهومی می باشند؛ اما از آنجا که سیستم های با قطب سمت راست محور موهومی ناپایدار می باشند و عملاً مورد بررسی قرار نمی گیرند، در نتیجه معمولاً زمانی که صحبت از سیستم های NMP است منظور سیستم های دارای صفر سمت راست محور موهومی می باشد.

❋ مثال:

$$G_1(s) = k\,\frac{1 - T_a s}{s(Ts+1)} \rightarrow NMP \;,\; G_2(s) = k\,\frac{T_a s - 1}{s(Ts+1)} \rightarrow NMP$$

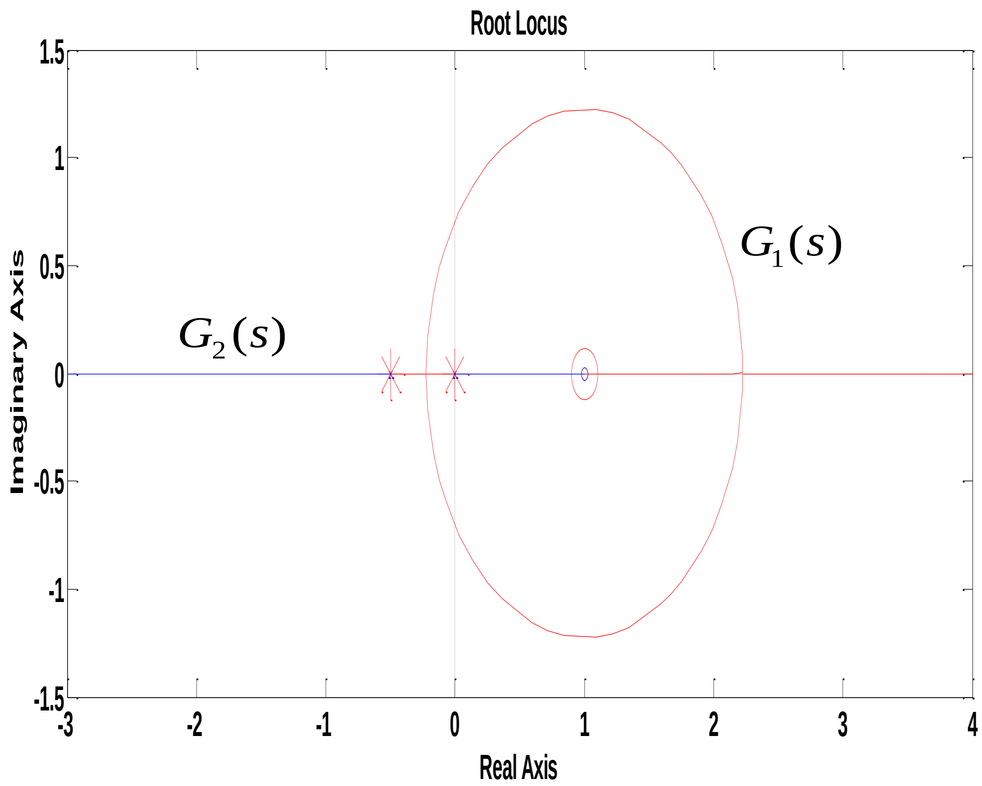
- رسم مکان هندسی G1 برای k>0 مانند رسم مکان هندسی G2 برای k<0 می باشد. در نتیجه برای رسم این مکان می توان مکان هندسی G2 را برای k>0 و سیستم PFB رسم کرد.

- برای رسم مکان سیستم های NMP پیچیده تر، باید همواره علامت بزرگترین توان s را مثبت کرد و سپس مکان هندسی ریشه ها را برای سیستم جدید رسم نمود.

❊ مثال: مکان هندسی ریشه ها را برای دو سیستم NFB زیر رسم کنید.

$$G_1(s) = k\frac{1 - T_a s}{s(Ts+1)} \Rightarrow NMP$$

$$G_2(s) = k\frac{T_a s - 1}{s(Ts+1)} \Rightarrow NMP$$




– هر دو مکان هندسی، برای حالت k>0 رسم شده اند.

❋ مثال: مکان هندسی سیستم زیر را برای k>0 و NFB رسم می کنیم:

$$OLTF = k\frac{3s^2+4s+4}{s^3(s+4)}$$

$$Zeros: z_{1,2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}j}{3} \quad \& \quad Poles: p_{1,2,3}=0 \;\;,\;\; p_4=-4 \rightarrow m=2, n=4$$

$$Number\ of\ asymptots{:}n\text{-}m{=}2\ ,\ Angel\ of\ asymptots{=}\frac{\pm 180^\circ}{n-m}=\frac{\pm 180^\circ}{2}=\pm 90^\circ$$

$$\sigma_a = \frac{\sum OLP - \sum OLZ}{n-m} = \frac{(-4)-(-\frac{4}{3})}{2} = -\frac{4}{3}$$

– با توجه به وجود ریشه ی مرتبه سوم در صفر، سه شاخه با هم تلاقی دارند:

$$\Psi = \frac{360^\circ}{q} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

Previous Example

❊ ادامه:

– محاسبه ی محل برخورد دوشاخه:

$$Characteristic\,Eq: k=\frac{-s^3(s+4)}{3s^2+4s+4}\Rightarrow\frac{dk}{ds}=0\Rightarrow 6s^2(s^3+4s^2+8s+8)=0$$

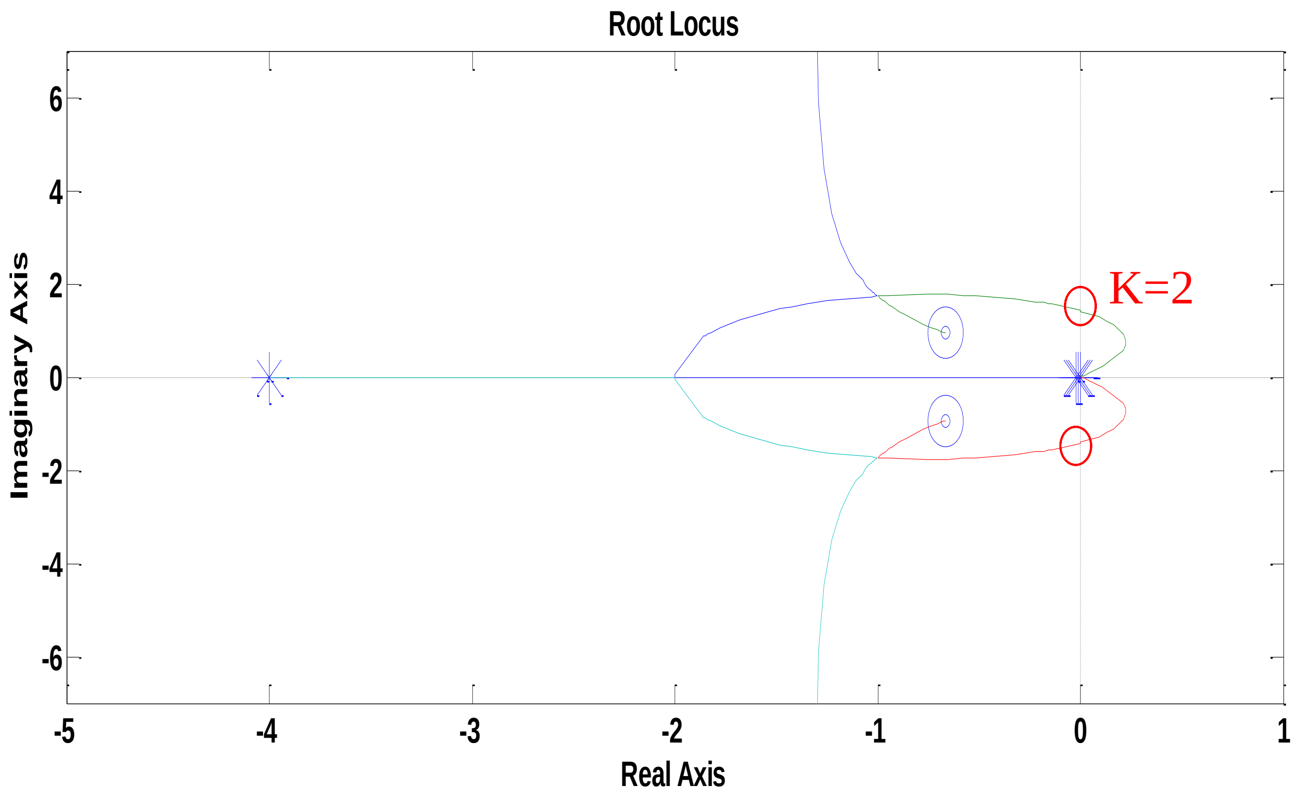
$$\Rightarrow\begin{cases}s=-1\pm j\sqrt{3}\Rightarrow k=4\\ s=-2\Rightarrow k=2\end{cases}$$

با توجه به مختلط بودن s، دو شاخه خارج محور حقیقی با هم برخورد می کنند.

– محاسبه ی محل برخورد با محور موهومی:

$$s=j\omega\Rightarrow 1+k\frac{3s^2+4s+4}{s^3(s+4)}=0\Rightarrow s^3(s+4)+k(3s^2+4s+4)=0$$

$$\Rightarrow(\omega^4-3k\omega^2+4k)+j(-4\omega^3+4k\omega)=0\Rightarrow\begin{cases}-4\omega(\omega^2-k)=0\Rightarrow\omega=\pm\sqrt{k}\\ \Rightarrow k^2-3k^2+4k=0\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ k=2\end{cases}\Rightarrow s=\pm j\sqrt{2}\end{cases}$$



Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
6
4
2
0
-2
-4
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
K=2

Thanks for your attention!

Contents