نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۴۰۰/۰۸/۲۰**

وقت : **۹۰** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم اول درس : **ریاضی ۱-فنی** (۲۰ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / ~~دوم~~) **۱۴۰۱-** ۱۴۰۰

توجه :

پاسخ‌ها را توسط نرم‌افزاری مانند Camscanner به صورت یک فایل PDF با حجم مناسب در آورده و از طریق سامانه LMS ارسال نمایید.

ارسال فایل‌ها را به دقیقه‌های آخر موکول نکنید چون سامانه راس ساعت بسته خواهد شد.

سوال ۱- الف) مکان هندسی تمام نقاطی را بیابید که در رابطه زیر صدق می‌کنند: ۸ نمره

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{۳-z}\right) \geq \frac{-۱}{۲}$$

ب) معادله $i z^{۳} + ۵(i+\sqrt{۳})^{۳} = ۰$ را حل کنید. ۷ نمره

سوال ۲- فرض کنید $f(x) = \dfrac{x}{۴-x}$ و $g(x) = \sqrt{x^{۲}-۴}$. دامنه $f \circ g(x)$ را محاسبه کنید. ۱۰ نمره

سوال ۳- وارون تابع $y = ۳e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}$ را بیابید. ۱۰ نمره

سوال ۴- حد زیر را محاسبه کنید. ۱۵ نمره

$$\lim_{x \to ۱^{+}} \frac{۲\sqrt{x} + [-x]\sqrt[۳]{x}}{x^{۲} + ۴x - ۵}$$

توجه : نماد [۰] علامت تابع جزء صحیح است و فرجه رادیکال دوم برابر ۳ است.

موفق باشید

دانشکده علوم ریاضی
۱۴۰۰/۰۸/۲۰
سیدرضا موسوی

پاسخ سوالات امتحان میان‌ترم درس ریاضی ۱-فنی (۲۰ گروه هماهنگ)

نیمسال اول ۱۴۰۱-۱۴۰۰

پاسخ سوال۱ : الف) ابتدا با فرض $z=x+yi$ کسر را به یک عدد مختلط معمولی تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{z}{3-z}=\frac{x+iy}{3-x-yi}=\frac{(x+iy)(3-x+yi)}{(3-x-yi)(3-x+yi)}=\frac{(3x-x^2-y^2)+3yi}{9-6x+x^2+y^2}$$

اکنون باید داشته باشیم : $$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{3-z}\right)=\frac{3x-x^2-y^2}{9-6x+x^2+y^2}\ge\frac{-1}{2}$$

که نتیجه می‌دهد : $6x-2x^2-2y^2\ge -9+6x-x^2-y^2 \to x^2+y^2\le 9 \to |z|\le 3$

یعنی مکان هندسی مورد نظر، درون و روی دایره به مرکز مبدا مختصات و با شعاع برابر a است.

ب) $iz^3+5(i+\sqrt{3})^3=0 \to iz^3+5(2e^{\frac{\pi}{6}i})^3=0 \to iz^3+40i=0 \to z^3=-40$

یک ریشه این معادله $z_0=-2\sqrt[3]{5}$ است و دو ریشه دیگر آن هم به کمک ریشه‌های سوم واحد عبارتند از :

$$z_1=-2\sqrt[3]{5}e^{\frac{2\pi}{3}i}=\sqrt[3]{5}(1-\sqrt{3}i) \quad , \quad z_2=-2\sqrt[3]{5}e^{-\frac{2\pi}{3}i}=\sqrt[3]{5}(1+\sqrt{3}i)$$

پاسخ سوال۲ : ابتدا دامنه دو تابع f و g را پیدا می‌کنیم. $D_f=\mathbf{R}-\{4\}$ و $D_g=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

اکنون داریم $D_{f\circ g}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}=\{x\in D_g : g(x)\ne 4\}$

اگر $g(x)=4$ آنگاه $\sqrt{x^2-4}=4$ و در نتیجه $x=\pm2\sqrt{5}$ بنابر این داریم $D_{f\circ g}=\{x\in D_g : x\ne\pm2\sqrt{5}\}$

$$D_{f\circ g}=(-\infty,-2\sqrt{5})\cup(-2\sqrt{5},-2]\cup[2,2\sqrt{5})\cup(2\sqrt{5},\infty)$$

پاسخ سوال۳ : $y=3e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}$ برای محاسبه وارون یک تابع، ابتدا اسامی x و y را جابجا می‌کنیم : $x=3e^{\sqrt{y}}-1e^{-\sqrt{y}}$

اکنون باید y را بر حسب x محاسبه کنیم. برای راحتی کار قرار می‌دهیم $t=e^{\sqrt{y}}$ و داریم $x=3t-\frac{1}{t}$ و یا $3t^2-xt-1=0$

در نتیجه $t=\frac{x\pm\sqrt{x^2+12}}{6}$ و یا $e^{\sqrt{y}}=\frac{x\pm\sqrt{x^2+12}}{6}$ و چون سمت چپ تساوی همواره مثبت است پس یکی از جواب‌ها قابل قبول نیست و داریم $e^{\sqrt{y}}=\frac{x\pm\sqrt{x^2+12}}{6}$ و یا $\sqrt{y}=\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+12}}{6}\right)$ و جواب نهایی عبارت است از : $y=\ln^2\left(\frac{x+\sqrt{x^2+12}}{6}\right)$

پاسخ سوال۴ : ابتدا تابع جزء صحیح را بررسی می‌کنیم. چون $x\to1^+$ می‌توانیم فرض کنیم $1<x<2$ و بنابر این $-2<-x<-1$ و در نتیجه $[-x]=-2$ و صورت سوال به شکل $l=\lim_{x\to1^+}\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x^2+4x-5}=\lim_{x\to1^+}\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})}{(x-1)(x+5)}$ تبدیل می‌شود.

چون $(2\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x})|_{x=1}=0$ و $(x^2+4x-5)|_{x=1}=0$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رسیده ایم و باید رفع ابهام کنیم.

روش اول : با تغییر متغیر $x=t^6$.

$$l=\lim_{t\to1^+}\frac{2(t^3-t^2)}{(t^6-1)(t^6+5)}=\lim_{t\to1^+}\frac{2t^2(t-1)}{(t-1)(t^5+\cdots+1)(t^6+5)}=\lim_{t\to1^+}\frac{2t^2}{(t^5+\cdots+1)(t^6+5)}=\frac{2}{6(1+5)}=\frac{1}{18}$$

روش دوم : استفاده از اتحادهای جبری.

$$l=\lim_{x\to1^+}\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})}{(x-1)(x+5)}\times\frac{\sqrt{x^5}+\sqrt{x^4}\sqrt[3]{x}+\cdots+\sqrt{x}\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt{x^5}+\sqrt{x^4}\sqrt[3]{x}+\cdots+\sqrt{x}\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^5}}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2(x^3-x^2)}{(x-1)(x+5)}\times\frac{1}{\sqrt{x^5}+\sqrt{x^4}\sqrt[3]{x}+\cdots+\sqrt{x}\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^5}}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2}{x+5}\times\frac{1}{\sqrt{x^5}+\sqrt{x^4}\sqrt[3]{x}+\cdots+\sqrt{x}\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^5}}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

البته می‌توانستیم از اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر به صورت مجزا هم استفاده کنیم.