دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

* مهم :

نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=\sqrt{3x}$ بیابید که کوتاه‌ترین فاصله را از نقطه $A\left|\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right.$ داشته باشد.

$$A\left|\begin{matrix}x\\ \sqrt{3x}\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right.$$

$$d=AB=\sqrt{(x-5)^2+(\sqrt{3x}-0)^2}$$

$$d'=0 \qquad \frac{2(x-5)+3\cancel{x}}{2\sqrt{(x-5)^2+3x}}=0$$

$$2x-10+3=0 \qquad 2x=7$$

$$x=\frac{7}{2} \rightarrow y=\sqrt{3(7/2)}$$

رسم کنید: $y=\dfrac{-6x+6}{x^2+3}$

$x^2+3\neq 0 \rightarrow$ مجانب قائم ندارد

$D_f=\mathbb{R}$ $\qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-6x+6}{x^2+3}\simeq\dfrac{-6x}{x^2}=\dfrac{-6}{\infty}=0$

مجانب افقی $y=0$

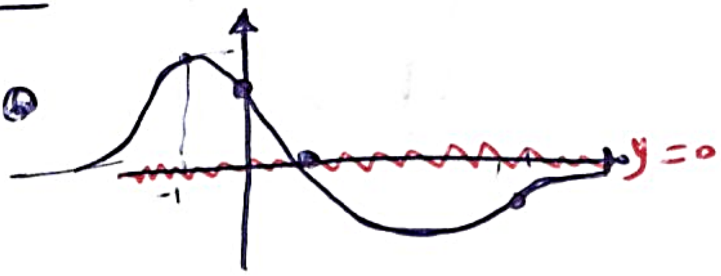
$y'=0 \rightarrow \dfrac{6x^2-12x-18}{(x^2+3)^2}=0$

$6x^2-12x-18=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \rightarrow y=3 \\ x=+3 \rightarrow y=-1 \end{cases}$

تقاطع با محورها

$$\begin{cases} y=0 \longrightarrow -6x+6=0 \Rightarrow x=1 \longrightarrow y=0 \\ x=0 \longrightarrow y=\dfrac{6}{3}=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$-$		$-$		$+$	
y	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
			max						min		



رسم کنید $y = \dfrac{x^2}{x^2-4x+3}$

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0 \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to 1} f = \infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 3} f = \infty$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2-4x+3} = 1 \Longrightarrow y=1$

مجانب

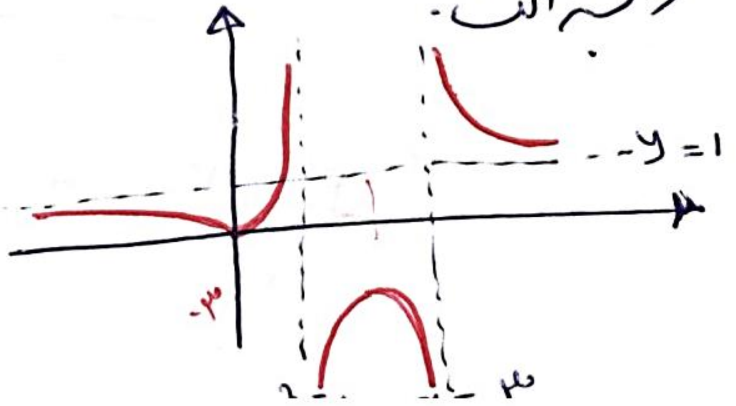
$$y' = \frac{(2x)(x^2-4x+3) - (2x-4)x^2}{(x^2-4x+3)^2} = 0$$

$$-4x^2 + 6x = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = \frac{3}{2} \rightarrow y = -3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	-3	$\searrow$		$\searrow$	1

فقط به صورت ۲

والسته الف.



$$y=\frac{x^2-1}{(x-2)^2}$$ رسم کنید

$D=R-\{2\}$, $x=2$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{(x-2)^2}\simeq x^2/x^2=1$ $y=1$ مجانب افقی

$$y'=\frac{(2x)((x-2)^2)-2(x-2)(x^2-1)}{(x-2)^4}=0$$

$$\frac{2(x-2)(\cancel{x^2}-2x-\cancel{x^2}+1)}{(x-2)^4}=0$$

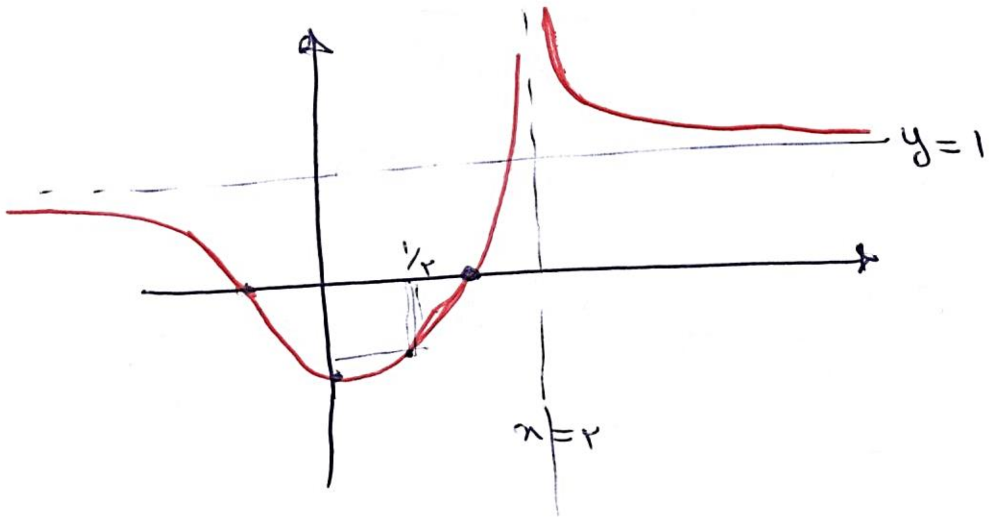
$$y' = 0 \quad -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

تقاطع محورها

$$\begin{cases} y = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ x = 0 \rightarrow y = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		∞
y'		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	$\Vert$	$-$	
y	1		0		$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{3}$ min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

x	$-\infty$		۱-		۰		$\frac{۱}{۲}$		۱		۲		∞
y'		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	‖	$-$	
y	۱		۰		۱/۴-		۱/۳-	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	۱
							min						



طول ساق مثلث متساوی الساقین ۶ است. حداکثر مساحت بیابید.

$$\frac{x}{۲}=\sqrt{۳۶-h^{۲}}$$

$$x=۲\sqrt{۳۶-h^{۲}}$$

$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}x\,h=\frac{۱}{۲}۲\sqrt{۳۶-h^{۲}}\;h$$

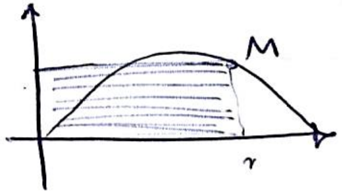
$$S_{\Delta}=\left(\sqrt{۳۶-h^{۲}}\right)(h)$$

$$S'_{\Delta}=\frac{-۲h}{۲\sqrt{۳۶-h^{۲}}}\cdot h+\sqrt{۳۶-h^{۲}}=۰$$

$$\frac{h^{۲}}{\sqrt{۳۶-h^{۲}}}=\sqrt{۳۶-h^{۲}}\Rightarrow h=\sqrt{۱۸}$$

$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}\left(۲\sqrt{۳۶-۱۸}\right)\left(\sqrt{۱۸}\right)=\sim$$

نقطه M در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y=2x-x^2$ قرار دارد. از نقطه M دو عمود بر محورهای مختصات رسم می‌کنیم و مستطیلی می‌سازیم که مبدا مختصات و نقطه M دو رأس آن هستند. مختصات M را طوری بیابید که مساحت این مستطیل بیشترین مقدار را داشته باشد.



M روی منحنی $\left|\begin{array}{l} a \\ 2a-a^2 \end{array}\right.$

$$S_{\square} = a(2a-a^2) = 2a^2-a^3$$

$$S_{\square} = a(۲a - a^{۲}) = ۲a^{۲} - a^{۳}$$

$$S' = ۰ \longrightarrow ۴a - ۳a^{۲} = ۰ \begin{cases} \nearrow a = ۰ \quad \text{غ ق ق} \\ \searrow a = \frac{۴}{۳} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{۴}{۳} \\ b = ۲a - a^{۲} = ۲(۴/۳) - (۴/۳)^{۲} = \frac{۸}{۳} - \frac{۱۶}{۹} = \frac{۸}{۹} \end{cases}$$

$$S_{\square} = \frac{۴}{۳} \cdot \frac{۸}{۹} = \frac{۳۲}{۲۷}$$

مساحت مثلث محدود به محور y ها و خطوط مماس و قائم بر منحنی

$y^2 = 9 - x$ را در نقطه $\left|\begin{matrix}5\\2\end{matrix}\right.$ بیابید.

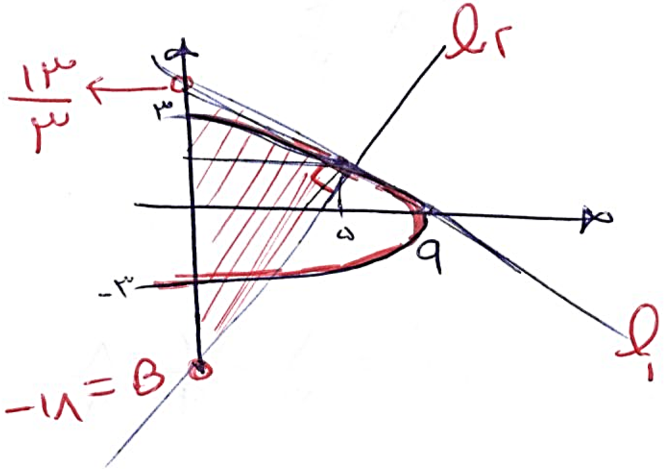
$$y^2 - 9 + x = 0 \qquad y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{-(1)}{2y}$$

شیب مماس $y' = \dfrac{-1}{2y}\Big]_{y=2} = \boxed{\dfrac{-1}{4}}$

شیب قائم $= +4$

خط مماس $\quad y-2=-\frac{1}{4}(x-5) \quad \ell_1$

خط قائم $\quad y-2=+4(x-5) \quad \ell_2$



$a-2=-\frac{1}{4}(-5)$

$\ell_1 \ni \left|\begin{matrix}0\\ a=\frac{13}{4}\end{matrix}\right.$

$\ell_2 \ni \left|\begin{matrix}0\\ b=-18\end{matrix}\right.$

$b-2=+4(-5)$

$b=-18$

$S_\Delta = \frac{1}{2}\times 5\times(\overset{\frac{13}{4}}{\overset{\uparrow}{A}}-\overset{-18}{\overset{\uparrow}{B}}) = \dots$

مشتق تابع در $x=0$ بیابید:

$$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}$$

$$y=\sqrt{x+y} \rightarrow y^{2}=x+y$$

$$y^{2}-x-y=0$$

$$y'=\frac{-(\quad -1\quad)}{(\;2y-1\quad)}=\frac{1}{2y-1}$$

$$x=0 \longrightarrow y=0 \longrightarrow y'(0)=\frac{1}{-1}=\boxed{-1}$$

مقدار a , b را طوری بیابید که تابع در $x=-2$ مشتق پذیر باشد

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+4 & x<-2 \\ 3x+5 & x\geq -2 \end{cases}$$

$$\text{مقدار } f(-2) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = 3(-2)+5=-1$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = a(-2)^2+b(-2)+4 = 4a-2b+4$$

$$f'=\begin{cases} 2ax+b & x<-2 \\ 3 & x>-2 \end{cases}$$

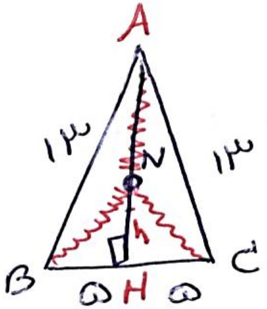
$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = 2a(-2)+b = -4a+b$$

$$\lim_{x\to -2^+} f' = 3$$

۲

$\dots \quad a=-1/4 \ , \ b=2$

نقطه N روی ارتفاع وارد بر مثلث متساوی الساقین قرار دارد، اگر طول قاعده آن 10 cm باشد. و طول ساق هایش ۱۳ باشد اگر L را مجموع فاصله ی نقطه N از سه رأس مثلث باشد کمترین مقدار L را بیابید.



$$13^2 = 25 + AH^2$$

$$AH = 12$$

$NH = h$

$$L = AN + NB + NC$$

$$L = 2\sqrt{h^2+25} + \overset{AN}{\overline{(12-h)}}$$

$$L'(h) = 2\,\frac{2h}{2\sqrt{h^2+25}} - 1 = 0$$

$$\frac{2h}{\sqrt{h^2+25}} = 1 \Rightarrow h^2+25 = 4h^2$$

$$3h^2 = 25$$

$$\boxed{h = \frac{5}{\sqrt{3}}}$$

در L جایگذاری کنید.

۱

معادله‌ی خط قائم بر هذلولی $۴x^۲-y^۲=۳۶$ که با خط $\underbrace{۲x+۵y-۴=۰}_{m=-\frac{۲}{۵}}$ موازی باشد.

شیب مماس $y' = \frac{-F_x}{F_y} = \frac{-۸x}{-۲y}$

$= \frac{۴x}{\sqrt{۴x^۲-۳۶}}$

قائم $m = -\frac{\sqrt{۴x^۲-۳۶}}{۴x} = -\frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{۴x^۲-۳۶}{۱۶x^۲} = \frac{۴}{۲۵}$

$\xrightarrow{x=۵}$ $۴\underbrace{x^۲}_{۲۵}-y^۲=۳۶ \Rightarrow y=۸ \Rightarrow y-۸=\frac{-۲}{۵}(x-۵)$

موفق باشید