دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

انتگرال ناسره :

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^{b} f(x)\,dx$$

درصورتیکه حد فوق موجود باشد ← انتگرال همگرا

و در غیر این صورت ⇐ واگراست.

نوع انتگرال های زیر را مشخص کنید.

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b \to \infty} -e^{-x} \Big|_0^{b} = -e^{-b} + e^{0} = 1$$

همگرا

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{۲}} \xrightarrow[\frac{1}{x}dx=du]{\ln x = u} \int \frac{du}{u^{۲}} = \frac{u^{-۲+۱}}{-۲+۱}$$

$$= \frac{(\ln x)^{-۱}}{-۱} = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{\ln x}\Big]_e^b$$

$$= \frac{-1}{\ln(b)} + \frac{1}{\ln e} = 1 \longrightarrow$$ همگرا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} '' + \int_{0}^{\infty} ''$$

$$\lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx + \lim_{a\to+\infty} \int_{0}^{a} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\lim_{b\to-\infty} \frac{-1}{2(x^2+1)}\Big|_{0}^{b} + \lim_{a\to+\infty} \frac{-1}{2(x^2+1)}\Big|_{0}^{a}$$

$$(0+1/2)+(0+1/2) \rightarrow \text{همگرا}$$

مثال : $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ ثابت کنید $p>1$ همگرا $p\leq 1$ واگرا

$$p>1 \quad \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1-p)\,x^{p-1}}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1-p)\,x^{b-1}} - \frac{1}{1-p}$$

$$= \frac{-1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$ همگرا

$$p=1 \longrightarrow \int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x = \infty$$ واگرا

$$p<1 \quad \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1-p)\,x^{p-1}}\Big|_1^b = \infty$$ واگرا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$$

نوع انتگرال را مشخص کنید.

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$$

$$= \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{0} e^{-(-x)}\,dx + \lim_{a \to +\infty} \int_{0}^{a} e^{-(x)}\,dx$$

$$= \lim_{b \to -\infty} e^{x} \Big]_{b}^{0} + \lim_{a \to \infty} -e^{-x} \Big]_{0}^{a}$$

$$= 1 + 1 = 2$$ همگرا

قضیه: اگر برای $x \geq a$ ، $f(x)$ و $g(x)$ هردو انتگرال پذیر باشد و $0 \leq f(x) \leq g(x)$ آنگاه:

الف) $\int_a^\infty g(x)dx$ همگرا باشد $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز همگرا است.

ب) اگر $\int_a^\infty f(x)dx$ واگرا باشد $\Longrightarrow$ $\int_a^\infty g(x)dx$ نیز واگرا است.

نوع انتگرال های زیر را بدست آورید.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)} = \text{؟}$$

$x \geq 1 \qquad x^2(1+e^x) \geq x^2$

$$\frac{1}{(1+e^x)\,x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

چون $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ همگراست ($= \lim_{b \to \infty} \left. \frac{-1}{x} \right|_1^b = 0 + 1 = 1$)

پس طبق قضیه $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ نیز همگراست.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3} = ?$$

$x \geq 0$

$(x^2+1)^3 \geq (x^2+1)$

$$\frac{1}{(x^2+1)^3} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

چون $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} = \tan^{-1} x \Big]_0^\infty = \pi/2 - 0 \Rightarrow$ همگرا

چون $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}$ همگرا است پس $\Leftarrow \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ نیز همگرا است.

قضیه: فرض کنید به ازای $x \geq a$ ، تابع f معین باشد اگر انتگرال $\int_a^\infty |f(x)|dx$ همگرا باشد آنگاه انتگرال $\int_a^\infty f(x)\, dx$ نیز همگرا است

تذکر: اگر شرایط قضیه فوق برقرار باشد نوع همگرایی $\int_a^\infty f(x)dx$ را همگرایی مطلق می‌گوییم. اما اگر انتگرال $\int_a^\infty f(x)dx$ همگرا باشد ولی انتگرال $\int_a^\infty |f(x)|dx$ واگرا باشد، نوع همگرایی را همگرایی مشروط می‌نامیم.

نوع انتگرال را مشخص کنید

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^3}\,dx$$

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right| = \frac{1}{x^3} \qquad x \geq 1$$

چون $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}$ ($p>1$) همگراست

پس $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1}\Big|_1^\infty$

$= \frac{-1}{2x^2}\Big|_1^\infty = +\frac{1}{2}$ همگراست $\Leftarrow$ $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$ همگراست

$\Leftarrow \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^3}\,dx$ همگرای مطلق است.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{4x^2+1}\,dx = \text{ا}$$ نوع انتگرال

$$\left|\frac{\sin x}{4x^2+1}\right| \leq \frac{1}{4x^2+1}$$

از طرفی

$$\int_0^\infty \frac{1}{4x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

همگراست $\Rightarrow$ $\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{4x^2+1}$ همگرایی مطلق داره.

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin^3 x \, dx$$ نوع انتگرال ؟

$$\int_0^\infty \left| e^{-x} \sin^3 x \right| dx \le \int_0^\infty \left| e^{-x} \right| dx = \int_0^\infty e^{-x}$$

چون $\int_0^\infty e^{-x} \, dx = -e^{-x} \Big|_0^b = 1$ همگراست پس

$\int_0^\infty \left| e^{-x} \sin^3 x \right| dx$ همگرای مطلق است.

دنباله و سری :

دنباله تابعی مانند $f: N \longrightarrow R$ که با نمادهای $\{a_n\}$ یا $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$f(x) = x$

نمایش می دهیم ؛ به a_n جمله عمومی می گوییم .

اگر دنباله a_n در بی نهایت به مقدار عددی برسد ← همگرا

و در غیر این صورت واگرا می گوییم .

مثال : دنباله های زیر را از نظر همگرایی یا واگرایی مشخص کنید .

$\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ $\qquad \lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ $\qquad$ همگرا

$\{(-1)^n\}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ -1 & n \text{ فرد} \end{cases} \to$ واگرا

$\{\tanh x\}$ $\qquad \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1$ همگرا

$\left\{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n\right\}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n = e^{\frac{1}{3}}$ همگرا

$\left\{\dfrac{2n+1}{3n-1}\right\}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3n-1} = \dfrac{2}{3}$ همگرا

تعریف:

عدد k را یک کران پایین برای دنباله a_n می‌گوییم هرگاه:

$$\forall n \in N \qquad a_n \geq k$$

تعریف: عدد d را یک کران بالا برای تابع a_n می‌گوییم هرگاه:

$$\forall n \in N \qquad a_n \leq d$$

تعریف: دنباله a_n را کراندار گوییم هرگاه:

کران بالا و کران پایین داشته باشد.

قضیه: هر دنباله همگرایی کراندار است.

قضیه: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی همگرا و k مقداری ثابت باشد داریم: حد $\{k\}$ برابر k است.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$