نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۰/۰۹/۱۱**

وقت : **۹۰** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم دوم درس : **معادلات دیفرانسیل** (۱۰ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / ~~**دوم**~~) **۱۴۰۱-** ۱۴۰۰

توجه :

پاسخ‌ها را توسط نرم‌افزاری مانند Camscanner به صورت یک فایل PDF با حجم مناسب در آورده و از طریق سامانه LMS ارسال نمایید.

ارسال فایل‌ها را به دقیقه‌های آخر موکول نکنید چون سامانه راس ساعت بسته خواهد شد.

سوال ۱- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $2y''-y'=2\sinh\frac{x}{2}$ را به کمک روش ضرایب نامعین بیابید. **۱۰ نمره**

سوال ۲- معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'-y=x^2e^{3x}$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۳- جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y''+2y'-3y=e^{-3x}(x^2+9)$ را بیابید. **۱۰ نمره**

سوال ۴- دستگاه معادلات دیفرانسیل $\begin{cases} x'=3x-y+e^{4t} \\ y'=x+5y+6 \end{cases}$ را حل کنید. **۱۵ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوال۱ : ابتدا جواب معادله همگن $2y''-y'=0$ را پیدا می کنیم.
این معادله، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن است و معادله مشخصه آن عبارت است از $2m^2-m=0$ که دو ریشه متمایز حقیقی $m_1=0$ و $m_2=\frac{1}{2}$ دارد. بنابر این جواب همگن برابر است با : $y_h=a+be^{\frac{1}{2}x}$

برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله $2y''-y'=2\sinh\frac{x}{2}$ به کمک روش ضرایب نامعین می نویسیم $2y''-y'=e^{\frac{1}{2}x}-e^{\frac{-1}{2}x}$.

اکنون با توجه به جواب معادله همگن، جواب خصوصی را به صورت $y_p=Axe^{\frac{1}{2}x}+Be^{\frac{-1}{2}x}$ حدس زده و در معادله قرار می دهیم.

$$[A(\frac{1}{2}x+2)e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}Be^{\frac{-1}{2}x}]-[A(\frac{1}{2}x+1)e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}Be^{\frac{-1}{2}x}]=e^{\frac{1}{2}x}-e^{\frac{-1}{2}x}$$

بعد از ساده کردن سمت چپ معادله داریم : $Ae^{ax}+Be^{-ax}=e^{ax}-e^{-ax}$

اکنون باید داشته باشیم $A=1$ و $B=-1$. یعنی جواب خصوصی معادله برابر $y_p=xe^{\frac{1}{2}x}-e^{\frac{-1}{2}x}$ و جواب عمومی برابر است با:

$$\boxed{y_g=a+(x+b)e^{\frac{1}{2}x}-e^{\frac{-1}{2}x}}$$

پاسخ سوال۲ : برای حل معادله $x^2y''+xy'-y=x^2e^{3x}$ ابتدا باید معادله همگن نظیر آن یعنی $x^2y''+xy'-y=0$ را حل کنیم.
این معادله، یک معادله اویلر و معادله مشخصه آن $r(r-1)+r-1=0$ است. این معادله دو ریشه متمایز حقیقی $r_1=1$ و $r_2=-1$ دارد.
پس جواب معادله همگن عبارت است از : $y_h=c_1x+\frac{c_2}{x}$

برای پیدا کردن جواب خصوصی باید از روش تغییر پارامتر استفاده کنیم. قرار می دهیم $y_1=x$ و $y_2=\frac{1}{x}$ و داریم $w(y_1,y_2)=\frac{-2}{x}$ و همچنین داریم $h(x)=e^{3x}$. جواب خصوصی معادله عبارت است از :

$$y_p=x\int\frac{-(1/x)e^{3x}}{-(2/x)}dx+\frac{1}{x}\int\frac{xe^{3x}}{-(2/x)}dx$$

$$y_p=\frac{1}{2}x\int e^{3x}dx-\frac{1}{2x}\int x^2e^{3x}dx=\frac{1}{2}x(\frac{1}{3}e^{3x})-\frac{1}{2x}(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27})e^{3x}=\frac{1}{27}(3-\frac{1}{x})e^{3x}$$

جواب عمومی معادله برابر است با :

$$\boxed{y_g=c_1x+\frac{c_2}{x}+\frac{1}{27}(3-\frac{1}{x})e^{3x}}$$

پاسخ سوال۳ : ابتدا جواب همگن را پیدا می کنیم. معادله مشخصه عبارت است از $m^2+2m-3=0$ که دو ریشه حقیقی و متمایز $m_1=1$ و $m_2=-3$ دارد. پس جواب معادله همگن برابر است با : $y_h=c_1e^x+c_2e^{-3x}$
برای پیدا کردن جواب خصوصی از روش عملگر D استفاده می کنیم. داریم : $(D^2+2D-3)y=(x^2+9)e^{-3x}$

بنابر این :

$$y_p=\frac{1}{D^2+2D-3}(x^2+9)e^{-3x}=e^{-3x}\frac{1}{(D-3)^2+2(D-3)-3}(x^2+9)$$

$$y_p=e^{-3x}\frac{1}{D(D-4)}(x^2+9)=e^{-3x}\frac{-1}{4D}[1+\frac{1}{4}D+\frac{1}{16}D^2+\cdots](x^2+9)=-e^{-3x}\frac{1}{4D}(x^2+9+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8})$$

$$=-e^{-3x}\frac{1}{4D}(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{73}{8})=-\frac{1}{4}e^{-3x}(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{73}{8}x)=-\frac{1}{96}(8x^3+6x^2+219x)e^{-3x}$$

با پیدا شدن جواب خصوصی معادله می توانیم جواب عمومی را بنویسیم :

$$\boxed{y_g=c_1e^x+c_2e^{-3x}-\frac{1}{96}(8x^3+6x^2+219x)e^{-3x}}$$

ادامه پاسخ سوال ۳: اگر از تغییر متغیر $y = e^{-3x}u$ استفاده کنیم به معادله دیفرانسیل $u'' - 4u' = x^2 + 9$ می رسیم که راه حل آن کوتاهتر است.

پاسخ سوال۴ : برای استفاده از روش عملگر D می نویسیم :

$$\begin{cases}(D-3)x + y = e^{4t}\\ -x + (D-5)y = 6\end{cases}$$

برای حذف x، معادله دوم را در $D-3$ ضرب کرده و با معادله اول جمع می کنیم. $(D^2 - 8D + 16)y = e^{4t} - 18$

اکنون اگر معادله $D^2 - 8D + 16 = 0$ را در نظر بگیریم، ریشه تکراری ۴ دارد و جواب همگن را به صورت $y(t) = (At+B)e^{4t}$ معرفی می کند. اگر $D^2 - 8D + 16 \neq 0$ جواب خصوصی عبارت است از :

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 8D + 16}(e^{4t} - 18)$$

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 - 8D + 16}(e^{4t}) + \frac{1}{D^2 - 8D + 16}(-18) \\ &= e^{4t}\frac{1}{(D+4)^2 - 8(D+4) + 16}(1) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32}D + \cdots\right)(-18) \\ &= e^{4t}\frac{1}{D^2}(1) + \left(\frac{-18}{16}\right) = \frac{1}{2}t^2 e^{4t} - \frac{9}{8} \end{aligned}$$

اکنون جواب عمومی تابع y پیدا شده است :

$$y_g = \left(\frac{1}{2}t^2 + At + B\right)e^{4t} - \frac{9}{8}$$

با قرار دادن این جواب در معادله دوم دستگاه خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} x_g &= (2t^2 + (4A+1)t + A + 4B)e^{4t} - \left(\frac{5}{2}t^2 + 5At + 5B\right)e^{4t} + \frac{45}{8} - 6 \\ &= \left(\frac{-1}{2}t^2 + (1-A)t + A - B\right)e^{4t} - \frac{3}{8} \end{aligned}$$

و بالاخره، جواب عمومی دستگاه معادلات عبارت است از :

$$\boxed{\begin{cases} x_g = \left(\frac{-1}{2}t^2 + (1-A)t + A - B\right)e^{4t} - \frac{3}{8} \\ y_g = \left(\frac{1}{2}t^2 + At + B\right)e^{4t} - \frac{9}{8} \end{cases}}$$