دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

سری با جملات مثبت - منفی

شکل کلی این سری به صورت $\sum (-1)^n a_n$ است.

قضیه: (آزمون لایب نیتز)

اگر یک سری متناوب داشته باشیم $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

و نزولی باشد ($a_{n+1} < a_n$) تابع همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

متناوب و $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

و تابع a_n نزولی است چون $n+1 > n$

$a_{n+1} < a_n \Leftarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ ✓

همگراست. $\Leftarrow$ لایب‌نیز ✓ $\Leftarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$$

متناوب و $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$

$n+1 > n$

$\ln(n+1) > \ln n \Rightarrow$ همگرا

$\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n}$ نزولی

قضیه: سری $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست.

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرای مطلق گوییم هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگرا باشد.

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرای مشروط گوییم؛

هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ واگرا باشد اما $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow \text{همگرای مشروط}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \rightarrow \text{همگرای مطلق}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n!} \right| = \text{؟}$$

$$\lim \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2^n (n+1)!} = 0 < 1$$

همگرا

شعاع همگرایی :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

اصطلاحاً می گوییم سری حول نقطه x_0 نوشته شده است .

$$\frac{1}{R}=\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\sqrt[n]{a_n}$$

$$-R < x-x_0 < R$$

$$-R+x_0 < x < x_0+R$$

نقطه ابتدایی - انتهایی باید جداگانه بررسی شود .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$\frac{1}{R} = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = 1$$

$$\frac{1}{R} = 1 \longrightarrow R = 1$$

$$-1 < x < 1$$

$x = -1 \longrightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$: a_n نزولی ، متناوب ، $\lim a_n = 0$ $\Rightarrow$ همگرا

$x = 1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ واگرا $\left(\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 \right)$ هم‌نوع اند

$\Rightarrow$ بازه همگرایی $[-1, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}$$

$$= \lim \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}\,n^n}{\cancel{n!}\,(n+1)^n\,\cancel{(n+1)}} = \lim \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{e} \longrightarrow R=e \checkmark$$

$$-e < x < e$$

$$x=-e \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(-e)^n$$

$$\lim \frac{n!}{n^n} e^n \neq 0$$ شرط لازم همگرایی ندارد

واگراست

$$x=e \quad \lim \frac{n!}{n^n} e^n \neq 0 \Rightarrow$$

شرط لازم همگرایی ندارد پس $\frac{n!}{n^n}e^n$ یک واگراست.

$\longrightarrow$ بازه همگرایی $(-e, e)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n \, (x-۵)^n}{n+1}$$

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{\dfrac{\ln(n+1)}{n+۲}}{\dfrac{\ln n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)\,(n+1)}{\ln n \, (n+۲)}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} \cdot \lim \frac{n+1}{n+۲} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\frac{1}{R} = 1 \longrightarrow R = 1$$

$$-1 < x - ۵ < 1$$

$$۴ < x < ۶$$

$$x = ۴ \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n+1} (-1)^n$$

$$a_n = \frac{\ln n}{n+1} \quad (a_n)' < 0$$ (نزولی)

متناوب → همگرا

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$$

$x=6 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n+1}$ واگرا

چون با مقایسه حدی

$$\lim \frac{\frac{\ln n}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = \ln n = \infty$$

∞ و $\sum \frac{1}{n+1}$ (همساز) واگرا $\Longrightarrow$ $\sum \frac{\ln n}{n+1}$ واگرا

$\Rightarrow$ بازه همگرایی $4 \le x < 6$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(\ln n)^p}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}}{\dfrac{1}{n\ln^p n}} = 1$$

$$\frac{1}{R} = 1 \rightarrow R = 1 \longrightarrow -1 < x < 1$$

$$x = -1 \longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n\ln^p n} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$ * همگراست

چون:

$$\left(0 + \frac{1}{\ln 2}\right)$$ همگراست $$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} = \frac{-1}{\ln x}\Big|_{2}^{\infty}$$

$$x = +1 \longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^2 n}$$ * همگرا

متناوب

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} = 0 \longrightarrow$$ لایب نیتز همگراست $-1 \leq x \leq 1$

a_n نزولی

شعاع و بازه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{3^n (n^2+1)}$ را بیابید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{3^n (n^2+1)} = \sum \frac{2^n \left(x+\frac{5}{2}\right)^n}{3^n (n^2+1)}$$

$$\Rightarrow \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1} ((n+1)^2+1)}}{\dfrac{2^n}{3^n (n^2+1)}}$$

$$x=-4 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(-\frac{3}{2}\right)^n}{3^n (n^2+1)} = \sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$ همگرا

$$x=-1 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \left(\frac{3}{2}\right)^n}{3^n (n^2+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$ همگرا

$$\longrightarrow -4 \leq x \leq -1$$

$$= \frac{۲^n \cdot ۲ \cdot ۳^n (n^۲+۱)}{۳^n \cdot ۳ \left((n+۱)^۲+۱\right) \cdot ۲^n} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۱}{R} = \frac{۲}{۳} \longrightarrow R = \frac{۳}{۲}$$

$$-\frac{۳}{۲} < x + ۵/۲ < \frac{۳}{۲}$$

$$-۴ = -\frac{۳}{۲} - ۵/۲ < x < \frac{۳}{۲} - \frac{۵}{۲} = -۱$$

نکته:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$|x-x_0|<R$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \quad |x-x_0|<R$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2} \quad |x-x_0|<R$$

$$\int y\, dx=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-x_0)^{n+1}}{n+1} \quad |x-x_0|<R$$

بسط تیلور حول نقطه $x=c$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

اگر $c=0$ به آن سری مک‌لورن می‌گوییم.

مک‌لورن : $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

بسط مک‌لورن برای $y = \sin x$

$$y = \sin x \qquad y(0) = 0$$

$$y' = \cos x \qquad y'(0) = 1$$

$$y'' = -\sin x \qquad y''(0) = 0$$

$$y^{(3)} = -\cos x \qquad y^{(3)}(0) = -1$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

مک‌لورن e^x

$y = e^x \qquad y(0) = e^0 = 1$

$y' = e^x \qquad y'(0) = 1$

$$e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\sin(x^۲) = ?$ مک‌لورن

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \frac{x^۹}{۹!} + \cdots$$

$$\sin(x^۲) = x^۲ - \frac{(x^۲)^۳}{۳!} + \frac{(x^۲)^۵}{۵!} - \frac{(x^۲)^۷}{۷!} + \cdots$$

مک لورن

$f(x)=(1+x^2)e^{-x}=?$ چهار جمله بنویسید.

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+\frac{(-x)^4}{4!}+\cdots$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$(x^2+1)(e^{-x})=(x^2+1)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)$$

$$=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{6}x^3+\cdots$$

مک لورن توابع معروف :

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n}}{n!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{2n!}$$

$$\frac{1}{1-x} = x + x^{2} + x^{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n} \quad |x|<1$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

سری مک لورن $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ بنویسید.

$$y=(x+1)^{-1/۲} \qquad y(۰)=۱$$

$$y'=-\tfrac{۱}{۲}(x+1)^{-\frac{۳}{۲}} \qquad y'(۰)=-۱/۲$$

$$y''=\frac{-۱}{۲}\left(-\frac{۳}{۲}\right)(x+1)^{-۵/۲} \qquad y''(۰)=\frac{۳}{۴}$$

$$\vdots$$

$$f(x)=f(۰)+\frac{f'(۰)}{۱!}x+\frac{f''(۰)}{۲!}x^۲+\cdots$$

$$f(x)=۱+\frac{-۱/۲}{۱}x+\frac{۳/۴}{۲!}x^۲+\cdots$$

بسط مک لورن $y=Ln(1+x)$ را بنویسید.

$$y=Ln(x+1) \qquad y'=\frac{1}{(x+1)} \qquad y''=\frac{-1}{(x+1)^{۲}}$$

$$F(x)=F(۰)+\frac{F'(۰)}{۱!}x+\frac{F''(۰)}{۲!}x^{۲}+\cdots$$

$$Ln(x+1)=Ln(1)+\frac{\frac{+}{1}}{۱!}x+\frac{\frac{-1}{1}}{۲!}x^{۲}+\frac{x^{۳}}{۳!}(۲)+\cdots$$

$$Ln(x+1)=\sum_{n=۰}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x|<1$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x|<1$$

مک‌لورن $y = \ln(1+x^2)$ را بیابید:

$$\ln(x^2+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{n+1}}{n+1} \qquad |x|<1$$

مک‌لورن $y=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ را بیابید.

الف)

$$\ln(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{n+1} \qquad (1)$$

$$\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(-x)^{n+1}}{n+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (2)$$

$$f(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x)=(1)-(2)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)$$

ب) به کمک الف مقدار $\ln 2$ را محاسبه کنید:

$$\frac{x+1}{1-x} = 2 \longrightarrow x+1 = 2-2x \longrightarrow x = \frac{1}{3}$$

پس $f(\frac{1}{3})$ را بدست می‌آوریم.

$$\ln 2 = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{(1/3)^3}{3} + \frac{(1/3)^5}{5} + \cdots\right)$$

ابتدا سری مک لورن $\frac{\sin x}{x}$ بنویسید و سپس $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ را محاسبه کنید

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

$$I = \int_0^1 \sin x/x\,dx = x - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{5} + \cdots \Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3!\,3} + \frac{1}{5!\,5} - \frac{1}{7.7!} + \cdots$$

شعاع همگرایی را بیابید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = e \qquad \frac{1}{R} = e$$

$$R = \frac{1}{e}$$

$$-\frac{1}{e} < x-1 < \frac{1}{e}$$

$$1 - 1/e < x < 1 + \frac{1}{e}$$

$x = 1-\frac{1}{e}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+1/n\right)^{n^2} \left(1-\frac{1}{e}-1\right)^n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{(-1)^n}{e^n}$$

$= \frac{(-1)^n e^n}{e^n} = (-1)^n \neq 0$ شرط لازم برای همگرایی ندارد ← واگرا

$x = 1+\frac{1}{e}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \left(1+\frac{1}{e}-1\right)^n$

چون $\lim \frac{(1+1/n)^n}{e^n} = 1 \neq 0 \rightarrow$ واگرا

↳ بازه همگرایی $1-\frac{1}{e} < x < 1+\frac{1}{e}$ ✓

موفق باشید