درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

مشتق و کاربردها:

تعریف: فرض کنید تابع $y=f(x)$ در یک همسایگی باز نقطه a تعریف شده باشد مشتق تابع f را در نقطه a با نماد $f'(a)$ یا $\frac{df(a)}{dx}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

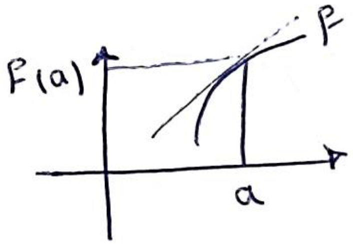
یا

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تذکر: درصورتی که تابع $y=f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر باشد یعنی:

$f'(a)$ وجود داشته باشد آنگاه $f'(a)$ شیب خط مماس بر نمودار تابع

f در نقطه $(a,f(a))$ می باشد.



مشتق راست $f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$; $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ مشتق چپ

مثال: مشتق تابع $y=\dfrac{1}{x+2}$ را در نقطه $x=1$ به کمک تعریف بیابید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{3}}{x-1}=\frac{\frac{3-x-2}{3(x+2)}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-\cancel{1})}{3(x+2)(\cancel{x-1})}=\frac{-1}{3(3}=\frac{-1}{9}$$

مثال : فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

مطلوب است $f'(0)$.

$$f'(0)=\lim \frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=x\sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 \times \text{کراندار} = 0$$

قضیه : مشتق وجود دارد $\Leftrightarrow$ مشتق چپ = مشتق راست .

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در $x=a$ پیوسته است.

دقت: عکس قضیه فوق برقرار نیست به مثال زیر دقت کنید.

مثال: تابع $y=|x|$ در $x=0$ پیوسته است اما در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست زیرا

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=\frac{(-x)-0}{x}=-1$$

$$\neq$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(+x)-0}{x-0}=\frac{x}{x}=1$$

مثال : مشتق $y=\cos x$ در $x=x_0$ بیابید

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{2x_0+h}{2}\right)}{h}=-\sin x_0$$

$2 \cdot h/2$

مثال : $f'(1)$ را بیابید.

$$f(x) = x + (x-1)\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x + (x-1)\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(1 + \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)}{x-1}$$

$$= 1 + \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

مثال: مشتق بگیرید $f'(0)$,

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-100) - 0}{x}$$

$$= 100!$$

روابط مشتق گیری :

ده $\leftarrow (a^u)' = u' a^u \ln a$

۱) $(a)' = 0$

۲) $(u^n)' = n u^{n-1} u'$

۳) $(x^n)' = n x^{n-1}$

۴) $(\cos u)' = -u' \sin u$

۵) $(\sin u)' = u' \cos u$

۶) $(\tan u)' = u' (1 + \tan^2 u) = u' \sec^2 u$

۷) $(\cot u)' = -u' (1 + \cot^2 u) = -u' \csc^2 u$

۸) $(\sec(u))' = u' \sec u \tan u$

۹) $(\csc u)' = -u' \csc u \cot u$

۱۰) $(fg)' = f'g + g'f$

۱۱) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^{۲}}$

۱۲) $(e^{u})' = u'e^{u}$

۱۵) $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$

۱۳) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

۱۴) $(\operatorname{Arc}\sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^{۲}}}$

مثال: فرض کنید $f'(۴) = ۳$ و $g'(۴) = ۷$ و $g(۴) = ۴$, $g(x) \neq ۴$

به ازای $x \neq ۴$ بیابید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{f(x) - f(۴)}{g(x) - ۴}$

$$= \lim \frac{\dfrac{f(x) - ۴}{x - ۴}}{\dfrac{g(x) - ۴}{x - ۴}} = \frac{f'(۴)}{g'(۴)} = \frac{۳}{۷}$$

$(x) \neq ۴ \,,\, g(۴)=۴ \,,\, g'(۴)=۷ \,,\, f'(۴)=۳$

ب) $\lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{f(g(x)) - f(۴)}{x - ۴}$

$$= \frac{f(g(x)) - f(۴)}{x - ۴} \times \frac{g(x) - g(۴)}{g(x) - g(۴)} =$$

$$= \frac{f(g(x)) - f(g(۴))}{g(x) - g(۴)} \cdot \frac{g(x) - g(۴)}{x - ۴}$$

$$= f'(g(۴)) \times g'(۴) = f'(۴) \times g'(۴)$$

$$= ۳ \times ۷ = ۲۱$$

۱۵) $(\mathrm{Arccos}\,u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^{۲}}}$

۱۶) $(\mathrm{Arctan}\,u)' = \dfrac{u'}{1+u^{۲}}$

۱۷) $(\mathrm{Arccot}\,u)' = \dfrac{-u'}{1+u^{۲}}$

۱۸) $(\sinh u)' = +u' \cosh u$

۱۹) $(\cosh u)' = +u' \sinh u$

۲۰) $(\tanh u)' = u'(1-\tanh^{۲} u)$

۲۱) $(\coth u)' = u'(1-\coth^{۲} u)$

$$(f(u))' = u' f'(u)$$

مثال: مشتق $\sin^{-1}(3x^2-1) = ?$

$$\left(\sin^{-1}(3x^2-1)\right)' = \frac{6x}{\sqrt{1-(3x^2-1)^2}}$$

مشتق پارامتری :

اگر داشته باشیم $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ آنگاه برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$ به صورت

زیر عمل می کنیم.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال: اگر $\begin{cases} x = t+t^{2} \\ y = t+t^{3} \end{cases}$ ؛ y' و y'' را بیابید.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1+3t^{2}}{1+2t}$$

$$y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+3t^{2}}{1+2t}\right)'_{t}}{1+2t} = \cdots$$

مشتق تابع معکوس:

فرض کنید f تابعی یک به یک و مشتق آن در $x=a$ مخالف صفر باشد و f^{-1} تابع معکوس f باشد و نقطه $(a,b)\in f$

$f(a)=b$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}(b)\right)' = \frac{1}{f'(a)}$$

مثال: تابع به معادله $f(x)=x^2-4x+7$ با دامنه $[2,\infty)$ مفروض

است مطلوب است محاسبه $(f^{-1})'(\underset{y}{7})=?$

$$x^2-4x+7=7$$

$x=0$ غ ق ق $\notin D$

$x=4$

$$(f^{-1}(7))' = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{2(4)-4} = \frac{1}{4}$$

مشتق‌گیری ضمنی :

اگر در تابعی نتوان y را صریحاً برحسب x نوشت به آن تابع ضمنی می‌گوییم. برای این کار از طرفین معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم.

و به طور خلاصه ⟵ ابتدا تمامی جملات را یک طرف آورده و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$y' = \frac{-F'_x}{F'_y}$$

F'_x یعنی مشتق‌گیری نسبت به x در این حالت y عدد است.

F'_y یعنی مشتق‌گیری نسبت به y در این حالت x عدد است.

حل کنید: $y' = ?$

$$x\sin y + x^2 = \tan^{-1}(y)$$

$$\sin y + x y' \cos y + 2x = \frac{y'}{1+y^2}$$

$$x y' \cos y - \frac{y'}{1+y^2} = -2x - \sin y$$

$$y'\left(x\cos y - \frac{1}{1+y^2}\right) = -2x - \sin y$$

$$y' = \frac{-2x - \sin y}{x\cos y - \frac{1}{1+y^2}}$$

راه دوم :

$$x\sin y + x^2 - tg^{-1} y = 0$$

$$y' = \frac{-f'_x}{f'_y} =$$

$$= \frac{-(\sin y + 2x)}{\left(x\cos y - \frac{1}{1+y^2}\right)}$$

مثال: با فرض $x^2 - xy + y^3 = 1$ مقدار $y'(1)$ را محاسبه کنید.

$$x^2 - xy + y^3 - 1 = 0$$

$$y' = \frac{-(2x - y)}{(-x + 3y^2)} =$$

$$x = 1 \rightarrow \cancel{1} - y + y^3 \cancel{-1} = 0$$

$$y(y^2 - 1) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[y=0]{x=1} y'(1) = 2 \quad \text{و} \quad \xrightarrow[y=1]{x=1} y'(1) = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \xrightarrow[y=-1]{x=1} y'(1) = \frac{-3}{2}$$

مثال: مطلوب است محاسبه $\frac{dy}{dx}$ در صورتیکه داشته باشیم:

$$x^y - y^x + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \cos(xy)$$

$$f(x,y) = x^y - y^x + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \cos(xy) = 0$$

$$y' = \frac{-f'_x}{f'_y} = \frac{-\left(yx^{y-1} - y^x \ln y - \frac{\frac{-y}{x^2}}{1+(y/x)^2} + y\sin xy\right.}{\left(x^y \ln x - xy^{x-1} + \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} + x\sin xy\right.}$$

مشتق لگاریتمی :

$$y = x^x$$

از طرفین $\ln$ می‌گیریم :

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1$$

$$\boxed{y' = (\ln x + 1)\, x^x}$$

$$y = \frac{(x+1)^3 (6x-1)^4}{(5x-1)^8}$$

$$\ln y = 3\ln(x+1) + 4\ln(6x-1) - 8\ln(5x-1)$$

$$\frac{y'}{y} = \underbrace{3\,\frac{1}{x+1} + 4\,\frac{6}{6x-1} - 8\,\frac{5}{5x-1}}_{*}$$

$$y' = * \, y$$

مشتق انتگرال

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right)' =$$

$$v'(x)\,f\left(v(x)\right) - u'(x)\,f\left(u(x)\right)$$

$$\left(\int_{۵x}^{x^۲} \sin t\,dt\right)' =$$

$$= (۲x)\left(\sin(x^۲)\right) - ۵\,\sin(۵x)$$

$$\left(\int_{0}^{x^{\tan x}} ۲t\,dt \right)' = ?$$

ابتدا $\left(x^{\tan x} \right)'$ را محاسبه می‌کنیم

$$y = x^{\tan x}$$

$$\ln y = \tan x \ln x \rightarrow \frac{y'}{y} = (1 + tg^{۲} x) \ln x + \frac{1}{x} \tan x$$

٤

$$\frac{y'}{y} = (1+tg^2 x)\, Ln x + \frac{\tan x}{x}$$

$$y' = \underbrace{\overset{x^{\tan x}}{y}\left((1+tg^2 x)\, Ln x + \frac{\tan x}{x}\right)}_{\star}$$

$$\left(\int_0^{x^{\tan x}} \sqrt{t}\, dt\right)' = \star \times \sqrt{\left(x^{\tan x}\right)}$$

مثال: $\begin{cases} x = t - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$ مطلوب است $\frac{dy}{dx}$ در $t=1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1-\cos t}{1+\sin t}\Big]_{t=1}$$

$$= \frac{1-\cos(1)}{1+\sin(1)}$$

*به ازای چه مقادیری از a و b و c تابع زیر در $x=1$ مشتق مرتبه دوم دارد

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & x\le 1 \\ ax^2+bx+c & x>1 \end{cases}$$

ابتدا باید بررسی کنیم که f در $x=1$ پیوسته است.

$$\lim_{x\to 1^+} ax^2+bx+c = a+b+c$$

$$\text{مقدار تابع} = \lim_{x\to 1^-} x^3 = 1$$

پیوسته است هرگاه:

مقدار تابع = حد چپ = حد راست

$$\boxed{a+b+c=1} \quad (1)$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x<1 \\ 2ax+b & x>1 \end{cases}$$

در $x=1$ باید مشتق راست و چپ را محاسبه کرده و یکی کنیم.

مشتق دارد هرگاه: مشتق چپ = مشتق راست.

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} ۲ax+b = ۲a+b$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} ۳x^۲ = ۳$$

پس

$$\boxed{۲a+b=۳} \quad (۲)$$

$$f''(x) = \begin{cases} ۶x & x<1 \\ ۲a & x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f''(x) = \lim_{x \to 1^+} ۲a = ۲a$$

$$\lim_{x \to 1^-} f''(x) = \lim_{x \to 1^-} ۶x = ۶$$

$$\longrightarrow ۲a = ۶ \longrightarrow \boxed{a = ۳} \quad ۳$$

از طرفی

$$۲a + b = ۳ \longrightarrow b = -۳$$

$$a + b + c = ۱ \longrightarrow c = ۱$$

تعریف :

$f'(x) \geq 0 \longrightarrow$ تابع f صعودی

$f'(x) > 0 \longrightarrow$ تابع صعودی اکید

$f'(x) \leq 0 \longrightarrow$ تابع نزولی

$f'(x) < 0 \longrightarrow$ تابع نزولی اکید

قضیه : هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید $\Longrightarrow$ 1-1 ✓

مثال: یک به یک بودن تابع $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ را بررسی کنید:

$$f'(x) = \frac{(1)(\sqrt{x^2+1}) - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot x}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

صعودی اکید $\leftarrow$ ۱-۱ است.

نشان دهید $x \geq \sin x \quad \forall x \geq 0$

$g(x) = x - \sin x$

که g یک تابع صعودی است پس

$g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$

پس از طرفی طبق تعریف تابع صعودی داریم:

$$x \geqslant 0 \longrightarrow f(x) \geqslant f(0)$$

$$f(0) = 0 - \sin 0 = 0$$

$$x - \sin x \geqslant 0 \implies \boxed{x \geqslant \sin x}$$

تعریف: دیفرانسیل $y = f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dy = f'(x)\, dx$$

موفق باشید