Sharif University of Technology
School of Mechanical Engineering

Automatic Control

Chapter 2:

Mathematical Modeling of Control Systems

Instructor:
Professor Aria Alasty

1391-92 Fall Semester

Contents

- Chapter 1: Introduction to Control Systems and Laplace Transformation
- Chapter 2: Mathematical Modeling of Control Systems
  - Part 1: Introduction to Control Systems
    - Transfer Function
    - Block Diagram and Closed Loop Control Systems
    - Simplification of Block Diagrams
    - Control Theory (Clip)
  - Part 2: Mason’s Rule for Simplification of Block Diagrams
- Chapter 3: Modeling of Mechanical, Electrical and Fluid Systems

Contents

Part 1:

Modeling of Control Systems

- Transfer Function
- Block Diagram and Closed Loop Control Systems
- Simplification of Block Diagrams
- Control Theory (Clip)

❋ سیستم های کنترلی مورد بحث در این کلاس، LTI (خطی با ضرایب ثابت) هستند.

❋ مدل ریاضی سیستم های کنترلی LTI معمولاً به صورت معادله ی دیفرانسیل زیر است:

u(t): input , y(t): output

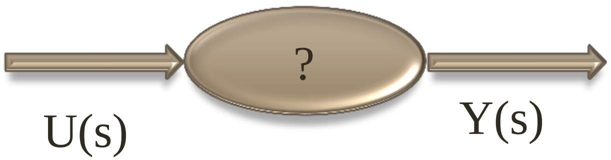
$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} u^{(1)} + b_m u$$

لاپلاس گیری

شرایط اولیه=۰

$$\xrightarrow{} (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m) U(s)$$

$$\frac{Output\ Laplace}{Input\ Laplace} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m)}{(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n)} \rightarrow Transfer\ Function$$



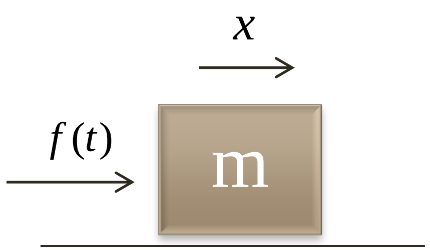
❋ مفهوم تابع تبدیل:

توصیفی ریاضی از فرایندی است که توسط سیستم روی ورودی انجام می شود، تا خروجی بدست آید.

❋ نکاتی در مورد تابع تبدیل:

۱. تابع تبدیل، یک مدل ریاضی سیستم دینامیکی است.
۲. مستقل از اندازه و نوع ورودی است.
۳. دارای بعد است و باید واحد آن رعایت شود.
۴. در صورت معلوم بودن تابع تبدیل هر سیستم، می توان پاسخ آن را برای ورودی های مختلف یافت.
۵. اگر تابع تبدیل معلوم نباشد، از طریق آزمایش قابل شناسایی است.

❋ مثال:



یاتاقان هوایی(بدون اصطکاک)

معادله ی حاکم : $f(t) = m\ddot{x}$

ورودی   خروجی

$$\Longrightarrow x = \int \left(\int f(t)dt + c_1 \right) dt + c_2 \xrightarrow{L(x(t))} F(s) = m(s^2 X(s) - sx(0) - x^{(1)}(0))$$

Double integrator

$$\xrightarrow{L(I.C=0)} F(s) = ms^2 X(s) \Longrightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2} \longrightarrow \text{Transfer Function}$$

لاپلاس خروجی

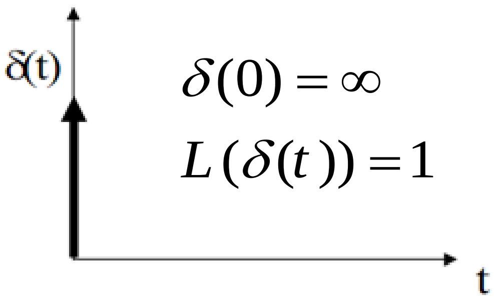
لاپلاس ورودی

تابع تبدیل

Transfer Function

❈ پاسخ به ضربه واحد:

- همه ی کارها در حوزه ی لاپلاس انجام می شود.
- در مرحله ی آخر یک لاپلاس معکوس گرفته می شود.



$$\delta(0) = \infty$$

$$L(\delta(t)) = 1$$

$$\begin{cases} G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} \\ \text{Unit impulse input: } u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G(s) \Rightarrow y(t) = g(t) = L^{-1}G(s)$$

❈ انتگرال پیچشی (Convolution Integral)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = U(s)G(s)$$

$$\xrightarrow{\text{Laplace inverse}} y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Block Diagram

❊ دلیل استفاده از دیاگرام جعبه ای:

برای اجتناب از نوشتن مکرر معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستمهای پیچیده، از دیاگرام جعبه ای استفاده می شود.

❊ المان پایه:

- سیگنال ها حتماً باید جهت دار باشند.
- سیگنال ها، در عمل زنجیره ای پیوسته از اطلاعات هستند.

❋ دیاگرام جعبه ای یک سیستم کنترل با پسخوراند (Feedback control system):

سیستم کنترل با پسخوراند سیستمی کنترلی است، که در آن ورودی به خروجی وابسته باشد.

❋ اصطلاحات مهم در دیاگرام های جعبه ای:

- **حلقه** (loop):

هرگاه در دیاگرام جعبه ای، عامل پسخوراند وجود داشته باشد یک حلقه به وجود می آید.

- **تابع تبدیل مدار باز** (Open Loop Transfer Function - OLTF):

اگر حلقه به طور کامل باز شود و همه ی توابع تبدیل موجود در آن در هم ضرب شوند، به تابع تبدیل بدست آمده تابع تبدیل مدار باز می گویند.

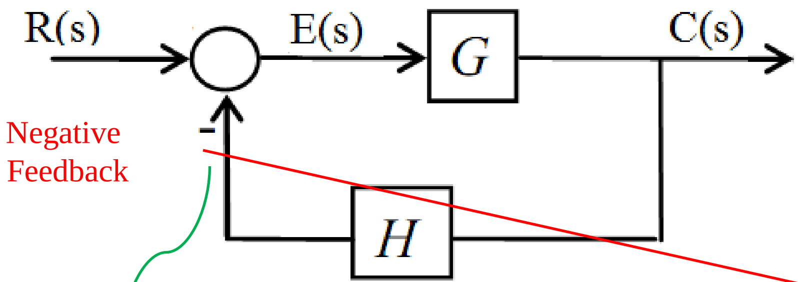
- **تابع تبدیل مسیر پیشرو** (Feed Forward Transfer Function - FFTF):

اگر مستقیماً از ورودی به خروجی بدون در نظر گرفتن شاخه ی پسخوراند حرکت کنیم، حاصلضرب توابع تبدیل این مسیر را تابع تبدیل مسیر پیشرو گویند.

- **تابع تبدیل مدار بسته** (Closed Loop Transfer Function - CLTF):

نسبت واقعی خروجی به ورودی (با در نظر گرفتن شاخه ی پسخوراند) را گویند.

❋ مدل سیستم کنترل مدار بسته با پسخوراند منفی:



$$FFTF = G(s)$$

$$OLTF = G(s)H(s)$$

$$CLTF = \frac{C(s)}{R(s)}$$

$$C(s) = E(s)G(s) = (R(s) - C(s)H(s))G(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

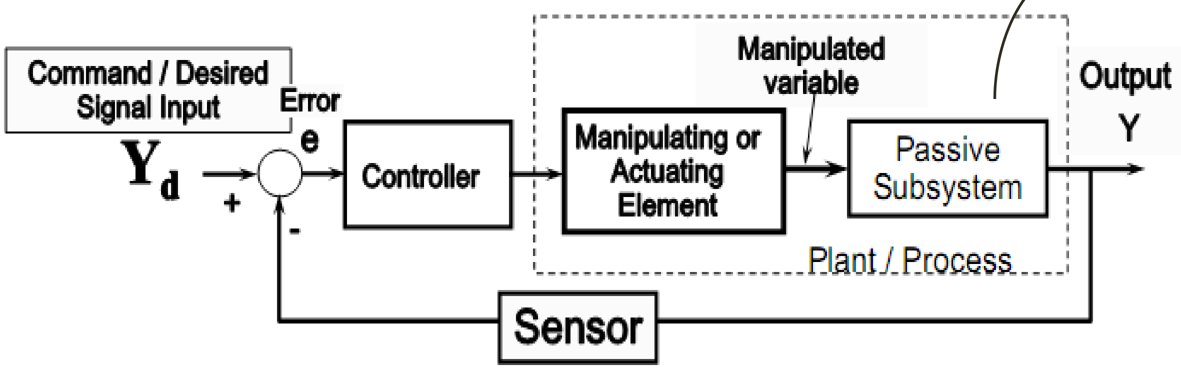
$$CLTF = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{FFTF}{1 + OLTF}$$

❋ به طور کلی:

$$CLTF = \frac{FFTF}{1 - OLTF}$$

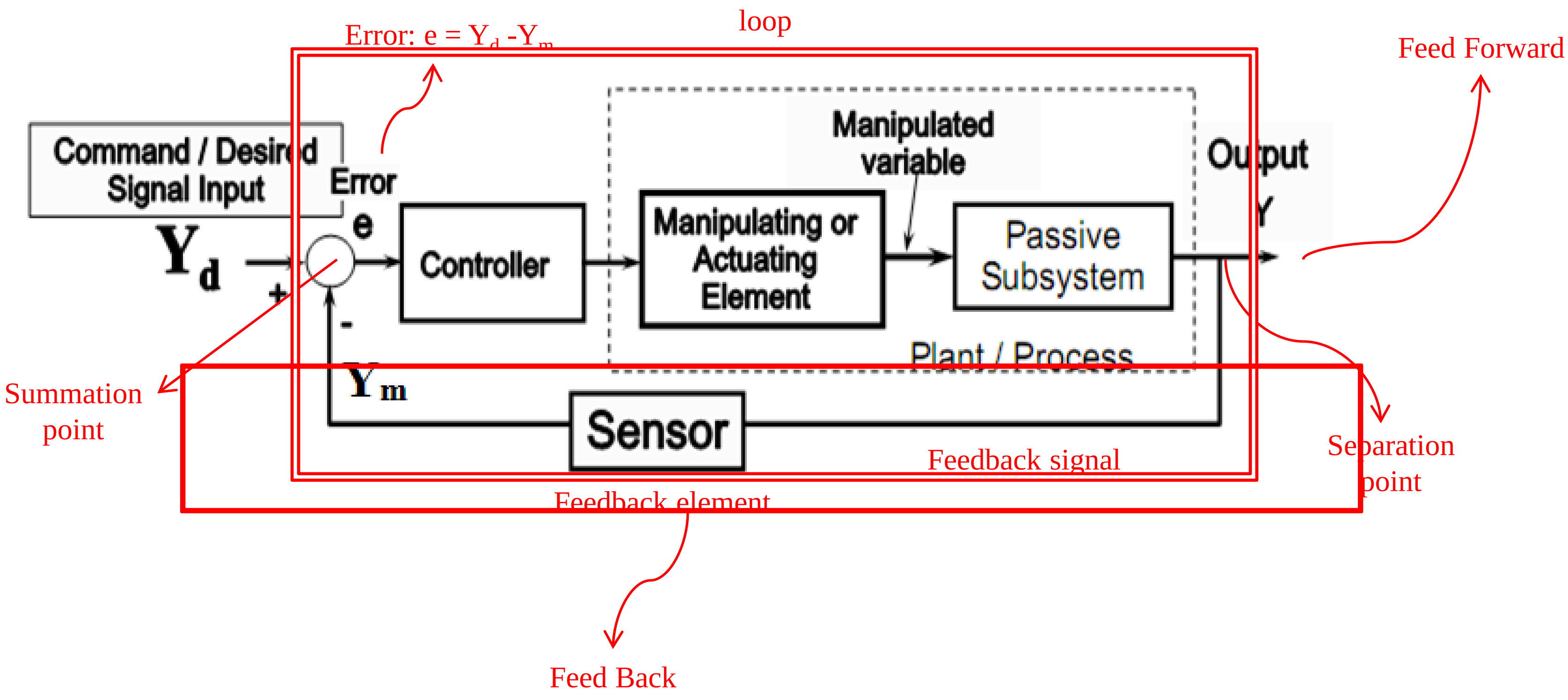
– فرایند (Process): قصد کنترل دما، رطوبت، جریان و ... را داریم.

– سرو مکانیزم (Servo mechanism): قصد کنترل سرعت، مکان و ... را داریم.



– حسگر(Sensor): تاکومتر برای سرعت زاویه ای، پتانسیومتر و انکودر برای زاویه، ترموکوپل برای دما، فشارسنج برای فشار و ... .

Closed-Loop Systems



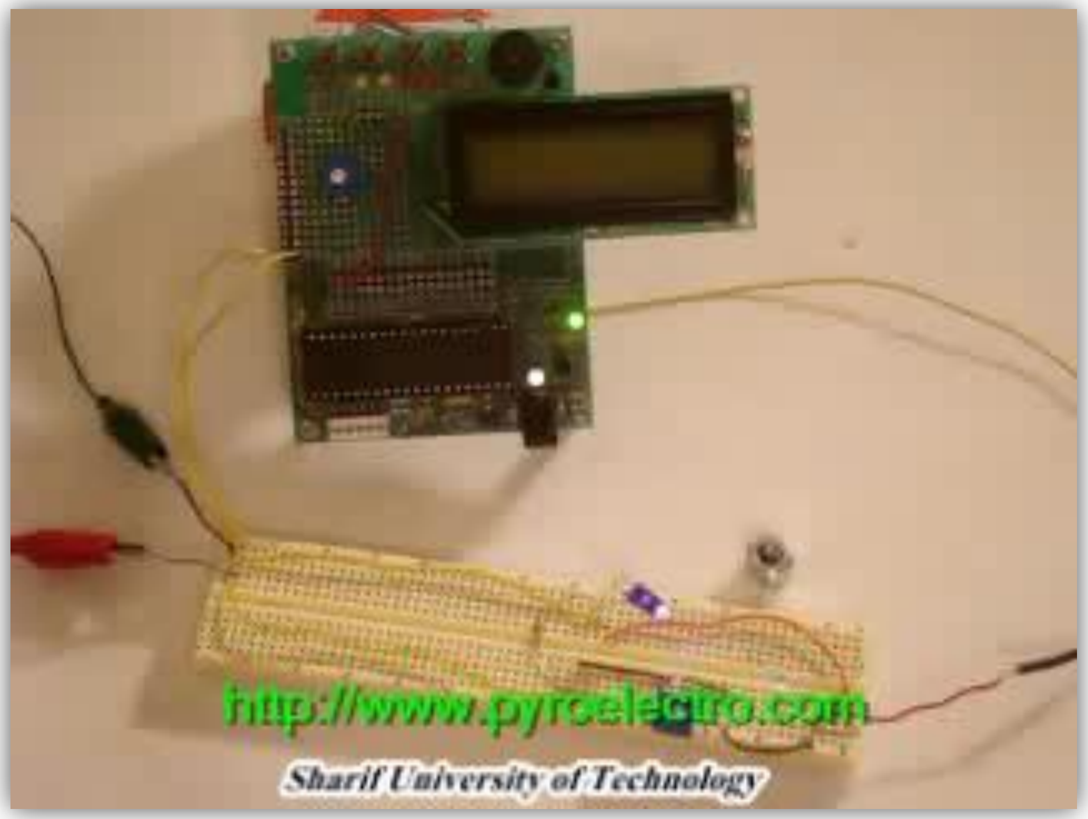
- در بعضی از حسگرها به محض این که اتفاقی در خروجی بیفتد، خود را در حسگر نشان می دهد این نوع حسگر ها اصطلاحاً دینامیک ندارند. برای این نوع حسگرها تابع تبدیل واحد در شاخه پسخوراند در نظر گرفته می شود.

- در گروه دیگری از حسگرها باید صبر کرد تا تغییرات بوجود آمده در خروجی را در حسگر مشاهده کرد. این نوع حسگر ها اصطلاحاً دینامیک دارند و برای آنها تابع تبدیل متناسب با معادلات دینامیکی حاکم بر آنها در نظر گرفته می شود.

- عملگرها (actuators) معمولاً در عمل دارای دینامیک هستند، لذا باید تابع تبدیل مناسب را برای آنها متناسب با معادلات دینامیکی حاکم بر آنها در نظر گرفت.

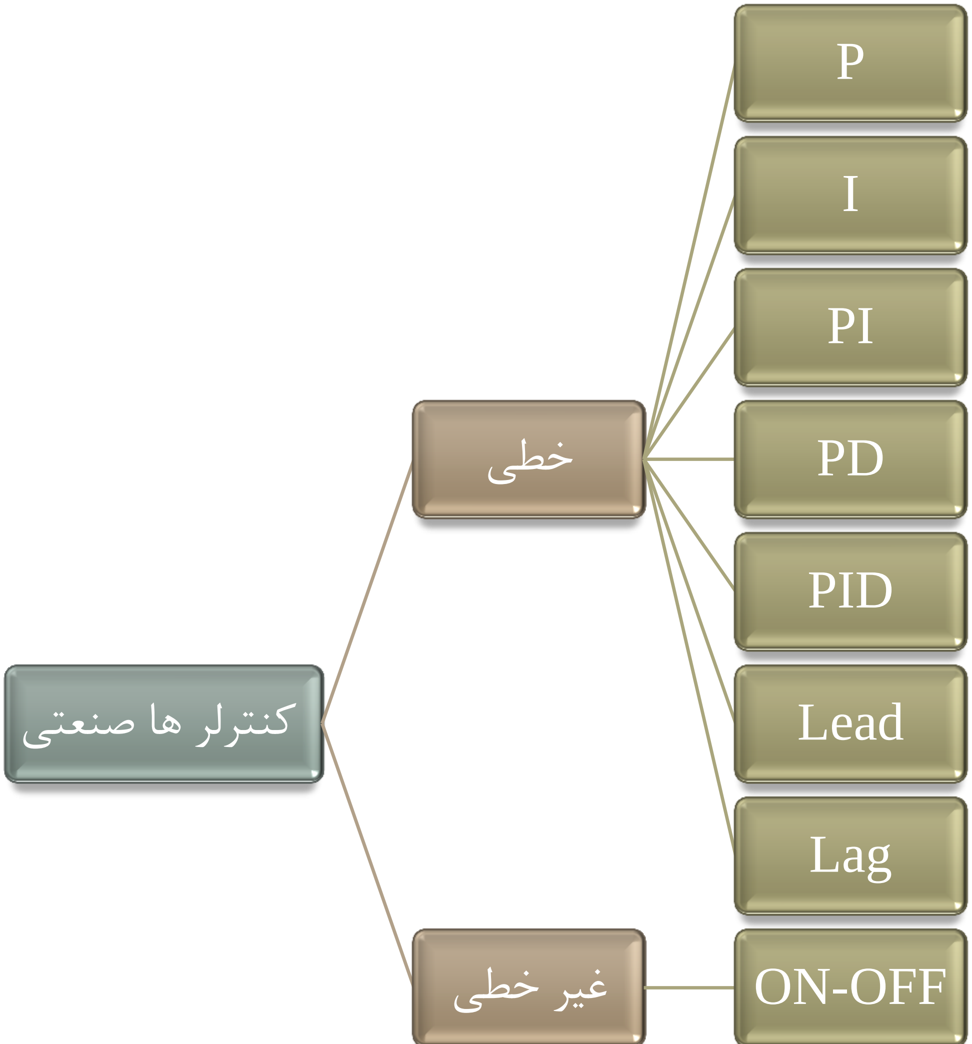
Rotary Encoder (Clip)

Digital Tachometer (Clip)



Next Clip

Industrial Controllers



Proportional

Integral

Proportional-Integral

Proportional-Derivative

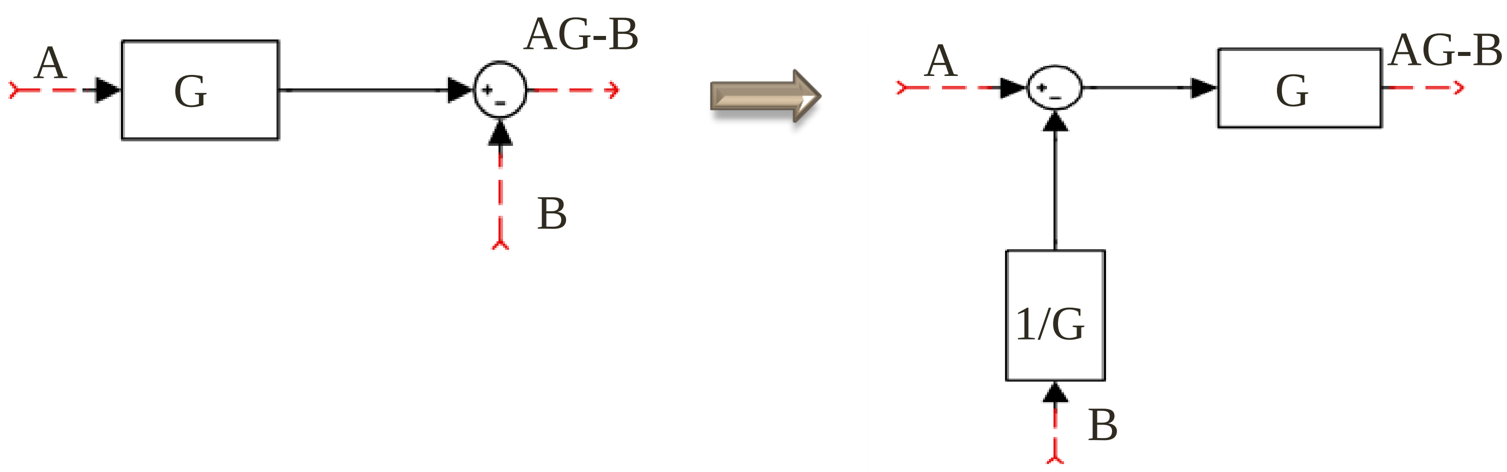
Proportional-Integral-Derivative


الکترونیکی
مکانیزم
کنترلرها
نیوماتیکی
هیدرولیکی

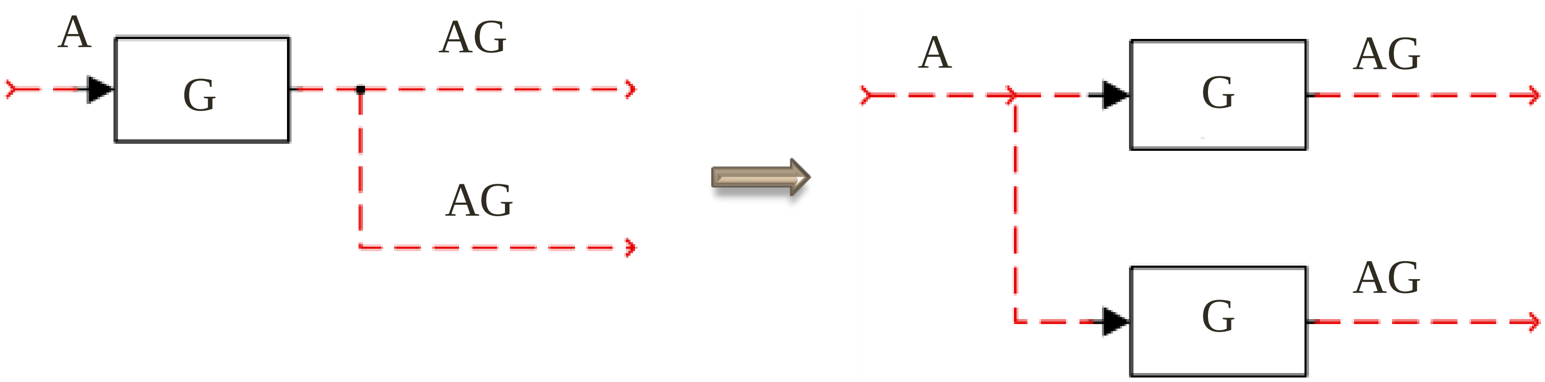
❋ قواعد:

- حاصلضرب توابع تبدیل در مسیر پیشرو نباید تغییر کند.
- توابع تبدیل مدار باز باید ثابت باشد.

❋ مثال ۱: انتقال جعبه به بعد از نقطه ی تجمع

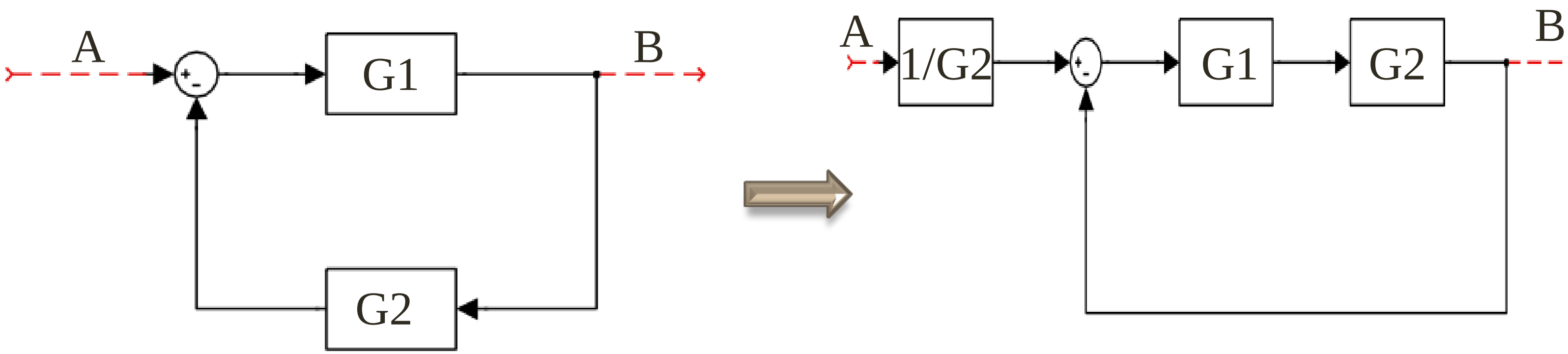


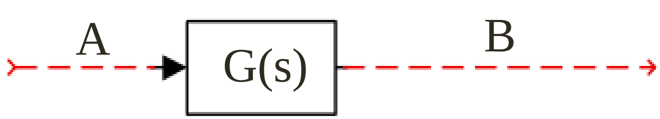
❊ مثال ۲: انتقال جعبه به بعد از نقطه ی انشعاب



❊ مثال ۳: انتقال جعبه به قبل از نقطه ی انشعاب

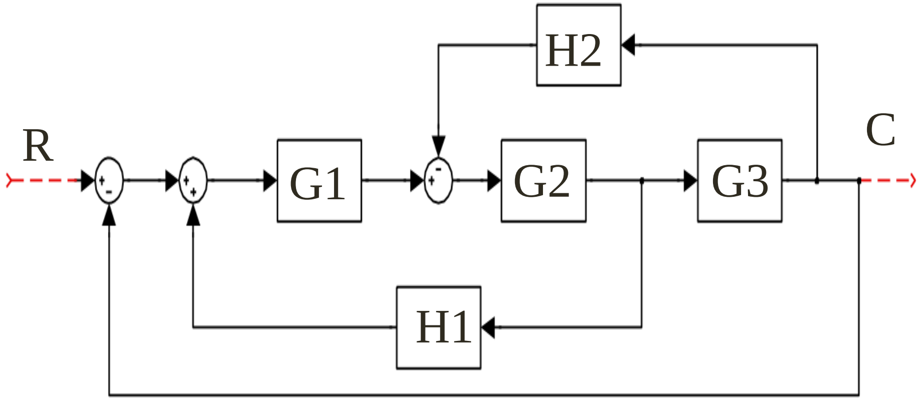
❊ مثال ۴: انتقال عضو پسخوراند به مسیر پیشرو

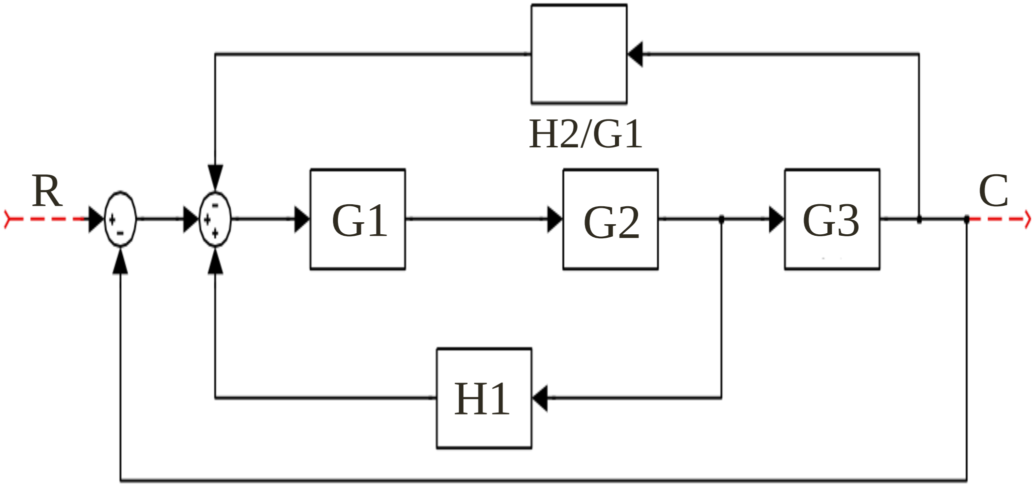




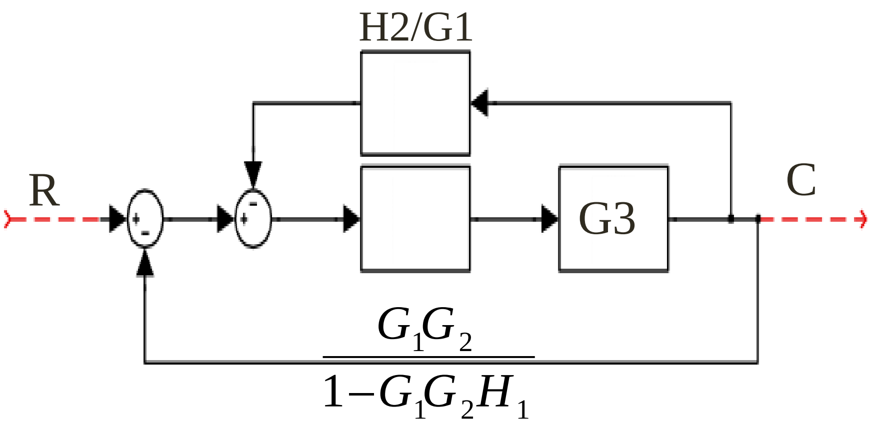
$$G(s)=\frac{G_1}{1+G_1G_2}$$

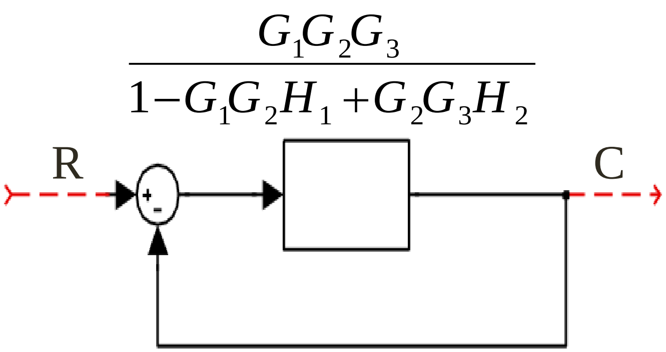
❋ مثال ۵: ساده سازی و یافتن تابع تبدیل





– ادامه:





$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3}$$

Control Theory (Clip)

Previous Clip

Part 2:

Mason’s Rule

for

Simplification of Block Diagrams

Contents

$$P = \frac{1}{\Delta}\sum_k P_k \Delta_k$$

P_k = path gain or transmittance of kth forward path

Δ = determinant of graph

= 1 - (sum of all individual loop gains) + (sum of gain products of all possible combinations of two nontouching loops) - (sum of gain products of all possible combinations of three nontouching loops + …)

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \ldots$$

$\sum_a L_a$ = sum of all individual loop gains

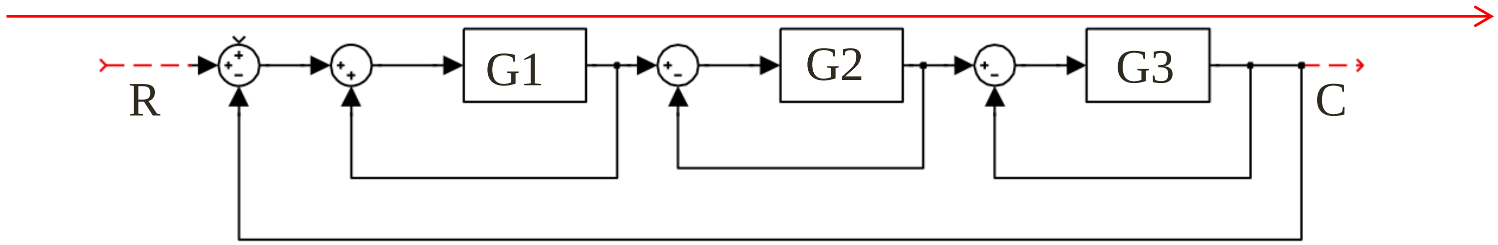
$\sum_{b,c} L_b L_c$ = sum of gain products of all possible combinations of two nontouching loops

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$ = sum of gain products of all possible combinations of three nontouching loops

Δ_k = cofactor of the kth forward path determinant of the graph with the loops touching the kth forward path removed, that is, the cofactor Δ, is obtained from Δ by removing the loops that touch path P_k

* Note: the loop gains should be considered with their signs.

❋ مثال ۱:



$$P_1 = G_1G_2G_3 \; ; L_1 = +G_1 , L_2 = -G_2 , L_3 = -G_3 , L_4 = -G_1G_2G_3$$

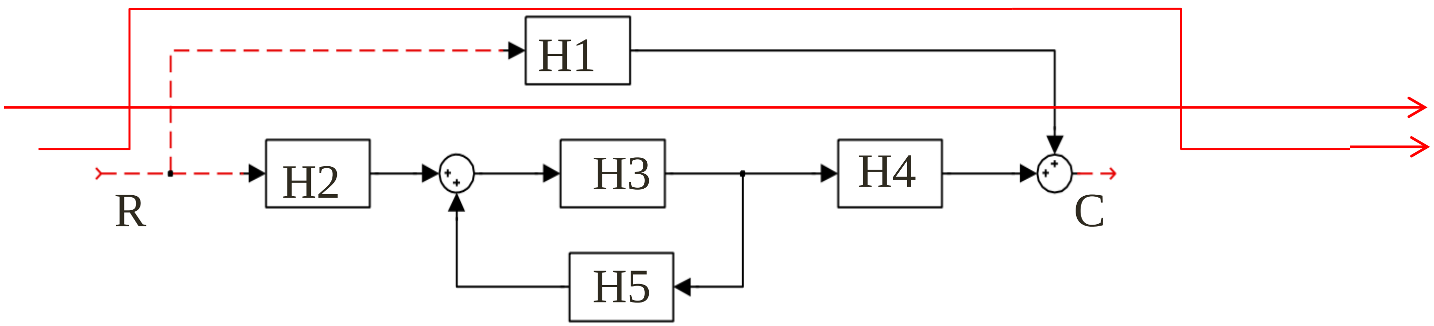
$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3) - (L_1L_2L_3) \; , \; \Delta_1 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta}$$

$$P = \frac{(G_1G_2G_3)(1)}{1-(G_1 - G_2 - G_3 - G_1G_2G_3) + (-G_1G_2 - G_1G_3 + G_2G_3) - (G_1G_2G_3)}$$

$$P = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1 + G_2 + G_3 - G_1G_2 - G_1G_3 + G_2G_3}$$

❋ مثال ۲:



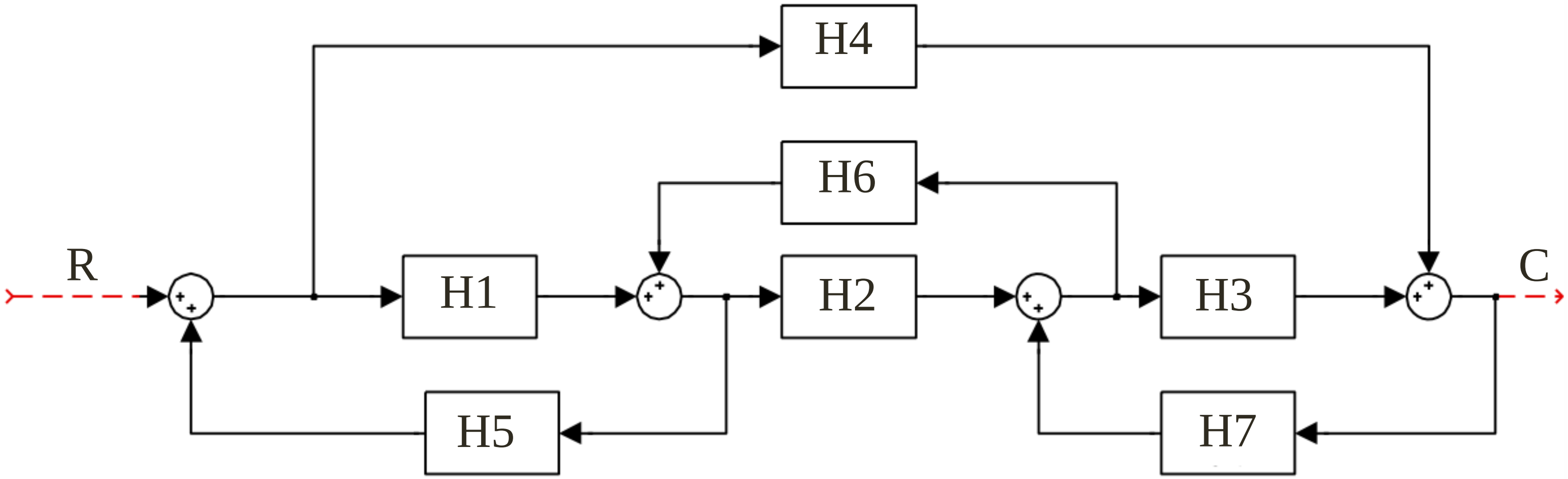
$$P_1 = H_1 , P_2 = H_2 H_3 H_4$$

$$L_1 = +H_3 H_5$$

$$\Delta = 1 - L_1 , \Delta_1 = 1 - L_1 , \Delta_2 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{H_1 - H_1 H_3 H_5 + H_2 H_3 H_4}{1 - H_3 H_5}$$

❋ مثال ۳:



$$P_1 = H_4, P_2 = H_1 H_2 H_3$$

$$L_1 = +H_1 H_5, L_2 = +H_2 H_6, L_3 = +H_3 H_7, L_4 = +H_4 H_7 H_6 H_5$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3), \Delta_1 = 1 - L_2, \Delta_2 = 1$$

Mason's Rule

$$\frac{C(s)}{R(s)} = P = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$P = \frac{(H_4)(1-H_2H_6) + (H_1H_2H_3)(1)}{1-(H_1H_5 + H_2H_6 + H_3H_7 + H_4H_7H_6H_5) + \left[(H_1H_5)(H_3H_7)\right]}$$

$$P = \frac{H_4 - H_2H_4H_6 + H_1H_2H_3}{1-H_1H_5 - H_2H_6 - H_3H_7 + H_1H_3H_5H_7 - H_4H_5H_6H_7}$$

Thanks for your attention!

Contents