دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

تعریف سری نامتناهی:

دنباله a_n را در نظر بگیرید؛

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

را سری می‌نامیم.

تعریف می‌کنیم؛ دنباله مجموع جزئی

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n =$$

اگر وجود داشت ← همگرا

اگر وجود نداشت ← واگرا

همگرایی و واگرایی سری های زیر را بررسی کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

حل :

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

همگرا

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$a_1 = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2$$

$$a_2 = \ln \frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3$$

$$\vdots$$

$$a_n = \ln \frac{n}{n+1} = \ln n - \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \ln 1 - \ln(n+1) = \ln \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{1}{n+1} = \ln(0) = \infty$$

// واگرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(n+۲)}{(n+1)^{۲}} = ؟$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+۲}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1} + \ln \frac{n+۲}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n+۲}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$a_1 = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{2}{3}$$

$$a_2 = \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{3}{4}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \ln \frac{n}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n+2}$$

$$S_n = \ln \frac{1}{2} - \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right)$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \ln \frac{1}{2} - \ln \left(\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n+2} \right)$$

$$= \ln \frac{1}{2} - \ln 1 = \ln \frac{1}{2}$$

همگرا

آزمون مقایسه برای سری ها:

سری a_n که یک سری مثبت است اگر تمام جملات سری مثبت باشد.

قضیه:

$$a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum a_n, \sum b_n$$

دو سری مثبت باشند:

الف: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

ب: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا است.

قضیه:

اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آن گاه:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

دقت: عکس قضیه فوق برقرار نیست یعنی اگر:

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ لزوماً سری همگرا نیست (آزمون ها را بررسی می کنیم)

تذکر: با توجه به قضیه فوق اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow$ سری واگرا است.

قضیه: سری همساز - یا سری هارمونیک

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ یک سری واگرا است.

مثال: نوع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ را مشخص کنید.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{واگرا}$$

نکته : سری p- : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ به‌ازای $p>1$ همگرا است.

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ سری واگرا است.

۳) سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ به‌ازای $|q|<1$ همگرا به $\frac{a}{1-q}$ است و به‌ازای $|q|\geq 1$ واگرا است.

قضیه: حذف و اضافه کردن تعداد متناهی جمله از یک سری تأثیری در همگرایی - واگرایی ندارد.

مثال: همگرایی - واگرایی بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}} = ?$$

$$n^2+4n+4 > n^2+4n$$

$$(n+2)^2 > n^2+4n$$

$$\sqrt{(n+2)^2} > \sqrt{n^2+4n}$$

$$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{\sqrt{4n+n^2}}$$

می دانیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ واگراست چون همساز است و از طرفی

حذف یا اضافه کردن تعداد متناهی جمله تأثیری در همگرایی - واگرایی

ندارد $\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$ واگراست

۴

پس طبق آزمون مقایسه چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ واگراست پس

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$ نیز واگراست.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = ? \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

یک سری هندسی $q = \frac{2}{3}$ پس $q < 1$ همگراست

و به $\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$ همگراست.

آزمون نسبت یا دالامبر:

اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات مثبت باشد و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

اگر
$L<1 \longrightarrow$ همگرا
$L>1 \longrightarrow$ واگرا
$L=1 \longrightarrow$ آزمون نتیجه‌ای نمی‌دهد.

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n}{۲^n}$$

$$a_n = \frac{n}{۲^n} \text{ ؛}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{۲^{n+1}}}{\frac{n}{۲^n}} = \lim \frac{(n+1)\,۲^n}{n\,۲^n \cdot ۲}$$

$$= \frac{1}{۲} < 1 \quad \text{همگرا}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n} \qquad a_n = \frac{n!}{5^n}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\dfrac{n!}{5^n}} = \frac{n!(n+1)\,5^n}{n!\,5^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = \infty$$

واگرا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

همگرا

4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$$

$$\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n!}{n!\,(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n^2+3n+2}$$

$$n^2+3n+2 > n^2$$

$$\frac{1}{n^2+3n+2} < \frac{1}{n^2}$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ یک p- سری ($p=2>1$) همگراست

پس $\sum \frac{n!}{(n+2)!}$ همگراست.

آزمون ریشه n ام :

اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات مثبت باشد و

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ و

if $L < 1 \rightarrow$ همگرا

if $L > 1$ واگرا

if $L = 1$ آزمون نتیجه ای نمی دهد

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$$

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \frac{1}{2} < 1$$ همگرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

همگرا

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست چون؛

$$n \geqslant 2$$

؛

$$n(n-1) < n^2$$

$$\frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}$$

پس $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ که از طرفی $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ سری تلسکوپی و همگراست $\Rightarrow$ آزمون مقایسه $\sum \frac{1}{n^2}$ نیز همگراست.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \text{؟}$$

$$n \geqslant 2 \qquad n > \ln n$$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$$

چون $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ همساز - واگرا است $\Leftarrow$

طبق آزمون مقایسه $\sum \frac{1}{\ln n}$ نیز واگرا است.

آزمون مقایسه حدی :

اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ دو سری با جملات مثبت باشد و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C$$

← اگر $C > 0$ آنگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هم نوع اند یعنی یا هردو همگرا یا هردو واگراه

← اگر $C = 0$ و $\sum b_n$ همگرا $\Rightarrow$ $\sum a_n$ همگرا می‌شود.

← اگر $C = \infty$ و $\sum b_n$ واگرا $\Rightarrow$ $\sum a_n$ نیز واگراست.

همگرایی - واگرایی بررسی کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{5n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+1} = \frac{1}{5} \neq 0$$

پس $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{n}{5n^2+1}$ هر دو هم نوع اند

چون $\sum \frac{1}{n}$ واگراست (همساز) $\Leftarrow$ $\sum \frac{n}{5n^2+1}$ واگراست.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{2}} = ؟$$

$$\lim \frac{\frac{\ln n}{n^{2}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \overset{H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = 0$$

چون $C=0$ و $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ که $p=\frac{3}{2}>1$ همگراست پس ؛

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{2}}$ همگراست .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 1 > 0$$

پس هردو هم نوع اند چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست $\Leftarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$ همگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+\sqrt{n}} = \infty$$

∞ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ نیز واگراست $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ نیز واگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+2}{3^n-1} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^n+2}{3^n-1}}{\dfrac{2^n}{3^n}} = 1$$

$c=1>0$ و $\sum \frac{2^n}{3^n}$ همگرا $\left(\frac{2}{3}<1\right) \Leftarrow \sum \frac{2^n+2}{3^n-1}$ همگرا است.

آزمون انتگرال:

یکی دیگر از آزمون هایی که برای سری های مثبت استفاده می شود آزمون انتگرال است. این آزمون برای همگرایی و یا واگرایی یک سری از یک انتگرال نامتعارف استفاده می کند.

قضیه: فرض کنید تابع $f(x)$ به ازای تمام موارد $x \geq 1$ مثبت باشد و نزولی باشد در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ همگراست هرگاه $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ همگرا باشد و واگراست هرگاه این انتگرال واگرا باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ، $f'(x)<0$ آنگاه برای $x \geqslant e$ نزولی است.

$$\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_e^{b} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim \frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_e^{\infty}$$

$$= \frac{\ln^2(\infty)}{2} - \frac{(\ln e)^2}{2} = \infty$$ واگرا $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ واگرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{tg^{-1} n}{n^{2}+1}$$

$f(x) = \frac{tag^{-1} x}{x^{2}+1}$ و $f'(x) < 0$ برای $x \geqslant 1$ پس:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{tag^{-1} x}{x^{2}+1} dx = \lim_{b \to \infty} \frac{(tan^{-1} x)^{2}}{2} \Big|_{1}^{\infty}$$

$$= \frac{(\pi/2)^{2}}{2} - \frac{(\pi/4)^{2}}{2}$$ همگرا

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{tg^{-1} n}{n^{2}+1}$ همگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{csch} x$$

$F(x)=\operatorname{csch} x$ و $f'<0$ برای $x\geq 1$ شرایط آزمون انتگرال دارد.

$$\int_1^{\infty} \operatorname{csch} x\,dx = \lim_{b\to\infty} \operatorname{Ln}\left(\tanh\frac{x}{2}\right)\Big|_1^b$$

$$= \lim \operatorname{Ln}\left(\tanh\frac{b}{2}\right) - \operatorname{Ln}\left(\tanh\frac{1}{2}\right)$$

$$= \operatorname{Ln}\left(\frac{e^{b/2}-e^{-b/2}}{e^{b/2}-e^{-b/2}}\cdot\frac{e^{b/2}}{e^{b/2}}\right) - \operatorname{Ln}\left(\tanh\frac{1}{2}\right) = \text{همگرا}$$

0

$\Rightarrow \sum_{n=1} \operatorname{csch} x$ همگرا

ثابت کنید سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{p}}$ همگراست برای $p>1$

و برای $p\leq 1$ واگراست.

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{p}}$$ و $f'(x)<0$ برای $x\geqslant 2$

$$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{p}}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_{2}^{b}$$

$p>1$ $$\frac{1}{(1-p)(\ln x)^{p-1}}\Bigg|_{2}^{\infty}=$$ همگرا

$$p<1 \quad \frac{1}{(1-p)}(\ln x)^{1-p}\Big]_{۲}^{\infty} = \infty \quad \text{واگرا}$$

$$p=1 \quad \int_{۲}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{1}}\,dx = \ln(\ln x)\Big]_{۲}^{\infty}$$

$$= \ln(\ln(\infty)) - \ln(\ln(۲)) = \underset{\text{واگرا}}{\infty}$$

موفق باشید