Sharif University of Technology
School of Mechanical Engineering

Automatic Control

Chapter 3:

Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems

Instructor:
Professor Aria Alasty

1391-92 Fall Semester

Contents

- Chapter 1: Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
- Chapter 2: Mathematical Modeling of Control Systems
- Chapter 3: Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems
  - Part 1: Modeling of Mechanical Systems
    - Mass and Spring (Example 1)
    - Inverted Pendulum (Example 2)
  - Part 2: Modeling of Electrical and Electronic Systems
    - RLC Circuits
    - Operational Amplifiers
  - Part 3: Modeling of Liquid-Level Systems

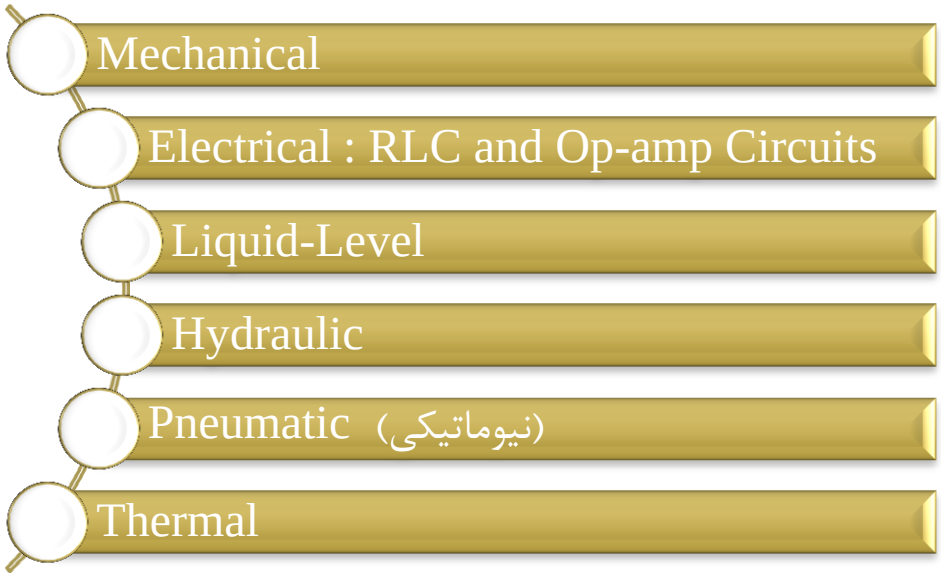
Contents

- Chapter 4: Modeling of Pneumatic, Hydraulic and Thermal Systems
- Chapter 5: Transient and Steady-State Response Analysis
- Chapter 6: Control Systems Analysis by Root-Locus Method
- Chapter 7: Control Systems Design by Root-Locus Method
- Chapter 8: Control Systems Analysis by Frequency Response Method
- Chapter 9: Control Systems Design by Frequency Response Method
- Chapter 10: PID Controller Design by Ziegler-Nichols Method

Automatic control of
a maze game using
vision
EMSD7 Project, Aalborg
University (AAU), Denmark
Sharif University of Technology

Next Clip

* در این فصل و فصل بعد با مدل سازی سیستم های زیر آشنا خواهیم شد:



* هدف، ایجاد ارتباط بین دانسته هایمان در تحلیل سیستم های بالا - که در درس های مختلف مانند دینامیک و سیالات و... آموخته ایم - با ابزارهای کنترل کلاسیک - که در دو فصل قبل تشریح شد - می باشد.

* مراحل معمول در مدل سازی و بدست آوردن تابع تبدیل یک سیستم:

نوشتن معادلات حاکم (Governing equations)

تحلیل سیستم و بدست آوردن روابط بین ورودی و خروجی (معادلات دیفرانسیل)

↓

خطی سازی

خطی سازی معادلات حاکم در صورت نیاز

↓

تبدیل لاپلاس

بازنویسی روابط مرحله ۱(زیر سیستم ها) در فضای لاپلاس

↓

دیاگرام جعبه ای

تشکیل مدل فضای لاپلاس با دیاگرام جعبه ای

↓

بدست آوردن تابع تبدیل

ساده سازی دیاگرام جعبه ای وبدست آوردن تابع تبدیل نهایی

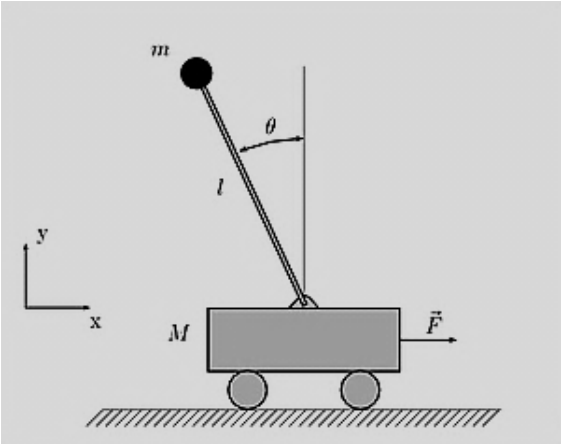
Part 1:

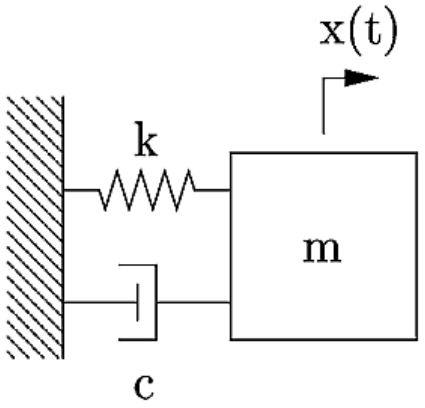
Modeling of Mechanical Systems

- Mass and Spring (Example 1)
- Inverted Pendulum (Example 2)

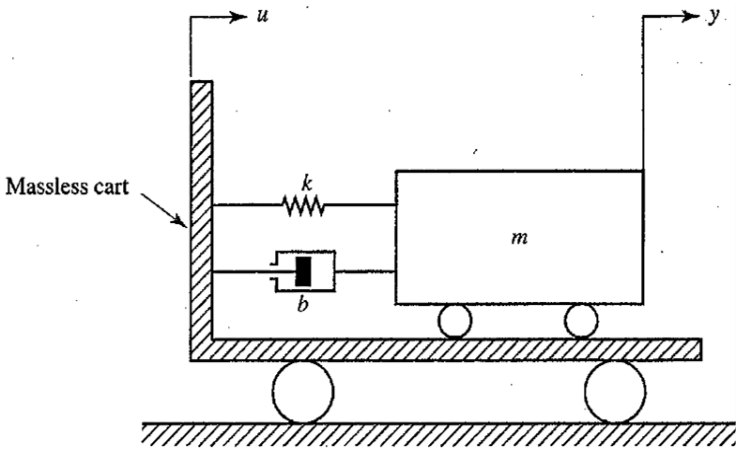
Contents

- سیستم های مکانیکی (سروو مکانیزم ها) از آشناترین سیستم ها هستند.
- در نوشتن معادلات حاکم از قانون دوم نیوتن و گاهی رابطه اویلر (رابطه بین شتاب ها و نیروها و گشتاورها) استفاده می شود. پس اکثرا معادلات بدست آمده، درجه دو هستند.
- ورودی سیستم های مکانیکی معمولا از جنس جابجایی، سرعت (خطی یا زاویه ای) یا نیرو(گشتاور) و خروجی آن ها از جنس جابجایی و گاهی سرعت است.
- مثال هایی از این سیستم ها، جرم، فنر و دمپر و آونگ معکوس هستند.





* مثال ۱: جرم، فنر و دمپر



گام ۱ : نوشتن معادلات حاکم

$$m\ddot{y} = -b(\dot{y} - \dot{u}) - k(y - u) \Rightarrow m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{u} + ku$$

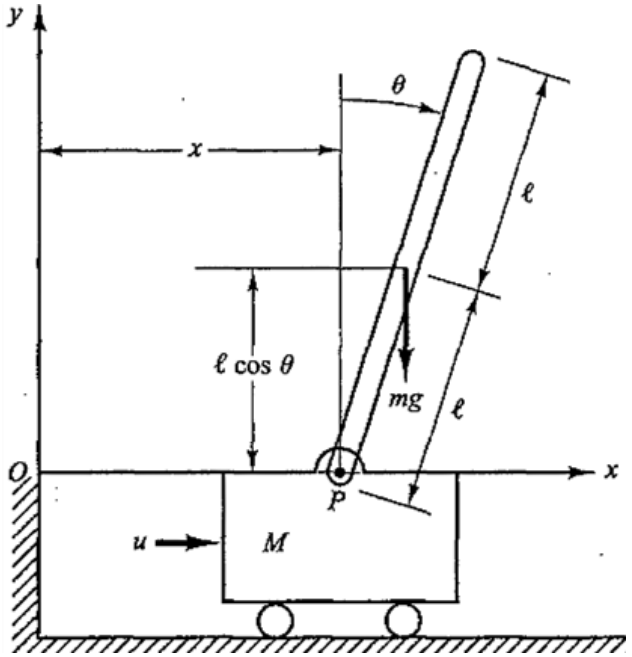
گام ۲: تبدیل لاپلاس

$$ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = bsU(s) + kU(s)$$

گام ۳: تابع تبدیل

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

* مثال ۲: آونگ معکوس (توضیح رفتار موشک پرتابگر ماهواره)



گام ۱ : نوشتن معادلات حاکم

سینماتیک

$$x_G = x + l\sin\theta, y_G = l\cos\theta$$

قانون دوم برای پاندول

$$I\ddot{\theta} = Vl\sin\theta - Hl\cos\theta$$

تجزیه در دو راستا (برای حذف H لازم است)

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2}{dt^2}(x + l\sin\theta) = H \\ m\dfrac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta) = V - mg \end{cases}$$

* ادامه مثال:

قانون دوم برای گاری

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=u-H$$

گام ۲: خطی سازی

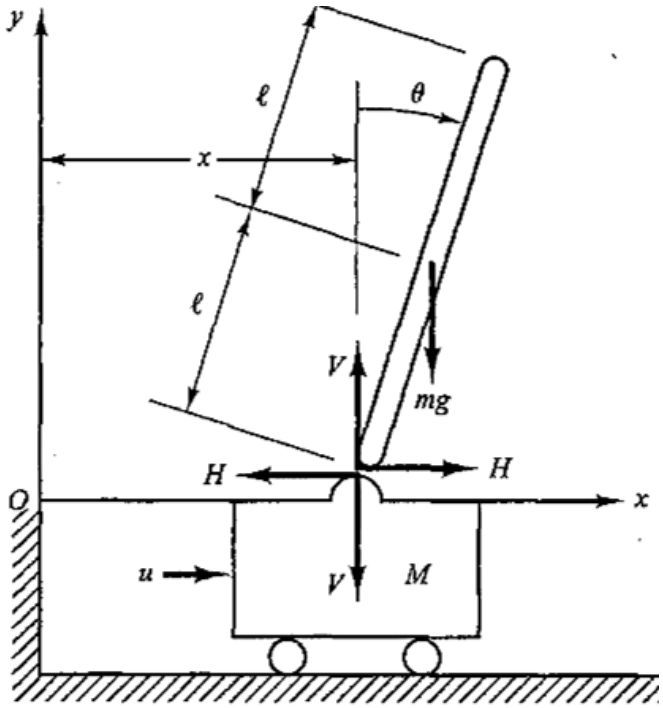
روابط مربوط به آونگ نیاز به خطی سازی دارند. چون نقطه تعادل، مبدا مختصات است می توان برای خطی سازی از بسط تیلور مرتبه اول استفاده کرد:

$$\sin\theta=\theta,\cos\theta=1,\dot{\theta}\theta=0$$

$$I\ddot{\theta}=Vl\theta-Hl$$

$$m(\ddot{x}+l\ddot{\theta})=H$$

$$0=V-mg$$



* ادامه مثال:

ترکیب روابط

$$(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}=u$$
$$(I+ml^2)\ddot{\theta}+ml\ddot{x}=mgl\theta$$

گام ۳: تبدیل لاپلاس

$$(M+m)Xs^2+ml\theta s^2=U$$
$$(I+ml^2)\theta s^2+mlXs^2=mgl\theta$$

گام ۴: تابع تبدیل

ترکیب روابط و حذف X

$$F(s)=\frac{\theta(s)}{U(s)}=\frac{-ml}{[I(M+m)+Mml^2]s^2-(M+m)mgl}$$

---

* برای تمرین خودتان تابع تبدیل را $\frac{X(s)}{U(s)}$ بدست اورید.

* کنترل خطی خودکار پاندول معکوس :

Previous Clip

Part 2:

Modeling of Electrical and Electronic Systems

- RLC Circuits
- Operational Amplifiers

Contents

* با دو نوع عضو در حل مدارها مواجه می شویم: RLC و Op-amp

* قوانین کیرشهف

- قانون ولتاژ: جمع جبری ولتاژ ها در یک حلقه صفر است.

- قانون جریان: جمع جریان های ورودی به یک گره برابر جمع جریان های خروجی است.

* RLC

$$\text{Resistance: } v = Ri \xrightarrow{Laplace} V = RI$$

$$\text{Inductance: } v = L\frac{di}{dt} \xrightarrow{Laplace} V = (Ls)I$$

$$\text{Capacitance: } v = \frac{1}{C}\int idt \xrightarrow{Laplace} V = \frac{1}{Cs}I$$

❊ مثال ۱: مدار RLC

گام ۱ : یافتن معادلات حاکم

قانون ولتاژ کیرشهف

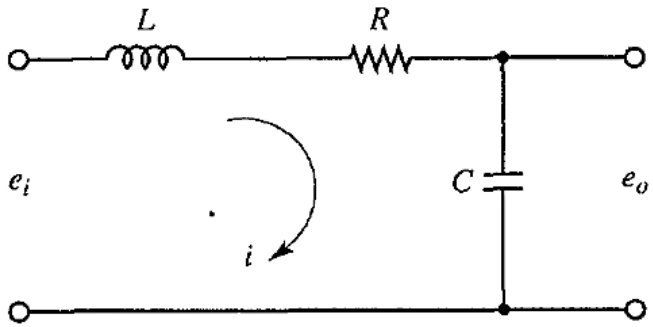
$$V_L + V_R + V_C = e_i$$

المان های RLC

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = e_i$$

رابطه ی خروجی

$$e_o = \frac{1}{C}\int idt$$



گام ۲ : تبدیل لاپلاس

$$(Ls + R + \frac{1}{Cs})I(s) = E_i(s)\ ,\ E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

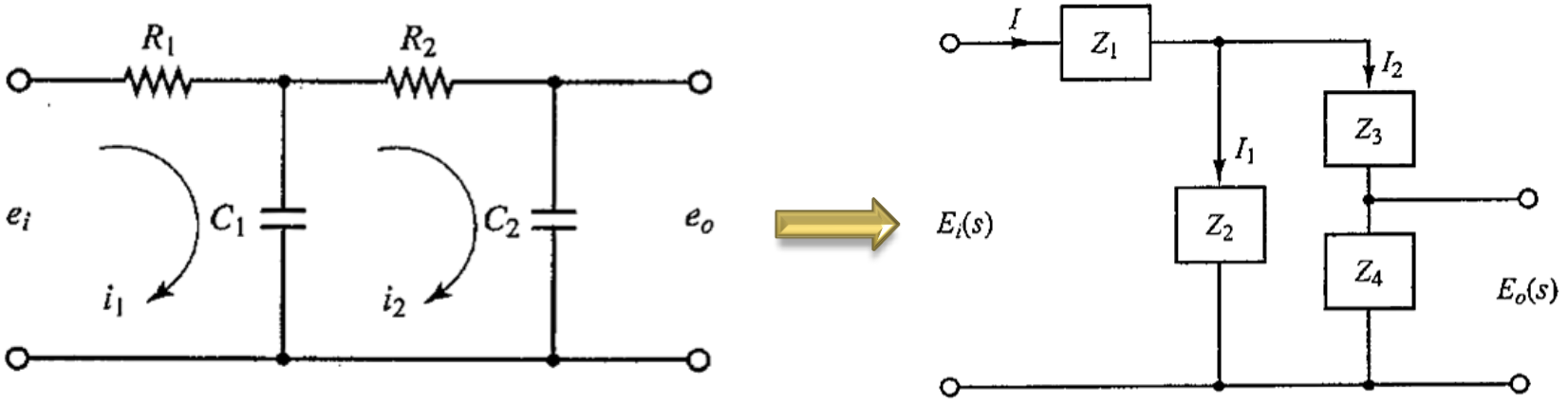
گام ۳ : تابع تبدیل

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{(CL)s^2 + (RC)s + 1}$$

* مثال ۲: در این روش ابتدا مدار را به فضای لاپلاس می بریم و بعد حل می کنیم.

- در عمل تقریبا همیشه از این روش استفاده می شود.

مدار در فضای لاپلاس و امپدانس موهومی

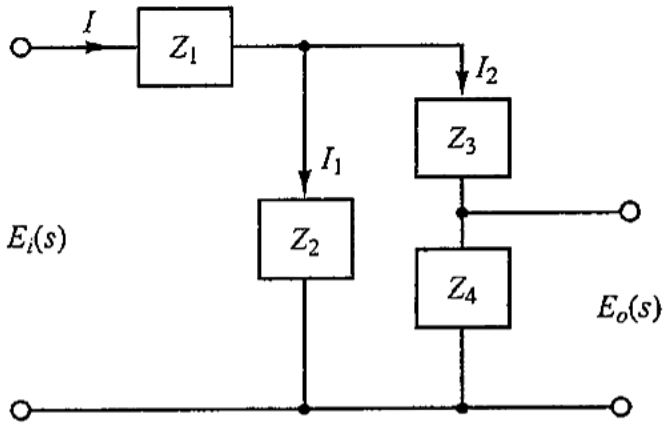


$$Z_2 I_1 = (Z_3 + Z_4) I_2 \;,\; I = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I \;,\; I_2 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

❊ ادامه مثال:

$$E_i = Z_1 I + Z_2 I_1 = [Z_1 + \frac{Z_2(Z_3+Z_4)}{Z_2+Z_3+Z_4}]I$$

$$E_o = Z_4 I_2 = \frac{Z_2 Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4} I$$

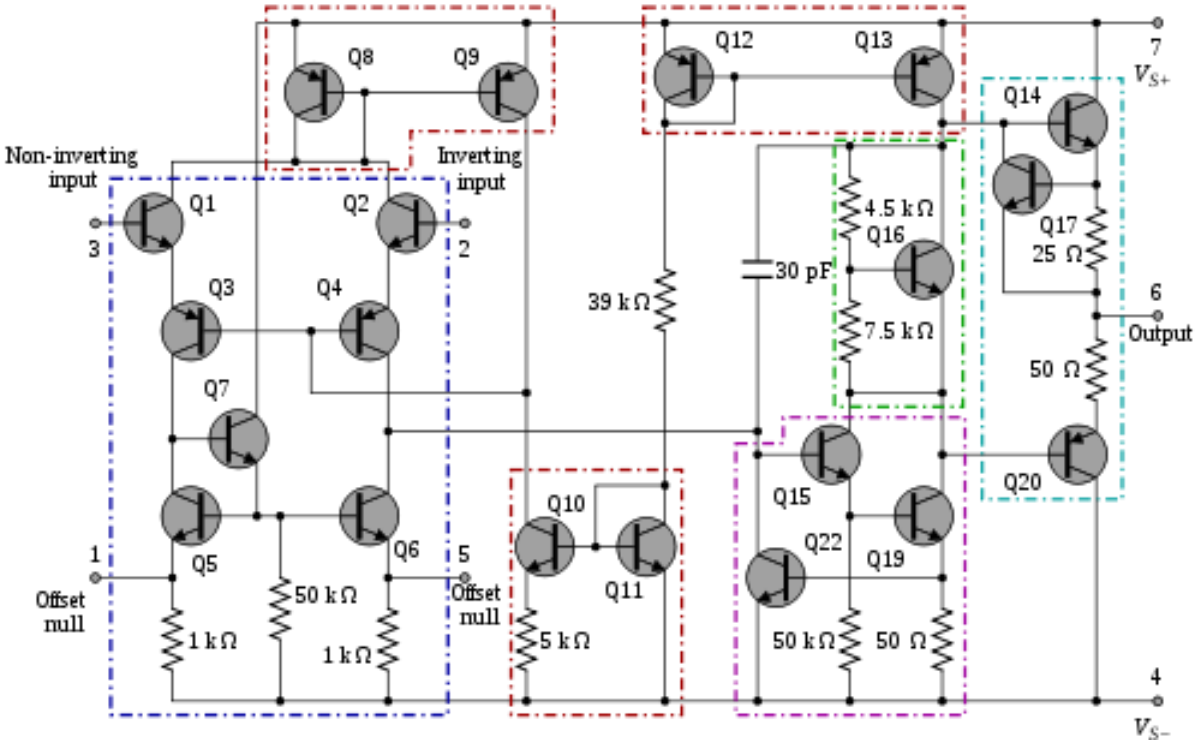


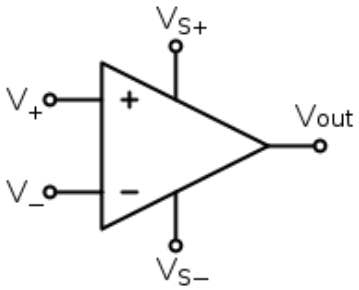
$$Z_1 = R_1 \ , \ Z_2 = \frac{1}{C_1 s} \ , \ Z_3 = R_2 \ , \ Z_4 = \frac{1}{C_2 s}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1(Z_2+Z_3+Z_4)+Z_2(Z_3+Z_4)}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

* Op-amp یا تقویت کننده های عملیاتی از اجزای بسیار مهم مدارهای الکترونیکی به خصوص مدارهای کنترلی هستند.
* Op-amp ها یک جزء مداری ساده نیستند و خود دارای مداری پیچیده از طبقات ترانزیستور و اجزای RLC (مطابق شکل) هستند.





❊ Op-amp از یک power supply (منبع قدرت) قدرت می گیرد؛ که در شکل با V_s مشخص شده است.

❊ رابطه اصلی کارکرد Op-amp

$$V_o=K(V_+-V_-)$$

- ولتاژهای ورودی می توانند acیا dc باشند.
- K: بهره ولتاژ (Voltage gain)

❊ K برای جریان های dc و جریان های ac با فرکانس کمتر از 10Hz، 10^5~10^6 می باشد و با افزایش فرکانس کاهش می یابد. چنان که برای فرکانس 1MHz~50MHz به حدود ۱ می رسد.

* در حالت ایده آل قوانین Op-amp به صورت زیر در می آید :

- پایانه های Op-amp جریان نمی کشند: $I_+=I_-=0$
- پایانه های Op-amp اختلاف پتانسیل ندارند: $V_+=V_-$

به عبارت دیگر، امپدانس ورودی بی نهایت و امپدانس خروجی صفر است؛ در نتیجه، ولتاژ خروجی مستقل از مقاومت خروجی مدار می باشد.

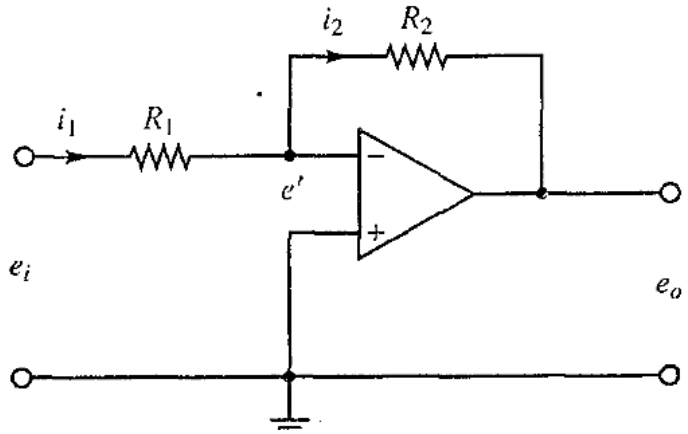
* مثال ۱: مدار معکوس کننده (Inverting Op-amp)

کیرشهف

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1} \;,\; i_2 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Op-amp جریان نمی کشد

$$i_1 = i_2$$

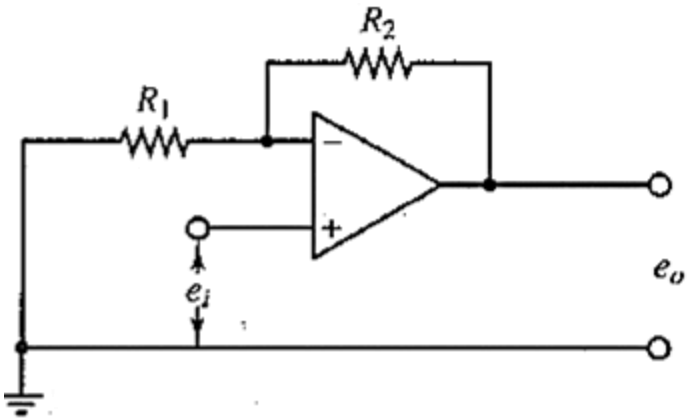


تابع تبدیل

$$\frac{e_o}{e_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

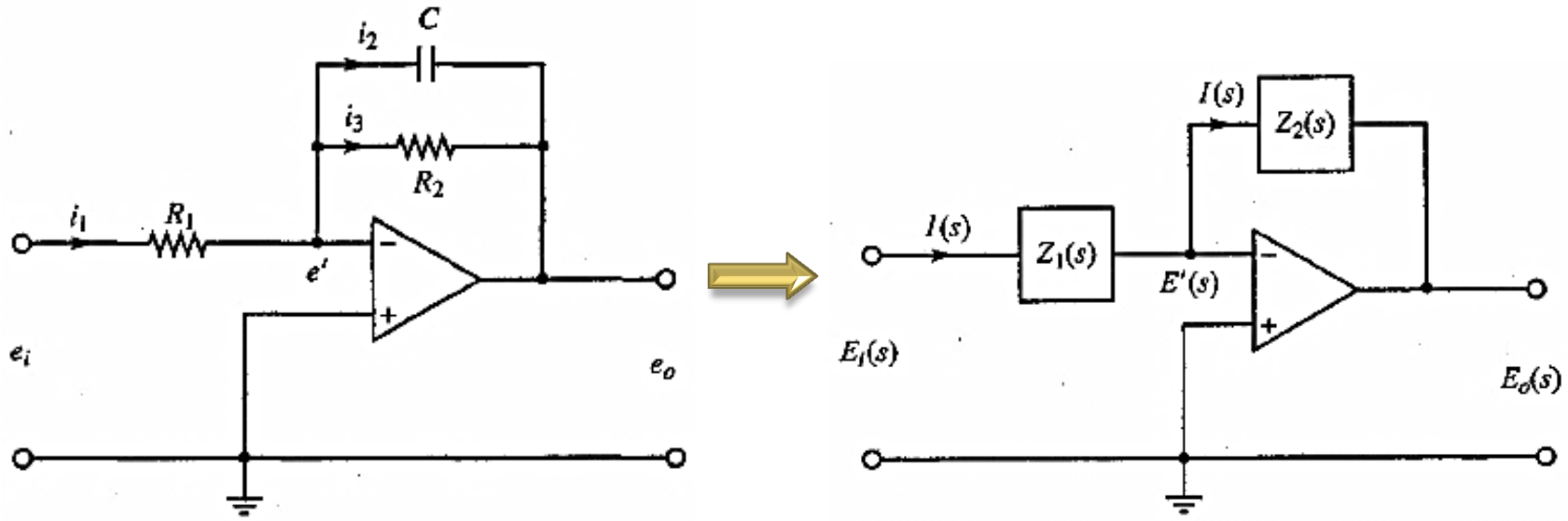
- علامت منفی (بهره منفی) دلیل این نام گذاری است.

* مثال۲: مدار غیرمعکوس کننده (Non-inverting Op-amp)



$$\frac{e_o}{e_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

* روش امپدانس موهومی در مدارهای Op-amp:



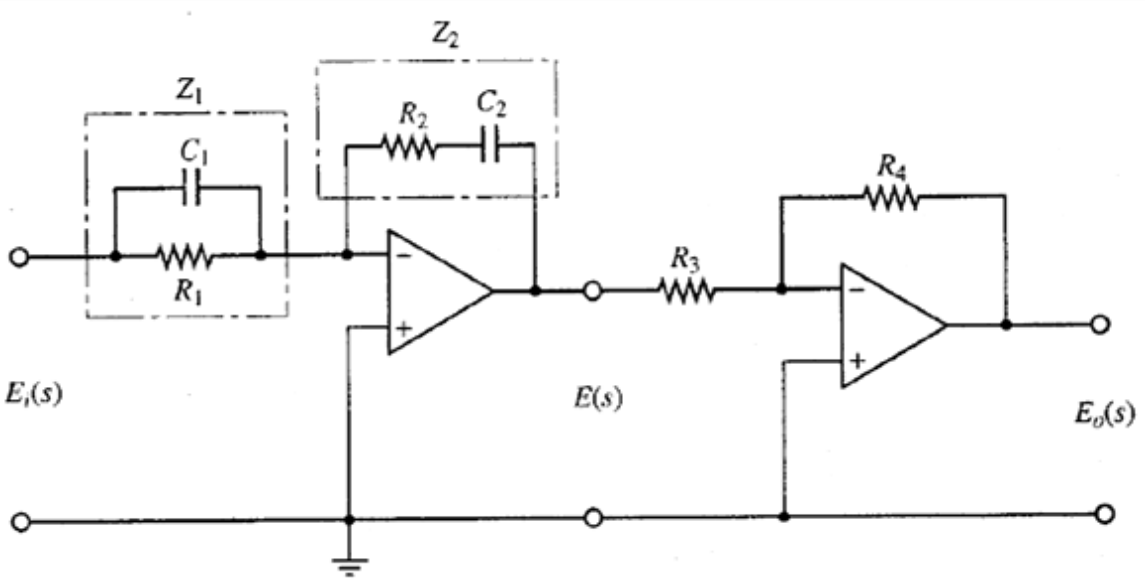
* مثال۳: کنترلر PID با استفاده از Op-amp:

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}$$

$$Z_2 = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}$$

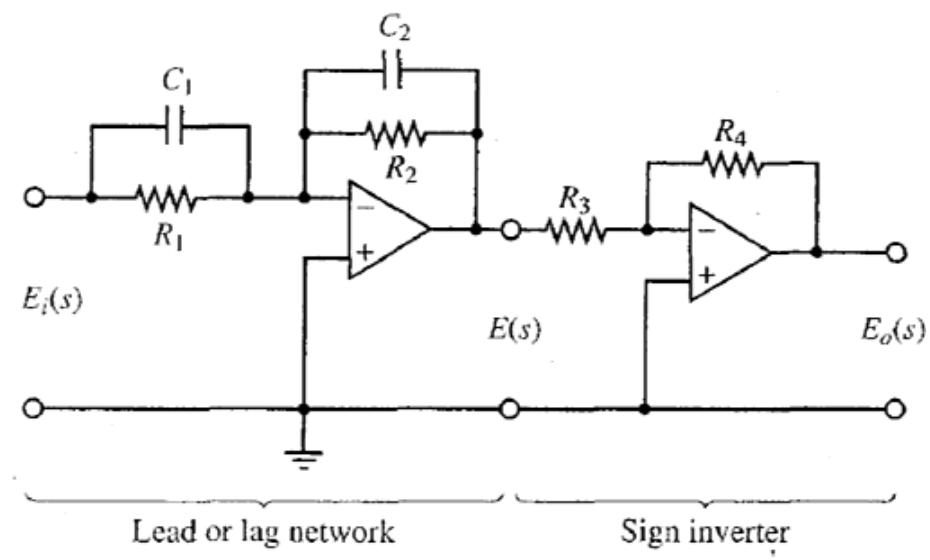
$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$



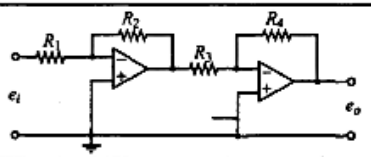
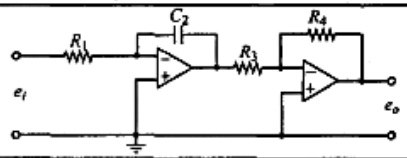
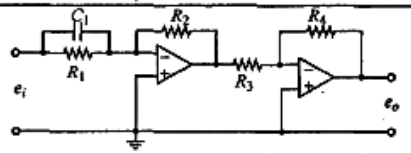
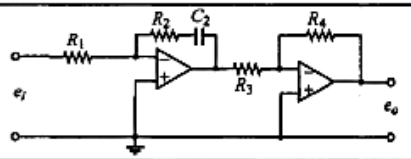
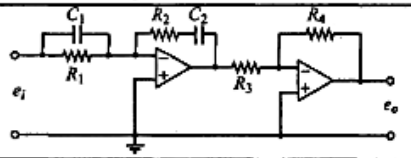
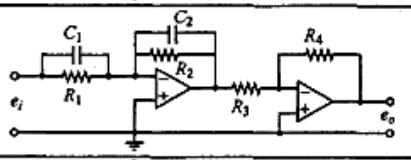
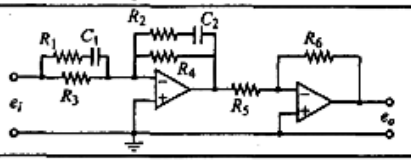
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p\left(1 + \frac{T_i}{s} + T_d s\right)$$

$$K_p = \frac{R_4(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_1R_3C_2}\ ,\ T_i = \frac{1}{R_1C_1 + R_2C_2}\ ,\ T_d = \frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1 + R_2C_2}$$

❋ مثال۴: شبکه Lead-Lag با استفاده از Op-amp:



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \; ; \; T = R_1C_1, \alpha = \frac{R_2C_2}{R_1C_1}, K_c = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}$$

	Control Action	$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$	Operational Amplifier Circuits
1	P	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}$	
2	I	$\frac{R_4}{R_3}\frac{1}{R_1C_2s}$	
3	PD	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}(R_1C_1s + 1)$	
4	PI	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}\frac{R_2C_2s + 1}{R_2C_2s}$	
5	PID	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}\frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{R_2C_2s}$	
6	Lead or lag	$\frac{R_4}{R_3}\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1C_1s + 1}{R_2C_2s + 1}$	
7	Lag–lead	$\frac{R_6}{R_5}\frac{R_4}{R_3}\frac{[(R_1 + R_3)C_1s + 1](R_2C_2s + 1)}{(R_1C_1s + 1)[(R_2 + R_4)C_2s + 1]}$	

Part 3:

Modeling of Liquid-Level Systems

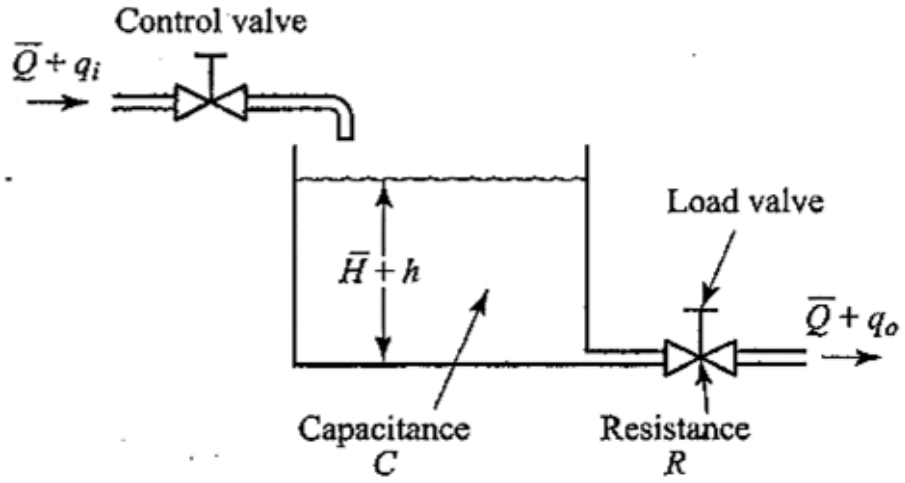
Contents

* استفاده از سیالات (گازها و مایع ها)، انعطاف پذیرترین روش انتقال قدرت و سیگنال(انتقال اطلاعات) است.

* سیستم های نیوماتیک، از هوا و دیگر گازها استفاده می کنند و در مقابل سیستم های هیدرولیک با روغن کار می کنند.

- ابتدا سیستم های کنترل سطح سیال را بررسی می کنیم.
- سپس سیستم های نیوماتیک را که در اتوماسیون تولید و کنترلرهای اتوماتیک کاربرد دارند، مورد بررسی قرار می دهیم.
- در ادامه سیستم های هیدرولیک را که در ماشین ابزار، سیستم های کنترل هوایی و ... استفاده می شوند، بررسی می کنیم.
- در نهایت به طور مختصر، در مورد سیستم های حرارتی بحث می کنیم.

* حالت پایدار سیستم را $\bar{H}, \bar{Q}_o, \bar{Q}_i$ در نظر می گیریم و رابطه حاکم را خطی سازی می کنیم.



q_i: ورودی ، q_o: خروجی

h: متغیر ، C: ظرفیت مخزن

- رابطه خطی سازی شده مخزن حول حالت پایدار:

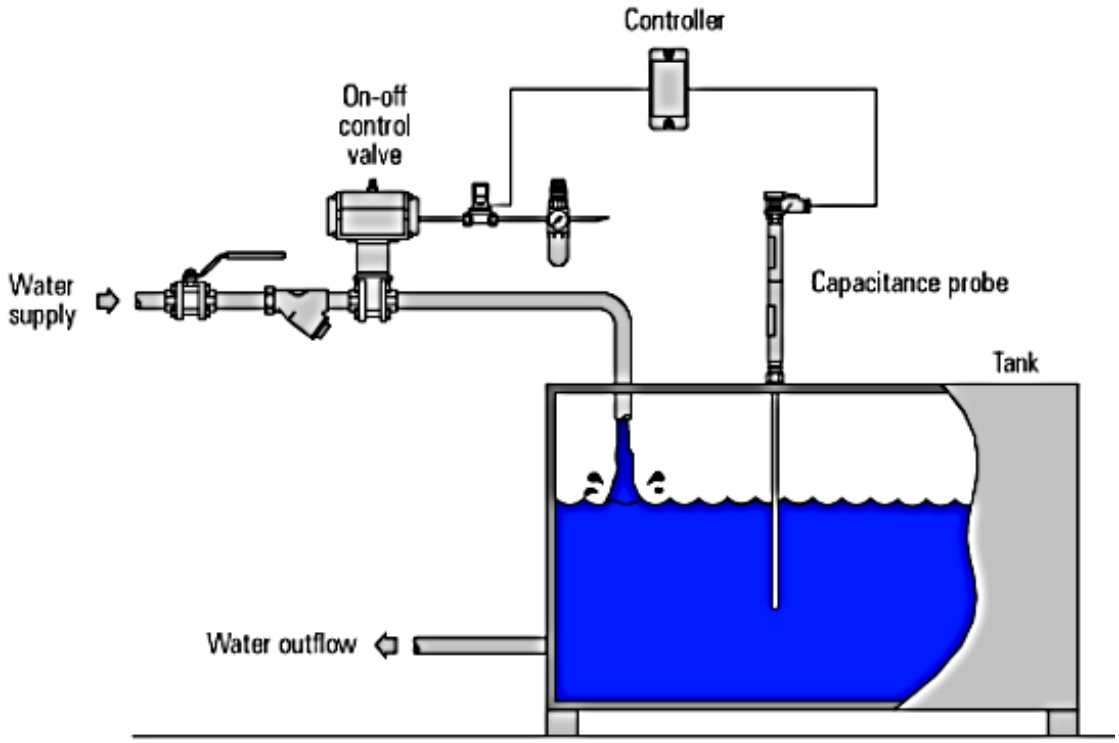
$$q_i - q_o = C\frac{dh}{dt}$$

- برای شیر مقاومتی هم داریم:

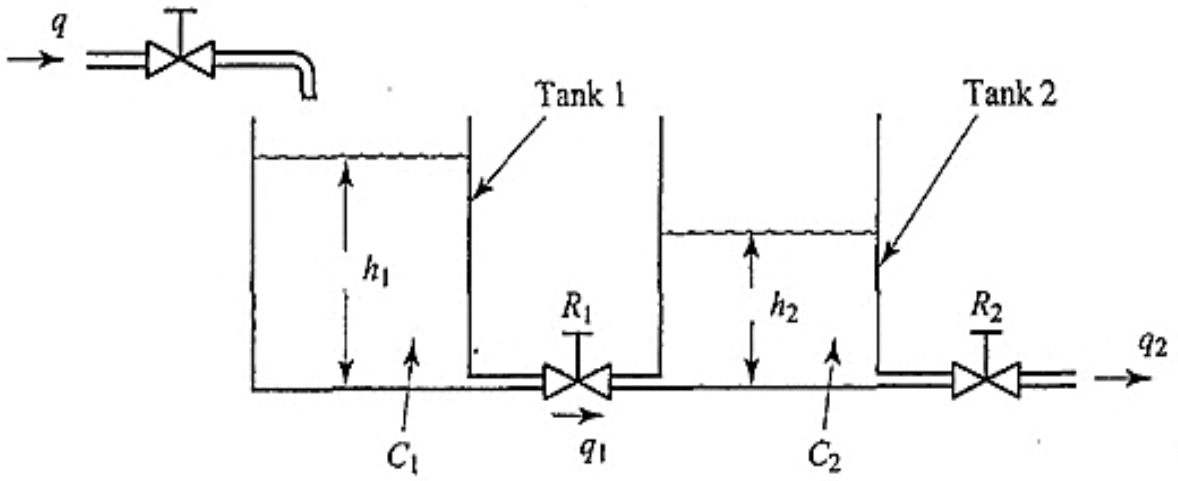
$$R = \frac{\Delta h}{q_o} = \frac{h-0}{q_o}$$

* در ادامه با ترکیب روابط خواهیم داشت:

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs+1}, \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs+1}$$

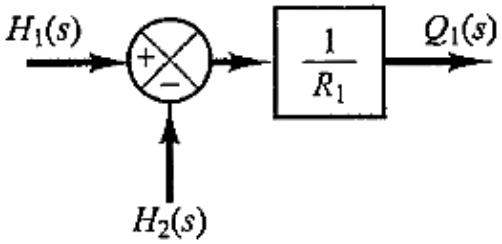


* مثال: حل با استفاده از دیاگرام بلوکی

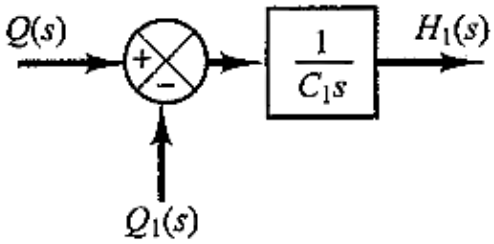


* ادامه مثال:

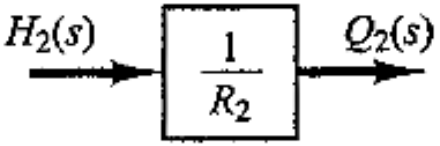
$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$



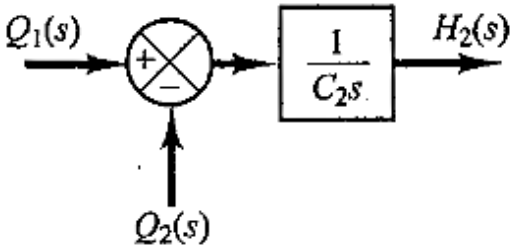
$$q - q_1 = C_1 \frac{dh_1}{dt}$$



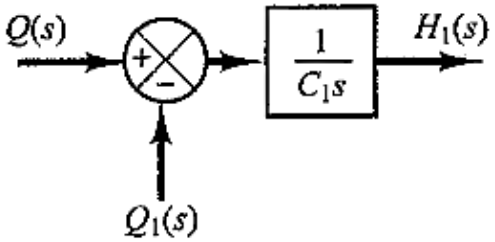
$$q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

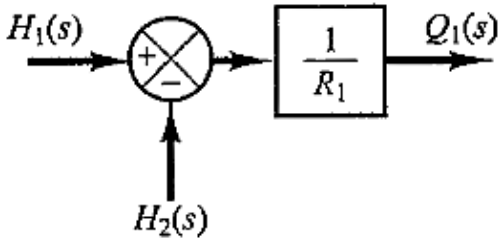


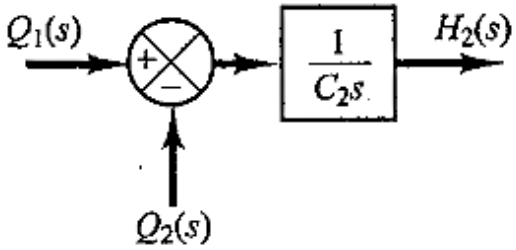
$$q_1 - q_2 = C_2 \frac{dh_2}{dt}$$

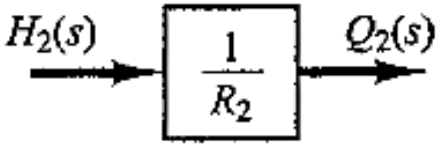


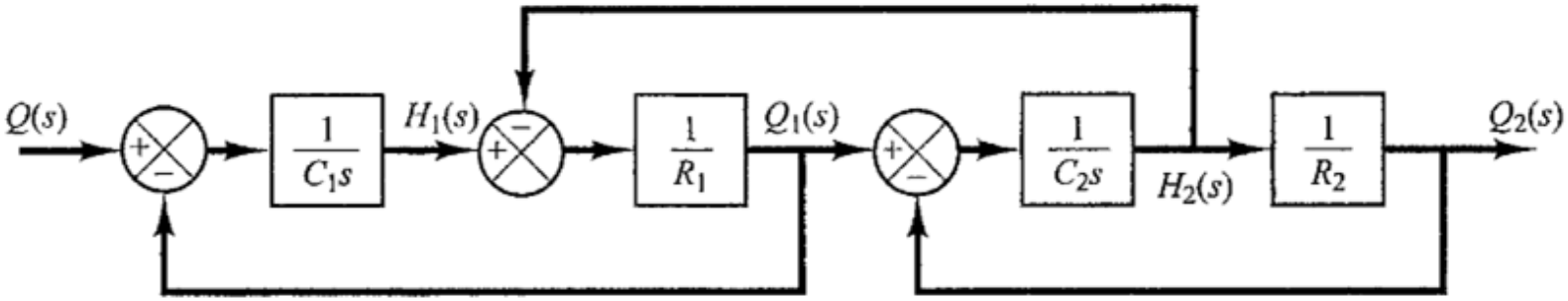
* ادامه - با ترکیب دیاگرام های بدست آمده به دیاگرام کلی زیر می رسیم:



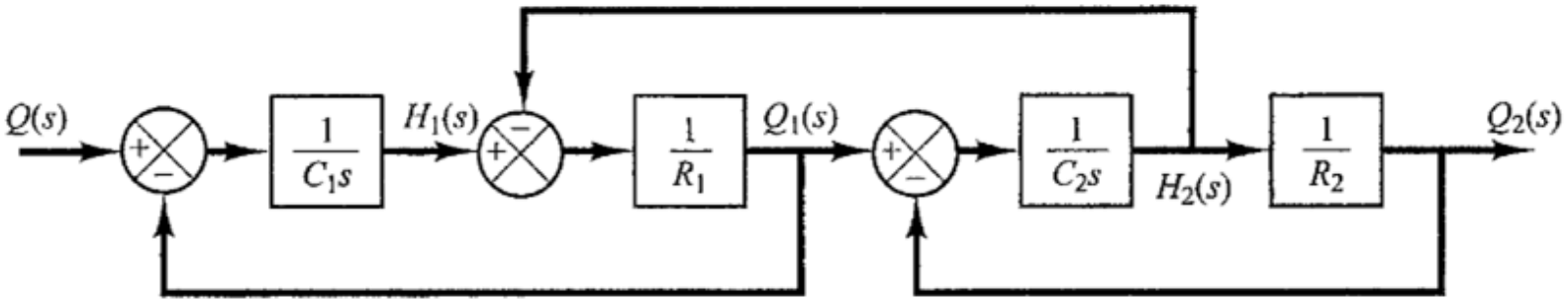








* ادامه مثال:



$$Q(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)s + 1}} \longrightarrow Q_2(s)$$

Thanks for your attention!

Contents