Sharif University of Technology
School of Mechanical Engineering

Automatic Control

Chapter 1:

Introduction to Control Systems and Laplace Transformation

Instructor:
Professor Aria Alasty

1391-92 Fall Semester

Contents

Contents

Part 1:

Introduction to Control Systems

- Control Engineering
- Control Systems
- Sample Control Systems (Clips)

Contents

Next Clip

❋ مهندسی کنترل:

– در این شاخه مهندسی، به تحلیل، طراحی و ساخت سیستم های هدف دار پرداخته می شود.

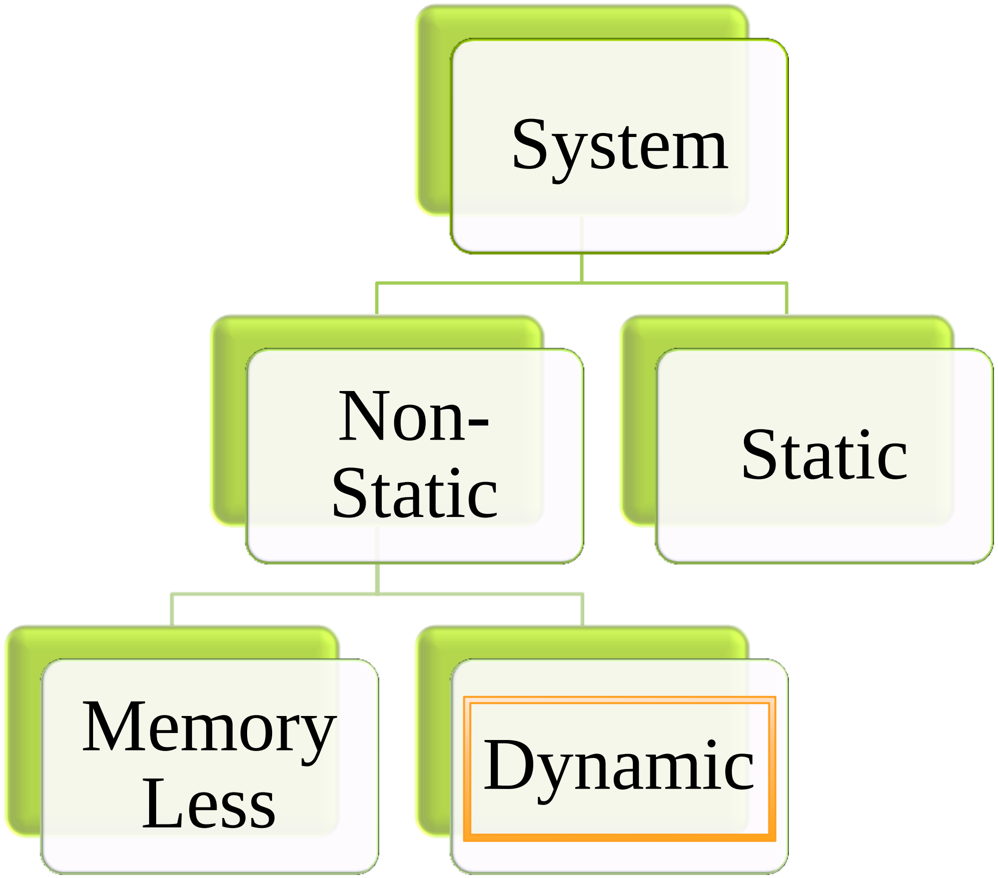
– هدف از طراحی سیستم های کنترلی این است که متغیری از سیستم، در یک مقدار مشخص ثابت شود و یا به صورت تابع مشخصی از یک ورودی تغییر کند.

❋ سیستم کنترلی:

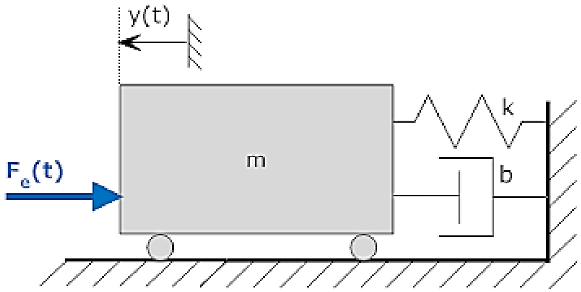
– عبارت است از مجموعه ای از اجزا که وظیفه کنترل یک متغیر در یک سیستم را بر عهده دارند. این متغیر می تواند دما، موقعیت، سرعت، نیرو یا ارتفاع باشد.

– اگر در سیستم کنترلی نقش کنترلر را سیستمی غیر از انسان ایفا کند، به عملیات کنترل اصطلاحاً Automatic Control گویند.

Types of Systems



- فقط سیستم های دینامیکی دارای کنترل هستند.
- معادلات حاکم بر این سیستم ها، از متغیرهای حالت یا State Space و پارامترها تشکیل شده اند.
- برای مثال در مدل بندی سیستم جرم و فنر، پارامترهای جرم و ثابت های فنر و دمپر و متغیرهای حالت y ,$\dot{y}$ حضور دارند:



$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_e(t)$$

- در این سیستم نیروی وارد بر جرم، ورودی و جابجایی آن خروجی سیستم به شمار می رود.
- پارامترهای سیستم دینامیکی بر حسب زمان می توانند ثابت (Time Invariant) و یا متغیر باشند.

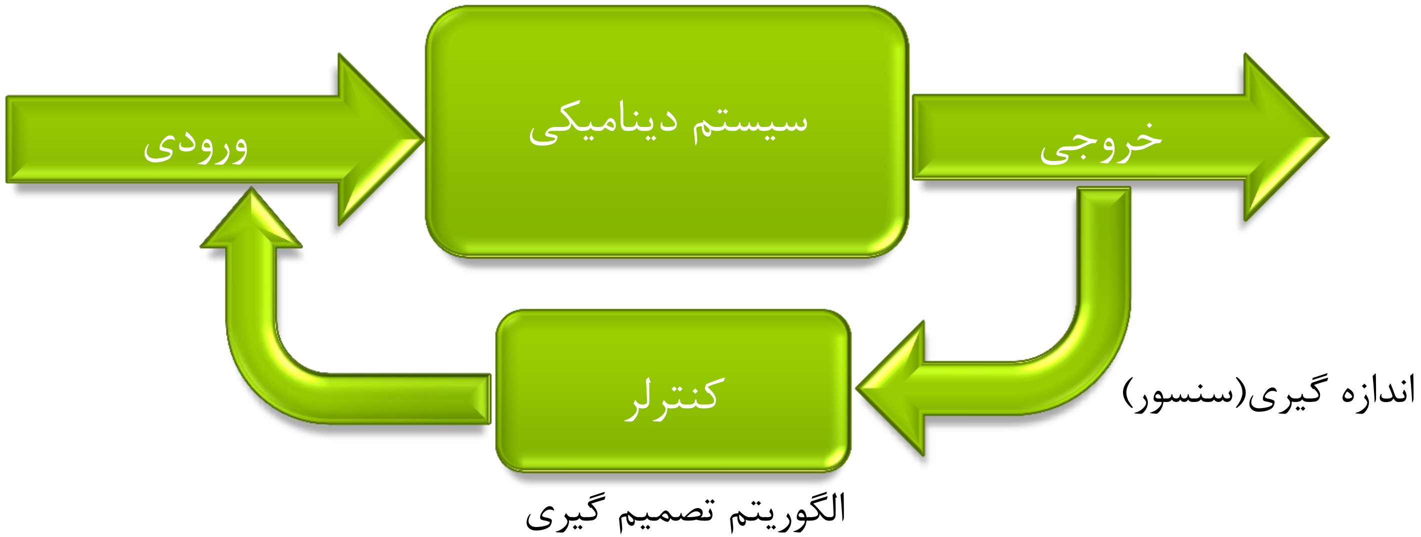
❋ اجزای اصلی سیستم کنترلی:

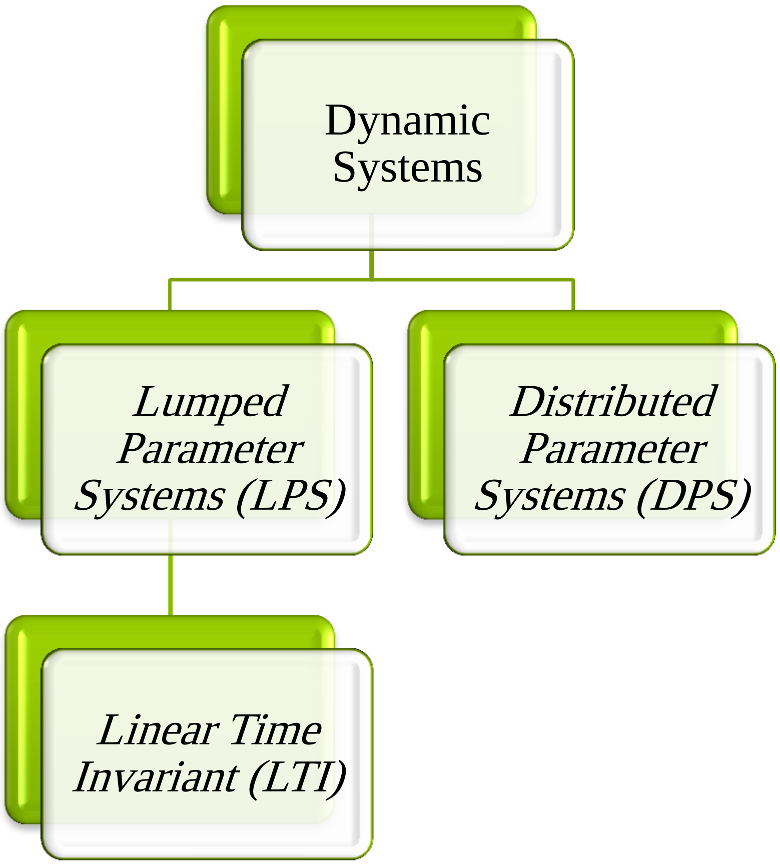
- سیستم دینامیکی (Plant/Process)

عبارت است از سیستمی که قصد کنترل کردن متغیری خاص از آن را داریم.

- کنترلر (Controller)

عبارت است از اجزایی که وظیفه کنترل متغیر را بر عهده دارند.




Dynamic Systems
Lumped Parameter Systems (LPS)
Distributed Parameter Systems (DPS)
Linear Time Invariant (LTI)

❋ در سیستم جرم و فنر، چنانچه بتوان جرم را به صورت نقطه ای فرض کرد، مدل بندی سیستم، از نوع LPS خواهد بود و معادله دیفرانسیل حاکم از نوع ODE است.

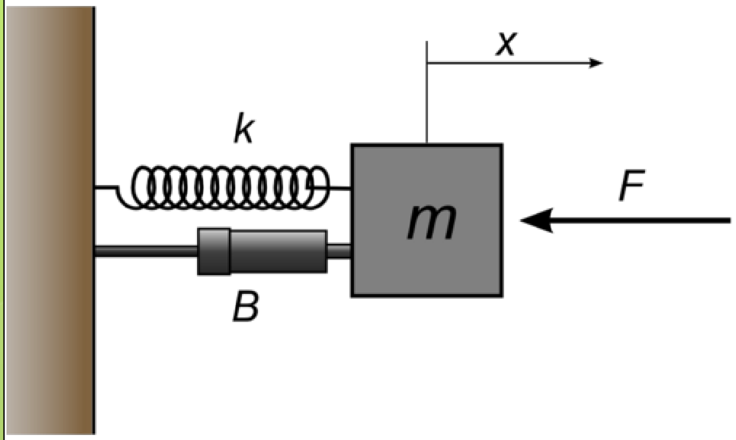
- مدل بندی صورت گرفته برای این سیستم در اسلاید قبل، از این نوع بوده است.

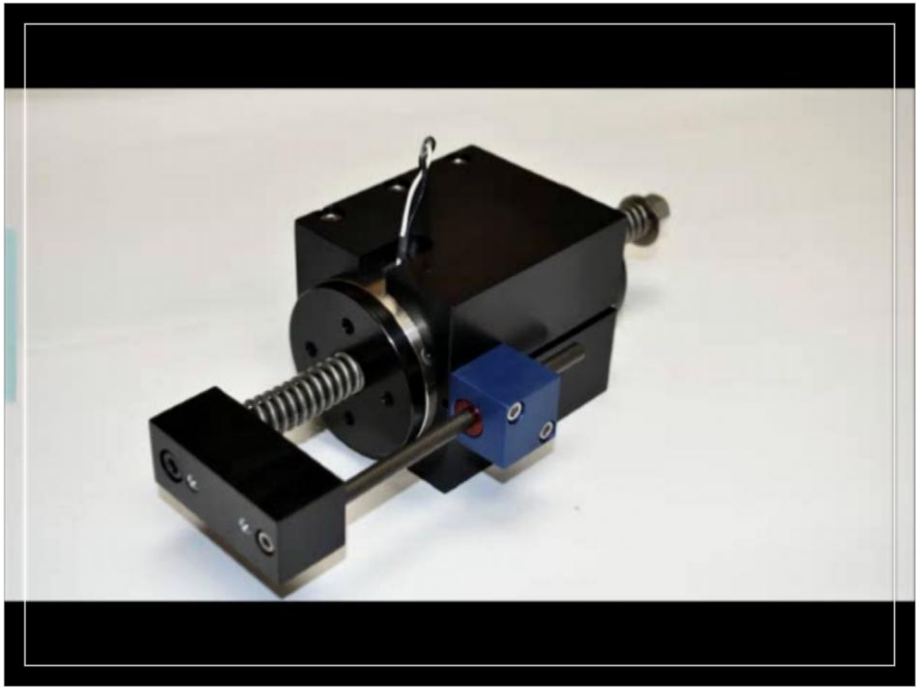
❋ چنانچه توزیع جرم به صورت گسترده در نظر گرفته شود، مدل بندی سیستم دینامیکی از نوع DPS بوده و معادلات حاکم از نوع دیفرانسیلی پاره ای است.

❋ در این درس، بحث در مورد معادلات ODE با پارامترهای ثابت با زمان است. به این نوع سیستم های LPS ، سیستم های LTI گویند.

❋ سیستم های LTI(Linear Time Invariant):

- اگر ورودی چند برابر شود، خروجی نیز چند برابر می شود (شرط خطی بودن).
- اگر ورودی سیستم، جمع چند ورودی مستقل باشد، خروجی نیز برابر مجموع خروجی های متناظر با هر یک از ورودی ها است.
- ضرایب متغیرها یا همان پارامترها نباید وابسته به زمان باشند.





$$LTI\ Model:\ m\ddot{x}+B\dot{x}+kx=F(t)\ ;\ m,B,k\ are\ constant$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1+B\dot{x}_1+kx_1=F_1(t) \\ m\ddot{x}_2+B\dot{x}_2+kx_2=F_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} if\ \ x=x_1+x_2 \Rightarrow F(t)=F_1(t)+F_2(t) \\ if\ \ x=nx_1 \Rightarrow F(t)=nF_1(t) \end{cases}$$

Previous Clip

Inverted Pendulum

Ball and Beam

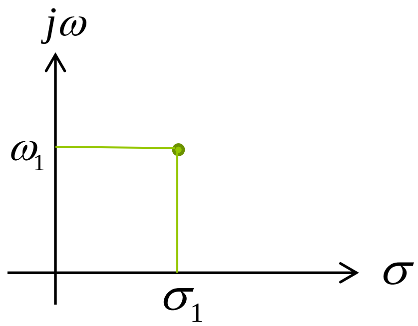
Fluid Level Control System

Part 2:

Introduction to Laplace Transformations

Contents

❋ فضای مختلط:



$$s=\sigma_1+j\omega_1 \ , \ F(s)=F_x+jF_y$$

$$\Rightarrow \overline{F}=F_x-jF_y \ , |F|=\sqrt{F_x^{\ 2}+F_y^{\ 2}}$$

❋ اگر تساوی زیر برقرار باشد، طبق قضیه کوشی-ریمان تابع مختلط در همه جا مشتق پذیراست:

$$\frac{d}{ds}G(s)=\frac{\partial G_x}{\partial \sigma}+j\frac{\partial G_y}{\partial \sigma}=\frac{\partial G_y}{\partial \omega}-j\frac{\partial G_x}{\partial \omega}$$

- مثال:

$$\begin{cases} G(s)=\dfrac{1}{s+1} \\ s=\sigma+j\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_x=\dfrac{\sigma+1}{(\sigma+1)^2+\omega^2} \\ G_y=\dfrac{-\omega}{(\sigma+1)^2+\omega^2} \end{cases} , \ \frac{dG(s)}{ds}=\frac{-1}{(s+1)^2}$$

❋ صفر تابع مختلط: ریشه های چندجمله ای صورت تابع، صفرهای آن هستند.

❋ قطب تابع مختلط: ریشه های چندجمله ای مخرج تابع، قطب های آن هستند.

– در سیستم های کنترلی، درجه صورت تابع های مختلط کمتر از درجه مخرج است و معمولا تعدادی صفر تابع در بی نهایت وجود دارد.

❋ مثال: صفرها و قطب های تابع مختلط

$$G(s)=\frac{k(s+2)(s+10)}{s(s+1)(s+5)(s+15)^2}$$

$$System\ poles: 0, -1, -5, -15, -15$$

$$\lim_{s\to\infty} G(s)=\frac{ks^2}{s^5}=\frac{k}{s^3}=0 \rightarrow System\ zeros: -2, -10, \infty, \infty, \infty$$

❋ قضیه ی اویلر: تعریف تابع نمایی مختلط

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

❋ تبدیل لاپلاس:

$$L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

- تبدیل لاپلاس فقط برای توابعی قابل تعریف است که در شرط زیر صدق کنند (رشد تابع نباید شدیدتر از هر تابع نمایی به شکل رو به رو باشد):

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}$$

- برای مثال تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = e^{t^2}$ وجود ندارد.

❋ خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس:

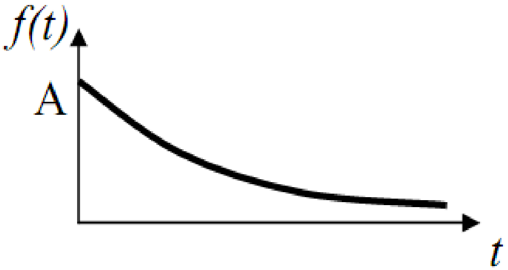
$$L(cf(t)) = cL(f(t))$$

$$L(f(t) + g(t)) = L(f(t)) + L(g(t))$$

❊ تبدیل لاپلاس توابع معروف:

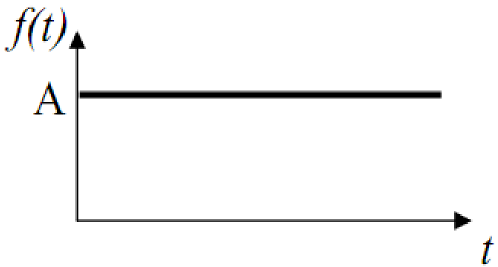
- تابع نمایی

$$\begin{cases} f(t)=\begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \\ F(s)=\dfrac{A}{s+\alpha} \end{cases}$$



- تابع پله

$$\begin{cases} f(t)=\begin{cases} A & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \\ F(s)=\dfrac{A}{s} \end{cases}$$

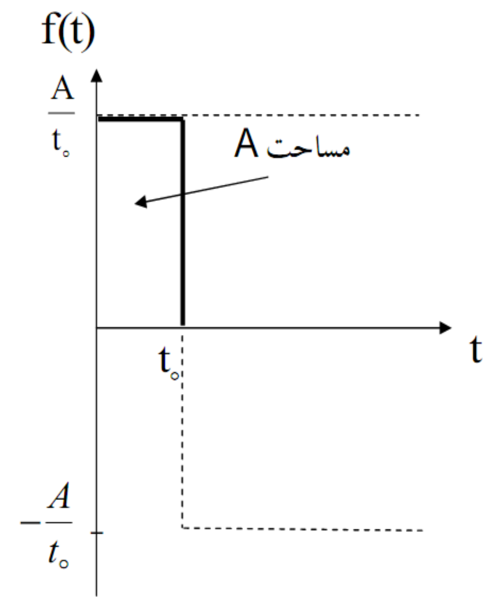


- توابع مثلثاتی

$$\begin{cases} f(t)=\begin{cases} A\sin\omega t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \\ F(s)=\dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(t)=\begin{cases} A\cos\omega t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \\ F(s)=\dfrac{As}{s^2+\omega^2} \end{cases}$$

- تابع پالس

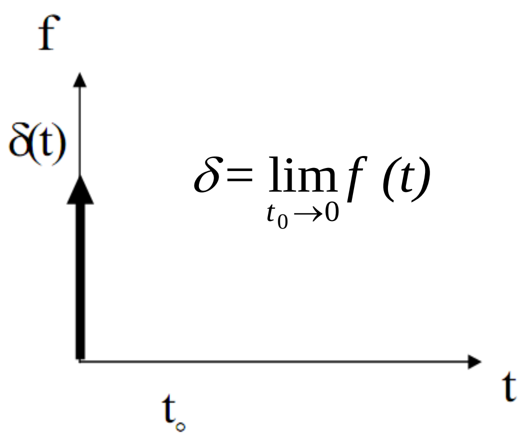


$$f(t)=\begin{cases}\frac{A}{t_0} & 0<t<t_0\\ 0 & t>t_0 \ or\ t<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{A}{t_0}-\frac{A}{t_0}(1(t-t_0))$$

$$F(s)=\frac{A}{t_0 s}-\frac{Ae^{-t_0 s}}{t_0 s}=\frac{A}{t_0 s}(1-e^{-t_0 s})$$

- تابع ضربه

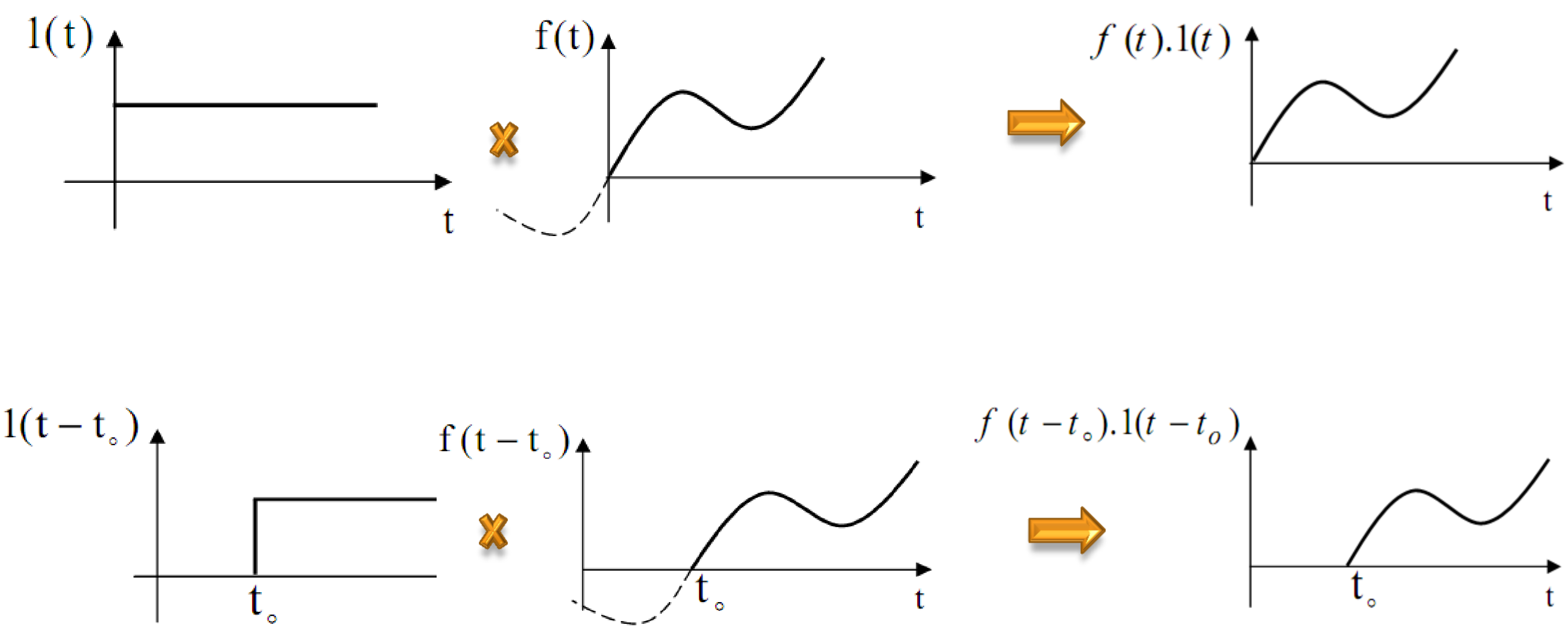


$$L(\delta(t))=\frac{A}{s}\lim_{t_0\to 0}\frac{(1-e^{-t_0 s})}{t_0}$$

$$\xrightarrow{HOP} L(\delta(t))=A$$

❋ عملکرد تابع پله واحد:

$$L(1(t-\alpha)f(t-\alpha)) = e^{-\alpha s}F(s)$$



* برخی روابط مهم تبدیل لاپلاس:

$$1)\ L(f(\frac{t}{\alpha})) = \alpha F(\alpha s)$$

$$2)\ L(e^{-\alpha t} f(t)) = F(s+\alpha)$$

$$3)\ L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$4)\ L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

$$5)\ L(\int_0^t f(t)dt) = \frac{F(s)}{s}$$

$$6)\ L(\frac{d^n(f(t))}{dt^n}) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^1(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$$

$$7)\ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t) \Rightarrow L(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(s) F_2(s)$$

❋ قضیه مقدار نهایی(*Final Value Theory*):

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

- این قضیه ارتباط دامنه های زمان و حالت را مشخص می کند و از آن برای محاسبه پاسخ ماندگار مدل سیستم استفاده خواهد شد.

- شرط برقراری قضیه : *sF(s)* نباید قطبی روی محور موهومی و سمت راست آن داشته باشد.

- نکته: به طور مشابه داریم:

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

❄ اگر همه قطب ها ساده باشند، می توان هر تابع چند جمله ای را به شکل زیر نوشت:

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)....(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)}$$

$$=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+...+\frac{a_n}{s+p_n}\quad ;n>m\quad ,\quad a_k=[(s+p_k)F(s)]_{s=-p_k}$$

❄ اگر همه قطب ها ساده و قطب kام از مرتبه ی سه باشند:

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)....(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_k)^3...(s+p_n)}$$

$$=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+...+\frac{a_k}{s+p_k}+\frac{a_k'}{(s+p_k)^2}+\frac{a_k''}{(s+p_k)^3}+...+\frac{a_n}{s+p_n}\quad n+2>m$$

$$a_k=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[(s+p_k)^3F(s)]_{s=-p_k}\qquad a_k'=\frac{d}{ds}[(s+p_k)^3F(s)]_{s=-p_k}$$

$$a_k''=[(s+p_k)^3F(s)]_{s=-p_k}$$

❋ اگر یک جفت قطب مختلط مزدوج داشته باشیم:

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)....(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s^2+2\xi_k\omega_k s+\omega_k^2)...(s+p_n)}=$$

$$\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+...+\frac{a_k s+\bar{a}_k}{s^2+2\xi_k\omega_k s+\omega_k^2}+...+\frac{a_n}{s+p_n}\quad n+1>m$$

❋ مثال ۱: تبدیل لاپلاس معکوس

$$F(s)=\frac{2s+12}{s^2+2s+5}$$

- حل:

$$F(s)=\frac{2s+12}{s^2+2s+5}=\frac{2s+12}{(s+1)^2+4}=\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4}+\frac{5(2)}{(s+1)^2+4}$$

$$f(t)=L^{-1}(F(s))=2e^{-t}\cos(2t)+5e^{-t}\sin(2t)$$

مثال ۲: تبدیل لاپلاس معکوس

$$F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$$

- حل: با توجه به روابط مربوط به تفکیک جزیی کسرها داریم:

$$F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}=\frac{b_1}{s+1}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_3}{(s+1)^3}$$

$$\Rightarrow (s+1)^3F(s)=b_1(s+1)^2+b_2(s+1)+b_3$$

$$\frac{d^2}{ds^2}[(s+1)^3F(s)]=2b_1\Rightarrow b_1=\frac{1}{(3-1)!}[\frac{d^2}{ds^2}(s+1)^3F(s)]_{s=-1}=\frac{1}{2}(2)=1$$

$$\frac{d}{ds}[(s+1)^3F(s)]=2b_1(s+1)+b_2\Rightarrow b_2=[\frac{d}{ds}(s+1)^3F(s)]_{s=-1}=0$$

$$(s+1)^3F(s)=b_1(s+1)^2+b_2(s+1)+b_3\Rightarrow b_3=[(s+1)^3F(s)]_{s=-1}=2$$

$$F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^3}\Rightarrow f(t)=L^{-1}(F(s))=e^{-t}+t^2e^{-t}$$

Thanks for your attention!

Contents