نام و نام خانوادگی : . . . .

شماره دانشجویی : . . . .

نام مدرس : . . . .

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۳/۸/۲۴**

وقت : **۷۵** دقیقه

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **معادلات دیفرانسیل (۷ گروه هماهنگ)**

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۳۹۴- ۱۳۹۳**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

(هر سوال ۱۵ نمره دارد.)

سوال ۱ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید :

$$y(2+x^2y^3)dx+x(1+x^2y^3)dy=0$$

سوال ۲ – معادله مرتبه اول $y'=\dfrac{6x^2y}{x^3-3y^2}$ را حل کنید.

سوال ۳ – تابع $y_1=e^x$ یک جواب معادله دیفرانسیل $xy''+2(1-x)y'+(x-2)y=0$ است. جواب عمومی آن را بیابید.

سوال ۴ - معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را حل کنید :

$$y''+3y'+2y=(1+x^2)e^{-x}$$

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس معادلات دیفرانسیل (۷ گروه هماهنگ)
نیمسال اول ۹۴-۱۳۹۳

جواب سوال۱ : داریم : $M = y(2+x^2y^3)\ ,\ N = x(1+x^2y^3) \ \rightarrow\ M_y = 2+4x^2y^3\ ,\ N_x = 1+3x^2y^3$

این معادله کامل نیست اما چون $\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{1+x^2y^3}{x(1+x^2y^3)} = \dfrac{1}{x}$ مستقل از y است بنابر این یک عامل انتگرالساز یک متغیره بر حسب x دارد. داریم : $\mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$ و با ضرب این عامل انتگرالساز در طرفین معادله داریم : $(2xy + x^3y^4)dx + (x^2 + x^4y^3)dy = 0$

که یک معادله کامل است و جواب آن عبارت است از : $x^2y + \frac{1}{4}x^4y^4 = c$

جواب سوال۲ : روش اول : اگر معادله را به صورت $6x^2ydx + (3y^2 - x^3)dy = 0$ بنویسیم داریم :

$$M = 6x^2y\ ,\ N = 3y^2 - x^3 \ \rightarrow\ M_y = 6x^2\ ,\ N_x = -3x^2$$

معادله داده شده کامل نیست اما چون $\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{-9x^2}{6x^2y} = \dfrac{-3}{2y}$ مستقل از x است بنابر این یک عامل انتگرالساز یک متغیره بر حسب y دارد. داریم : $\mu = e^{\int \frac{-3}{2y}dy} = y^{\frac{-3}{2}} = \dfrac{1}{y\sqrt{y}}$ و با ضرب این عامل انتگرالساز در طرفین معادله به معادله کامل

$$\frac{6x^2}{\sqrt{y}}dx + (3\sqrt{y} - \frac{x^3}{y\sqrt{y}})dy = 0$$

می رسیم که جواب آن عبارت است از $2y\sqrt{y} + \dfrac{2x^3}{\sqrt{y}} = c$ و یا : $y^2 + x^3 = c_1\sqrt{y}$

روش دوم : اگر معادله را به صورت بنویسیم $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^3 - 3y^2}{6x^2y} = \dfrac{1}{6y}x - \dfrac{3y}{2x^2}$ داریم $x' - \dfrac{1}{6y}x = \dfrac{-3y}{2}x^{-2}$

که یک معادله برنولی بر حسب x است. طرفین معادله را در x^2 ضرب می‌کنیم. $x^2x' - \dfrac{1}{6y}x^3 = \dfrac{-3y}{2}$

با تغییر متغیر $u = x^3$ خواهیم داشت $u' = 3x^2x'$ و در نتیجه $\dfrac{1}{3}u' - \dfrac{1}{6y}u = \dfrac{-3y}{2}$ و یا $u' - \dfrac{1}{2y}u = \dfrac{-y}{2}$

که یک معادله خطی مرتبه اول است و $u = e^{-\int \frac{-1}{2y}dy}(c + \int \dfrac{-3y}{2}e^{\int \frac{-1}{2y}dy}dy) = \sqrt{y}(c + \int \dfrac{-3\sqrt{y}}{2}dy) = \sqrt{y}(c - y\sqrt{y})$

اکنون داریم $x^3 = c\sqrt{y} - y^2$ و یا $y^2 + x^3 = c\sqrt{y}$

جواب سوال۳ : جواب دوم و مستقل از y_1 را به صورت $y_2 = e^x u$ حدس زده و در معادله قرار می دهیم.

$$xe^x(u'' + 2u' + u) + 2(1-x)e^x(u' + u) + (x-2)e^xu = 0 \ \rightarrow\ xu'' + 2u' = 0$$

$$\rightarrow\ \frac{u''}{u'} = \frac{-2}{x} \ \rightarrow\ \int \frac{u''}{u'}dx = \int \frac{-2}{x}dx \ \rightarrow\ \ln u' = -2\ln x + c \ \rightarrow\ u' = \frac{a}{x^2} \ \rightarrow\ u = \frac{-a}{x} + b$$

اکنون جواب عمومی معادله عبارت است از : $y = (\dfrac{a}{x} + b)e^x$

جواب سوال۴ : معادله مشخصه معادله همگن عبارت است از $m^2+3m+2=0$ که دو ریشه متمایز $m_1=-1$, $m_2=-2$ دارد.

یعنی جواب معادله همگن برابر است با : $y_h = Ae^{-x}+Be^{-2x}$

برای یافتن جواب خصوصی به کمک روش ضرایب نامعین فرض می‌کنیم : $y_p=(ax^3+bx^2+cx)e^{-x}$

و داریم :
$$y_p' = [-ax^3+(3a-b)x^2+(2b-c)x+c]e^{-x}$$
$$y_p'' = [ax^3+(-6a+b)x^2+(6a-4b+c)x+(2b-2c)]e^{-x}$$

در معادله اصلی قرار می دهیم :
$$y_p''+3y_p'+2y_p=[3ax^2+(6a+2b)x+(2b+c)]e^{-x}=(x^2+1)e^{-x}$$
$$\to\ 3a=1,\ 6a+2b=0\ ,\ 2b+c=1\ \to\ a=\frac{1}{3},\ b=-1,\ c=3$$

بنابر این $y_p=(\frac{1}{3}x^3-x^2+3x)e^{-x}$

و جواب عمومی معادله برابر است با : $y_g=y_h+y_p=Ae^{-x}+Be^{-2x}+(\frac{1}{3}x^3-x^2+3x)e^{-x}$

سیدرضا موسوی