Sharif University of Technology
School of Mechanical Engineering

Automatic Control

Chapter 5:

Transient and Steady-State Response Analysis

Instructor:
Professor Aria Alasty

1391-92 Fall Semester

Contents

Contents

Contents

- در دو فصل قبل، به یافتن مدل ریاضی سیستم ها - اولین مرحله ی تحلیل یک سیستم کنترلی - پرداختیم.
- روش های مختلفی برای تحلیل عملکرد سیستم ها با کمک این مدل ها وجود دارد.
- در عمل، ورودی اعمالی به سیستم ها اکثرا ماهیتی رندوم دارد و تابعی شناخته شده نیست؛ مگر در مواردی محدود مانند کنترل ابزارهای برش.
- پس هدف از تحلیل با ورودی های ساده و تحلیلی که حوزه این فصل است، چیست؟
- این تحلیل ها پایه ای برای مقایسه عملکرد سیستم های مختلف و همچنین ایجاد کننده محدوده ای برای طراحی سیستم های کنترلی هستند.

Typical Test Signals

ورودی	تابع لاپلاس	معادل
Unit impulse – **ضربه واحد**	1	ورودی شوک
Unit step – **پله واحد**	$\frac{1}{s}$	اختلال ناگهانی
Unit ramp – **شیب واحد**	$\frac{1}{s^2}$	تغییر تدریجی مکان
Unit acceleration – **شتاب واحد**	$\frac{1}{s^3}$	تغییر تدریجی سرعت
Sinusoidal – **ورودی سینوسی**	–	ورودی متناوب
White noise	رندوم	نویز خفیف سیستم

❋ هر کنترلر مدار بسته سه هدف مهم را دنبال می کند:

۱) تامین پایداری سیستم که مهم ترین هدف است.

۲) اصلاح رفتار گذرای سیستم

۳) بهبود خطای ماندگار

❋ اگر c(t) پاسخ سیستم به یک ورودی خاص باشد، می توان نوشت:

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$$

که جمع پاسخ گذرا و پایدار سیستم است.

در این فصل با هر سه مفهوم و نحوه محاسبه آنها در سیستم های تک ورودی-تک خروجی آشنا می شویم.

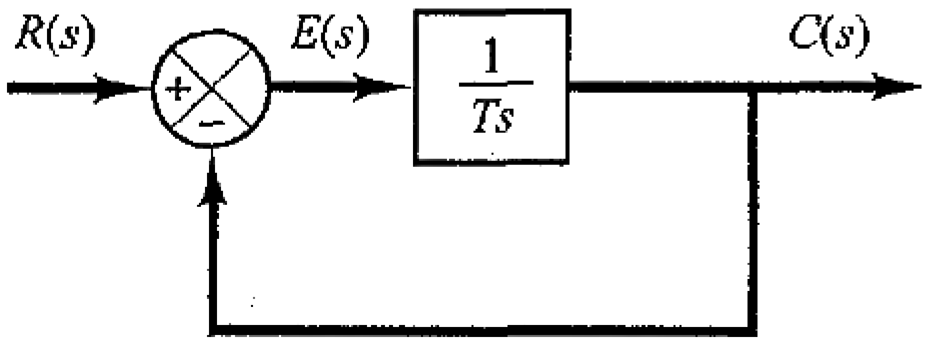
Part 1:

Transient Response – First Order Systems

- Unit Step Response
- Unit Ramp Response
- Unit Impulse Response

Contents

❋ می توانند مدلی از یک سیستم حرارتی یا یک مدار RC باشند.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

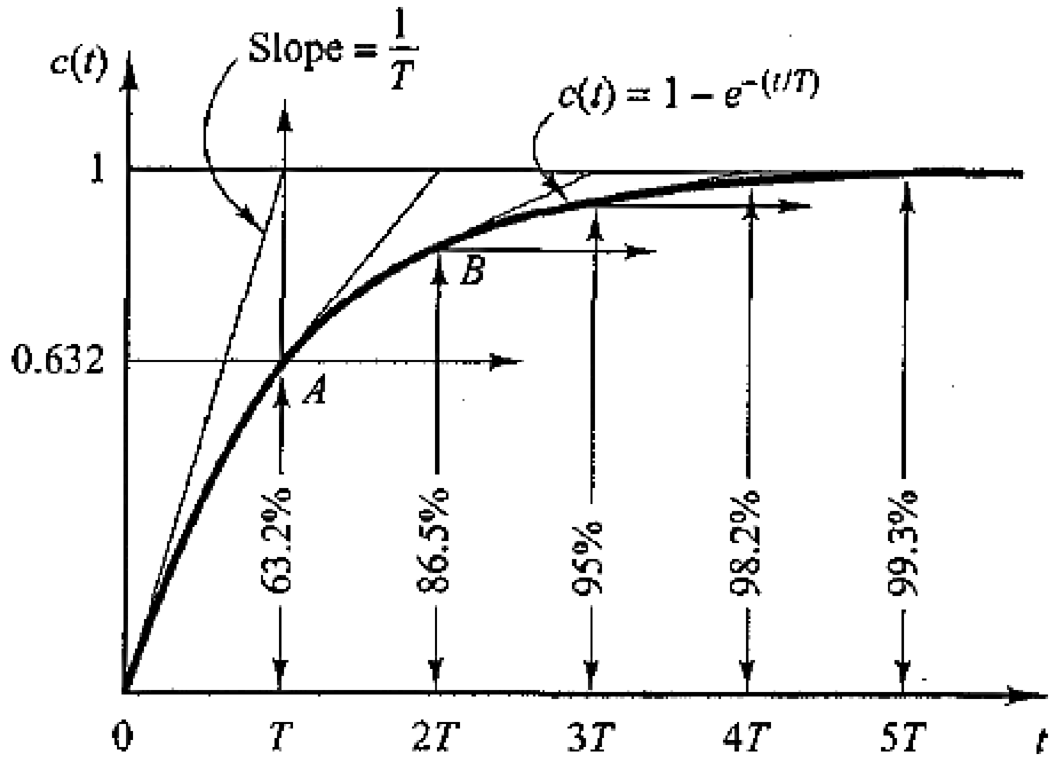
ورودی پله : $R(s) = \frac{1}{s}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + {}^{1}/_{T}}$$

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

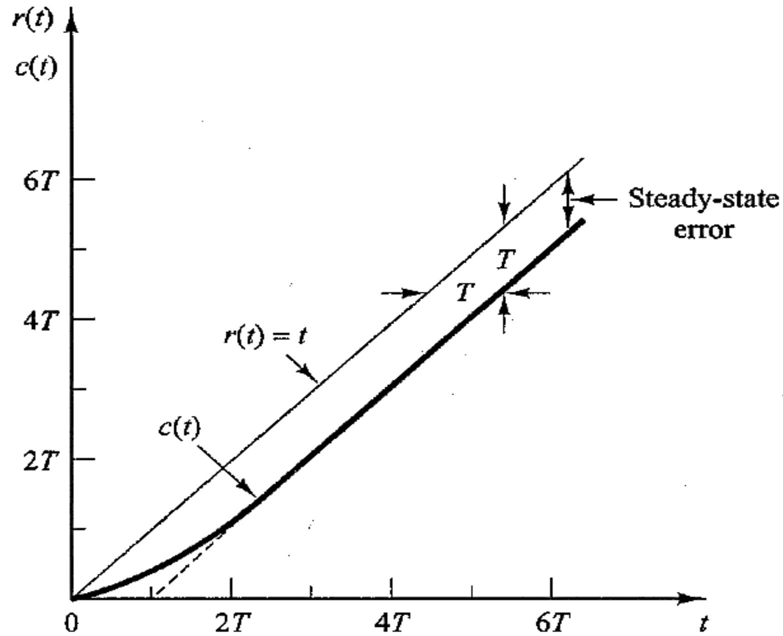


⁕ T را ثابت زمانی سیستم می نامیم. هر چه T کوچکتر باشد، اثر s (دینامیک سیستم) را کم می کند و پاسخ سیستم، سریعتر خواهد بود.

⁕ مقدار اولیه پاسخ صفر و مقدار نهایی یک است.

Unit Ramp Response

ورودی شیب : $R(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$



$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s^2} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{Ts+1}$$

$$a = [s^2C(s)]|_{s=0} = 1$$

$$b = [s^2C(s)]'|_{s=0} = -T$$

$$c = [(Ts+1)C(s)]|_{s=\frac{-1}{T}} = T^2$$

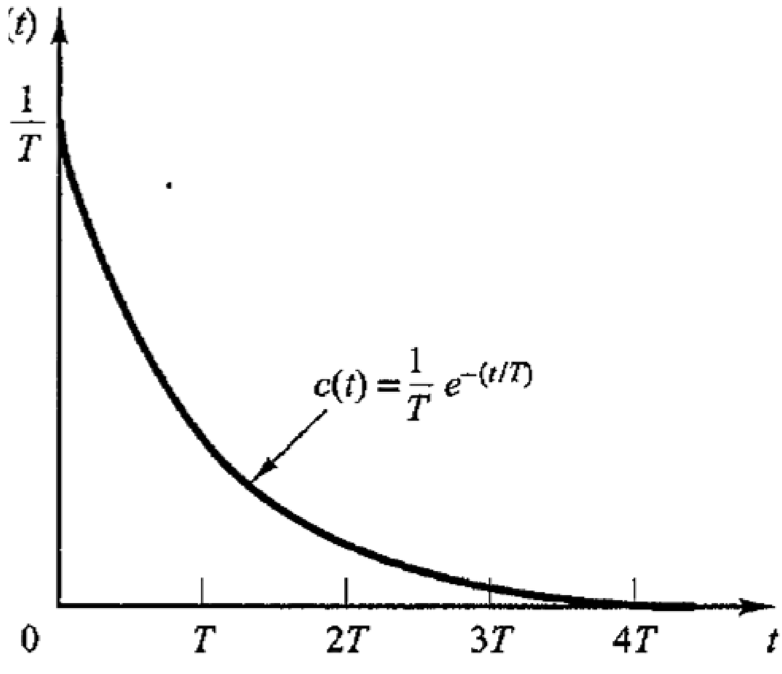
$$C(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{T^2}{Ts+1} - \frac{T}{s} \Rightarrow c(t) = t - T + Te^{-t/T}$$

$$e(t) = r(t) - c(t) \Rightarrow e(\infty) = r(\infty) - c(\infty) = T$$

Unit Impulse Response

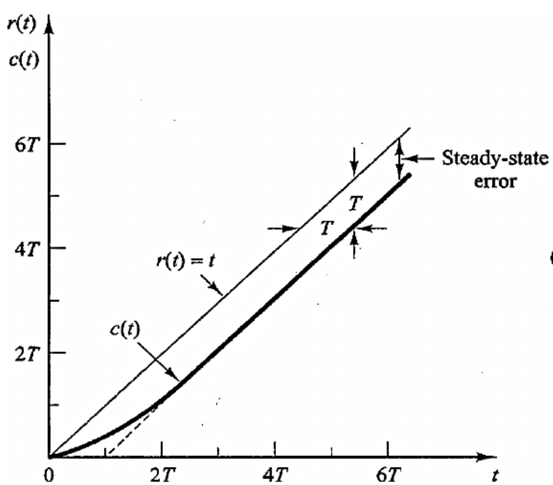
$$\text{ورودی ضربه}:\ r(t) = \delta(t) \Rightarrow R(s) = 1 \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \Rightarrow C(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

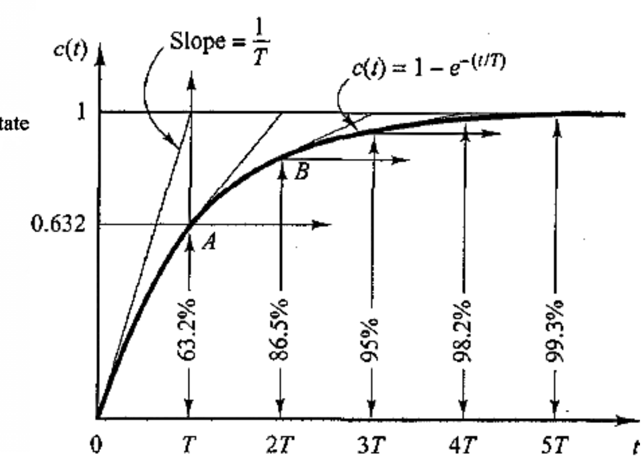
$$c(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}$$

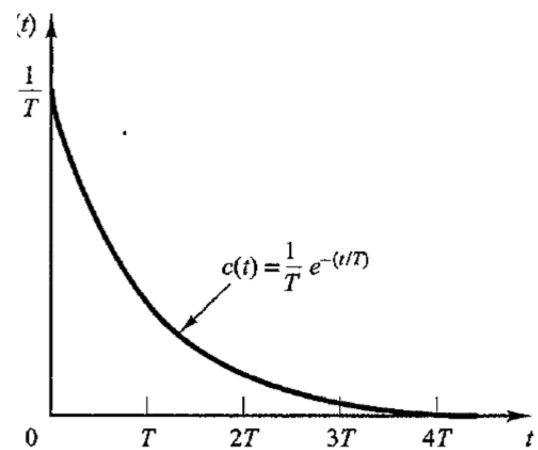


❋ از ویژگی های سیستم های LTI این است که پاسخ مشتق یک ورودی برابر با مشتق پاسخ آن ورودی و پاسخ انتگرال یک ورودی برابر با انتگرال پاسخ آن ورودی است:

شیب		**پله**		**ضربه**
$c(t) = t - T + Te^{-t/T}$		$c(t) = 1 - e^{-t/T}$		$c(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}$
$R(s) = \frac{1}{s^2}$	$\xrightarrow{Derivation(\times s)}$	$R(s) = \frac{1}{s}$	$\xrightarrow{Derivation(\times s)}$	$R(s) = 1$







Part 2:

Transient Response - Second Order Systems

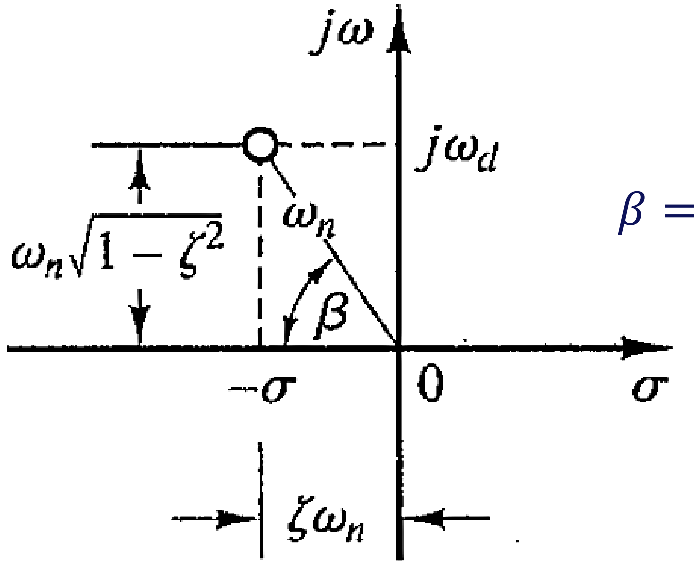
- Unit Step Response
- Transient Response Specifications
- Servo System

Contents

فرم استاندارد : $\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

ریشه های مخرج : $S_1, S_2 = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\,)\omega_n$

Damping Ratio ξ **Natural Frequency** ω_n **Damped Frequency** ω_d



$\beta = \cos^{-1}(\xi)$

Undamped	$\xi = 0$
Underdamped	$0 < \xi < 1$
Critically damped	$\xi = 1$
Overdamped	$\xi > 1$

(1) Underdamped Case ($0 < \xi < 1$):

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \xrightarrow{R(s)=1/s} C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t\right)$$

(2) Undamped Case ($\xi = 0$) $\Rightarrow$ $c(t) = 1 - \cos\omega_n t$

(3) Critically damped case ($\xi = 1$):

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2 s} \Rightarrow c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$$

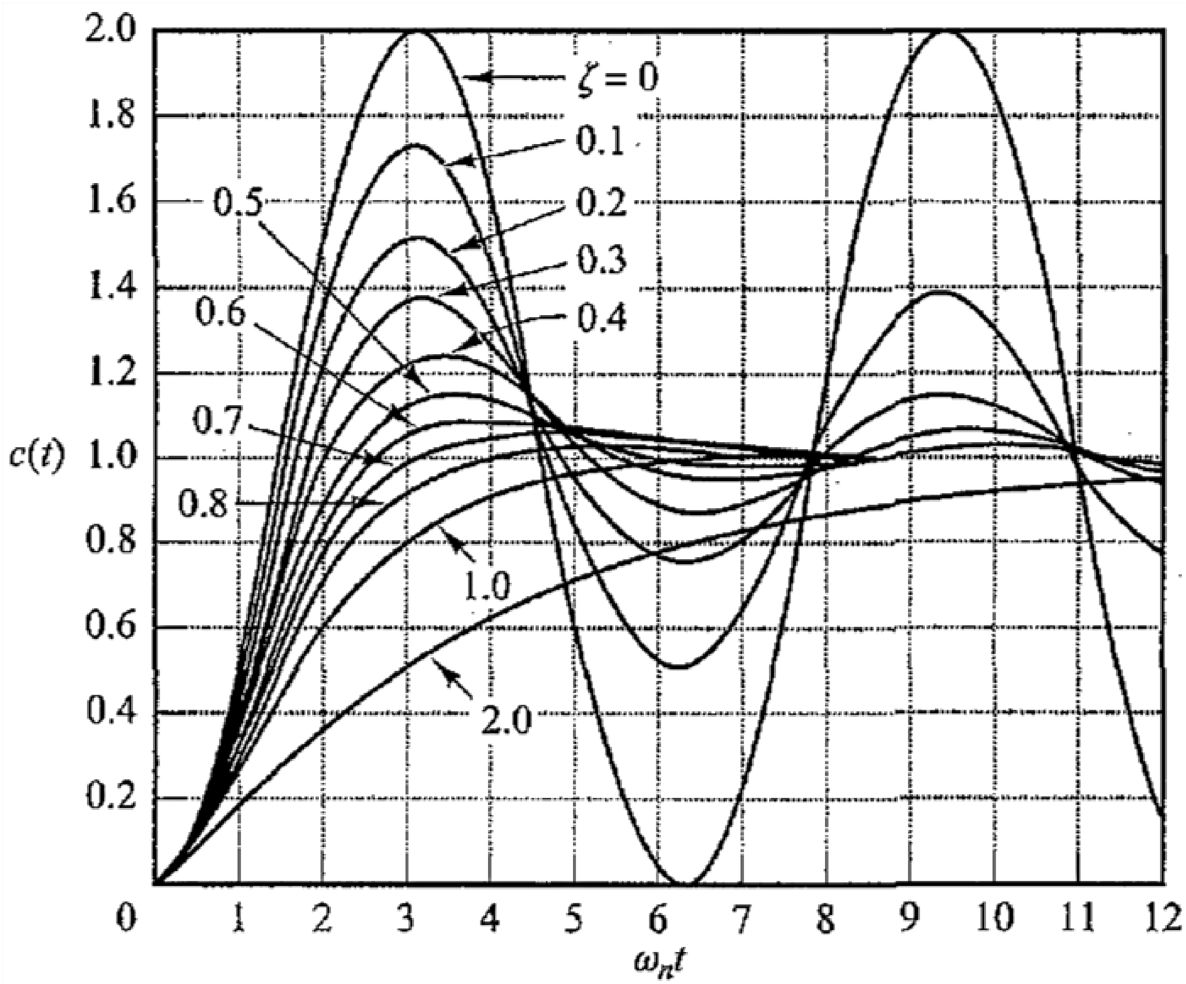
(4) Overdamped ($\xi > 1$):

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right)$$

$$s_1 = \omega_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$
$$s_2 = \omega_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

* S_1 و S_2 ریشه های حقیقی مخرج تابع تبدیل هستند.

Unit Step Response



❋ سیستم هایی که ξ یکسان و ω_n متفاوت دارند، مسیر یکسانی را با سرعت متفاوت طی می کنند.

❋ در میان سیستم های underdamped آنهایی که ξ بین 0.5~0.8 دارند، دارای سریع ترین پاسخ هستند.

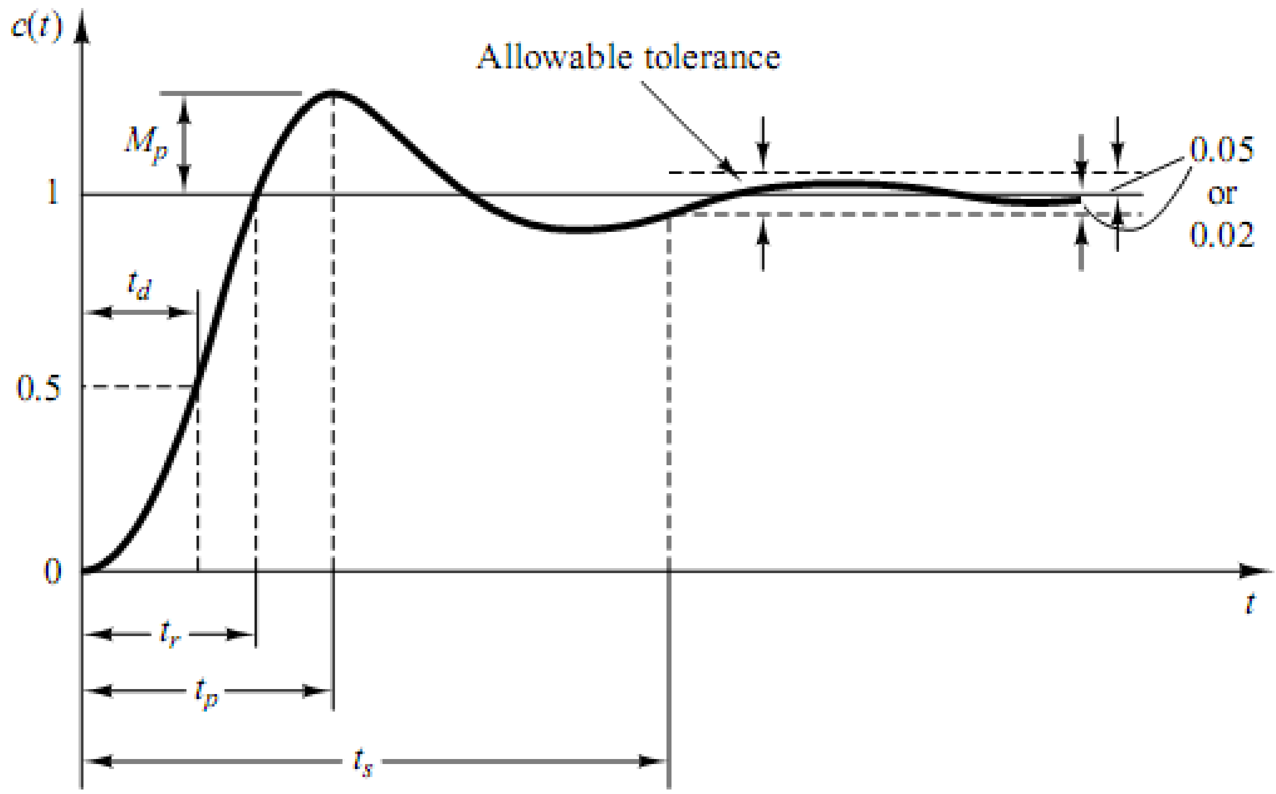
❋ پس از سیستم های underdamped، سیستم های critically damped، سریعترین پاسخ را دارند.

❋ Overdamp شدن سیستم را کند و لخت می کند.

❋ برای مقایسه عملکرد سیستم های کنترلی، از پارامترهای وابسته به پاسخ پله واحد استفاده می شود؛ که در محاسبه آنها، شرایط اولیه صفر در نظر گرفته می شود:

مشخصه		تعریف
Delay time	t_d	زمان رسیدن پاسخ به نصف مقدار نهایی
Rise time	t_r	زمان رسیدن پاسخ از ۱۰٪ به ۹۰٪ مقدار نهایی
Peak time	t_p	زمان رسیدن پاسخ به اولین مقدار اورشوت
Maximum overshoot	M_p	درصد تفاوت نسبی مقدار اولین اورشوت با مقدار نهایی
Settling time	t_s	زمان رسیدن پاسخ به حاشیه ای ۲٪ یا ۵٪ و دائمی از مقدار نهایی

❋ مشخصات پاسخ گذرای پله واحد سیستم رسته دو در شکل قابل بررسی است:

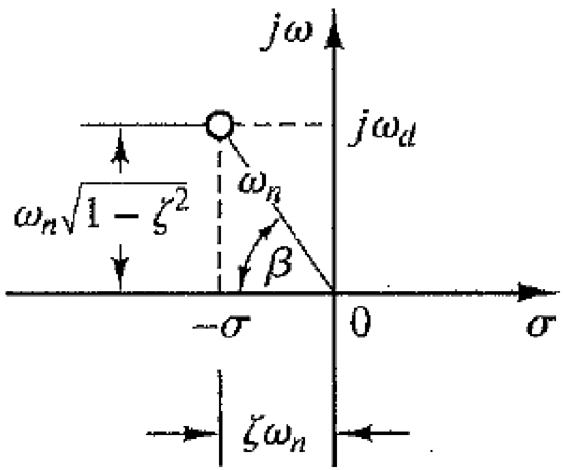


❋ در حالت Underdamped سیستم رسته دو داریم:

1) Rise time - t_r:

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\xi\omega_n t_r}\left(\cos\omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t_r\right)$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\sigma}\right) = \frac{\pi-\beta}{\omega_d}$$



2) Peak time - t_p:

$$\frac{dc}{dt}\Big|_{t=t_p} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t_p)e^{-\xi\omega_n t_p} = 0 \Rightarrow \sin(\omega_d t_p)=0$$

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, \ldots \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

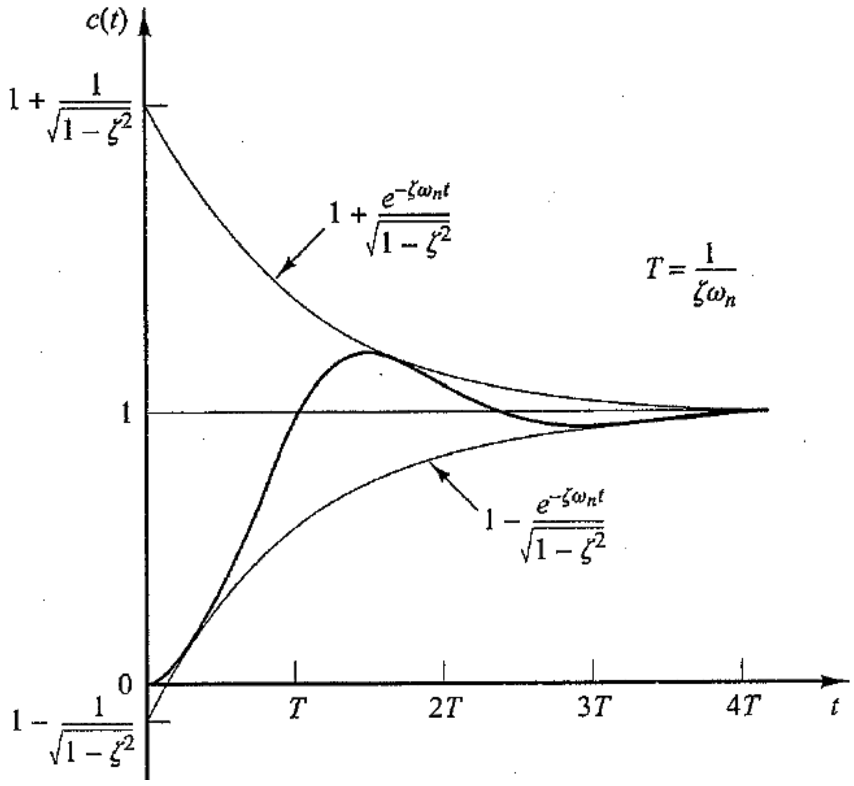
3) Maximum overshoot - M_p:

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \Rightarrow M_p = \mathrm{c}(t_p) - 1 = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-\left(\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)\pi}$$

❄ M_p فقط تابع ξ است.

4) Settling time - t_s:

* با کمک دو تابع نمایی محدود کننده بالا و پایین پاسخ، مطابق شکل زمان نشست را به صورت زیر تخمین می زنیم :



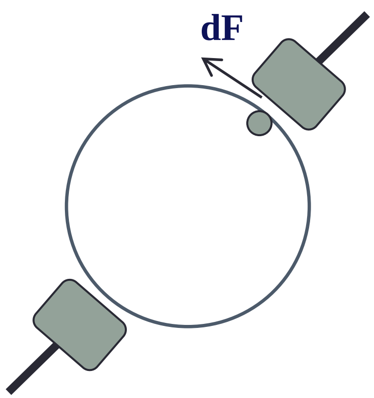
$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi\omega_n}$$ حاشیه ٪۲

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\xi\omega_n}$$ حاشیه ٪۵

❊ مثال:

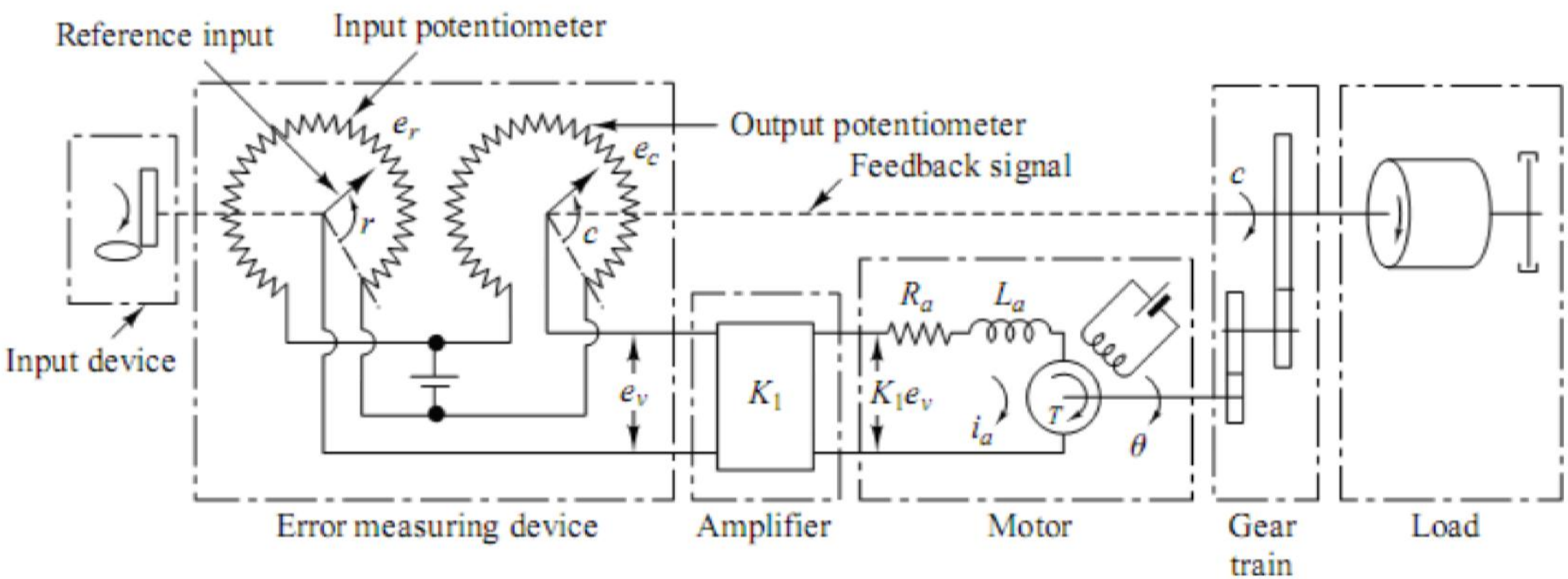
– تاثیر متقابل میدان مغناطیسی و جریان الکتریکی در سیم پیچ های موتور به تولید یک گشتاور برآیند (τ) می انجامد.

– این گشتاور، به شدت میدان مغناطیسی، جریان الکتریکی و پارامترهای هندسی موتور وابسته است.



$\tau = k i_a i_f \rightarrow \tau = K i_a$: Armature controlled & $\tau = K i_f$: Field controlled

❋ شکل زیر ساختمان کلی یک سروو موتور DC را نشان می دهد:



❋ مدار آرمیچر، دارای المان های مقاومت و سلف است که وظیفه چرخاندن محور را دارد.

❋ به منظور ایجاد دور پایین و گشتاور بالا، مدار آرمیچر را به یک جعبه دنده متصل می کنیم.

❋ پتانسیومتر به منظور ورود فرمان (زاویه) و اندازه گیری میزان چرخش محور به کار می رود. برای مدل بندی پتانسیومترها داریم:

$$e_r = K_0 r \,, e_c = K_0 c \Rightarrow e_v = e_r - e_c = K_0(r - c) = K_0 e \quad ; \quad \mathrm{e: Error}$$

❋ این مدار DC قابلیت انجام کار مکانیکی ندارد، بنابراین به یک مدار راه انداز نیازمندیم.

❋ به علت چرخش آرمیچر، ولتاژی متناسب با حاصلضرب شار و سرعت زاویه ای در مدار ایجاد می شود. برای شار ثابت، داریم:

$$e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

❊ معادله ولتاژ در مدار آرمیچر:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \Rightarrow L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v$$

❊ تعادل گشتاوری:

$$J_0 \ddot{\theta} + b_0 \dot{\theta} = T = K_2 i_a$$

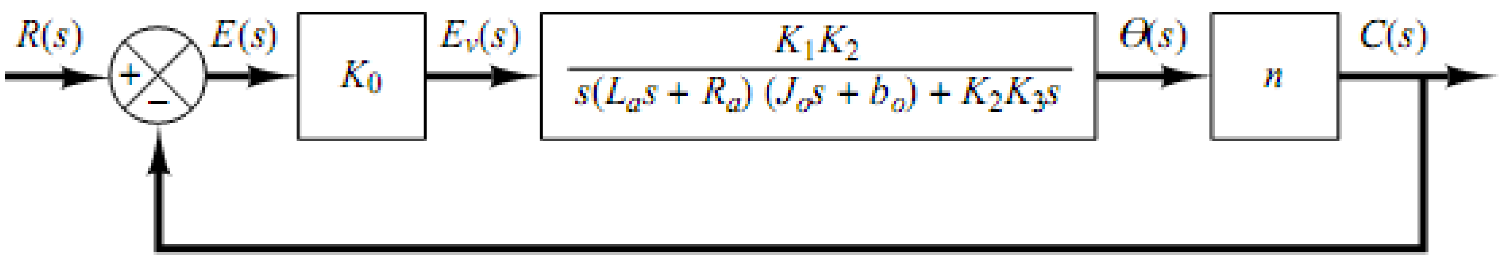
❊ تابع تبدیل موتور DC به همراه Amplifier:

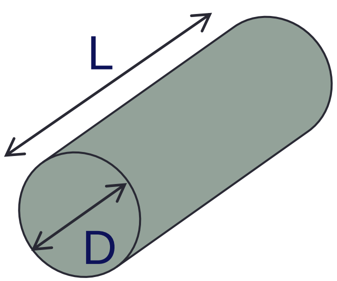
$$\frac{\theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3 s}$$

❊ تابع تبدیل گیربکس:

$$\frac{C(s)}{\theta(s)} = n$$

❊ با توجه به توضیحات ارائه شده در اسلایدهای قبل دیاگرام بلوکی کلی سیستم به شکل زیر بدست می آید:





$$L \gg D \Rightarrow R_a \gg L_a \Rightarrow G(s) = \frac{K_0K_1K_2n}{s[R_a(J_0s+b_0)+K_2K_3]}$$

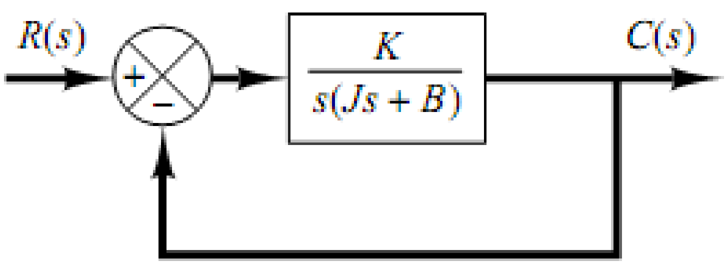
$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[R_a(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]} \xrightarrow{\times \frac{1}{R_a n^2}} G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

$J = \frac{J_0}{n^2}$: moment of inertia referred to the output shaft

B = $[b_0 + (\frac{K_2 K_3}{R_a})]/n^2$: viscous-friction coefficient referred to the output shaft

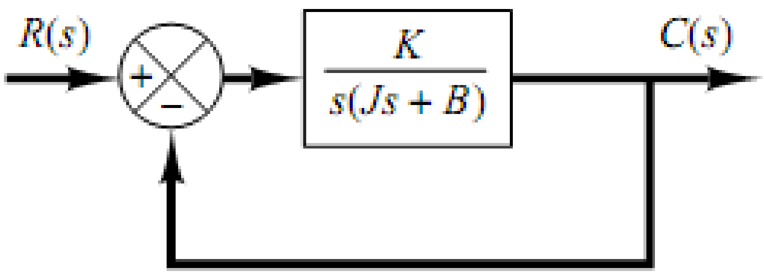
K = $\frac{K_0 K_1 K_2}{n R_a}$

$$G(s) = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \quad ; \; K_m = \frac{K}{B} \, , T_m = \frac{J}{B} = \frac{R_a J_0}{R_a b_0 + K_2 K_3}$$



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\dfrac{k}{Js^2+Bs}}{1+\dfrac{k}{Js^2+Bs}}=\frac{k}{js^2+Bs+k}=\frac{k/J}{s^2+B/J\,s+k/J}=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

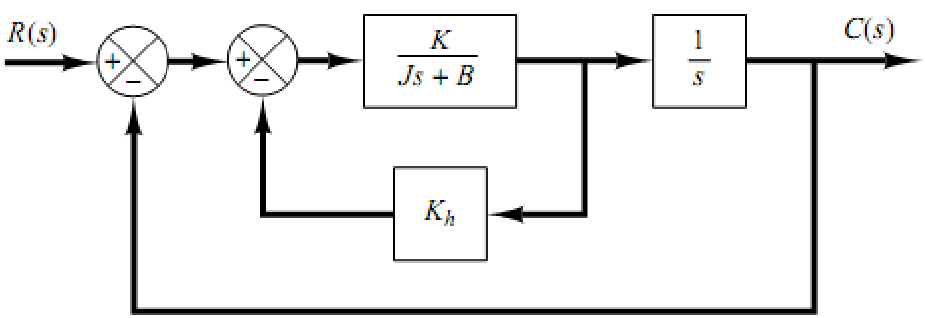
$$\xi=\frac{B}{2\sqrt{kJ}} \quad , \quad \omega_n{}^2=\frac{k}{J}$$

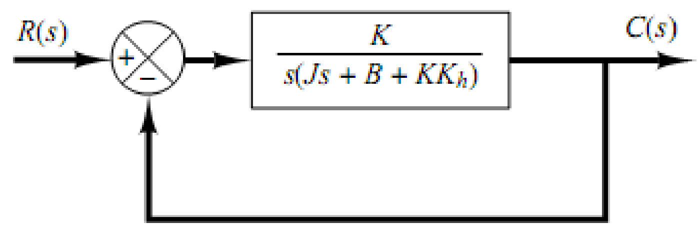


Servo System with Velocity Feedback

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K}$$

$$\zeta = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}}, \; \bar{\zeta} = \zeta + \frac{K_h\sqrt{K}}{2\sqrt{J}} = \zeta + \frac{\omega_n}{2}K_h$$





❋ با استفاده از فیدبک سرعت، می توان بدون تغییر ω_n، مقدار ξ و در نتیجه اورشوت را تنظیم کرد.

DC Servomotor

Part 3:

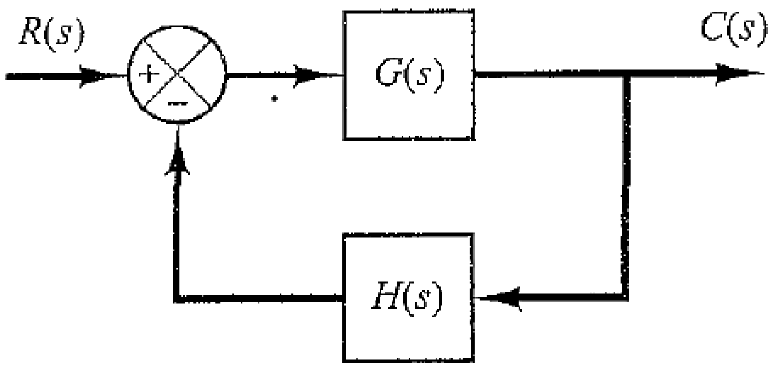
Transient Response – Higher Order Systems

- Unit Step Response

Contents

❋ در این قسمت سیستم هایی با رسته ی بالاتر از دو را در حالت کلی بررسی می کنیم.

❋ سیستم مدار بسته کلی زیر را در نظر بگیرید:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \; ; G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \; , H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s)+p(s)n(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n} \; ; \; m \le n$$

❋ حال پاسخ سیستم را به پله واحد بررسی می کنیم.

❋ حالت اول: تمام قطب های سیستم مدار بسته حقیقی و متمایز باشند:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}\xrightarrow{R(s)=1/s}C(s)=\frac{a}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s+p_i}$$

$$c(t)=a+\sum_{i=1}^{n}a_i e^{-p_i t}$$

❋ a_i residue یا پسماند قطب p_i است.

❋ اگر تمام قطب های سیستم مدار بسته در سمت چپ محور موهومی باشند، اندازه نسبی پسماند هر قطب متناسب با اهمیت نسبی آن قطب است.

❋ $\frac{1}{s+p_i}$ یک مد دینامیکی تغییرات سیستم است.

❊ مد های دینامیکی فقط از قطب ها مشخص می شوند ولی اهمیت هر مد به وضعیت صفر ها هم بستگی دارد. اگر یک صفر و قطب به هم نزدیک باشند، پسماند آن مد کوچکتر می شود و در نتیجه اهمیت آن کم می شود.

❊ کوچک بودن پسماند یک ترم، باعث می شود سهم آن قطب در پاسخ گذرا (اهمیت آن) کم شود.

❊ اگر اهمیت نسبی قطبی کم باشد، می توان از آن صرف نظر کرد و سیستم را با رسته ای پایین تر تخمین زد.

❊ حالت دوم: قطب های سیستم مدار بسته شامل زوج های مختلط و متمایز باشد:

$$C(s)=\frac{a}{s}+\sum_{j=1}^{q}\frac{a_j}{s+p_j}+\sum_{k=1}^{r}\frac{b_k(s+\xi_k\omega_k)+c_k\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}}{s^2+2\xi_k\omega_k s+\omega_k^2}\qquad q+2r=n$$

$$c(t)=a+\sum_{j=1}^{q}a_je^{-p_jt}+\sum_{k=1}^{r}b_ke^{-\xi_k\omega_kt}\cos\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}t+\sum_{k=1}^{r}c_ke^{-\xi_k\omega_kt}\sin\omega_k\sqrt{1-\xi_k^2}t$$

Part 4:

Stability Analysis

Contents

❋ اگر حتی یک قطب سیستم مدار بسته در سمت راست محور موهومی باشد، مقدار نهایی سیستم بینهایت می شود که بیان کننده یک سیستم ناپایدار است.

❋ در این حالت اگر اشباع رخ ندهد و هیچ قید محدود کننده مکانیکی وجود نداشته باشد ممکن است به صدمه و شکست سیستم بینجامد.

❋ در سیستم های LTI پایداری جزو خواص ذاتی سیستم است و به ورودی بستگی ندارد.

❋ به صورت ریاضی اگر روی محور موهومی قطب داشته باشیم، پاسخ نوساناتی با دامنه ثابت خواهد بود ولی در عمل با وجود نویز، ممکن است دامنه نوسانات متناسب با توان نویز افزایش یابد.

❊ **سیستم پایدار**: سیستمی است که همه قطب های آن در سمت چپ یا روی محور موهومی قرار گرفته اند.

❊ **سیستم پایدار مجانبی**: سیستمی است که همه قطب هایش در سمت چپ محور موهومی قرار گرفته اند.

❊ **سیستم ناپایدار**: وجود حتی یک قطب در سمت راست محور، موجب ناپایداری سیستم می شود.

❋ معیار پایداری راث روشی برای چک کردن پایداری یک سیستم کنترلی با بررسی علامت قطب های آن (ریشه های چند جمله ای مخرج) بدون حل کردن آن است.

❋ **گام اول** : در صورت امکان چند جمله ای را به صورت زیر می نویسیم:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad ; a_i > 0$$

❋ اگر تمام ضرایب هم علامت و غیر صفر نباشد، سیستم پایدار مطلق نخواهد بود.

❋ اگر $a_n=0$ باشد، یک s (ریشه در مخرج) را فاکتور می گیریم و ادامه می دهیم.

❋ **گام دوم:** جدول راث را به صورتی که در اسلاید بعد تشریح می شود، تشکیل می دهیم.

Routh's Array of Coefficients

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\dots$
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\dots$
s^{n-2}	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$			
s^{n-3}	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
s^0					

❉ مثبت بودن تمام ضرایب ستون اول، شرط کافی است برای اینکه همه ریشه ها در سمت چپ محور موهومی قرار گیرند.

❉ به تعداد تغییر علامت ها در ستون اول، ریشه در سمت راست محور موهومی داریم.

❉ مثال ۱: سیستم رسته دو

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

s^2	a_0	a_2
s^1	a_1	
s^0	a_2	

شرط پایداری

$$a_0, a_1, a_2 > 0$$

❋ مثال۲: سیستم رسته سه

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 \quad , \qquad a_i > 0$$

s^3	a_0	a_2
s^2	a_1	a_3
s^1	$\dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	
s^0	a_3	

شرط پایداری

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

❋ مثال۳: سیستم رسته چهار

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	1	5	
s^1	-6	0	
s^0	5		

❋ از 1 به 6- و از 6- به 5 دو بار تغییر علامت داریم، بنابراین دو قطب در سمت راست محور موهومی خواهیم داشت.

❋ مثال ۴:

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

s^3	1	1
s^2	2	2
s^1	$0 \simeq \varepsilon$	
s^0	2	

❋ ایجاد صفر در ستون اول باعث تقسیم بر صفر خواهد شد به همین دلیل مقدار صفر را با مقدار مثبت ε جایگزین می کنیم.

❋ وجود صفر روی ستون اول بدون تغییر علامت، نشان دهنده قطب روی محور موهومی است.

❋ مثال ۵:

$$s^3 - 3s + 2 = 0$$

s^3	1	-3
s^2	$0 \simeq \varepsilon$	2
s^1	$\frac{-3\varepsilon - 2}{\varepsilon}$	
s^0	2	

❋ چون دو تغییر علامت داریم، دو ریشه در سمت راست محور موهومی خواهیم داشت.

❋ مثال ۶:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	0	0	
s^2	؟		
s^1	؟		
s^0	؟		

❋ درایه های سطر سوم صفر شده اند، در نتیجه چند جمله ای کمکی را برای سطر سوم از سطر بالایی آن (سطر دوم) به صورت زیر می نویسیم:

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

❊ ادامه:

❊ با مشتق گیری از چندجمله ای کمکی، ضرایب سطر سوم را بدست می آوریم:

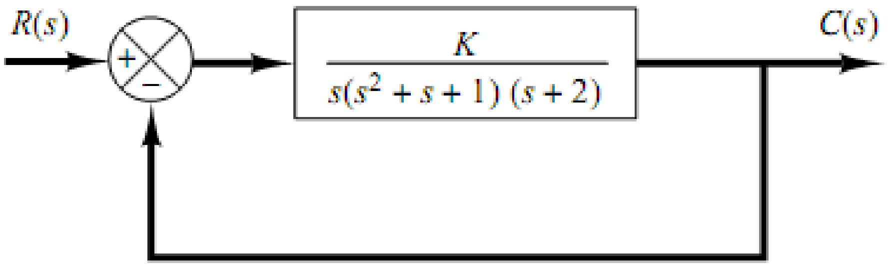
$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0 \Rightarrow \frac{dP}{ds} = 8s^3 + 96s$$

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3			
s^2	24	-50	
s^1	112.7		
s^0	-50		

❊ یک تغییر علامت داریم، در نتیجه یک ریشه ناپایدار خواهیم داشت.

❊ ریشه های چندجمله ای کمکی، ریشه های معادله اصلی هستند.

❋ مثال ۷: محاسبه محدوده ی k به منظور پایداری سیستم



$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)+K}$$

Characteristic Equation: $s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$7/3$	K	
s^1	$2-9K/7$	0	
s^0	K		

شرط پایداری

$$\begin{cases} K > 0 \\ 2 - \dfrac{9K}{7} > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{14}{9} > K > 0$$

❋ عملگر انتگرالی:

- افزودن انتگرال گیر، موجب افزایش دقت(کاهش خطای دائم) می شود.
- در مقابل، موجب تضعیف پایداری و کند شدن پاسخ آن می شود.

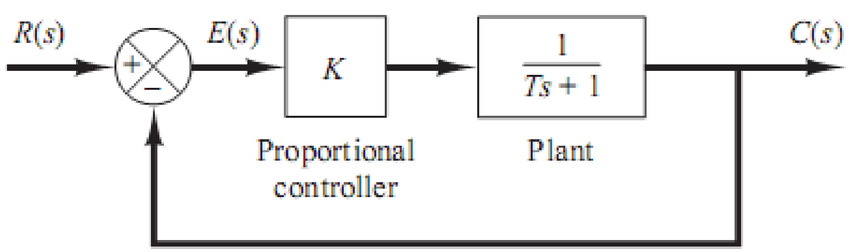
❋ عملگر مشتقی:

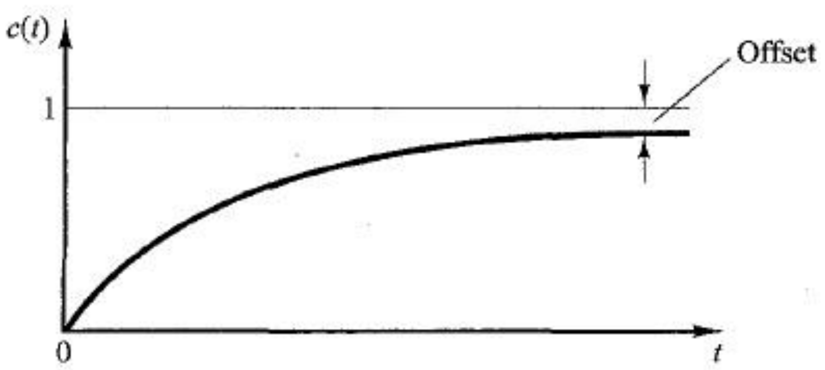
- افزودن مشتق گیر به کنترلر، بصورت غیر مستقیم با افزایش محدوده پایداری موجب افزایش دقت می شود.
- موجب افزایش پایداری می شود .
- باعث افزایش سرعت سیستم می شود ولی نگرانی برای نویز ایجاد می کند.

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} \Rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \xRightarrow{R(s)=1/s} E(s) = \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K}\frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K} = \frac{1}{1 + K}$$

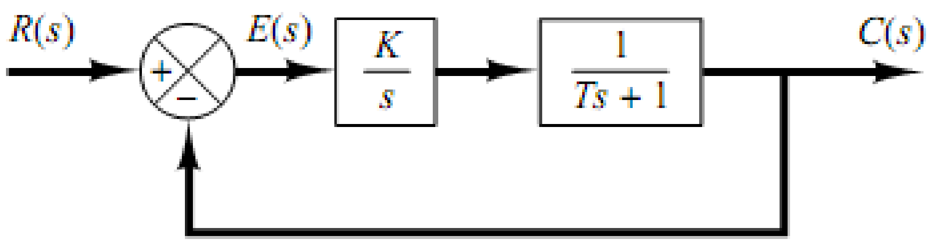




❋ با جایگزینی کنترلر تناسبی با کنترلر انتگرالی داریم:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(Ts+1)+K} \Rightarrow \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K}$$

$$\xRightarrow{R(s)=1/s} e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2(Ts+1)}{Ts^2+s+K}\frac{1}{s} = 0$$

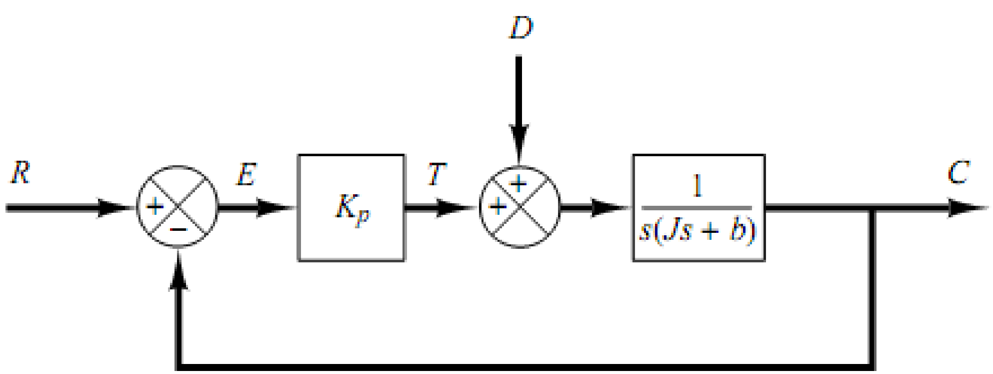


❋ حالت اول: کنترلر تناسبی

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + bs + K_p} \quad , \quad R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow c_{ss} = 1 \Rightarrow e_{ss} = 0$$

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{s(Js+b)}}{1 + \frac{K_p}{s(Js+b)}} = \frac{1}{Js^2 + bs + K_p} \Rightarrow \frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{C(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = \frac{T_d}{s} \Rightarrow c_{ss} = \frac{T_d}{K_p} \Rightarrow e_{ss} = 0 - \frac{T_d}{K_p} = -\frac{T_d}{K_p}$$

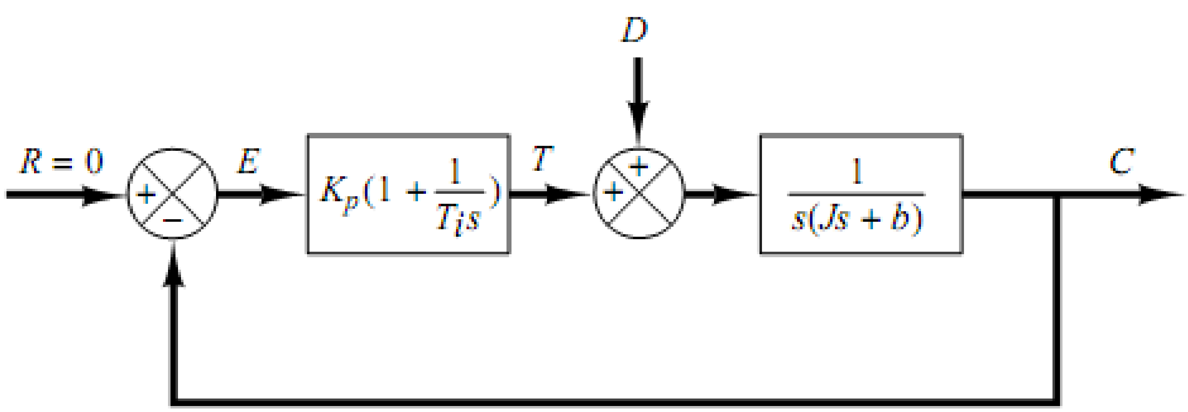


❋ حالت دوم: کنترل PI

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} \xrightarrow{r(t)=0} E(s) = -\frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} D(s)$$

❋ برای اغتشاش پله واحد:

$$D(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \Big(s\frac{1}{s}\frac{-s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}}\Big) = 0$$



Comparison of PI and I Controls

❉ سروو موتور DC با کنترل PI

$$TJs^3 + Tbs^2 + TKs + K = 0$$

s^3	TJ	KT
s^2	Tb	K
s^1	KT-(JK/b)	0
s^0	K	

$$\Rightarrow KT > \frac{JK}{b} \Rightarrow T > \frac{J}{b}$$

❉ سروو موتور DC با کنترل I

$$Js^3 + bs^2 + K = 0$$

s^3	J	٠
s^2	b	K
s^1	-(JK/b)	0
s^0	K	

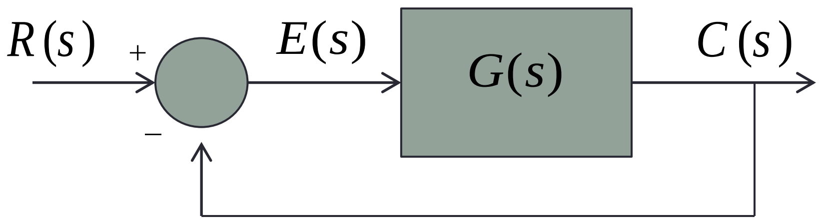
سیستم ناپایدار است

Part 5:

Steady-State Error of Unity Feedback Control Systems

- Static Position Error Constant
- Static Velocity Error Constant
- Static Acceleration Error Constant

Contents



$$G(s)=\frac{K(T_1's+1)\ldots(T_m's+1)}{s^N(T_1s+1)\ldots(T_ns+1)},\ n\geq m$$

N=0	سروسیستم نوع صفر	Type-0 servo system
N=1	سروسیستم نوع یک	Type-1 servo system
N=2	سروسیستم نوع دو	Type-2 servo system

❉ با افزایش N دقت افزایش، پایداری و سرعت کاهش می یابد.

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}\Rightarrow\frac{E(s)}{R(s)}=1-\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)}$$

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)}\Rightarrow e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

Static Position Error Constant (Kp)

$$R(s)=\frac{1}{s}\Rightarrow e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s\frac{1}{s}}{1+G(s)}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)}$$

$$\lim_{s\to 0}G(s)=G(0)=K_p \quad \textit{(Static position error constant)}$$

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}=\begin{cases} K_p=K\to\dfrac{1}{1+K} & ;\ N=0 \\ K_p=\infty\to 0 & ;\ N=1 \\ & \quad\vdots \\ K_p=\infty\to 0 & ;\ N=\cdots \end{cases}$$

Static Velocity Error Constant (K_v)

$$R(s)=\frac{1}{s^2}\Rightarrow e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s\frac{1}{s^2}}{1+G(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG(s)}$$

$$\lim_{s\to 0} sG(s)=K_v \quad \textit{(Static velocity error constant)}$$

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}=\begin{cases} K_v=0\to\infty & ;N=0\\ K_v=K\to\dfrac{1}{K} & ;N=1\\ K_v=\infty\to 0 & ;N=2\\ \ldots\quad\to 0 & ;N>2\end{cases}$$

Static Acceleration Error Constant (Ka)

$$R(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

$$\lim_{s \to 0} s^2 G(s) = K_a \quad \textit{(Static acceleration error constant)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \begin{cases} K_a = 0 \rightarrow \infty & ; N=0 \\ K_a = 0 \rightarrow \infty & ; N=1 \\ K_a = K \rightarrow \dfrac{1}{k} & ; N=2 \\ K_a = \infty \rightarrow 0 & ; N=3 \\ \ldots \quad \rightarrow 0 & ; N>3 \end{cases}$$

Thanks for your attention!

Contents